

**FORSCHUNGSBERICHTE DES
INSTITUTS FÜR BETRIEBSWIRTSCHAFTSLEHRE
DER UNIVERSITÄT WIEN**

**TOURENPLANUNG
MIT DEM ANT SYSTEM**

Bernd Bullheimer Christine Strauß

Lehrstuhl für Produktion und Logistik
Forschungsbericht No. 6
November 1996



**INSTITUT FÜR BETRIEBSWIRTSCHAFTSLEHRE DER UNIVERSITÄT WIEN
BRÜNNERSTRASSE 72
A-1210 WIEN**

1 Einführung

Das Ant System ist ein neues Verfahren in der Klasse der sog. *Meta-* oder *general purpose Heuristiken*, die insbesondere für komplexe kombinatorische Optimierungsprobleme eingesetzt werden. Zu den bekanntesten dieser Verfahren gehören Simulated Annealing (vgl. z.B. [15]), Tabu Search (vgl. z.B. [12], [13]), Neuronale Netze (vgl. z.B. [14]) und verschiedene Varianten, die unter dem Begriff “Evolutionäre Algorithmen” (vgl. z.B. [19]) zusammengefaßt werden.

Das Tourenplanungsproblem ist ein solches komplexes Problem der kombinatorischen Optimierung, zu dessen Lösung seit vielen Jahren sowohl problembezogene Methoden (vgl. [3], [11]) als auch general purpose Verfahren wie Tabu Search (vgl. z.B. [9], [20], [22]), Simulated Annealing (vgl. z.B. [20]), genetische Algorithmen (vgl. z.B. [16]) und Neuronale Netze (vgl. z.B. [10]) Verwendung finden.

Der vorliegende Beitrag zeigt die Anwendung des Ant Systems auf das mengen- und streckenmäßig beschränkte Standardtoursplanungsproblem mit einem Depot und unbeschränktem, homogenem Fuhrpark. Dabei wird eingangs die Grundidee des Ant Systems vorgestellt und am *Traveling Salesman Problem (TSP)* verdeutlicht. Danach wird die Adaption des Verfahrens erst für das nur mengenmäßig beschränkte, dann für das auch streckenmäßig beschränkte *Vehicle Routing Problem (VRP)* erläutert. Ausgehend von einer “Basisversion” des adaptierten Verfahrens werden schrittweise Verbesserungen gezeigt. So gelingt es durch die Hybridisierung des Ant Systems mit dem *2-opt-Verfahren* die Qualität der Ergebnisse erheblich zu steigern. Durch Einbindung problemspezifischer Eigenschaften in den Verfahrensablauf kann das gute Lösungsverhalten weiter verbessert werden. Die Eignung des Verfahrens zur Lösung von Tourenplanungsproblemen wird dabei anhand unterschiedlich strukturierter Aufgabenstellungen (gleichverteiltes 50-Städte-Problem und geclustertes 100-Städte-Problem) aus der Literatur [2] verdeutlicht.

2 Das Ant System

2.1 Grundidee

Mit Ausnahme des Tabu Search orientieren sich alle oben genannten Verfahren an einem Vorbild aus der Natur. Auch das Ant System, das vor kurzem von Dorigo entwickelt wurde (vgl. [7], [8]), basiert auf einem in der Natur beobachtbaren Phänomen. Es simuliert eine Ameisenkolonie, die als Gemeinschaft eine zu lösende Aufgabe (wie etwa die Bestimmung des kürzesten Weges zwischen Nest und Futterstelle) meistert, obwohl die einzelne Ameise, da nahezu blind, an der Aufgabe wahrscheinlich scheitern würde. Es hat sich herausgestellt, daß Ameisen eine Pheromonspur hinterlassen, die von anderen Ameisen wahrgenommen wird und diese veranlaßt, der Spur zu folgen. Trifft eine Ameise, die sich zunächst völlig zufällig bewegt, auf eine solche Spur, wird sie ihr mit großer Wahrscheinlichkeit folgen. Dadurch wird die Spur verstärkt und immer mehr Ameisen folgen dieser Spur. Das folgende Beispiel (vgl. [8]) zeigt, wie durch diesen sich selbst verstärkenden Vorgang kurze Pfade im Zeitablauf ermittelt werden.

Angenommen die Ameisen pendeln zwischen Futterstelle A und Nest E hin und her, und 30 Ameisen verlassen zu jedem Zeitpunkt das Nest bzw. die Futterstelle (vgl. Abbildung 1). Pro Zeiteinheit legen sie dabei eine Längeneinheit des Weges zurück. Plötzlich wird nun der Weg, den die Ameisen üblicherweise gehen ($ABDE$) durch ein Hindernis unpassierbar, und es bleiben lediglich die alternativen Wege über C (mit einer Gesamtlänge von 3 LE) bzw. über F (mit einer Gesamtlänge von 4 LE). Seien 30 Ameisen im Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt B (und 30 in D). Da diese Ameisen keine Pheromonspur vorfinden, an der sie sich orientieren können, werden sie sich zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) für eine der beiden Alternativen entscheiden. Demnach werden 15 Tiere den Weg über C und 15 den Weg über F wählen. Die nächsten 30 Ameisen, die sich im Zeitpunkt $t = 1$ in B (bzw. D) befinden, können sich an bereits vorhandenen Pheromonspuren orientieren, wobei die Spur auf dem Weg BCD die doppelte Intensität von jener auf dem Weg BFD hat. Das liegt daran, daß dieser Weg mittlerweile von 30 Ameisen (15 von B nach D und 15 entgegengesetzt) benutzt wurde, während den anderen, längeren Weg von B nach F bisher nur 15 Ameisen gegangen sind. Daher werden sich jetzt 20 Ameisen für BCD und 10 für BFD entscheiden (bzw. dementsprechend im Punkt D 20 für DCB und 10 für DFB). Dadurch wird die Spur auf dem kürzeren der beiden Wege erneut überpropor-

tional verstärkt. Der beschriebene Vorgang wiederholt sich entsprechend zu jedem Zeitpunkt und führt zu einer weiteren Verstärkung der Spurlintensität. Dieses Beispiel verdeutlicht den Übergang von rein zufälligem zu *erlerntem* Verhalten.

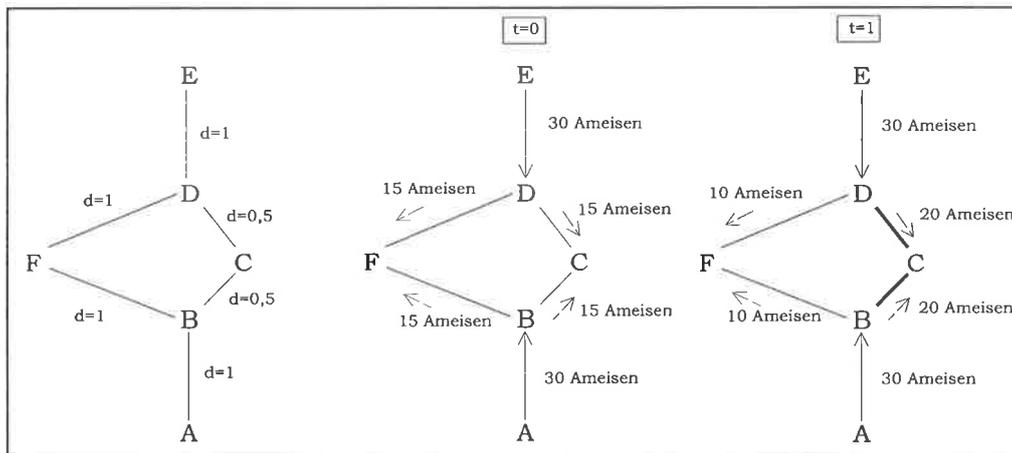


Abbildung 1: Illustration des beschriebenen Beispiels (Quelle: [8])

Die künstlichen Ameisen des Ant Systems verhalten sich ähnlich. Sie unterscheiden sich von ihren natürlichen Vorbildern jedoch insofern, als sie einerseits sehr wohl "sehen" können, also Informationen über ihre Umgebung haben und diese auch nutzen, wodurch sie sich zusätzlich zum eingangs beschriebenen Lernvorgang auch noch *greedy* verhalten können. Andererseits benötigen sie bei bestimmten Fragestellungen ein gutes "Gedächtnis", mit dessen Hilfe garantiert wird, daß nur zulässige Lösungen generiert werden.

Im folgenden wird der Ant System Algorithmus anhand des Problems des Handlungsreisenden (TSP) beschrieben.

2.2 Ant System Algorithmus am Beispiel des TSP

Gegeben sei ein n -Städte-Traveling-Salesman-Problem mit Distanzen d_{ij} . Zunächst werden die Ameisen auf die Städte verteilt, und jede Ameise entscheidet, welche Stadt sie von dort als nächste auf ihrem Weg besuchen wird. Zu Beginn einer Iteration kommen alle Städte außer jener, in der sie sich befindet, in Frage. Da jede Ameise jede Stadt genau einmal besuchen muß,

werden Informationen über den von ihr bisher zurückgelegten Weg gespeichert, wofür das "Gedächtnis" benötigt wird.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie eine bestimmte Stadt auswählt, ist umso größer, je stärker die Intensität der Spur dorthin ist¹ und je kürzer die Entfernung zu dieser Stadt ist². Formal läßt sich die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl der Stadt j als Nachfolger der Stadt i so beschreiben:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta} & \text{falls } j \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } \eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

mit

- τ_{ij} Intensität der Spur zwischen den Städten i und j
- α Parameter zur Regulierung des Einflusses von τ_{ij}
- η_{ij} Erkennbarkeit (Visibility) der Stadt j von der Stadt i aus
- β Parameter zur Regulierung des Einflusses von η_{ij}
- Ω Menge der Städte, die noch nicht besucht wurden
- d_{ij} Distanz zwischen den Städten i und j

Dieser Auswahlvorgang wird so oft wiederholt, bis alle Ameisen eine vollständige Rundreise gemacht haben, wobei in jedem Schritt der Iteration t die Menge der zu besuchenden Städte immer kleiner wird, bis nur noch eine Stadt übrig ist, die dann mit der Wahrscheinlichkeit $p_{ij} = 1$ ausgewählt werden muß. Für jede Ameise wird die Länge der von ihr absolvierten Rundreise bestimmt und die beste Lösung wird gespeichert.

Schließlich werden die Intensitätswerte der Spur für jede Kante folgendermaßen aktualisiert: Jede Ameise hinterläßt auf der von ihr gewählten Rundreise eine konstante Pheromonmenge Q , d.h. je kürzer diese Rundreise ist, desto mehr Pheromon pro Längeneinheit wird sie hinterlassen. In Analogie zur Natur, in der ein Teil der Pheromonspur verdunstet, wird die bereits vorhandene Spur um einen bestimmten Anteil $(1 - \rho)$ verringert, bevor die

¹Hierauf basiert das *erlernte* Verhalten. Es wird mit dem Parameter α reguliert.

²Hierauf basiert das *greedy* Verhalten. Es wird mit dem Parameter β reguliert.

neue Spur gelegt wird. Diese Maßnahme soll vorzeitige Konvergenz verhindern und wird mit dem Parameter ρ reguliert. Am Ende der Iteration t wird der Wert des verbliebenen Anteils ρ der Spur um die Summe der Intensitäten der hinterlassenen Spuren aller Ameisen erhöht. Auf Basis dieser aktualisierten Spurwerte kann eine neue Iteration $t + 1$ durchgeführt werden. Formal sieht die Aktualisierung der Spurwerte τ_{ij} wie folgt aus:

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}$$

$$\text{mit } \Delta\tau_{ij} = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k \text{ und } \Delta\tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{falls die Ameise } k \text{ die} \\ & \text{Kante } (i, j) \text{ benutzt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

t	Iterationenzähler
$\rho \in [0, 1]$	Parameter zur Regulierung der Abschwächung von τ_{ij}
$\Delta\tau_{ij}$	Gesamtveränderung der Spurintensität der Kante (i, j)
m	Anzahl der Ameisen
$\Delta\tau_{ij}^k$	Veränderung der Spurintensität der Kante (i, j) durch die Ameise k
Q	Gesamtmenge Pheromon, die eine Ameise pro Rundreise hinterläßt
L_k	Länge der Rundreise der Ameise k

Der folgende Abschnitt zeigt die zur Anwendung auf das Tourenplanungsproblem notwendigen Modifikationen im Ant System Algorithmus.

3 Adaption des Ant Systems für das VRP

Das TSP und das VRP stehen in engem Zusammenhang, da sich das VRP, sobald die zu besuchenden Kunden einzelnen Touren zugeordnet sind, auf die Lösung mehrerer TSP reduziert. Aus diesem Grund erscheint die Anwendung des Ant Systems auf diese Problemklasse sinnvoll.

3.1 VRP mit Mengenbeschränkung

Um mit Hilfe des Ant Systems gute Lösungen für das mengenmäßig beschränkte Standardtoursplanungsproblem mit einem Depot und unbe-

schränktem, homogenem Fuhrpark zu generieren, müssen einige Modifikationen vorgenommen werden.

Ausgehend von der Grundidee des Verfahrens, daß künstliche Ameisen wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, einen möglichst kurzen Weg zwischen gegebenen Städten suchen, die sie genau einmal besuchen müssen, wird für das VRP eine weitere Bedingung eingeführt. Eine Stadt (ein Kunde) ist genau dann ein zulässiger Auswahlkandidat, wenn sie noch nicht besucht wurde und gleichzeitig die noch vorhandene Kapazität der Tour für den Besuch dieser Stadt (dieses Kunden) ausreicht. Daher ist das Depot (Stadt 0) in jedem Schritt Kandidat für die als nächste zu besuchende Stadt und muß gewählt werden, wenn die Kapazität für den Besuch eines weiteren Kunden nicht mehr ausreicht. Aus diesem Grund darf das Depot in jeder Iteration mehrfach besucht werden.

Sei $\Omega = \{\text{Städte, die noch nicht besucht wurden und für die noch genügend Kapazität vorhanden ist}\} \cup \{\text{Depot}\}$, dann muß sich die künstliche Ameise demnach für eine Stadt $j \in \Omega$ entscheiden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Stadt ausgewählt wird, hängt nach wie vor davon ab, wie intensiv die Spur ist, die dorthin führt, und wie groß die Entfernung dieser Stadt vom momentanen Standpunkt der Ameise ist. Das Ausmaß des Einflusses dieser beiden Größen wird durch die Parameter α und β geregelt (vgl. Abschnitt 2.2).

Im VRP verringert sich in Analogie zum TSP mit jedem Schritt einer Iteration die Menge der Städte, aus denen die einzelne Ameise auswählen kann, bis sie schließlich in der letzten besuchten Stadt mit Wahrscheinlichkeit $p_{i0} = 1$ den Rückweg zum Depot wählt. Auf diese Weise generiert jede Ameise einen kompletten Tourenplan. Nach Ermittlung der Gesamtlänge jedes einzelnen Tourenplans wird die beste Lösung gespeichert. Vor der nächsten Iteration werden die Spurintensitäten, wie in Abschnitt 2.2 dargestellt, aktualisiert. Im Gegensatz zur TSP-Anwendung bezeichnet L_k hier nicht die Länge der Rundreise, sondern die Gesamtlänge des von der Ameise k gefundenen Tourenplans.

3.2 VRP mit Mengen- und Streckenbeschränkung

Der in Abschnitt 3.1 beschriebene Algorithmus läßt sich dahingehend erweitern, daß neben der mengenmäßigen auch eine streckenmäßige Beschränkung berücksichtigt werden kann. Zu diesem Zweck muß Ω , die Menge der Städte, aus denen die nächste zu besuchende Stadt ausgewählt wird, in der Form

modifiziert werden, daß zusätzlich beachtet wird, ob die maximal zulässige Dauer einer Tour durch den Besuch einer weiteren Stadt überschritten wird³. Die Streckenrestriktion lautet formal:

$$T_i + d_{ij} + w_j + d_{j0} \leq T$$

mit

T_i	Dauer der Tour bis einschließlich Kunde i
w_j	Verweildauer beim Kunden j
d_{j0}	Dauer für den Rückweg vom Kunden j zum Depot
T	maximal zulässige Tourdauer

Eine Stadt j wird also nur dann als nächste zu besuchende Stadt selektiert, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- Die Stadt j wurde noch nicht besucht (mit Ausnahme des Depots).
- Die Restkapazität der Tour reicht für den Besuch der Stadt j aus.
- Durch den zusätzlichen Besuch der Stadt j , wird die zulässige Gesamtdauer einer Tour, vermindert um die Dauer der Rückfahrt von der Stadt j zum Depot, nicht überschritten.

Diese zusätzliche Beschränkung der Auswahl der als nächstes zu besuchenden Stadt kann dazu führen, daß öfter das Depot ausgewählt werden muß. Das hat zur Folge, daß im Gegensatz zum nur mengenmäßig beschränkten Fall mehrere, aber kürzere Touren gebildet werden.

Bevor Ergebnisse der Anwendung des vorgestellten Ant System Algorithmus auf unterschiedliche Problemvarianten des VRP anhand von Literaturbeispielen präsentiert werden, müssen einige Details des implementierten Verfahrens wie etwa die Verwendung von sog. "Elite-Ameisen" und die Parametereinstellung näher diskutiert werden.

³In Problemstellungen dieser Art ergibt sich die Dauer einer Tour aus der Summe der Distanzen zwischen den Kunden (es wird angenommen, die Fahrzeit sei proportional zur Fahrstrecke), einer (i.d.R. konstanten) Service- bzw. Wartezeit bei jedem Kunden sowie den Distanzen zwischen Depot und erstem bzw. letztem Kunden.

3.3 Konfiguration des Verfahrens

Bei der Anwendung des Ant Systems auf das VRP wurde zum Teil auf Erkenntnisse, die bei Untersuchungen am TSP gewonnen wurden, zurückgegriffen⁴. So hat sich herausgestellt, daß die Anzahl der Ameisen gleich der Anzahl der Städte im TSP gewählt werden sollte. Gleichzeitig erwies es sich als vorteilhaft, daß jede künstliche Ameise ihre Rundreise in einer anderen Stadt beginnt. Für die Adaption auf das VRP bedeutet das, daß die Anzahl der Ameisen der Anzahl der Kunden entspricht, und zu Beginn jeder Iteration eine Ameise in jedem Kundenort plaziert wird. Ferner hat sich die Größenordnung der Pheromonmenge bereits beim TSP als unwesentlich erwiesen und wurde deshalb für die gesamte Untersuchung des VRP auf $Q = 100$ fixiert.

Um einen Eindruck über die Qualität der mit Hilfe des Ant Systems generierten Lösungen zu erhalten, wurden einige Versuche mit verschiedenen Parametereinstellungen unternommen⁵. Es zeigte sich, daß die Wahl der Parameter $\alpha = 1$, $\beta = 5$ und $\rho = 0.75$ zu guten Ergebnissen führt. Da diese Einstellungen im Einklang mit den am TSP gemachten Erfahrungen stehen (vgl. [8]), wurden sie für den weiteren Gang der Untersuchung beibehalten.

Durch den Einsatz sog. "Elite-Ameisen" konnte die Qualität der Ergebnisse im TSP verbessert werden⁶, daher wurde diese Idee bei der Anwendung auf das VRP übernommen. Das Konzept der Elite-Ameisen sieht vor, nach jeder Iteration jene Kanten, die zur besten bisher gefundenen Lösung gehören, besonders zu markieren. Im Zuge der Aktualisierung der Pheromonwerte (vgl. Abschnitt 2.2) werden sie so behandelt, als hätte eine bestimmte Anzahl Ameisen, nämlich Elite-Ameisen, diese Kanten benutzt. Da es durchaus denkbar ist, daß einige dieser Kanten Teil der optimalen Lösung sind, soll auf diese Weise erreicht werden, daß die weitere Suche zielgerichtet erfolgt. Die Aktualisierung der Spurintensitäten ergibt sich demnach gemäß folgender Vorschrift:

⁴Bei diesen Erkenntnissen handelt es sich um die Ergebnisse der Arbeit von Dorigo et al. [8] sowie eigener Untersuchungen.

⁵Bei der Implementierung des Verfahrens wurde der Ermittlung von möglichst guten Parametereinstellungen aufgrund beschränkter Rechnerkapazitäten nur begrenzte Aufmerksamkeit geschenkt.

⁶Vgl. [8] S.36.

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij} + \sigma\Delta\tau_{ij}^*$$

$$\text{mit } \Delta\tau_{ij} = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k \text{ und } \Delta\tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{falls die Ameise } k \text{ die} \\ & \text{Kante } (i, j) \text{ benutzt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } \Delta\tau_{ij}^* = \begin{cases} \frac{Q}{L^*} & \text{falls die Kante } (i, j) \text{ zur besten} \\ & \text{bisher gefundenen Lösung gehört} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

- σ Anzahl der Elite-Ameisen
- $\Delta\tau_{ij}^*$ Veränderung der Spurintensität der Kante (i, j) durch die Elite-Ameisen
- L^* Gesamtlänge des bisher besten Tourenplans

Der Einsatz von Elite-Ameisen in der hier beschriebenen Form konnte auch beim VRP zu einer Verbesserung der Ergebnisse beitragen. Daher wurde diese Strategie in allen Testläufen angewandt. Die Anzahl der Elite-Ameisen wurde entsprechend der Anzahl der Kundenorte und damit auch der Anzahl der 'normalen' Ameisen gewählt.

4 Ergebnisse

Im folgenden wird die Qualität des VRP-adaptierten Ant Systems anhand von Literaturbeispielen und deren Lösungen⁷ analysiert. Es handelt sich dabei um ein 50-Städte-Problem, dessen Kundenorte mit Hilfe von gleichverteilten Zufallszahlen generiert wurden sowie ein geclustertes 100-Städte-Problem. Für beide Probleme wird sowohl das nur mengenmäßig beschränkte als auch das mengen- und streckenmäßig beschränkte Problem betrachtet, so daß der Ant System Algorithmus tatsächlich auf vier verschiedene Probleme

⁷Bei diesen Lösungen handelt es sich um die besten veröffentlichten Lösungen, wobei die Optimalität nur für einige belegt ist. Im folgenden wird auf eine diesbezügliche Unterscheidung verzichtet.

angewendet wird⁸. Um dabei eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu erreichen, wurden in jeder der folgenden Testreihen insgesamt 30 Läufe mit jeweils 5000 Evaluierungen durchgeführt. Die 5000 Evaluierungen ergeben sich aus 100 Iterationen mit 50 Ameisen im 50-Städte-Problem bzw. 50 Iterationen mit 100 Ameisen im 100-Städte-Problem.

4.1 Anwendung des Ant Systems

Das 50-Städte-Problem konnte in beiden Varianten vom Ant System Algorithmus lediglich zufriedenstellend gelöst werden. In der nur mengenmäßig beschränkten Situation (Problem 1) wurde der optimale Zielfunktionswert im Durchschnitt um 15.85% überschritten, und die beste gefundene Lösung lag 10.06% über dem Optimum. Die zusätzliche Streckenrestriktion (Problem 6) änderte wenig an diesen ersten Ergebnissen. Auch hier lagen die gefundenen Lösungen um durchschnittlich 14.69% über dem kürzesten Tourenplan, und die beste gefundene Lösung war um 11.26% länger.

Bessere Resultate erzielte der Ant System Algorithmus bei der praxisnahen Situation des geclusterten 100-Städte-Problems, für die er sich besonders zu eignen scheint. Hier konnte ein durchschnittliches Überschreiten des optimalen Zielfunktionswertes um ca. 9% und im besten Fall um ca. 7% erreicht werden. Auch diese Resultate ergaben sich unabhängig von der zusätzlichen Streckenbeschränkung. Abbildung 2 verdeutlicht exemplarisch das über 30 Läufe gemittelte Lernverhalten der Ameisen für das Problem 12 sowie die jeweils beste und schlechteste Lösung.

Der nächste Abschnitt beschreibt, wie die Qualität dieser durchaus vielversprechenden Ergebnisse durch Implementation eines lokalen Verbesserungsverfahrens gesteigert werden konnte.

4.2 Hybridisierung des Ant Systems

Unter Hybridisierung wird allgemein die Kombination der Ideen zweier, vom Grundsatz her verschiedener Lösungsmethoden in einem Verfahren verstanden. Dieses Vorgehen hat sich bereits mehrfach als sehr vorteilhaft herausgestellt⁹. Im folgenden wird eine Hybridisierung des Ant Systems mit dem

⁸Die Probleme stammen aus [2]. Dort wird das 50-Städte-Problem als Problem 1 bzw. 6 (ohne bzw. mit Streckenrestriktion) und das 100-Städte-Problem dementsprechend als Problem 12 bzw. 14 bezeichnet. Diese Bezeichnungen werden im folgenden beibehalten.

⁹Vgl. z.B. [1], [16], [21].

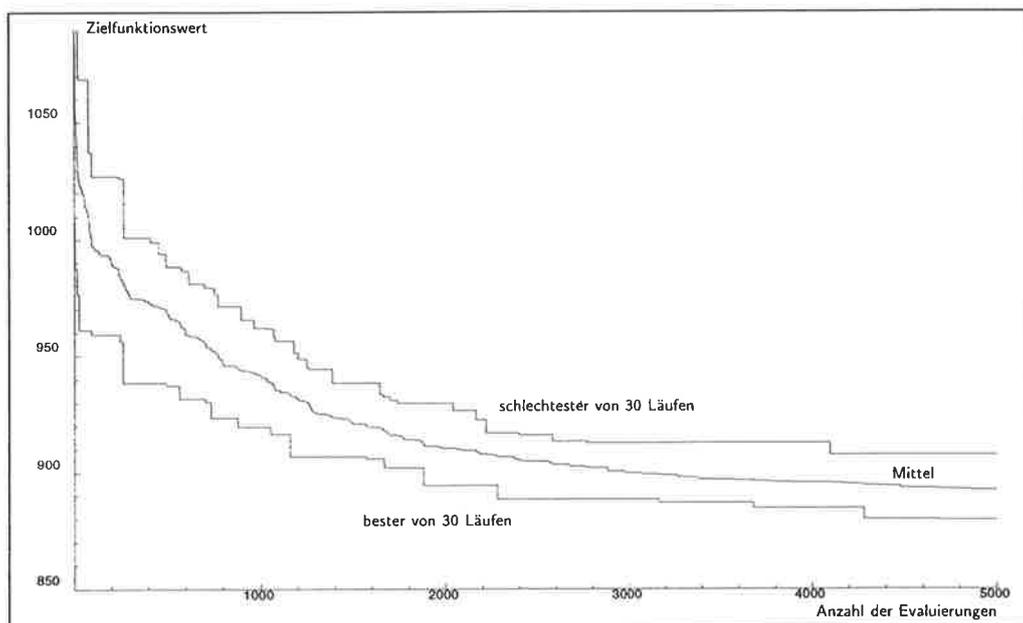


Abbildung 2: Lernkurve (Problem 12)

2-opt-Verfahren (vgl. z.B. [18] bzw. erstmals [6]) vorgenommen¹⁰ und deren Auswirkung auf das Lösungsverhalten analysiert.

Das *2-opt-Verfahren* für das TSP ist ein Vertauschungsverfahren, das auf eine Rundreise angewendet, eine sog. “*2-optimale Rundreise*” liefert. Eine Rundreise heißt dann *2-optimal*, wenn sie durch das Vertauschen zweier Kanten nicht weiter verkürzt werden kann¹¹.

Im VRP-adaptierten Ant System wird am Ende einer Iteration jede einzelne Tour einer Ameise zunächst auf *2-Optimalität* überprüft, und gegebenenfalls werden die entsprechenden Vertauschungen vorgenommen. Erst dann wird die Gesamtlänge des Tourenplans bestimmt und die Spurwerte entsprechend aktualisiert, welche die Ausgangsdaten für die nächste Iteration darstellen. Dieses Vorgehen führt zu einer erheblichen Steigerung der Verfahrensqualität. Um eine Vergleichbarkeit mit den bisher gewonnenen Resultaten zu gewährleisten, wurden die Parametereinstellungen, die Anzahl der

¹⁰Alternativ wäre auch die Anwendung von *3-opt* oder *Or-opt* denkbar. Zum Verhältnis von möglicher Verbesserung der Lösung zu erhöhtem Rechenaufwand siehe [18] S.454.

¹¹Diese Idee wurde auch auf nicht-kantenorientierte Probleme wie etwa das Quadratische Zuordnungsproblem übertragen.

Testläufe sowie die Anzahl der Evaluierungen unverändert beibehalten.

Die durchschnittliche Abweichung vom optimalen Zielfunktionswert konnte durch Hybridisierung für beide 50-Städte-Probleme auf ca. 12% reduziert werden. Deutlicher wird die mit Hilfe der Hybridisierung erreichte Verfahrensverbesserung, wenn die jeweils besten ermittelten Tourenpläne betrachtet werden, die nun um weniger als 7% über dem Optimum liegen.

Die Resultate für die 100-Städte-Probleme bestätigen die Annahme, daß das Ant System besonders für Fälle, in denen die Kundenorte geclustert sind, sehr gute Ergebnisse liefert. So wurde für diese Probleme bei Hybridisierung der optimale Zielfunktionswert im Durchschnitt nur um 1.34% (Problem 12) bzw. 3.42% (Problem 14) überschritten. Die beste gefundene Lösung für das Problem 12 lag sogar nur 0.69%, für das Problem 14 auch lediglich 1.64% über dem Optimum.

In Abbildung 3 sind die über die 30 Testläufe gemittelten Ergebnisse, mit und ohne Hybridisierung, für das Problem 12 in Form einer Lernkurve exemplarisch dargestellt.

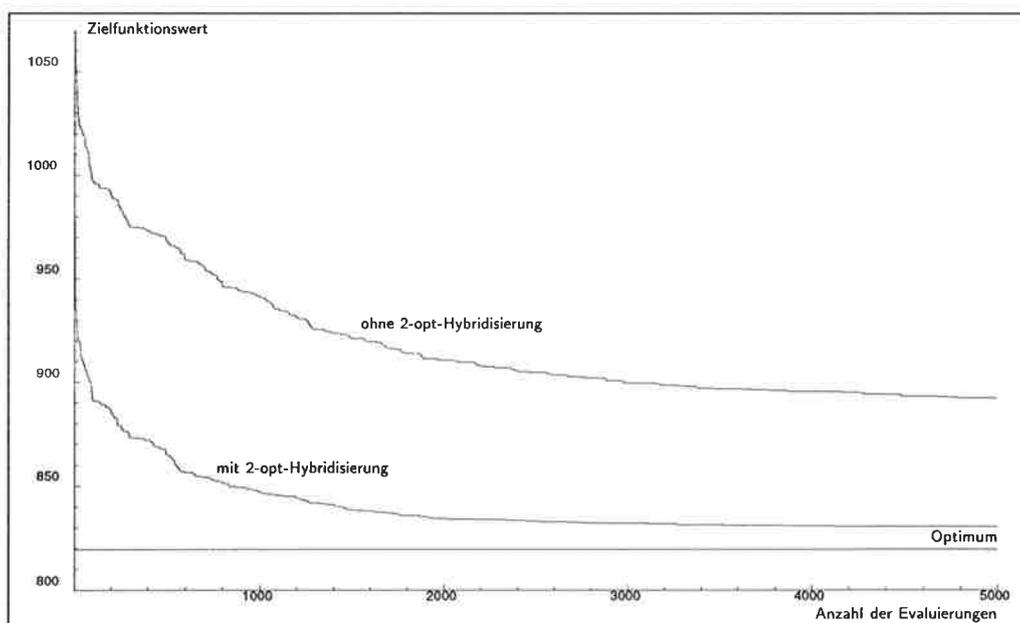


Abbildung 3: Auswirkung der Hybridisierung (Problem 12)

Abschließend läßt sich feststellen, daß die hier durchgeführte Hybridisierung in allen Fällen dazu führt, daß der Ant System Algorithmus sowohl

schneller zu guten Lösungen kommt als auch insgesamt, bei gleicher Anzahl Iterationen, bessere Lösungen generiert¹². Diese Tatsache bestätigt die Erkenntnisse aus anderen Analysen, in denen ebenfalls eine Meta-Heuristik mit einem problemspezifischen Verfahren erfolgreich kombiniert wurde (vgl. z.B. [16]), und unterstreicht damit die Vorteilhaftigkeit des Konzepts der Hybridisierung.

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie das Verfahren durch die Berücksichtigung von problemspezifischem Wissen weiter verbessert werden kann.

4.3 Problembezogene Verbesserung des Verfahrens

Die Adaption des Ant Systems auf das VRP wurde in Kapitel 3 gezeigt. Die Unterschiede zur Anwendung auf das TSP lagen dabei in erster Linie bei Ω , der Menge der auszuwählenden Kandidaten für die nächste Stadt. Es wurden etwaige Unzulässigkeiten verhindert, indem diese Menge gegebenenfalls reduziert (falls der Kapazitätsbedarf bzw. die Tourdauer zu groß waren) bzw. um das Depot erweitert wurde. Das VRP weist aber darüber hinaus bestimmte Eigenschaften auf, deren Modellierung die Lösungsqualität positiv beeinflussen können, indem schneller bessere Lösungen generiert werden. So einerseits ist bekannt, daß nicht nur die Lage zweier Städte zueinander¹³ sondern auch die Lage des Depots große Bedeutung für die einzelnen Touren hat. Andererseits erscheint es für kapazitätsbeschränkte Problemstellungen zielführend, eine hohe Kapazitätsauslastung als zusätzliches Kriterium in das Verfahren einzubeziehen. Diesen Überlegungen sind die beiden nächsten Abschnitte gewidmet.

¹²An dieser Stelle muß angemerkt werden, daß ein Vergleich nur auf Basis der gemachten Evaluierungen nicht ganz fair ist, da bei der Hybridisierung zusätzliche Rechenzeit für das 2-opt-Verfahren benötigt wird, die sonst für weitere Iterationen genutzt werden könnte. Andererseits ist dieser zusätzliche Rechenaufwand vergleichsweise gering und kann daher vernachlässigt werden.

¹³Diese Information geht in Form der Visibility η in das Verfahren ein.

4.3.1 Berücksichtigung von Savings-Werten

Die sog. *Savings-Werte*¹⁴ sind ein Maß für die Vorteilhaftigkeit des Besuchs zweier Orte i und j innerhalb einer Tour. Diese Savings-Werte können in den Ant System Algorithmus eingebracht werden, indem die Auswahlwahrscheinlichkeiten folgendermaßen modifiziert werden:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta [\mu_{ij}]^\gamma}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta [\mu_{ih}]^\gamma} & \text{falls } j \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } \mu_{ij} = d_{i0} + d_{j0} - d_{ij}$$

mit

γ Parameter zur Regulierung des Einflusses von μ_{ij}

Diese Verfahrenserweiterung führte zu unterschiedlichen Resultaten¹⁵. Während für die geclusterten Probleme relativ schlechte Tourenpläne generiert wurden¹⁶, konnte bei den 50-Städte-Problemen ein verbessertes Lösungsverhalten des Ant Systems beobachtet werden. Unabhängig davon, ob die zusätzliche Streckenrestriktion beachtet werden mußte oder nicht, wurde die optimale Lösung im Durchschnitt um ca. 4% verfehlt, und die besten Lösungen lagen um ca. 3% über dem Optimum.

4.3.2 Berücksichtigung von Kapazitätsbedarfen

Sollen bei der Auswahl des als nächsten zu besuchenden Kunden dessen Kapazitätsbedarf sowie die bereits durch zuvor besuchte Kunden in Anspruch genommene Kapazität berücksichtigt werden, so kann dies durch eine weitere Anpassung erfolgen. Sei K die für jede Tour zur Verfügung stehende Kapazität, K_i die bis einschließlich zum Besuch des Kunden i genutzte Kapazität

¹⁴Vgl. das nach dieser Idee benannte Savings-Verfahren in [3]. Dort werden, ausgehend von sog. Pendeltouren (Depot - Kunde - Depot), die Städte in der Reihenfolge fallender Savings-Werte zu Touren zusammengefaßt, solange die Kapazitäts- und Zeitbeschränkungen dies zulassen.

¹⁵Es wurde die Parametereinstellung $\gamma = 5$ gewählt.

¹⁶Die Abweichungen vom Optimum betragen durchschnittlich mehr als 7%.

und b_j der Kapazitätsbedarf des Kunden j . Dann bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Stadt j ausgewählt wird, durch folgenden Ausdruck:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta [\kappa_{ij}]^\delta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta [\kappa_{ih}]^\delta} & \text{falls } j \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } \kappa_{ij} = \frac{K_i + b_j}{K} = \frac{K_j}{K}$$

mit

- δ Parameter zur Regulierung des Einflusses von κ_{ij}
- K_i Kapazitätsauslastung der Tour bis einschließlich Kunde i
- b_j Kapazitätsbedarf des Kunden j
- K Gesamtkapazität pro Tour

Durch die Berücksichtigung der Kapazitätsbedarfe¹⁷ in der hier beschriebenen Form konnten die Ergebnisse für die 50-Städte-Probleme ebenfalls verbessert werden, allerdings nicht im selben Ausmaß wie durch die Berücksichtigung der Savings-Werte.

Abbildung 4 soll einen Eindruck über die Einflüsse der jeweiligen Erweiterungen vermitteln. Am Beispiel von Problem 6 stellt sie die veränderten Lernkurven bei Berücksichtigung der Savings-Werte bzw. bei Berücksichtigung der Restkapazitäten jener bei ausschließlicher Verwendung von 2-opt gegenüber.

Das Optimum wurde bei beiden 50-Städte-Problemen mindestens um ca. 4% und durchschnittlich um ca. 7% verfehlt. Diese Tatsache belegt dennoch, daß die Einbeziehung der Kapazitätsüberlegungen zielführend ist.

¹⁷Es wurde die Parametereinstellung $\delta = 5$ gewählt.

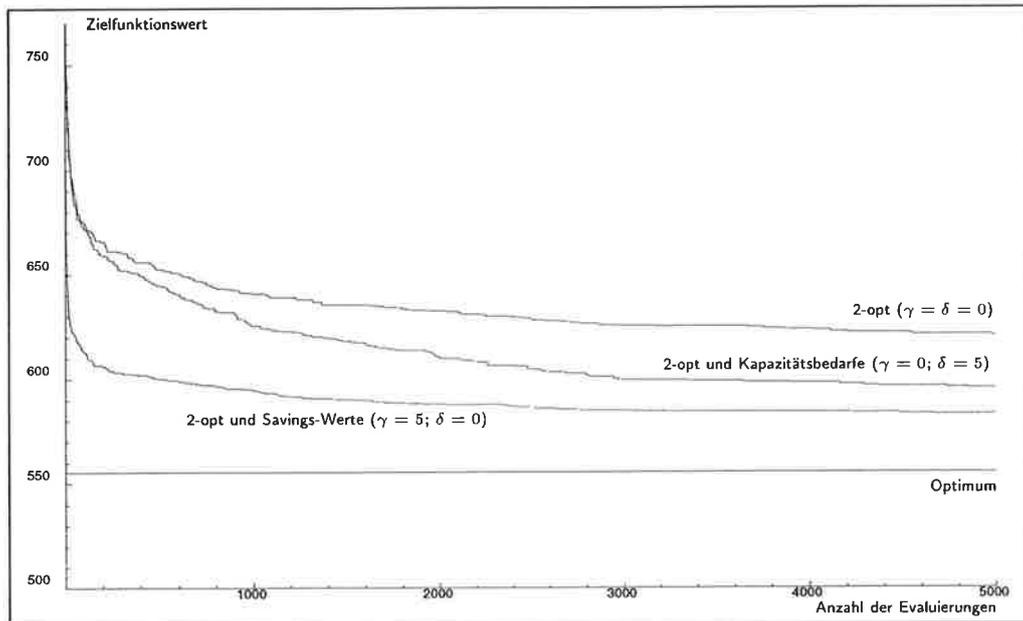


Abbildung 4: Problembezogene Verfahrensverbesserungen (Problem 6)

Viel deutlicher zeigt sich der positive Effekt der Kapazitätsberücksichtigung bei den geclusterten 100-Städte-Problemen. Hier waren die Tourenpläne für das Problem 12 (Problem 14) im Durchschnitt nur um 0.70% (0.68%), im besten Fall nur um 0.05% (0.40%) länger als der optimale Tourenplan. In Abbildung 5 werden am Beispiel von Problem 12 die gemittelten Lernkurven mit bzw. ohne Beachtung der zur Verfügung stehenden Restkapazitäten ($\gamma = 5$ bzw. $\gamma = 0$) gegenübergestellt.

Zusammenfassend läßt sich für die geclusterten 100-Städte-Probleme feststellen, daß die Savings-Werte der Lösungsgüte des Verfahrens nicht dienlich sind. Das mag daran liegen, daß in diesem Fall Städte aus verschiedenen, hintereinander liegenden Clustern zu einer Tour kombiniert werden, da Städte, die auf einer Linie mit dem Depot liegen, besonders hohe Savings-Werte haben. Gleichzeitig konnten durch die Einführung einer Kapazitätsgröße κ_{ij} beide Probleme so gut gelöst werden, daß die Abweichung von der optimalen Lösung mehr als akzeptabel war. Aus diesem Grund beschränkt sich die Untersuchung im folgenden auf die beiden 50-Städte-Probleme.

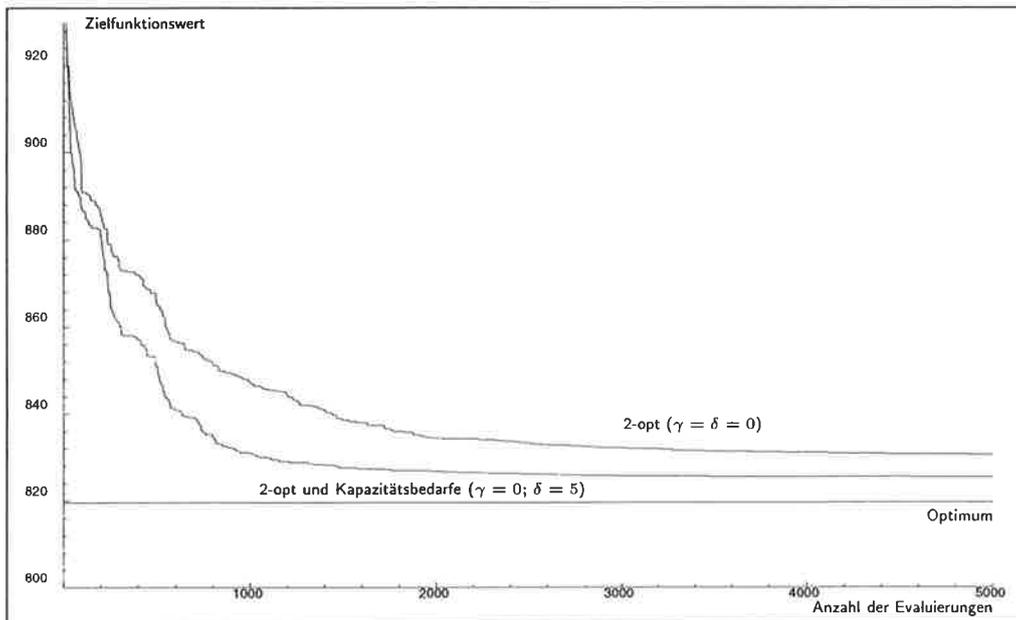


Abbildung 5: Berücksichtigung der Kapazitätsbedarfe (Problem 12)

4.3.3 Simultane Berücksichtigung von Savings-Werten und Kapazitätsbedarfen

Die obigen Resultate belegen den positiven Einfluß der Savings-Werte μ_{ij} und der Kapazitätsauslastung κ_{ij} auf das Suchverhalten der künstlichen Ameisen des Ant Systems¹⁸. Daher wird der Algorithmus dahingehend modifiziert, daß diese beiden Größen folgendermaßen in die Berechnung der Auswahlwahrscheinlichkeit eingehen:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta [\mu_{ij}]^\gamma [\kappa_{ij}]^\delta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta [\mu_{ih}]^\gamma [\kappa_{ih}]^\delta} & \text{falls } j \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In ersten Testreihen mit dem auf diese Weise angepaßten Ant System

¹⁸Mit Einführung einer weiteren Größe, durch die in Analogie zur Restkapazität die für die Tour verfügbare Restzeit berücksichtigt wird, könnte wahrscheinlich eine weitere Verbesserung für streckenbeschränkte Probleme erreicht werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde davon jedoch Abstand genommen.

Algorithmus¹⁹ wurden Lösungen ermittelt, die durchschnittlich um weniger als 5% vom kürzesten Tourenplan abwichen. Dadurch bestätigte sich die Annahme, daß die simultane Berücksichtigung der genannten Aspekte die Qualität des Verfahrens steigert. Dennoch entstand der Eindruck, daß deren relativ starke Gewichtung dazu führte, daß der Einfluß der Spurintensitäten zu gering und damit das Lernverhalten nicht mehr zufriedenstellend war. Folglich wurden alle Größen gleich stark gewichtet und die Parameter $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 5$ gewählt. Mit diesen Einstellungen konnten für beide Probleme Lösungen gefunden werden, die im Durchschnitt nur um ca. 3% schlechter waren als die optimalen. Die beste gefundene Lösung für das Problem 1 (Problem 6) lag sogar nur 0.04% (1.35%) darüber. Dieses Resultat wird beispielhaft für das Problem 1 in der folgenden Abbildung 6 verdeutlicht. In Analogie zur Abbildung 2 wird die gemittelte Lernkurve sowie die beste und die schlechteste Lösung von 30 Läufen gezeigt.

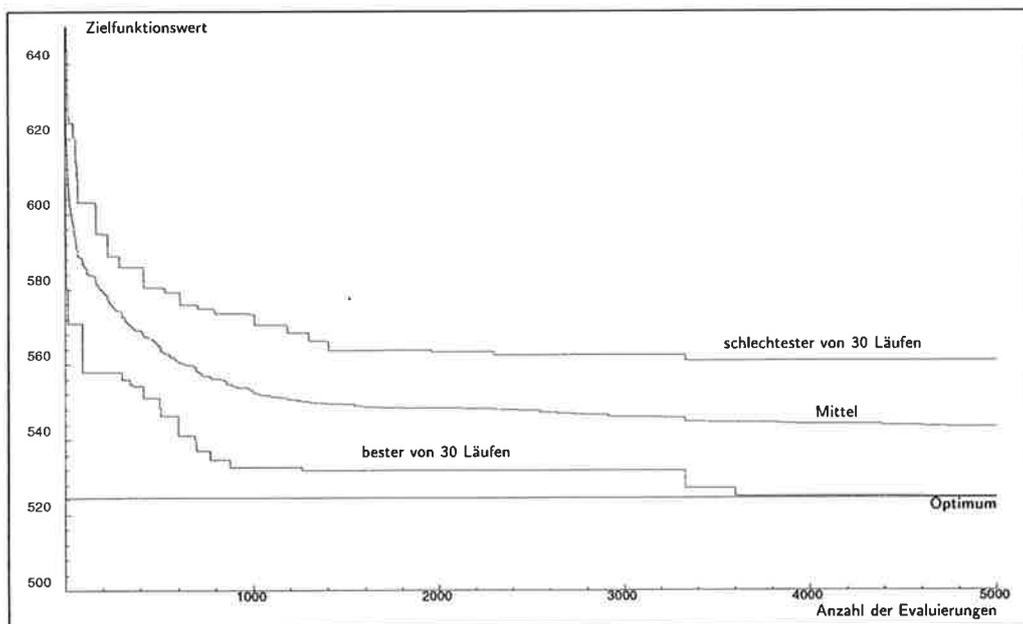


Abbildung 6: Simultane Berücksichtigung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 5$ (Problem 1)

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Ergebnisse, die mit Hilfe des problemangepaßten Ant Systems für die vier ausgewählten Problemstellungen

¹⁹Es wurde die Parametereinstellung $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = \delta = 5$ gewählt.

erzielt werden konnten. Zum Vergleich werden diese Resultate denen zweier klassischer Heuristiken, nämlich des Savings-Verfahrens (vgl. [3]) bzw. des Sweep-Verfahrens (vgl. [11]), zusammenfassend gegenübergestellt. Außerdem wird die jeweils beste bekannte Lösung angegeben.

Problem / Städte	Savings-Verfahren [†]	Sweep-Verfahren [†]	Ant System	beste Lösung [‡]
1 / 50	585	532	524.81	524.61
6 / 50	619	560	562.93	555.43
12 / 100	831	937	819.96	819.56
14 / 100	877	949	869.86	866.37

[†] Quelle: [10] [‡] Quelle: [22]

Tabelle 1: Vergleich der Ergebnisse mit klassischen Verfahren

Der nächste Abschnitt dient der kritischen Zusammenfassung der beschriebenen Analyse und gibt einen Ausblick auf in Zukunft zu untersuchende Aspekte.

5 Ausblick

Der vorliegende Beitrag zeigt exemplarisch die Anwendung einer neuen Meta-Heuristik, des Ant Systems, auf das VRP. Die dabei erzielten Ergebnisse bestätigen die positiven Erfahrungen mit dem Ant System, die bereits im Rahmen von TSP-Anwendungen (vgl. [8]) gesammelt wurden. Gleichzeitig sind sie ein weiterer Beleg für die Vielseitigkeit der Methode, die bereits für das Job Shop Scheduling Problem in [4], für das Graph Colouring Problem in [5] und für das Quadratische Zuordnungsproblem in [17] gezeigt wurde.

Obwohl sehr gute Lösungen für die vier betrachteten VRP-Probleme ermittelt werden konnten, war es im Rahmen dieser Arbeit, in der vorrangig die Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden sollte, in keinem Fall möglich, die beste bekannte Lösung zu unterschreiten. Daher sollten sowohl eine detaillierte Analyse der Parametereinstellungen als auch methodische Aspekte Inhalt künftiger Arbeit sein. Insbesondere bleibt zu untersuchen, welchen Einfluß der Startort der Ameisen hat bzw. ob eine veränderte Startaufstellung der Ameisen zu anderen Erkenntnissen führt. Es ist durchaus denkbar,

daß z.B. alle Ameisen vom Depot aus die Suche beginnen. In diesem Zusammenhang wäre dann auch die gewählte Anzahl der Ameisen zu überdenken. Ferner erscheint der Algorithmus aufgrund seiner Struktur, besonders geeignet zur Parallelisierung.

Neben diesen verfahrenstechnischen Überlegungen sind zusätzliche Modifikationen des Ant Systems für erweiterte Problemstellungen, wie etwa Mehrdepotprobleme oder Probleme mit Zeitfenstern denkbar.

Literatur

- [1] Burke, E.K.; Elliman, D.G.; Weare, R.F.: A Hybrid Genetic Algorithm for Highly Constrained Timetabling Problems. In: Proceedings of the 6th Conference on Genetic Algorithms (ICGA '95, Pittsburgh, USA). Morgan Kaufmann, San Francisco 1995, S.605-610.
- [2] Christofides, N.; Mingozzi, A.; Toth, P.: The Vehicle Routing Problem. In: Christofides, N.; Mingozzi, A.; Toth, P.; Sandi, C. (Hrsg.): Combinatorial Optimization. Wiley, Chichester 1979.
- [3] Clarke, G.; Wright, J.W.: Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points. In: Operations Research 12 (1964) S. 568-581.
- [4] Colorni, A.; Dorigo, M.; Maniezzo, V.; Trubian, M.: Ant system for Job-Shop Scheduling. In: JORBEL - Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science 34 (1994) 1, S.39-53.
- [5] Costa, D; Hertz, A: Ants can colour graphs. ORWP95/13, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 1996.
- [6] Croes, G.A.: A Method for solving Traveling-Salesman Problems. In: Operations Research 6 (1958), S.791-812.
- [7] Dorigo, M.: Optimization, Learning and Natural Algorithms. Diss., Maitland 1992.
- [8] Dorigo, M; Maniezzo, V.; Colorni, A.: Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents. In: IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 26 (1996) 1, S. 29-41.
- [9] Gendreau, M.; Hertz, A.; Laporte, G.: A Tabu Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem. In: Management Science 40 (1994) S. 1276-1290.
- [10] Ghaziri, H.: Supervision in the Self-Organizing Feature Map: Application to the Vehicle Routing Problem. In: Osman, I.; Kelly, J. (Hrsg.): Meta-Heuristics: Theory & Applications. Kluwer Acad. Publ., Boston 1996, S.651-660.

- [11] Gillett, B.E.; Miller, L.R.: A Heuristic Algorithm for the Vehicle Dispatch Problem. In: Operations Research 22 (1974) S. 340-347.
- [12] Glover, F.: Tabu Search - Part I. In: ORSA Journal on Computing 1 (1989) 3, S. 190-206.
- [13] Glover, F.: Tabu Search - Part II. In: ORSA Journal on Computing 2 (1990) 1, S. 4-32.
- [14] Hopfield, J.J.; Tank, D.W.: Neural Computation of Decisions in Optimization Problems. In: Biological Cybernetics 52 (1985) S. 141-152.
- [15] Kirkpatrick, S.; Gelatt, C.D.; Vecchi, M.P.: Optimization by Simulated Annealing. In: Science 220 (1983) S. 671-680.
- [16] Kopfer, H.; Pankratz, G.; Erkens, E.: Entwicklung eines hybriden Genetischen Algorithmus zur Tourenplanung. In: OR Spektrum 16 (1994) S. 21-31.
- [17] Maniezzo, V.; Colorni, A.; Dorigo, M.: The Ant System applied to the Quadratic Assignment Problem. Technical Report IRIDIA / 94-28, Université Libre de Bruxelles, Belgium, 1994.
- [18] Neumann, K.; Morlock, M.: Operations Research. Hanser, München 1993.
- [19] Nissen, V.: Evolutionäre Algorithmen. Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden 1994.
- [20] Osman, I.: Metastrategy simulated annealing and tabu search algorithms for the vehicle routing problem. In: Annals of Operations Research 41 (1993) S. 421-451.
- [21] Pesch, E.: Learning in Automated Manufacturing. Physica, Heidelberg 1994.
- [22] Rego, C.; Roucairol, C.: A Parallel Tabu Search Algorithm Using Ejection Chains for the Vehicle Routing Problem. In: Osman, I.; Kelly, J. (Hrsg.): Meta-Heuristics: Theory & Applications. Kluwer Acad. Publ., Boston 1996, S.661-675.

Bisher erschienene Nummern in der Reihe „Forschungsberichte
des Instituts für Betriebswirtschaftslehre der Universität Wien“,
Brünner Straße 72, A-1210 Wien

- No 1: Reisinger Heribert: Das Logit-Modell - dargestellt anhand möglicher
Anwendungen im Marketing
März 1994
- No 2: Wagner Udo, Geyer Alois: A new approach for inverting Laplace
transforms of probability density functions
April 1994
- No 3: Priemer Verena: „Bundling“: Begriff, Formen und Zielsetzungen einer
Strategie in Theorie und Praxis
Jänner 1995
- No 4: Krycha Karl A.: Applications of Artificial Neural Networks in
Management Science - a review
April 1996
- No 5: Decker Reinhold, Röhle Matthias, Wagner Udo: Modellgestützte
Marketing-Mix-Planung unter Berücksichtigung von Konkurrenzeffekten
Juli 1996
- No 6: Bullnheimer Bernd, Strauß Christine: Tourenplanung mit dem
Ant System
November 1996