universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Mathematikunterricht in den Niederlanden mittels Realistic Mathematics Education und der mögliche Einfluss auf die Ergebnisse bei PISA

Verfasser

Thomas Plotz

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, im Juni 2008

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190/406/412
Studienrichtung lt. Studienblatt:	LA Mathematik/Physik
Betreuer:	Univ.-Prof. Dr. Hans Humenberger

Danksagung

„Siehst du, Momo“, sagte er dann zum Beispiel, „es ist so: Manchmal hat man eine sehr lange Straße vor sich. Man denkt die ist so schrecklich lang; das kann man niemals schaffen, denkt man.“
Er blickt eine Weile schweigend vor sich hin, dann fuhr er fort: „Und dann fängt man an, sich zu beeilen. Und man eilt sich immer mehr. Jedes Mal, wenn man aufblickt, sieht man, dass es gar nicht weniger wird, was vor einem liegt. Und man strengt sich noch mehr an, man kriegt es mit der Angst, und zum Schluss ist man ganz außer Puste und kann nicht mehr. Und die Straße liegt immer noch vor einem. So darf man es nicht machen.“
Er dachte einige Zeit nach. Dann sprach er weiter: „Man darf nie an die ganze Straße auf einmal denken, verstehst du? Man muss nur an den nächsten Schritt denken, an den nächsten Atemzug, an den nächsten Besenstrich. Und immer wieder nur an den nächsten.“
Wieder hält er inne und überlegt, ehe er hinzufügt: „Dann macht es Freude; das ist wichtig, dann macht man seine Sache gut. Und so soll es sein.“
Und abermals nach einer langen Pause fuhr er fort: „Auf einmal merkt man, dass man Schritt für Schritt die ganze Straße gemacht hat. Man hat gar nicht gemerkt wie, und man ist nicht außer Puste.“ Er nickte vor sich hin und sagte abschließend: „Das ist wichtig.“
(Ende, 1984, S. 36f)

Viele Schritte und Atemzüge und Besenstriche waren nötig bis ich diese Arbeit vollenden konnte. Nicht immer habe ich alles richtig gemacht und oft war ich außer Puste. Ich möchte all jenen danken die mit mir gegangen, mich geführt und getragen haben. Ich stehe nun am Ende der Straße. Glücklich und nicht außer Atem.
Danke.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

1.1 Ausgangspunkt und Grundideen

Die Motivation das Thema Realistic Mathematic Education (RME) zu wählen, kam auf Umwegen. Nachdem ich im Mai 2006 einen Vortrag von Frau Prof^{in}.Dr^{in}. Katja Maaß über mathematisches Modellieren im Unterricht gehört hatte, begann ich mich mit dem Thema Modellierung und Modellierungskompetenz zu beschäftigen. Bei der Recherche der Literatur zu diesem Thema stieß ich auf das didaktische Modell RME. Die recht einfachen Grundkonzepte dieses Modells fand ich faszinierend und mir fiel auf, dass ein vergleichbares durchgängiges didaktisches Modell in Österreich nicht vorhanden war. Umso mehr interessierte mich die Realisierung in den Niederlanden.
Ausgehend von diesem Interesse stellte sich mir die Frage, ob dieses Konzept möglicherweise Einfluss auf die signifikant besseren Ergebnisse der Niederlande bei internationalen Vergleichsstudien im Vergleich zu Österreich hat. Dies ist auch die zentrale Forschungsfrage, die in dieser Diplomarbeit beantwortet werden soll.

1.2 Rahmenbedingungen

Um das Konzept umfassend zu beschreiben, ist es notwendig den strukturellen Rahmen zu kennen. Der Aufbau, die administrative Struktur und die Historie des Schulsystems sind dabei wichtige Eckdaten. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werde ich mich daher mit dem Schulsystem grundsätzlich beschäftigen.
Wichtig dabei erscheint mir die Beantwortung folgender Fragen:

- Welchen Einfluss hat das Schulsystem auf die PISA-Ergebnisse?
  Dabei wird versucht, die Ergebnisse anderer Schulsysteme, die zentrale Abschlusstests haben, mit den niederländischen zu vergleichen, bzw. werden die Publikationen der OECD nach entsprechenden Kriterien durchsucht (vgl. Abschnitt 4.6.5).

- Welche Rolle spielen die SchulinspektorInnen?
  Die ständige externe Evaluation der Schulen durch die InspektorInnen beeinflusst die Schulentwicklung und somit auch die Leistungen der SchülerInnen möglicherweise erheblich. Durch eine Beschreibung aus Sicht eines pensionierten Inspektors und eines Schulleiters versucht der Autor die Vorteile und Nachteile herauszuarbeiten und die Rolle im Schulsystem zu verdeutlichen (vgl. Kapitel 2.4.1).

- Wie gut/schlecht ist die Durchlässigkeit[1] des Systems?
  Diese Frage wird nur theoretisch beantwortet und nicht anhand von statistischen Daten verifiziert. In Abschnitt 2.3.2 werden Indizien dafür angeführt.

- Wie viel Mathematik wird unterrichtet und in welchem Ausmaß ist dieses Fach bei den Abschlussexamina vertreten? (vgl. dazu Abschnitt 2.4.2 und Abschnitt 4.6.5)

Die Beschreibung des Schulsystems ist die Grundlage und dient zur besseren Orientierung, da dieses System nicht allgemein bekannt ist.

1.3 Realistic Mathematic Education (RME)

Am Beginn dieses Abschnittes MUSS das Konzept natürlich erklärt und beschrieben werden. Die Präsentation der grundlegenden Ideen, welche Ausgangspunkt der Entwicklung waren, steht im Mittelpunkt. Dazu ist es notwendig einen kurzen geschichtlichen Überblick zu geben. Wichtig ist hier die Beantwortung der Frage, wie die Weitergabe des Konzeptes an die Ausführenden (LehrerInnen) stattfand. Ebenso soll kurz auf die Weiterentwicklung bis heute eingegangen werden.
Doch nicht nur ein theoretischer Einblick soll in das Konzept gegeben werden. Zentral ist es, die reale Umsetzung der Grundideen zu präsentieren. Die zu beantwortende Frage ist: Wie sieht Mathematikunterricht nach RME aus? Um diese Frage zu beantworten, werden einzelne Unterrichtsskizzen zur Demonstration beschrieben. Die folgenden Fragen stellen eine weitere Konkretisierung dar:

- Wie weit geht die Forderung des Konstruktivismus in RME?
  Eine Grundforderung von RME ist, dass SchülerInnen sich das benötigte Wissen selbständig konstruieren. Der Autor stellt sich jedoch die Frage, wie streng diese Grundidee verfolgt wird. Eine Antwort gibt sowohl das Kapitel über Modelle (Abschnitt 3.5.6) als auch der Abschnitt 3.5.5.

- Wie werden neue Sachverhalte (z.B.: Brüche) in den Unterricht eingeführt?
  Diese Fragestellung ist sozusagen ein zentraler „Knackpunkt“. Warum sollen Schüler-

1 Der Begriff meint im Zusammenhang mit dem Schulsystem, wie leicht es für SchülerInnen ist, den Schultyp zu wechseln.

Innen Neues lernen? Wie werden die Probleme formuliert, an denen die SchülerInnen diese neuen Konzepte erarbeiten und konstruieren müssen? Die Einführung der Brüche wird in Kapitel 3.4 gezeigt.

- Wie werden Aufgaben und Probleme in RME formuliert?
  Die Frage beinhaltet implizit die Frage nach einer Ähnlichkeit der Fragestellung bei PISA. Die Antwort leitet in den nächsten Teil der Arbeit mit dem Schwerpunkt PISA über. Vor allem im Kapitel über das Projekt HEWET wird darauf näher eingegangen. Weiters wird eine PISA- und RME-Aufgaben in Abschnitt 4.6 verglichen.

Da das Konzept RME nicht nur im Sekundarbereich eingeführt wurde, sondern in den Niederlanden im gesamten Schulsystem, d.h. auch in der Primarstufe, angewendet wird, ist ein kurzer Exkurs in diesen Bereich des Unterrichts geplant. Anhand verschiedener Probleme wird das *WISKOBAS*[2]-Projekt beschrieben. Dabei lassen sich schon Grundzüge des späteren didaktischen Konzepts erkennen.

1.4 PISA in den Niederlanden

In einem kurzen Überblick sollen die Ergebnisse der Niederlande bei den PISA-Studien 2000, 2003 und 2006 dargestellt werden. Ein Fokus liegt dabei natürlich auf den Ergebnissen in Mathematik. Beantwortet sollten dabei folgende Fragen werden:

- Warum nahmen 2000 in den Niederlanden zu wenige Schulen teil, um in den offiziellen Bericht aufgenommen zu werden? (vgl. Abschnitt 4.3)

- Welche Schulen nahmen 2003 an der Studie teil?
  Bezug nehmend auf den vorigen Punkt steht auch hier die Frage nach einer repräsentativen Schulauswahl im Raum, da die Schulträger größtenteils privat sind und nicht zur Teilnahme „gezwungen“ werden können. Durch die in Abschnitt 4.3 angegebenen strengen Kriterien, ist eine selektive Auswahl praktisch unmöglich.

- Haben niederländische SchülerInnen einen Vorteil, da sie ähnliche nationale Tests haben? Die Frage soll durch einen Vergleich der Fragestellungen von CITO[3]-Test, Abschlussexamen und PISA-Test geklärt werden. Der Vergleich in Abschnitt 4.6 und das Beispiel in Abschnitt 3.3.2.1 zeigen die Ähnlichkeiten.

---

2 Die Entwicklung von WISKOBAS wurde vor der „Erfindung“ von RME begonnen und abgeschlossen. WISKOBAS war sozusagen der Vorläufer von RME

3 Dieser Test beschließt die Primarstufe und wird von der Firma CITO durchgeführt.

1.5 Conclusion

Die vorher gewonnenen Erkenntnisse über den Mathematikunterricht in den Niederlanden werden zusammengetragen und mit dem österreichischen Mathematikunterricht verglichen. Welche Schlüsse lassen sich im Hinblick auf die Fragestellung ziehen?

KAPITEL 2

Schulsystem der Niederlande

Um den Rahmen, in den der Mathematikunterricht und damit auch RME eingebettet ist, besser zu verstehen, wird in diesem Kapitel der Aufbau und die einzelnen Elemente des niederländische Schulsystem, wie Aufbau und Struktur, erklärt und beleuchtet.

2.1 Historische Entwicklung

Hans Feder (2004, S. 55-64) gibt in seiner Dissertation einen sehr guten Überblick über die historischen Entwicklungen des Schulsystems. Nachfolgend paraphrasiere ich wichtige Entwicklungen aus dieser Dissertation.
Wie in den meisten europäischen Ländern begann die Entwicklung des Schulwesens aus den mittelalterlichen Klosterschulen bzw. den kirchlichen Schulen. Zugang zu Bildung hatte nur der Klerus. Durch das stärker werdende Bürgertum (Handwerker, Händler u.ä.) wurde diese Praxis in Frage gestellt und breiterer Zugang zur Bildung gefordert und in eigenen „Handelsschulen" umgesetzt. Zur Gründung einer Schule war die Zustimmung der Kirche und des Staates notwendig. Bis ins 19. Jahrhundert entstanden in den Städten und Provinzen nun viele Schulen mit verschiedenen Schulordnungen, denen nur die religiöse Erziehung der protestantischen Kirche gemein war. Von einem gemeinsamen Schulsystem konnte jedoch nicht die Rede sein. Die starke ideologische Bindung an die protestantische Kirche führte im 19. Jahrhundert zu einem Schulstreit, in dem es um die „Freiheit des Unterrichts" ging. 1917 wurde mittels Verfassungsgesetz dieser Streit beigelegt. Ab diesem Zeitpunkt waren alle öffentlichen und privaten Schulen finanziell gleichgestellt. Das heißt, dass die privaten Trägerschaften Anspruch auf eine 100% staatliche Subvention haben.
Das Gesetz knüpft laut Skiera (1986, S. 45) aber drei Bedingungen an diese Subventionen:

1. Die Schulen müssen sich an die Gesetze der Niederlande halten.

2. Sie müssen jederzeit eine staatliche Schulinspektion zulassen, welche die Schulen kontrollieren.

3. Die SchülerInnen sind verpflichtet am Ende der Sekundarstufe eine externe Prüfung zu absolvieren.

Diese Liberalisierung führte zu zwei Effekten:

- Durch die Möglichkeit private Schulen zu gründen, sind staatliche Schulen in den Niederlanden in der Minderheit und machen nur etwa 30% aller Schulen aus.

- Andererseits führte die ideologische Ausrichtung der Schulen (katholisch, protestantisch, sozial-demokratisch, liberal, muslimisch, hinduistisch,...) zu einer so genannten „Versäulung der Gesellschaft" (vgl. Tigges, 2004, o. S.). Lange Zeit gingen Kinder katholischer Eltern auf katholische Schulen mit katholischen LehrerInnen. Erst in den 1960-er Jahren wurde dieses Phänomen überwunden. In den letzten Jahren tritt dieser Effekt jedoch wieder verstärkt auf, da vor allem Muslime und Hindus die Möglichkeit der Schulgründung mit eigenen ethnischen Grundsätzen nützen (vgl. Tigges, 2004, o. S.).

Genauere und ausführlichere Informationen über die historische Entwicklung findet man in der oben genannten Dissertation von Hans Feder (2004).

2.2 Administrativer Aufbau des niederländischen Schulsystems

In den Niederlanden gibt es vier administrative Ebenen des Schulsystems die jeweils einzelne Kompetenzen und Aufgaben besitzen (vgl. Tuschen, 1999, o. S.).

- *Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen* (dt. Ministerium für Unterricht, Kultur und Wissenschaft): Das Ministerium ist die oberste Schulbehörde. In ihre Zuständigkeit fallen die Verwaltung, die Organisation und die Finanzierung des Schulsystems. Außerdem ist sie für das Prüfungswesen, vor allem für die zentralen Abschlussprüfungen zuständig.

- *Provinzen*: Die Zuständigkeit der Provinzen beschränkt sich auf die Dienstaufsicht und die Rechtssprechung.

- *Schulträger*: Der Schulträger ist der Schule unmittelbar übergeordnet. Die Aufgabe des Schulträgers ist die Verwaltung und Leitung der Schule. Er entscheidet über die verwendeten Lehrmittel und die Einstellung des Lehrpersonals. Als Schulträger fungieren bei öffentlichen Schulen die Gemeinden, bei privaten Schulen Stiftungen, Vereine oder Kirchen (protestantisch und katholisch).

- *Schule*: Sie stellen die unterste Ebene dar. Als Institution sind sie unmittelbar für den Schulbetrieb verantwortlich.

Eine spezielle Funktion im niederländischen System haben die *Inspectie van het Onderwijs* (dt. Inspetionsbehörde des Unterrichts) (vgl. Tuschen, 1999, o. S.) die im Abschnitt 2.4.1.1 näher beleuchtet werden.

2.3 Aufbau des Schulwesens

2.3.1 Primarunterricht

In den Niederlanden sind alle Kinder ab dem 5. Lebensjahr schulpflichtig. Da aber kaum vorschulische Einrichtungen existieren, gehen praktisch alle Kinder mit dem Beginn des 4. Lebensjahrs in die *basisschool* (dt. Primarschule) (vgl. Tuschen, 1999, o. S.). Diese entstand 1985 durch die Zusammenlegung der Kindergärten mit den Vor- und Grundschulen und dauert bis zum 12. Lebensjahr.
Die Kinder werden nicht in Klassen sondern in Kleingruppen unterrichtet, wobei diese nicht altersgetrennt sind. Ein von- und miteinander Lernen soll dadurch gefördert werden. Das Verhältniss von SchülerInnen zu LehrerInnen ist laut Eurodice-Bericht (Ministry of Education und Science, 2006, S. 46) 21:6 in den ersten vier Jahren der Primarschulen. Die Schulen werden als Ganztagsschulen geführt und bis 1993 gab es keine national verpflichtenden Lernziele. Diese wurden mittlerweile definiert und als Kernziel (vgl. Abschnitt 3.6), welche die SchülerInnen am Ende der Primarschule beherrschen sollen, festgelegt (vgl. Tigges, 2004, o. S.).
Eine Überprüfung wird mittels Abschlusstest durchgeführt, der grundsätzlich freiwillig ist. Dieser wird im Gegensatz zum Abschlussexamen in der Sekundarstufe nicht unter Aufsicht des Ministerium ausgearbeitet, sondern von einer privaten Firma[4] entwickelt und durchgeführt. Das Ergebniss des so genannten CITO-Tests entscheidet oft über den weiteren Bildungsweg der Kinder, da die nachfolgenden Schulformen oft Mindestpunkte zur Aufnahme fordern (vgl. Chap, 2004, o. S.). Die SchülerInnen erhalten also am Ende der Primarschule kein Zeugnis, sondern ein Testergebniss, welches eine Empfehlung für die weitere Schulwahl enthält (vgl. Tuschen, 1999, o. S.).

2.3.2 Sekundarunterricht

Das Schulsystem ist im Sekundarbereich nach der Reform 1999 im Wesentlichen in drei verschiedene Schulformen aufgeteilt (vgl. Feder, 2004, S. 66).

1. vwo (**v**oorbereidender **w**etenschappelijk **o**nderwijs / dt. vorbereitender wissenschaftlicher Unterricht)

4 Die Firma CITO ist seit 1999 kommerziell tätig und entwickelt und verkauft Leistungsüberprüfungsdienste. Siehe auch auf: `http://www.cito.nl`

2. havo (**h**ogar **a**llgemeen **v**oortgezet **o**nderwijs / dt. höherer allgemeiner weiterführender Unterricht)

3. vmbo (**v**oorbereiding **m**iddelbaar **b**eroeps**o**nderwijs /dt. Schule der „mittleren beruflichen“ Bildung)

Eingeleitet wird die Sekundarstufe in allen Formen mit dem so genannten *basisvorming* (dt. Basisbildung). Diese allgemeine Grundbildung dauert drei Jahre und soll den SchülerInnen eine breite und in den Schulformen sehr ähnliche Ausbildung zukommen lassen. Laut Tigges (2004, o. S.) werden neben den Sprachen Niederländisch, Englisch, Deutsch oder Französisch vor allem Mathematik, Physik, Chemie, Biologie aber auch künstlerische Fächer unterrichtet. Insgesamt 15 Fächer sind vom Staat vorgegeben und müssen unterrichtet werden. Für jene SchülerInnen, die sich nicht zwischen zwei Schultypen entscheiden können bzw. deren Testergebnis beim CITO-Test in der Mitte zweier Schulformen liegt, gibt es die Möglichkeit eine Brückenklasse zu besuchen (vgl. Tyroller, 23.12.2005, S. 42). Dort testet das Kind beide Schulformen ein halbes Jahr und entscheidet sich anschließend ohne Verlust eines Schuljahrs für eine der beiden Formen.
In der zweiten Phase des Sekundarunterrichts folgt eine Spezialisierung, wobei nach Tuschen (1999, o. S.) die SchülerInnen zwischen verschiedenen Studienprofilen wählen können. Diese Profile variieren mit der Schulform und der Schule, die gewählt wurde. Beispiele dafür werden in Abschnitt 2.3.2.2 genannt.

2.3.2.1 VWO

Der *voorbereidender wetenschappelijk onderwijs* ist in den Niederlanden jene Schulform mit dem höchsten Abschluss. Sie soll auf das Studium an den Universitäten vorbereiten und berechtigt als einzige zum Besuch dieser. Der VWO dauert insgesamt sechs Jahre und wird mit dem VWO - *eindexamen* (dt. VWO-Abschlussexamen) abgeschlossen.
Innerhalb dieser Schulform gibt es laut Skiera (1986, S. 48) wiederum eine Gliederung in drei verschiedene Schularten:

- Gymnasium: Im Vordergrund der gymnasialen Bildung stehen die klassischen Sprachen Latein und Griechisch. Diese werden ab dem ersten Jahr durchgehend verpflichtend unterrichtet. Ab dem dritten oder vierten Jahr gibt es eine weitere Aufgliederung in einen altsprachlichen und einen naturwissenschaftlich-mathematischen Zweig.

- Atheneum: Diese Form wendet sich neueren Fremdsprachen zu, die neben gesellschaftsökonomischen Fächern und den Naturwissenschaften im Mittelpunkt stehen. Latein und Griechisch werden nicht unterrichtet. Auch hier gibt es eine Aufgliederung im dritten Jahr. Gewählt werden kann zwischen einem neusprachlich-gesellschaftswissenschaftlichen und einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Teil, wobei auch in dem zweiten drei Fremdsprachen unterrichtet werden.

- Lyceum: Aus der Mischung den beiden vorangegangenen Schulformen ergibt sich dieser dritte Typ. Die klassischen Sprachen sind auch hier nicht Pflicht, werden aber angeboten. Im dritten Jahr müssen sich die SchülerInnen zwischen vier Zweigen entscheiden, die den schon angeführten entsprechen.

- Ongedeeld VWO: In diesem Schultyp ist die obige Einteilung aufgelöst und die SchülerInnen können zwischen einer Vielzahl von Lehr- und Examensfächern wählen.

Das Abschlussexamen ist in einen zentralen schriftlichen Teil, der im ganzen Land gleich ist, und in einen vom Lehrenden durchgeführten mündlichen oder schriftlichen Teil aufgeteilt. Es umfasst fünf Pflicht- und zwei Wahlfächer.

2.3.2.2 HAVO

Die *hogar allgemeen voortgezet onderwijs* bereitet die SchülerInnen auf eine tertiäre Ausbildung im berufsbildenden Bereich vor. Dieser tertiäre Bereich ist mit den österreichischen Fachhochschulen vergleichbar. Ein Besuch der Universität ist mit dem Abschluss dieser Schulform nicht möglich. Daher wechseln viele AbsolventInnen in die VWO, um dort die Berechtigung zu erwerben (vgl. Brinkmann, 1996, S. 131).
Nach den ersten drei Schuljahren (*basisvorming*) wählen die SchülerInnen einen von vier Profilbereichen.

- Natur und Technik (N&T) mit Mathematik, Physik und Chemie

- Natur und Gesundheit (N&G) mit Mathematik, Physik, Chemie und Biologie

- Wirtschaft und Gesellschaft (E&M) mit Wirtschaftslehre, Mathematik, Geschichte und Geographie

- Kultur und Gesellschaft (C&M) mit Fremdsprache, kulturelle und künstlerische Bildung, Geschichte, Wirtschaftslehre, Mathematik

Die Fächer des gewählten Profilbereichs werden zusätzlich zu den Pflichtfächern (Niederländisch, Englisch, ...) zwei weitere Jahre unterrichtet (vgl. Tuschen, 1999, o. S.). Die Prüfung am Ende des fünften Schuljahrs erfolgt wiederum durch ein zentrales Examen.

2.3.2.3 VMBO

Die *voorbereiding op het middelbaar beroepsonderwijs* entstand 1999 aus der Vereinigung der MAVO[5] und der VBO[6]. Der Zweck dieser Vereinigung war, den Einstieg in den tertiären

5 dt. allgemeine Sekundarunterricht der Mittelstufe
6 dt. berufsbildender Sekundarunterricht

Bildungsbereich und in den Arbeitsmarkt zu erleichtern. Zu diesem Zweck wurden herkömmliche starre Schulcurricula durch ein flexibles und variantenreiches System von *leerwegen*[7] und *sectoren*[8] ersetzt (vgl. Abb.2.1). Die Lernenden haben die Möglichkeit nach eigenem Interesse und Können diese beliebig zu kombinieren. Die Lernwege unterscheiden sich in

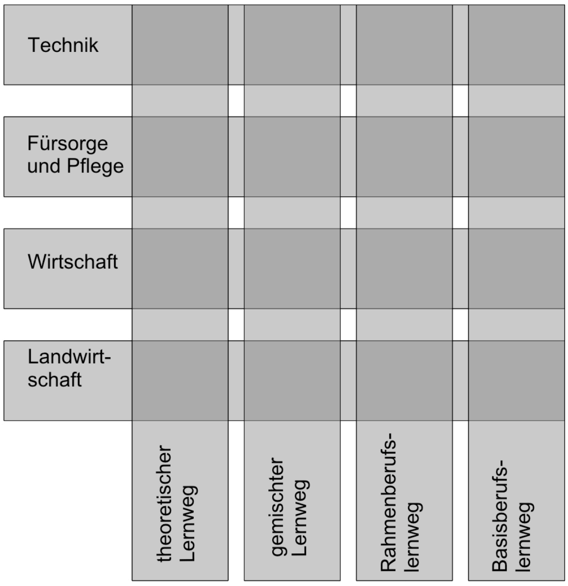


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Kombinationsmöglichkeiten in der VMBO (eigene Darstellung nach Tuschen, 1999, o. S.)

ihrer theoretischen Ausrichtung sowie in dem geforderten Niveau. In diesem Konzept wird auch auf eine praktische Ausbildung Wert gelegt. Das heißt, dass die SchülerInnen auch Betriebspraktika absolvieren müssen, welche benotet werden. Nach vier Jahren schließen die SchülerInnen mit dem VMBO-*Diploma* diese Schule ab.

Da diese Zusammenführung und Reform erst kürzlich vollzogen wurde, gibt es durch die vielen Kombinationen teilweise Probleme mit benötigten Lehrmitteln. Vor allem sind durch die Reform die Anforderungen an das Lehrpersonal sehr hoch geworden. Eine Lösung der daraus resultierenden Probleme, behauptet Tuschen (1999, o. S.), ist zur Zeit noch nicht in Sicht. Die VMBO dauert vier Jahre und die AbsolventInnen haben nach Brinkmann (1996, S. 133) drei Möglichkeiten zur Weiterbildung:

1. Lehrlingswesen: Die Ausbildung ist dem System in Österreich sehr ähnlich und unterscheidet sich nur im Angebot einer weiterführenden Ausbildung nach der dreijährigen Grundausbildung.

2. Wechsel auf die HAVO: Der Abschluss der VMBO berechtigt zum Besuch des letzten

7 dt. Lehrwegen
8 dt. Sektoren, Fachgebieten

HAVO-Jahres um danach den Abschluss zu erlangen.

3. MBO (Berufsbildender Sekundarunterricht der Oberstufe): Ein Abschluss an der MBO ermöglicht den Zugang an die Fachhochschulen.

Neben diesen drei Haupttypen gibt es eine Art „Abendschule“ die zwei bis drei Jahre dauert. Abbildung 2.2 gibt einen guten Überblick über das Schulsystem. Die Zusammenführung von MAVO und VBO zur neuen VMBO ist in dieser Abbildung nicht berücksichtigt.

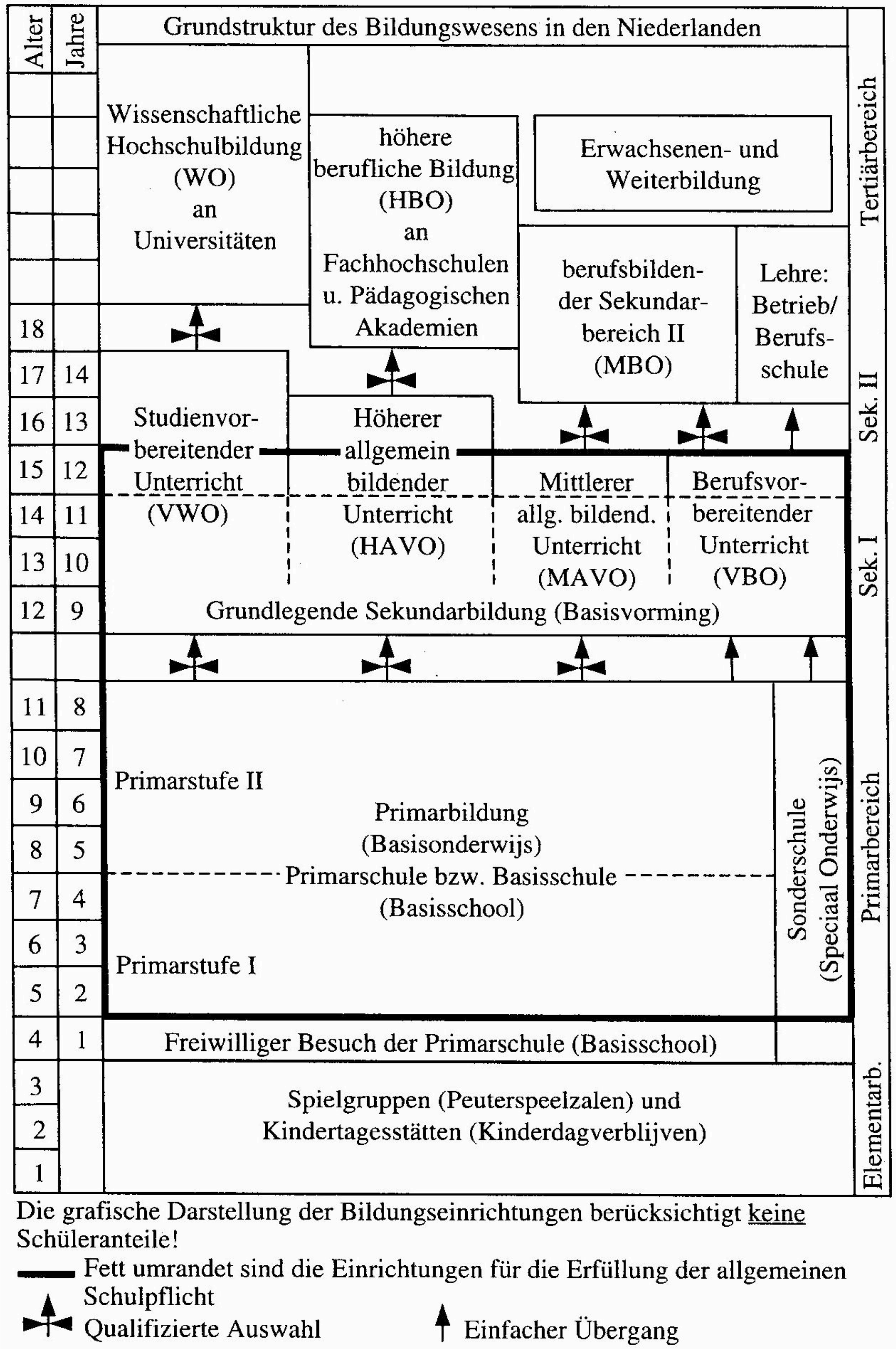


Abbildung 2.2: Darstellung des Schulsystems (aus Felber (2005, S. 9))

2.4 Schulinspektion und Zentralexamen

In diesem Abschnitt wird kurz auf die Rolle der Schulinspektion in den Niederlanden und auf die zentralen Abschlussexamen eingegangen.

2.4.1 Die SchulinspektorInnen

Dieser Abschnitt soll eine kurze Information über das Inspektionswesen in den Niederlanden geben. Für weitergehende Informationen verweist der Verfasser auf eine Publikationen von Andrea Sparka[9], die beim niederländischen Schulinspektorat bezogen werden kann.
Dem ehemaligen Schulinspektor Johan C. van Bruggen (2006, S. 106) folgend unterscheidet der Verfasser am Beginn dieses Abschnitts zwei Termini, die im weiteren Verlauf benötigt werden.

- Schulinspektion: Damit ist der „Akt“ an sich, der Besuch der Schule durch InspektorInnen, gemeint.
- Schulinspektorat: Dies ist die Organisation, die für die Inspektionen zuständig ist und bei welcher die InspektorInnen beschäftigt sind.

Die Aufgaben und Befugnisse der InspektorInnen als auch des Schulinspektorats sollen im Folgenden kurz aufgezählt werden.

2.4.1.1 Aufgabe und Stellung des Schulinspektorats

Das *Inspectie van hat Onderwijs* (dt. Inspektions„behörde“ des Unterrichts) steht in den Niederlanden etwas außerhalb der administrativen Struktur. Sie ist dem Minister direkt unterstellt, welcher aber keine Weisungsbefugnis hat. Dieser erhält einen jährlichen Bericht über den Qualitätszustand des niederländischen Schulsystems, den er jedoch sofort und unbearbeitet dem Parlament vorzulegen hat (vgl. van Bruggen, 2006, S. 109). Da das Schulinspektorat auch direkt mit den Schulen zusammenarbeitet, stellt sie sozusagen ein direktes Bindeglied zwischen Ministerium und Schule dar (vgl. Hendriks, 2006, S. 137).
Die Hauptaufgabe des Schulinspektorats ist natürlich die Inspektion der (privaten und öffentlichen) Schulen. Wichtig sind in diesem Zusammenhang sowohl die Prüfung der geltenden gesetzlichen Vorgaben[10] als auch die Überprüfung von Qualitätskriterien. Diese Kriterien sind im WOT[11] festgelegt. Sowohl die Schulen als auch das Schulinspektorat sind an dieses Gesetz und damit an die Vorgaben gebunden (vgl. van Bruggen, 2006, S. 108). Hendriks

9 Sparka, Andrea (2001): Das niederländische Inspektorat unter Berücksichtigung des Umgangs mit Schulautonomie. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs
10 Die Erfüllungsaufsicht ist Teil der Qualitätsbeurteilung.
11 Wet op het Onderwijs Toezicht (dt. Schulaufsichtsgesetz)

nennt als Beispiele für solche Qualitätskriterien das Schulklima oder das pädagogische und didaktische Handeln. Die Kriterien beziehen sich nie auf einzelne LehrerInnen, sondern immer auf die Schule. Zentrales Element der WOT ist nach Felber (2005, S. 11) das Prinzip der Verhältnismäßigkeit. Dieses Prinzip kommt sowohl bei der Intensität der Inspektionen, als auch bei deren Frequenz zur Anwendung. Das heißt, ist die Selbstevaluation der Schule ausführlich, genau und aktuell, so agieren die InspektorInnen zurückhaltender als bei Schulen, die keine Selbstevaluation durchführen. Das Schulinspektorat, so der ehemalige Schulinspektor van Bruggen, versucht dort zu arbeiten, wo die Hilfe benötigt wird. Seit 2003 werden alle Schule der Niederlande jährlich besucht und kontrolliert (vgl. Sparka, 2003, S. 48). Diese „Periodischen Untersuchungen“ wurden durch eine Änderung im WOT vorgeschrieben. Davor wurden innerhalb von drei Jahren alle Schulen besucht.
Die Beurteilung der Schulqualität stützt sich im Allgemeinen auf zwei Säulen (vgl. van Bruggen, 2006, S. 117ff).

1. Dokumentenanalyse
   Die InspektorInnen analysieren sämtliche Dokumente der Schule, worunter die Kennzahlen[12] der Schule, Schulprogramm, Ergebnisse der Selbstevaluation u.ä. fallen.

2. Schulbesuch
   Der Schulbesuch dauert je nach Intensität der Inspektion ein bis mehrere Tage und wird von ein bis zwei InspektorInnen durchgeführt (vgl. Felber, 2005, S. 17). Dabei wird nicht nur der Unterricht beobachtet, sondern auch Gespräche mit allen in einer Schule vertretenen Gruppen (SchülerInnen, LehrerInnen, Schulleitung, Schulträger, Eltern) geführt, um ein umfassendes Bild zu erhalten.

Die Beurteilungen wurden in den Niederlanden stark schematisiert. In Abbildung 2.3 sind die 13 Punkte aufgeführt, die die InspektorInnen überprüfen[13]. Bei Routineinspektionen (RST[14]) werden immer nur die „Kernpunkte[15]“ (Nr. 1,2,4,5,6 und 13 (vgl. Abbildung 2.3)), überprüft und evaluiert (vgl. Sparka, 2003, S. 43f). Der erste Bericht wird der überprüften Schule gesendet, die die Möglichkeit zur Stellungnahme erhält und Verbesserungsvorschläge machen kann, was von den Schulen auch in Anspruch genommen wird (vgl. Sparka, 2002, S. 51). Daraufhin wird der endgültige Bericht der Inspektion sowohl gedruckt, als auch im Internet[16] veröffentlicht.
Das Schulinspektorat hat außerdem die Möglichkeit Themeninspektionen (Die Arbeit mit

12 Schulabschlüsse, Ergebnis der Abschlussprüfungen, etc.
13 Abbildung entnommen aus: Sparka (2002, S. 49)
14 Regulier Schooltoechzicht
15 Kernpunkt meint zentral für die Qualität der Schule.
16 Die Zeitung „Truow“ erwirkte 1997 einen Richterspruch, der eine allgemeine Zugänglichkeit der Ergebnisse verlangte. Die Folge war ein Schulranking, welches manche Schulen dazu animierte, Veränderungen zu beginnen (vgl. Hendriks, 2006, S. 126)

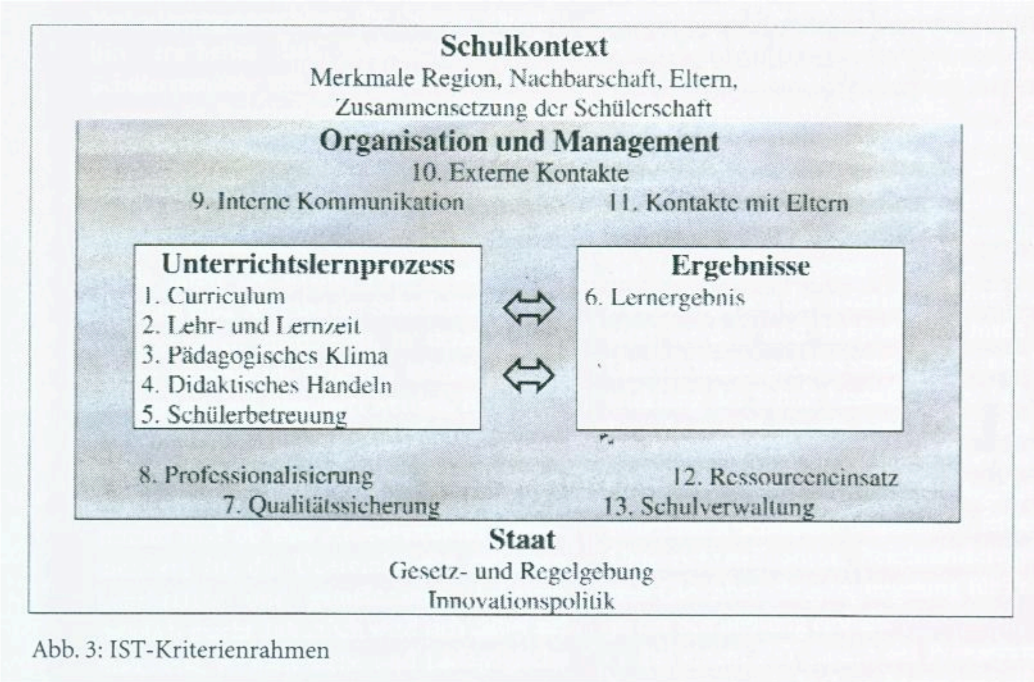


Abbildung 2.3: Kriterien einer umfassenderen Inspektion

fächerübergreifenden Projekten bei älteren SchülerInnen im Gymnasium) durchzuführen. Dabei ist es möglich die Kriterien zu verfeinern und damit ein klareres bzw. tieferes Bild des Schulsystems zu bekommen (vgl. van Bruggen, 2006, S. 109).

2.4.1.2 Konsequenzen

Was passiert, wenn eine Schule bei einer Routinebewertung schlecht abschneidet? Das Inspektorat hat die Möglichkeit die Schulen im Rahmen einer genaueren Inspektion (*Integraal Schooltoezicht* IST) zu untersuchen. Meist gibt es auch einen Dialog mit dem jeweiligen Schulträger (vgl. Sparka, 2002, S. 52). In Fällen, in denen grobe Qualitätsmängel auftauchen, besteht die Möglichkeit mittels einer sehr intesiven Inspektion (*Geintensiveerd Schooltoezicht* GST) eine Verbesserung zu erreichen. Dabei wird auf Grundlage eines von der Schule ausgearbeiteten Plans, eine Entwicklung vom Inspektorat „nur“ stimuliert. Der Impuls geht von der jeweiligen Schule bzw. dem Schulträger aus (vgl. Sparka, 2002, S. 52).
Wird eine Verletzung der gesetzlichen Rahmenbedingungen festgestellt, ist das Inspektorat befugt, den Bildungsminister vertraulich darüber zu informieren. Dieser kann die finanzielle Unterstützung der betroffenen Schule ganz oder teilweise einstellen. Diese Möglichkeit kommt jedoch nur sehr selten zum Einsatz (vgl. Sparka, 2002, S. 52f).
Grundsätzlich hat das Inspektorat keine Möglichkeiten direkte Sanktionen zu verhängen. Durch die Veröffentlichung der Ergebnisse, erhöht sich bei schlechtem Abschneiden jedoch

der öffentliche Druck auf die Schule. Diese „Machtlosigkeit“ führt aber auch zu einem vertrauensvollen Umgang mit den InspektorInnen von Seiten der Schule. Diese werden nicht als Kontrolleure empfunden, sondern als Helfer, weshalb sie in ihrer Arbeit von den Schulen im allgemeinen unterstützt werden (vgl. Spiewak, 2003, o. S.).
Ein wichtiger Punkt ist nach van Bruggen (2006, S. 109) die Trennung von Inspektion und Beratung. Die InspektorInnen stellen „nur“ den Befund aus, sollten aber keine Lösungen liefern[17]. Die Aufgabe Schulen in ihrer Entwicklung zu unterstützen, haben in den Niederlanden die Institute SLO (Institut zur Lehrplanentwicklung), SVO (Institut für Bildungsforschung) und CITO (vgl. Achorner, 2003, S. 49). Zusätzlich zu den angeführten Instituten, existieren laut van Bruggen (2006, S. 108) eine Vielzahl kleinerer Innovationsinstitute (APS, CPS, etc.), welche von den Schulen individuell in Anspruch genommen werden können. Die Finanzierung erfolgt über das vom Ministerium zur Verfügung gestellte Budget.

2.4.1.3 Vor- und Nachteile des Systems

Das System der Schulinspektion wie es in den Niederlanden praktiziert wird, hat natürlich auch Vor- und Nachteile. Die derzeitige Form der Inspektionen besteht seit Ende der neunziger Jahre und wird immer wieder weiterentwickelt und evaluiert.

Vorteile:

- Das Inspektorat handelt rückwirkend und evaluationsorientiert (vgl. Feder, 2004, S. 100).
- Jährliche Inspektionen führen, so van Bruggen (2006, S. 114) kaum zu „unentdeckten“ Problemen.
- Schule als Gesamtsystem wird evaluiert (vgl. Sparka, 2002, S. 48).
- Inspektionsergebnisse werden von Schulen ernst genommen und sind Ausgangspunkt für Entwicklungen (vgl. Int-Veen, 2003, S. 45).
- InspektorInnen sind gut ausgebildet (vgl. van Bruggen, 2006, S. 120).
- Große Akzeptanz der Inspektionen (vgl. Spiewak, 2003, o. S.)

Nachteile:

- Starre „mechanische“ Bewertung von Qualität (vgl. Sparka, 2002, S. 53)

17 Es besteht die Gefahr die Unabhängigkeit zu verlieren, da man vielleicht die eigenen Ideen evaluieren müsste.

- LehrerInnen bekommen praktisch kein Feedback und erwarten dies auch nicht (vgl. Int-Veen, 2003, S. 47).
- Unterrichtseinheiten werden kaum zur Gänze beobachtet (vgl. Int-Veen, 2003, S. 47).
- Auf „Eigenheiten" der Schulen wie Daltonplan oder Montessoripädagogik kann nur sehr eingeschränkt eingegangen werden (vgl. Hendriks, 2006, S. 130).
- Kein direkter Einfluss auf Verbesserungen (vgl. Sparka, 2002, S. 54)
- „Schwache" Schulen könnten bei regulären Inspektionen übersehen werden (vgl. Sparka, 2002, S. 53).

2.4.2 Zentralexamen

In den Niederlanden müssen sich alle SchülerInnen am Ende ihrer Schulzeit einem Abschlussexamen stellen. Dies ist nach dem CITO-Examen am Ende der Primarstufe die zweite große Prüfung, und beschließt die Sekundarstufe. Im Folgenden werden sowohl das CITO- als auch das Abschlussexamen kurz beschrieben.

2.4.2.1 CITO-Examen

Das so genannte CITO-Examen[18] findet jährlich im Februar statt und ist grundsätzlich freiwillig. Die Nichtteilnahme hat für das einzelne Kind keine negativen Auswirkungen. Der Test wird jedoch sehr stark beworben, sodass die Zahl der Nichtteilnehmenden recht gering ist. Die Ergebnisse des Tests sind Empfehlungen für die weitere Schullaufbahn und sollen die Entscheidungsfindung, in welchen weiterführenden Schultyp der Lernende wechselt, erleichtern. Manche Schulen der Sekundarstufe verlangen Mindestpunkte für eine Aufnahme. Die Kinder werden dabei in vier verschiedenen Bereichen (vgl. N., 2007, o. S.) mittels Multiple-Choice-Test getestet.

1. Sprache: Dieser Teil bezieht sich auf die niederländische Sprache und ihr Verständnis (Rechtschreibung, Leseverständnis, Satz- und Textstruktur).
2. Arithmetik/Mathematik: Dieser Teil testet grundlegende mathematische Fähigkeiten wie Bruchrechnen, der Umgang mit Prozenten, aber auch Rechnen mit Geld und Zeit.
3. Informationsverarbeitung[19]: Der Umgang und die Beschaffung von Informationen ist Gegenstand dieses Testteils, wie beispielsweise das Verständnis von Landkarte oder Diagrammen.

18 Dieser Name resultiert aus der hauptsächlichen Verwendung (80% der Schulen) der Tests, die vom Zentralen Institut für Testentwicklung (CITO) entwickelt wurden.
19 Verstehen von Sachtexten, Gebrauch von Lexika, Interpretieren von Tabellen und Karten,...

4. Sachkunde: Hier wird das Wissen in den Bereichen Chemie, Biologie und Physik getestet. Dabei geht es um allgemeine Verständnisfragen.

Für jeden Bereich werden jährlich ein Pool von Fragen ausgearbeitet, wobei die Anzahl der Fragen pro Wissensgebiet nicht gleich ist. So gibt es für den Bereich Sprache 100 Fragen, für Mathematik 60 Fragen, für Informationsverarbeitung 40 Fragen und für Sachkunde 90 Fragen. Die Kinder arbeiten drei Vormittage daran alle 290 Fragen zu beantworten, wobei die Wissensgebiete immer abwechseln (vgl. N., 2007, o. S.).
Die Testfragen werden jährlich von CITO-MitarbeiterInnen und Lehrkräften entwickelt und von FachexpertInnen geprüft (vgl. van Ackeren, 2003, S. 57). Das Ergebnis wird nicht nur hinsichtlich des Kindes interpretiert. Auch die Ergebnisse der Schulen werden verwendet. So stützt sich ja ein Teil der Inspektion genau auf diese Ergebnisse (siehe Seite 14). Doch nicht nur auf Schulebene werden die durchschnittlich erreichten Punkte ausgerechnet, sondern auch immer ein nationaler Durchschnitt bekanntgegeben.

2.4.2.2 Abschlussexamen

Das Abschlussexamen ist für alle SchülerInnen verpflichtend und im Allgemeinen zweigeteilt. Es besteht aus dem *centrale exemens* (dt. Zentralexamen) und dem *school examens* (dt. Schulexamen). Zentralexamen und Schulexamen bestimmen die Note in jedem Fach zur Hälfte. Werden alle Fächer positiv benotet so erhält die/der Schülerin/Schüler das *diploma* (dt. Diplom), welches die Schulform mit im Namen trägt (z.B. *diploma-VWO*).

- **Zentralexamen**: Die zentralen Abschlusstests werden in den gesamten Niederlanden an denselben Tagen durchgeführt. Entwickelt werden diese Tests unter der Aufsicht der CEVO[20] von ExpertInnen und der Firma CITO. Je nach gewählter Schulart, bzw. Schwerpunkt wählen die SchülerInnen sechs bis acht Fächer in denen sie die Tests absolvieren (vgl. van Ackeren, 2003, S. 57). Die zentralen Tests am Ende jeder sekundären Schulform werden im allgemeinen in den Schulen durchgeführt, teilweise aber zentral ausgewertet.
  Die Tests der letzten Jahre sind auf der offiziellen Homepage der Abschlussprüfung[21] einsehbar. Dort wird außerdem der Tag der Prüfung und auch der „Stundenplan“ bekanntgegeben. Schülerinnen und Schüler haben damit die Möglichkeit, sich recht gut auf diese Abschlussprüfung vorzubereiten. Eine Aufgabe des VWO Endexamens wird später in Abschnitt 3.3.2.1 vorgestellt.

- **Schulexamen**: In diesem zweiten, schulinternen Teil der Abschlussprüfung werden die SchülerInnen schriftlich, mündlich oder praktisch geprüft. Die Themengebiete

20 Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven
21 URL: http://www.eindexamen.nl

der Prüfungen sind zwar zentral vorgegeben, die Prüfungen selbst aber von den jeweiligen LehrerInnen zusammengestellt, wobei sie die Möglichkeit haben, auf die CITO-Datenbank zuzugreifen. Dieser Teil der Prüfung gibt den Schulen die Möglichkeit, gesetzte Schwerpunkte auch in die Abschlussprüfung einzubinden (vgl. van Ackeren, 2003, S. 58), und damit ihr Schulprofil zu stärken. Die Arbeiten werden mittels Zweitkorrektoren[22] beurteilt. Die SchülerInnen haben teilweise auch die Möglichkeit, schriftliche Abschlussarbeiten oder praktische Arbeiten, vor allem in der VMBO, anzufertigen, die als Teil der Schulexamina gezählt werden.

Sowohl beim CITO-Examen als auch bei den Abschlussexamen nimmt Mathematik eine große Rolle ein. Das Ausmaß der Fragen ist je nach Schultyp natürlich unterschiedlich.

2.5 LehrerInnenausbildung

Die Ausbildung der LehrerInnen erfolgt in den Niederlanden, ähnlich wie in Österreich, nicht ausschließlich an den Universitäten. Nach Brinkmann (1996, S. 134) lassen sich grundsätzlich drei verschiedene Lehrberufe unterscheiden.

1. LehrerInnen ersten Grades: Diese LehrerInnen unterrichten vor allem im Sekundarbereich II.

2. LehrerInnen zweiten Grades: Diese PädagogInnen werden im Sekundarbereich I eingesetzt.

3. GrundschullehrerInnen: Sie unterrichten in der Primarstufe des Schulsystems.

Die Ausbildung für den jeweiligen Beruf erfolgt an unterschiedlichen Stätten. Schon Skiera (1986, S. 52) kritisiert diese nicht einheitliche Ausbildung im Lehrberuf.

2.5.1 Universitäre Ausbildung

Die Ausbildung für ein Fach an den Universitäten erfolgt im Rahmen eines postgradualen Studiums, welches ein Jahr dauert. Im vorangegangenen vierjährigen Fachstudium wird auf den Lehrberuf, abgesehen von einer zweimonatigen Orientierungsphase, nicht eingegangen (vgl. Brinkmann, 1996, S. 135). Grundsätzlich geht man in den Niederlanden davon aus, die Lehrbefugnis für ein Fach jenen zu erteilen, die ein Fachstudium abgeschlossen haben (vgl. Skiera, 1986, S. 52). Zusätzlich müssen auf das Fach bezogene Didaktik und Pädagogik gelernt werden. Daher konzentriert sich die Ausbildung vor allem auf didaktische und pädagogische Fähigkeiten. Die praktische Ausbildung erfolgt durch MentorInnen an den Schulen, wobei Hospitationen und selbstständiges Unterrichten bewältigt werden müssen.

22 Zunächst korrigiert die Lehrperson der Schule, anschließend eine schulexterne Lehrperson die Arbeit.

Ein Unterrichtspraktikum (früher Probejahr) wie in Österreich gibt es in den Niederlanden nicht. Die Ausbildung schließt mit der Lehrbefugnis zur LehrerIn ersten Grades ab.

2.5.2 Pädagogische Hochschulen

Die pädagogischen Hochschulen sind in den Niederlanden für die Ausbildung der restlichen LehrerInnen zuständig. Das Studium dauert jeweils vier Jahre und schließt mit der entsprechenden Lehrbefugnis ab. Das erste Studienjahr wird laut Brinkmann (1996, S. 135) für beide Studien als propädeutisches Jahr geführt, an dessen Ende eine Empfehlung bezüglich des weiteren Studiums steht. Die Ausbildung ist sehr stark „verschult“ und lässt kaum Platz für Persönlichkeitsentwicklung, wie Feder (2004, S. 100) in seiner Dissertation anmerkt.
LehrerInnen zweiten Grades konzentrieren sich dabei auf ein Fach, welches sie später unterrichten. Der Schwerpunkt der Ausbildung liegt dabei auf der fachwissenschaftlichen Seite, die etwa 75% der Ausbildungszeit in Anspruch nimmt. Der Rest wird durch schulpraktische und fachdidaktische Lehre ergänzt (vgl. Brinkmann, 1996, S. 135). Da GrundschullehrerInnen den gesamten Fächerkanon unterrichten, ist die Ausbildung entsprechend weit aufgefächert. Je nach pädagogischer Hochschule ist auch die Ausbildung in reformpädagogischen Prägungen (Montessori, Jenaplan, etc.) möglich (vgl. Skiera, 1986, S. 52).

2.5.3 Probleme

Hans Feder (2004) spricht in seiner Dissertation (2004, 99ff) einige Punkte an, die die LehrerInnenausbildung kritisch hinterfragen. Da der Großteil der LehrerInnen in den pädagogischen Hochschulen ausgebildet werden und damit die fachliche und persönliche Ausbildung mit der eines Universitätsstudiums nicht vergleichbar ist, kann nur von einem geringen Grad der Professionalisierung beim Berufseintritt ausgegangen werden. Dieses Defizit verlangt geradezu nach professioneller Begleitung, die von den oben beschriebenen InspektorInnen (vgl. 2.4.1.1) in Zusammenarbeit mit den Institutionen zur Schulentwicklung auch erfüllt wird. Ein weiterer Punkt ist die hohe Identifikation der LehrerInnen mit ihren Schulen. Durch die freie Wahl, in welcher Schule die LehrerInnen unterrichten, wählen diese oft Schulen, deren ideologische und pädagogische Ausrichtung den persönlichen Neigungen der LehrerInnen entsprechen. Dies kann von Vor- und Nachteil sein. Einerseits sind die LehrerInnen stärker motiviert und bringen sich persönlich mehr ein als im österreichischen System[23]. Andererseits besteht die Gefahr, dass die Lehrenden sich in der Schulideologie verlaufen und sich so gesellschaftlich isolieren (vgl. Feder, 2004, S. 100).

23 Betrachtet wird in beiden Fällen der Durchschnitt des Lehrpersonals.

2.6 Zusammenfassung

Grob lässt sich das Schulsystem in den Niederlanden als sehr zergliedert klassifizieren. Die Möglichkeit Schulen zu gründen, bescherte den Niederlanden ein sehr heterogenes Schulsystem. Die Reformen der letzten 20 Jahre versuchten diese Heterogenität etwas zu vereinheitlichen. Eine Folge davon war die Bildung von „Schulclustern“, bei denen sich verschiedene Schultypen zu einer großen Schule zusammenschlossen. Als Beispiel sei die von Marga Pröhl (1996, S. 54) beschriebene Thorbecke Scholengemeenschap angeführt, die eine VMBO, eine HAVO und ein Atheneum anbieten. Da in den Niederlanden nach Abschluss einer Schulform in die nächsthöhere gewechselt werden kann, entsprechende Benotungen sind Voraussetzung, ist die Durchlässigkeit des Systems recht hoch. Das Nebeneinander der Schultypen, wie im oben beschriebenen Fall, ist hierbei natürlich ein Vorteil.
Ein Vergleich mit dem österreichischen Schulsystem ist bedingt, aber dennoch möglich. Ein gravierender Unterschied ist natürlich im Primarbereich, wo sowohl Dauer als auch Art des Unterrichts stark differieren. Die Sekundarstufe lässt sich gut mit der österreichischen vergleichen, da eine starke äußere Differenzierung in Schultypen stattfindet. Die SchülerInnen müssen sich aber erst mit 12 Jahren entscheiden, welchen Schultyp sie wählen. Das Wechseln der Schultypen ist wie in Österreich möglich, aber nicht die Regel. Oft erfolgt ein Wechsel erst nach Beendigung eines Schultyps.

KAPITEL 3

Realistic Mathematic Education (RME)

Warum heißt das didaktische Konzept in den Niederlanden RME?
Der Grund liegt nicht im verstärkten Bezug der Mathematik zur **Real**ität, sondern in der Übersetzung der Phrase „to imagine" ins Holländische. Dort heißt sich etwas vorstellen nämlich „zich **REALISE**ren" (van den Heuvel-Panhuizen und Wijers, 2005, S. 288). Der Begriff „Realistic" hat also a priori eigentlich nichts mit der verstärkten Verknüpfung der Mathematik mit der Realität zu tun. Dennoch ist gerade diese Verknüpfung einer der Grundpfeiler der RME.

3.1 Historische Entwicklung

RME wurde nicht plötzlich erfunden, sondern entwickelte sich über fast 20 Jahre von Anfang der 1970er Jahre an. Auslöser der Entwicklung war die didaktische Strömung der „New Math", die in den 1970er Jaheren zunehmend die Mathematikdidaktik in Europa beeinflusste. Bei einer Tagung der Niederländischen PädagogInnenvereinigung im Juni 1968 warnte Boomsma mit folgenden Worten:

> Die unterschiedlichen Richtungen in der New-Math, die wir im Ausland wahrnehmen, müssen für uns eine Warnung sein, aber auch ein Ansporn, um die Probleme mit der New-Math in einem gemeinsamen Gespräch anzupacken, damit die holländische Schulwelt vor einem chaotischen Zustand im Rechenunterricht bewahrt wird. (Boomsma 1968 zitiert nach Treffers (1982, S. 14))

Als Reaktion wurde noch im selben Jahr das WISKOBAS[24]-Projekt begonnen, welches in 3.2 genauer erläutert wird. Doch nicht nur der immer größer werdende Einfluss von „New Math" regte die Entwicklung an. In den Niederlanden gab es zu Beginn der 1970er Jahre vier grundsätzliche didaktische Richtungen. Die im Verlauf des WISKOBAS-Projekts entwickelte

24 **Wisk**unde **o**p de **bas**isschool, dt. Mathematik in der Grundschule.

didaktische Theorie und in weiterer Folge auch RME befindet sich im Spannungsfeld jener Richtungen, welche im Kapitel 3.1.1 genauer beschrieben werden.
Eine zentrale Figur bei der Entwicklung von RME stellt Hans Freudenthal dar. Der Mathematiker trieb den Prozess durch seine Ideeen und Einfälle immer voran. In seinem Buch „Mathematic as an educational task“ gibt er erste grundlegende Ideen, wie der Mathematikunterricht in den Niederlanden aussehen sollte. Eine der zentralen Forderungen ist, die Realität als Quelle für die Mathematik zu nutzen. Dieser historische Ansatz, Mathematik, mathematische Instrumente und Theorien wurden immer aufgrund vorliegender realer Probleme entwickelt, fordert die Einbindung der realen Welt in den Mathematikunterricht. Bis zu jener Zeit war die reale Welt nur als abschließendes Anwendungsgebiet der formalen Mathematik gesehen und verwendet worden. Klassisch für diese Sichtweise sind so genannte eingekleidete Extremwertaufgaben, wie z. B. die Frage wie muss ein Grundstück aussehen, damit die Länge des Zauns minimal wird? Diese Beispiele werden in der realen Welt so niemals vorkommen und sind somit für die SchülerInnen sinnleer.

3.1.1 RME im Spannungsfeld verschiedener didaktischer Richtungen

Alle vier im Folgenden beschriebenen didaktischen Richtungen hinterließen laut Treffers (1982, S. 14) ihre Spuren bei der Entwicklung von RME.

3.1.1.1 Die empirische Richtung

Wird Mathematikunterricht in der Schule auf Grundlage der Empirie betrieben, so sind es immer reale Objekte die mithilfe der Mathematik untersucht werden. Diese können sowohl aus der physikalischen, biologischen oder sozialen Wirklichkeit entstammen (vgl. Treffers, 1982, S.15).
Vor allem in England wird Unterricht nach dem empirischen Ansatz angewandt. Kinder lernen dort zu zählen, wiegen und messen. Immer mit Dingen, die ihnen vertraut und bekannt sind. O´Brien warnt jedoch, dass die reale Umgebung nicht nur der Beginn, sondern oft auch das Ende der Untersuchungen sein kann, und die SchülerInnen auf der Ebene der Beschreibung stehen bleiben (vgl. O´Brien, 1976, S. 95). Gedachte Szenarien wie im Punkt 3.2.2 sind von der Untersuchung ausgeschlossen. Ebenso werden Aufgaben ohne Kontext, in denen nur formal gerechnet wird, vermieden.

3.1.1.2 Die strukturelle Richtung

Im Gegensatz zur empirischen Richtung sind nun gedachte Geschichten und Wirklichkeiten erlaubt. Treffers erwähnt F. Papy, der in seinen Entwürfen zum Mathematikunterricht Zahlenpaare tanzen, Punkte sprechen und Geraden singen lässt. Im Unterschied zu WISKOBAS

ist eine Rückführung in die „reale“ Welt nicht mehr so einfach. Die Aufgaben bei WISKOBAS sind so gestaltet, dass im Anschluss an „gedachte“ Geschichten eine Anwendung in der „realen“ Welt gesucht wird.
Der strukturelle Ansatz benützt die „gedachten“ Welten, um in ihnen die mathematischen Werkzeuge zu entwickeln und zu benutzen. Hier liegt auch die „Schwäche“ dieses Ansatzes. Den SchülerInnen fällt es schwer die entwickelten mathematischen Werkzeuge in realen Situationen anzuwenden.

3.1.1.3 Die arithmetische Richtung

Diese didaktische Richtung bildet die Grundlage für das Konzept „New Math“ welches nach dem so genannten „Sputnik-Schock“ in den USA entwickelt und umgesetzt wurde. Die mathematischen Fähigkeiten sollen mittels Einüben erlernt werden. Aufgaben, die einen Kontext beinhalten, gibt es nicht. O´Brien beschreibt den Unterricht folgendermaßen:

> ... children are called to stop the successful spontaneous organizing [...] children are treated as empty, passiv urns into which pre-orgnaized (adult-organized) schemas are disposited. (O´Brien, 1976, S. 93)

Fähigkeiten wie Abschätzen, Modellieren, Begründen und ähnliche werden nicht vermittelt. Viel eher werden die SchülerInnen dazu angehalten, vorgefertigte Denkschemata zu übernehmen und zu kopieren. Ein grundlegendes Verständnis der mathematischen Konzepte ist nicht unbedingt nötig.

3.1.1.4 Der niederländische Rechenunterricht vor WISKOBAS

Grundelement im Rechenunterricht vor WISKOBAS war das „mechanische Rechnen“. SchülerInnen führten im Lauf ihrer Grundschulzeit zwischen zehn- und zwanzigtausend Rechnungen durch. Freudenthal kritisiert diese Art des Unterrichts in einer Rede:

> ... der Mensch wird betrachtet, als ob er ein zweckmäßig zu programmierender Computer wäre ... (Freudenthal zitiert nach Treffers (1982, S. 17))

In jeder Phase des Lernprozesses ist das Ziel eindeutig und klar definiert. Der Lernende hat keine Möglichkeit eigene Lösungswege zu beschreiten. Die Aufgaben sind losgelöst vom Kontext und nur mit Hilfe der bekannten Regeln zu lösen. Trotz der Kritik an dieser Art des Unterrichts wurden einzelne Elemente in das Konzept von WISKOBAS übernommen.

3.1.2 New Math

Da der größer werdende Einfluss von *New Math* in Europa einer der Gründe für die Entwicklung von RME war, soll dieses Konzept kurz vorgestellt werden. *New Math* war das Resultat einer Entwicklung, die nach dem Start der russischen Raumsonde Sputnik in den

USA einsetzte. Das Ziel war es mehr SchülerInnen den Zugang zu höherer mathematischer Bildung zu ermöglichen. Dazu wurde ein Teil der Hochschuldidaktik in die Schule transferiert. Dabei wurde vor allem der Inhalt des Curriculums geändert. Themen wie das Rechnen mit Zahlen in nichtdezimalen Basen oder Venn-Diagramme fanden Eingang. Eine Exaktifizierung der Begriffe im Mathematikunterricht wurde angestrebt, was aber eine ungeheure Stoffvermehrung zur Folge hatte. Die Mathematik vor allem in der Oberstufe wurde, so Friedrich Barth „... exakter als an der Hochschule.“ (Barth, 1990, S. 305) und transformierte sich zu einer Art „Pseodomathematik“ (Barth, 1990, S. 305). Auch formale Grundlagen mussten exakt gelehrt werden, da sonst weiterführende Teilgebiete nicht verstanden werden konnten. Dabei gab es vor allem zwei Probleme.
Erstens wurde *New Math* für SchülerInnen entwickelt, die die Fähigkeit und den Willen besaßen Mathematik auf einem hohen Level zu betreiben, schreckte jedoch weniger begabte SchülerInnen ab. Roberts und Walmsley zitieren in ihrem Artikel einen Lehrer aus Arizona;

> ... The material motivated the abel and ambitious and frightened the slow learners. Most of the slow learners were lost and could not participate. (Roberts und Walmsley, 2003, S. 471)

Zweitens waren viele LehrerInnen mit den neuen Vorgaben überfordert und wurden von der neuen Entwicklung überrascht. Eine Folge davon war, dass man in den USA versuchte, die Zusammenarbeit zwischen LehrerInnen und den EntwicklerInnen zu verstärken bzw. direkt in die LehrerInnen Aus- und Fortbildung einzuwirken. Die LehrerInnen standen jedoch auch in weiterer Folge der *New Math* kritisch gegenüber. (vgl. Roberts und Walmsley, 2003, S. 468ff)
Um zu verdeutlichen wie Unterricht in *New Math* funktionierte zitiert der Verfasser eine kurze Stelle aus dem Buch „Why Johnny can´t add“ von Morris Kline (1974):

> Let us look into a modern mathematics classroom. The teacher asks, „Why is $2 + 3 = 3 + 2$?“
> Unhesitatingly the students reply, „Because both equal 5“
> No, reproves the teacher, the correct answer is because the commutative law of addition holds. Her next question is, „Why is $9 + 2 = 11$?“
> Again the students respond at once: „9 and 1 are 10 and 1 more is 11.“
> „Wrong,“ the teacher exclaims. „The correct answer is that by the definition of 2, $9 + 2 = 9 + (1 + 1)$.
> But because the associative law of addition holds,
> $9 + (1 + 1) = (9 + 1) + 1$.
> Now $9 + 1$ is 10 by the definition of 10 and $10 + 1$ is 11 by the definition of 11.“
> ... (Kline, 1974, S. 2)

Schon in dieser kurzen Sequenz lässt sich die Struktur von *New Math* erkennen. Wichtig war eine mathematisch richtige Anwendung der Regeln und Sätze. Das selbständige Entdecken der Zusammenhänge war für die SchülerInnen praktisch nicht möglich.
Das von Boomsa eingangs zitierte Chaos in den Klassen ist leicht vorstellbar. Selbst grundlegende mathematische Tatsachen mussten genau bewiesen werden, was für die SchülerInnen sinnleer und unverständlich war. Vor allem in Europa setzte sich diese neue Richtung langfristig kaum durch.

3.2 WISKOBAS

Das WISKOBAS Projekt wurde Mitte 1971 im damals neu gegründeten IOWO[25] realisiert und begonnen. Es gliederte sich grob in drei Phasen:

1. Untersuchungsphase (1971-1973)
2. Integrationsphase (1973-1975)
3. Phase der Abwicklung und fortgesetzte Entwicklung (ab 1976)

In der Untersuchungsphase wurden Unterrichtsstunden von IOWO-MitarbeiterInnen entworfen, an Schulen ausprobiert, evaluiert und an LehrerInnen weitergegeben. Dabei wurden sowohl bekannte Gebiete des Mathematikunterrichts neugestaltet, als auch neue Gebiete ausprobiert. Auf Konferenzen wurden die Erfahrungen zwischen allen Beteiligten (LehrerInnen, AusbildnerInnen, MentorInnen und Behörden) ausgetauscht. Ergebnis dieser ersten Phase war ein Handbuch für LehrerInnen namens „ma TEMA tika“ mit mathematischen Aktivitäten, relevanten Entwürfen von Unterrichtssequenzen und verschiedenen Unterrichtsthemen (vgl. Treffers (1982, S. 14f)).
In der Integrationsphase entwickelte das Team einen so genannten Modell-Schularbeitsplan[26], der in weiterer Folge eine „Richtschnur“ für LehrerInnen sein sollte. Dazu wurden immer wieder Teile des Plans veröffentlicht, um von LehrerInnen getestet zu werden. Der Modell-Schularbeitsplan verstand sich nicht als ultimative Unterrichtsvorschrift, sondern sollte eine Diskussionsgrundlage und Anregung für LehrerInnen sein, ihren Unterricht zu reorganisieren.
In der Phase der Abwicklung und fortgesetzten Entwicklung wurde der entwickelte Modell-Schularbeitsplan vollständig veröffentlicht. Die MitarbeiterInnen des WISKOBAS-Projekts gaben in weiterer Folge sowohl Hilfestellung für Schulen zur Schulplanentwicklung, als auch für AutorInnen beim Verfassen von Schulbüchern und Unterrichtsmittel. Die angelaufene Unterrichtsentwicklung wurde fortgesetzt und in die LehrerInnenausbildung integriert.

25 **i**nstituut voor **o**ntwikkeling van het **w**iskunde**o**nderwijs, dt. Institut zur Entwicklung des Mathematikunterrichts.
26 Ein Schularbeitsplan in den Niederlanden ist mit einem detaillierten Lehrplan vergleichbar. Darin enthalten ist eine Beschreibung und Begründung der Unterrichtsaktivität mit genauen Angaben zu Quellen (Bücher, Unterrichtsmaterial, etc.) und einer genauen Beschreibung der einzelnen Aktivitäten.

3.2.1 Merkmale des Mathematikunterrichts im WISKOBAS-Projekt

Treffers gibt in seiner Projektbeschreibung (Treffers, 1982, S. 35ff) acht grundlegende Merkmale an, die dem Mathematikunterricht zugrunde liegen. Ähnliche Merkmale werden auch in der Publikation von van den Heuvel-Panhuizen und Wijers (2005, S. 289f) erwähnt, wobei sich die Merkmale dort auf RME als Konzept beziehen.

3.2.1.1 Aktivität

Treffers sieht ähnlich wie Freudenthal Mathematik nicht als abgeschlossenes Gebäude, welches den SchülerInnen fertig verkauft werden soll. Wird im Unterricht von jenen Ergebnissen (Axiomen, Sätze, Regeln, etc.) ausgegangen, die viele Generationen von MathematikerInnen gefunden haben, so ist das nach Freudenthal (1973, S. 70) eine „anti-didactic inversion“. Beide sehen Mathematik als Aktivität (Treffers (1982, S. 36), Freudenthal (1973)). Folglich muss Mathematik vom Lernenden aktiv aufgebaut und erarbeitet werden. Nun ist es für SchülerInnen nicht möglich in der kurzen Zeit, die in der Schule bleibt, die gesamte Mathematik neu zu erfinden. Freudenthal stellt den SchülerInnen eine Begleitperson zur Seite, die sie durch diesen Prozess des „Neu-Erfindens“ leitet. Er selbst nennt dies „Guided Reinvention“ (Freudenthal, 1991, S. 45) welches in Kapitel 3.5.5 genauer beschrieben wird. Ein Einüben von vorgefertigten Begriffen und Verfahren ist aus der didaktischen Sicht von RME im Allgemeinen abzulehnen. Auch van den Heuvel-Panhuizen verweist darauf, dass die SchülerInnen nicht nur RezipientInnen, sondern aktive TeilnehmerInnen im Lernprozess sind (van den Heuvel-Panhuizen und Wijers, 2005, S. 289).
Treffers sieht die Aktivität als Ausgangspunkt, warnt aber:

> Die Aktivität ist ein wichtiger Ausgangspunkt für den Mathematikunterricht, aber sie ist kein reiner Selbstzweck. (Treffers, 1982, S. 36)

Wichtig ist Treffers die Synthese der drei Elemente Kind, Fach und Gesellschaft, die sich mittels „aktivitätszentriertem“ Unterricht realisieren lässt. Treffers (1982, S. 36) und van den Heuvel-Panhuizen und Wijers (2005, S. 289) weisen bezüglich der Aktivität auf die Notwendigkeit und Wichtigkeit von sinnvollen Problemen, an denen SchülerInnen ihre Mathematik entwickeln, hin.

3.2.1.2 Differenzierung

Treffers (1982, S. 36) unterscheidet klar Aufgaben, die nur einen Lösungsweg haben und jene mit einer Mehrzahl möglicher Lösungen. Ist im ersten Fall die Attraktivität der Aufgaben durch das „Heureka“-Erlebnis oft größer, so eignen sich diese Aufgaben für den praktischen Unterricht seiner Meinung nach nicht. Bei der Erstellung der Aufgaben im WISKOBAS-Projekt wurde darauf geachtet, Aufgaben mit mehreren Lösungsmöglichkeiten zu finden.

Eine Differenzierung ist somit nicht nur im Tempo der Bearbeitung, sondern auch hinsichtlich der Lösungsstrategien möglich. Dies hilft den SchülerInnen, da Lernerfolge auf verschiedenen Niveaus möglich sind. Außerdem wird von Treffers vorgeschlagen, die Ergebnisse in der Gruppe zu vergleichen, damit SchülerInnen die Möglichkeit haben, unterschiedliche Lösungswege zu vergleichen und gegeneinander abzuwägen (vgl. Treffers, 1982, S. 36).
Die Zeitschrift „Praxis der Mathematik in der Schule“ widmet sich (im Oktober 2007) ganz dem Thema Differenzierung. Darin werden verschiedene Beispiele für Aufgaben vorgestellt, die das Potential für eine innere Differenzierung haben. Bedenkt man, dass das WISKOBAS-Projekt etwa 30 Jahre alt ist, so ist es erstaunlich wie fortschrittlich die Ansätze damals waren und bis heute sind.

3.2.1.3 Vertikale Planung

Vertikale Planung meint, dass die Aufgaben immer komplexer werden, je weiter die Lernenden fortschreiten. Treffers (1982, S. 37) spricht von einer notwendigen Voraussetzung für „höhere Aktivität“, die „niedrige Aktivität“ als Erfahrungsgrundlage zu besitzen. Dieser didaktische Ansatz ist grundsätzlich nicht neu. Schon Bruner (1960) schrieb:

> We begin with the hypothesis that any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development. (Bruner, 1960, S. 33)

Er leitete damit viele LehrplanentwicklerInnen an, Lehrpläne vertikal aufzubauen. Es besteht jedoch die große Gefahr, „niedrigere“ Niveaus nur noch als Mittel zum Erreichen der „höheren“ Niveaus zu sehen. Ergebnis wäre ein „sinnleerer“ Mathematikunterricht. Das WISKOBAS-Projekt versucht dem entgegen zu wirken, da die ursprünglichen Probleme ja vorstellbar (real) sind und somit die Lösung Sinn macht.

3.2.1.4 Struktur oder Stufenprinzip

Mathematik zu lernen bedeutet in RME das Durchlaufen verschiedener Stufen. Dieses Prinzip zieht sich durch sämtliche Projekte und beginnt bei WISKOBAS recht einfach. In jeder Teilaufgabe wird versucht die Komplexität der Aufgaben zu erhöhen, wobei die Erfahrungen der vorangegangenen Aufgaben weiterhin benötigt werden. Sehr schön sieht man dies bei der vorgestellten Aufgabe in Kapitel 3.2.2. Beginnend mit recht simplen Fragestellungen, wie „Kommt man mit einem Sack aus?“, steigert sich die Schwierigkeit recht rasch. Am Ende der Lerneinheit steht die überschlagsmäßige Berechnung von 2^{64}.
Erweitert wird dieses Konzept in den 1990er Jahren um den Aspekt des Modells. Genaueres zu diesem Aspekt findet sich in Kapitel 3.5.6. Als größte Stärke des Stufenprinzips erwähnen van den Heuvel-Panhuizen und Wijers (2005, S. 289) das langfristige Begleiten der Schüler-

Innen im Lerncurriculum. Diese langfristige Perspektive zeichnet RME grundsätzlich aus und wird in weiterer Folge noch näher erörtert (siehe Punkt 3.6).

3.2.2 Einführung des exponentiellen Wachstums

In diesem Kapitel wird die Vorgangsweise, bei der Einführung von neuen Konzepten in den Mathematikunterricht anhand eines Unterrichtsleitfadens gezeigt und erklärt.
Eine Geschichte führt durch die gesamte Lerneinheit und begleitet die SchülerInnen auf der „Entdeckungsreise". Ausgangspunkt ist also keine reale Situation. Die Geschichte ist jedoch recht leicht vorstellbar. Außerdem ist eine weitere Verdeutlichung, durch das Verwenden eines realen Schachbretts und Getreide leicht zu erreichen. Die Lerneinheit ist laut Treffers (1982, S. 43) für SchülerInnen im sechsten Schuljahr, also für etwa Zehnjährige, konzipiert. Nun folgen die einzelnen Teile der Geschichte:

> **Getreidekörner**
> Nach der Legende brachte der Mann, der das Schachspiel erfunden hatte, sein neues Spiel zum König. Der Monarch war darüber sehr erfreut und bot dem Erfinder eine Belohnung, die er sich selbst auswählen konnte.
> „Majestät", sagte der Schachmeister, „mein Wunsch ist dieser: gib mir alle Getreidekörner, die auf folgende Art erworben werden. Ein Korn auf dem ersten Feld, zwei auf dem zweiten, vier auf dem dritten usw. bis alle Felder an der Reihe gewesen sind." „Ist das alles?" fragte der König erstaunt.
> „Und nur Getreide? Na, ja, es sei so. Hole einen vollen Sack."
> (Treffers, 1982, S. 44)

Im ersten Teil der Geschichte wird die grundlegende Fragestellung vorgestellt und den SchülerInnen die Vorgehensweise erklärt (Verdoppelung der Getreidekörner pro Feld). Die am Ende gestellte Frage ist, ob der König mit dem Sack genug hat. Die SchülerInnen beginnen nun die Aufgabe zu bearbeiten. Die Ergebnisse der ersten Runde werden wahrscheinlich recht weit auseinander liegen, da die SchülerInnen keine adäquaten mathematischen Instrumente in der Hand haben, die zur Lösung nötig sind. Es bleibt allein ein Schätzen des möglichen Ergebnisses. Dieser Vorgang wird von Treffers (1982) klar als „horizontale" Mathematik eingestuft. Die Geschichte wird nun weitererzählt.

> **Schnell Zählen**
> Eine Stunde später! Eine Reihe von Männern war noch immer damit beschäftigt, Getreidekörner zu zählen. Der König wurde allmählich unruhig.
> „Seid ihr immer noch nicht fertig?" fragte er.
> „Oh nein, Majestät, noch lange nicht; wir sind erst beim 14. Quadrat."
> „Erst bei dem 14.? Warum dauert das so lange?"
> „Na ja, Majestät, wir brauchen für das 14. Feld Tausende von Getreidekörnern,

> und es dauert eine Zeit, bis wir die gezählt haben."
> „Das kann wohl die ganze Nacht so weitergehen", brummte der König.
> Der Erfinder murmelte: „Nun, ich denke, wohl noch etwas länger", aber keiner verstand ihn.
> „Könnt ihr nicht etwas weniger genau und etwas schneller zählen", flehte der König.
> In diesem Moment kam der Schachspieler dazwischen: „Ich hab´ eine Idee, um das etwas schneller zu machen." (Treffers, 1982, S. 44)

Im Anschluss an den zweiten Teil sind folgende Fragen, die es zu beantworten gilt (Treffers, 1982, S. 44):

- Wie lange dauert es ungefähr, die Körner des 14. Feldes zu zählen?
- „Das kann wohl die ganze Nacht so weitergehen", dachte der König. Wie lange wird es in Wirklichkeit dauern?
- Denke dir genau wie der Schachmeister eine Art aus, das benötigte Getreide überschlagsmäßig schneller zu bestimmen.

An den gestellten Fragen ist die Herangehensweise von RME an das Problem zu sehen. Die SchülerInnen werden angeleitet die Zählweise zunächst nachzuvollziehen z.B. ein Korn pro Sekunde. Auch das aktive Tun, wie viele Körner man in einer Minute zählen kann, ist in diesen ersten Schritt implementierbar. Beide Varianten gehören der *horizontalen* Mathematik an.
Erst im nächsten Schritt werden die SchülerInnen zur Verwendung von vertikaler Mathematik angeleitet. Der Lehrende weist auf das siebte Feld hin auf dem 64 Körner liegen. Grob lässt sich hier von einer Minute Zählzeit ausgehen. Das Entdecken dieses Umstandes kann natürlich auch von Seiten der SchülerInnen kommen. Da sich die Anzahl der Körner und somit auch die Zählzeit im nächsten Feld verdoppeln, benötigt man für das achte Feld etwa zwei Minuten, für das neunte Feld vier Minuten usw. Durch Weiterrechnen lässt sich leicht herausfinden, dass für das Zählen der Körner am 14. Feld bereits zwei Stunden benötigt werden.
Da die dritte Frage sehr offen gestellt ist, haben SchülerInnen die Möglichkeit, sich kreativ mit dem Problem auseinander zusetzen. Eine „eindeutige" Lösung ist nicht beabsichtigt. Im nächsten Kapitel geht es um die vom Schachmeister gefundene Methode des schnelleren Zählens.

> **Mehr Säcke**
> Der Schachmeister erläuterte dem König, wie es weniger genau, aber viel schneller gehen könnte.
> ... "Eine gute Idee["], sagte der König. „hole eine Schöpfdose und eine Waage."

> ...Etwas später. Eine Anzahl Diener war immer noch dabei, zu schöpfen und zu wiegen. Der König schlenderte hin und her. Plötzlich kam der Oberdiener zum König mit der Mitteilung, daß der Sack mit Getreide leer sei.
> ... "Was redest du denn da?" sagte der König, „brauchen wir noch mehr?"
> „Ja, Majestät, wir sind noch lange nicht soweit."
> „Vorwärts, dann hole eben noch einen neuen Sack", befahl der König, „und nimm noch einen extra mit für den Fall, daß wir nicht auskommen." Der Oberdiener schickte zwei Männer los. (Treffers, 1982, S. 44)

Die Fragen zu diesem Kapitel stellen sich fast von selbst.
Bei welchem Feld war der erste Sack leer? Hat man mit zwei Säcken genug?
Zusätzlich sollen die SchülerInnen unter der Anleitung der Lehrperson die Erkenntnis gewinnen, dass die Anzahl der Körner auf einem Feld gleich der Summe der Körner auf den Feldern davor plus eins ist.
Die SchülerInnen werden bei dieser Aufgabe mit dem Problem konfrontiert, die unbekannte Größe eines Sacks abzuschätzen zu müssen, um die darin enthaltene Anzahl an Getreidekörnern berechnen zu können. Nachdem diese Größe festgelegt ist, müssen die SchülerInnen ausrechnen, wie viele Körner denn auf den ersten 10, 15, oder 20. Feldern liegen. Das geschickte Einsetzen der mathematischen Werkzeuge ist hier gefragt. Dennoch ist das Ergebnis auch durch eine „normale" Addition zu erzielen.

$$\underbrace{1+2+4+8+16}_{\text{Summe der ersten fünf Felder}} \quad = \quad \underbrace{32-1}_{\text{Körner am 6. Feld minus 1}} \tag{3.1}$$

Das Entdecken des Zusammenhangs zwischen der Anzahl der Körner auf einem Feld und der Anzahl der Körner zuvor ist als so genannte „Guided Reinvention" (Freudenthal, 1991, S. 46) zu sehen. Dieses Konzept ist eines der zentralen und wird in Kapitel 3.5.5 genauer erklärt.
Eine Abschätzung, wie viele Körner beim Voranschreiten um 10 Felder dazukommen, sollte in diesem Abschnitt entdeckt werden. Hierbei sollte die Frage nach dem 11. Feld und nach dem 21. Feld gestellt werden. Die SchülerInnen werden recht rasch entdecken, dass am elften Feld etwa 1000 Körner, am 21. Feld etwa 1.000.000 Körner liegen müssten. Der weitere Gedankengang sollte klar sein (31. Feld etwa 10^9 Körner; 41. Feld etwa 10^{12} Körner; usw.). Auch hier wird die Begleitung durch die Lehrperson notwendig sein.
Die Geschichte geht nun weiter.

> **Königreich mit Getreide**
> Viel später. Die Säcke mit Getreide füllen den Palastsaal fast ganz, als die Vorräte des Hofes erschöpft waren. Was jetzt? Der Schachmeister sagte: „Majestät, den Rest bekomme ich später, aber bevor ich weggehe, möchte ich wohl wissen, wieviel Ihr mir schuldig seid."

> „Gut“, stöhnte der König, „rufe den königlichen Rechenmeister.“ Kurz nachdem dieser Mathematiker seinen Auftrag empfangen hatte, sagte er: „Majestät, ich habe schlechte Nachrichten. Nach meiner Berechnung gibt es im ganzen Königreich bei weitem nicht genug Getreide.“
> „Wie ist das möglich?“ fragte der König, „es ist doch nur eine solch bescheidene Bitte. Erst eines, dann zwei, vier, acht ...“
> „Na ja, Majestät,“ sagte der Rechenmeister, „am Anfang sind die Anzahlen klein, aber sie wachsen sehr schnell. Das 11. Feld enthält 1024 Getreidekörner, sagen wir einfach 1000 oder eine Dose voll. Die 1000 Dosen auf dem 21. Feld tun wir in einen Sack. Von jetzt an wird die Anzahl der Säcke verdoppelt. Das 31. Feld enthält 1000 Säcke, sagen wir eine Scheune!“ (Treffers, 1982, S. 44)

Folgende Impulsfragen werden im Anschluss an dieses Kapitel gestellt im Textbuch:

- Auf welchem Feld füllen die Säcke den gesamten Palastsaal aus?
- Stimmt die Rechnung des Rechenmeisters?
- Schließe in der Art des Rechenmeisters weiter auf die Menge des Getreides auf dem 64. Feld.

Zur Beantwortung der Fragen ist es wiederum nötig verschiedene Angaben, wie etwa die Abmessung des Palastsaals, zu schätzen. Die Fähigkeit unbekannte Größen sinnvoll abzuschätzen wird im niederländischen Mathematikunterricht vielfach und oft geübt, wie sich an diesem Beispiel zeigt. Diese Fähigkeit ist wiederum eine, die bei den PISA-Tests (vgl. Seite78) getestet wurde.
Das Problem ist nun fast vollständig gelöst. Eine weitere Vertiefung ist nach Treffers (1982, S. 44) durchaus noch möglich. Die genaue Berechnung der Körner auf dem letzten Feld ist ebenso noch ausständig wie die Frage, wieviele Getreidekörner nun der Erfinder des Schachspiels bekommt. Hier kommen die bereits vorhandenen Abschätzungen ins Spiel, da der Taschenrechner im Normalfall mit der Berechnung so großer Zahlen überfordert ist. Auch die Frage nach der Gesamtsumme lässt sich mit Hilfe der Formel auf Seite 32 einfach beantworten.
Das obige Beispiel illustriert den sehr leichten Zugang zur Fragestellung und hat durchaus ein spielerisches Moment. Dennoch ist die Mathematik dahinter nicht zu verachten. Die verwendeten Abschätzungen dienen den SchülerInnen auch weiter um mit großen Zahlen hantieren zu können. Auch die abschließenden Erkenntnisse aus dem Beispiel sind für SchülerInnen der Primarstufe recht anspruchsvoll. Da das exponentielle Wachstum ja auch im weiteren Curriculum mehrmals vorkommt, stellt diese Lerneinheit eine gute Basis dar, auf die die SchülerInnen zurückgreifen können.

3.2.3 Zusammenfassung

Das WISKOBAS legte bei der Entwicklung von RME die Basis fest. Die theoretische Basis wurde bei diesem Projekt erst a posteriori beschrieben und entwickelt. Das Projekt wurde mit noch offenem Ende begonnen. Die weitere Entwicklung wurde durch die fünf Prinzipien (Abschnitt 3.2.1) schon festgelegt. Die Aufbruchsstimmung in der niederländischen Mathematikdidaktik wurde genutzt und durch die strake Einbeziehung der Lehrpersonen ausgedehnt. Die Ergebnisse des Projekts machten Mut für zukünftige Projekte, die im Anschluss auch sofort gestartet wurden, wie z.B. HEWET, welches im folgenden Kapitel dargestellt wird.

3.3 HEWET

Das HEWET[27]-Projekt wurde 1981 vom niederländischen Unterrichtsministerium gestartet. Das Projekt bezieht sich auf den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe. Die Ziele des Projekts waren recht vielfältig. Nachfolgend die wichtigsten Punkte:

- Einführen von zwei neuen Lehrplänen: Mathematik A und B (Math A und B)
- Ausarbeiten detaillierter Konzepte für beide Programme
- Testen der Programme an zwei, zehn und vierzig Schulen
- Erstellen eines Fortbildungsplans für LehrerInnen
- Die Entwicklung einer Verbindung von Math A und B zur tertiären Ausbildung (Was kann ich mit Math A studieren?)

Für die Umsetzung dieser Reformen war es notwendig die Einführung der Lehrpläne zu staffeln. Abbildung 3.1 zeigt den zeitlichen Ablauf der Einführung in einer immer größeren Anzahl von Schulen.

Parallel dazu begann man mit der Fortbildung der LehrerInnen. Die LehrerInnen der ersten beiden Schulen wurden zwar nur kurz instruiert, aber in allen Stunden von Mitgliedern des HEWET-Teams begleitet. Diese LehrerInnen waren in weiterer Folge in die Fortbildung als Vortragende und Trainer für die nächsten zehn Schulen integriert. Die Erfahrungen wurden damit aus erster Hand weitergegeben. Ein Jahr später waren es wieder die LehreInnen der zwölf Versuchsschulen, die die Fortbildung der weiteren LehrerInnen leiteten. Abbildung 3.2 verdeutlicht diese Vorgehensweise sehr gut.

Die Einbindung hatte ein sehr direktes Feedback für die EntwicklerInnen als auch für die LehrerInnen zur Folge. Die Akzeptanz der Fortbildung war ebenfalls sehr hoch.

27 **H**erverkaveling **E**indexamenprogramma´s **W**iskunde **E**en en **T**wee dt. Regruppierung des Lehrplans für Mathematik eins und zwei

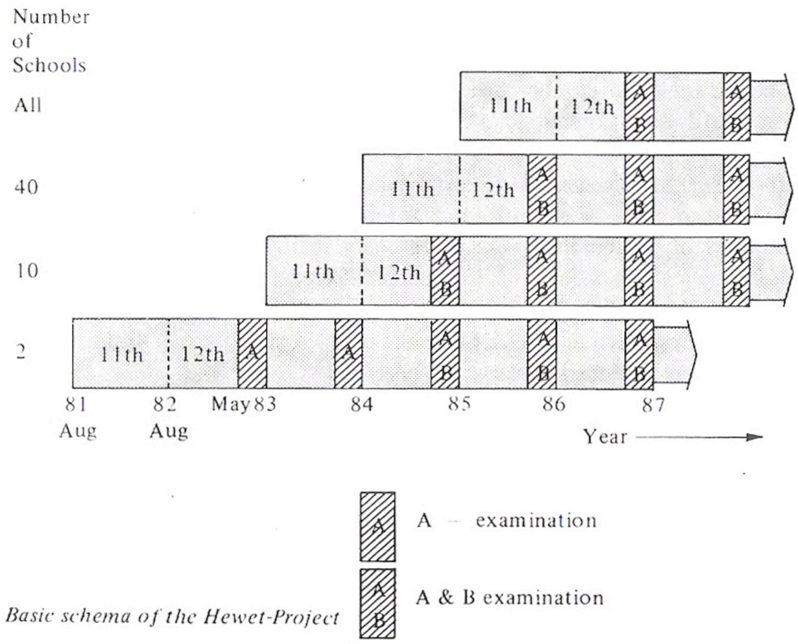


Abbildung 3.1: Schema der Einführung des HEWET-Projekts (de Lange, 1987, S. 13)

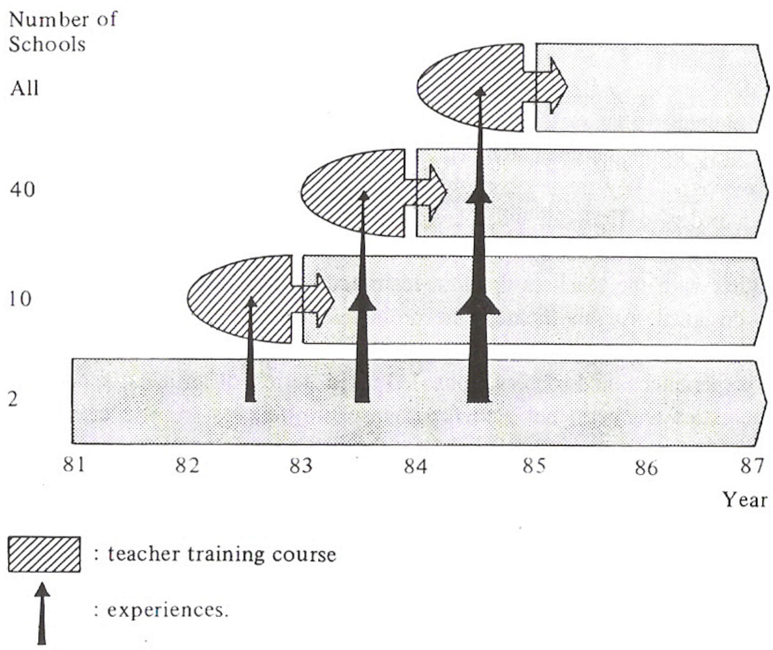


Abbildung 3.2: Ausbildungsschema für LehrerInnen (de Lange, 1987, S. 14)

3.3.1 Mathematik A

Eines der Hauptziele war die Entwicklung von Mathematik A. Diese Alternative war für all jene VWO-SchülerInnen gedacht, die im weiteren Studium Mathematik nur als Werkzeug verwenden. Die SchülerInnen in den Niederlanden entscheiden sich in den letzten beiden Jahren vor ihrem Abschluss, ob sie diesen Zweig wählen möchten. Eine starke Verwurzelung im Kontext, sowie eine Betonung der Nützlichkeit der Mathematik, standen dabei im Vordergrund. Engel argumentiert zu diesem Thema in seinem Artikel:

> [...] if for some branch of mathematics there are no convincing applications, this branch of mathematics should not be in the curriculum. (Engel zitiert nach de Lange (1987, Seite 23)).

Der Lehrplan für Math A wurde recht stark gestrafft und auf die Nützlichkeit für das spätere Studium überprüft. Außerdem wurde festgestellt, dass SchülerInnen wegen der stark „vertikalen“ Ausrichtung der Lehrpläne Schwierigkeiten mit dem Lösen von anwendungsorientierten Problemen haben. In den vorhandenen Lehrplänen wurde keine „horizontale“ Verbindung zwischen den mathematischen Gebieten geschaffen (vgl. de Lange, 1987, S. 24). Dies wurde mit der Einführung von Math A geändert. Abbildung 3.3 zeigt eine grobe Übersicht über den Lehrplan von Math A. Der Einsatz von neuen Medien und vor allem des Computers wird in dieser Übersicht nicht gezeigt, aber im Lehrplan forciert. Sehr gut ist in dieser Übersicht die horizontale Vernetzung der vier vertikalen Stränge zu sehen. Die Änderung im Lehrplan war jedoch nicht die einzige. Die rudimentäre Theorie der RME fand sehr stark Anwendung in Math A. Der Schwerpunkt lag dabei vor allem in drei Gebieten, die im folgenden beschrieben werden.

3.3.1.1 Mathematisieren

Das Konzept des Mathematisierens kommt nicht nur in Math A vor, sondern ist ein Grundpfeiler von RME. Daher möchte der Verfasser auf das Kapitel 3.5.3 verweisen, in dem dieses Konzept ausführlicher und allgemeiner erklärt ist. Dies ist möglich, da im Bezug auf das Gebiet Mathematisieren Theorie und Umsetzung recht gut zusammen stimmen.

3.3.1.2 Konzeptionelles Mathematisieren

In diesem Abschnitt soll das konzeptionelle Mathematisieren etwas genauer beleuchtet werden. Kurz zitiert nach de Lange (1987, S. 63) ist konzeptionelles Mathematisieren, „mathematizing aimed at developing mathematical concepts.“ Dies ist aber leichter zu fordern als umzusetzen. Wichtig ist die Grundidee: SchülerInnen entwickeln bei intensiver Beschäftigung mit realen Problemen, mit der Zeit mathematische Konzepte zur Lösung dieser Aufgaben. Dies soll an einem einfachen Beispiel (aus de Lange (1987, S. 67)) illustriert werden.

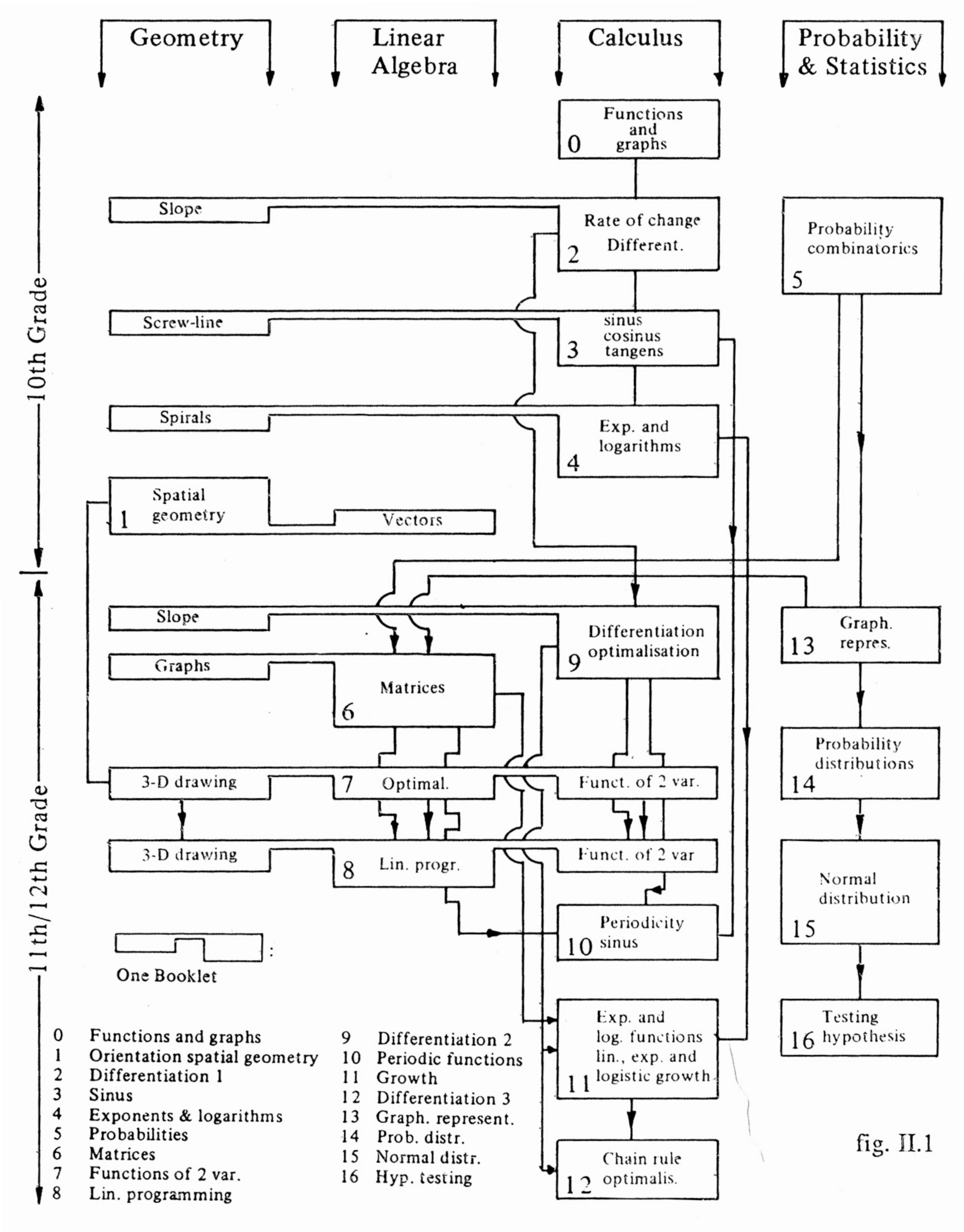
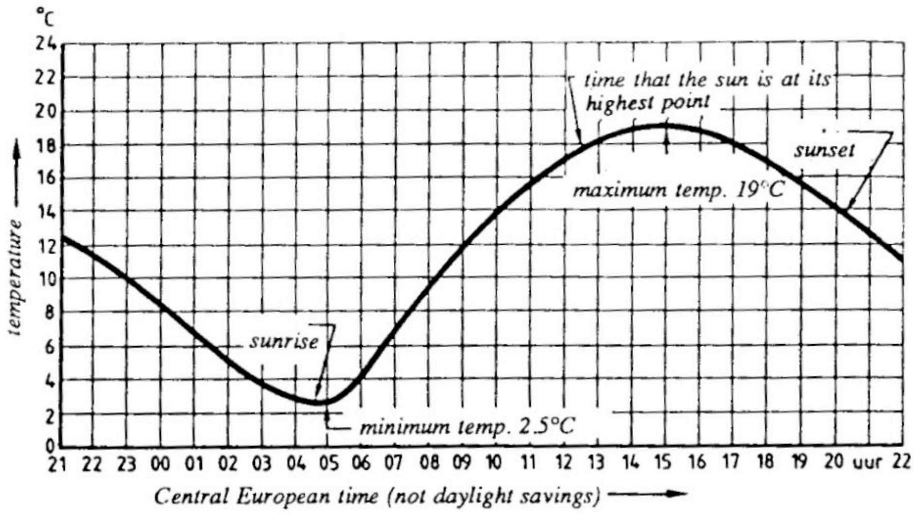


Abbildung 3.3: Lehrplankonzept Math A (de Lange, 1987, S. 25)

Die Aufgabe steht am Beginn eines Kapitels, in dem die Grundlagen der Differentiation erarbeitet werden sollen. Die SchülerInnen solle folgende Fragen im Lauf der Aufgaben beantworten können.

- Wie zeigt ein Graph, ob eine Größe ansteigt oder abfällt?
- Wie kann man an einem Graph ablesen, ob die Änderung der Größe an einer Stelle größer oder kleiner als an einer anderen Stelle ist?
- Wie kann man die Änderungsrate messen?

Man sieht schon an den übergeordneten Fragen, dass das Konzept von Differenzenquotient und Differentialquotient ohne den Grenzwert eingeführt und aufgebaut werden. Nun zur ersten Aufgabe :

> Wir nehmen unser tägliches Wetter als eine Kombination verschiedener bestimmter Elemente wie Sonnenstrahlen, Temperatur, Wind, Feuchtigkeit und Niederschlag. Wir wollen im weiteren die Temperatur genauer untersuchen.
> Jeder weiß aus seiner Erfahrung, dass die Temperatur stark von der Tageszeit abhängt. Meterologen sprechen vom „Tagesverlauf“: die Temperatur steigt am Morgen und am Vormittag und fällt Nachmittags, Abends und in der Nacht. Als Regel gilt, dass die Temperatur kurz nach Sonnenaufgang am niedrigsten ist. Die höchste Temperatur wird meist gegen 14.00 Uhr erreicht. Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Temperaturverlauf an einem Tag im Mai.
>
> 
>
>
> *Daily course of the air temperature on a clear day in May in the Netherlands.*
>
> Folgende Fragen sollen nun beantwortet werden.
>
> - Zu welcher Tageszeit ist es am wärmsten? Wann am kältesten?

- Wie kann man erklären, dass der wärmste Moment des Tages erst nach dem Sonnenhöchststand erreicht wird?
- Die Temperatur T (in °C) ist eine Funktion der Zeit t (in Stunden). Berechne $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ für das Intervall von fünf Uhr früh bis drei Uhr am Nachmittag.
- Berechne diesen Quotienten für die Zeit zwischen Mitternacht und fünf Uhr früh.
- Wann steigt die Temperatur am schnellsten? Mit welcher Geschwindigkeit (in Grad pro Stunde) steigt die Geschwindigkeit schätzungsweise? (de Lange, 1987, S. 67)

Es ist durch die Aufgabenstellung intuitiv klar, dass der Graph kontinuierlich ist und auch negative Steigungen vorkommen können. Auch der vorkommende Wendepunkt sollte beim Bearbeiten der letzten Aufgabe keine Schwierigkeiten bereiten, da der Kontext unterstützend wirkt. Außerdem stellt beispielsweise die zweite Frage eine Verbindung zur Physik dar (Abhängigkeit von Temperatur und Sonnenstand).

Das theoretische Fundament zum konzeptionellen Mathematisieren wurde erst im Lauf des

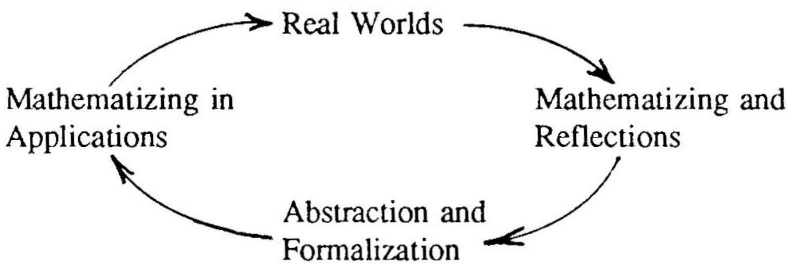


Abbildung 3.4: Lernschema aus de Lange (1987, S. 72)

Projekts entwickelt. Der Lernprozess der SchülerInnen lässt sich in einem recht einfachen Schema darstellen (siehe Abbildung 3.4). Dieses Schema ist dem Modellbildungsschema, welches Maaß (2004, S. 20f) verwendet sehr ähnlich. Der Unterschied liegt im Ziel der beiden Lernwege. De Lange beschreibt auch die Ähnlichkeit zum Lernkreislauf von Lewin, stellt aber zwei Unterschiede heraus. Erstens geht Lewin vom konkreten Experiment aus. Dies ist in der Mathematik und dem -unterricht im Regelfall nicht möglich, da die Ausgangssituationen oft nur gedacht sind. Zweitens geht Lewin von einem sozialen Lernprozess aus, in dem es immer wieder Abweichungen vom gewünschten Lernziel gibt. Dies ist in RME durch das Prinzip der „Guided Reinvention“ (Freudenthal, 1991, S. 45) weitestgehend ausgeschlossen. Der wohl schwerste Schritt für die SchülerInnen liegt in der Abstraktion und Formalisierung der mathematisierten Probleme. Das selbstständige Herausfinden von mathematischen Konzepten ist sehr schwierig und bedarf meist einer unterstützenden Führung. Diese wird von der Lehrperson in einer Art Begleitung geleistet. In Kapitel 3.5.5 wird darauf genauer eingegangen.

3.3.1.3 Kontext

Der Kontext in RME-Aufgaben spielte schon im WISKOBAS-Projekt eine große Rolle. In seiner Dissertation beschreibt de Lange (1987) einen Unterschied in der Verwendung des Kontexts. Er teilt die Aufgaben nach der Verwendung des Kontextes in drei Klassen ein.

1. Der Kontext wird verwendet um mathematische Konzepte und Ideen einzuführen und zu entwickeln. Diese Beispiele nennt er nach der Verwendung des Kontexts „[...] third order context use“ (de Lange, 1987, S. 76).

2. Der Kontext ist der Rahmen, in dem die erlernte Mathematik angewandt wird. Die Beispiele sind meist aus der „realen“ Welt und die SchülerInnen müssen die relevante Mathematik finden, die für die Strukturierung und Organisation des Beispiels notwendig ist. Man spricht von Beispielen, mit „[...] second order context use“ (de Lange, 1987, S. 77).

3. Bei Aufgaben mit „[...] first order context use“ (de Lange, 1987, S. 77) ist diese meist mit einer einfachen Übersetzung des Problems gelöst. Der Kontext wird nur zur Einkleidung mathematischer Operationen verwendet. Diese Aufgaben werden meist in österreichischen Schulbüchern verwendet.

Um ein besseres Verständnis für die unterschiedlichen Aufgabenarten zu bekommen, werden die Arten mit je einem Beispiel aus dem Bereich der exponentiellen Funktionen illustriert.

Ad 1) Als Startpunkt bekommen die SchülerInnen folgenden Graphen zu sehen (Abbildung 3.5), der folgendermaßen erklärt wird. *Der Graph zeigt das Wachstum von Wasserpflanzen, beginnend mit einer Fläche von 1 m^2.*[28]

- *Wie lange dauert es etwa, bis 20 m^2 mit Pflanzen bedeckt sind? Verwende den Graphen.*

- *Wann sind 40 m^2 bedeckt? Wann 80 m^2? Wann 100 m^2? Überprüfe deine Antworten mit dem Graphen.* Zur Lösung dieser Aufgabe ist die Einsicht nötig, dass ein Verdopplung der Fläche eine Woche benötigt. Die SchülerInnen sollen diese Erkenntnis anhand des Graphen erlangen, den sie quasi als Werkzeug benutzen.

- In diesem Schritt wird eine erste Definition gegeben, die jedoch sehr an den Kontext gebunden ist. ${}^2\log 10$ *ist definiert als der Moment in welchem 10m^2 bewachsen sind. Der Wachstumsfaktor ist dabei 2 (beginnend bei 1m^2).*

28 Die kursiven Textstellen dieses Abschnitts wurden direkt aus de Lange (1987, S. 77) übernommen.

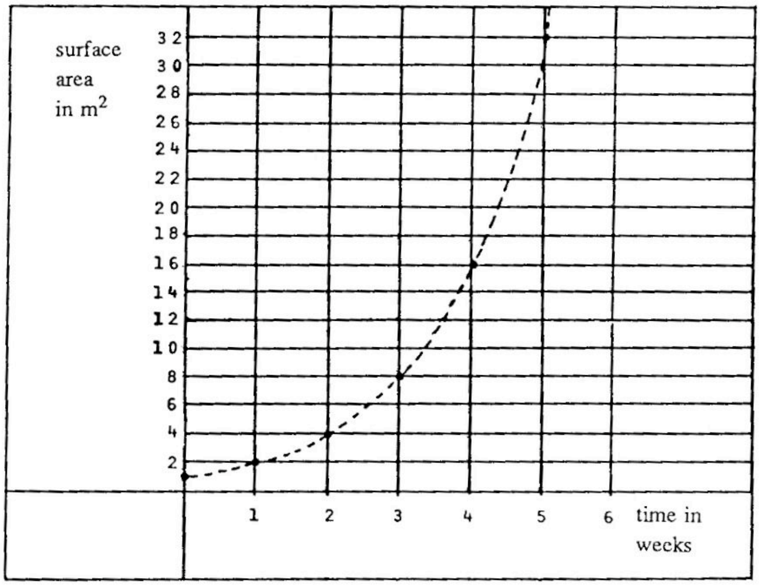


Abbildung 3.5: Pflanzenwachstum (aus de Lange, 1987, S. 77)

- Bei der Lösung der folgenden kontextfreien Aufgaben, *Erkläre:* $^2\log 16 = 4, ^3\log 27 = 3$ *und* $^5\log 25 = 2$, greifen die SchülerInnen natürlich den vertrauten Kontext wie, $^2\log 16 = 4$, da es vier Wochen dauert bis 16 m^2 bewachsen sind, zurück.

- Die nächste Fragestellung leitet die SchülerInnen schon in die formale Richtung. *Erkläre warum* $^2\log 3 + 1 = {}^2\log 6$ *ist?* Die Antwort, dass eine Woche nötig ist um die Fläche von 3 m^2 zu verdoppeln, ist nicht trivial, da sie eine Anwendung der vorherigen Erkenntnisse voraussetzt. Eine alternative Erklärung führt direkt zur formalen Regel: $^2\log 3 +^2\log 2 = {}^2\log 6$ und somit $^2\log a +^2\log b = {}^2\log ab$

Ad 2) Auch hier wird mit einem Bild die Aufgabe begonnen (Abbildung 3.6). *Auf dem Bild ist ein Seestern in seinen zwölf Wachstumsphasen zu sehen. Gibt es ein Zeitintervall in dem dieses Wachstum exponentiell ist?* Durch die Fragestellung wird klar, dass bei dieser Aufgabe nichts Neues entwickelt werden muss, sondern dass bekannte System der exponentiellen Funktionen angewendet werden muss. Dennoch ist das Verständnis des Konzepts des exponentiellen Wachstums zur Lösung notwendig.

Ad 3) Eine typische Aufgabe ist folgende: *Der Wachstumsfaktor einer Bakterienart ist 6 (pro Zeiteinheit). Zum Zeitpunkt 0 gibt es vier Bakterien. Nach welcher Zeit existieren 100 Bakterien?* Aufgaben dieser Art finden sich auch in österreichischen Schulbüchern. Der Sinn des Kontexts ist aber nur das „Verstecken“ mathematischer Operationen.

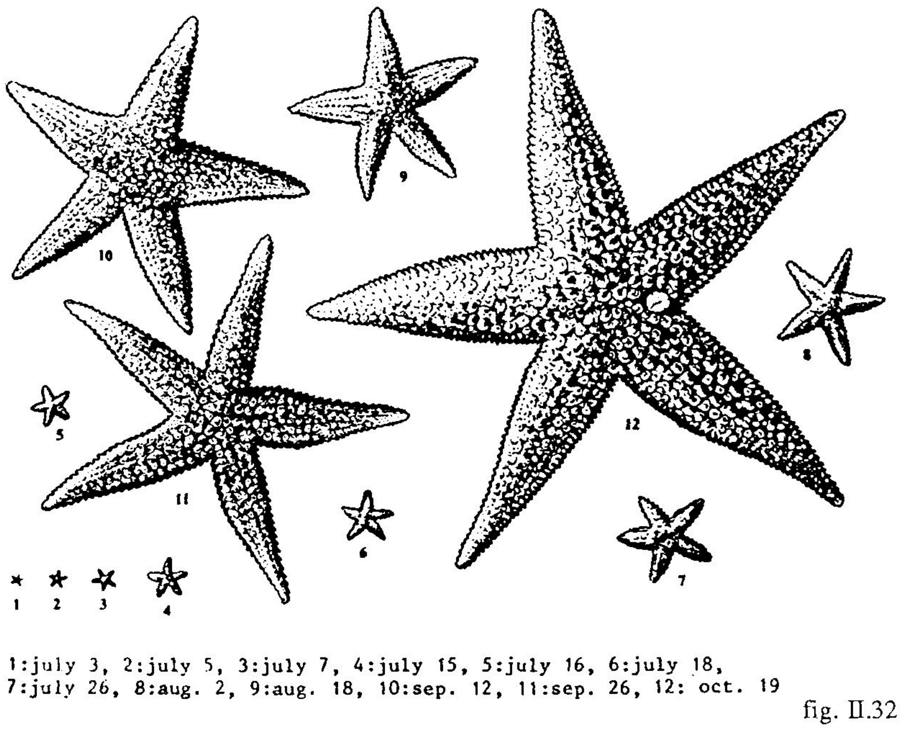


Abbildung 3.6: Seestern (vgl. de Lange, 1987, S. 79)

3.3.2 Testen in RME

Im Lauf der Entwicklung von Math A wurde den Beteiligten klar, dass die veränderten Lehr- und Lernpläne eine Veränderung der Test- und Prüfungssettings zur Folge haben mussten. Es leuchtet intuitiv ein, dass die traditionellen schriftlichen Tests den Anforderungen von Math A nicht genügen konnten, da die übergeordneten Ziele (Verständnis der Konzepte, Begründen, etc.) mit ihnen nicht adäquat überprüfbar sind. Folglich wurden im Rahmen des HEWET-Projekts verschiedene alternative Möglichkeiten erdacht und ausprobiert. Die EntwicklerInnen stellten dazu fünf Grundprinzipien auf, die für Tests zu gelten haben (vgl. de Lange, 1987, S.179). Diese gelten auch heute in den Niederlanden.

1. *Ein Test muss den Lernenden im Lernprozess unterstützen.* Oft stellt ein Test das Ende einer Lerneinheit dar und dient der Lehrperson zur Wissensüberprüfung. Die SchülerInnen profitieren nicht davon. Also fordert de Lange (1987, S. 179), dass die SchülerInnen durch die Tests motiviert werden, sich weiter mit der Thematik zu beschäftigen und Feedback in Bezug auf ihren Lernprozess bekommen.

2. *Ein Test gibt den SchülerInnen die Möglichkeit zu zeigen, was sie wissen.* Meist sind die Fragestellungen sehr geschlossen. Jemand der die Lösung nicht kennt, hat keine Möglichkeit hat sein vorhandenes Wissen zu präsentieren.

3. *Die Tests sollten die Ziele von Math A operationalisieren.* Da diese übergeordneten Ziele schwer in zeitlich begrenzten Tests zu überprüfen sind, schlägt de Lange ein Nachdenken über Alternativen dazu vor. In weiterer Folge sollten natürlich die Ziele von RME operationalisiert werden.

4. *Die Qualität eines Tests ist nicht durch seine objektive Messbarkeit definiert.* Es wird von allen Beteiligten akzeptiert, dass unterschiedliche Personen Tests verschieden bewerten, wobei natürlich Grenzen eingehalten werden müssen. Der Weg zu einem Ergebnis wird ebenso wichtig wie das Ergebnis selbst. Dadurch wird ein Bestehen durch Erraten beispielsweise ausgeschlossen.

5. *Anwendbarkeit der Testmethoden im Schulalltag.* Es ist eine logische Notwendigkeit, dass die Testmethoden von LehrerInnen und SchülerInnen nur dann angewendet werden, wenn sie sich in die Schulpraxis integrieren lassen.

Auf Basis dieser fünf Prinzipien entwickelte die HEWET-Gruppe vier Alternative Testmethoden die im Folgenden kurz vorgestellt werden.

Der Zwei-Stufen-Test (de Lange, 1987, S. 184ff) Die Grundidee ist bei dieser Testmethode, dass den SchülerInnen die Möglichkeit gegeben wird, die Ergebnisse einmal zu überarbeiten. Die Methode ist in zwei Teile geteilt. Im ersten Durchlauf bekommen alle SchülerInnen den Test in der Schule und bearbeiten ihn alleine und mit zeitlicher Begrenzung. Die Aufgaben sind sowohl geschlossen, als auch offen formuliert. Der Umfang des Tests ist so, dass die SchülerInnen diesen nicht in der zur Verfügung stehenden Zeit bearbeiten können. Nun korrigiert die Lehrperson die Tests und bewertet diese. Im nächsten Schritt bekommen die SchülerInnen die Tests inklusive der Bewertung zurück. Die schwerwiegendsten Fehler werden den SchülerInnen ebenfalls bekannt gegeben. Die SchülerInnen haben nun die Aufgabe zu Hause nach Belieben den Test weiterzubearbeiten. Dabei ist es den SchülerInnen freigestellt, welche Fragen und auch in welcher Art die Fragen beantwortet werden. Nach etwa drei Wochen werden die Tests wieder abgegeben und erneut bewertet. SchülerIn und LehrerIn bekommen somit zwei Noten als Feedback. Die Abbildung 3.7 zeigt den zeitlichen Ablauf eines Zwei-Stufen-Tests. Diese Testmethode verbindet die Vorteile eines zeitlich begrenzten Tests, der für alle gleich ist, mit den Vorteilen des freien Arbeitens, wie Einbringen der eigenen Kreativität oder längeres Befassen mit einer Aufgabenstellung.

Die Heimarbeit (de Lange, 1987, S. 222ff) Bei dieser Testart haben die SchülerInnen die Möglichkeit in Zweiergruppen zu arbeiten. Sie dürfen aus mehreren Aufgaben auswählen, wobei nur der Titel und nicht die genaue Beschreibung bekannt ist. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben übersteigt jenen der in der Schule bearbeiteten. Die SchülerInnen dürfen die Aufgaben mit nach Hause nehmen und dort bearbeiten. Die Aufgaben sollten immer in

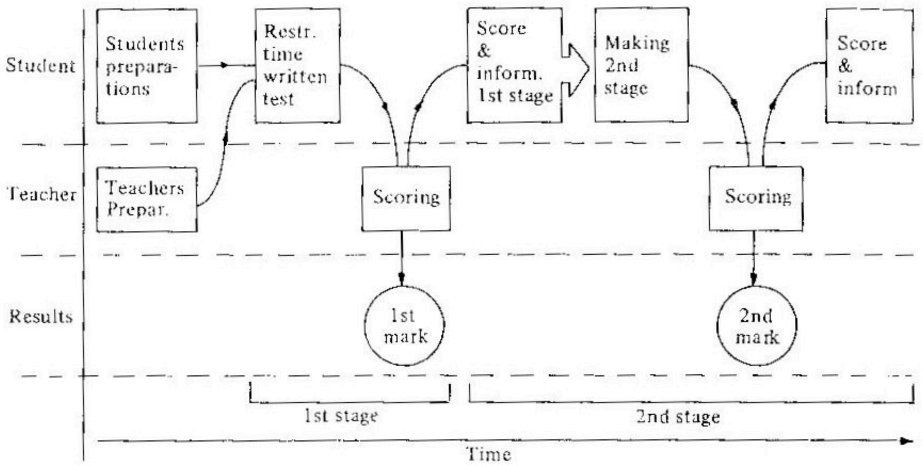


Abbildung 3.7: Zwei-Stufen-Test (de Lange (1987, S. 186))

einer Art Essay gelöst werden. Die SchülerInnen werden dabei ermutigt, die Lösungswege zu beschreiben und nicht nur in Formeln zu fassen. Die Bearbeitungsdauer war mit etwa drei Wochen begrenzt. Die Lehrperson korrigiert und bewertet die gelösten Aufgaben im Anschluss.

Das Essay (de Lange, 1987, S. 234ff) Die Essayform ähnelt der Heimarbeit. Die abgetesteten Gebiete differieren jedoch. Werden bei der Heimarbeit Aufgaben mit stark mathematischem Hintergrund gestellt, so ist es in der Essayform meist ein Zeitungsartikel, der von den SchülerInnen überprüft und bearbeitet werden soll. Das Ziel ist die Anwendung von interpretatorischen Fähigkeiten im Hinblick auf Diagramme und Statistiken. Die SchülerInnen konnten die Aufgaben wiederum zu Hause lösen und sollten in den Essays auch selbst Diagramme verwenden und erstellen.

Der mündliche Test (de Lange, 1987, S. 242ff) Mündliche Tests sind in den Niederlanden nach wie vor die gebräuchlichste Art SchülerInnen zu testen. Das HEWET-Team schlägt aber eine leicht veränderte Form vor, um den erwähnten fünf Prinzipien zu genügen. Der Hauptfokus der Fragen liegt nicht mehr am konkreten Ergebnis, sondern auf dem Lösungsweg. Die Prüfung wird von der Lehrperson und einer externen PrüferIn durchgeführt. Beide sind berechtigt Fragen zu stellen und bewerten am Ende den Test gemeinsam. Die Fragen zielen sehr stark auf das Verständnis der mathematischen Sachverhalte ab. Dem Prüfling wird oft mit Hinweisen und Hilfen auf den Weg geholfen. Diesen beschreiten muss er jedoch selbst.

3.3.2.1 Examensaufgabe VWO

Um einen Einblick in die Art der verwendeten Tests zu bekommen, wird exemplarisch eine Aufgabe aus dem Abschlussexamen für VWO des Jahres 2002 angeführt und beschrieben. Die hier beschriebene Aufgabe ist eine von fünf Aufgaben, bei denen insgesamt 19 Fragen beantwortet werden mussten. Die SchülerInnen hatten zur Lösung der Aufgaben drei Stunden Zeit. Die Aufgabe wurde aus einer unveröffentlichten Onlinepublikation entnommen (vgl. Brnstrup et al., 2003, S. 11-13). Die kursiven Kommentare wurden vom Verfasser eingefügt.

> Holz war in früheren Zeiten die wichtigste Energiequelle. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurde diese Rolle von der Kohle übernommen. In den letzten Jahren ist der Anteil von Erdöl und Erdgas am Energieverbrauch immer größer geworden. Im Buch „Energie, eine ökonomische Perspektive“ beschäftigen sich die Autoren Th. v. d. Klundert und H. Peer mit der Entwicklung der Energieträger. Sie gebrauchen dabei die Variable f für den Anteil eines Energieträgers am gesamten Energieverbrauch, wie er sich im Laufe der Zeit entwickelt hat. Für diesen Anteil f gilt: $0 \leq f \leq 1$. Dabei bedeutet $f = 0$, dass dieser Energieträger überhaupt nicht benutzt wird, und $f = 1$, dass ausschließlich dieser Energieträger verwendet wird. In

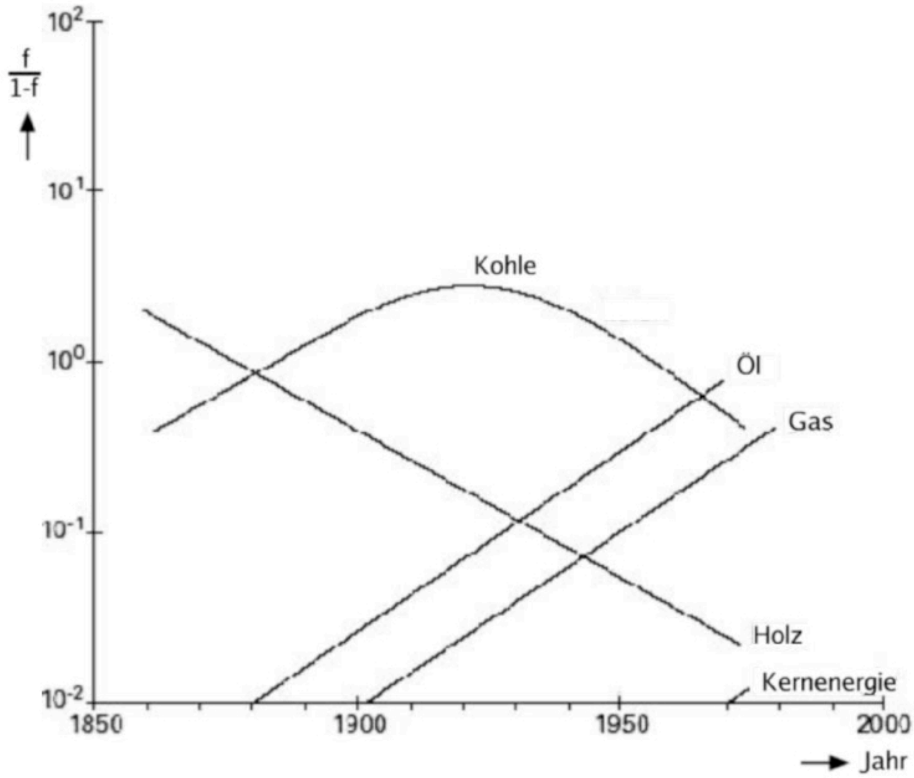


Abbildung 3.8: Energieverbrauch der Welt

diesem Buch findet man auch die Abbildung 3.8. Dadurch, dass nicht f sondern $\frac{f}{1-f}$ gebraucht wird und darüber hinaus auf der vertikalen Achse ein besonderer Maßstab verwendet wird, werden die meisten Graphen zu Geraden.

Frage 1[29]: (3 Punkte)
In welchem Jahr hatte Holz einen Anteil von 50% am gesamten Energieverbrauch? Erläutere deine Antwort.
Zur Lösung der Aufgabe ist keine Rechnung nötig. Die SchülerInnen müssen den Wert „nur“ aus dem Diagramm abzulesen.

Mit Abbildung 3.8 haben die Autoren darüber informieren wollen, welche Bedeutung die verschiedenen Energieträger im Laufe der Zeit gehabt haben. Auffallend ist dabei, dass nicht f sondern $\frac{f}{1-f}$ gebraucht wird. Das ist möglich, weil die Abbildung von f auf $\frac{f}{1-f}$ bijektiv ist. Es gilt: wenn f zwischen 0 und 1 zunimmt, dann nimmt auch $\frac{f}{1-f}$ zu.

Frage 2: (4 Punkte)
Weise die letzte Behauptung (*Wenn f monoton zwischen 0 und 1, dann auch* $\frac{f}{1-f}$) mit der Ableitung von $\frac{f}{1-f}$ nach.

Mit der in Abbildung 3.8 kann man für f_{Holz} und $f_{Erdöl}$, d.h. für den Anteil von Holz bzw. Erdöl am gesamten Energieverbrauch, die folgenden Formeln herleiten (*Die folgenden Formeln sind Angabe und nicht von den SchülerInnen herzuleiten.*):

$$\frac{f_{Holz}}{1-f_{Holz}} = 3{,}03 * 0{,}96^t \tag{3.2}$$

$$\frac{f_{Erdöl}}{1-f_{Erdöl}} = 0{,}0023 * 1{,}05^t \tag{3.3}$$

In diesen Formeln gibt t die Anzahl der Jahre an mit $t = 0$ am 1. Jänner 1850.

Frage 3: (5 Punkte)
Berechne mit Hilfe dieser Formeln, in welchem Jahr der Anteil von Holz genauso groß war wie der Anteil von Erdöl.
Die Frage 3 lässt sich natürlich auch mittels Diagramm lösen. Die SchülerInnen sollten zur Lösung jedoch die obigen Formeln verwenden.

29 Diese Frage ist im ursprünglichen Examen die neunte Frage für die SchülerInnen. Um die Lesbarkeit zu erleichtern, nummeriert der Verfasser die Fragen neu.

Mit Hilfe von Abbildung 3.8 können wir ebenso für f_{Erdgas}, den Anteil von Erdgas am gesamten Energieverbrauch, eine derartige Formel herleiten:

$$\frac{f_{Erdgas}}{1 - f_{Erdgas}} = a * g^t \tag{3.4}$$

Auch hier bedeutet t wieder die Anzahl der Jahre mit $t = 0$ am 1. Jänner 1850.

Frage 12: (4 Punkte)
Bestimme die Konstanten a und g.

Die Erdölvorräte gehen zu Ende, und der Kohleverbrauch hat viele Umweltprobleme zur Folge. Daher erwartet man, dass der Verbrauch von Erdgas in Zukunft ständig zunehmen wird. Schon seit Jahren steigt der Erdgasverbrauch jährlich um 3,5%. Man geht davon aus, dass sich das in nächster Zeit nicht ändern wird.
Diese Zunahme bedeutet, dass die heutigen Erdgasreserven bis ins Jahr 2050 reichen werden. Damit der Welt auch nach 2050 noch ausreichend Erdgas zur Verfügung steht, müssen neue Vorräte entdeckt werden. Um einen Eindruck davon zu bekommen, was die letzte Aussage bedeutet, befindet sich im Buch „An den Grenzen vorbei“ die Abbildung 3.9. In dieser Abbildung gibt jedes

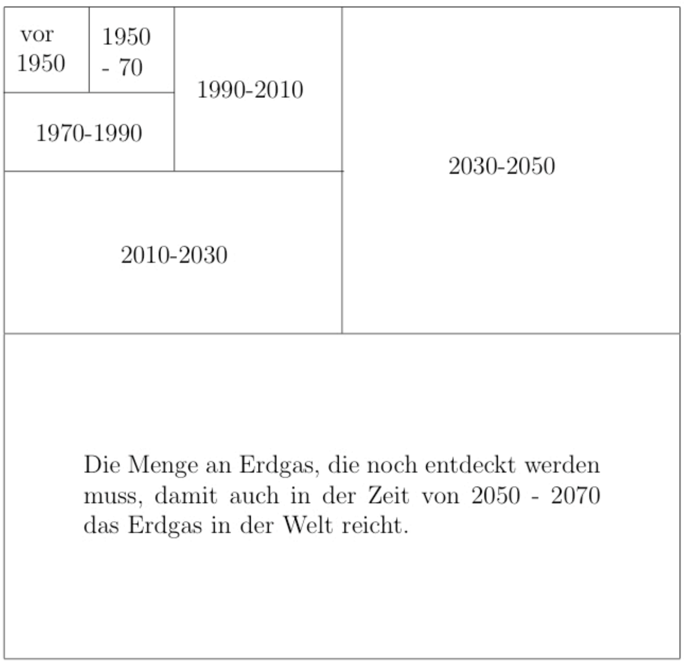


Abbildung 3.9: Graphische Darstellung des Erdgasverbrauchs

Rechteck die verbrauchte bzw. erforderliche Menge Erdgas für einen bestimmten Zeitraum an.

Frage 5: (5 Punkte)
Erläutere mit einer Rechnung, wie man in der Abbildung erkennen kann, dass der Verbrauch von Erdgas jährlich um 3, 5% steigt.

Die obige Aufgabe verlangt von den SchülerInnen zunächste einen sicheren Umgang mit den verschiedenen Verfahren der Analysis. So ist das Ablesen von einer logarithmischen Skala, Ableiten, das Rechnen mit Exponentialgleichungen und das Berechnen von Wachstumsfaktoren zur vollständigen Lösung der Aufgabe notwendig.
Der Kontext der Aufgabe ist realistisch und durch den Verweis auf die Originalliteratur noch stärker gegeben. Die Notwendigkeit der Mathematik bei Anwendung dieser Art ist auch für SchülerInnen leicht erkennbar. Vergleicht man diese Aufgabe mit Maturaaufgaben, die in Österreich gebräuchlich sind, so ist der Schwierigkeitsgrad doch recht hoch.

3.4 RME und Brüche

Das Erlernen von und Rechnen und mit Brüchen ist traditionell ein recht schwieriger Schritt für SchülerInnen. In diesem Kapitel wird angelehnt an Streefland (1991) der Zugang zu diesem Thema in RME näher beschrieben. Anhand einer Lerneinheit wird die Einführung von Brüchen gezeigt und verschiedene Aspekte, die RME-typisch sind, beschrieben.

3.4.1 In der Pizzeria

Streefland beginnt seine Arbeit über Brüche mit einer Warnung vor der Verwendung des Terminus Bruch, da dieser in der Vorstellung der SchülerInnen recht eng gefasst ist (Streefland, 1991, S. 47). Der Kern der Lerneinheit wird von der Erforschung von Verteilungssituationen gebildet. Dieser Kern soll in weiterer Folge als Modell für Brüche dienen. Dass dies nur ein Zwischenschritt ist, wird in Punkt 3.5.6 näher erläutert. Um diesen Kern befinden sich laut Streefland (1991, S. 48) fünf Cluster, die beim Lernprozess helfen und die verschiedensten Anwendungen von Brüchen enthalten.

1. Portionen auf- und verteilen (produzieren von Brüchen und einfachen Beziehungen zwischen diesen)
2. Sitzanordnung und -verteilung (Verbindung mit Verhältnissen und allgemeinen Gleichheiten)
3. Operieren durch eine vermittelnde Quantität (die vier Hauptoperationen)
4. Anwenden der eigenen Produktionen auf einer symbolischen Ebene

5. Auf dem Weg zu Rechenregeln für Brüche

Diese Cluster sind nicht streng voneinander getrennt, sondern werden im Lauf eine Aufgabe oft gemeinsam angesprochen. Im Folgenden werden die einzelnen Cluster kurz beschrieben, wobei dies an die Veröffentlichung von Streefland (1991) angelehnt ist.

3.4.1.1 Portionen auf- und verteilen

Die Aufgabe, „Verteile drei Pizzen zwischen vier Kindern“ (Streefland, 1991, S. 49), soll als Ausgangspunkt dienen. Die SchülerInnen beginnen verschiedene Lösungsmöglichkeiten anzuschreiben. Dabei wird der verschiedenartige Zugang, abhängig vom Vorwissen der SchülerInnen sichtbar (vgl. Abbildung 3.10). Impulsfragen wie: Bekommt jedes Kind mehr

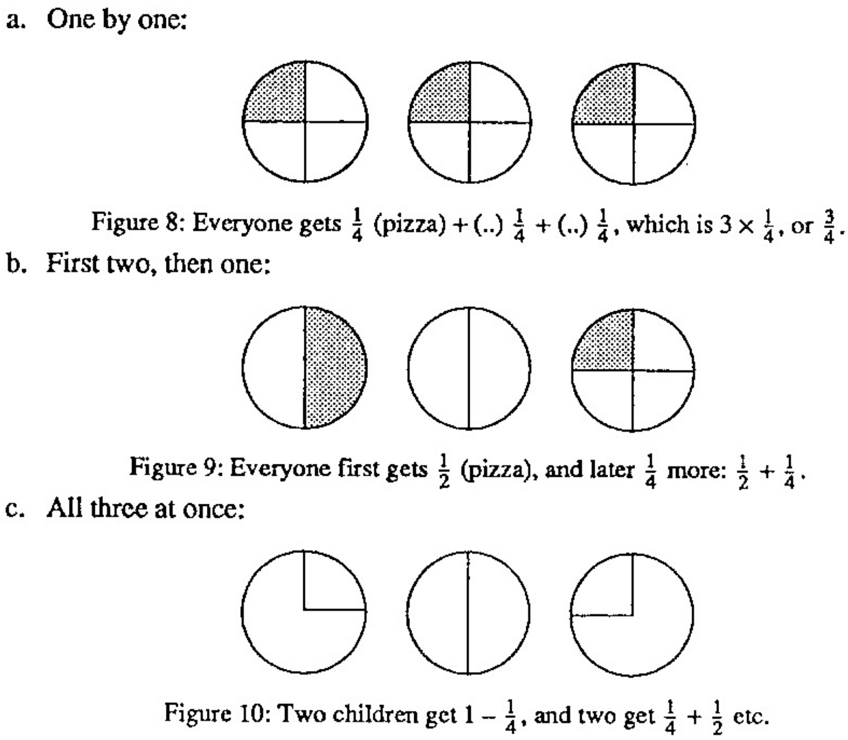
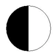


Abbildung 3.10: Vorgehensweisen bei der Pizzaverteilung (Streefland, 1991, S. 50)

als eine halbe Pizza? leiten zu anderen Clustern (Dividieren von Brüchen) über. Durch eine Variation der Aufgaben (Sechs Pizzen auf acht Kinder oder fünf Pizzen auf vier Kinder) werden Themen wie Äquivalenz ($\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$) und die gemischte Schreibweise ($\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$) angesprochen, eingeführt und vertieft. Die SchülerInnen haben dadurch die Möglichkeit den Cluster 4 anzusprechen, da in weiterer Folge eigene Symbole zur Lösung der Aufgaben eingesetzt werden.
Der Schritt zu Brüchen als Operatoren wird vor allem durch die Lösung folgend gelagerter Beispiele gewährleistet: Eine ganze Pizza kostet acht Euro. Ein Kind erhält diesen Anteil an

der Pizza  .
Wie viel muss das Kind bezahlen?
Die Rechnung eine halbe Pizza kostet die Hälfte von 8 Euro = 4 Euro ist für die SchülerInnen recht einfach und leicht lösbar, da die verwendeten Komponenten und Symbole von ihnen selbst entwickelt wurden. Der Schritt zum Bruch als Operator vollzieht sich somit recht einfach. Gravemeijer (1994, 1996, 2007) und Gravemeijer und Doorman (1999) zufolge ist dies mit dem Schritt „model of - model for“ gleichzusetzen.
Auch das Vergleichen von Brüchen kann über Verteilungsaufgaben eingeführt werden. Ein Beispiel gab es schon weiter oben (Bekommt jedes Kind mehr als $\frac{1}{2}$?). Ein weiteres wäre: „Drei Löffel Kaffee für vier Tassen oder 4 Löffel Kaffee für sechs Tassen. Welcher Kaffee ist stärker?“ Dieses Beispiel zeigt die steigende Komplexität der Aufgaben. Die SchülerInnen benötigen das Wissen um die Gleichheit von Brüchen und eine Vorstellung **wie viel ein Bruch ist**, um die Aufgabe zu lösen.

3.4.1.2 Sitzanordnung und -verteilung

In diesem Cluster werden Personen und Pizzen auf Tische in der Pizzeria aufgeteilt. Dies wird durch eine „alternative“ Schreibweise und Diagramme illustriert und unterstützt. Ausgehend von der Situation, dass 24 Personen in eine Pizzeria kommen und 18 Pizzen essen wird eine „faire“ Aufteilung gesucht. Ziel ist es die Schreibweise von Brüchen auch für Verhältnisse anzuwenden bzw. Äquivalenzen zu erkennen.
Abbildung 3.11 zeigt ein Beispiel eines solchen Baumdiagramms. Die Zahl im oberen Kreis

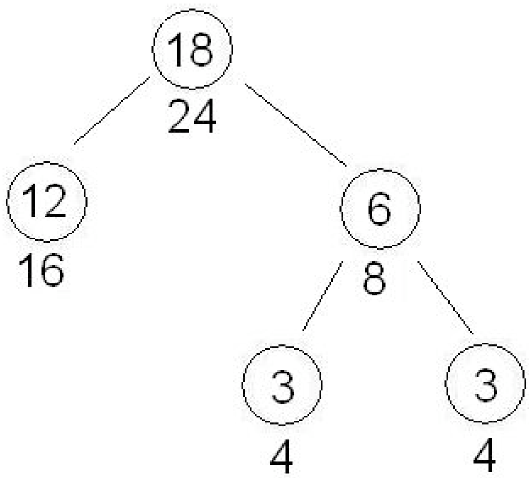


Abbildung 3.11: Baumdiagramm (Streefland, 1991, S. 52)

ist die Anzahl der Pizzen, darunter befindet sich die Anzahl der Personen am Tisch. Der Aufbau des Diagramms ist natürlich individuell verschieden. Die Frage, ob die entsprechende Aufteilung von Pizzen und Personen fair ist, führt schnell zu einem Vergleich der entstandenen „Brüche“. In dieselbe Richtung führen Fragestellungen wie: „Kann jemand, der $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ Pizza bekommen hat an diesem Tisch $\overset{2}{5}$ gesessen haben?“ oder „Jemand hat $\frac{1}{2}$ Pizza bekommen. wo kann er gesessen haben?“. Einen Schritt weiter führen Fragen folgender Art: „An einem Tisch sitzen fünf Personen mit vier Pizzen ($\overset{4}{5}$). Auf welchem Tisch sitzen die Personen, die nur halb so viel bekommen, wie jene am Tisch ($\overset{4}{5}$)? Welcher der folgenden Tische ist der Richtige: $\overset{4}{10}$ oder $\overset{2}{5}$? Dabei ist das Verständnis um den Wert eines Bruchs essentiell.

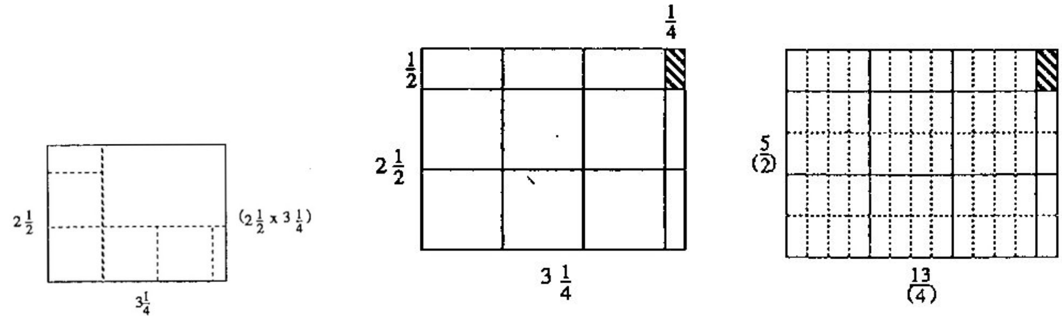
3.4.1.3 Operieren durch eine vermittelnde Quantität

In diesem Cluster geht es um die Anwendung von Brüchen als Operatoren. Streefland (1991, S. 54) behandelt in diesem Cluster Aufgaben, bei denen Quantitäten wie Preis, Länge, Zeit u. ä. mit den bekannten Auf- und Verteilungsproblemen gekoppelt werden. Das heißt, dass zum Beispiel nachgesehen wird, wie oft eine Teppichfliese in einen Raum bestimmter Größe passt. Es geht für die SchülerInnen also darum herauszufinden, wie sich die Quantität verhält, wenn sie auf Brüche angewandt wird. Ein kurzes Beispiel für jede Grundrechnungsart soll dies verdeutlichen.

1. Addition und Subtraktion: Eine Pizza kostet fünf Euro. Mehrere Kinder teilen sich eine Pizza. Ein Kind isst $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{5}$ der Pizza. Wieviel bezahlt dieses Kind?
   Die Antwort ist recht einfach zu finden. Eine Pizza kostet fünf Euro, damit muss eine halbe Pizza zwei Euro fünfzig Cent kosten. Ebenso kann der Preis für $\frac{2}{5}$ Pizza errechnet werden. Der Gesamtpreis liegt somit bei vier Euro fünfzig Cent. Die Äquivalenz von $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$ ist den SchülerInnen durch die Erfahrungen von Cluster 1 und 2 bewusst und kann durch eine Variation der Aufgabe durch eine Änderung des Preises für eine Pizza noch verstärkt werden. Sie wissen also nun auch den Preis für eine $\frac{9}{10}$ Pizza. Für Subtraktionen funktionieren die Beispiele ähnlich.

2. Multiplikation: Gegeben ist ein Zimmerboden der $2\frac{1}{2}$ Meter breit und $3\frac{1}{4}$ Meter lang war. Wie viele Teppichfliesen (1 x 1 m) sind notendig um das Zimmer auszulegen? Die Abbildung 3.12 zeigt die verschieden Stufen zur Lösung des Problems.
   Bei dieser Aufgabe wird vorausgesetzt, dass SchülerInnen die Fläche des Bodens ebenso berechnen wie mit natürlichen Zahlen. Dies ist intuitiv richtig und einleuchtend, sollte aber von Seiten der Lehrperson mitbedacht werden.
   In der Ausgangssituation wird der Boden grob eingeteilt und die Anzahl der benötigten Fliesenstücke geschätzt. Die SchülerInnen sehen, dass sechs ganze Stücke und etwas

mehr in den Raum passen. Sieben oder acht Fliesen scheinen mögliche Lösungen.
Die erste Abschätzung wird durch Einzeichnen der Linien verfeinert. Die SchülerInnen nähern sich der Lösung an $(2 * 3 + 3 * \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{4} + ...)$[30].
Eine weitere Verfeinerung der Einteilung ermöglicht den SchülerInnen die intuitive Berechnung von $\frac{1}{2} * \frac{1}{4}$. Um die ursprüngliche Fragestellung zu lösen, müssen die SchülerInnen nun nur noch die Anzahl der $\frac{1}{8}$ Stücke abzählen. Die Äquivalenz von $\frac{65}{8}$ und $8\frac{1}{8}$ ist für die SchülerInnen durch Anwendung der vorherigen Cluster leicht zu erkennen.



(a) Ausgangssituation **(b)** Grobe Einteilung **(c)** Feine Einteilung und Berechnung von $\frac{1}{2} * \frac{1}{4}$

Abbildung 3.12: Multiplikation von Brüchen (Streefland, 1991, S. 56)

3. Division: Aufteilung von $2\frac{1}{2}$ Tafeln Schokolade in $\frac{1}{4}$ Stücke oder das Aufteilen von einer Flasche Wein ($\frac{7}{10}$ Liter) auf Gläser ($\frac{1}{8}$ Liter) führen die Division von Brüchen über konkrete Beispiele ein. Dass das Ergebnis von $\frac{7}{10}/\frac{1}{8}$ größer als die beteiligten Brüche ist, wird den SchülerInnen intuitiv klar und erklärbar. Falsche Regeln werden damit nicht eingelernt.

3.4.1.4 Anwenden der eigenen Produktionen

Dieser Cluster soll die von den SchülerInnen produzierten Brüche auf einer symbolischen Ebene anwenden und behandeln. Die Brüche werden vom Kontext gelöst und es wird auf der symbolischen Ebene agiert. Beispiele wie $\frac{3}{4} = \ldots + \ldots$ und $\frac{3}{4} = \ldots + \ldots + \ldots$ helfen dabei. Auch die Erklärung der Aussage $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ führt zur einer Auseinandersetzung mit Brüchen auf dieser symbolischen Ebene. Die verwendeten Regeln werden in diesem Cluster nicht explizit artikuliert.

30 Die Berechnung wird wahrscheinlich nicht wie hier geschrieben erfolgen, sondern durch Abzählen der Felder. Die symbolische Schreibweise wird jedoch vom Autor benutzt um den Sachverhalt einfacher darstellen zu können.

3.4.1.5 Auf dem Weg zu Rechenregeln für Brüche

In diesem Cluster soll nun der letzte Schritt auf die formale Ebene vollzogen werden. Dabei sollen die SchülerInnen die verwendeten Regeln explizit formulieren und überprüfen. Welche allgemeinen Regeln können beim Betrachten der Aufgaben aufgestellt werden? Dieser Cluster ist für die Sicherung der Unterrichtsinhalte verantwortlich. Die formalen Erkenntnisse werden zusammengefasst und vereinfacht.

3.4.2 Design und Ergebnisse

Die Lerneinheit, die von Streefland (1991) entwickelt wurde, begann bei der Einführung der Brüche und endete beim Rechnen mit den Grundrechnungsarten. Er geht wie oben beschrieben von Situationen, aus in denen Dinge verteilt werden. Dadurch erhält man quasi „natürliche“ Brüche. Diesen Umstand nutzt er aus, um SchülerInnen dieses Gebiet der Verteilungen erkunden zu lassen. Der Kontext spielt wie im HEWET-Projekt eine nicht unerhebliche Rolle (siehe auch Abschnitt 3.3.1.3). Streefland sieht ihn sowohl als Quelle für Begriffsbildungen als auch als Gebiet der Anwendung. Zu Beginn seiner Lerneinheit werden die Aufgaben noch sehr stark dem mathematischen Inhalt angepasst. Die Aufgaben rund um die Pizzeria sind meist aus der Situation klar und wirken nicht konstruiert. Die Lösung der Probleme ist ohne weiteres auch auf das reale Leben anwendbar.

3.5 Grundlegende didaktische Prinzipien

An den Beginn dieses Abschnitts möchte ich ein Zitat von Freudenthal stellen, welches als grundlegende Idee begriffen werden kann, wie Mathematik gelehrt werden soll.

> What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activety, the process of mathematizing reality and if possible even that of mathematizing mathematics (Freudenthal, 1968, S. 7).

Im Laufe des Abschnitts werden die im Zitat genannten Begriffe genauer ausgeführt. Die Grundaussage durchzieht jedoch die Mathematikdidaktik der Niederlande bis heute. Mathematik ist ein offenes System, in welchem die SchülerInnen erst das Mathematisieren der Realität und erst in weiterer Folge Mathematik als formales System lernen sollen. Dass die Mathematik keine abgeschlossene, fertige Wissenschaft ist, ist nur jenen bekannt, die sich näher mit der Mathematik beschäftigen. SchülerInnen wird in den meisten Fällen nur sehr alte Mathematik, beginnend mit dem Satz von Pythagoras (mehr als 2000 Jahre alt) und endend bei der Integral- und Differentialrechnung (etwa 300 Jahre bekannt), vorgestellt.

3.5.1 Van Hiele´s Stufentheorie

Diese Theorie ist eine der Grundlagen von RME. Vor allem in der Anwendung von *vertikaler Mathematik* lassen sich diese Stufen noch erkennen. Die Theorie wurde für das Verständnis und Erlernen von Geometrie entwickelt. Van Hiele (1986) unterteilt dabei den Prozess von Lernen und Verstehen in verschiedene Stufen. Treffers sieht einen starken Zusammenhang zwischen den Ebenen verschiedener mathematischer Gebiete. So ist die dritte Ebene von Brüchen die Basis für die erste Ebene von Wahrscheinlichkeit. Eine sinnvolle Bearbeitung der Gebiete ist ohne das Abschließen der vorangehenden nicht möglich (Treffers, 1987, S. 243f). In den folgenden Unterkapiteln werden die einzelnen Stufen kurz beschrieben.

3.5.1.1 Ebenen des Verstehens

Visuelle Ebene Auf dieser ersten Ebene ist es den SchülerInnen möglich gleiche Objekte zu erkennen. Sie erkennen beispielsweise ähnliche Dreiecke. Ein Verständnis dafür, was der Grund für die Gleichheit ist, ist noch nicht vorhanden.

> There is no why, one just sees it. (van Hiele, 1986, S.83)

Die SchülerInnen untersuchen dabei konkrete Objekte, die sie vergleichen und vermessen.

Beschreibende Ebene Die SchülerInnen haben nun die Möglichkeit die Eigenschaften zu beschreiben, die für die Ähnlichkeit von Objekten verantwortlich ist. Eine Identifizierung anhand gegebener Eigenschaften ist möglich (Teppo, 1997, S. 211).

Theoretische Ebene Auf der höchsten Ebene ist es den SchülerInnen möglich, formale Zusammenhänge zu finden und kleinere Beweise durchzuführen. Die Sprech- und Schreibweise dieser Ebene ist abstrakter als in den bisherigen (van Hiele, 1986, S.86).

3.5.1.2 Ebenen des Lernens

Zwischen den oben beschriebenen Ebenen liegt jeweils eine Lernphase. Diese ist in fünf Phasen gegliedert (vgl. van Hiele, 1986, S. 93).

1. *Information:* In dieser Phase werden den SchülerInnen die notwendigen Informationen von LehrerInnen präsentiert.

2. *Geführte Orientierung:* SchülerInnen erforschen das vorgestellte Problem mithilfe der LehrerIn und noch recht genauen Anweisungen und Beispielen.

3. *Erklärung:* In dieser dritten Phase steht die sprachliche Erklärung des Feldes und die Diskussion von SchülerInnen untereinander und mit der Lehrperson im Mittelpunkt.

4. Freie Orientierung: Anhand offener Aufgaben können SchülerInnen zu verschiedenen Lösungen gelangen.

5. Integration: Mit Hilfe der Lehrperson erhalten die Lernenden einen Überblick über das Feld. Das Formulieren gültiger Gesetze bildet den Abschluss der Lernphasen.

Die Bedeutung der LehrerIn-SchülerIn-Beziehung wird durch die wechselnde Abfolge von Lernen und Lehren hervorgehoben. Van Hiele postuliert somit, die Notwendigkeit der Führung durch den Lernprozess. Diese Führung wird durch die „Guided Reinvention“ in RME realisiert und umgesetzt. Ein Durchlaufen aller fünf Phasen ist zum Erreichen der höheren Verständnisebene unerlässlich (Teppo, 1997, S. 212).

3.5.2 Erweiterung des Modells in RME

Treffers adaptiert und erweitert die Theorien von van Hiele und Freudenthal. Im Folgenden werden seine Grundsätze präsentiert (vgl. Treffers, 1987, S. 248-264).

Phänomenologische Erkundung: In dieser einführenden Phase eines neuen Problems wird dieses von Seiten der Lernenden mit bekannten Mitteln untersucht. Ziel ist eine möglichst vielfältige Beschreibung des Problems. Dies bildet die Grundlage für die weitere Untersuchung.

Überbrücken durch vertikale Instrumente: In dieser Phase werden verschiedenste vertikale Instrumente benutzt, um von der intuitiven, informativen und stark kontextabhängigen Ebene auf die höher liegende systematische, formale Ebene zu gelangen. Dieser Prozess gestaltet sich Schritt für Schritt und nicht als einzelner großer Sprung. Abbildung 3.5.2 auf Seite 56 zeigt diesen Prozess. Die Summe der horizontalen Komponenten repräsentiert die große Spanne realer Situationen, in denen das Konzept eingesetzt wird. Die Summe der vertikalen Komponenten gibt ein „Maß“ für den Gewinn an systematischen und formalen Kenntnissen an.
Treffers betont die Rolle, die Modelle in dieser Phase spielen. Sie erfüllen oft eine überbrückende Funktion und helfen den SchülerInnen beim Überwinden der Ebenen. Dabei ist die Änderung von „model of“ auf „modell for“ ausschlaggebend. Das Beispiel in Kapitel 3.2.2 kann zunächst als „model of“ exponentielles Wachstum gesehen werden. Gleichzeitig ist es, abgewandelt, ein „modell for“ Wachstum allgemein, welches die SchülerInnen in weiterer Folge verwenden können (vgl. Treffers, 1987, S. 258f).

Selbstständige Konstruktion und Produktion: Durch das selbstständige Überwinden der verschiedenen Ebenen mit Hilfe eigener Ideen und Ansätze stärkt diese Art Mathematik zu unterrichten das Selbstvertrauen der SchülerInnen in ihre mathematische Fähigkeiten. Die Lehrenden gibt den Lernenden dabei Hilfestellung. Die Lernenden wissen zu jedem Zeitpunkt des Prozesses, wo sie sich befinden. Dieses Wissen ist für sie als

auch für die Lehrenden unerlässlich und hilfreich. Diese Sichtweise ist in hohem Maß konstruktivistisch und nur auf mikrodidaktischer Ebene[31] möglich.
RME sieht SchülerInnen im Lernprozess nicht nur als RezipientInnen, sondern als aktive GestalterInnen dieses Prozesses. SchülerInnen steuern den Prozess als ExpertInnen für das eigene Lernen. Das Reflektieren der eigenen Handlungen ist dabei sowohl für die Lehrpersonen als auch für die Lernenden sehr wichtig.

Interaktivität: SchülerInnen sind angehalten ihrem eigenen Weg zu folgen. Dabei sollen aber auch Lösungswege von MitschülerInnen adaptiert werden, da diese möglicherweise die eigene Lösung beschleunigen. Ein einfaches Kopieren ist nicht sinnvoll, da die Lösungswege differieren und somit Lösungsvorschläge nicht passen müssen. Ein Vergleichen der Lösungswege und Abschätzen welcher der „Beste" ist, führt damit zu einer Wissenserweiterung. Treffers (1987) postuliert die Notwendigkeit der Interaktivität zwischen SchülerInnen und zwischen LehrerIn und SchülerIn. Ziel ist es sich gegenseitig Hilfe zu leisten, Feedback zu geben und Verknüpfungen bzw. Gemeinsamkeiten zwischen den Lösungswegen zu finden. Oder wie Treffers es ausdrückt:

> Each pupil gets the opportunity to work individually and, within certain limits, to construct his own path without isolating himself from the group (Treffers, 1987, S. 262).

Vernetzung: Im Lauf des Lernprozesses muss eine Vernetzung mit bereits bekanntem Wissen stattfinden. Ziel sollte die Einsicht über die Verbindungen verschiedenster Wissensgebiete sein.

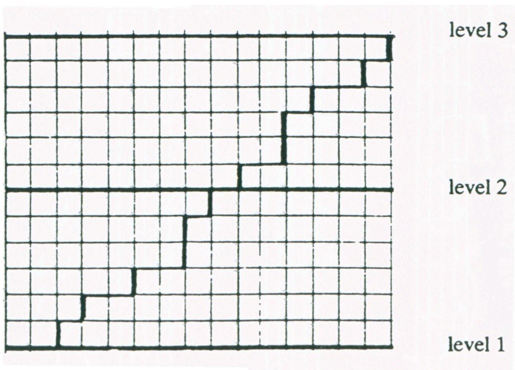


Abbildung 3.13: Schrittweises Erreichen der höheren Ebenen (Treffers, 1987, S. 248)

31 Die mikrodidaktische Ebene ist jene des unmittelbaren Unterrichts. Im Gegensatz dazu ist die makrodidaktische Ebene jene der Lehrpläne bzw. der übergeordneten didaktischen Prinzipien.

3.5.3 Mathematisieren

Der Begriff Mathematisieren[32] ist für RME sehr zentral. Es ist notwendig, diesen Begriff näher zu beleuchten. Freudenthal selbst sieht im Begriff Mathematisieren eine Sammlung mehrerer Begriffe und deutet ihn folgendermaßen:

> Mathematising as a term was [...] suggested by terms such as axiomatising, formalising, schematising,[...] (Freudenthal, 1991, S. 130)

Freudenthal sieht den Prozess des „Axiomatisierens“ (Freudenthal, 1991, S. 30) als historisch erste mathematische Aktivität. Diese Axiome wirken in den Unterricht hinein, da sie Grundlage für die symbolische Darstellung der Mathematik bilden.
Der Prozess des „Formalisierens“ (Freudenthal, 1991, S. 30) ist den SchülerInnen meist näher. Das Übersetzen von Sachverhalten in die Sprache der Mathematik ist auch im Regelunterricht bekannt. Dass dies eine mathematische Aktivität darstellt, verwundert also kaum.
Gemachte Erfahrungen und funktionierende Prozesse werden generalisiert und somit Schemata kreiert, die möglichst gut mit der Realität übereinstimmen. Dieser Prozess des „Schematisierens“ wird von Freudenthal ebenfalls zu den Quellen des Begriffs Mathematisieren gezählt (Freudenthal, 1991, S. 30f).
Freudenthal (1991) vergleicht das Mathematisieren mit der ersten Ebene von van Hiele (1986). Dabei legt er klar wie wichtig dieser Prozess für das Sichtbarmachen der Nützlichkeit und Anwendbarkeit der Mathematik ist.

> [...] pupils should learn mathematisizing, [...] on the lowest level where it applies to unmathematical matter, to guarantee the applicability of mathematics [...] (Freudenthal, 1973, S. 134).

Wichtig scheint in diesem Zusammenhang auch folgendes Zitat, welches Treffers als Freudenthals didaktisches Credo bezeichnet:

> [...] put the pupils in touch with the phenomena for which the mathematical structure is the organising tool in order to let them shape these tools themselves in a process of re-invention, and learn to handle and use these mathematical organising tools in concept formation (Treffers, 1987, S. 247)

Auch de Lange (1996) verwendet das Wort Mathematisieren. Er definiert es als „the translation part of the modelling process“ (de Lange, 1996, S. 68)
Dieser Argumentation schließen sich auch Baptist und Ulm an, die Mathematisieren wie folgt beschreiben:

32 Freudenthal (1991) verwendet im Englischen den Begriff Mathematizing.

> [...] Ansätze in Gestalt von Formeln und Gleichungen (vgl. Lösungsansätze bei klassischen Textaufgaben), Anfertigen einer Skizze, Angabe eines strukturellen Zusammenhangs, Aufstellen eines gegliederten Plans (Baptist und Ulm, 2005, S. 3)

In seiner Doktorarbeit definiert de Lange (1987) den Begriff folgendermaßen:

> Mathematizing is an organizing and structuring *activity* according to which acquired knowledge and skills are used to discover unknown regularities, relations and structurs. (de Lange, 1987, S. 43)

Er beschreibt damit nicht nur den Vorgang selbst, wie das Organisieren und Strukturieren, sondern ganz klar auch das Ziel dieser Aktivität, das Entdecken von Relationen, Regelmäßigkeiten und Strukturen.

3.5.4 Horizontale und Vertikale Mathematik

Die beiden Begriffe gehen auf die Arbeit von Treffers (1987) zurück. Er definiert sie dort recht klar:

> [...] the difference between transforming a problem field into a mathematical problem on the one hand [horizontale Mathematik], and processing within the mathematical system on the other hand [vertikale Mathematik] (Treffers, 1987, S. 247).

Unter den Begriff *horizontale Mathematik* fallen nach de Lange (1996, S. 43) also Tätigkeiten wie

- Identifizieren von Mathematik in einem Kontext
- Schemata bilden
- Entdecken von Relationen
- Entdecken von Regelmäßigkeiten
- Transferieren eines realen Problems in ein mathematisches Problem
- Transferieren eines realen Problems auf ein bekanntes mathematisches Modell

Zur *vertikalen Mathematik* gehören so de Lange (1996, S. 44) vor allem:

- Darstellen einer Relation in einer Formel
- Überprüfen von Regelmäßigkeiten
- Verfeinern von Modellen

- Verwenden verschiedener Modelle
- Kombinieren verschiedener Modelle
- Formulieren neuer mathematischer Konzepte

Ein einfaches Beispiel ist das folgende:
Nachdem der Weg von A nach B und von B nach C gemessen wurde, braucht man den Weg von A nach C über B nicht messen, sonder errechnet ihn durch Addition der Strecken (Freudenthal, 1991, S. 43).

Beide Begriffe (*horizontale* und *vertikale Mathematik*) sind jedoch nicht statisch anzusehen. Da die Lebenswelt jedes Einzelnen different ist, ist auch der Ansatzpunkt der *horizontalen Mathematik* verschieden. Gehört für den einen ein Bruch schon zur mathematische Seite, ist dieser für den anderen ein Teil der wirklichen Welt. Wichtig ist es, die beiden Begriffe nicht

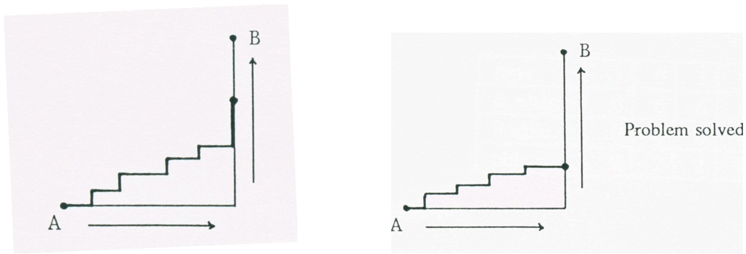


Abbildung 3.14: Zwei Wege um die Aufgabe zu lösen (aus de Lange, 1996, S. 54f)
,

isoliert zu sehen. Beide sind normalerweise zum Lösen von Problemen und Aufgaben nötig. Abbildung 3.14 veranschaulicht wie der Verlauf beim Lösen eines Problems sein könnte. Der stetige Wechsel zwischen *horizontaler und vertikaler Mathematik* ist dabei klar zu erkennen.

3.5.5 Guided Reinvention

Freudenthal selbst stellt dieses Konzept an den Beginn seiner Ausführungen über die didaktischen Prinzipien der RME (vgl. Freudenthal, 1991, S. 45ff). Ganz klar hebt er dabei den Unterschied zu den Ansätzen des „Problemlösens“ und des „entdeckenden Lernens“ hervor. Beide Ansätze hält er für nicht optimal.
Im Fall des Problemlösens werden im Allgemeinen Probleme gelöst, die nicht von Seiten der SchülerInnen auftauchen, sondern von LehrerInnen oder BuchautorInnen vorgegeben sind. Ein direkter Konnex zum Lernenden ist also nicht gegeben. Inwieweit diese Forderung in RME

umgesetzt ist, bleibt offen. Betrachtet man das Beispiel der Einführung des Exponentiellen Wachstums in Kapitel 3.2.2, so ist diese Aufgabenstellung interessant und spannend, hat aber mit der Lebenswelt einer SchülerIn nicht allzuviel zu tun. Van den Heuvel-Panhuizen meinte dazu, dass die Aufgabenstellungen nicht unmittelbar der Lebenswelt der SchülerInnen entstammen, für diese jedoch in diese Lebenswelt transformierbar sein müssen sein müssen (vgl. van den Heuvel-Panhuizen und Wijers, 2005, S. 288).
Entdeckendens Lernen vergleicht Freudenthal mit der Suche nach Ostereiern, da Dinge entdeckt werden müssen, die von jemand anderem in den Aufgaben versteckt wurden (Freudenthal, 1991, S. 46). Dahinter steht die nicht klar entschiedene Frage, ob Mathematik erfunden oder entdeckt wird, wobei diese Frage für den Lernenden selbst ohne Belang ist. Freudenthal selbst sieht Mathematik eher als Kunst, welche er- und nicht gefunden wird. Somit sollten seiner Meinung nach auch Lernende diesen Weg des „Nacherfindens“ beschreiten. Die Grenze zwischen Entdecken und Erfinden ist jedoch nicht eindeutig. Der Autor sieht im Herausfinden der Formel im Beispiel „Einführung des Exponentiellen Wachstums“ auf Seite 32 eher ein Entdecken der Formel durch die Aufgabe als ein „Neuerfinden“. Somit stellt sich die Frage, ob dieser Unterschied nur ein sprachlicher oder auch theoretisch fundiert ist.
Eine Schlüsselrolle in diesem Lernprozess spielt die Lehrperson. Sie hat die Aufgabe den Prozess zu steuern und zu lenken. Im Gegensatz zu anderen Zugängen zeichnet die Lehrperson nicht den Weg vor, sondern schafft „nur“ eine günstige Ausgangsposition. Den Weg müssen die SchülerInnen alleine gehen. Auf dieser mikrodidaktischen Ebene gleicht der Ansatz RME sehr stark dem *Konstruktivistischen Ansatz*. Dies gilt aber nur auf der Mikroebene. Im Konstruktivistischen Ansatz fehlt die übergeordnete Begleitung der Lehrperson und die langfristig definierten Lehr- und Lernziele. Diese bilden wichtige Komponenten in RME und werden in Kapitel 3.6 näher beschrieben.

3.5.6 Modelle in RME

Modelle sind ein wichtiges Hilfsmittel im RME-Unterricht. Sie sollen im Zuge der progressiven Mathematik den SchülerInnen das Vorwärtskommen erleichtern. Dabei gibt es laut van den Heuvel-Panhuizen (2003, S. 12f) vor allem zwei wichtige Anforderungen, die ein Modell erfüllen muss.

1. Das Modell muss von der gestellten Aufgabe (einer realen Situation oder einer gedacht realen Situation) ausgehen und auf die fortgeschrittene, generalisierte Ebene anwendbar sein. Die *vertikale Mathematik* soll dabei in beiden Richtungen unterstützt werden. Der Lernende muss jederzeit die Möglichkeit haben in die Ausgangssituation zurückzukehren.

2. Das Modell darf nicht dem Lernenden vorgestellt werden, sondern soll von ihm erfunden bzw. wiedererfunden werden. Das Modell muss also in das Denk- und Lernsystem des

Lernenden passen und sehr einfach zu adaptieren sein.

Modelle sollen vor allem die Lücke zwischen dem Verstehen auf der informativen Kontextebene und dem Verständnis auf der höheren formalen Ebene schließen. Dabei ist es wichtig den Schritt vom „model of“ zum „model to“ zu machen (siehe Abschnitt 3.5.6.3) (Gravemeijer und Doorman, 1999, S. 118). Dieser Schritt ist analog dem Erreichen einer höheren Ebene, wie in Absatz 3.5.1.1 beschrieben. Das heißt, dass das zu Beginn des Lernprozesses gefundene Modell in weiteren Schritten verallgemeinert werden muss. Hier ist wieder das Prinzip der Interaktivität ausschlaggebend.
Warum wird in RME überhaupt mit diesem Modellansatz gearbeitet? Gravemeijer (2007) sieht in Modellen die Möglichkeit die Lücke zwischen dem Vorwissen der SchülerInnen und dem mathematischen Formalismus zu schließen. Er kritisiert dabei die bisherige Vorgangsweise schwierige mathematische Sachverhalte in kleine Teile zu zerteilen, in der Hoffnung, dass diese Teile von den SchülerInnen verstanden werden. Das Problem sieht Gravemeijer in der Annahme, dass die SchülerInnen in der Lage sind aus diesen Teilen ein vollständiges Ganzes zu rekonstruieren. Dieser Schritt ist für LehrerInnen und SchulbuchautorInnen nicht schwer, da diese einen Überblick über die Zusammenhänge haben. Für SchülerInnen bleiben die Teile jedoch meist isoliert und können nicht in Zusammenhang gebracht werden. Als Beispiel führt Gravemeijer (2007, S. 3f) die Darstellung des Dezimalsystems mithilfe von kleinen Holzblöcken an. Dabei stellt jeder Block eine Eins dar. Zehn Blöcke werden zu einer Reihe zusammengeführt (Zehner), zehn Reihen zu einer Fläche (Hunderter) und zehn Flächen zu einem Würfel (Tausender). Jeder, der das Dezimalsystem verstanden hat, wird eine gute Möglichkeit in diesen Blöcken sehen, dies zu verstehen und die Blöcke als Modell für das System erkennen. SchülerInnen, so Gravemeijer, die das Dezimalsystem nicht kennen werden wahrscheinlich nur Blöcke sehen. Zwar werden sie die Möglichkeit der Zusammenfassung einzelner Blöcke zu größeren Einheiten erkennen, der Zusammenhang zwischen Blöcken und Dezimalsystem ist für sie aber nicht ersichtlich. Somit ist das Modell nicht optimal. Die SchüelrInnen haben keine Möglichkeit die angesprochene Lücke zu überwinden.
Streefland (1991) beschreibt die Möglichkeit mittels Modellen dieses Vorwärtskommen zu gewährleisten. Diese Beschreibung findet sich teilweise in Kapitel 3.4 inklusive Beispielen genauer. Wichtig erscheint, dass auch Freudenthal sich mit der Notwendigkeit von Modellen auseinander setzte. Er unterschied noch zwischen Modellen als „after-images“ und „pre-images“ (Freudenthal 1975 zit. nach van den Heuvel-Panhuizen (2003, S. 15)), bzw. solchen die „descriptive models“ und „normative models“ (Freudenthal 1978 zit. nach van den Heuvel-Panhuizen (2003, S. 15)) sind. Freudenthal sprach im Gegensatz zu Streefland von übergeordneten didaktischen Modellen, die sich eher auf Lehrpläne und Lernziele beziehen.
Vor allem Gravemeijer (1994, 1996, 2007) setzte sich mit der Funktion von Modellen

auseinander. Er unterscheidet dabei Modelle, die etwas „transformieren“ und Modelle, die etwas „organisieren“. In der Theorie der RME sind es immer Modelle der zweiten Art, die gewünscht werden. Wichtig ist hier auf den Unterschied zu Modellen, wie Maaß (2004) sie postuliert, hinzuweisen. Beim von Maaß beschriebenen Modellierungsunterricht ist es primär das Transformieren realer Situationen auf bekannte Modelle und weniger das Entwickeln neuer Organisationsmodelle. Gravemeijer spricht in diesem Zusammenhang von Aufgaben die im Kern nur dazu dienen, „[...] sich an bekannte Aufgabentypen zu erinnern und vorhandene Standardroutinen zu festigen. (Gravemeijer, 1994, S. 92)“. RME stellt an Modelle jedoch die Anforderung, dass mit ihnen ein weiterführender Schritt möglich ist. Diese Transformation von „model of“ zu „model for“ ist entscheidend. Das Modell wird dadurch nicht mehr nur im Kontext des Problems angewandt sondern selbst ein Objekt, welches untersuch- und handhabbar ist. Als Beispiel sei hier die leere Zahlengerade aufgeführt, welche im folgenden Absatz 3.5.6.1 beschrieben wird. Van den Heuvel-Panhuizen (2003) stellt aber klar, dass ein Schritt der Modelltransformation im Allgemeinen nicht ausreicht um vom Kontext zur formalen Mathematik zu gelangen. Vielmehr sind es mehrere Transformationen, die diesen Schritt unterteilen. Diese mikrodidaktischen Transformationen sind in der Abbildung 3.15 gut zu erkennen. Die gewünschte Transformation des „model of“ zum „model for“ auf einer

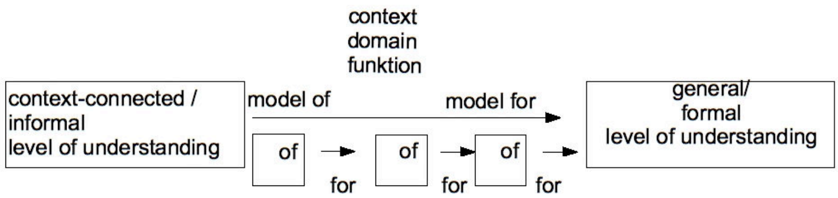


Abbildung 3.15: Schritt von der informellen zur formalen Ebene (van den Heuvel-Panhuizen, 2003, S. 30)

höheren allgemeinen Ebene benötigt somit viele kleine Transformationen und somit ein langfristiges Konzept, um die Umsetzung für die SchülerInnen zu ermöglichen.

3.5.6.1 Die leere Zahlengerade

Die leere Zahlengerade ist ein Instrument, welches SchülerInnen bei Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 100 unterstützt. Die SchülerInnen tragen dabei nur jene Zahlen ein, die für sie notwendig sind, um die Rechnung durchzuführen. Am Beginn der Lerneinheit starten die SchülerInnen mit dem Abmessen von Abständen unter der Verwendung von Stäben die zehn oder einen Abschnitt lang sind. In weiterer Folge fungiert dabei eine Zahlengerade als *model of* Addition und Subtraktion. Die SchülerInnen bewegen sich dabei entsprechend nach links oder rechts. In Abbildung 3.16 ist eine solche Addition auf der Zahlengerade zu sehen. Die Transformation des Modells erfolgt nun, indem den

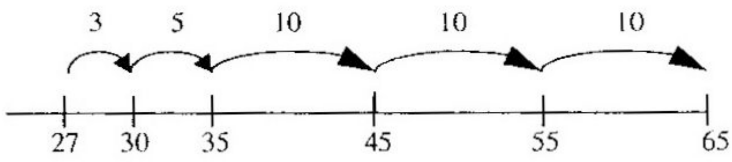


Abbildung 3.16: Addition auf der Zahlengerade (Gravemeijer, 1996, S. 120)

SchülerInnen leere Zahlengeraden als Hilfsmittel zur Verfügung gestellt werden. Dabei ist die Anwendung unterschiedlicher Strategien der SchülerInnen zur Lösung der Addition $27 + 38$ zu sehen (vgl. Abbildung 3.17). Durch die Verwendung der leeren Zahlengerade bei Additionen und Subtraktionen wird sie zu einem *model for* dieser Rechenoperationen. Die SchülerInnen können somit die leere Zahlengerade nun als Hilfsmittel für alle möglichen Additionen und Subtraktionen einsetzen. Das Erkennen von formalen Zusammenhängen wie dem Assoziativgesetz ist in weiterer Folge nicht schwer, da dies für die SchülerInnen durch die verschiedenen Lösungsstrategien (vgl. Abbildung 3.17) schon vertraut ist. Somit wird

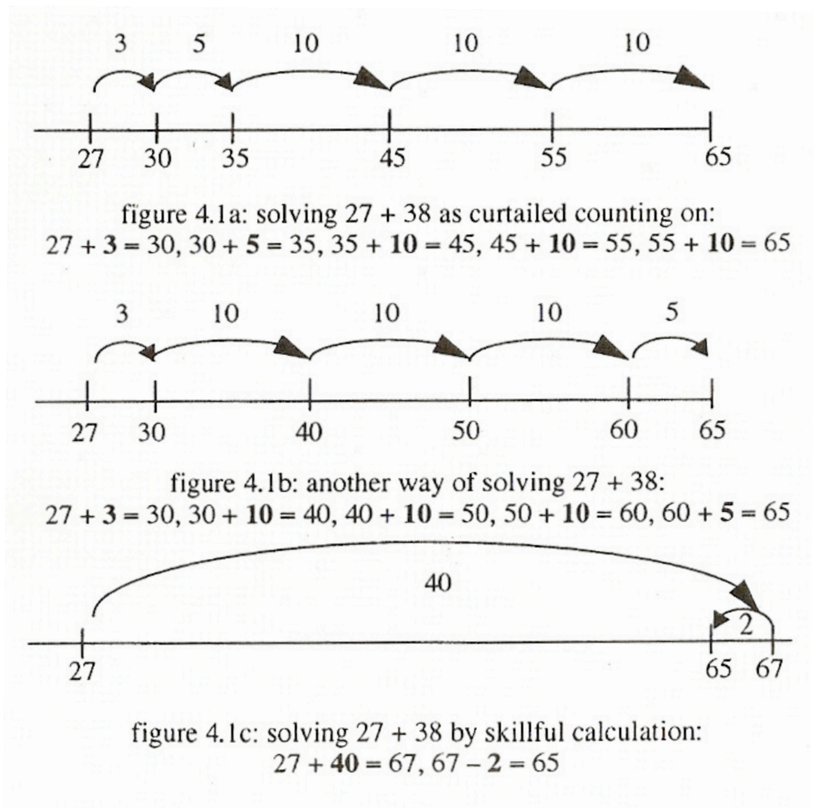


Abbildung 3.17: Operieren auf der Zahlengerade (Gravemeijer, 1996, S. 120)

ein fließender Übergang zwischen den Kontexten und der formalen Ebene geschaffen.

3.5.6.2 Buskette

Ein weiteres Beispiel ist die Einführung der Symbole + und - im Primarunterricht. Hier führt Gravemeijer (1996) ein Beispiel an, in dem anhand einer Busfahrt diese beiden Symbole eingeführt werden. Den SchülerInnen ist dabei intuitiv klar, dass die Passagiere im Bus mehr werden, wenn Menschen einsteigen, und weniger, wenn Passagiere den Bus verlassen. In Abbildung 3.18 sieht man dieses erste Modell für die Situation. Die SchülerInnen werden mit dieser Aufgabe im Allgemeinen wenig Schwierigkeiten haben. Die Abstraktion des Beispiels

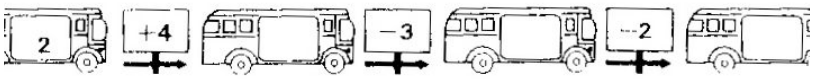


Abbildung 3.18: Darstellung einer Buskette (Gravemeijer, 1996, S. 29)

(also das „model for“) lässt sich im ersten Schritt folgendermaßen darstellen:

$$2 \xrightarrow{+4} \dots \xrightarrow{-3} \dots \xrightarrow{-2} \dots$$

Der letzte Schritt zur formalen Schreibweise ist damit leicht zu vollziehen.
Auch die weiterführenden Aufgaben in den Abbildungen 3.19 sprechen dieses Modell an, leitet zusätzlich zum Kommutativgesetz hin. Auch hier ist die Möglichkeit der Weiterentwicklung des Modells schon gegeben.

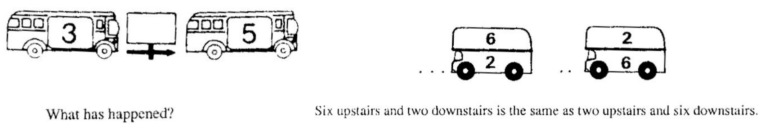


Abbildung 3.19: Zwei Aufgabe zum Busmodell (beide Abbildungen Gravemeijer (1996, S. 35 und 38))

3.5.6.3 *model of* und *model for*

Als „model of“ werden jene Modelle bezeichnet, die noch sehr stark im Kontext der Probleme verankert. Die Modelle sind der erste Schritt den SchülerInnen beim Lösen von RME-Problemen gehen. Diese Modelle sind nur zum Beschreiben des Problems geeignet (deskriptiv). Eine weiterführende Abstraktion oder gar eine Beschreibung der formalen Ebene ist nicht möglich. Gravemeijer (2007, S. 11) spricht von Modellen, die zur Lösung des Problems beitragen und notwendig sind.
Wird das „model of“ nun auf ähnliche Probleme angewandt, so ist es für SchülerInnen möglich

die Aufmerksamkeit auf die mathematischen Beziehungen zu lenken. Das Modell bekommt einen Objektcharakter und wird somit Gegenstand der Untersuchung (vgl. Gravemeijer, 2007, S. 11). Betrachtet man in Abbildung 3.17 die dritte Lösungsstrategie, so sieht man hier deutlich, dass das verwendete Modell schon als „model for“ klassifiziert werden kann. Die/der Schüler/in hat die Äquivalenz der Addition von 38 mit der Addition von $40 - 2$ erkannt und verwendet diese zur Lösung. Das Modell wird auf einer höheren Ebene verwendet. Bei der Bildung des „model for“ müssen die SchülerInnen gewisse Strukturen, Zusammenhänge und Gesetze erkennen. Dieses „model for“ ist ein fexibel auf verschiedenste Situationen einsetzbares Instrument, welches den unmittelbaren Kontext nur mehr in geringem Ausmaß benötigt.

Gravemeijer (2007, S. 13) ordnet den beiden Modellstufen Aktivitäten zu. „referential aktivity“ wird dem „model of“ zugeordnet. Dabei leitet sich die Arbeit mit dem Modell direkt von der Beschreibung der Situation und der Aufgabe ab. Diese Aktivität siedelt er oberhalb der Situation an. Auch dem „model for“ ist eine Aktivität zugeordnet. Gravemeijer (2007, S. 13f) nennt diese „general activity“ und meint das die Aktivität geleitet von der Suche nach mathematischen Zusammenhängen ist. Diese Ebene liegt über der referentiellen jedoch noch unter der formalen Ebene.

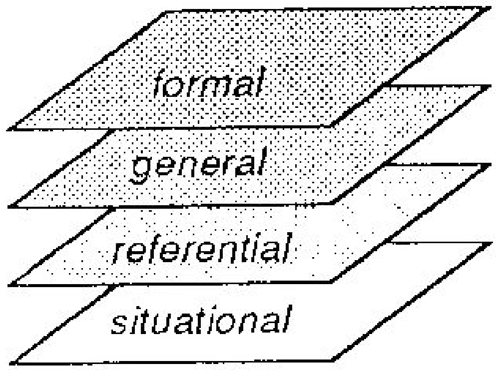


Abbildung 3.20: Darstellung der verschiedenen Aktivitätsebenen (vgl. Gravemeijer, 2007, S. 14)

3.5.7 Modellentwicklung in RME

Gravemeijer (1996) beschreibt sehr gut die verschiedenen Entwicklungsstufen der Modelle, welche im Mathematikunterricht benutzt werden. Die erste und im Nicht-RME-Unterricht meist verwendete ist jene, die auch von Maaß (2004) beschrieben wird. Das heißt, dass Modelle dazu dienen, reale Kontexte in die formale Sprache der Mathematik zu übersetzen. Diese werden dort bearbeitet, gelöst und anschließend wieder rückübersetzt (siehe Abbildung 3.21).

Die nächste Entwicklungsstufe geht mehr in Richtung RME. Es wird ein weiterer Schritt,

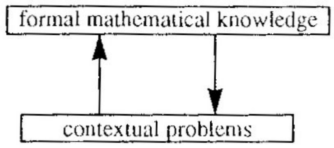


Abbildung 3.21: Darstellung Anwendung formaler Mathematik (vgl. Gravemeijer, 1996, S. 93)

das Beschreiben der realen Kontextsituation, eingefügt (siehe Abbildung 3.22). Dabei wird das Problem vereinfacht dargestellt und einfache Zusammenhänge festgestellt. Das

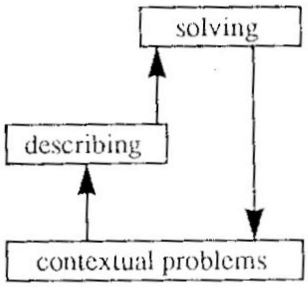


Abbildung 3.22: Darstellung Entwicklungsstufe 2 (vgl. Gravemeijer, 1996, S. 93)

Problem ist dabei normalerweise nicht gelöst. Die Beschreibung erfolgt nicht zwingend mit mathematischen Formalismen, sondern oft in einer vom Lernenden selbst entwickelten Form. Erst im nächsten Schritt wird nun das Problem gelöst und interpretiert. Die Lösung erfolgt dabei schülerInnenspezifisch. Gravemeijer bezeichnet diese Art Probleme zu lösen schon als „realistic problem solving“ (Gravemeijer, 1996, S. 93).
Ausgehend vom obigen Modell, spricht Gravemeijer (1996) von einem weiteren Prozess, der durch die Bearbeitung vieler Aufgaben gelöst wird. Durch die oftmalige Anwendung des Algorithmus des Beschreibens beginnen die SchülerInnen eine mathematische Sprache zu entwickeln. Diese wird gemeinsam mit dem gefundenen Lösungsweg zu einem mathematischen Lösungsalgorithmus, zum „model of“. Dies ist ein Prozess der nach Treffers klar dem *vertikalen Mathematisieren* zugeordnet werden kann (vgl. Abbildung 3.23).

Das Gesamtmodell, der letzte Schritt der Entwicklung, ist eine gute Darstellung für die „(Re)-invention“, die von Freudenthal gefordert und in Kapitel 3.5.5 beschrieben wird. Dieses Modell ist nun abschließend in Abbildung 3.24 dargestellt. Wichtig ist hierbei, dass der Schritt von mathematischer Sprache zu Algorithmus in einem formalen mathematischen Wissen getätigt wird.

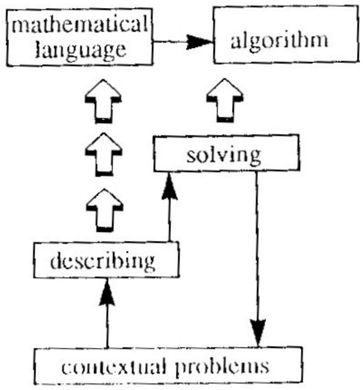


Abbildung 3.23: Darstellung Vertikale Mathematik (vgl. Gravemeijer, 1996, S. 93)

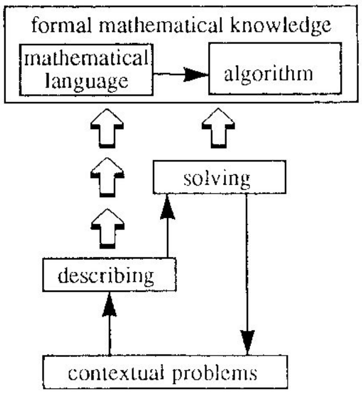


Abbildung 3.24: Darstellung Re- Invention (vgl. Gravemeijer, 1996, S. 94)

3.6 Kernziele

Lange war dem Verfasser, unklar wie die Verbindung zwischen den einzlenen Kapiteln und Lerneinheiten bei RME hergestellt wird. Erste Hinweise gibt die Liste der Kernziele, die vom Ministerium in Anlehnung an das „Proeve“ [33] verfasst wurde, und die Lern- und Lehrbahnen, die am Ende der 1990er-Jahre im Rahmen des TAL[34]Projekts entwickelt wurden. Nun sind Kernziele auch in anderen Ländern in den Lehrplan implementiert.

33 Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, engl. Design of a National Curriculum for mathematics education at primary school; Unter diesem Begriff versteht man in den Niederlanden eine Reihe von Publikationen (vor allem von Treffers) die als Unterstüzung für LehrbuchautorInnen, die LehrerInnenausbildung usw. dienen sollen. Darin werden die elementaren Gebiete, die im Unterricht der Primarstufe vorkommen sollen (Natürliche Zahlen, elementare Geometrie, Messen, Verhältnisse, etc.), genau didaktisch erklärt und mit vielen Beispielen erörtert.

34 TAL ist die niederländische Abkürzung für learning-teaching trajectories. Der Verfasser übersetzte dies mit Lehr- und Lernbahnen.

Wo liegt der Unterschied zu den Niederlanden?
Wirft man einen ersten Blick auf die definierten Kernziele (Abbildung 3.25), so sieht man schnell die Unterscheidung in allgemeine Ziele (Ergebnisse reflektieren und interpretieren, Verbindung zwischen Mathematik und dem täglichen Leben herstellen können) und den Fachgebieten zugeordneten Zielen. Auch das ist nicht ganz neu. Der österreichische Lehrplan für Mathematik enthält ebenfalls diese Hinweise auf allgemeine Bildungsziele, die im Unterricht abgedeckt werden sollen (vgl. BMUKK, 2004, S. 2f). Eine mögliche Antwort liegt in der Entwicklung, die diese Lehrziele in den letzten fünf Jahren durchlaufen haben. Vor allem das TAL-Projekt trug dazu bei, dass die Kernziele auch auf der Ebene des Unterrichts umgesetzt wurden.

TAL richten sich vornehmlich an den Primarunterricht. Es existieren Publikationen für

CORE GOALS PRIMARY SCHOOL 2004
General mathematical insights and abilities
Learn to use mathematical language
Learn to solve practical and formal mathematical problems and express their reasonings in a clear way
Learn to support and judge solution strategies
Numbers and operations
Learn to understand in a general way the structure and relationships of whole numbers, decimal numbers, fractions, percentages and ratios and are able to calculate with them in practical situations
Learn to carry out mentally and quickly the basic operations with whole numbers at least up to 100; and know the additions and subtractions up to 20 and the multiplication tables by heart
Learn to estimate and calculate by approximation
Learn to add, subtract, multiply and divide in a clever way
Learn written additions, subtraction, multiplications and divisions in more or less curtailed standardized ways
Learn to use the calculator with insight
Measurement and geometry
Learn to solve simple geometric problems
Learn to measure and to calculate with measurement units and measures such as appear in time, money, perimeter, area, volume, weight, speed and temperature

Fig. 2b: CORE GOALS PRIMARY SCHOOL 2004

Abbildung 3.25: Kernziele in der Primarstufe von 2004 (vgl. van den Heuvel-Panhuizen und Wijers, 2005, S. 294)

Zählen und Zahlen sowie für Messen und Geometrie. Jeder Band enthält eine CD mit Beispielen für die Umsetzung im Unterricht. Van Heuvel-Panhuizen, die maßgeblich an der Entwicklung beteiligt war, spricht von drei verschiedenen Bedeutungen, die in diesen Lehr-und Lernbahnen miteinander verwoben sind (van den Heuvel-Panhuizen, 1998, S. 19).

- Die *Lern*bahn, welche einen Überblick über den Lernprozess der SchülerInnen gibt.
- Die *Lehr*bahn, in der didaktische Indikatoren, die den Lernprozess der SchülerInnen stimulieren sollen.
- Der *Gegenstandsleitfaden*, in dem die Kernelemente des Mathematiklehrplans stehen.

Im Unterschied zu klassischen Lehrplänen geben die Lehr- und Lernbahnen eine longitudinale Ausrichtung, also nicht nur das Ziel wird beschrieben, sondern auch der Weg dorthin.

Kernziele für den Sekundarunterricht Da die ersten drei Jahre in der Sekundarstufe praktisch für alle Schultypen gleich sind (siehe Kapitel 2.3.2), ist natürlich auch der zu unterrichtende Schulstoff quasi ident. Eine Beschreibung der Ziele ist daher für alle Schultypen gleich zu verfassen. Van den Heuvel-Panhuizen und Wijers (2005) beschreiben die Schwierigkeiten, die in weiterer Folge im Schulsystem auftreten. So wurde oft der Schulstoff der VWO für die HAVO „verwässert“, und blieb damit im Grunde ident. Ziel war es, das Umsteigen zwischen den Schultypen zu erleichtern. Leider war eine Folge des „Verwässerns“, dass vor allem in Algebra der kontextreiche Stoff der VWO in der HAVO schon nur mehr ein sinnloses Erlernen von Routinen war (vgl. van den Heuvel-Panhuizen und Wijers, 2005, S. 298f). Außerdem war der Stoffumfang zu hoch, sodass die SchülerInnen Probleme hatten, die einzelnen mathematischen Gebiete zu verbinden. Somit war eigentlich das Gegenteil von dem erreicht worden, was RME auszeichnet. Ende der 1990er Jahre versuchte man das Problem durch eine Straffung und Kürzung des Lehrplans zu verbessern. Ergebnis war eine Liste von Kernzielen (Abbildung 3.26). Diese Ziele sollten von den Schulen als Minimalziele gesehen werden. Jeder Lehrerin/Jedem Lehrer stand es frei nach den Fähigkeiten der SchülerInnen diese Ziele zu vertiefen. Man ging von der Einstellung der LehrerInnen aus, dass diese die „Latte so hoch wie möglich“ legen werden (vgl. van den Heuvel-Panhuizen und Wijers, 2005, S. 299).

Ein weiteres Problem von Unterricht in den Niederlanden sieht Panhuizen im „teaching to the test“. Durch die verpflichtenden zentralen Tests am Ende der Sekundarstufe und der dort vom Staat vorgegebenen Lernziele richtet sich der Lehrplan der Schulen natürlich stark auf diese aus. Diese Zielvorgaben beeinflussen umgekehrt wiederum SchulbuchautorInnen. Gebiete, die beim Schlussexamen nicht abgefragt wurden, verschwanden sukzessive aus den Lehrbüchern. Da der Unterricht in den Niederlanden sehr stark lehrbuchorientiert ist, verschwinden diese Gebiete somit auch aus dem Unterricht. Van den Heuvel-Panhuizen und Wijers (2005) kritisieren die gängige Praxis der Lehrbücher, die laut ihnen „teacher proof“ und „guarantee“ sind, womit die LehrerInnen nicht mehr über den enthaltenen Stoff nachdenken und reflektieren müssen. Sie können sicher sein, dass all das, was ihre SchülerInnen beim Abschlussexamen wissen müssen, im Lehrbuch enthalten ist.

CORE GOALS BASIC SECONDARY EDUCATION 2004
Learn to use appropriate mathematical language to order their own thinking and to explain to others, learn to understand the mathematical language used by others.
Learn to recognize and use mathematics to solve problems in practical situations while working alone or with others.
Learn to set up mathematical argumentation, and to discern mathematical argumentation from opinions and statements and learn to give and receive mathematical critique with respect for each other's way of thinking.
Learn to understand the structure and relationships of positive and negative numbers, decimals, fractions, percents and ratios and learn to work with these is meaningful and practical situations.
Learn to calculate in an exact way as well as by approximation, and to reason based on insight in the precision, the order of magnitude and the error margins fitting a given situation.
Learn to measure, learn to understand the structure and relationships of the metric system and learn to calculate with measurement units for quantities that are common in relevant applications.
Learn to use informal notations, schematic representations, tables, graphs and formulas to understand relationships between quantities and variables.
Learn to use two-dimensional (flat) and three-dimensional (spatial) shapes and structures, learn to make and interpret representations of these, and learn to calculate and reason using their properties and measurements.
Learn to systematically describe, order and visualize data and to critically judge data representations and conclusions.

Fig. 7b: CORE GOALS BASIC SECONDARY EDUCATION 2004

Abbildung 3.26: Kernziele in der Sekundarstufe von 2004 (aus van den Heuvel-Panhuizen und Wijers (2005, S. 300))

Dieses Problem ist in Österreich nicht ganz unbekannt. Auch hier werden Schulbücher nach den Richtlinien des Lehrplans geschrieben, und somit ist eine Planung und Gestaltung der LehrerInnen im Bezug auf Lehrinhalt nicht mehr unbedingt notwendig. Dadurch geht leider auch die Möglichkeit zur Schwerpunktsetzung etwas verloren.
Die Kernziele der unteren Sekundarstufe wurden in vier große Gebiete aufgeteilt.

- Arithmetik, Messen und Schätzen
- Algebraische Beziehungen
- Geometrie

- Informationsprozesse und Statistik

Der arithmetische Strang ist eine Fortführung aus der Primarstufe. Das dort erlangte Verständnis für natürliche Zahlen wird erweitert (Brüche, Dezimalzahlen, etc.) und vertieft. Vor allem im Punkt Algebra wurde bei der Formulierung der Ziele darauf geachtet, dass die Fokussierung auf lineare und quadratische Funktionen nicht zu stark ist. Im Mittelpunkt sollte das Vorstellen von verschiedensten Funktionen (exponentiell, periodisch, etc.) stehen. Die Algebra wird damit stärker in den realen Kontext eingebunden. Auch in der Geometrie wurde der Schwerpunkt auf das Verständnis von geometrischen Figuren (zwei- und dreidimensional) gelegt. Der vierte Punkt gibt den SchülerInnen die Möglichkeit erste Erfahrungen mit Diagrammen, Matrizen und ähnlichem zu machen. Ziel ist es, den SchülerInnen ein „Werkzeug" in die Hand zu geben, Daten bewerten zu können.
Eine wichtige Erkenntnis stellen van den Heuvel-Panhuizen und Wijers (2005) an das Ende ihres Artikels: Durch die sehr großzügige Formulierung der Kernziele im Jahr 2004, ist es notwendig Lehr- und Lernziele zu entwickeln, die den LehrerInnen zur Orientierung dienen. Dies ist für die Primarstufe durch das TAL-Projekt geschehen, steht aber für die untere Sekundarstufe noch aus. Die Hoffnung der Autorinnen besteht in der engeren Zusammenführung der Primar- und Sekundarstufe, da diese bis dato „two different worlds" (van den Heuvel-Panhuizen und Wijers, 2005, S. 305) darstellen. Ein Problem, welches mit durchgehenden Lehr- und Lernbahnen möglicherweise behoben werden kann.

3.7 Fünf Grundlagen der RME

Das Konzept RME ist auf fünf Grundlagen aufgebaut, die im Folgenden nochmals kurz zusammengefasst werden. Sie werden im Mathematikunterricht immer mitgedacht und sind in den Textbüchern implizit verwoben. Sie erklären und konkretisieren das Konzept RME zumindest in den Grundzügen.

3.7.1 Realität

Das erste und zentralste Prinzip ist jenes der Realität. Der Startpunkt von Lerneinheiten sollte immer in einem Feld liegen, welches für SchülerInnen erfahrbar und real ist. Dabei sind, wie auf Seite 23 schon erwähnt, auch gedachte Szenarien zugelassen. Wichtig ist aber dabei, dass die SchülerInnen diese in ihrer Vorstellung noch als real erfahrbar klassifizieren. Die Situationen dürfen als nicht so konstruiert sein, dass sie nur mehr mit mathematischen Mitteln zu beschreiben sind. Außerdem sind Situationen zu vermeiden, bei denen keine Möglichkeit gegeben ist, die gedachte Situation in die Lebenswelt der SchülerInnen zu transformieren. Die SchülerInnen sollen Mathematik als Lösungsinstrument für reale Probleme und Aufgabenstellungen entwickeln. Freudenthal spricht in diesem Zusammenhang von:

> [...] phenomena that beg to be organized [...](Freudenthal, 1983, S. 28)

Diese „Erscheinungen“ sind für Freudenthal auch mathematische Phänomene (Wie ordne ich verschiedene Bruchzahlen sinnvoll an?), die zu einer höheren Organisation der Mathematik führen.

3.7.2 Zielbeschreibung

Diese zweite Grundlage ist mit der ersten stark verbunden. Bei der Wahl des Startpunktes muss der zu erreichende Zielpunkt im Blickpunkt sein. Das heißt, dass die SchülerInnen die Möglichkeit zur Abstraktion und Generalisierung ihrer Ergebnisse haben. Der Startpunkt muss also eine Art Musterbeispiel für die folgende Mathematik bieten.
Die durch diese beiden Forderungen auftretende Spannung ist nach de Lange recht typisch für den Mathematikunterricht. Er zitiert in seinem Artikel Deborah L. Ball, die schreibt:

> How do I value their [the students] interests and also connect them to ideas and traditions growing out of centuries of mathematical exploration and invention?
> (Ball 1993 zit. nach de Lange (1996, S. 60f))

RME versucht mit dieser Spannung fertig zu werden, indem sie einen weiteren Grundsatz definiert.

3.7.3 Aktivität

SchülerInnen sind im Lernprozess bei RME niemals ZuseherInnen. Sie sollen und müssen aktiv Modelle ihres eigenen mathematischen Tuns kreieren und entwickeln. Im Normalfall handelt es sich um Diagramme, Zeichnungen oder um die Entwicklung von eigenen mathematischen Zeichen und Schreibweisen. Genauer sind Modelle und ihrer Aufgabe in Kapitel 3.5.6 beschrieben.

3.7.4 Interaktivität

Um die drei vorhergehenden Grundsätze optimal zu erfüllen, ist es notwendig, im Unterricht interaktiv zu arbeiten. Genauer gesagt müssen die SchülerInnen folgende Dinge anwenden: erklären und begründen von Lösungen, verstehen der Lösung von MitschülerInnen, fragen nach Alternativen, reflexives Beobachten eigener und anderer Aktivitäten (vgl. de Lange, 1996, S. 61). All diese Dinge lassen sich unter dem Begriff Interaktivität zusammenfassen.

3.7.5 Verflechtung

Durch die dauernde Einbindung der Realität in den Unterricht findet eine Verflechtung verschiedener Wissensgebiete statt. Der Kontext schafft hier die Voraussetzung, da isolierte Probleme in der realen Welt nie vorkommen. Dabei beschränkt sich die Verflechtung nicht nur auf andere Fächer (Physik, Biologie,...). Durch die Notwendigkeit der Interaktivität werden auch soziale Kompetenzen (Aushandeln von Lösungsstrategien, Gruppenarbeiten,...) geschult und verbessert.

KAPITEL 4

PISA

In diesem Kapitel versucht der Autor den möglichen Einfluss von RME auf die Ergebnisse der Niederlande bei den PISA-Untersuchungen zu ergründen. Dazu werden zunächst die Idee von PISA und der Aufbau der Tests zusammengefasst.

4.1 Was ist PISA?

Am Beginn dieses Kapitels steht die Definition des Programms:

> PISA steht für *Programm for International Student Assessment* - ein Programm zur zyklischen Erfassung basaler Kompetenzen der nachwachsenden Generation, das von der Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (OECD) durchgeführt und von allen Mitgliedsstaaten gemeinschaftlich getragen und verantwortet wird (Baumert et al., 2001, S. 15).

In dieser Definition stehen kurz zusammengefasst alle Eckpfeiler von PISA.

- PISA ist zyklisch: Beginnend mit dem Jahr 2000 wird in weiterer Folge alle drei Jahre ein Test durchgeführt.
- PISA testet basale Kompetenzen: Es werden nur grundlegende Fähigkeiten getestet.
- PISA wirde von der OECD[35] durchgeführt: Alle Mitgliedsstaaten legen gemeinsam die Ziele fest und tragen diese gemeinsam.

4.2 Was wird bei PISA gemessen?

Gemessen werden bei PISA die Grundkompetenzen der SchülerInnen einer Stichprobe. Das heißt, dass die mentalen Fähigkeiten der Jugendlichen, die im weiteren Leben unbedingt

35 Organisation for Economic Co-operation and Development dt. Organisation für wirschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung

benötigt werden, beim Test abgedeckt werden. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf den drei großen Bereichen Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften. Abgetestet wird dabei nicht nur fachspezifisches Wissen, sondern allgemein die Problemlöse-Kompetenz bzw. die Grundbildung der SchülerInnen. Die Kompetenzen werden dabei kontinuierlich gemessen (z. B. SchülerIn kann Diagramm ablesen, jedoch nicht interpretieren. SchülerIn besitzt somit einen Teil der Kompetenz zur Arbeit mit Diagrammen.) und nicht nur ob eine Person diese Kompetenzen hat oder nicht. Das heißt, dass bei der Auswertung eine Interpretation, in welchem Ausmaß SchülerInnen eine Kompetenz haben, möglich ist. Wichtig dabei ist, dass diese Kompetenzen nicht nur in der Schule erworben werden. Vielmehr dient die Schule als Platz, an dem die Fähigkeit zum lebenslangen Lernen erworben werden soll (vgl. OECD, 2007a, S. 24f).

Bei jeder durchgeführten Studie gibt es eine Hauptdomäne, der $\frac{2}{3}$ der Aufgaben zugeordnet werden können (vgl. Abbildung 4.1). Ein vollständiger Zyklus dauert somit neun Jahre. Im Jahr 2009 beginnt der zweite Zyklus und es wird möglich sein die Hauptdomäne *Lesen* umfassend zu vergleichen. Durch die zyklische Ausrichtung der Studie ist es möglich, mit

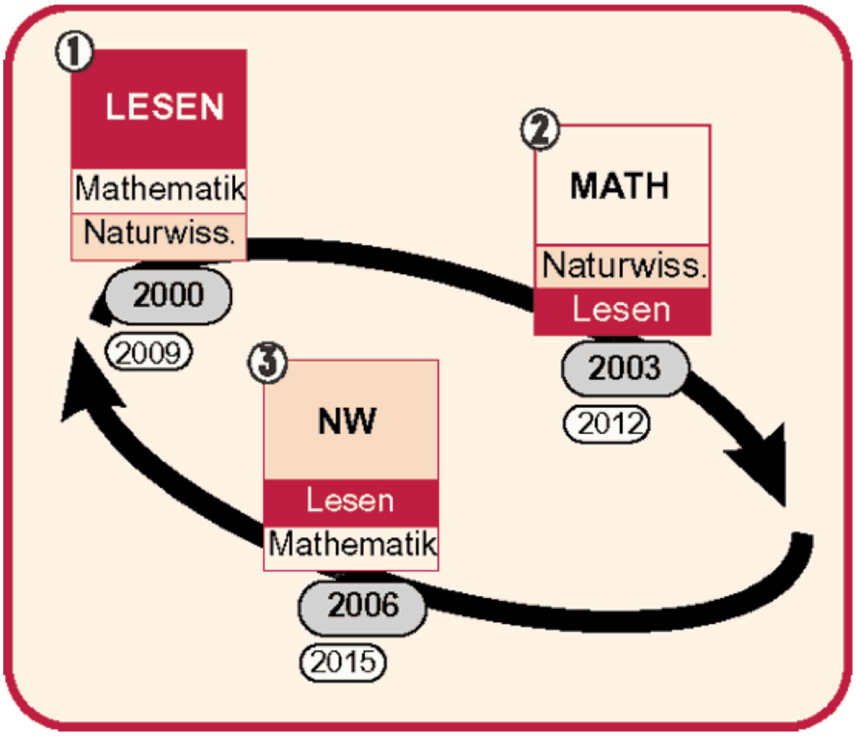


Abbildung 4.1: PISA Zyklus (OECD, 2006, S. 95)

dem Datenmaterial in den nächsten Jahren die Entwicklungen der einzelnen Domänen zu analysieren. Daraus erhofft man sich gezielte Analysen bezüglich der nötigen Änderungen im Bildungssystem. Ob diese mit den Ergebnissen möglich sind, wird in Deutschland, aber auch in Österreich mittlerweile kritisch hinterfragt.

4.2.1 Welche Ziele hat PISA?

Die PISA-Studie wurde initiiert, um ergänzend zum Bildungsbericht „Education at a Glance“ des Centre for Educational Research and Innovation eine Möglichkeit zu besitzen, weitere Parameter des Bildungssystems zu erheben. Dabei zielt die PISA-Studie klar auf den Output des Bildungssystems ab, indem die Leistungen der fünfzehnjährigen SchülerInnen in drei Bereichen (Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften) erhoben werden. Die teilnehmenden Staaten sollen so ein detaillierteres Bild des jeweiligen Bildungssystems erhalten. Als grundlegende Idee wird bei PISA immer wieder das Konzept des lebenslangen Lernens erwähnt. So werden die SchülerInnen nicht auf Wissen, sondern auf die Anwendung desselben getestet. Der Fokus liegt also auf der Prüfung der Nachhaltigkeit der erworbenen Kompetenzen. Kurz lassen sich die Ziele der PISA-Studie auf drei zentrale Fragestellungen reduzieren (vgl. Haider, 2006, S. 29):

- Sind SchülerInnen auf Herausforderungen der Zukunft durch schulische Qualifikation ausreichend vorbereitet?
- Haben die SchülerInnen die notwendigen Basiskompetenzen erworben, die sie im täglichen Leben und für das lebenslange Lernen benötigen?
- Sind die SchülerInnen in der Lage, Probleme effektiv zu analysieren, ihre Lösungen, Ideen und Vorstellungen zu begründen und verständlich zu kommunizieren?

Um diese Fragen beantworten zu können werden Basis-, Kontext- und Trendindikatoren gemessen (vgl. Haider und Schreiner, 2007, S. 21f):

Basisindikatoren: Als Basisindikatoren werden die Ergebnisse der Leistungsmessung gesehen. Diese beinhalten die Information der Kompetenz, des Wissens und der Fähigkeiten der SchülerInnen.

Kontextindikatoren: Hierbei handelt es sich um Merkmale, die im Zusammenhang mit der Kompetenz der SchülerInnen stehen. Aus ihnen lassen sich Rückschlüsse sowohl auf die demografischen und sozialen, aber auch auf die ökonomischen und pädagogisch-psychologischen Merkmale des Bildungssystems ziehen.

Trendindikatoren: Da PISA zyklisch ist, ermöglicht die erhobene Datenbasis eine Beobachtung von Entwicklungstrends. Die Trendindikatoren geben dabei eine zusätzliche Information zu Kontext- und Basisindikatoren.

4.2.2 Welche mathematischen Kompetenzen werden bei PISA gemessen?

Wie schon am Beginn des Kapitels 4.2 erwähnt, wird bei PISA nur wenig fachspezifisches Wissen getestet. Für den Bereich der Mathematik bedeutete dies, dass Aufgaben eingesetzt wurden, die zeigen inwieweit SchülerInnen „[...] mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht [...]“ (Baumert et al., 2001, S. 139) einsetzen können. Die Aufgaben der PISA-Tests können grob in vier Gruppen eingeordnet werden, wobei jede Gruppe einer großen mathematischen Idee entspricht (vgl. Haider und Reiter, 2004, S. 24):

Veränderung und Wachstum: Erkennen von Veränderungsprozessen und der Zusammenhang zwischen verschiedenen Darstellungsformen.

Raum und Form: Getestet wird in diesem Bereich das Wissen um geometrische und räumliche Phänomene bzw. die Eigenschaften dieser Objekte.

Quantitatives Denken: In diesem Bereich spielen Zahlen und die Relation zwischen ihnen die Hauptrolle.

Unsicherheit: Der Bereich behandelt statistische Phänomene und Wahrscheinlichkeiten.

Diese vier Bereiche bilden auch die Subskalen des PISA-Tests. Zusätzlich zu den verschiedenen thematischen Bereichen lässt sich noch eine weitere Einteilung der Aufgaben vornehmen. Dabei ist das Kriterium die Art der Fähigkeiten und Kompetenzen, die SchülerInnen zur Lösung dieser Aufgabe anwenden müssen (vgl. OECD, 2004, S. 6):

Wiedergabe von Fakten und Routineverfahren: Die Lösung dieser einfachsten Aufgaben erfordert ein Wiedererkennen und Anwenden vertrauter mathematische Verfahren bzw. Routinen.

Herstellen von Zusammenhängen: Zur Lösung der Aufgaben reicht ein Verfahren meist nicht aus. Die SchülerInnen müssen Verbindungen zwischen mathematischen Verfahren herstellen.

Mathematisches Denken: Bei diesen Aufgaben ist ein Grundmaß an mathematischer Einsicht und Kreativität zur Lösung erforderlich. Die Identifizierung der mathematischen Elemente ist meist schwierig und die Verfahren zur Lösung komplex.

Vergleicht man diese Kompetenzen mit den Fähigkeiten, die bei der Bearbeitung von Aufgaben in RME ausgebildet werden, so ist eine Ähnlichkeit leicht zu sehen. Das Herstellen von Zusammenhängen ist bei den RME-Aufgaben immer notwendig. Ebenso ist das Bilden von Modellen wie in Abschnitt 3.5.6 eine Kompetenz, die mit jener des mathematischen Denkens nahe verwandt ist.

4.2.2.1 Mathematical Literacy

Der Begriff *Mathematical Literacy* ist für die PISA-Tests grundlegend. Die OECD definiert ihn folgendermaßen:

> Die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte Urteile abzugeben und die Mathematik zu nutzen und sich mit ihr in einer Weise zu befassen, die den Anforderungen im Leben dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht (OECD, 2000, S. 20).

Mathematik wird also bei PISA als Werkzeug gesehen, welches den BürgerInnen helfen soll ihr Leben zu erleichtern. Wie auch die Lesekompetenz ist die *Mathematical Literacy* eine Art Sprache, die es zu beherrschen gilt. Wichtige Komponenten sind dabei Argumentieren, Interpretieren und Modellieren. Sie stellen den kommunikativen Charakter mathematischer Grundbildung heraus. Schon bei der grundlegenden Beschreibung der Aufgaben bei PISA, ist die Ähnlichkeit zu RME schwer zu übersehen.

> [Es werden] hauptsächlich Probleme präsentiert, die sich in Alltagssituationen stellen. Diese sind so gestaltet, dass mathematische Aspekte bei der Problemlösung von echtem Nutzen wären. (OECD, 2003b, S. 42)

Die Betonung der Verwendung „realer“ Probleme und der Nützlichkeit der Verwendung von Mathematik ist fast ident mit den Formulierungen in RME.
Klar wird aber darauf verwiesen, dass die Mathematik keine reine Ansammlung von Regeln und Verfahren, sondern ein zusammenhängendes System ist. Die Sichtweise deckt sich hier mit jener von RME. Explizit wird auf Freudenthal verwiesen, dessen Ansicht eines offenen Systems der Mathematik für die PISA-Konzeption mit Vorbild war (vgl. Baumert et al., 2001, S. 142). Peschek (2006, S. 63) streicht jedoch klar heraus, dass obwohl die Didaktische Phänomenologoie von Freudenthal (1983) Grundlage des Literacy Konzepts ist, der Teil des „progressiven Schematisierens“ (ebd.) jedoch fehlt. Dieser ist aber zum Erfassen der abstrakten mentalen Objekte notwendig.
Die Aufgaben beim PISA-Test sind nun im Allgemeinen so angelegt, dass ein Überprüfen der flexiblen mathematischen Modelle möglich sein soll. Dazu werden die Aufgaben in einen realen Kontext verlegt. Die SchülerInnen sind beim Lösen immer angehalten, die von ihnen gefundene Lösung zu erklären bzw. ihren Lösungsweg anzugeben. Inwieweit dies eine Möglichkeit ist die *Mathematical Literacy* zu überprüfen bleibt offen.

4.2.2.2 Mathematisieren bei PISA

Der Begriff des *Mathematisierens* kommt explizit in der Beschreibung der Kompetenzen, die jede/r Bürger/in besitzen sollte vor. Er differiert jedoch zum *Mathematisierens* in RME. *Mathematisierens* bei PISA beschreibt den gesamten in Abbildung 4.2 dargestellten Prozess. Ähnlich dem bei Maaß (2004, S. 20f) vorgestellten Modellkreislaufs kommen in den einzelnen Schritten verschiedene Kompetenzen zum Zug. Zum Prozess des Mathematisierens zählen also nicht nur der Schritt von der realen Welt in die mathematische Welt und die Lösung

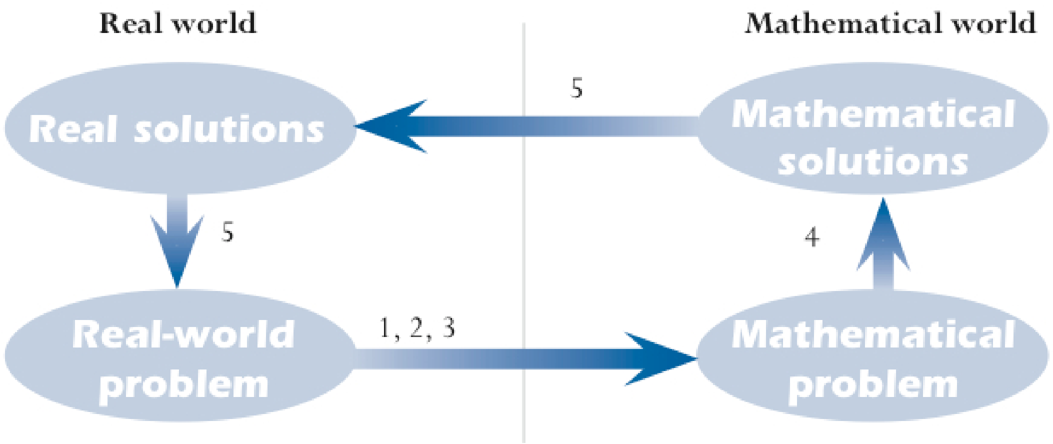


Abbildung 4.2: Mathematisierungsprozess bei PISA (OECD, 2006, S. 95)

des mathematischen Problems, sondern auch die Reflexion der Lösung. RME verwendet den Begriff Mathematisieren nur für die Bezeichnung der ersten beiden Schritte.
Dennoch stimmen beide Ansätze zum Teil überein. So ist der erste Schritt des Übersetzens des realen Problems in ein mathematisch bearbeitbares Problem mit dem Prozess der „horizontalen" Mathematik gleichzusetzen (vgl. Abschnitt 3.5.4). Auch das Bearbeiten des mathematischen Problems unter Verwendung verschiedenster Werkzeuge ist bei RME in der „vertikalen" Mathematik zu finden, wenngleich dort der Begriff umfassender definiert und gemeint ist (vgl. Abschnitt 3.5.4).
Mathematisieren hat in RME auch die Aufgabe neue Modelle zu entwickeln und die vorhandene Mathematik zu reorganisieren. Dies ist natürlich im Rahmen eines Tests kaum möglich und auch nur in geringem Umfang nötig.

4.3 Wie sieht die Stichprobe aus?

Bevor die zu untersuchende Gruppe genauer spezifiziert und somit die Stichprobe festgelegt werden konnte, wurden vom PISA Governing Board[36] vier grundlegende Festlegungen vorgenommen (vgl. Haider, 2006, S. 31f):

Altersbasierte Population: Um eine möglichst gute Vergleichbarkeit zwischen den Ländern zu ermöglichen, wurde die Entscheidung getroffen, die SchülerInnen einer Alters- und

36 Das PISA Governing Board (PGB) ist ein Gremium zu dem jedes teilnehmende OECD-Mitgliedsland eine/n Vertreter/in entsendet. Das PGB setzt die Eckpunkte und Abläufe der Studie fest und überwacht die Implementierung in den einzelnen Ländern (vgl. Haider, 2006, S. 29).

nicht einer Schulstufe wie bei TIMSS[37] zu testen. Das ausgewählte Alter wurde dabei höchstmöglich gewählt. Man entschied sich für 15 bis 16- jährige SchülerInnen, da zu diesem Zeitpunkt die SchülerInnen in den meisten Ländern noch in die Pflichtschule gehen.

Jahrgang: Das PISA Governing Board entschied, dass bei jedem Testdurchgang ein bestimmter Jahrgang getestet wird. Für PISA 2003 war dies der Jahrgang 1987. Das heißt, dass alle SchülerInnen die im Jahr 1987 geboren wurden, egal welchen Schultyp sie besuchen, zur Grundgesamtheit gehören.

Schülerkohorte: Die OECD fasste die Entscheidung nur SchülerInnen zu testen. Jugendliche, die die Schulpflicht beendet hatten, wurden somit per Definition nicht erfasst. Daher dürfen die Ergebnisse der Tests nicht auf die 15 bis 16- jährigen Jugendlichen, sondern nur auf die SchülerInnen dieser Altersstufe verallgemeinert werden.

Das Sampling-Design: Die Auswahl der zu testenden SchülerInnen erfolgt über ein zweistufiges Verfahren. Im ersten Schritt werden zufällig Schulen unter Beachtung von Schulgröße und -typen ausgewählt. Im zweiten Schritt werden nun die SchülerInnen dieser Schulen, die im entsprechenden Jahrgang sind, und nicht ganze Klassen, zufällig gezogen.

Um eine möglichst hohe Aussagekraft der Stichprobe zu gewährleisten, versucht man den Prozentsatz der nicht zugelassenen SchülerInnen möglichst klein zu halten. In Österreich werden laut Haider (2006, S. 34) zwischen ein und zwei Prozent der SchülerInnen ausgeschlossen. Der Einfluss der einzelnen Länder beim Ziehen der Stichprobe ist minimal, da dies von einem internationalen Konsortium[38] durchgeführt wird.
Die Vorgaben an die Stichprobe sind folgende (vgl. Haider und Reiter, 2004, S. 21):

- 4500 auswertbare Fälle
- mindestens 150 verschiedene Schulen
- maximal 35 Fälle pro Schule

Mindestens 4500 auswertbare Fällen heißt, dass im Normalfall mehr SchülerInnen getestet werden müssen, da ein natürlicher Ausfall (Krankheit der SchülerInnen am Testtag, u. ä.) mit einkalkuliert werden muss. Außerdem schreibt die OECD eine sehr hohe Rücklaufquote von 85% vor.

37 Third in International Mathematics and Science Study ist eine groß angelegte Studie (50 Länder), die sich nur mit der Untersuchung den mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten der SchülerInnen auseinandersetzte.

38 Dieses Konsortium setzt sich aus verschiedenen kooperierenden Institutionen zusammen. Unter anderem ist das niederländische CITO Mitglied dieses Konsortiums.

Bei der PISA-Studie im Jahr 2000 wurden die Niederlande aufgrund einer zu geringen Teilnahme der SchülerInnen und Schulen nicht in die offiziellen Ergebnisse aufgenommen. In den Niederlanden nahmen nur 100 Schulen, 2500 Schüler und 27 Prozent der erst angeschriebenen Schulen teil. Nur 49 der 100 Schulen zählten zur ersten Auswahl der OECD, die restlichen 51 Schulen rekrutierten sich aus der zweiten und dritten Reserve (vgl. Tigges, 2004, o. S.).

4.4 Wie sieht die Auswertung der Aufgaben bei PISA aus?

Die Messung der Leistungen der SchülerInnen erfolgt bei PISA mittels PISA-Skala. Diese ist nach oben und unten offen und wurde bei der ersten Studie im Jahr 2000 so festgelegt, dass der Mittelwert bei 500 und die Standardabweichung bei 100 Punkten liegt. Das heißt, dass 65 % der getesteten SchülerInnen zwischen 400 und 600 Punkten erreichen (vgl. Haaser, 2006, S. 25f). Die Skala wurde so konstruiert, dass sowohl den SchülerInnen als auch den Aufgaben eine Position auf dieser Skala zugewiesen werden kann. Für die SchülerInnen wird dieser Score durch die gelösten Testaufgaben einer Domäne ermittelt. Die Testaufgaben werden entsprechend ihrer Itemschwierigkeit angeordnet, die aus dem Prozentsatz der richtigen Lösungen resultiert (vgl. Haider, 2006, S. 43).

4.4.1 Leistungsstufen

Um die Leistungen der SchülerInnen besser einordnen zu können, wurden sechs Leistungsstufen definiert. Die Reichweite geht dabei von Stufe eins, die dem Beherrschen von einfachen Grundrechenarten entspricht, bis zur Stufe sechs, welche sich durch komplexes Modellieren und mathematisches Argumentieren auszeichnet. Im Einzelnen werden die Stufen wie folgt bei Haider und Reiter (2004, S. 32) beschrieben:

Stufe 6: SchülerInnen die diese Stufe erreichen, sind in der Lage komplexe Aufgaben durch eigenständiges Modellieren zu lösen. Dabei wenden sie umfangreiches curriculares Wissen flexibel an und besitzen die Fähigkeit ihr mathematisches Tun zu reflektieren. Die symbolische und formale mathematische Sprache wird problemlos beherrscht.

Stufe 5: Die SchülerInnen sind in der Lage, Modelle für komplexe Situationen zu entwickeln und mit ihnen zu arbeiten. Sie sind in der Lage Situationen formal und symbolisch zu charakterisieren und Interpretationen bzw. Argumentationen entsprechend zu kommunizieren.

Stufe 4: SchülerInnen dieser Stufe können Modelle anwenden, jedoch nicht selbst entwickeln. Das Kommunizieren der verwendeten Verfahren und Lösungen ist ihnen möglich.

Stufe 3: Das Bearbeiten von vorgeschriebenen Prozeduren ist für SchülerInnen dieser Stufe problemlos möglich. Dabei werden einfache Lösungsstrategien selektiert und verwendet.

Stufe 2: Die Interpretation von Kontexten gelingt, wenn diese nur einer Folgerung bedarf. Einfache Algorithmen, Formeln und Prozeduren werden von den SchülerInnen zur Lösung der Aufgaben verwendet.

Stufe 1: SchülerInnen können einfache Aufgaben lösen, sofern alle Angaben vorhanden und die Fragen klar definiert sind. Die durchgeführten Handlungen bedürfen eines unmittelbaren in der Aufgabe vorhandenen Stimulus.

Die sechste Stufe ist nach oben offen. Die mathematische Kompetenz von SchülerInnen, die die erste Stufe nicht erreichen, ist mittels PISA nicht messbar. In Abbildung 4.3 ist die Zuordnung der Stufen zur PISA-Skala zu sehen.

	Level <1	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6
Scores	<= 358	359-420	421-482	483-545	546-607	608-669	>= 670

Abbildung 4.3: Zuordnung der Stufen (vgl. Haider und Reiter, 2004, S. 34)

Entsprechend dieser Stufen war es auch möglich die gestellten Aufgaben in grobe Klassen einzuteilen. Dies werden nun im folgenden Abschnitt beschrieben und mit Beispielaufgaben illustriert.

4.4.2 Aufgaben bei PISA

In diesem Abschnitt soll das große Spektrum in der Schwierigkeit in den Aufgaben gezeigt werden. Die Aufgaben wurden aus den freigegebenen Aufgaben der bisherigen PISA-Studien (vgl. OECD, 2007b) entnommen.

4.4.2.1 Einfache Aufgaben

Die Aufgabe mit dem Titel *Wechselkurs* gehört zu den Beispielen der einfachen Kategorie. Diese Aufgaben sind meist in einem einfachen Kontext und geschlossen gestellt. Die SchülerInnen müssen zur Lösung meist entweder Größen aus den Diagrammen ablesen oder einfache Berechnungen durchführen.

> **Wechselkurs**
> Mei-Ling fand folgenden Wechselkurs zwischen Singapur Dollar und Südafrikanischen Rand heraus:
> 1 SGD = 4,2 ZAR
> Mei-Ling wechselte zu diesem Wechselkurs 3000 Singapur Dollar in Südafrikanische Rand.
> Wie viele Südafrikanische Rand hat Mei-Ling erhalten? (vgl. OECD, 2007b, S. 34)

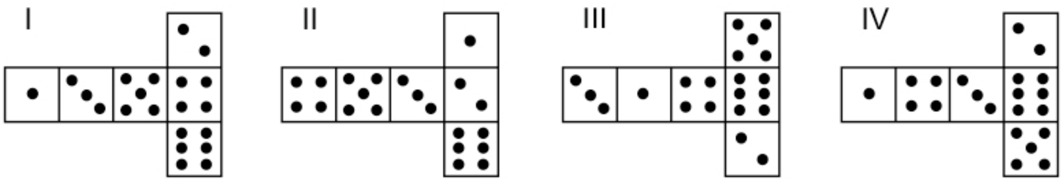
Die Lösung der Aufgabe ist durch eine einfache Multiplikation zu finden. Die Itemschwierigkeit der Aufgabe beträgt 406 Punkte. Diese Aufgabe wird der Subskala „Quantitatives Denken“ (Haider und Reiter, 2004, S. 36f) zugeordnet.

4.4.2.2 Mittlere Aufgaben

Dieser Bereich erfordert von den SchülerInnen erste Interpretationen und das Ausführen einer Kette von Operationen. Die nachfolgende Aufgabe wurde aus Haider und Reiter (2004, S. 38) entnommen.

Spielwürfel

Rechts sind zwei Spielwürfel abgebildet. Spielwürfel sind besondere Würfel mit Augen auf den Würfelflächen, für die folgende Regel gilt: *Die Augensumme zweier gegenüberliegender Würfelflächen ist immer sieben.*
Du kannst einen einfachen Spielwürfel durch das Schneiden, Falten und Zusammenkleben eines Kartons herstellen. Das kann auf viele Arten geschehen. Die folgende Skizze zeigt vier Vorlagen, die man verwenden kann, um Würfel mit Augen auf den Würfelflächen herzustellen. Welche der folgenden Vorlage/n kann/können so zusammengefaltet werden, dass ein Würfel entsteht, der die Regel erfüllt, dass die Augensumme von gegenüberliegenden Würfelflächen 7 ist? Kreise für jede Vorlage entweder „Ja“ oder „Nein“ in der nachfolgenden Tabelle ein.

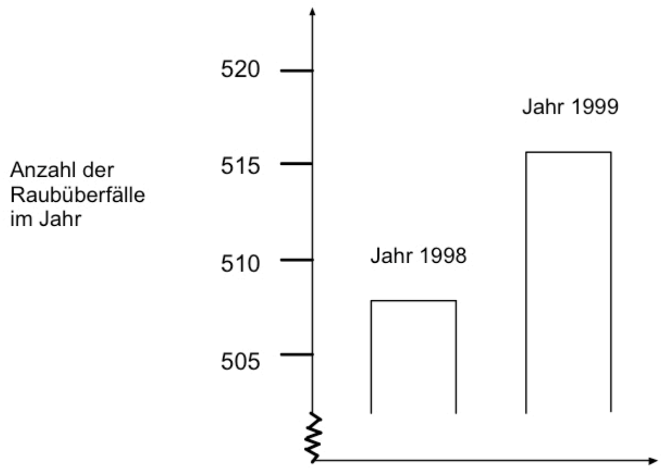


Vorlage	Erfüllt die Regel, dass die Augensumme von gegenüberliegenden Würfelflächen 7 ist?
I	Ja / Nein
II	Ja / Nein
III	Ja / Nein
IV	Ja / Nein

Die Aufgabe wurde mit 503 Punkten bewertet. Da es sich um eine Multiple-Choice-Aufgabe handelt, wird von den SchülerInnen keine Interpretation verlangt. Getestet wird das räumliche Vorstellungsvermögen und die Anwendung der im Text formulierten Regel. Die Aufgebe zählt zur Subskala „Raum und Form“.
Eine Aufgabe, die etwas höher bewertet ist (577 bis 694 Punkte), ist die Aufgabe „Raubüberfälle“. Sie zählt auch noch zu jenen mit mittlerem Schwierigkeitsgrad. Entnommen wurde die Aufgabe wie die vorherige aus Haider und Reiter (2004, S. 39).

Raubüberfälle

Ein Fernsehreporter zeigte folgende Grafik und sagte: „Der Graph zeigt, dass die Anzahl der Raubüberfälle von 1998 bis 1999 stark zugenommen hat.“



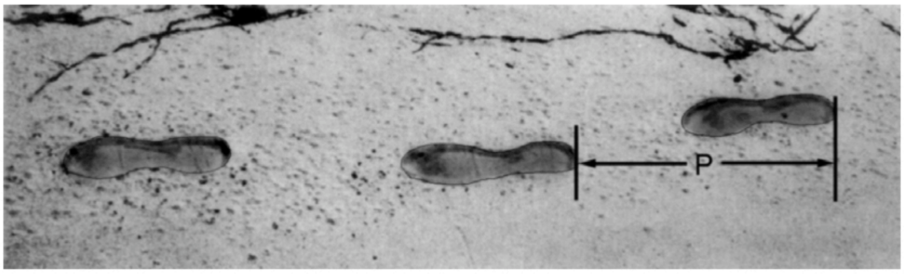
Hältst du die Aussage des Reporters für eine vernünftige Interpretation des Diagramms? Begründe deine Antwort.

Die Aufgabe ist sehr offen gestellt und wird somit in zwei Stufen bewertet. Eine teilweise Lösung (richtige Antwort, ungenaue Argumentation), der 577 Punkte zugeordnet werden, und die vollständige Lösung, die mit 694 Punkten somit zu den hoch bewerteten Aufgaben gehört. Die SchülerInnen sind gefordert nicht nur den absoluten Unterschied zu erkennen, sondern müssen diesen interpretieren und durch die ungenaue Skalierung des Diagramms (ein genaues Ablesen der Werte für das Jahr 1998 und 1999 ist nicht möglich) auch eine Abschätzung durchführen. Dazu ist die Einsicht nötig, dass durch den fehlenden Nullpunkt kleine absolute Unterschiede beliebig groß dargestellt werden können. Diese Aufgabe gehört der Subskala „Unsicherheit“ an.

4.4.2.3 Schwierige Aufgaben

Aufgaben dieser höchsten Stufe verlangen ein hohes Maß an Interpretation, Vorstellungs- und Reflexionsvermögen, da die Situationen für die SchülerInnen nicht bekannt und ungewohnt sind. Oft ist bei diesen Aufgaben eine Erklärung der Ergebnisse notwendig. Mehrere Schritte sind zur Lösung notwendig und ein mathematischer Modellierungsprozess erforderlich. Die folgende Aufgabe ist ein Teil einer längeren Aufgabe, deren Teilaufgaben einen Großteil des PISA-Spektrums abdecken (vgl. Haider und Reiter, 2004, S. 39).

Gehen



Das Bild zeigt die Fußabdrücke eines gehenden Mannes. Die Schrittlänge P entspricht dem Abstand zwischen den hintersten Punkten zweier aufeinander folgender Fußabdrücke. Für Männer drückt die Formel $\frac{n}{P} = 140$ die ungefähre Beziehung zwischen n und P aus, wobei

$$n = \text{Anzahl der Schritte pro Minute und}$$
$$P = \text{Schrittlänge in Metern}$$

Bernhard weiß, dass seine Schrittlänge 0,80 Meter beträgt. Die Formel trifft auf Bernhards Gangart zu.
Berechne Bernhards Gehgeschwindigkeit in Metern pro Minute und in Kilometern pro Stunde. Gib an, wie du zu deiner Antwort gekommen bist (vgl. Haider und Reiter, 2004, S. 39).

Um diese Aufgabe lösen zu können, ist es zwingend die Beziehung zwischen der Schrittlänge und der -frequenz zu verstehen. Außerdem ist die Umformung der gegeben Formel, die Umrechnung der Anzahl der Schritte in eine Geschwindigkeit sowie die Umwandlung in eine andere Einheit durchzuführen. Es sind also drei anspruchsvolle Schritte zu vollziehen. Deshalb wird dieser Aufgabe eine Itemschwierigkeit von 723 Punkten zugeordnet. Die Aufgabe selbst zählt zur Subskala „Veränderung und Zusammenhänge“.

4.4.2.4 Zusammenfassung

Die obigen Aufgaben sind alle mit Aufgabenstellungen, die aus der RME kommen, vergleichbar. Die Bemühungen, die Aufgaben in einem plausieblen und realen Umfeld anzusiedeln, sind den Machern der Studie gut gelungen. Dass die österreichischen SchülerInnen von diesem Aufgabendesign überrascht waren, liegt beim Vergleich mit Lehrbücherbeispielen auf der Hand. Ein zwingender Beweis für das schlechtere Abschneiden ist es jedoch nicht.

4.5 Gegenüberstellung der Ergebnisse bei PISA aus 2003 und 2006 zwischen Österreich und den Niederlanden

Um einen kleinen Überblick über die Leistungen in Mathematik zu erlangen werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse in Mathematik und den vier Subskalen der Jahre 2003 und 2006 gegenübergestellt. Die Diagramme wurden alle mit Hilfe der OECD-Homepage[39] erstellt.

4.5.1 PISA 2003

Da die Hauptdomäne 2003 die Mathematik war ($\frac{2}{3}$ der Aufgaben kamen aus diesem Fachbereich) ist eine sehr genaue Auswertung vorhanden. Im ersten Diagramm sieht man den Gesamtscore der SchülerInnen in Mathematik im Vergleich. Die Niederlande erreichten einen Mittelwert von 538 Punkten und liegen somit signifikant besser als Österreich mit 506 Punkten (vgl. Haider und Reiter, 2004, S. 44).
Auch auf den Subskalen zeigt sich ein ähnliches Bild. Auf der Subskala Unsicherheit (Ab-

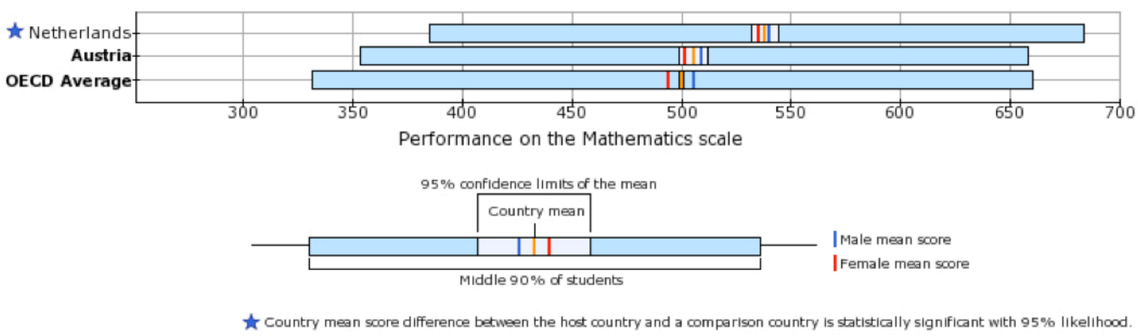


Abbildung 4.4: Gesamtscore Mathematik

bildung 4.5) und der Subskala Quantitatives Denken (Abbildung 4.6) ist der Unterschied zwischen den Niederlanden und Österreich besonders groß. Eine mögliche Erklärung ist, dass zur Lösung von Aufgaben die zur Subskala Unsicherheit gehören, Wissen über Zufall, Wahrscheinlichkeiten und Chancen benötigt wird. Das „Versagen“ der österreichischen SchülerInnen bei diesen Aufgaben somit leicht erklärbar. Der österreichische Lehrplan sieht die Wahrscheinlichkeitsrechnung erst in der Oberstufe vor. Somit hatten die SchülerInnen

39 http://pisacountry.acer.edu.au/

nicht die selbe Ausgangsposition wie jene in den Niederlanden.
Auch auf den restlichen beiden Subskalen (Abbildung 4.7 und 4.8) ist der Unterschied erkennbar. Der Abstand in diesen Teilskalen ist jedoch nicht mehr so groß. Möglicherweise wird im österreichischen Unterricht auf diese Teilgebiete eine größere Gewichtung gelegt.

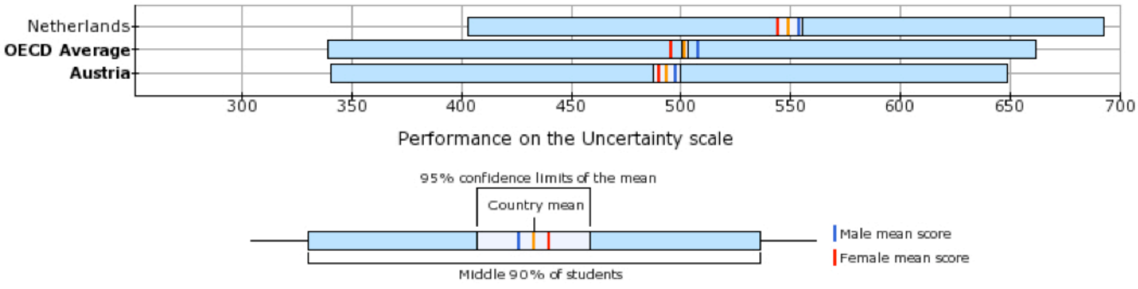


Abbildung 4.5: Subskala Unsicherheit

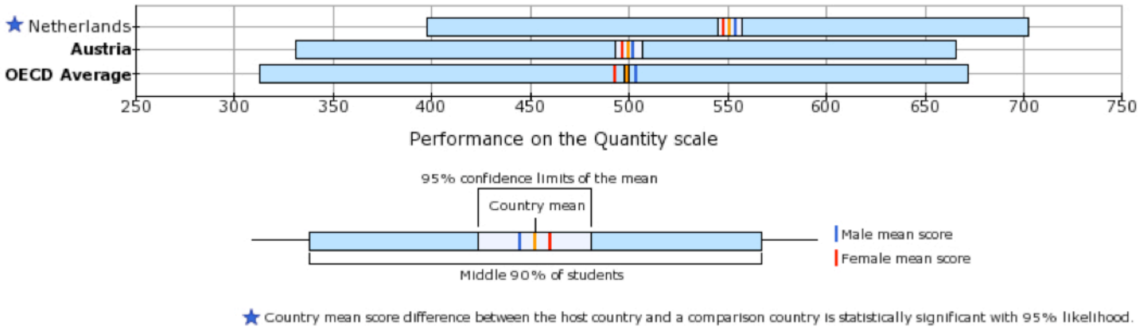


Abbildung 4.6: Subskala Quantitatives Denken

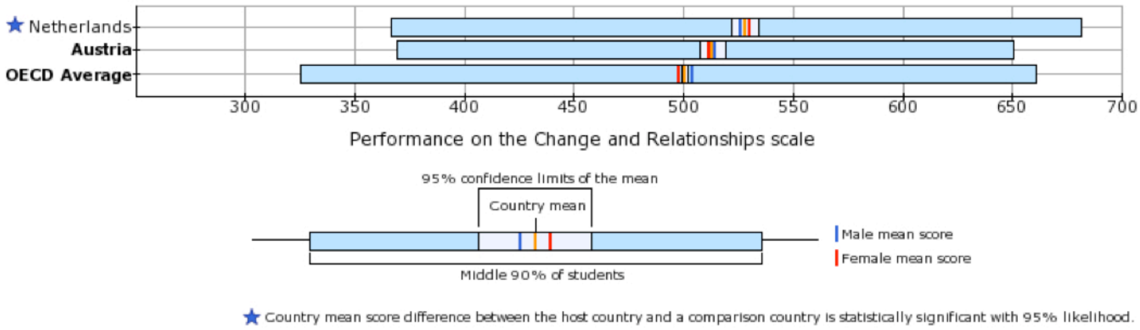


Abbildung 4.7: Subskala Veränderung und Wachstum

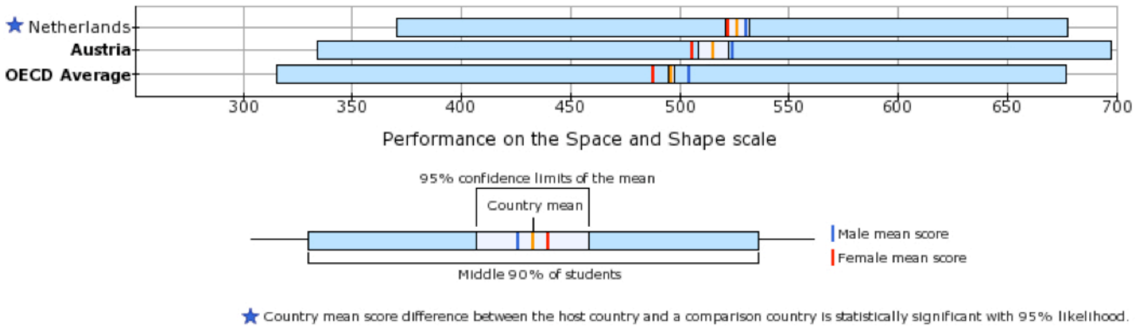


Abbildung 4.8: Subskala Raum und Form

4.5.2 PISA 2006

Nachdem Mathematik bei der PISA-Studie 2003 die Hauptdomäne darstellte, war der Umfang der Mathematikaufgaben bei der Studie 2006 ein viel kleinerer. Folglich beschränkte sich die Auswertung auf die wichtigsten Punkte. Eine gründliche Analyse wird erst wieder 2012 möglich sein. Die Ergebnisse zeigen jedoch, dass die Niederlande immer noch signifikant vor Österreich im Gesamtscore liegen. Auch wenn die Niederlande im Vergleich zu 2003 etwas verloren haben.

	Gesamtskala Mathematik					
			Spannweite der Rangplätze			
			OECD-Länder		Alle Länder/Volkswirtschaften	
	Mittelwert	S.E.	Oberer Rangplatz	Unterer Rangplatz	Oberer Rangplatz	Unterer Rangplatz
Chinesisch Taipeh	549	(4.1)			1	4
Finnland	548	(2.3)	1	2	1	4
Hongkong (China)	547	(2.7)			1	4
Korea	547	(3.8)	1	2	1	4
Niederlande	531	(2.6)	3	5	5	8
Schweiz	530	(3.2)	3	6	5	9
Kanada	527	(2.0)	3	6	5	10
Macau (China)	525	(1.3)			7	11
Liechtenstein	525	(4.2)			5	13
Japan	523	(3.3)	4	9	6	13
Neuseeland	522	(2.4)	5	9	8	13
Belgien	520	(3.0)	6	10	8	14
Australien	520	(2.2)	6	9	10	14
Estland	515	(2.7)			12	16
Dänemark	513	(2.6)	9	11	13	16
Tschech. Rep.	510	(3.6)	10	14	14	20
Island	506	(1.8)	11	15	16	21
Österreich	505	(3.7)	10	16	15	22

Abbildung 4.9: Gesamtscore Mathematik 2006 (Auszug) (vgl. OECD, 2007a, S. 58)

4.5.3 Reaktionen auf die PISA Studie in den Niederlanden

Die Reaktionen auf das Abschneiden der Niederlande in der Studie im Jahr 2000 war medial im Vergleich zu Deutschland und Österreich gedämpft. So spricht die Tageszeitung „Trouw“ von einem Tor, welches aber nicht zählt, da ja die Beteiligung zu gering war (vgl. van de

Ven und Döbert, 2002, S. 2). Zu diesen verhaltenen Reaktionen gab es jedoch auch Medien, die das Ergebnis, trotz Einschränkung in der Inetrpretierbarkeit, sehr positiv annahmen. So waren folgende Meldungen zu lesen (vgl. van de Ven und Döbert, 2002, S. 2):

> „Schüler glänzen in Mathematik" (Algemeen Dagblad, 5.12.2001)
> „Gute Noten", OECD beurteilt die Niederlande positiv (Elsevier, 5.1.2002)
> „Mathematik hier ein Spitzenfach" (Het Parool, 4.12.2001)
> „Niederländische 15-Jährige an der Spitze in Mathematik" (Reformatorisch Dagblad, 4.12.2001)

Nur wenige Medien sahen die geringe Beteiligung als Blamage. Meist erklärte man dies mit der Testmüdigkeit der SchülerInnen. Für mehr Aufregung sorgte der geringer werdende Abstand zwischen den Leistungen der Mädchen und der Burschen. Dies wurde sowohl positiv (Mädchen holen auf) als auch negativ (Burschen lassen nach) von den Zeitungen interpretiert (vgl. van de Ven und Döbert, 2002, S. 3).

4.6 Zusammenfassung und Vergleich

Die vorgestellten Aufgaben in Abschnitt 4.4.2 sind den Aufgaben, wie sie für RME typisch sind, nicht unähnlich. Die SchülerInnen sind in jeder Aufgabe gefordert ihr vorhandenes mathematisches Wissen an einem Problem anzuwenden und zu erweitern. Vor allem die Aufgabe „Gehen" ist nahe am RME-Ansatz. Die SchülerInnen verbinden mathematische Teilgebiete und erweitern damit ihr Wissen. Diese Art der Wissensüberprüfung ist in Österreich kaum gebräuchlich bzw. vorhanden.
Um diese Ähnlichkeit zu untermauern, werden im Folgenden zwei Beispiele verglichen deren Aufbau doch recht ähnlich ist.

4.6.1 Aufgabe Herzschlag bei PISA 2006

Die Aufgabe wurde aus den freigegebenen Aufgaben der Studie des Jahres 2003 entnommen (vgl. OECD, 2003a, S. 15).

> Aus gesundheitlichen Gründen sollten die Menschen ihre Anstrengungen, zum Beispiel im Sport, begrenzen, um eine gewisse Herzfrequenz nicht zu überschreiten. Lange Zeit wurde der Zusammenhang zwischen der empfohlenen maximalen Herzfrequenz einer Person und dem Alter der Person durch die folgende Formel beschrieben:
>
> *Empfohlene maximale Herzfrequenz = 220 – Alter*

Jüngste Untersuchungen haben gezeigt, dass diese Formel ein wenig verändert werden sollte.
Die neue Formel lautet wie folgt:

*Empfohlene maximale Herzfrequenz = 208 – (0,7*Alter)*

Frage 1: In einem Zeitungsartikel hieß es: „Ein Ergebnis der Anwendung der neuen Formel an Stelle der alten ist, dass die empfohlene maximale Anzahl der Herzschläge pro Minute für junge Leute leicht abnimmt und für alte Leute leicht zunimmt." Ab welchem Alter nimmt die empfohlene maximale Herzfrequenz durch die Einführung der neuen Formel zu? Gib deinen Lösungsweg an.
Frage 2: Die Formel *Empfohlene maximale Herzfrequenz = 208 – (0,7 Alter)* wird auch verwendet, um zu bestimmen, wann körperliches Training am wirksamsten ist. Untersuchungen haben gezeigt, dass körperliches Training am wirksamsten ist, wenn der Herzschlag bei 80 % der empfohlenen maximalen Herzfrequenz liegt.
Schreib eine Formel für die Berechnung der Herzfrequenz für das wirksamste körperliche Training in Abhängigkeit vom Alter auf.

4.6.2 Aufgabe Herzschlag beim Endexamen der VMBO 2007

Die Aufgaben der Abschlussexamen aller Schultypen werden in den Niederlanden immer auf einer eigenen Homepage[40] veröffentlicht. Der Verfasser wählte den Abschlusstest der VMBO aus, da das Alter und der Wissensstand am ehesten mit der Stichprobe der PISA-Studie vergleichbar ist. Die Übersetzung fertigte der Verfasser selbst an.

Maximale Herzfrequenz
Für jemanden der Sport betreibt, ist es selbstverständlich, dass er seine maximale Herzfrequenz weiß. Die maximale Herzfrequenz hängt vom Alter ab. Die nachfolgend angeführte Faustregel wird zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz bei Männern verwendet.
Maximale Herzfrequenz = 220 - Alter
In dieser Faustregel ist die maximale Herzfrequenz in Schläge pro Minute und das Alter in Jahren einzusetzen.

Frage 1: (1 Punkt)
Mark ist 40 Jahre alt. Wie groß ist seine maximale Herzfrequenz unter

40 http://www.eindexamen.nl

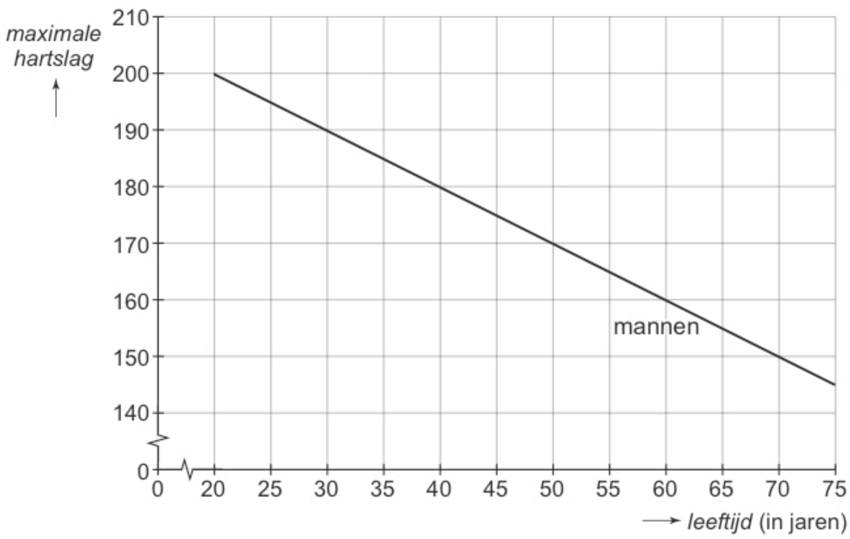
Berücksichtigung der obigen Faustregel?

Frage 2: (3 Punkte)
Die maximale Herzfrequenz lässt sich auch durch einen Test bestimmen. Dirk, ein Freund von Mark, absolviert einen solchen Test. Danach weiß Dirk, dass seine maximale Herzfrequenz 174 Schläge pro Minute ist.
Berechne, unter Verwendung der obigen Faustregel, wie alt Dirk ist.

Für Frauen gilt eine ähnliche Faustregel wie bei Männern, nämlich:
Maximale Herzfrequenz = 225 - Alter
Dabei ist wieder die maximale Herzfrequenz in Schläge pro Minute und das Alter in Jahren einzusetzen.

Frage 3: (2 Punkte)
In der nachfolgenden Grafik ist der Verlauf der Faustregel für Männer eingezeichnet.
Zeichne in die Grafik den Verkauf der Faustregel für Frauen. Du kannst dafür die folgende Tabelle verwenden.

Alter in Jahren	20	30	40	50	60	70
maximale Herzfrequenz	•	•	•	•	•	•



Frage 4: (3 Punkte)
Männer und Frauen mit derselben maximalen Herzfrequenz haben jeweils ein unterschiedliches Alter.
Berechne den Altersunterschied unter Verwendung der Faustregeln.

4.6.3 Analyse

Die beiden vorangegangen Aufgaben stimmen in vielen Punkten überraschend gut überein. So ist nicht nur das untersuchte Gebiet (Herzfrequenz), sondern auch der mathematische Hintergrund (funktionale Abhängigkeit der Herzfrequenz vom Alter) gleich. In beiden Aufgaben ist es notwendig diese funktionale Abhängigkeit zu erkennen und zu verstehen. Der Unterschied liegt in der weiteren Aufgabenstellung. Ist bei der PISA-Aufgabe der Vergleich der beiden gegebenen Funktionen im Vordergrund, so wird bei der VMBO-Aufgabe der Fokus auf den Vergleich mit der Geraden für Frauen bzw. die grafische Darstellung gelegt.

4.6.4 Testform

Auch die Testform gibt Anhaltspunkte, die das signifikant bessere Abschneiden der niederländischen SchülerInnen erklären können. Abbildung 4.10 zeigt die Verteilung der Aufgaben bei PISA 2003 in der Domäne Mathematik. Es ist sowohl die Form der offen gestellten Aufgaben als auch jene von Multiple-Choice Aufgaben für österreichische SchülerInnen in Mathematik ungewohnt. Für SchülerInnen aus den Niederlanden sind diese beiden Formen bekannt und auch geläufig. Vor allem Tests mit offenen Fragestellungen wie in Abschnitt 3.3.2 werden in den Niederlanden oft verwendet. Beim CITO-Test am Ende der Primarstufe werden vor allem Multiple-Choice-Aufgaben verwendet. Dass nur 12 % der Aufgaben, wie in

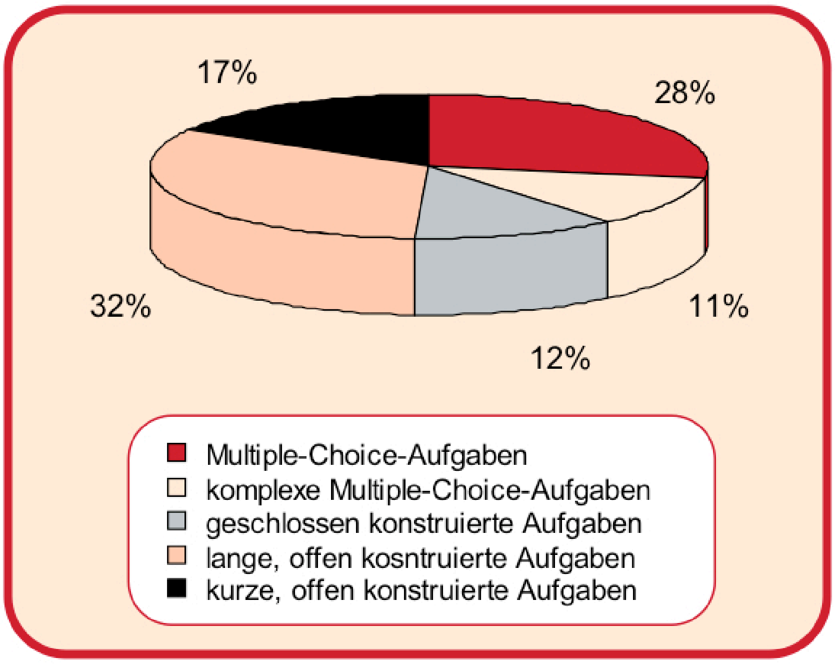


Abbildung 4.10: Art und Verteilung der Mathematikaufgaben (vgl. Reiter et al., 2004, S. 46)

Österreich meist üblich, geschlossen formuliert sind, ist ein weiteres Indiz eines möglichen Nachteils der österreichischen SchülerInnen. Um diese Sichtweise zu untermauern, wird ein

Zitat von Krainer (1999) angeführt, der den damaligen Chef des CITO-Instituts Jean-Marie Kraemer zum Abschneiden der niederländischen SchülerInnen bei TIMSS befragte.

> [Kraemer betont, dass] CITO einer Teilnahme an der TIMS-Studie äußerst zögerlich gegenüberstand, weil die Art der Testaufgaben sich von den in den Niederlanden gebräuchlichen stark unterscheiden und die niederländischen SchülerInnen daher mit den TIMSS-Testformaten wenig vertraut sind.

Dies ist insofern bemerkenswert, als dass der Spezialist den Einfluss des Testformats indirekt bestätigt. Dies trifft natürlich nicht nur auf TIMSS sondern auch auf PISA zu.
Auch in der theoretischen Beschreibung der einzelnen Stufen finden sich Elemente, die an RME erinnern. Als Beispiel sei die Leistungsstufe 6 angeführt (vgl. 4.4.1). Die Fähigkeiten die dort beschrieben werden, gleichen den Eigenschaften, die man beim „model for“(vgl. Abschnitt 3.5.6.3) findet. Das Mathematisieren von Kontexten, welches SchülerInnen auf der Stufe 2 beherrschen, ist dem „horizontalen“ Mathematisieren sehr ähnlich.

4.6.5 Schulsystem und Unterrichtszeit

Vergleicht man die Ergebnisse der Niederlande bzw. Österreichs mit jenen von Frankreich und Großbritannien, die beide Zentralexamen verwenden, so sieht man, dass 2006 beide ähnliche Ergebnisse wie Österreich erreichten (vgl. Abbildung 4.12). Auch 2003 liegt Frankreich hinter den Niederlanden und in der Nähe von Österreich (vgl. Abbildung 4.11). Das Vereinigte

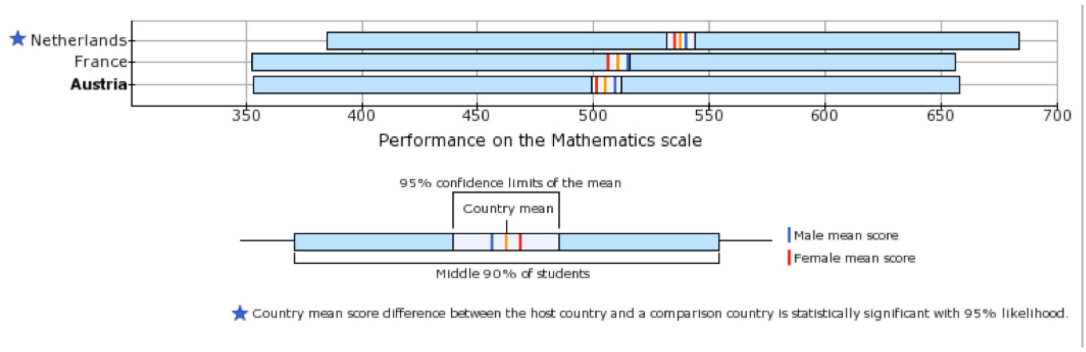


Abbildung 4.11: Vergleich der Länder Mathematik Gesamtscore 2003

Königreich erfüllte die Kriterien zur Teilnahme 2003 nicht.

Ein gravierender Einfluss der Verwendung zentraler Abschlusstests auf die Ergebnisse kann eher nicht angenommen werden. Der Vorsprung der Niederlande wird eher in anderen Faktoren (didaktisches Konzept, Klassengröße und ähnlichen Faktoren) zu suchen sein.
Ein wichtiger Faktor im Schulsystem ist die Anzahl der Schulstunden pro Woche bzw. die Anzahl der Mathematikstunden. Vergleicht man die Anzahl der Stunden in den Niederlanden mit jenen aus Österreich, so fällt auf, dass die Anzahl der Gesamtstunden in den Niederlanden niedriger ist. Auch die Anzahl der Mathematikstunden ist nach Abbildung 4.13 in den

	Gesamtskala Mathematik					
			Spannweite der Rangplätze			
			OECD-Länder		Alle Länder/Volkswirtschaften	
	Mittelwert	S.E.	Oberer Rangplatz	Unterer Rangplatz	Oberer Rangplatz	Unterer Rangplatz
Chinesisch Taipeh	549	(4.1)			1	4
Finnland	548	(2.3)	1	2	1	4
Hongkong (China)	547	(2.7)			1	4
Korea	547	(3.8)	1	2	1	4
Niederlande	531	(2.6)	3	5	5	8
Schweiz	530	(3.2)	3	6	5	9
Kanada	527	(2.0)	3	6	5	10
Macau (China)	525	(1.3)			7	11
Liechtenstein	525	(4.2)			5	13
Japan	523	(3.3)	4	9	6	13
Neuseeland	522	(2.4)	5	9	8	13
Belgien	520	(3.0)	6	10	8	14
Australien	520	(2.2)	6	9	10	14
Estland	515	(2.7)			12	16
Dänemark	513	(2.6)	9	11	13	16
Tschech. Rep.	510	(3.6)	10	14	14	20
Island	506	(1.8)	11	15	16	21
Österreich	505	(3.7)	10	16	15	22
Slowenien	504	(1.0)			17	21
Deutschland	504	(3.9)	11	17	16	23
Schweden	502	(2.4)	12	17	17	23
Irland	501	(2.8)	12	17	17	23
Frankreich	496	(3.2)	15	22	21	28
Ver. Königr.	495	(2.1)	16	21	22	27
Polen	495	(2.4)	16	21	22	27

Abbildung 4.12: Ländervergleich Mathematik Gesamtscore (Teil der Tabelle) (vgl. OECD, 2007a, S. 58)

Niederlanden geringer. Vergleicht man jedoch den relativen Anteil der Mathematikstunden an der Gesamtstundenzahl, so ist dieser höher als in Österreich. Schwantner und Schreiner (2006, S. 306) verweisen jedoch auf die großen Unterschiede in den Unterrichtszeiten, was die Interpretation eines signifikanten Einflusses nicht zwingend unterstützt. So haben manche Länder mit hohem relativen Mathematikanteil schlechte Ergebnisse bei PISA erhalten.

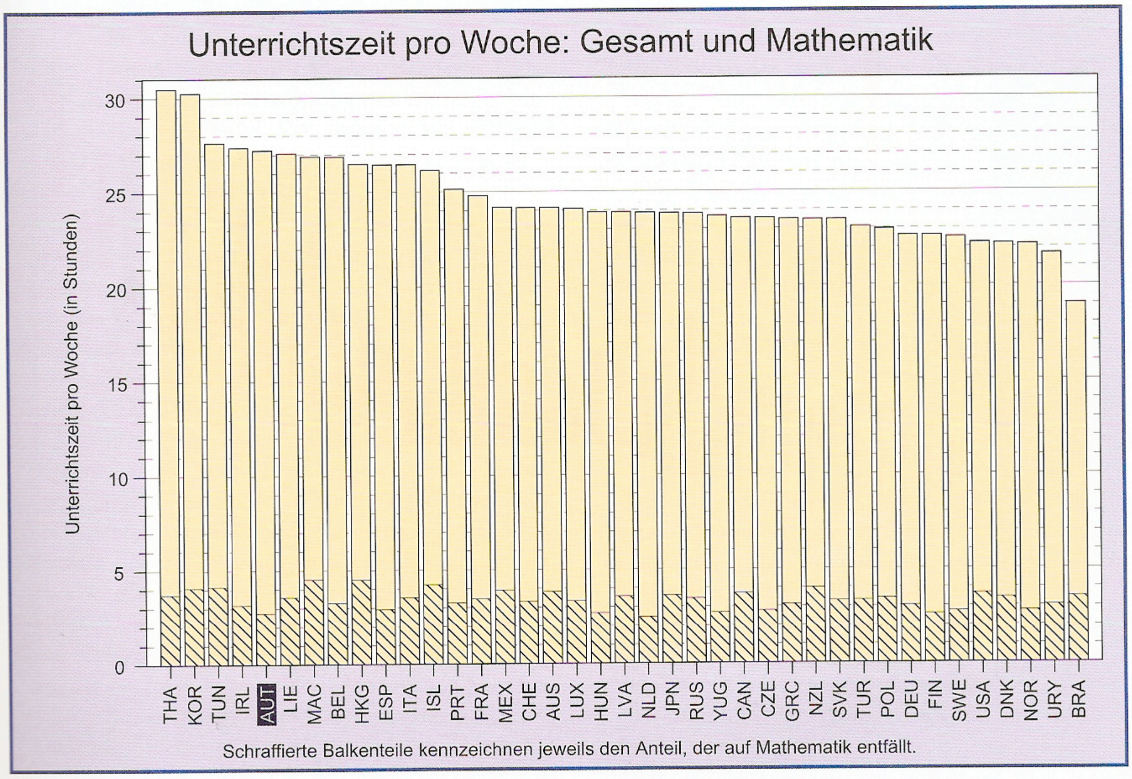


Abbildung 9.5: Unterrichtszeit pro Woche – insgesamt und Mathematik (PISA 2003)

Abbildung 4.13: Vergleich Stundenanzahl in den Ländern (vgl. Schwantner und Schreiner, 2006, S. 305)

KAPITEL 5

Conclusio

In diesem letzten Abschnitt versucht der Verfasser die gefundenen Ergebnisse und Indizien zusammen zu fassen und zu bündeln. Zusätzlich soll die bisherige Arbeit nochmals verdichtet präsentiert werden.

5.1 Schulsystem

Betrachtet man die Geschichte des niederländischen Schulsystems, so fällt auf, dass der Staat den NiederländerInnen sehr früh die Möglichkeit gewährte, eigene Schulen zu gründen. Dadurch waren in weiterer Folge Maßnahmen notwendig, um die Homogenität des Unterrichts zu gewährleisten. Die SchulinspektorInnen repräsentieren heutzutage eine dieser Maßnahmen, die Lehr- und Lernwege, die genauer als der österreichische Lehrplan die Bildungsziele und den Weg diese zu erreichen beschreibt (vgl. Abschnitt 3.6), sind eine andere. Zusätzlich gibt es in den Niederlanden verschiedenste Institutionen, die sich mit Lehrplanentwicklung, didaktischen Weiterentwicklungen und ähnlichen Dingen beschäftigen und Schulen weitestgehend in ihrer Arbeit unterstützen. Das CITO wiederum ist die zentrale Institution für Tests und Examina.
Es ist leicht zu sehen, dass ein gewisser Grad an Spezialisierung und Zentralismus notwendig ist, um eine landesweit vergleichbare Bildung trotz der großen Diversität der Schulträger und deren Werten zu gewährleisten. Nicht alles im niederländischen System ist auf das österreichische System adaptierbar. Dennoch gibt es einige Punkte die vorstellbar wären:

Schulinspektionen: Die im Kapitel 2.4.1 beschriebene Arbeitsweise der SchulinspetorInnen hat natürlich nicht nur Vorteile. Dennoch ist der Verfasser der Meinung, dass vor allem die Art und Regelmäßigkeit der Inspektionen übertragbar wären. Die österreichische Einstellung, dass InspektorInnen nur kontrollieren, sollte durch die niederländische Sicht ersetzt werden.

> Die Inspektion soll uns doch helfen, besser zu werden (Spiewak, 2003, o. S.).

Ebenso hätte diese „Behörde" die Möglichkeit Schwerpunktinspektionen und themenzentrierte Inspektionen durchzuführen. Dass das System auch in anderen Ländern funktionieren könnte, sieht man am Beispiel von Nordrhein-Westfalen. Dort gibt es seit längerer Zeit eine intensive Zusammenarbeit mit den niederländischen InspektorInnen. Dabei übernahm man im Jahr 2002/2003 das Konzept der niederländischen Routineuntersuchung (RST vgl. Seite 14) und passte dieses in Zusammenarbeit mit der niederländischen Behörde an die Struktur von NRW an (vgl. Int-Veen, 2003, S. 45f). Die dort gemachten Erfahrungen könnten für eine ähnliche Zusammenarbeit in Österreich genützt werden.

Basisbildung: Durch die Einführung von drei Jahre am Beginn der Sekundarstufe, die in allen Schultypen fast ident sind, wurde eine Verbesserung der Durchlässigkeit im Schulsystem erreicht. Durch den beinahe identen Lehrplan der weiterführenden Schulen ist es den SchülerInnen leichter möglich den Schultyp zu wechseln. Die Einführung der „Gesamtschule" in Österreich versucht nun Ähnliches. Vielleicht wäre eine Angleichung der Lehrpläne ein leichterer Schritt gewesen. Die Niederlande hatten damit Erfolg.

Abschlussexamen: Die in den Niederlanden durchgeführten Abschlusstests sind zweigeteilt. So muss sowohl ein zentraler Test als auch ein schuleigener Test bestanden werden, um den Abschluss zu erlangen. Auch hier geht der Weg in Österreich in eine ähnliche Richtung. Durch die begonnene Änderung in der Maturaordnung (teilzentrale Matura) wird ebenso ein zweistufiges System eingeführt. Der Verfasser meint, dass auch die Einführung von teilzentralen Abschlussexamen für alle anderen Schultypen vernünftig wäre. Die angestrebte Outputerfassung des Schulsystems wäre damit wahrscheinlich leichter zu bekommen als mit den zur Zeit geplanten Bildungsstandards.

Freudenthal Institut: Das Freudenthal Institut beschäftigt sich seit etwa 30 Jahren mit der Entwicklung der Mathematikdidaktik in den Niederlanden. Die Fokussierung auf RME führte zu einer Verstärkung der Entwicklung. Diese Bündelung der Ressourcen hat natürlich Einfluss auf die mathematische Bildung und den Unterricht. Die Gründung einer ähnlichen Institution wäre auch in Österreich möglich und, so die Meinung des Verfassers, auch sinnvoll. Vor allem die Entwicklung einer durchgängigen Didaktik (Primar- und Sekundarstufe) wäre ein Aufgabengebiet, welches in dieser Institution bearbeitet werden könnte.

Im Hinblick auf den Einfluss des Schulsystems auf die Ergebnisse der Niederlande bei PISA lässt sich kein klares Indiz dafür finden, ob ein solcher vorhanden ist oder nicht. Somit ist zur Verbesserung der österreichischen Ergebnisse bei PISA ein „Kopieren" des Systems nicht sinnvoll. Das Aufnehmen einiger der oben genannten niederländischen Aspekte ins österreichische Bildungssystem würde, nach Meinung des Verfassers, jedoch zu einer positiven Weiterentwicklung des Schulsystems beitragen.

5.2 RME

RME entstand Ende der siebziger-Jahre in den Niederlanden als Reaktion auf den zunehmenden Einfluss von „New Math“. Der Mathematiker Hans Freudenthal war die bestimmende Person bei der Entwicklung dieses didaktischen Konzepts. Seine didaktischen Ideen und Prinzipien wurden in verschiedenen Projekten auf den Unterricht angepasst und adaptiert. Freudenthal (1973, 1983) stellt in seinen Büchern immer wieder Mathematik als offenes System dar und plädiert für einen Unterricht, in dem die SchülerInnen diese offene Mathematik entdecken und erfinden sollen. Das WISKOBAS-Projekt (vgl. Kapitel 3.2) versuchte die erste Umsetzung dieser Forderungen für die Primarstufe. Federführend dabei war Treffers, der das Projekt auch wissenschaftlich betreute. Theoretisch baute man in den Niederlanden auf die Arbeiten von van Hiele (1986) auf (vgl. Abschnitt 3.5.1). Diese wurden im Lauf des WISKOBAS-Projekts erweitert und an RME angepasst.
In einem weiteren Schritt begann man mit der Implementierung von RME in der Sekundarstufe. Das HEWET-Projekt (vgl. Kapitel 3.3) entwickelte dafür einen eigenen Lehrplan, der unter Math A in den Schulen eingeführt wurde. Die Idee war dabei, dass nicht alle SchülerInnen abstrakte Mathematik lernen sollten, sondern sie lernen sollten, wie die mathematischen Methoden angewendet werden können. Das Projekt warf erstmals die Frage nach alternativen Testmöglichkeiten auf (siehe Abschnitt 3.3.2). Die von de Lange (1987, S. 179) postulierten Prinzipien sind auch heute in den Niederlanden noch gültig und werden bei der Erstellung von Tests berücksichtigt. Eine Übertragung dieser Prinzipien nach Österreich wäre für den Verfasser nicht nur sinnvoll, sondern in Anbetracht sich verändernder Unterrichtsmethoden (Gruppenarbeiten, offenes Lernen usw.) auch notwendig.
RME ist ein didaktisches Prinzip, welches im Kern konstruktivistisch ist. Die SchülerInnen sind angehalten, die von ihnen benötigte Mathematik unter Begleitung der Lehrpersonen selbst zu erfinden. Ausgangspunkte sind immer Aufgaben, die realitätsnah sind und die die SchülerInnen herausfordern. Die SchülerInnen werden dabei nicht alleine gelassen. Berücksichtigt man die Tatsache, dass es unmöglich ist, 2000 Jahre Mathematik in elf bis vierzehn Schuljahren zu erfinden, macht dies natürlich Sinn. Das von Freudenthal postulierte Prinzip der „Guided Reinvention“ gibt einen Einblick, wie diese Herausforderung gelöst werden kann (vgl. Abschnitt 3.5.5). Dennoch ist die Grundidee, dass sich die SchülerInnen die Mathematik quasi erfinden, bemerkenswert. Sieht man sich nun RME-Aufgaben an, so erkennt man die konsequente Umsetzung dieser Idee schnell. Als Beispiel sei hier nur die Aufgabe mit dem Temperaturverlauf (Seite 38) genannt, an dem die SchülerInnen beginnen erste Grundlagen der Differentialrechnung zu erfinden.
Ein wichtiges Hilfsmittel zur „Neuentdeckung“ der Mathematik ist das Modell. SchülerInnen entwickeln bei der Bearbeitung der Aufgaben immer Modelle, die den SchülerInnen dabei helfen, die Aufgabenstellungen zu organisieren. Diese Art von Modellen wurde in den letzten zehn Jahren auch in Deutschland und in Österreich, Stichwort anwendungsorientierter Un-

terricht, vermehrt genützt. Eine Vielzahl von Publikationen beschäftigt sich mit dem Thema. Viele Aufgaben, die in dieser Arbeit präsentiert wurden, sind auch im deutschsprachigem Raum mittlerweile bekannt. Der Unterschied in der Bearbeitung liegt aber klar an der unterschiedlichen Zielbeschreibung. Führt das Modell im deutschen Sprachraum unmittelbar zu einer Lösung bzw. reflektiert zurück auf die reale Fragestellung, so sind die Modelle der niederländischen SchülerInnen komplexer. Diesen Modellen muss es möglich sein sich zu transformieren. Das heißt, den Modellen ist es nicht nur möglich die ursprünglichen Aufgabe zu beschreiben, sondern sie lassen einen zweiten Abstraktionsschritt zu. Sie werden zu normativen Modellen, die auf verschiedene Fragestellungen flexibel anpassbar sind. In Kapitel 3.5.6 wurde versucht diese umfassende Funktion der Modelle näher zu beschreiben.
Grundlegend und wichtig ist der Begriff des Mathematisierens, der in Abschnitt 3.5.3 genauer beleuchtet wird. Er steht bei RME für eine Vielzahl von Aktivitäten wie Modellieren, Verallgemeinern, Reorganisieren und vieles andere. Für Freudenthal ist das Mathematisieren der zentrale Begriff. Er verwendet ihn sowohl im Zusammenhang mit der Realität (mathematisieren der realen Welt, d.h. übersetzen und transformieren von Problemen), aber auch mit der Mathematik (mathematisieren der Mathematik, z.B. Verallgemeinern und Reorganisieren). Treffers (1987) führt die Begriffe „horizontale“ und „vertikale“ Mathematik ein, um diesen Unterschied besser beschreiben zu können.
Kurz seien hier nochmal die fünf Grundprinzipien von RME angeführt.

- Realität
- Zielbeschreibung
- Aktivität
- Interaktivität
- Verflechtung

Sie sind die Eckpfeiler der Theorie und werden in Abschnitt 3.7 und Abschnitt 3.2.1 genauer beleuchtet. Unterricht mittels RME sollte immer diese fünf Prinzipien beinhalten und ansprechen.
Wie passiert nun die Verbindung der mathematischen Inhalte, die in den verschiedenen Aufgaben erlernt werden. Diese Frage lässt sich mit den Lehr- und Lernwegen (vgl. Abschnitt 3.6) beantworten. Mehr als im österreichischen Lehrplan sind diese Pläne ein recht genauer Wegweiser für LehrerInnen. Dabei werden Bildungsziele genau definiert und der Weg diese zu erreichen wird skizziert. Die LehrerInnen haben außerdem die Vorgaben der Abschlussexamina, die ihnen helfen, die SchülerInnen entsprechend anzuleiten.
Wie der konkrete Mathematikunterricht mittels RME aussieht, ist dem Verfasser nicht bekannt, da Hospitationen in den Niederlanden nicht durchgeführt wurden. Dennoch war es anhand der verwendeten Literatur bzw. den darin enthaltenen Unterrichtsskizzen möglich,

ein recht gutes Bild des Unterrichts zu bekommen. Eine Fragestellung, die dabei interessant erscheint, ist, ob es möglich wäre RME auch in Österreich umzusetzen. Ein direktes Kopieren des Systems wäre zum Scheitern verurteilt. Das didaktische Konzept RME wurde in und für die Niederlande konzipiert und nun etwa 30 Jahre lang entwickelt und verbessert. Das Konzept zu kopieren wäre also insofern verkehrt, als dass die Voraussetzungen des Schulsystems andere sind. Trotzdem wäre es eine Überlegung wert, eine einheitliche Didaktik, die allen Schulbüchern zugrunde liegt, zu entwickeln. Der Effekt wäre nach der Meinung des Verfassers, eine höhere Effektivität in der Forschung und somit auch eine Verbesserung des unmittelbaren Unterrichts. RME könnte dabei für diese österreichische Theorie Vorbild und Grundlage sein.
Voraussetzung für die Einführung einer RME-ähnlichen Didaktik ist eine Änderung in der Testart. Durch die gesetzliche Vorschrift dreimal im Semester Schularbeiten durchzuführen, wird der Spielraum für alternative Didaktiken relativ klein. Werden die Bruchzahlen wie in Abschnitt 3.4 eingeführt, so dauert dies von der Unterrichtszeit wahrscheinlich länger als bei Frontalunterricht. Ähnlich sieht es bei der Bearbeitung der Aufgabe mit dem Schachbrett aus (vgl. Abschnitt 3.2.2). Abgesehen von den Schwierigkeiten bei der Überprüfung von Kompetenzen wie Modellbildung bei Schularbeiten. Eine Alternative wie in den Niederlanden müsste überlegt werden (vgl. Testen in RME Abschitt 3.3.2). Grundsätzlich wäre eine Einführung der RME-Didaktik jedoch auch in Österreich vorstellbar.

5.3 PISA und RME

Wie groß der Einfluss des didaktischen Konzepts RME auf das Abschneiden der Niederlande war, ist durch die gefundenen Indizien nicht eindeutig belegbar. Dennoch weisen z.B. die Ähnlichkeiten der Fragestellung oder das Design der Aufgaben auf einen möglichen Vorteil hin. In Kapitel 4.6 versucht der Verfasser diesen möglichen Vorteil herauszuarbeiten.
Grundsätzlich ist der Unterschied in den PISA-Ergebnissen zwischen den Niederlanden und Österreich signifikant. Die niederländischen SchülerInnen lagen in allen Subskalen vor den österreichischen. Somit macht es durchaus Sinn nachzusehen, ob die Art des Unterrichts dafür verantwortlich ist und ob dieser übertragbar wäre. Andererseits ist das Ergebnis der österreichischen SchülerInnen nicht so schlecht. Ein „Schnellschuss“ wäre nicht ratsam. Dass die österreichischen SchülerInnen in Zukunft aber vermehrt auch im Unterricht mit offenen Fragen oder Multiple-Chioce-Aufgaben konfrontiert werden sollten, erachtet der Verfasser für sinnvoll.
Überraschend war der Ausschluss der Niederlande von der Studie 2000. Gründe waren die zu geringe Teilnahme und auch der zu niedrige Rücklauf, die mit einer gewissen „Testmüdigkeit“ der niederländischen Schulen bzw. der Schulstruktur (viel private Schulträger, geringer staatlicher Einfluss) zusammenhängen könnten. Deshalb war ein Vergleich der Daten erst

mit dem Jahr 2003 möglich.
Eines der stärksten Indizien für das bessere PISA-Ergebnis der Niederlande im Zusammenhang mit RME stellt für den Verfasser jedoch die Firma CITO dar. Diese private niederländische Firma ist auf die Testentwicklung und -durchführung spezialisiert und in den Niederlanden hauptverantwortlich für die Tests am Ende der Primarstufe (80 % der Schulen verwenden diesen Test). Auch bei den Zentralexamina arbeitet CITO mit und ist mit den Instituten zur Lehrplanentwicklung (SLO) und Bildungsforschung (SVO) eine der Anlaufstellen für Schulen, um diese bei der Schulentwicklung zu unterstützen. CITO hat somit eine Schlüsselrolle im Bildungssystem, da die von CITO entwickelten Tests natürlich den Lehrplan und den Unterricht beeinflussen. Wie in Abschnitt 3.6 schon erwähnt ist das so genannte „teaching to the test“ ein Problem, welches durch zentrale Tests entsteht. Wie in den Niederlanden mit diesem Problem umgegangen wird, ist in der Literatur nicht explizit erwähnt. Was hat nun dieses niederländische Institut mit PISA zu tun? Wie schon in Abschnitt 4.3 erwähnt, ist CITO Mitglied im PISA-Konsortium. Dieses ist für die operative Abwicklung der Studie (Ziehen der Stichprobe, Erstellen der internationalen Aufgaben, ...) zuständig. Das Design der Aufgaben ist natürlich nicht ohne Einfluss auf die Ergebnisse. Auch der ehemalige Leiter der CITO-Gruppe bestätigt dies in einem Interview (vgl. Abschnitt 4.6.4). Insofern ist die Mitarbeit von CITO im PISA-Konsortium ein Faktor, der bei der Betrachtung der PISA-Ergebnisse berücksichtigt werden muss.
Abschließend sei noch gesagt, dass in dieser Diplomarbeit der „Beweis“ für den Einfluss von RME auf die Ergebnisse von PISA nicht erbracht wurde. Es wurden jedoch mehrere Indizien gefunden, die auf diesen Einfluss hindeuten. Die Frage nach der Implementation von RME konnte nur angerissen werde. Um sie umfassend beantworten zu können, müsste man das Konzept vor Ort beobachten und analysieren.

Literaturverzeichnis

Achorner, Ingrid. 2003. *Die Niederlande und ihr Schulsystem im Vergleich mit Österreich*. Diplomarbeit, Pädagogische Akademie des Bundes in Tirol, Innsbruck.

Baptist, Peter und Volker Ulm. 2005. Stufen mathematischer Kompetenz nach PISA, URL `http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/57/PISA.pdf`, homepage [27.5.08].

Barth, Friedrich. 1990. New Math - Old Math - Math. *Didaktik der Mathematik* 4:304–314.

Baumert, Jürgen, Eckhard Klieme, Michael Neubrand, Manfred Prenzl, Ulrich Schiefele et al. 2001. *PISA 2000*. Opladen: Leske + Budrich.

BMUKK. 2004. Lehrplan Mathematik. Homepage [27.5.08], URL `http://www.gemeinsamlernen.at/`.

Brinkmann, Günther. 1996. Niederlande. In: *Bildungssysteme in Europa*, Anweiler, Oskar, 125–142.

Brnstrup, Harald, Susanne Hanslik, Matthias Lippert, Hubert Massin, Carla Rothe et al. 2003. Wiskunde A und B, der niederländische Weg, URL `http://www.learn-line.nrw.de/angebote/sinus/zentral/setkoordinatoren/Wiskunde_A_und_B_der_niederlaendische_Weg.pdf`, gefunden auf der Homepage des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen [25.5.08].

Bruner, J. S. 1960. *The process of education*. Cambridge, Mass: Harvard Univ. Press.

Chap, Gerda. 2004. Explaining the Cito exams. Homepage [27.5.08], URL `http://www.expatica.com/nl/survival/education/explaining-the-cito-exams-5729.html`.

de Lange, Jan. 1987. *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW&OC.

de Lange, Jan. 1996. Using and Applying Mathematics in Education. In: Bishop, A. J. et al. (Hrsg.), *International handbook of mathematics education*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher, Kapitel 2, 49–97.

Ende, Michael. 1984. *MOMO*. Stuttgart; Wien [u.a.]: Thienemann.

Feder, Hans. 2004. *Externe Schulbegleitung in den Niederlanden*. Norderstedt: Books on Demand GmbH.

Felber, Fredy. 2005. Evaluationsansatz der Niederlande, URL `http://www.volksschulbildung-sev.lu.ch/03_niederlande_kurz_fse_lu-3.pdf`, veröffentlichung auf der Homepage der Fachstelle für Schulevaluation Luzern [27.5.08].

Freudenthal, Hans. 1968. Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics* 1:3–8.

Freudenthal, Hans. 1973. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht-Holland: D. Riedel Publishing Company.

Freudenthal, Hans. 1983. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, Hans. 1991. *Revisiting mathematics education*, Band 9 von *Mathematics Education Library*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, Koeno. 1994. Educational development and development research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education* 25(3):443–471.

Gravemeijer, Koeno. 1996. *Developing Realistc Mathematic Education*. CD Press.

Gravemeijer, Koeno. 2007. Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education, URL `http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/papers/PDF/3.Keynote(Dec.9)_Koeno_Gravemeijer_Netherlands.pdf`, paper zum Vortrag auf der APEC - Tsukuba International Conference III [27.5.08].

Gravemeijer, Koeno und Michael Doorman. 1999. Context problems in Realistic Mathematics Education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics* 39:111–129.

Haaser, Anita. 2006. *Die Risikoschüler/innen in der PISA-Studie 2003 - eine Analyse der Länder Österreich, Deutschland, Finnland und Niederlande*. Diplomarbeit, Universität Salzburg.

Haider, Günther. 2006. *Die PISA-Studie*, Böhlau, Kapitel Die PISA-Studie: Wissenschaftliche Methode und Orgnisation.

Haider, Günther und Claudia Reiter (Hrsg.). 2004. *PISA 2003 Internationaler Vergleich von Schülerleistungen*. Graz: Leykam.

Haider, Günther und Claudia Schreiner. 2007. *PISA 2006 Internationaler Vergleich von Schülerleistungen- Internationaler Vergleich von Schülerleistungen. Technischer Bericht.* ZVB Österreichisches Projektzentrum für Vergleichende Bildungsforschung.

Hendriks, Paul J. 2006. Blinde Flecken haben wir gefunden. In: *Schulinspektion und Schulleitung*, RAABE Fachverlag für Bildungsmanagement, 125–138.

Int-Veen, Jochem. 2003. Der Nachbar als Vorbild? *Pädagogische Führung* 1(1):45–47.

Kline, Morris. 1974. *Why Johnny Can't Add: the failure of the new math*. New York: Vintage Books.

Krainer, Konrad. 1999. Kurzdarstellung von Reformansätzen zur Weiterentwicklung des mathematisch- naturwissenschaftlichen Unterrichts in ausgewählten Ländern. Homepage [27.5.08], URL `http://imst2.uni-klu.ac.at/was_ist_imst/vorprojekt/IMST%20TOP4/InhaltTOP4.htm`.

Maaß, Katja. 2004. *Mathematisches Modellieren im Unterricht*. Verlag Franzbecker.

Marga Pröhl, Cornelia Schurig. 1996. Niederlande. In: *Innovative Schulsysteme im internationalen Vergleich*, Gütersloh: Verlag Bertelsmann Stiftung, Band 1 Dokumentation zur internationalen Recherche, 41–58.

Ministry of Education, Culture und Science. 2006. The Education System in the Netherlands 2006. Homepage [27.5.08], URL `http://www.minocw.nl/documenten/eurydice_2006_en.pdf`.

N., N. 2007. Broschüre für Eltern. Entnommen der Homepage von CITO [27.5.08], URL `http://www.cito.nl/po/lovs/eb/eb_ouders/Cito_Eindtoets_ouderkrant_eng.pdf`.

OECD. 2000. *Literacy Skills for the World of Tomorrow: Further Results from PISA 2000*. OECD.

OECD. 2003a. Freigegebene Aufgaben der PISA-Studie 2003. Homepage [27.5.08], URL `http://www.pisa-austria.at/pisa2003/beispielaufgaben.htm`.

OECD. 2003b. *Lernen für die Welt von morgen - Erste Ergebnisse von PISA 2003*. OECD.

OECD. 2004. *Erste Ergebnisse von PISA 2003*. OECD.

OECD. 2006. *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy*. OECD.

OECD. 2007a. *PISA 2006 Naturwissenschaftliche Kompetenz für die Welt von Morgen Kurzzusammenfassung*. OECD.

OECD. 2007b. *Sammlung aller bei PISA freigegebenen Aufgaben der Haupttests 2000, 2003 und 2006*. Salzburg: Projektzentrum für vergleichende Bildungsforschung.

O´Brien, Thomas C. 1976. Three Informal Essays. *Educational Studies in Mathematics* 7(1/2):89–108.

Peschek, Werner. 2006. *Die PISA-Studie*, Böhlau, Kapitel PISA Mathematik: Das Konzept aus fachdidaktischer Sicht.

Reiter, C., B. Lang und G. Haider. 2004. *PISA 2003 - Internationaler Vergleich von Schülerleistungen. Technischer Bericht.* ZVB Österreichisches Projektzentrum für Vergleichende Bildungsforschung, URL `www.pisa-austria.at/pisa2003/index2.htm`.

Roberts, David L. und Angela L. E. Walmsley. 2003. The Original New Math: Storytelling versus History. *Mathematics Teacher* 96(7):469 – 473.

Schwantner, Ursula und Claudia Schreiner. 2006. *Die PISA-Studie*, Böhlau, Kapitel Unterricht in Mathematik.

Skiera, Ehrenhard. 1986. *Das Bildungswesen der Niederlande*, Band 6. Verlag der Ferberschen Universitätsbuchhandlung, Studien zum Bildungswesen Nord- und Westeuropas Edition.

Sparka, Andrea. 2002. Das Niederländische Inspektorat: Auftrag, Methodik und Kriterienrahmen bei Qualitätsevaluationen. *journal für schulentwicklung* 1(1):45–54.

Sparka, Andrea. 2003. Sind Schulen gut genug? *Pädagogische Führung* 1(1):43–44.

Spiewak, Martin. 2003. Früher Start zur Weltspitze. *Die Zeit* 15:29.

Streefland, Leen. 1991. *Fractions in Realistic Mathematics Education. A paradigm of Developmental Research*, Band 8 von *Mathematics Education Library*. Kluwer Academic Publisher Dordrecht/Boston/London.

Teppo, Anne. 1997. Van Hiele Levels of Geomatric Thought Revisited. *Mathematics Teacher* 84:210–222.

Tigges, Johanna. 2004. Ein Leben lang lernen - das Bildungssystem der Niederlande. Artikel auf der Homepage der Uni Münster [27.5.08], URL `http://www.uni-muenster.de/HausDerNiederlande/Zentrum/Projekte/NiederlandeNet/Dossiers/30/bildung_forschung.html`.

Treffers, Adrian. 1982. *Mathematikunterricht Klasse 1 bis 6.* Ferdinand Schöningh.

Treffers, Adrian. 1987. *Three Dimensions*, Band 5 von *Mathematics Education Library*. D. Riedel Publishing Company Dordrecht/Boston/Lancaster/Tokyo.

Tuschen. 1999. Das Schulsystem der Niederlande. Homepage [27.5.08], URL `http://home.versanet.de/~tuschen/arbeitszimmer/schulsystem_nl.htm`.

Tyroller, Stefanie. 23.12.2005. Wie funktioniert der Wechsel von der Grund- zur weiterführenden Schule in den Niederlanden? *Aachener Zeitung* .

van Ackeren, Isabell. 2003. *Evaluation, Rückmeldung und Schulentwicklung*, Band 2 von *Studien zur Internationlen und Interkulturell Vergleichenden Erziehungswissenschaft*. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

van Bruggen, Johan C. 2006. Schulinspektion in den Niederlanden. In: *Schulinspektion und Schulleitung*, RAABE Fachverlag für Bildungsmanagement, 107–124.

van de Ven, Bob und Hans Döbert. 2002. Niederlande. *Trends in Bildung International* 5.

van den Heuvel-Panhuizen, Maria und Monica Wijers. 2005. Mathematic standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt der Mathematik* 37 (4):287–306.

van den Heuvel-Panhuizen, Marja. 1998. Realistic Mathematics Education: work in progress. In: Brekke, G. und T. Breiteig (Hrsg.), *From theory into practice. Proceedings of NORMA98*.

van den Heuvel-Panhuizen, Marja. 2003. The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics* 54:9–35.

van Hiele, Pierre M. 1986. *Structure and Insight*. New York: Academic Press.

Lebenslauf

Thomas Plotz

Wohnort:	Wien
Mobil:	+43 699 10 89 47 46
E-Mail:	tomplotz@gmx.at
Geboren am:	29. Mai 1977
Ort:	Linz
Familienstand:	ledig

Schule & Studium

1991 – 1996	HTBLA für chemische Betriebstechnik in Wels
1996 – 2003	Studium Technische Mathematik und LA Mathematik/Physik, Universität Linz
2005 – 2008	Studium Lehramt Mathematik und Physik, Universität Wien

zusätzliche Ausbildung

2003 – 2007	Kapellmeisterausbildung der Landesmusikschulen OÖ

Berufspraxis (Auszug)

1997 – 2000	Nachhilfelehrer bei Dr. Kobuschek
2007 – 2008	Physiklehrer im ORg Hegelgasse 14 und in der AHS Rahlgasse

Wien, 7. Juli 2008