



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Extrasolare Planeten in der 1:1 Resonanz

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin / Verfasser:	Markus Roth
Matrikel-Nummer:	9550722
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	Astronomie
Betreuerin / Betreuer:	Univ.-Prof. Rudolf Dvorak

Wien, am 09.07.2008

Ich versichere hiermit,  
dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und  
nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel verfasst habe.  
Die Arbeit ist bei keiner anderen Hochschule oder Universität  
als Prüfungsarbeit eingereicht worden.

Wein, 9.7.2008

# Inhaltsverzeichnis

# Seite

1	Einleitung.....	3
2	Das N-Körperproblem.....	10
3	Der Lie-Integrator.....	12
3.1	Anwendung des Lie-Operators zur numerischen Integration.....	13
3.2	Anwendung des Lie-Integrators auf das N-Körperproblem.....	14
4	Die Bahnelemente.....	19
4.1	Umwandlung von Bahnelementen in x-y-z-Koordinaten.....	24
4.2	Umrechnung von x-y-z-Koordinaten in Bahnelemente .....	26
5	Auswertung.....	29
5.1	Startwerte.....	29
5.2	Instabilitätsfenster in Abhängigkeit von der Exzentrizität $e$ .....	31
5.2.1	$m=1\times 10^{-6} M_S$ .....	31
5.2.2	$m=2\times 10^{-6} M_S$ .....	33
5.2.3	$m=5\times 10^{-6} M_S$ .....	34
5.2.4	$m=7\times 10^{-6} M_S$ .....	36
5.2.5	$m=1\times 10^{-5} M_S$ .....	37
5.2.6	$m=2\times 10^{-5} M_S$ .....	39
5.2.7	$m=5\times 10^{-5} M_S$ .....	40
5.2.8	$m=7\times 10^{-5} M_S$ .....	42
5.2.9	$m=1\times 10^{-4} M_S$ .....	43
5.2.10	$m=2\times 10^{-4} M_S$ .....	45
5.2.11	$m=5\times 10^{-4} M_S$ .....	46
5.2.12	$m=7\times 10^{-4} M_S$ .....	47
5.2.13	$m=1\times 10^{-3} M_S$ .....	48
5.3	Instabilitätsfenster in Abhängigkeit von der Masse.....	50
5.3.1	$e=0,10$ .....	50
5.3.2	$e=0,15$ .....	51
5.3.3	$e=0,20$ .....	51
5.3.4	$e=0,25$ .....	52
5.3.5	$e=0,30$ .....	53
5.3.6	$e=0,35$ .....	53
5.3.7	$e=0,40$ .....	54
5.3.8	$e=0,45$ .....	55
5.3.9	$e=0,50$ .....	55
5.3.10	$e=0,55$ .....	56
5.3.11	$e=0,60$ .....	57
5.3.12	$e=0,65$ .....	57
5.3.13	$e=0,70$ .....	58
5.4	Periodizität der Exzentrizität $e$ .....	60
5.4.1	Abhängigkeit der Periodendauer der Exzentrizität $e$ in Abhängigkeit von der Exzentrizität $e$ bei verschiedenen Massen $m$ und mittlere Anomalie $M$ .....	60
5.4.1.1	$m=1\times 10^{-6} M_S$ .....	61
5.4.1.2	$m=1\times 10^{-5} M_S$ .....	62
5.4.1.3	$m=1\times 10^{-4} M_S$ .....	63
5.4.1.4	$m=1\times 10^{-3} M_S$ .....	64

5.4.2 Abhängigkeit der Periodendauer der Exzentrizität $e$ in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie $M$ bei verschiedenen Massen $m$ und Exzentrizität $e$ .....	66
5.4.2.1 $e=0,10$ .....	66
5.4.2.2 $e=0,40$ .....	69
5.4.2.3 $e=0,70$ .....	72
5.5 Periastrondrehung.....	76
5.5.1 $m=1 \times 10^{-6} M_S$ .....	77
5.5.2 $m=5 \times 10^{-6} M_S$ .....	78
5.5.3 $m=1 \times 10^{-5} M_S$ .....	79
5.5.4 $m=5 \times 10^{-5} M_S$ .....	80
5.5.5 $m=1 \times 10^{-4} M_S$ .....	81
5.5.6 $m=5 \times 10^{-4} M_S$ .....	82
5.6 Verschiedene Exchange-Orbits.....	83
5.6.1 $m=1 \times 10^{-6} M_S$ .....	83
5.6.1.1 $M=180^\circ$ .....	83
5.6.1.2 $M=140^\circ$ .....	85
5.6.1.3 $M=100^\circ$ .....	86
5.6.1.4 $M=40^\circ$ .....	88
5.6.2 $m=1 \times 10^{-5} M_S$ .....	90
5.6.2.1 $M=140^\circ$ .....	90
5.6.2.2 $M=100^\circ$ .....	92
5.6.2.3 $M=40^\circ$ .....	94
5.6.3 $m=1 \times 10^{-4} M_S$ .....	95
5.6.3.1 $M=120^\circ$ .....	95
5.6.3.2 $M=40^\circ$ .....	97
5.7 Exchange-Orbits mit Inklination.....	100
5.7.1 $i=5^\circ$ .....	100
5.7.2 $i=20^\circ$ .....	102
5.7.3 $i=60^\circ$ .....	104
5.7.4 $i=90^\circ$ .....	106
5.8 Verlauf des minimalen Abstands der Planeten zueinander.....	108
6 Zusammenfassung.....	113
A) Literaturverzeichnis.....	117

# 1 Einleitung

Von Resonanzen spricht man in der Himmelsmechanik, wenn sich ein einfacher numerischer Zusammenhang zwischen Frequenzen oder Perioden von Himmelskörpern ableiten lässt. Dabei kann es sich um die Rotations- oder Orbitalperiode eines einzelnen Planeten handeln (wie zum Beispiel die Spin-Orbit-Kopplung) oder die Orbitalperiode zweier oder mehr Planeten, Monde oder Asteroiden. Meist stehen die Anzahl vollständiger Umläufe in einem kleinen Verhältnis (1:2, 1:3, 2:3 usw.) oder allgemein:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1.1)$$

Die gegenseitige Beeinflussung erfolgt dann aufgrund von regulären und periodischen Gravitationskräften, die normalerweise durch Resonanzen verstärkt werden, was meist zu instabilen Konfigurationen führt. Die Körper tauschen dabei Drehimpulsanteile aus, was wiederum zu einer Verschiebung der Orbits führt. Dieser Austausch und die Änderung der Bahn dauern so lange bis die Resonanz aufgehoben ist (entweder einer der Körper befindet sich danach in einer anderen Bahn oder hat das System überhaupt verlassen).

Es gibt aber auch Resonanzen zwischen Himmelskörpern, die stabilisierend wirken und so das System erhalten. Dies gilt vor allem dann, wenn sich die beiden Körper während ihrer Bewegung um das Zentralgestirn nie nahe genug kommen, um sich gegenseitig stark genug zu beeinflussen und um dadurch das System zu destabilisieren.

Ein Beispiel für eine 1:1-Spin-Orbit-Resonanz ist das Erde-Mond-System. Hier stimmt die Orbitalperiode des Mondes mit der Dauer einer Umdrehung des Mondes um die Mondachse überein, sodass der Mond der Erde immer die selbe Seite zuwendet. Allgemein gilt für die meisten Trabanten in unserem Sonnensystem, dass sie dem jeweiligen Planeten, um den sie kreisen, immer die selbe Seite zuwenden. Lange Zeit vermutete man, dass sich auch Merkur in einer 1:1-Spin-Orbit-Resonanz mit der Sonne befindet. Es hat sich jedoch gezeigt, dass hier eine 3:2 Resonanz vorliegt.

Ein weiteres Beispiel für eine stabilisierende Resonanz in unserem Sonnensystem ist die 2:3 Resonanz zwischen Pluto und Neptun, die dafür sorgt, dass die beiden Himmelskörper immer

ausreichend weit von einander entfernt sind. Interessanterweise wurde diese Resonanz nicht durch Beobachtungen ermittelt (Pluto wurde 1930 entdeckt und bei einer siderischen Umlaufzeit von 251,9 Jahren wäre dies nicht möglich, da noch kein vollständiger Umlauf von Pluto um die Sonne beobachtet wurde), sondern durch numerische Berechnungen aus den entsprechenden Bewegungsgleichungen.

Auch Jupiter und Saturn zeigen resonantes Verhalten. Sie befinden sich in einer annähernden 5:2 Resonanz, die dazu führt, dass die Bahnelemente der beiden Planeten verändert werden. Die Zeitskala für diese Änderungen liegt im Bereich von 880 Jahren.

Im Jupitersystem selbst gibt es eine Orbit-Orbit-Resonanz zwischen drei galileischen Monden: Europa, Io und Ganymed.

Io befindet sich in einer 2:1 Resonanz mit Europa (diese Resonanz ist auch für den auf Io auftretenden Vulkanismus verantwortlich) während Europa sich wiederum in einer 2:1 Resonanz mit Ganymed befindet.

Die mittleren Bewegungen  $n$  für Io, Europa und Ganymed sind:

$$n_I=203,488992435^\circ\text{d}^{-1}, n_E=101,374761672^\circ\text{d}^{-1} \text{ und } n_G=50,317646290^\circ\text{d}^{-1}$$

Somit ergibt sich für die Resonanz zwischen Io und Europa

$$\frac{n_I}{n_E}=2,007294411 \quad (1.2)$$

und für die Resonanz zwischen Europa und Ganymed:

$$\frac{n_E}{n_G}=2,014696018 \quad (1.3)$$

bzw. der Kehrwert von (1.3):

$$\frac{n_G}{n_E}=\frac{1}{2}(1-0,007294411) \quad (1.4)$$

Mit diesen drei Gleichungen lässt sich nun folgender Zusammenhang ableiten:

$$n_I - 3n_E + 2n_G = 0 \quad (1.5)$$

Dies ist die so genannte Laplacebeziehung. Sie verhindert eine dreifache Konjugation der drei Monde dadurch, dass sobald zwei der Monde in Konjugation sind, der dritte zumindest  $60^\circ$  entfernt von den beiden in Konjugation stehenden Monden ist.

Im Saturnsystem zeigen sich vielfältige Resonanzen zwischen Monden, aber auch die Ringe befinden sich in Resonanz mit Saturn.

Die Saturnmonde Mimas und Tethys befinden sich in einer 4:2 Orbit-Resonanz (während Mimas vier vollständige Orbits ausführt, kommt Tethys auf zwei), und das Verhältnis ihrer mittleren Bewegungen ist

$$\frac{n_M}{n_T} = 2,003139 \quad (1.6)$$

Enceladus und Dione wiederum sind in einer 2:1 Resonanz:

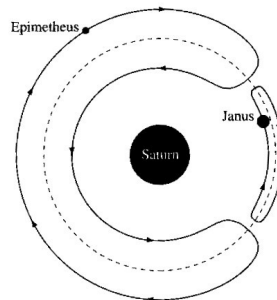
$$\frac{n_E}{n_D} = 1,997431 \quad (1.7)$$

Sowie Titan und Hyperion, die sich in einer 4:3 Resonanz befinden:

$$\frac{n_T}{n_H} = 1,334342 \quad (1.8)$$

Interessant ist auch die 1:1 Resonanz von Janus und Epimetheus. Die großen Halbachsen der beiden Monde betragen  $a_J = 151.472$  km bzw.  $a_E = 151.422$  km, also wären die Massenmittelpunkte bei der geringst möglichen Annäherung nur 50 km von einander entfernt. Da Janus einen Durchmesser von 175 km und Epimetheus von 105 km hat, müssten die beiden Monde unweigerlich kollidieren (da ja Epimetheus sich etwas schneller als Janus um den Saturn bewegt). Dies ist jedoch nicht der Fall. Sobald Epimetheus Janus fast eingeholt hat, kommt es zu einem Austausch von Drehimpulsanteilen, so dass Janus schneller und so auf die Bahn von Epimetheus verschoben wird, während Epimetheus Drehimpuls verliert und somit langsamer und auf die Bahn von Janus verschoben wird. Sobald sie einander näher kommen, wiederholt sich dieser Vorgang. Für einen mit rotierenden Beobachter würden die beiden Monde einen so

genannten Horseshoe-Orbit (Details siehe Murray & Dermott: Solar System Dynamics S. 97 ff) durchlaufen (s. Abbildung 1.1).



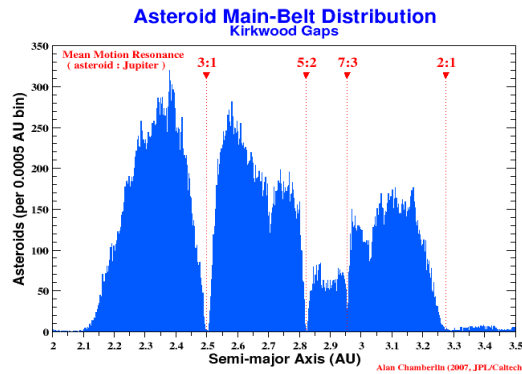
**Abb 1.1:** Horseshoe-Orbit von Janus und Epimetheus um Saturn im mit der mittleren Bewegung der beiden Monde rotierenden Bezugssystem. (Aus Murray & Dermott: Solar System Dynamics, Seite 114)

Beispiele für instabile, resonante Wechselwirkungen sind zum Beispiel jene im Asteroidengürtel mit Jupiter. Hier sind vor allem die 4:1 Resonanz bei 2,06 AE (die die innere Begrenzung des Asteroidengürtels darstellt) und die 2:1 Resonanz bei 3,3 AE (die die äußere Grenze bildet und auch als Hecuba-Lücke bezeichnet wird), sowie die Hestia-Lücke bei der 3:1 Resonanz sowie die 5:2 Resonanz. Diese Lücken sind jedoch nicht vollständig leer, sondern es befinden sich eine geringe Anzahl von Asteroiden in diesen Bereichen (s. Abbildung 1.2). Neben diesen Lücken bei Resonanzen gibt es aber auch Anhäufungen von Asteroiden wie zum Beispiel bei der 3:2 Resonanz oder die so genannten Trojaner in der 1:1 Resonanz, die sich auf  $60^\circ$  vor bzw. hinter Jupiter (den Lagrange- oder Librationspunkten  $L_4$  und  $L_5$ , s. Abbildung 1.3) auf einer gemeinsamen Bahn mit dem Planeten befinden.

Aber auch die Lücken zwischen den A- und B-Ringen des Saturn sind auf Resonanzen zwischen den Ringen und dem Mond Mimas zurück zu führen.

Allgemein gilt für Resonanzen, dass sie sich auf ein Bahnelement oder eine Kombination von Bahnelementen auswirken (wie z. B. Exzentrizität gegen große Halbachse) und dass sie auf verschiedenen Zeitskalen wirken können: von sehr kurzen Zeitperioden, im Verhältnis zur Umlaufzeit, über die Umlaufzeit selbst bis hin zu säkularen Zeitperioden ( $10^4$  bis  $10^6$  Jahren).

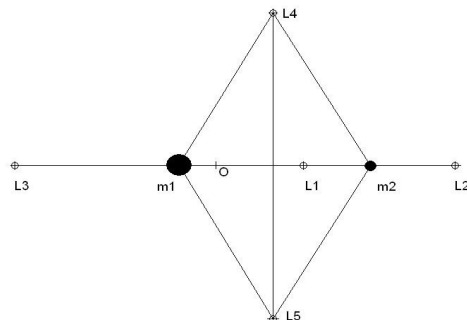




**Abb 1.2:** Verteilung der Asteroiden im Asteroidengürtel

(Aus: [http://ssd.jpl.nasa.gov/?histo\\_a\\_ast](http://ssd.jpl.nasa.gov/?histo_a_ast))

Diese Diplomarbeit beruht auf je einer Arbeit von Gregory Laughlin & John E. Chambers<sup>1</sup> und Michael Nauenberg<sup>2</sup>. Diese beiden Arbeiten beschäftigen sich mit extrasolaren Planeten in der 1:1 Resonanz. Im 3-Körper-Problem befindet sich dann einer der zwei Planeten oder Himmelskörper üblicherweise in einem der Lagrange-Punkte (s. Abbildung 1.3).



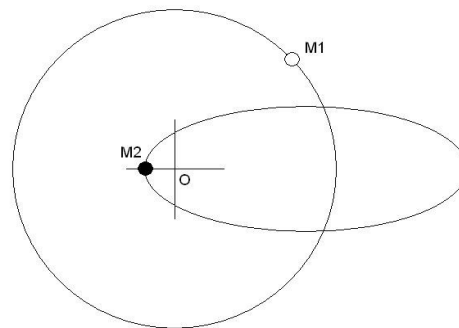
**Abb 1.3:** Die Lagrange-Punkte im 3-Körper-Problem, wobei  $O$  das Massenzentrum,  $L1$  bis  $L5$  die Lagrange-Punkte,  $m_1$  die Zentralmasse und  $m_2$  die Masse des Planeten sind.

Ein Körper, der in den Lagrange-Punkten platziert wird, erfährt keine Beschleunigung durch Gravitationskräfte, da sich die summierten Anziehungskräfte des Zentralgestirns ( $m_1$ ) und des Planeten ( $m_2$ ) mit der Zentrifugalkraft, die auf den Körper wirkt, aufheben.

Bestes Beispiel für eine Bewegung in den Lagrange-Punkten sind die Trojaner im Sonne-Jupiter-System. Die Trojaner sind ein Gruppe von Asteroiden, die sich auf der selben Umlaufbahn wie Jupiter befinden, aber da sie sich in  $L4$  befinden, also Jupiter um  $60^\circ$  vorausziehen, werden sie weder eingeholt noch aus der Umlaufbahn geworfen, da in Summe keine Kräfte auf die Körper wirken.

Eine detaillierte Abhandlung über die Lagrangepunkte und deren Ermittlung findet sich in Murray & Dermott „Solar System Dynamics“ S. 75 ff.

Es gibt noch eine zweite Möglichkeit eine 1:1 Resonanz zu erhalten, die nicht in den Lagrange-Punkten liegt. Dazu wählt man eine recht außergewöhnliche Ausgangskonfiguration: Während sich ein Planet auf einer kreisförmigen Umlaufbahn befindet, startet ein zweiter Planet auf einer Bahn mit hoher Exzentrizität. Beide Bahnen haben die selbe große Halbachse, woraus sich nach dem dritten Kepler'schen Gesetz ergibt, dass beide Planeten die selbe Orbitalperiode besitzen. Diese Konfiguration befindet sich in einer „exzentrischen Resonanz“<sup>14</sup> (s. Abbildung 1.4).



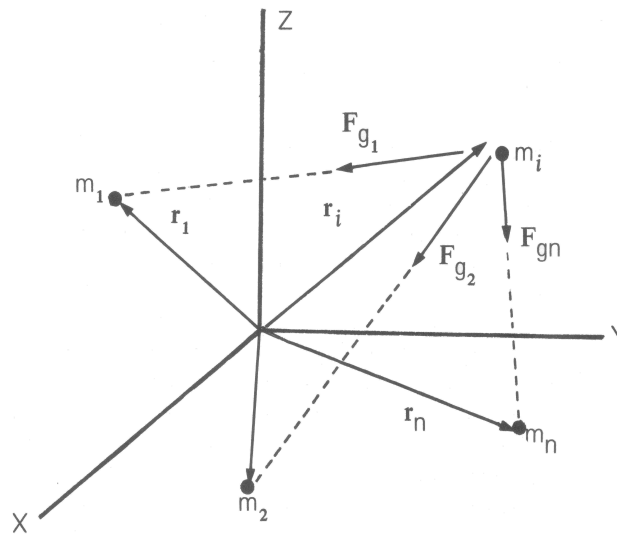
**Abb 1.4:** Exzentrische Resonanz. Während Planet M1 sich auf einer kreisförmigen Umlaufbahn befindet, startet M2 auf einer hoch-exzentrischen Bahn. O bezeichnet den Massenmittelpunkt des Systems (Aus: Laughlin & Chambers: *Extrasolar Trojans: The Viability and Detectability of Planets in the 1:1 Resonance*, *The Astrodynamical Journal*, 124, Seite 595).

Sind die Anfangsbedingungen entsprechend gewählt, sodass sich die Planeten nicht zu nahe kommen und dadurch das System gestört und in weiterer Folge zerstört wird (die Planeten beeinflussen sich gegenseitig durch Gravitationskräfte, jedoch in einer konstruktiven Art und Weise), entsteht das Phänomen, dass die Planeten ihre Bahnen (bzw. die Exzentrizitäten der Bahnen) austauschen. Dies erfolgt solange, bis der anfangs kreisförmige Orbit die Startexzentrizität des anderen Planeten erreicht hat und der anfangs mit hoher Exzentrizität laufende Planet sich auf einer kreisförmigen Bahn befindet. Dieser Vorgang wiederholt sich nun fortlaufend, sodass einmal ein Planet sich auf einer exzentrischen Bahn befindet und der andere Planet auf einer kreisförmigen Bahn und umgekehrt. Die Änderung der Bahnen erfolgt dabei durch Drehimpulsübertragung.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit solchen „exzentrischen Resonanzen“, und es war die Aufgabe, jene Bereiche zu finden, in denen diese Konfigurationen nicht stabil sind. Zuerst wurde untersucht, ob es einen Zusammenhang zwischen *mittlerer Anomalie*  $M$  und *Exzentrizität*  $e$  bei verschiedenen Massen gibt und wie dieser Zusammenhang aussieht. Auch wurde nach einem Zusammenhang zwischen Masse und mittlerer Anomalie bei verschiedenen Exzentrizitäten gesucht. Auch der Einfluss der Inklination wurde überprüft.

## 2 Das N-Körperproblem

Das allgemeine N-Körperproblem der Himmelsmechanik (s. Abbildung 2.1) stellt ein Anfangswertproblem für einfache Differentialgleichungen dar. Die Anfangswerte für Ort und Geschwindigkeit sind  $\vec{r}_i(0)$  und  $\dot{\vec{r}}_i(0)$  für  $i=1\dots N$  wobei gelten muss, dass  $\vec{r}_i(0) \neq \vec{r}_j(0)$  für  $i \neq j$ .



**Abb 2.1:** Das N-Körper-Problem (Aus: R. R. Bate, D., D. Mueller & J. E. White: *Fundamentals of Astrodynamics*, S. 6)

Die Bewegungsgleichung für  $N$  massebehaftete Körper im Gravitationsfeld lautet

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3}, i=1 \dots N \quad (2.1)$$

wobei  $k$  die Gauss'sche Gravitationskonstante darstellt. Für  $k$  gilt:

$$k = 0,01720209895 A^{\frac{3}{2}} D^{-1} M_{\odot}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

$A$ ... Länge in AE (Astronomischen Einheiten)

$D$ ... Zeit in ephemerischen Tagen (mittlere Dauer eines Sonnentages)

$M_{\odot}$  ... in Sonnenmassen

Der Vorteil der Gauss'schen Gravitationskonstante liegt darin, dass zur Berechnung der Bewegungen von Planeten im Sonnensystem die Werte für die Astronomische Einheit in Metern und die Masse der einzelnen Körper in Kilogramm nicht bekannt sein müssen.

Auf der linken Seite der Bewegungsgleichung steht das 2. Newtonsche Axiom, das also auf den  $i$ -ten Körper mit der Masse  $m_i$  mit der Beschleunigung  $\ddot{\vec{r}}_i$  wirkt und somit eine Kraft, die gleich der Summe der durch die anderen Kräfte verursachte Gravitationskraft auf den  $i$ -ten Körper ist. Zur Berechnung der Gravitationskräfte wird Newtons Gravitationsgesetz für Punktmassen herangezogen. Die 3. Potenz im Nenner rührt daher, dass zur Bestimmung der Richtung der Gravitationskraft der Zähler mit dem Differenzvektor  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  multipliziert wird.

Weiters ergibt sich das Problem, dass bei sehr kleinen Abständen der Punktmassen auch der Nenner des Gravitationsgesetzes sehr klein wird („small denominator“), was bei der Berechnung (z. B. mittels eines Computerprogramms) unter Umständen zu Problemen führt. Es empfiehlt sich daher eine einfache Variablentransformation, wie sie unter Punkt 3.2 gezeigt wird.

Das  $N$ -Körperproblem hat  $6N$  Variablen (je 3 Orts- und Geschwindigkeitsvariable für jede Punktmasse). Das heißt, man würde  $6N$  unabhängige algebraische Gleichungen bzw. lösbar Integrale benötigen, um dieses Gleichungssystem zu lösen. In Summe stehen aber nur 10 Integrale zu Verfügung: 3 für das Massenzentrum, 3 für die Impulserhaltung, 3 für den Drehimpulserhaltung und eines für die Energieerhaltung. Das bedeutet, man kann das Gleichungssystem für  $N \geq 3$  auf  $6N-10$  Variable verkleinern aber nicht algebraisch lösen. Mit numerischen Integrationsmethoden ist es jedoch möglich, über einen bestimmten Zeitraum Aussagen über das Verhalten des Systems zu machen, ob es chaotisch bzw. instabil wird oder für die Integrationsdauer stabil ist (ob das System wirklich immer stabil ist kann mit numerischer Integration nicht bestimmt werden, da nach einer zwar frei wählbaren aber endlichen Zeit die Integration beendet werden muss). Es gibt für  $N=3$  einen Spezialfall der algebraisch lösbar ist: Das so genannte eingeschränkte 3 Körperproblem. Hier wird eine Punktmasse als masselos und auf einer kreisförmigen Umlaufbahn angenommen.

Im nächsten Kapitel wird die in dieser Arbeit verwendete numerische Integrationsmethode erklärt. Dabei handelt es sich um den Lie-Integrator.

### 3 Der Lie-Integrator

Das Lie-Integrationsverfahren wurde aufgrund der Arbeiten von Sophus Lie entwickelt und ist ein numerisches Verfahren zur Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung. Der Unterschied zu anderen numerischen Verfahren besteht darin, dass die Gleichungen durch Differenzieren gelöst werden und nicht durch Integration.

Zuerst einige Definitionen:

Der Lie-Operator  $D$  ist definiert als:

$$D = \Theta_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \Theta_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + \Theta_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n} \quad (3.1)$$

Wobei für

$$\Theta_i = \frac{dz_i}{dt}, \quad i = 1 \dots n \quad (3.2)$$

gilt und  $\Theta_i(z)$  holomorph ist (also in eine Potenzreihe entwickelt werden kann).

Die Anwendung des Lie-Operators  $D$  auf eine Funktion  $f(z)$  sieht dann folgendermaßen aus:

$$D(f) = \Theta_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \Theta_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \dots + \Theta_n \frac{\partial f}{\partial z_n} \quad (3.3)$$

Die Lie-Reihe  $L(z,t)$  wird nun als Potenzreihe definiert:

$$L(z,t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v f(z) = f(z) + t D f(z) + \frac{t^2}{2!} D^2 f(z) + \dots \quad (3.4)$$

Wobei  $D^n$  die n-fache Anwendung des Lie-Operators auf die Funktion  $f(z)$  bedeutet. Was auffällt ist, dass die Definition der Lie-Reihe  $L(z,t)$  der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion mit dem Exponenten  $tD$  und multipliziert mit  $f(z)$  gleicht. Somit lässt sich die Lie-Reihe symbolisch auch auf folgende Weise anschreiben:

$$L(z,t) = e^{tD} f(z) \quad (3.5)$$

Für die Anwendung des Lie-Operators als numerischen Integrator ist die Anwendung des Vertauschungssatzes notwendig.

Dieser lautet:

Es sei  $F : G \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine holomorphe Funktion. Die in  $z \in G$  entwickelte Potenzreihe von  $F$  konvergiere im Punkt  $Z \in G$  mit

$$Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} z = e^{tD} z \quad (3.6)$$

Wobei die rechte Seite der Gleichung (3.6) aus den Gleichungen (3.4) und (3.5) folgt. Somit gilt

$$F(Z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} F(z) \quad (3.7)$$

Mit (3.4) bis (3.6) kann die letzte Gleichung umgeformt werden zu

$$F(e^{tD} z) = e^{tD} F(z) \quad (3.8)$$

Gleichung (3.8) zeigt, dass die Anwendung von  $e^{tD}$  und  $F$  ausgetauscht werden kann (daher die Bezeichnung Vertauschungssatz).

### ***3.1 Anwendung des Lie-Operators zur numerischen Integration***

Hat man nun ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung, so sieht die Lösung dieser Gleichungen mit Hilfe der Lie-Integration wie folgt aus:

Die Differentialgleichungen erster Ordnung lauten

$$\frac{dz_i}{dt} = \Theta_i(z) \quad i=0\dots n \quad (3.9)$$

Die Lösung dieser Gleichungen durch eine Lie-Reihe wird so geschrieben:

$$z_i = e^{tD} \xi_i \quad (3.10)$$

wobei die  $\xi_i$  gleich den Anfangsbedingungen  $z_i(t=t_0)$  sind.

Der Beweis dafür sieht folgendermaßen aus:

Zuerst wird die Gleichung (3.10) für die  $z_i$  nach der Zeit  $t$  abgeleitet

$$\frac{dz_i}{dt} = D e^{tD} \xi_i \quad (3.11)$$

Mit dem Vertauschungssatz (3.8) kann die rechte Seite der Gleichung (3.11) so umgeschrieben werden:

$$D e^{tD} \xi_i = e^{tD} D \xi_i \quad (3.12)$$

Mit Hilfe der Definition des Lie-Operators erhält man

$$D \xi_i = \Theta_i(\xi_i) \quad (3.13)$$

und damit, eingesetzt in Gleichung (3.11) und der nochmaligen Verwendung des Vertauschungssatzes, folgt

$$\frac{dz_i}{dt} = e^{tD} \Theta_i(\xi_i) = \Theta_i(e^{tD} \xi_i) = \Theta_i(z_i) \quad (3.14)$$

Womit gezeigt wird, dass Gleichung (3.10) die Lösung des Gleichungssystems von Differentialgleichungen 1. Ordnung (3.9) ist.

### 3.2 Anwendung des Lie-Integrators auf das N-Körperproblem

Die Bewegungsgleichung des N-Körperproblems (2.1) ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Um nun die Lie-Integration anwenden zu können, zerlegt man die Differentialgleichungen 2. Ordnung in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung. Dazu dividiert man Gleichung (2.1) durch die Masse  $m_i$  und schreibt die Differentialgleichungen folgendermaßen um:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i \quad (3.15)$$

$$\dot{\vec{v}}_i = -k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3} \quad i=1 \dots N \quad (3.16)$$

Weiters benennt man die Anfangsbedingungen wie folgt um:

$$r_j^k(T-1) = \xi_j^k \quad j=1 \dots N, k=1,2,3 \quad (3.17)$$



für die Ortsvektoren, wobei der hochgestellte Index  $k$  für die  $k$ -te Komponente zum Zeitpunkt  $T-1$  des Ortsvektors steht. Und für den Geschwindigkeitsvektor führt man folgende Schreibweise ein:

$$v_j^k(T-1) = \eta_j^k \quad (3.18)$$

Da in der Bewegungsgleichung die Differenzen der Ortsvektoren vorkommen, kann man diese Differenzen in einer neuen Variable zusammenfassen:

$$\xi_{ij}^k = \xi_j^k - \xi_i^k \quad (3.19)$$

Die Norm der Abstände zwischen jeweils zwei Massen ersetzt man durch:

$$\rho_{ij} = \|\vec{\xi}_j - \vec{\xi}_i\| = \|\vec{\xi}_{ji}\| \quad (3.20)$$

Somit ergibt sich nun für die beiden Differentialgleichungen 1. Ordnung (3.6 und 3.7) folgende Schreibweise:

$$\dot{\xi}_i^k = \eta_i^k \quad (3.21)$$

$$\dot{\eta}_i^k = -k^2 \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{m_j \xi_{ij}^k}{\rho_{ij}^3} \quad (3.22)$$

Nun kann wie unter 3. beschrieben der Lie-Operator  $D$  erstellt werden (Hanslmeier, Dvorak, 1984):

$$D = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^N \left( \eta_i^k \frac{A}{A \xi_i^k} - k^2 \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j \xi_{ji}^k \rho_{ji}^{-3} \frac{A}{A \eta_i^k} \right) \quad (3.23)$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen für Orts- und Geschwindigkeitsvektor (s. Gleichung (3.10)) haben folgende Form (die Zeit  $T$  wurde transformiert zu  $t=k\chi T$ ,  $k$  steht für die Gravitationskonstante):

$$r_i^k(t) = \xi_i^k(t) = e^{\Delta t D} \xi_i^k(t-1) \quad (3.24)$$

$$v_i^k(t) = \eta_i^k(t) = e^{\Delta t D} \eta_i^k(t-1) \quad (3.25)$$

Wobei  $\Delta t$  für den gewählten Zeitschritt steht.

Allerdings ist diese Form für die Lösungen so noch nicht verwendbar. Daher ersetzt man die

Exponentialfunktion durch ihre Reihenentwicklung für den Ort

$$\begin{aligned}\xi_i^k(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta t D)^n}{n!} \right) \xi_i^k(t-1) = \\ &= \left( 1 + \Delta t D + \frac{\Delta t^2}{2!} D^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} D^3 + \dots + O\left(\frac{\Delta t^n}{n!} D^n\right) \right) \xi_i^k(t-1)\end{aligned}\quad (3.26)$$

und für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}\eta_i^k(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta t D)^n}{n!} \right) \eta_i^k(t-1) = \\ &= \left( 1 + \Delta t D + \frac{\Delta t^2}{2!} D^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} D^3 + \dots + O\left(\frac{\Delta t^n}{n!} D^n\right) \right) \eta_i^k(t-1)\end{aligned}\quad (3.27)$$

und es gilt  $D^2 \xi_i^k = D(D \xi_i^k)$ .

Die ersten drei Terme der Lie-Reihe lauten also:

$$D^0 \xi_i^k = \xi_i^k \quad (3.28)$$

$$D^1 \xi_i^k = \eta_i^k \quad (3.29)$$

$$D^2 \xi_i^k = \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (\xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-3}) \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}D^3 \xi_i^k &= \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (D \xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-3} + \xi_{ij}^k D \rho_{ij}^{-3}) \\ &= \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (D \xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-3} - 3 \xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-4} D \rho_{ij}) \\ &= \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (D \xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-3} - 3 \xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-4} \rho^{-1} \sum_{k=1}^3 \xi_{ij}^k \eta_{ij}^k) \\ &= \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (D \xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-3} - 3 \xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-5} \sum_{k=1}^3 \xi_{ij}^k \eta_{ij}^k)\end{aligned}\quad (3.31)$$

An dieser Stelle werden zwei neue Variablen  $\phi$  und  $\Lambda$  eingeführt (Hanslmeier, Dvorak, 1984):

$$\phi_{ij} = \rho_{ij}^{-3} \quad (3.32)$$

$$\Lambda_{ij} = \sum_{k=3}^3 \xi_{ij}^k \eta_{ij}^k = \sum_{k=1}^3 \xi_{ij}^k D \xi_{ij}^k \quad (3.33)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.31) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
D^3 \xi_i^k &= \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (D \xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-3} + \xi_{ij}^k D \rho_{ij}^{-3}) \\
&= \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (\phi_{ij} D \xi_{ij}^k + D \phi_{ij} \xi_{ij}^k) \\
&= \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (D \xi_{ij}^k \phi_{ij} - 3 \xi_{ij}^k \rho_{ij}^{-2} \phi_{ij} \Lambda_{ij})
\end{aligned} \tag{3.34}$$

wobei für  $D \phi_{ij} = -3 \rho_{ij}^{-2} \phi_{ij} \Lambda_{ij}$  gilt.

Hier kommt nun der zweite Vorteil der Lie-Reihen zum Tragen. Neben der Tatsache, dass anstatt zu integrieren die Lie-Reihen durch Differenzieren entstehen, kann man weiters alle Lie-Terme der Lie-Reihe aufgrund einer Rekursionsformel aus den Vorgängertermen ermitteln. Dies sei kurz anhand der Terme für  $D^3 \xi_i^k$ ,  $D^4 \xi_i^k$ ,  $D^5 \xi_i^k$  illustriert:

$$D^3 \xi_i^k = \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (\phi_{ij} D \xi_{ij}^k + D \phi_{ij} \xi_{ij}^k) \tag{3.35}$$

$$D^4 \xi_i^k = \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (\phi_{ij} D^2 \xi_{ij}^k + 2 D \phi_{ij} D \xi_{ij}^k + D^2 \phi_{ij} \xi_{ij}^k) \tag{3.36}$$

$$D^5 \xi_i^k = \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j (\phi_{ij} D^3 \xi_{ij}^k + 3 D \phi_{ij} D^2 \xi_{ij}^k + 3 D^2 \phi_{ij} D \xi_{ij}^k + D^3 \phi_{ij} \xi_{ij}^k) \tag{3.37}$$

Nun lässt sich bereits ein Grundschema erahnen, wie die einzelnen Lie-Terme aus den vorhergehenden über ein Rekursionsformel zu berechnen sind. Diese Rekursionsformeln lauten:

$$D^n \xi_i^k = \sum_{j=1, i \neq j}^N m_j \sum_{v=0}^{n-2} \binom{n-2}{v} D^v \phi_{ij} D^{n-2-v} \xi_{ij}^k \tag{3.38}$$

für die  $D^n \xi_i^k$  und für die  $D^n \phi_{ij}$

$$D^n \phi_{ij} = \rho_{ij}^{-2} \sum_{v=0}^{n-1} a_{n,v+1} D^{n-1-v} \phi_{ij} D^v \Lambda_{ij} \tag{3.39}$$

Die Koeffizienten  $a$  werden folgendermaßen ermittelt:

$$\begin{aligned}
a_{n,1} &= a_{n-1,1} - 2 & n > 1 \\
a_{n,v} &= a_{n-1,v-1} + a_{n-1,v} & 1 < v < n-1 \\
a_{n,n} &= -3 & \forall n
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Auch für die  $D^n \Lambda_{ij}$  kann eine Rekursionsformel verwendet werden:

$$D^n \Lambda_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{v=0}^{nint\left(\frac{n}{2}\right)} b_{n,v} D^v \xi_{ij}^k D^{n+1-v} \xi_{ij}^k \quad (3.41)$$

Die Koeffizienten  $b_{n,v}$  erhält man durch

$$\begin{aligned} b_{n,0} &= 1 & \forall n \\ b_{n,v} &= b_{n-1,v-1} + b_{n-1,v} & 1 < v < nint\left(\frac{n}{2}\right) \\ b_{n, nint\left(\frac{n}{2}\right)} &= b_{n-1, nint\left(\frac{n}{2}\right)-1} & n \text{ ungerade} \\ b_{n, nint\left(\frac{n}{2}\right)} &= 2b_{n-1, nint\left(\frac{n}{2}\right)} + b_{n-1, nint\left(\frac{n}{2}\right)-1} & n \text{ gerade} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Aus Hanslmeier, A. & Dvorak, R.: Numerical integration with Lie-series. Astronomy and Astrophysics 132, S. 203-207 (1984)

## 4 Die Bahnelemente

Zur Beschreibung der Bahn eines um das Zentralgestirn kreisenden Körpers dienen die so genannten keplerschen Bahnelemente (siehe Abbildung 4.1):

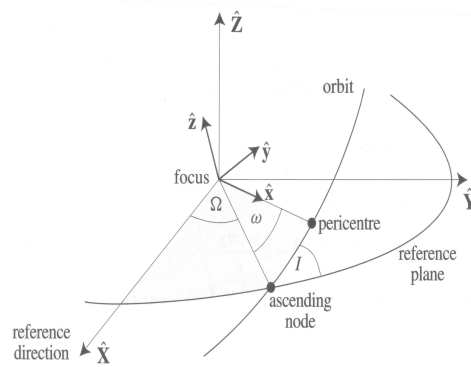
- 1.) Die große Halbachse  $a$ : Radius des Umkreises der Ellipse
- 2.) Exzentrizität  $e$  der Ellipse (wobei für den sonnennächsten Punkt die Periheldistanz  $a(1-e)$  gilt und die Apheldistanz, der sonnenfernste Punkt der Bahn, sich durch  $a(1+e)$  ergibt)
- 3.) Neigung der Bahnebene  $i$  gegenüber der Ekliptik
- 4.) Länge des aufsteigenden Knotens  $\Omega$ : Der aufsteigende Knoten ist jener Punkt, an dem der Himmelskörper die Ekliptik auf dem Weg von „Süd“ nach „Nord“ durchstößt (s. Abbildung 4.1).
- 5.) Winkelabstand  $\omega$  des Perihels vom aufsteigenden Knoten
- 6.) Periode  $P$  (siderische Umlaufzeit in Jahren) bzw. die mittlere Bewegung  $n$  in Grad oder Bogensekunden pro Tag gemessen
- 7.) Zeitpunkt des Periheldurchgangs  $T$

Während  $a$  und  $e$  die Größe und Form der Bahn beschreiben, legen  $i$  und  $\Omega$  die Bahnebene und  $\omega$  die Lage der Bahn in ihrer Ebene fest. Die Bewegung selbst wird durch  $n$  und  $T$  beschrieben (Aus „Der Neue Kosmos“ S. 22 ff).

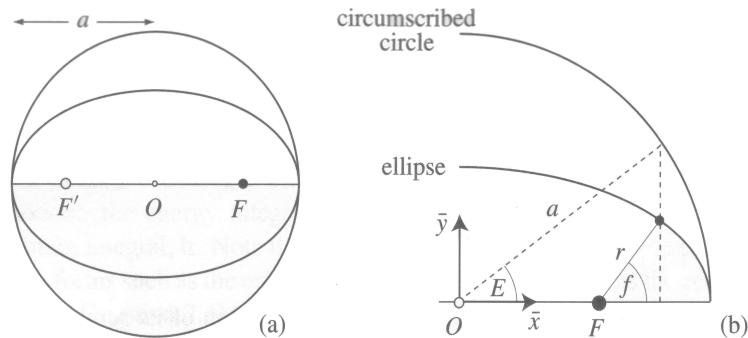
Weiters sei noch die so genannte Länge des Perihels  $\varpi$  erwähnt. Dies ist die Summe aus der Länge des aufsteigenden Knotens  $\Omega$  und dem Abstand des Perihels vom Knoten  $\omega$ :

$$\varpi = \Omega + \omega \quad (4.1)$$

Da ja  $\Omega$  in der Referenzebene liegt und  $\omega$  in der Bahnebene (s. Abbildung 4.1), ist klar, dass  $\varpi$  kein direkt messbarer Winkel ist, sobald die Bahnebene um eine Inklination  $i$  gegen die Referenzebene gekippt ist (siehe Abbildung 4.1).



**Abb 4.1:** Orbitalbewegung eines Himmelskörpers im 3-dimensionalen Raum bezüglich der Referenzebene. Die Inklination  $i$  wurde in diesem Bild mit  $I$  bezeichnet. (Aus Murray & Dermott: *Solar System Dynamics*, 1999, S. 48)



**Abb 4.2:** (a) Der umschreibende, konzentrische Kreis hat den Radius  $a$ , welcher wiederum gleich der großen Halbachse der Ellipse ist;  $O$  ist der Mittelpunkt sowohl des Kreises als auch der Ellipse;  $F$  und  $F'$  sind die beiden Brennpunkte der Ellipse. (b) Zusammenhang zwischen wahrer Anomalie  $f$  und exzentrischer Anomalie  $E$ . (Aus Murray & Dermott: *Solar System Dynamics*, 1999, S. 32)

Eine weitere wichtige Größe stellt die *mittlere Anomalie*  $M$  dar. Diese ist über die mittlere Bewegung  $n$  definiert:

$$M = n(t - \tau) \quad (4.2)$$

Wobei für  $n$  gilt:

$$n = \frac{360^\circ}{T} \quad (4.2.1)$$

$T$  ist die Orbitalperiode in Tagen  $d$ , sodass sich für die Einheit von  $[n] = [^\circ d^{-1}]$  ergibt.

$\tau$  ist der *Zeitpunkt des Periheldurchgangs* und  $t$  ein beliebiger Zeitpunkt. Obwohl die mittlere Anomalie  $M$  die Dimension eines Winkels hat (da ja  $n$  in Einheiten von Grad oder alternativ

Bogensekunden pro Zeiteinheit gemessen wird), gibt es für  $M$  keine einfache geometrische Interpretation.

Man kann jedoch einen mathematischen Zusammenhang zwischen mittlerer Anomalie  $M$  und der *exzentrischen Anomalie*  $E$  (siehe Abbildung 4.2b) herstellen (siehe auch Murray & Dermott Solar System Dynamics Seite 32 ff).

Dazu verwenden wir zuerst die Mittelpunktsleichung für Ellipsen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.3)$$

Wie aus Abbildung 4.2(b) ersichtlich ist, können wir für die Koordinate  $x$

$$x = a(\cos E - e) \quad (4.4)$$

schreiben. Eingesetzt in (4.3) und nach  $y^2$  umgeformt erhält man

$$y^2 = b^2(1 - \cos^2 E) = b^2 \sin^2 E \quad (4.5)$$

Die kleine und große Halbachse sind durch die Gleichung

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (4.6)$$

in Relation gesetzt.

Dadurch folgt für

$$y = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (4.7)$$

Daraus folgt nun für  $r$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 - e \cos E) \quad (4.8)$$

Weiters gilt der Zusammenhang zwischen *wahrer Anomalie*  $f$  und exzentrischer Anomalie  $E$  (für Details siehe Murray and Dermott Solarsystem Dynamics Seite 32):

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (4.9)$$

Wenn man Gleichung (4.9) mit  $x(-1)$  multipliziert und auf beiden Seiten +1 addiert erhält man:

$$1 - \cos f = \frac{e - \cos E}{1 - e \cos E} + 1 = \frac{e - \cos E + 1 - e \cos E}{1 - e \cos E} = \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{1 - e \cos E} \quad (4.10)$$

Auf ähnliche Weise erhält man:

$$1 + \cos f = \frac{(1 - e)(1 + \cos E)}{1 - e \cos E} \quad (4.11)$$

Nun kann die Gleichung für doppelte und halbe Winkel verwendet werden:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \quad (4.12)$$

Angewendet auf die Gleichungen (4.10) und (4.11) erhält man

$$2\sin^2 \frac{f}{2} = \frac{1 + e}{1 - e \cos E} 2\sin^2 \frac{E}{2} \quad (4.13)$$

und

$$2\cos^2 \frac{f}{2} = \frac{1 - e}{1 - e \cos E} 2\cos^2 \frac{E}{2} \quad (4.14)$$

Nun wird Gleichung (4.13) durch die Gleichung (4.14) dividiert und man erhält so

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2} \quad (4.15)$$

Somit erhält man eine Gleichung, die bei bekannter exzentrischer Anomalie  $E$  die wahre Anomalie  $f$  und über Gleichung (4.8) den Abstand  $r$  eines Punktes auf der Ellipse vom Brennpunkt der Ellipse liefert. Um nun heraus zu finden, wo sich ein Körper zu Zeitpunkt  $t$  auf seinem Orbit befindet, benötigt man noch eine Beziehung zwischen der mittleren Anomalie  $M$  und der exzentrischen Anomalie  $E$ .

Wir verwenden zuerst folgende Gleichung für die Länge des Tangentialgeschwindigkeitsvektors  $\dot{\vec{r}}$ :

$$\|\dot{\vec{r}}\|^2 = v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 \quad (4.16)$$

Weiters verwendet man folgende Relationen (für die exakte Herleitung siehe Murray & Dermott Seite 30 ff):



$$r \dot{f} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos f) \quad (4.17)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \quad (4.18)$$

$$v^2 = n^2 a^3 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (4.19)$$

die wir in (4.16) einsetzen und somit

$$\dot{r}^2 = n^2 a^3 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{n^2 a^4 (1-e^2)}{r^2} \quad (4.20)$$

erhalten bzw. nach Wurzelziehen und ausschreiben des Differentials

$$\frac{dr}{dt} = \frac{na}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2} \quad (4.21)$$

Substitution von  $(r-a)$  in Gleichung (4.21) durch Umformung der Gleichung (4.8) nach

$$r-a = -ae \cos E \quad (4.22)$$

führt zu einer Differentialgleichung in der exzentrischen Anomalie  $E$ :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1-e \cos E} \quad (4.23)$$

Diese Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden, und man erhält mit der Anfangsbedingung  $t(0)=\tau$ , den Zeitpunkt des Perizenterdurchgangs,

$$n(t-\tau) = E - e \sin E = M \quad (4.24)$$

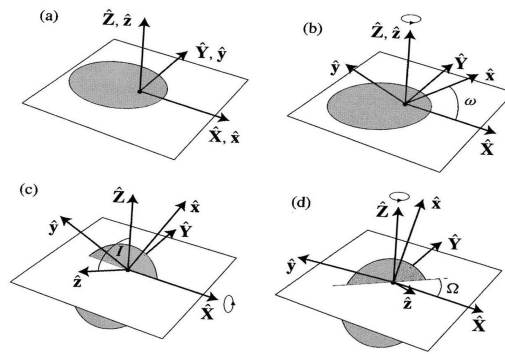
wenn man noch Gleichung (4.2) einsetzt.

Gleichung (4.24) wird Kepler Gleichung genannt. Diese Gleichung muss gelöst werden, um die Orbitalposition eines Himmelskörpers zu einer bestimmten Zeit  $t$  berechnen zu können. Da jedoch die exzentrische Anomalie auch in der Sinus-Funktion enthalten ist, kann die Gleichung (ausgenommen für ganzzahlige Vielfache der Zahl  $\pi$ ) nicht analytisch gelöst werden. Es gibt verschiedene numerische Methoden, um diese Gleichungen zu lösen (z. B. mit Hilfe der Newton-Raphson-Methode oder mittels einer Taylorreihen-Entwicklung; detaillierte Beschreibungen zu diesen und anderen Methoden sind unter anderem bei Danby & Burkardt (1983) zu finden).

## 4.1 Umwandlung von Bahnelementen in x-y-z-Koordinaten

Allgemein betrachtet ist ein Orbit eine dreidimensionale Bewegung im Raum (s. Abbildung 4.1), die in der Orbitalebene bezüglich einer Referenzebene stattfindet (s. Abbildung 4.1 und Abbildung 4.3).

Um die Bahnelemente in kartesische x-y-z-Koordinaten umwandeln zu können, betrachtet man das Koordinatensystem  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  der Orbitalebene als dreifach rotiert gegenüber dem Koordinatensystem der Referenzebene (s. Abbildung 4.3). Der Positionsvektor eines beliebigen Punktes ergibt sich natürlich zu  $\vec{r} = (x, y, z) = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ .



**Abb 4.3:** Zusammenhang zwischen den Einheitsvektoren  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$  und den Winkeln  $I, \omega$  und  $\Omega$  in einem dreidimensionalen Orbit. a) Orbit- und Referenzebene stimmen überein, daher auch die Koordinatenachsen des ursprünglichen und transformierten Koordinatensystems. Die Transformation von einer Bewegung in der Referenzebene in eine dreidimensionale Bewegung kann durch drei aufeinander folgende Rotationen erreicht werden (b): erstens eine Rotation um die  $\hat{Z}$  Achse um den Winkel  $\omega$ . (c) Im zweiten Schritt erfolgt eine Drehung um den Winkel  $I$  um die  $\hat{X}$  Achse. (d) Schließlich erfolgt noch eine Drehung um die  $\hat{Z}$  Achse um den Winkel  $\Omega$  (aus Murray & Dermott: Solar System Dynamics S. 50)

Die Rotation kann durch drei 3x3 Rotationsmatrizen dargestellt werden:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & -\cos I \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

Somit folgt für die Transformation aus dem Orbitalebeneensystem  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  in das Referenzebenenensystem  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

bzw. für die Transformation aus dem Referenzebenenensystem in das Orbitalebeneensystem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_3^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

Wenn man sich schließlich nur auf Koordinaten beschränkt, die in der Orbitalebene liegen, ergibt sich für Gleichung (4.1.4):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.6)$$

bzw. nach ausmultiplizieren der Transformationsmatrizen:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I \\ \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I \\ \sin(\omega + f) \sin I \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

wobei sich  $r$  aus

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} = a(1-e \cos E) \quad (4.1.8)$$

ergibt. (Aus Murray & Dermott: „Solar System Dynamics“, 1999, S. 32 ff)

## 4.2 Umrechnung von x-y-z-Koordinaten in Bahnelemente

Vor der eigentlichen Umwandlung der Bahnelemente einige Definitionen der im weiteren Verlauf verwendeten Formeln und Formelzeichen:

Der Betrag des Radiusvektors  $R$ :

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (4.2.1)$$

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors  $V$ :

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 \quad (4.2.2)$$

Skalar-Produkt von Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{R} \cdot \dot{\vec{R}} = X \dot{X} + Y \dot{Y} + Z \dot{Z} \quad (4.2.3)$$

Das Vektorprodukt von Radius- und Geschwindigkeitsvektor  $\vec{h} = \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$ :

$$\vec{h} = (Y \dot{Z} - Z \dot{Y}, Z \dot{X} - X \dot{Z}, X \dot{Y} - Y \dot{X}) \quad (4.2.4)$$

Sowie die Änderungsrate des Radiusvektors:

$$\dot{R} = \pm \sqrt{V^2 - \frac{h^2}{R^2}} \quad (4.2.5)$$

Das Vorzeichen von  $\dot{R}$  ist gleich dem Vorzeichen des Skalarprodukts  $\vec{R} \cdot \dot{\vec{R}}$ .

Vom Vektor  $\vec{h} = (h_x, h_y, h_z)$  werden noch die Projektionen auf die Koordinatenebenen benötigt:

$$h \cos I = h_z \quad (4.2.6)$$

$$h \sin I \sin \Omega = \pm h_x \quad (4.2.7)$$

$$h \sin I \cos \Omega = \mp h_y \quad (4.2.8)$$

Wobei sich  $h$  nicht nur aus der Norm des Vektorprodukts (4.2.4) ergibt, sondern auch durch:

$$h = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad (4.2.9)$$

mit

$$\mu = n^2 a^3 \quad (4.2.10)$$

Wobei (4.2.10) das dritte Kepler'sche Gesetz darstellt.

Das obere Vorzeichen in den Gleichungen (4.2.7) und (4.2.8) wird verwendet, wenn für  $h_z > 0$  gilt und das untere für  $h_z < 0$ .

Zuerst wird die große Halbachse  $a$  mit Hilfe der Gleichungen (4.20), (4.2.1) und (4.2.2) berechnet:

$$a = \left( \frac{2}{R} - \frac{V^2}{G(m_1 + m_2)} \right)^{-1} \quad (4.2.11)$$

Wobei  $G$  die Gravitationskonstante,  $m_1$  die Zentralmasse und  $m_2$  die Planetenmasse (bzw. die Masse des Himmelskörpers, der sich im Orbit um das Zentralgestirn befindet) sind.

Nun kann die Exzentrizität  $e$  unter der Verwendung von den Gleichungen (4.2.9) und (4.2.11) berechnet werden:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{G(m_1 + m_2)a}} \quad (4.2.12)$$

Die Inklination  $I$  erhält man durch Umformung der Gleichung (4.2.6):

$$I = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right) \quad (4.2.13)$$

Die Länge des aufsteigenden Knotens  $\Omega$  erhält man durch Umformung aus den Gleichungen (4.2.7) und (4.2.8):

$$\sin \Omega = \frac{\pm h_x}{h \sin I} \quad (4.2.14)$$

und

$$\cos \Omega = \frac{\mp h_y}{h \sin I} \quad (4.2.15)$$

Die Wahl des Vorzeichens in den Gleichungen (4.2.14) und (4.2.15) hängt, wie bereits oben erwähnt, vom Vorzeichen von  $h_z$  ab.

Aus der Rotationsmatrix (4.1.7) kann nun eine Formel für die Summe von Winkelabstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten und wahrer Anomalie  $\omega+f$  abgeleitet werden (man beachte, dass  $r=R$  gilt):

$$\sin(\omega+f) = \frac{Z}{R \sin I} \quad (4.2.16)$$

und

$$\cos(\omega+f) = \sec \Omega \left( \frac{X}{R} + \sin \Omega \sin(\omega+f) \cos I \right) \quad (4.2.17)$$

Die wahre Anomalie  $f$  errechnet man über

$$\sin f = \frac{a(1-e^2)}{he} \dot{R} \quad (4.2.18)$$

und

$$\cos f = \frac{1}{e} \left( \frac{a(1-e^2)}{R} - 1 \right) \quad (4.2.19)$$

Somit ist es nun möglich, auch den Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten  $\omega$  zu berechnen.

Nun wird noch der Zeitpunkt des Periheldurchgangs berechnet:

$$\tau = t - \frac{E - e \sin E}{\sqrt{G(m_1 + m_2) a^{-3}}} \quad (4.2.20)$$

unter der Verwendung von (4.8), (4.2.9) und (4.25).

Die in diesem Kapitel dargestellten Definitionen und Umwandlungen erfolgten in Anlehnung an C.D. Murray & S.F. Dermott: Solar System Dynamics. 1999, S. 48 ff)

## 5 Auswertung

Einige Bemerkungen zur Auswertung:

-Exzentrizität des kreisförmigen Planeten: Aufgrund der Umrechnungen von Bahnelementen in  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinaten ist es notwendig, für die Exzentrizität einen Wert  $e > 0$  anzugeben, da der für die numerische Integration verwendete Lie-Integrator ansonsten nicht ordnungsgemäß funktioniert.

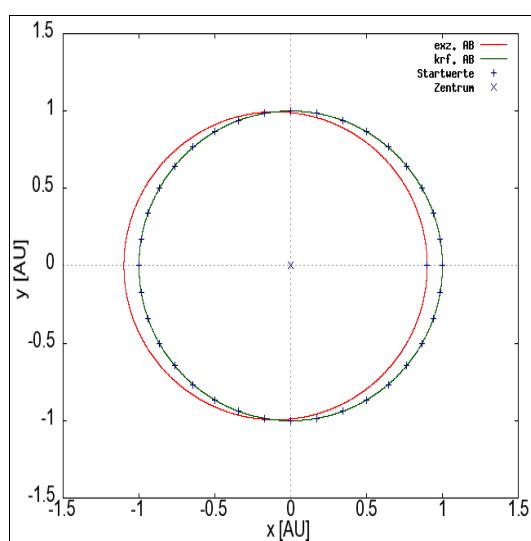
-Integrationsdauer: sofern nicht anders angegeben  $10^6$  Jahre (entspricht 1.000.000 Umläufe)

-Zentralmasse: 1 Sonnenmasse ( $M_S$ )

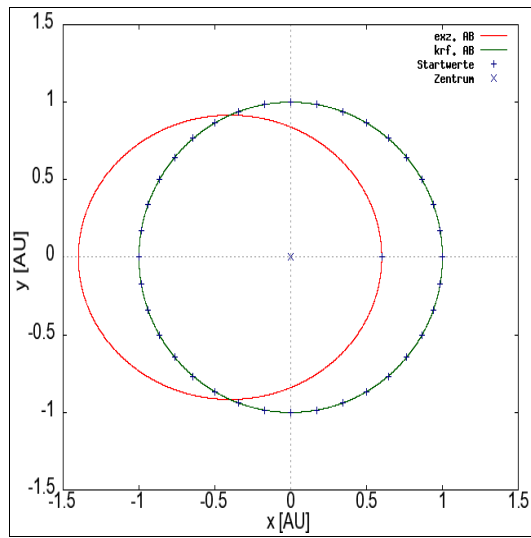
Der hier verwendete Lie-Integrator wurde von A. Hanslmeier und R. Dvorak programmiert (s. Hanslmeier, A. & Dvorak, R.: Numerical integration with Lie-series. Astronomy and Astrophysics 132, S. 203-207 (1984)).

### 5.1 Startwerte

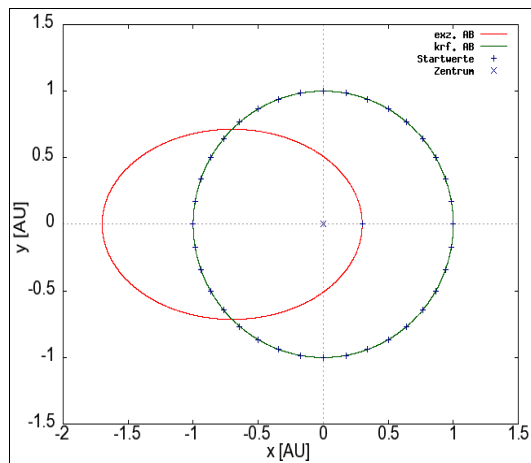
Hier wird eine kurze Übersicht der Startwerte dargestellt. Die letztlich verwendeten Intervalle der Startwerte, die für die Berechnungen verwendet wurden, werden in den folgenden Punkten gesondert angegeben. Allgemein gilt, dass die mittlere Anomalie  $M$  immer für die kreisförmige Anfangsbedingung geändert wurde, während die exzentrische Anfangsbedingung immer im Periastron gestartet wurde. Weiters wurden beide Planeten als gleich massig angenommen (d. h.  $m_1 = m_2$ ) und die Zentralmasse mit  $m_0 = 1$  Sonnenmasse  $M_S$  gesetzt. Die Angaben der Planetenmassen erfolgen in Vielfachen der Sonnenmasse  $M_S$ .



**Abb. 5.1:** Die Startkonfigurationen für eine Exzentrizität von  $e=0,10$ .



*Abb. 5.2: Die Startkonfigurationen für eine Exzentrizität von  $e=0,40$ .*



*Abb. 5.3: Die Startkonfigurationen für eine Exzentrizität von  $e=0,70$ .*



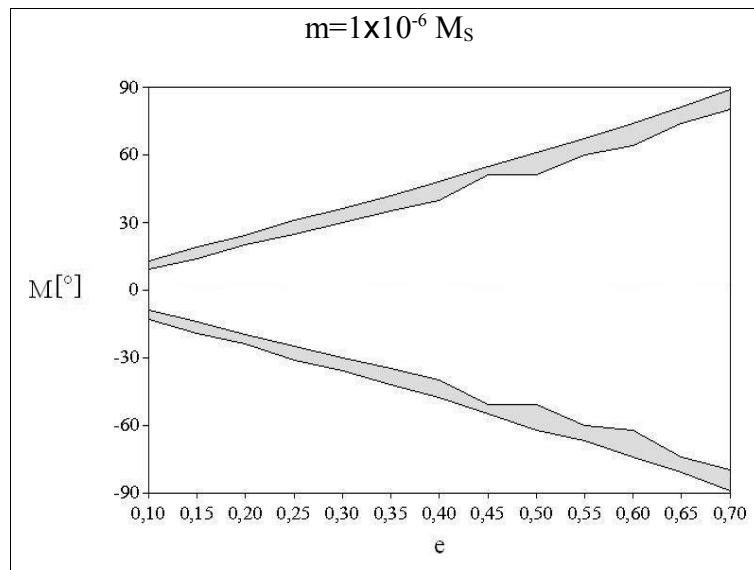
## 5.2 Instabilitätsfenster in Abhängigkeit von Exzentrizität $e$

Die Werte für die mittlere Anomalie wurden von  $M=0^\circ$  bis  $M=180^\circ$ , mit einem  $\Delta M=1^\circ$ , geändert um jene Bereiche zu finden, in denen die jeweilige Konfiguration weniger als 1.000.000 Umläufe stabil ist. Ebenso wurde für den Bereich von  $M=0^\circ$  bis  $M=-180^\circ$  verfahren. Dies wurde bei Exzentrizitäten von  $e=0,1$  bis  $e=0,7$  in Schritten von  $\Delta e=0,05$  und Massen von  $m=1 \times 10^{-6} M_S$  bis  $m=10^{-3} M_S$  (Sonnenmassen) durchgeführt. Anschließend wurden die Werte in Diagramme eingetragen und die instabilen Bereiche grau markiert.

### 5.2.1 $m=1 \times 10^{-6} M_S$

$m [M_S]$	$e$	$M [^\circ]$ (bei $0-180^\circ$ )		$M [^\circ]$ (bei $0^\circ - -180^\circ$ )	
$1 \times 10^{-6}$	0,10	9	13	-9	-13
	0,15	14	19	-14	-19
	0,20	20	24	-20	-24
	0,25	25	31	-25	-31
	0,30	30	36	-30	-36
	0,35	35	42	-35	-42
	0,40	40	48	-40	-48
	0,45	51	55	-51	-55
	0,50	51	61	-51	-62
	0,55	60	67	-60	-67
	0,60	64	74	-62	-74
	0,65	74	81	-74	-81
	0,70	80	89	-80	-89

**Tabelle 5.1:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=10^{-6} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



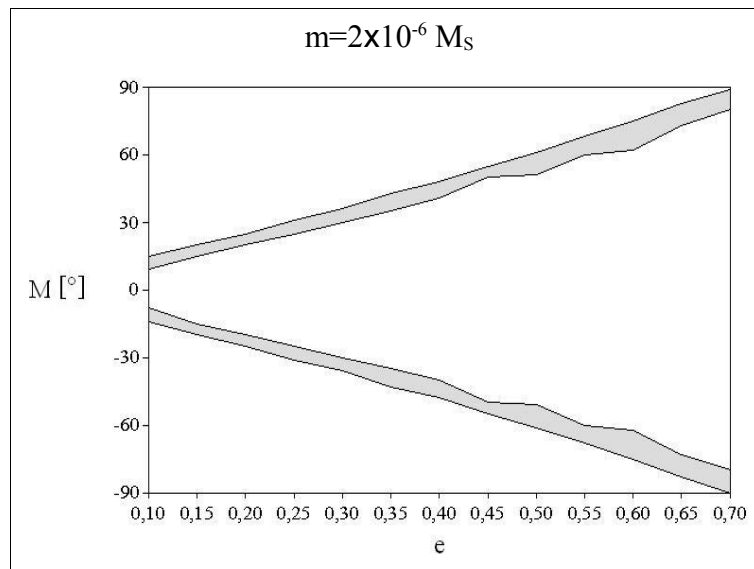
**Abb 5.4:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-90^\circ$  bis  $90^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=1 \times 10^{-6} M_s$ . Für Werte für die mittlere Anomalie von größer  $90^\circ$  bzw. kleiner als  $-90^\circ$  sind die Konfigurationen länger als 1.000.000 Umläufe stabil.

Anmerkung zu Abbildung 5.4: Ober- bzw. unterhalb des grauen Bereichs sind alle Konfigurationen über 1.000.000 Umläufe stabil (also auch die Bereiche von  $90^\circ$  bis  $180^\circ$  und  $-90^\circ$  bis  $-180^\circ$ , die deshalb in den beiden Diagrammen nicht betrachtet werden).

### 5.2.2 $m=2 \times 10^{-6} M_s$

m [ $M_s$ ]	e	M [ $^\circ$ ] (bei 0-180 $^\circ$ )		M [ $^\circ$ ] (bei 0- -180 $^\circ$ )	
$2 \times 10^{-6}$	0,10	9	15	-8	-14
	0,15	15	20	-15	-20
	0,20	20	25	-20	-25
	0,25	25	31	-25	-31
	0,30	30	36	-30	-36
	0,35	35	43	-35	-43
	0,40	41	48	-40	-48
	0,45	50	55	-50	-55
	0,50	51	61	-51	-61
	0,55	60	68	-60	-68
	0,60	62	75	-62	-75
	0,65	73	83	-73	-83
	0,70	80	89	-80	-90

**Tabelle 5.2:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=2 \times 10^{-6} M_s$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



**Abb 5.5:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-90^\circ$  bis  $90^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=2 \times 10^{-6} M_s$ . Für Werte für die mittlere Anomalie von größer  $90^\circ$  bzw. kleiner als  $-90^\circ$  sind die Konfigurationen länger als 1.000.000 Umläufe stabil.

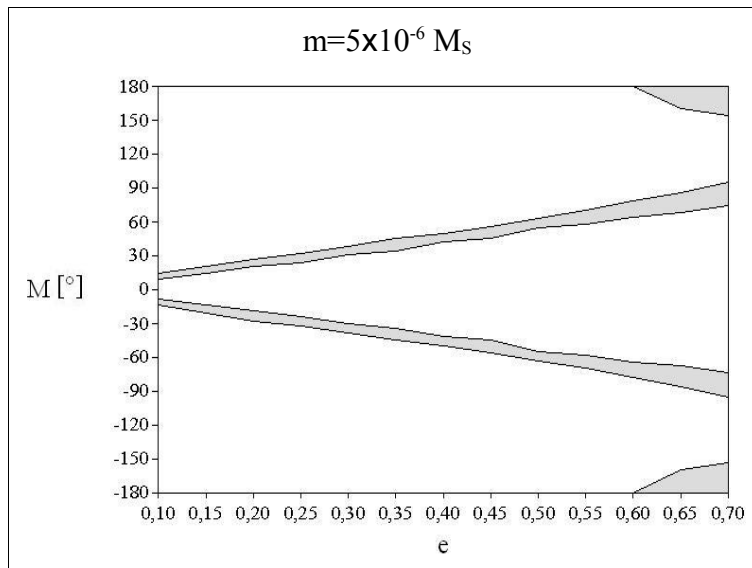
Anmerkung zu Abbildung 5.5: Ober- und unterhalb des grauen Bereichs bleiben die Konfigurationen für über 1.000.000 Umläufe stabil. Auch hier wurde der Bereich von 90° bis 180° bzw. -90° bis -180° nicht eingetragen, da dort die Konfigurationen zumindest 1.000.000 Umläufe stabil sind.

Noch ist kaum ein Unterschied zwischen den Abbildungen 5.5 und 5.4 festzustellen.

### 5.2.3 $m=5 \times 10^{-6} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [°] (0-180°)				M [°] (0° - -180°)			
$5 \times 10^{-6}$	0,10	9	14	-	-	-9	-14	-	-
	0,15	14	21	-	-	-14	-21	-	-
	0,20	20	27	-	-	-19	-28	-	-
	0,25	24	32	-	-	-24	-32	-	-
	0,30	31	38	-	-	-30	-38	-	-
	0,35	34	45	-	-	-34	-45	-	-
	0,40	42	50	-	-	-42	-50	-	-
	0,45	45	56	-	-	-45	-56	-	-
	0,50	55	63	-	-	-55	-63	-	-
	0,55	58	70	-	-	-58	-70	-	-
	0,60	64	78	-	-	-64	-78	-	-
	0,65	68	86	160	180	-68	-86	-160	-180
	0,70	74	95	154	180	-74	-95	-154	-180

**Tabelle 5.3:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=5 \times 10^{-6} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



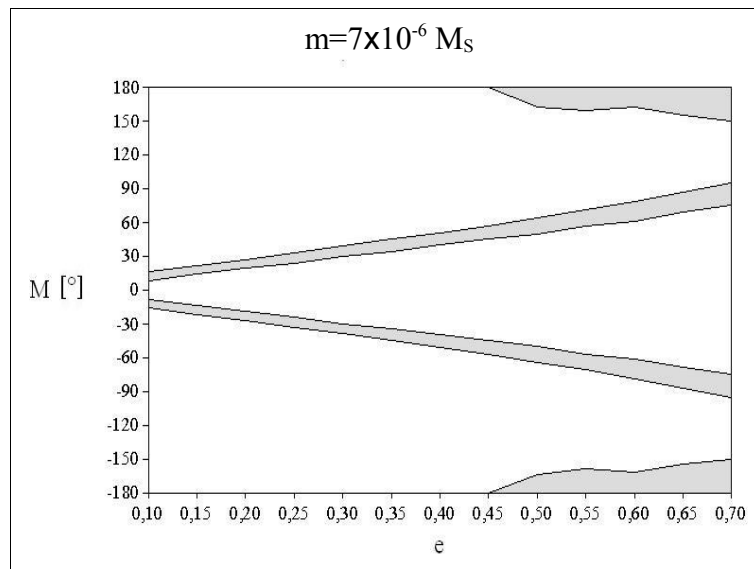
**Abb 5.6:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=5 \times 10^{-6} M_S$ .

Anmerkung zu Abbildung 5.6: Ober- bzw. Unterhalb der grauen Bereiche bleiben die Konfigurationen für länger als 1.000.000 Umläufe stabil. Zusätzlich zu den Instabilitätsstreifen bildet sich nun auch eine Instabilitätsinsel bei  $e=0,60$  bis  $e=0,70$

### 5.2.4 $m=7 \times 10^{-6} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [ $^\circ$ ] (0-180 $^\circ$ )				M [ $^\circ$ ] (0- -180 $^\circ$ )			
$7 \times 10^{-6}$	0,10	8	16	-	-	-8	-16	-	-
	0,15	14	22	-	-	-14	-22	-	-
	0,20	19	27	-	-	-19	-27	-	-
	0,25	24	33	-	-	-24	-33	-	-
	0,30	30	39	-	-	-30	-39	-	-
	0,35	34	45	-	-	-34	45-	-	-
	0,40	40	51	-	-	-40	-51	-	-
	0,45	45	57	-	-	-45	-57	-	-
	0,50	50	64	-	-	-50	-64	-	-
	0,55	57	71	159	180	-57	-71	-159	-180
	0,60	61	79	162	180	-61	-79	-162	-180
	0,65	69	87	155	180	-69	-87	-155	-180
	0,70	75	95	150	180	-75	-95	-150	-180

**Tabelle 5.4:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=7 \times 10^{-6} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



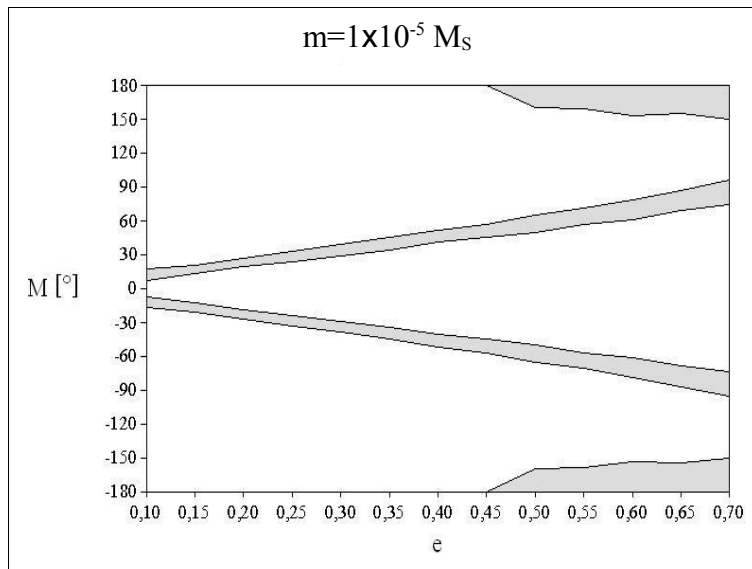
**Abb 5.7:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=7 \times 10^{-6} M_S$ .

Die Instabilitätsinsel wächst deutlich im Vergleich zu den vorherigen Abbildungen, während sich die Form bzw. die Breite der Instabilitätsstreifen nur geringfügig verändert.

### 5.2.5 $m=1 \times 10^{-5} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [°] (0-180°)				M [°] (0- -180°)			
$1 \times 10^{-5}$	0,10	7	17	-	-	-7	-17	-	-
	0,15	13	21	-	-	-13	-21	-	-
	0,20	19	27	-	-	-19	-27	-	-
	0,25	24	33	-	-	-24	-33	-	-
	0,30	29	39	-	-	-29	-39	-	-
	0,35	34	45	-	-	-34	-45	-	-
	0,40	41	52	-	-	-41	-52	-	-
	0,45	45	57	-	-	-45	-57	-	-
	0,50	50	65	160	180	-50	-65	-160	-180
	0,55	57	71	159	180	-57	-71	-159	-180
	0,60	61	79	153	180	-61	-79	-153	-180
	0,65	69	87	155	180	-69	-87	-155	-180
	0,70	74	96	150	180	-74	-96	-150	-180

**Tabelle 5.5:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=1 \times 10^{-5} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



**Abb 5.8:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=1 \times 10^{-5} M_{\odot}$ .

Anmerkung zu Abbildung 5.8: Ober- bzw. Unterhalb der grauen Bereiche bleiben die Konfigurationen für länger als 1.000.000 Umläufe stabil.

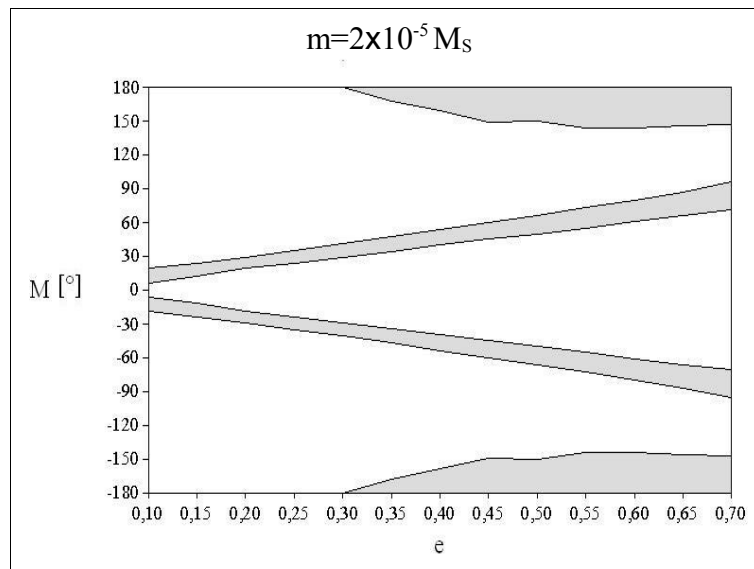
Die Instabilitätszonen selbst haben sich nur geringfügig gegenüber Abbildung 5.7 geändert.



### 5.2.6 $m=2 \times 10^{-5} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [ $^\circ$ ] (0-180 $^\circ$ )				M [ $^\circ$ ] (0- -180 $^\circ$ )			
$2 \times 10^{-5}$	0,10	6	19	-	-	-6	-19	-	-
	0,15	12	24	-	-	-12	-24	-	-
	0,20	19	29	-	-	-19	-29	-	-
	0,25	24	35	-	-	-24	-35	-	-
	0,30	29	41	-	-	-29	-41	-	-
	0,35	34	47	168	180	-34	-47	-168	-180
	0,40	40	54	159	180	-40	-54	-159	-180
	0,45	45	60	149	180	-45	-60	-149	-180
	0,50	50	66	150	180	-50	-66	-150	-180
	0,55	55	73	144	180	-55	-73	-144	-180
	0,60	61	79	153	180	-61	-79	-153	-180
	0,65	66	87	146	180	-66	-87	-146	-180
	0,70	74	96	150	180	-74	-96	-150	-180

**Tabelle 5.6:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=2 \times 10^{-5} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



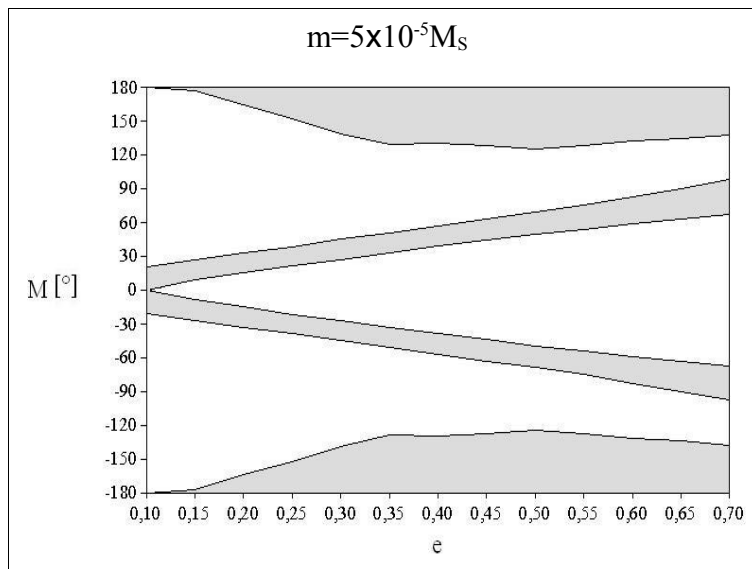
**Abb 5.9:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=2 \times 10^{-5} M_S$ .

Anmerkung zu Abbildung 5.9: Ober- bzw. Unterhalb der grauen Bereiche bleiben die Konfigurationen für länger als 1.000.000 Umläufe stabil. Die Instabilitätsbereiche sind im Vergleich zu den vorherigen Abbildungen wieder deutlich größer geworden. Vor allem die Instabilitätsinsel hat sich verbreitert und reicht nun bis zu einer Exzentrizität von  $e=0,30$ .

### 5.2.7 $m=5 \times 10^{-5} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [ $^\circ$ ] (0-180 $^\circ$ )				M [ $^\circ$ ] (0- -180 $^\circ$ )			
$5 \times 10^{-5}$	0,10	0	21	-	-	0	-21	-	-
	0,15	9	27	177	180	-9	-27	-177	-180
	0,20	15	33	164	180	-15	-33	-164	-180
	0,25	22	38	152	180	-22	-38	-152	-180
	0,30	27	45	139	180	-27	-45	-139	-180
	0,35	33	51	129	180	-33	-51	-129	-180
	0,40	39	57	130	180	-39	-57	-130	-180
	0,45	44	63	128	180	-44	-63	-128	-180
	0,50	50	69	125	180	-50	-69	-125	-180
	0,55	54	75	128	180	-54	-75	-128	-180
	0,60	59	83	132	180	-59	-83	-132	-180
	0,65	63	90	134	180	-63	-90	-134	-180
	0,70	67	98	138	180	-67	-98	-138	-180

**Tabelle 5.7:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=5 \times 10^{-5} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



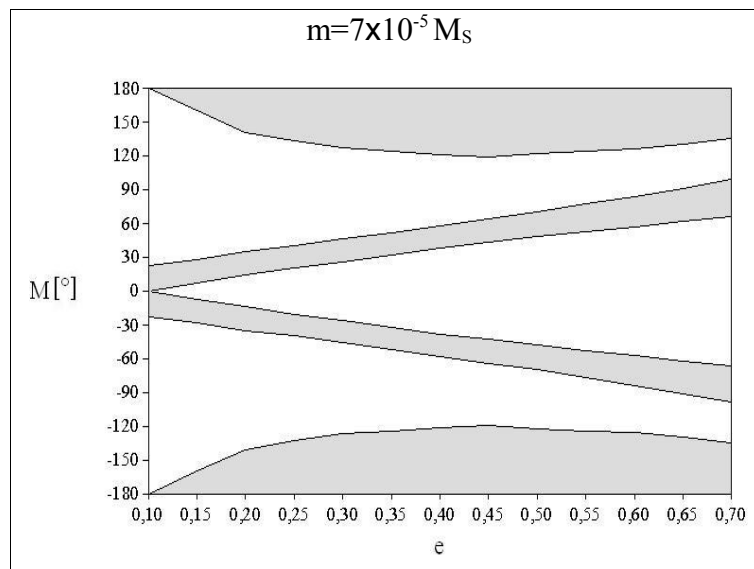
**Abb 5.10:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=5 \times 10^{-5} M_s$ .

Anmerkung zu Abbildung 5.10: Ober- bzw. Unterhalb der grauen Bereiche bleiben die Konfigurationen für länger als 1.000.000 Umläufe stabil. Die Instabilitätsbereiche sind nun wesentlich angewachsen, vor allem die Instabilitätsinsel hat an Größe gewonnen.

### 5.2.8 $m=7 \times 10^{-5} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [ $^\circ$ ] (0-180 $^\circ$ )				M [ $^\circ$ ] (0- -180 $^\circ$ )			
$7 \times 10^{-5}$	0,10	0	23	-	-	0	-23	-	-
	0,15	7	28	160	180	-7	-28	-160	-180
	0,20	14	35	141	180	-14	-35	-141	-180
	0,25	21	40	133	180	-21	-40	-133	-180
	0,30	26	46	127	180	-26	-46	-127	-180
	0,35	32	52	124	180	-32	-52	-124	-180
	0,40	38	58	121	180	-38	-58	-121	-180
	0,45	43	64	119	180	-43	-64	-119	-180
	0,50	48	70	122	180	-48	-70	-122	-180
	0,55	53	77	124	180	-53	-77	-124	-180
	0,60	57	84	126	180	-57	-84	-126	-180
	0,65	62	91	130	180	-62	-91	-130	-180
	0,70	66	99	135	180	-66	-99	-135	-180

**Tabelle 5.8:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=7 \times 10^{-5} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



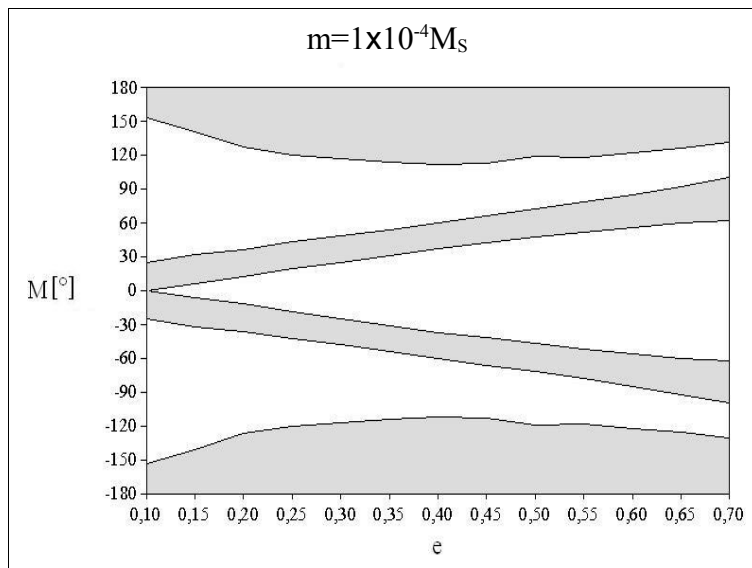
**Abb 5.11:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=7 \times 10^{-5} M_S$ .

Anmerkung zu Abbildung 5.11: Ober- bzw. Unterhalb der grauen Bereiche bleiben die Konfigurationen für länger als 1.000.000 Umläufe stabil. Die Instabilitätsinsel reicht nun, so wie der Instabilitätsstreifen von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .

### 5.2.9 $m=1 \times 10^{-4} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [ $^\circ$ ] (0-180 $^\circ$ )				M [ $^\circ$ ] (0- -180 $^\circ$ )			
$1 \times 10^{-4}$	0,10	0	25	153	180	0	-25	-153	-180
	0,15	6	32	141	180	-6	-32	-141	-180
	0,20	12	36	127	180	-12	-36	-127	-180
	0,25	19	43	120	180	-19	-43	-120	-180
	0,30	25	48	117	180	-25	-48	-117	-180
	0,35	31	54	114	180	-31	-54	-114	-180
	0,40	37	60	112	180	-37	-60	-112	-180
	0,45	42	66	113	180	-42	-66	-113	-180
	0,50	47	72	119	180	-47	-72	-119	-180
	0,55	52	78	118	180	-52	-78	-118	-180
	0,60	56	85	122	180	-56	-85	-122	-180
	0,65	60	92	126	180	-60	-92	-126	-180
	0,70	62	100	131	180	-62	-100	-131	-180

**Tabelle 5.9:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=1 \times 10^{-4} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



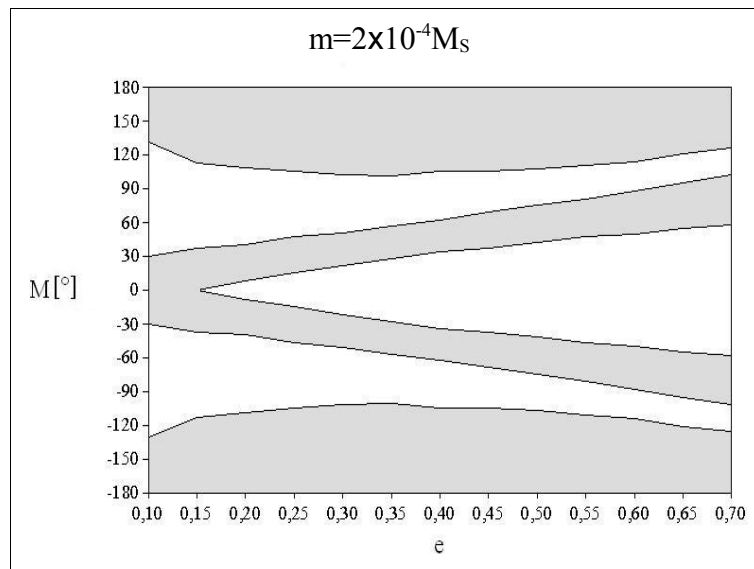
**Abb 5.12:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=1 \times 10^{-4} M_S$ .

Anmerkung zu Abbildung 5.12: Ober- bzw. Unterhalb der grauen Bereiche bleiben die Konfigurationen für länger als 1.000.000 Umläufe stabil. Die Instabilitätsbereiche verbreitern sich weiter und wachsen aufeinander zu.

### 5.2.10 $m=2 \times 10^{-4} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [ $^\circ$ ] (0-180 $^\circ$ )				M [ $^\circ$ ] (0- -180 $^\circ$ )			
$2 \times 10^{-4}$	0,10	0	30	131	180	0	-30	-131	-180
	0,15	0	37	113	180	0	-37	-113	-180
	0,20	8	40	109	180	-8	-40	-109	-180
	0,25	15	47	105	180	-15	-47	-105	-180
	0,30	22	51	102	180	-22	-51	-102	-180
	0,35	28	57	101	180	-28	-57	-101	-180
	0,40	34	62	105	180	-34	-62	-105	-180
	0,45	37	69	105	180	-37	-69	-105	-180
	0,50	42	75	107	180	-42	-75	-107	-180
	0,55	47	81	111	180	-47	-81	-111	-180
	0,60	50	88	114	180	-50	-88	-114	-180
	0,65	55	95	121	180	-55	-95	-121	-180
	0,70	58	102	126	180	-58	-102	-126	-180

**Tabelle 5.10:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=2 \times 10^{-4} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .

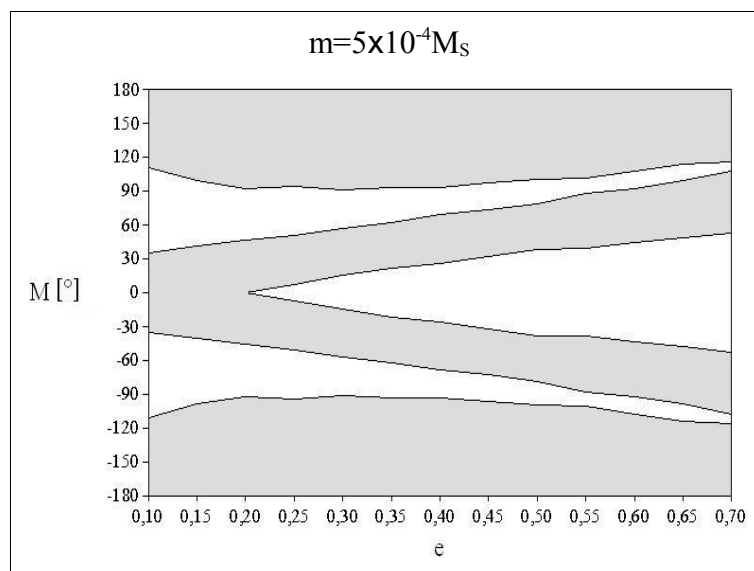


**Abb 5.13:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=2 \times 10^{-4} M_S$ .

### 5.2.11 $m=5 \times 10^{-4} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [ $^\circ$ ] (0-180 $^\circ$ )				M [ $^\circ$ ] (0- -180 $^\circ$ )			
$5 \times 10^{-4}$	0,10	0	35	111	180	0	-35	-111	-180
	0,15	0	41	99	180	0	-41	-99	-180
	0,20	0	46	92	180	0	-46	-92	-180
	0,25	7	51	94	180	-7	-51	-94	-180
	0,30	15	57	91	180	-15	-57	-91	-180
	0,35	22	62	93	180	-22	-62	-93	-180
	0,40	26	69	90	180	-26	-69	-90	-180
	0,45	32	73	97	180	-32	-73	-97	-180
	0,50	38	79	100	180	-38	-79	-100	-180
	0,55	39	88	101	180	-39	-88	-101	-180
	0,60	44	92	108	180	-44	-92	-108	-180
	0,65	48	99	114	180	-48	-99	-114	-180
	0,70	53	108	116	180	-53	-108	-116	-180

**Tabelle 5.11:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=5 \times 10^{-4} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ .



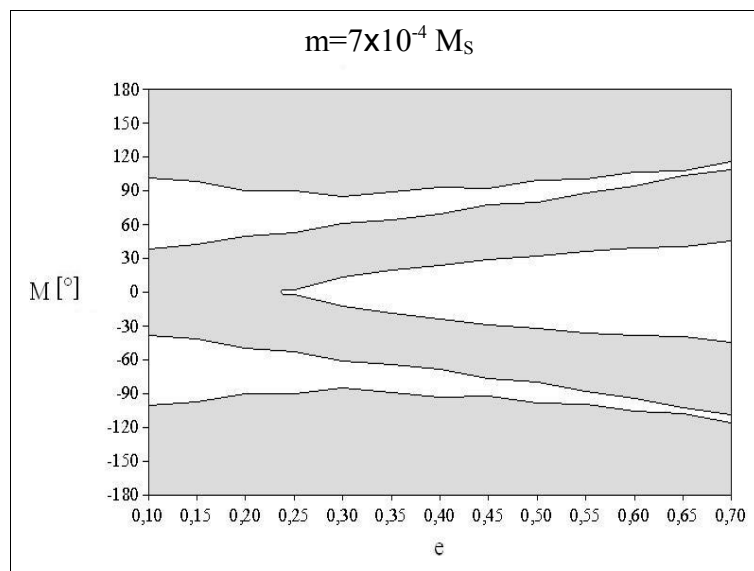
**Abb 5.14:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=5 \times 10^{-4} M_S$ .



### 5.2.12 $m=7 \times 10^{-4} M_S$

$m [M_S]$	$e$	$M [^\circ]$ (0-180°)				$M [^\circ]$ (0- -180°)			
$7 \times 10^{-4}$	0,10	0	38	101	180	0	-38	-101	-180
	0,15	0	42	98	180	0	-42	-98	-180
	0,20	0	50	90	180	0	-50	-90	-180
	0,25	2	53	90	180	-2	-53	-90	-180
	0,30	13	61	85	180	-13	-61	-85	-180
	0,35	19	64	89	180	-19	-64	-89	-180
	0,40	24	69	93	180	-24	-69	-93	-180
	0,45	29	77	92	180	-29	-77	-92	-180
	0,50	32	80	99	180	-32	-80	-99	-180
	0,55	36	88	100	180	-36	-88	-100	-180
	0,60	39	94	106	180	-39	-94	-106	-180
	0,65	40	103	108	180	-40	-103	-108	-180
	0,70	45	109	116	180	-45	-109	-116	-180

**Tabelle 5.12:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=7 \times 10^{-4} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$



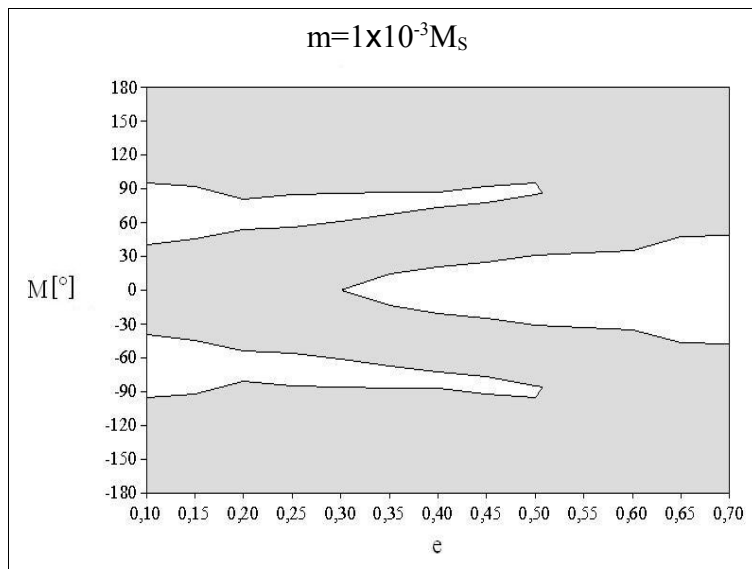
**Abb 5.15:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=7 \times 10^{-4} M_S$ .

Anmerkung zu Abbildung 5.15: Die beiden Instabilitätsbereiche sind nun fast bei  $e=0,65$  bis  $e=0,70$  verschmolzen. Der Abstand in diesem Bereich beträgt nur zwischen  $5^\circ$  und  $7^\circ$ .

### 5.2.13 $m=1 \times 10^{-3} M_S$

m [ $M_S$ ]	e	M [ $^\circ$ ] (0-180 $^\circ$ )				M [ $^\circ$ ] (0- -180 $^\circ$ )			
$1 \times 10^{-3}$	0,10	0	40	95	180	0	-40	-95	-180
	0,15	0	45	92	180	0	-45	-92	-180
	0,20	0	54	81	180	0	-54	-81	-180
	0,25	0	56	85	180	0	-56	-85	-180
	0,30	0	61	86	180	0	-61	-86	-180
	0,35	14	67	87	180	-14	-67	-87	-180
	0,40	21	73	87	180	-21	-73	-87	-180
	0,45	25	77	92	180	-25	-77	-92	-180
	0,50	31	85	95	180	-31	-85	-95	-180
	0,55	33	180	-	-	-33	-180	-	-
	0,60	35	180	-	-	-35	-180	-	-
	0,65	47	180	-	-	-47	-180	-	-
	0,70	48	180	-	-	-48	-180	-	-

**Tabelle 5.13:** Ergebnisse der Untersuchung des Instabilitätsbereichs für Masse  $m=1 \times 10^{-3} M_S$  (Sonnenmassen) bei Exzentrizitäten von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$



**Abb 5.16:** Hier wurden die Instabilitätsbereiche für eine mittlere Anomalie von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  eingetragen und grau markiert. Die grauen Bereiche zeigen jeweils jene Regionen, in denen die Konfigurationen weniger als 1.000.000 Umläufe stabil sind. Die Masse der Planeten beträgt jeweils  $m=1 \times 10^{-3} M_S$

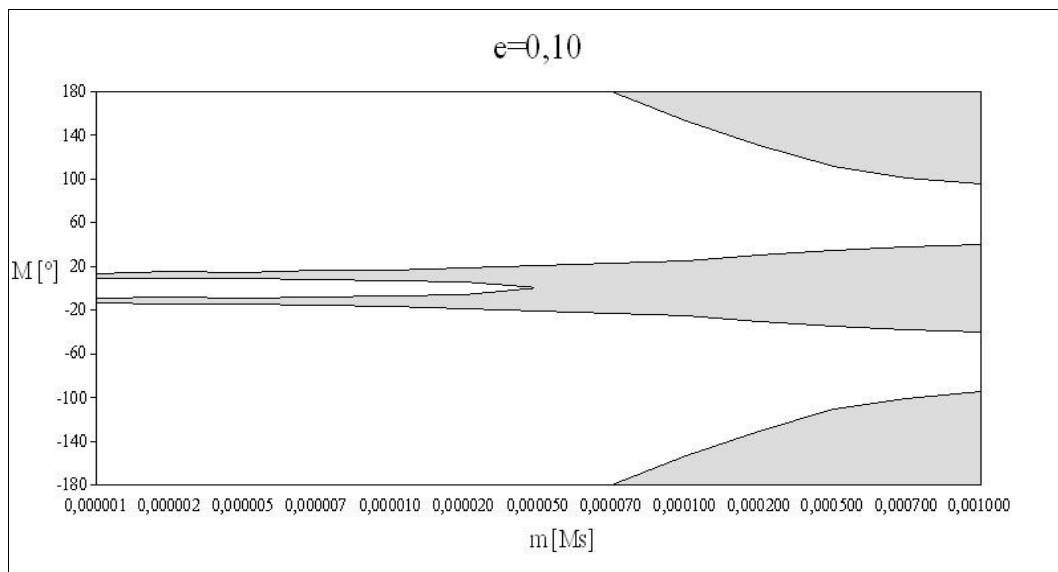
Anmerkung zu Abbildung 5.16: Ober- bzw. Unterhalb der grauen Bereiche bleiben die Konfigurationen für länger als 1.000.000 Umläufe stabil. Die beiden Instabilitätsbereiche sind nun  $e=0,50$  bis  $e=0,70$  verschmolzen.

Die Abbildungen 5.4 und 5.5 zeigen nur zwei Instabilitätsstreifen (in den Diagrammen sind diese Bereiche grau markiert), die um  $M=0^\circ$  annähernd spiegelsymmetrisch sind und fast linear mit der Exzentrizität ansteigen. Auch die Breite der Streifen vergrößert sich zu Beginn nur unwesentlich mit zunehmender Masse. Weiters sieht man, dass bei relativ geringen Massen (hier  $m=1 \times 10^{-6} M_S$  und  $m=2 \times 10^{-6} M_S$ ) bei einer mittleren Anomalie größer als  $M=90^\circ$  bzw. kleiner als  $M=-90^\circ$  keine weiteren Instabilitätsbereiche auftreten. Ab einer Masse von  $m=5 \times 10^{-6} M_S$  (s. Abbildung 5.6) treten nun im Bereich von  $e=0,60$  bis  $e=0,70$  auch zwei Instabilitätsinseln auf. Die Instabilitätsstreifen wiederum zeigen kaum eine Verbreiterung. Mit zunehmender Masse vergrößern sich die Instabilitätsbereiche, bis sie schließlich bei einer Masse  $m=1 \times 10^{-3} M_S$  verschmelzen. Dieses Verhalten der Instabilitätsbereiche lässt sich dadurch erklären, dass bei kleinen Planetenmassen die gegenseitige Beeinflussung durch die Gravitationskraft noch zu gering ist und die Abstände zwischen den Planeten groß genug sind. Erst mit zunehmender Masse werden die gegenseitigen Störungen so groß, dass die Instabilitätsbereiche anwachsen. Der Verlauf der minimalen Abstände ist in Kapitel 5.8 ersichtlich.

### 5.3 Instabilitätsfenster in Abhängigkeit von der Masse

Die Instabilitätsfenster können auch in Abhängigkeit von der Masse dargestellt werden. Hier wurde nun bei konstanter Exzentrizität die mittlere Anomalie gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen aufgetragen. Die Werte für die Diagramme stammen aus den Tabellen aus 5.2., die entsprechend um geordnet wurden.

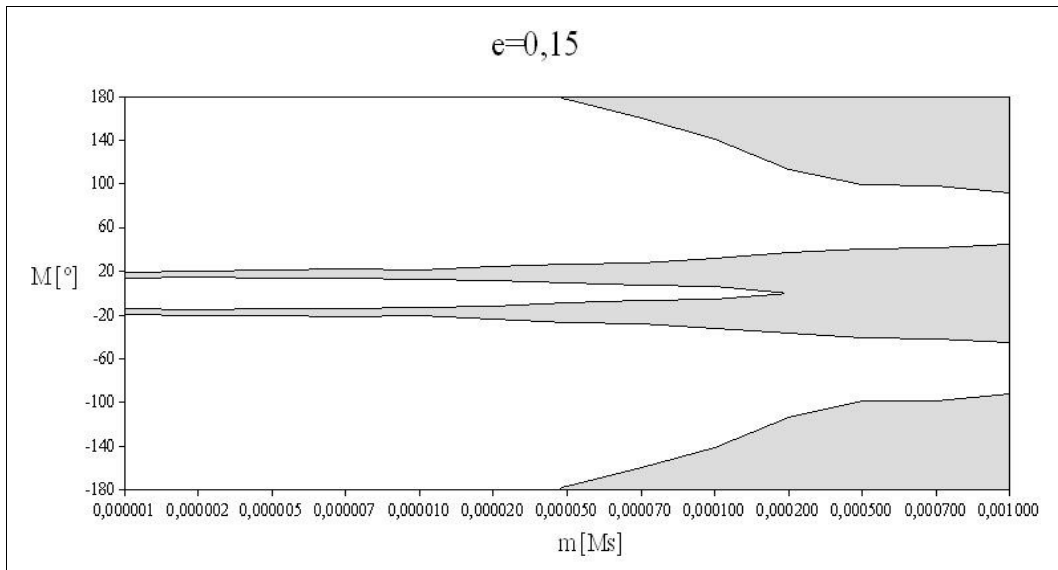
#### 5.3.1 $e=0,10$



**Abb 5.17:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,10$  aufgetragen.

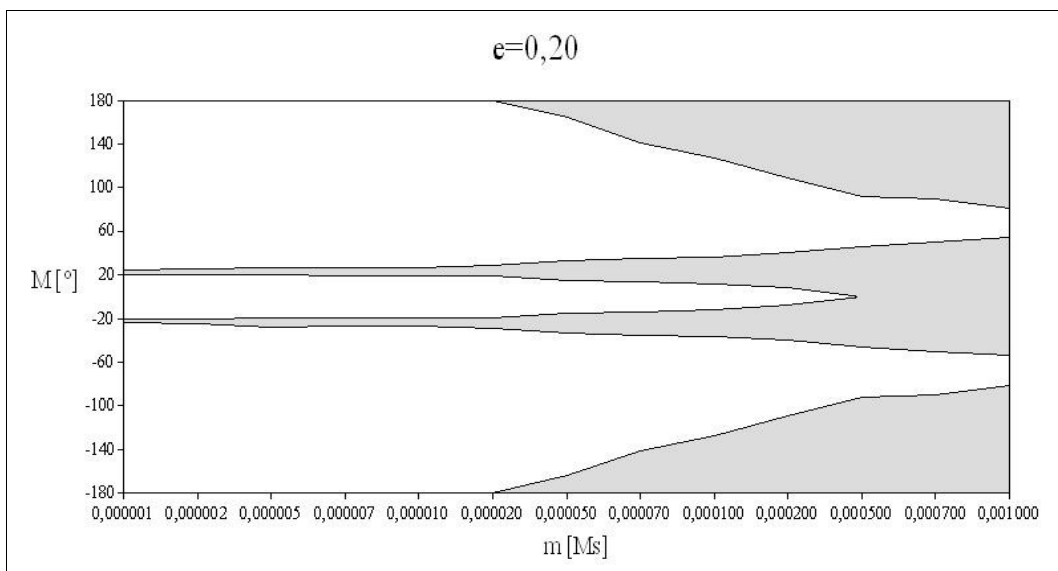
Im Gegensatz zu Kapitel 5.2. entstehen hier von Beginn an zwei Instabilitätsbereiche. Interessant daran ist, dass ein Bereich über die gesamte Diagrammbreite geht, während der zweite wieder eine Insel im Eckbereich bildet. Wie schon in Kapitel 5.2 erwähnt, sieht man auch hier, dass die Instabilitätsbereiche mit steigender Masse wachsen.

### 5.3.2 $e=0,15$



**Abb 5.18:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^{\circ}$  bis  $180^{\circ}$  und von  $-180^{\circ}$  bis  $0^{\circ}$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,15$  aufgetragen.

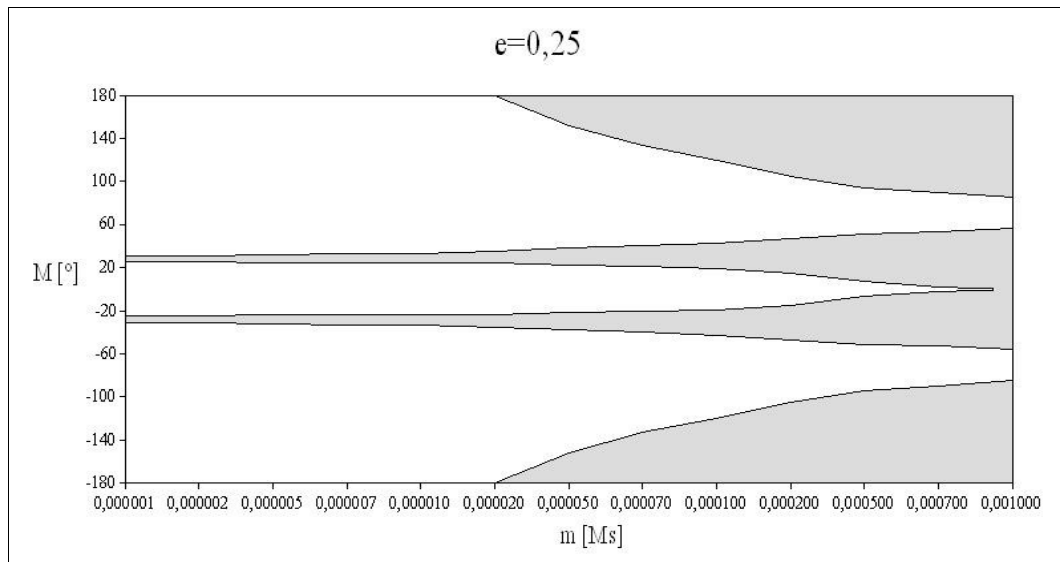
### 5.3.3 $e=0,20$



**Abb 5.19:** Hier wurde die mittlere Anomalie  $M$  in Grad im Bereich von  $0^{\circ}$  bis  $180^{\circ}$  und von  $-180^{\circ}$  bis  $0^{\circ}$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,20$  aufgetragen.

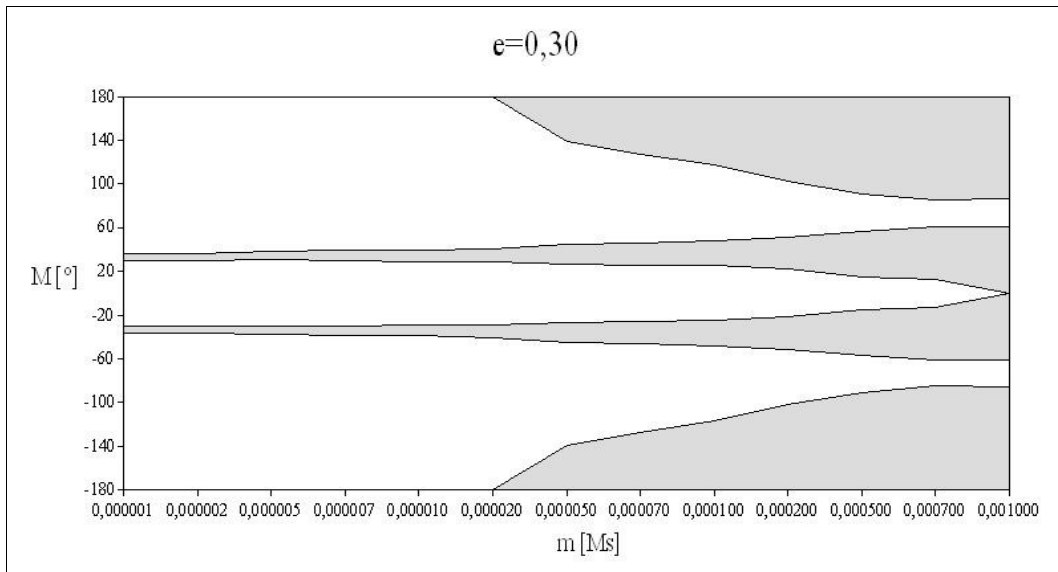
Während die Instabilitätsinsel wächst, wird der Instabilitätsstreifen im Bereich der kleineren Massen schmaler, hingegen wächst er im Bereich größerer Massen.

### 5.3.4 $e=0,25$



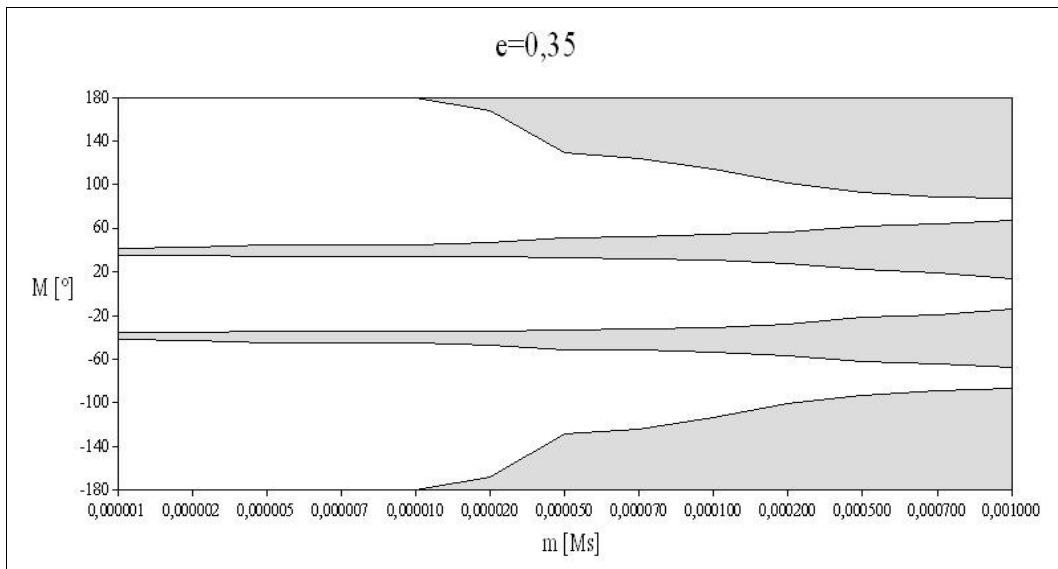
**Abb 5.20:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,25$  aufgetragen.

### 5.3.5 $e=0,30$



**Abb 5.21:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,30$  aufgetragen.

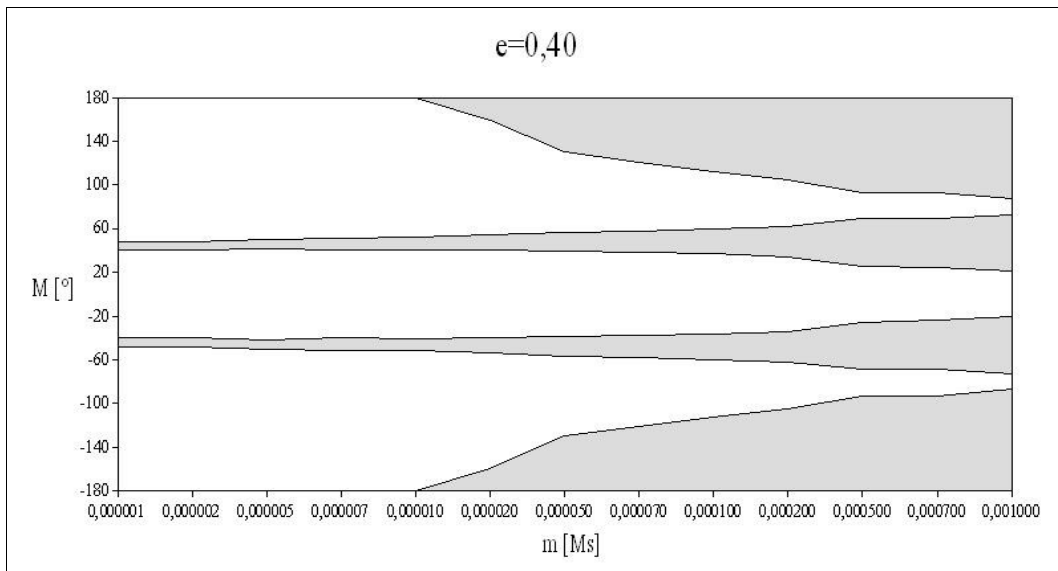
### 5.3.6 $e=0,35$



**Abb 5.22:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,35$  aufgetragen.

Der Instabilitätsstreifen hat sich nun aufgespalten, und die beiden Streifen driften auf die Instabilitätsinseln zu.

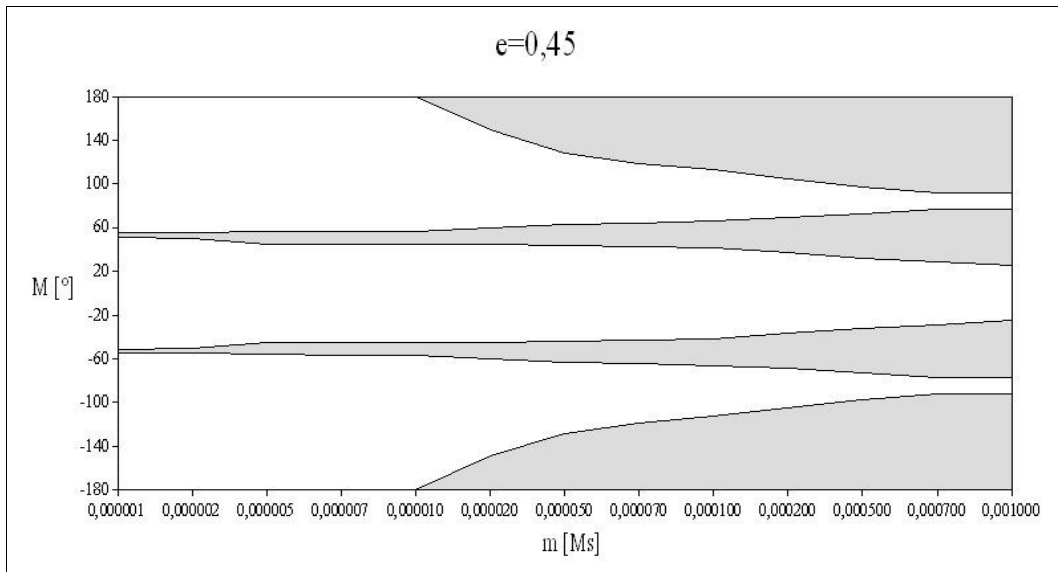
### 5.3.7 $e=0,40$



**Abb 5.23:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,40$  aufgetragen.

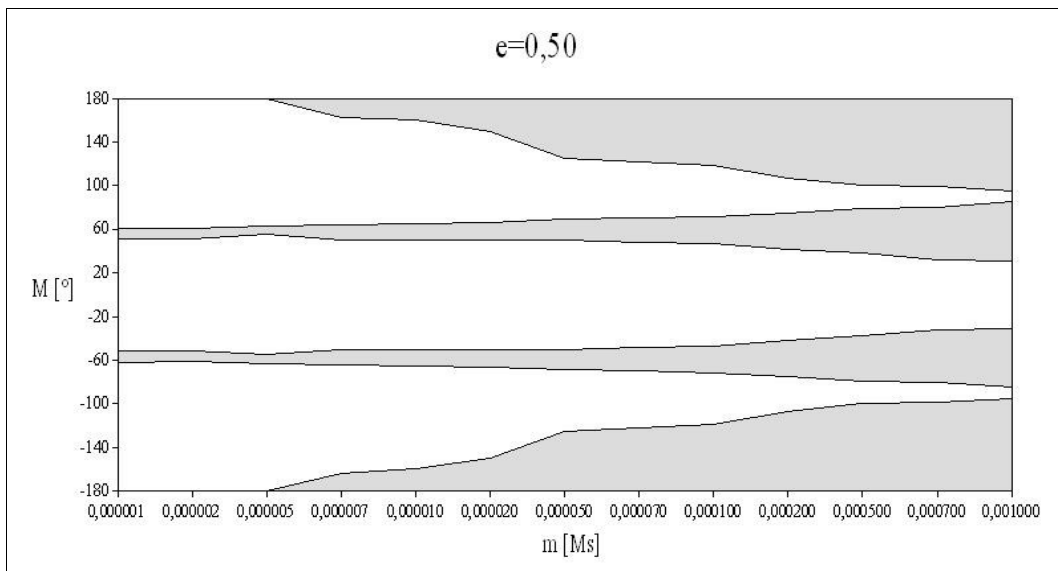


### 5.3.8 $e=0,45$



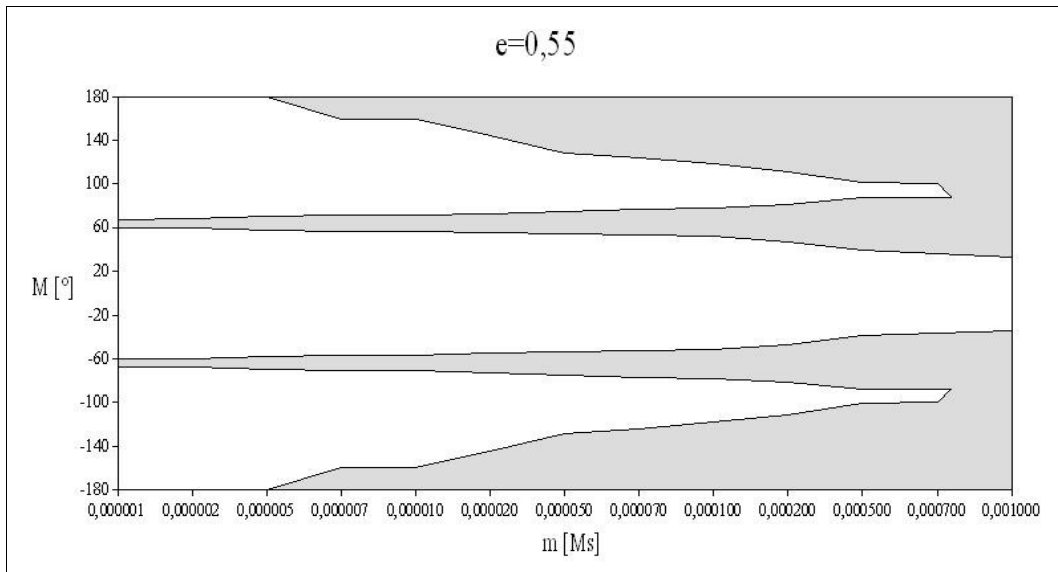
**Abb 5.24:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,45$  aufgetragen..

### 5.3.9 $e=0,50$



**Abb 5.25:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,50$  aufgetragen..

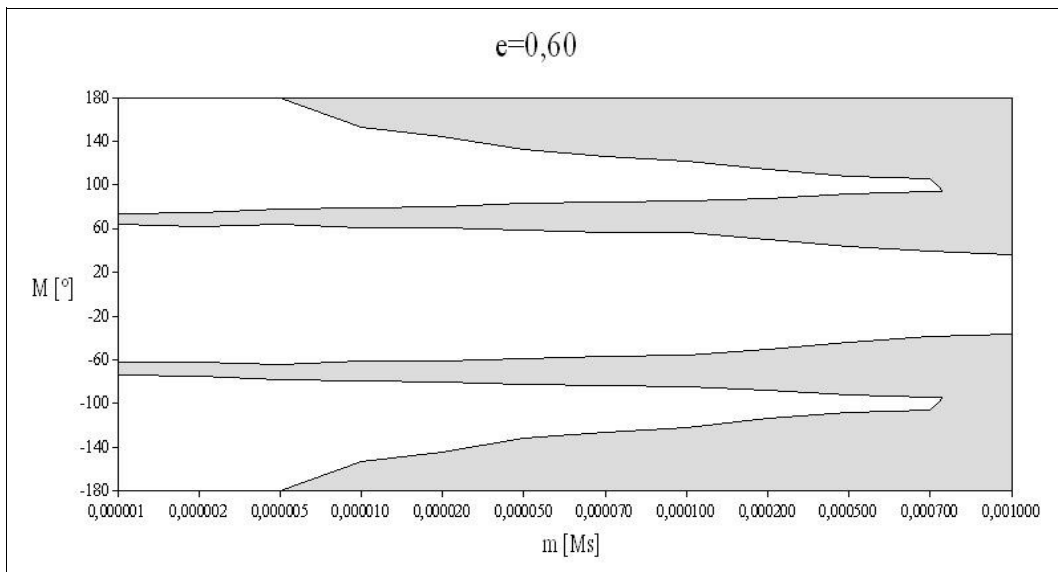
### 5.3.10 $e=0,55$



**Abb 5.26:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,55$  aufgetragen.

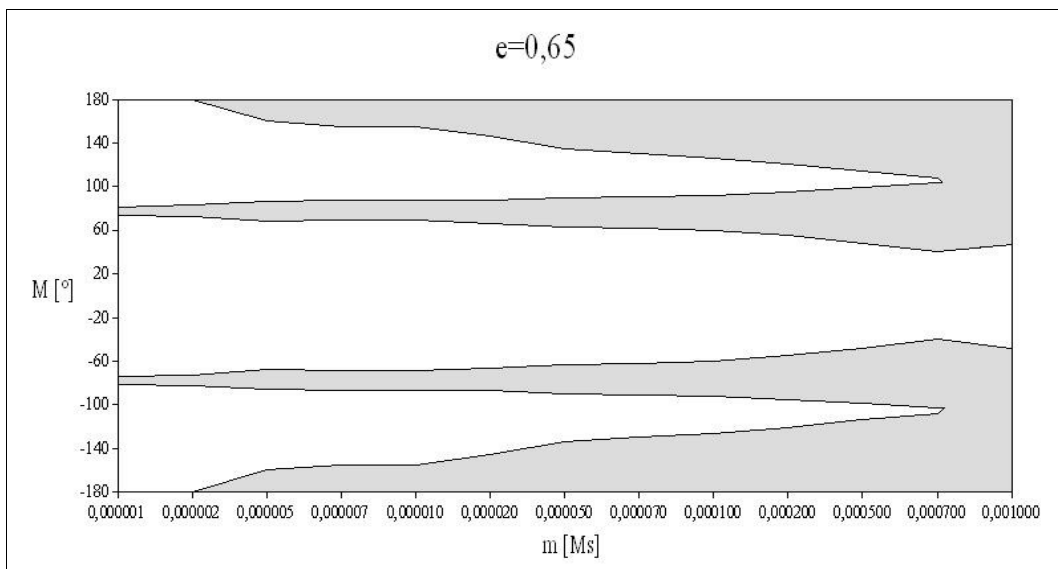
Abbildung 5.26: Die Instabilitätsstreifen sind nun mit den Instabilitätsinseln verschmolzen, während sich die Form sowohl der Inseln als auch der Streifen kaum verändert hat.

### 5.3.11 $e=0,60$



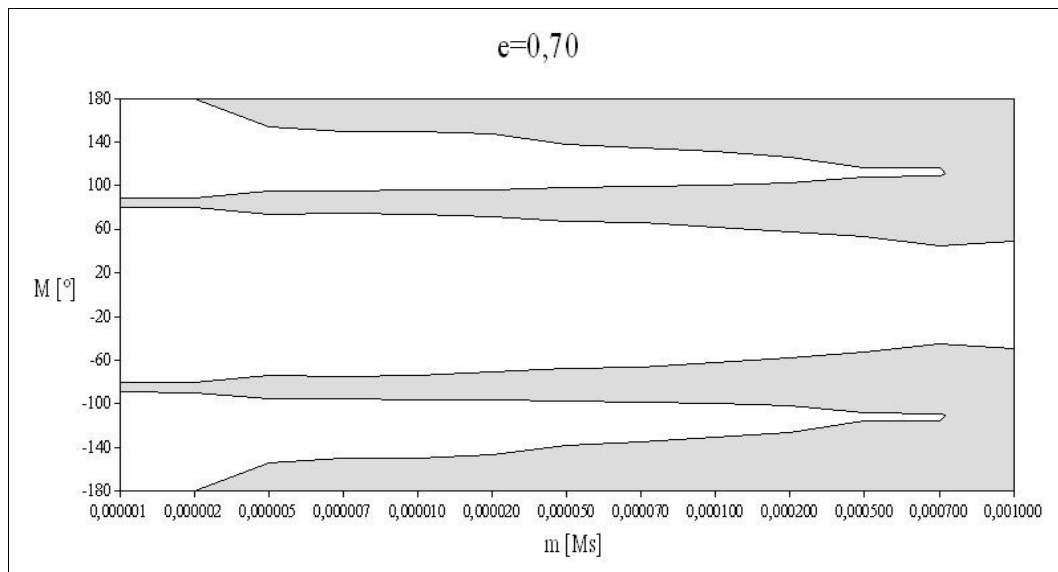
**Abb 5.27:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,60$  aufgetragen.

### 5.3.12 $e=0,65$



**Abb 5.28:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,60$  aufgetragen.

### 5.3.13 $e=0,70$



**Abb 5.29:** Hier wurde die mittlere Anomalie in Grad im Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und von  $-180^\circ$  bis  $0^\circ$  gegen die Masse  $m$  in Sonnenmassen bei einer Exzentrizität von  $e=0,70$  aufgetragen.

Bei niedrigen Exzentrizitäten erkennt man einen gabelförmigen Instabilitätsstreifen und zwei Instabilitätsinseln, die so wie in Kapitel 5.2 spiegelsymmetrisch sind. Mit zunehmender Exzentrizität wird die Gabelung des Instabilitätsstreifens größer bis schließlich bei einer Exzentrizität von  $e=0,35$  sich zwei Instabilitätsstreifen gebildet haben. Nimmt nun die Exzentrizität weiter zu, wandern diese Streifen in Richtung der Instabilitätsinseln um schließlich bei  $e=0,55$  mit den Inseln zu verschmelzen.

Auffallend ist, wenn man die Diagramme von Kapitel 5.3.1 bis Kapitel 5.3.12 vergleicht, dass sich die Instabilitätsinsel immer mehr in Richtung der niedrigeren Massen verbreitert, aber kaum in Richtung der niedrigeren Werte für die mittlere Anomalie. Die Instabilitätsstreifen gewinnen kaum an Breite.

Betrachtet man die Abbildungen 5.17 bis 5.29, so erkennt man auch eine Abhängigkeit der Instabilitätsbereiche von der Exzentrizität  $e$ : Mit steigender Exzentrizität  $e$  wachsen vor allem die Instabilitätsinseln, die im Bereich von  $M=\pm 180^\circ$  bis  $M=\pm 140^\circ$  liegen. Weiters erkennt man eine Verschiebung der Instabilitätsstreifen hin zu höheren mittleren Anomalien.

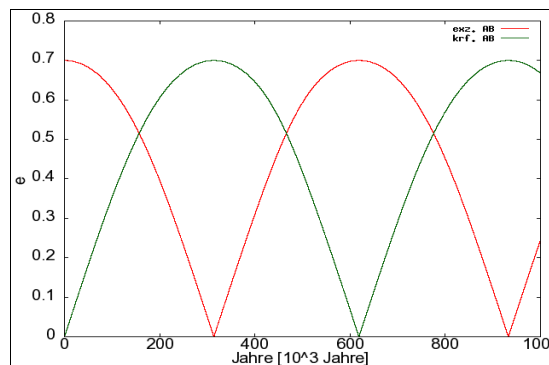
Auch hier lässt sich erkennen, wie sich, mit Zunahme der Masse, die Instabilitätsbereiche ändern.

## 5.4 Periodizität der Exzentrizität $e$

Wie in Abbildung 5.30 ersichtlich ist, verläuft die Zu- bzw. Abnahme der Exzentrizität eines Exchange-Orbits periodisch. Abbildung 5.68 weiter unten zeigt, dass die Form der „Schwingung“ (es kommt teilweise zu Verzerrungen der Schwingung) von der mittleren Anomalie  $M$  abhängt. Die Periodendauer wiederum hängt sowohl von der Masse, Exzentrizität und mittleren Anomalie ab, wie in den folgenden Diagrammen dargestellt. Eine Zunahme der Exzentrizität oder der mittleren Anomalie führt zu einer Erhöhung der Periodendauer, während eine Zunahme der Masse zu einer Verringerung führt.

Während die Abhängigkeit von der Exzentrizität einem Potenzgesetz folgt, ist die Abhängigkeit von der mittleren Anomalie wesentlich komplexer.

Wie bereits in Kapitel 5.2 zu sehen war, gibt es einen „Instabilitätsstreifen“, der quer über den gesamten Bereich der mittleren Anomalie verläuft. Wie in Kapitel 5.4.2. zu sehen ist, unterteilt dieser Instabilitätsstreifen auch den Verlauf der Periodendauer in zwei unterschiedliche Bereiche mit unterschiedlichen Verläufen.



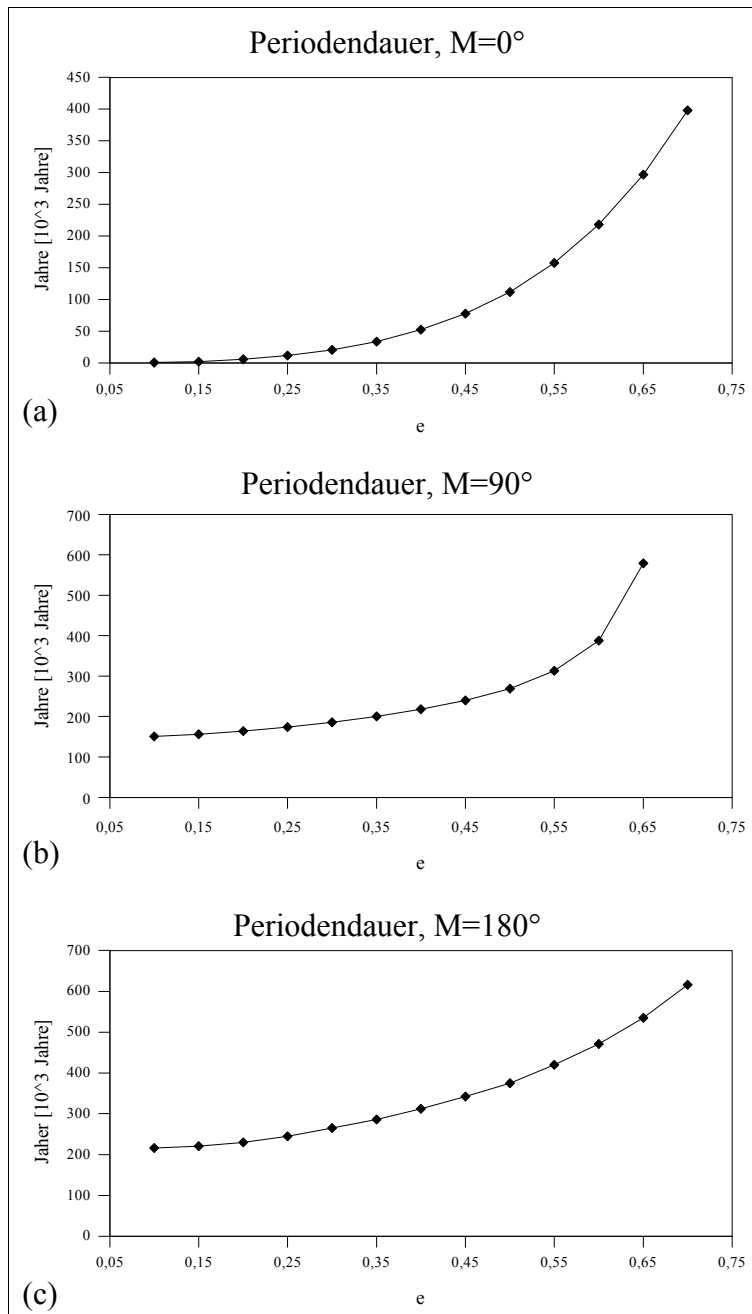
**Abb 5.30:** Verlauf der Exzentrizität eines Exchange-Orbits mit der Zeit. Ca. alle 618.000 Jahre wird wieder der Anfangswert erreicht. Dieses Bild stellt nur ein Beispiel dar.

### 5.4.1 Abhängigkeit der Periodendauer der Exzentrizität $e$ in Abhängigkeit von der Exzentrizität $e$ bei verschiedenen Massen $m$ und mittlerer Anomalie $M$

Es wurde untersucht, wie sich die Periodendauer der Exzentrizität bei verschiedenen Massen verhält, und zwar bei  $m=1 \times 10^{-6} M_S$ ,  $m=1 \times 10^{-5} M_S$ ,  $m=1 \times 10^{-4} M_S$  und  $m=1 \times 10^{-3} M_S$ . Der Anfangswert der mittleren Anomalie wurde so gewählt, dass einerseits für möglichst alle

Exzentrizitäten Werte für die Periodendauer ermittelt werden konnten und andererseits auch bei der mittleren Anomalie ein möglichst breites Spektrum überstrichen wird.

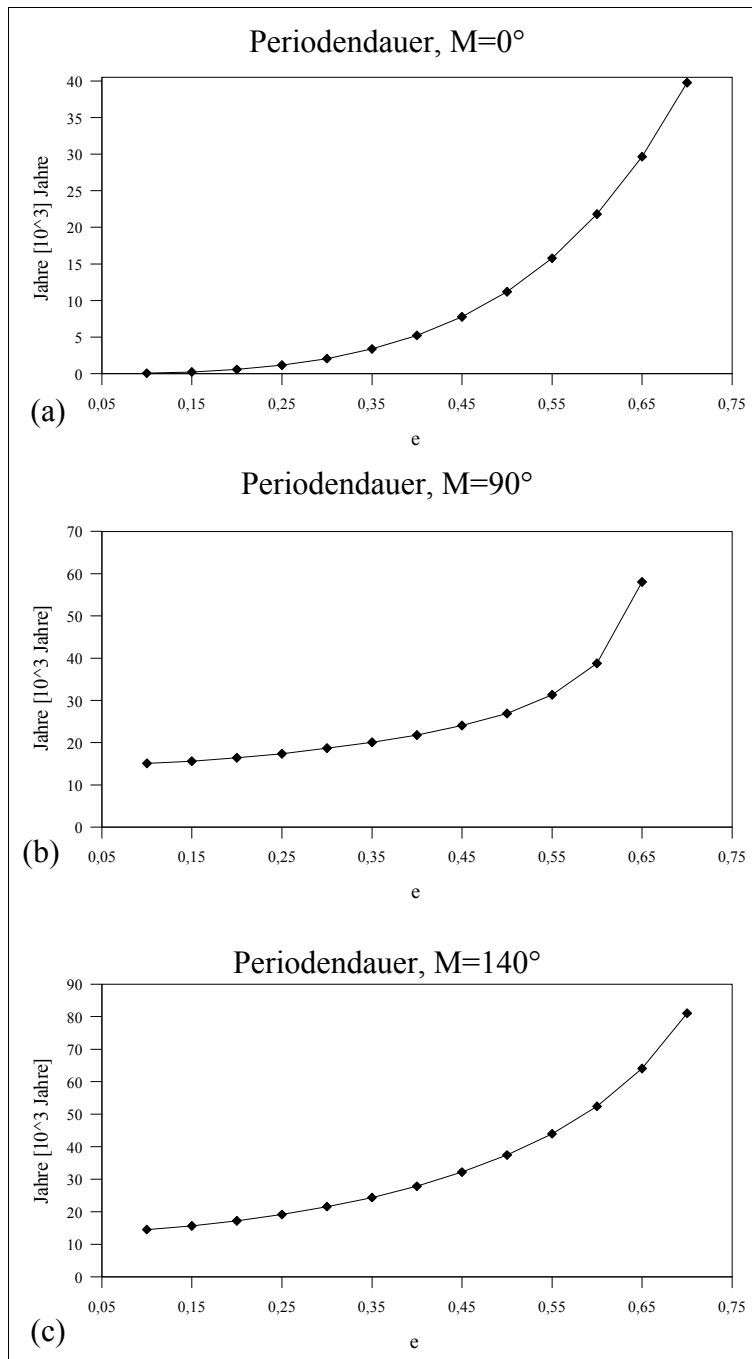
### 5.4.1.1 $m=1 \times 10^{-6} M_S$



**Abb 5.31:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  bei  $m=1 \times 10^{-6} M_S$  und einer anfänglichen mittleren Anomalie von (a)  $M=0^\circ$ , (b)  $M=90^\circ$  und (c)  $M=180^\circ$

Wie man sieht, bedeutet eine Vergrößerung der mittleren Anomalie auch eine Verlängerung der Periodendauer der Exzentrizität.

#### 5.4.1.2 $m=1 \times 10^{-5} M_S$

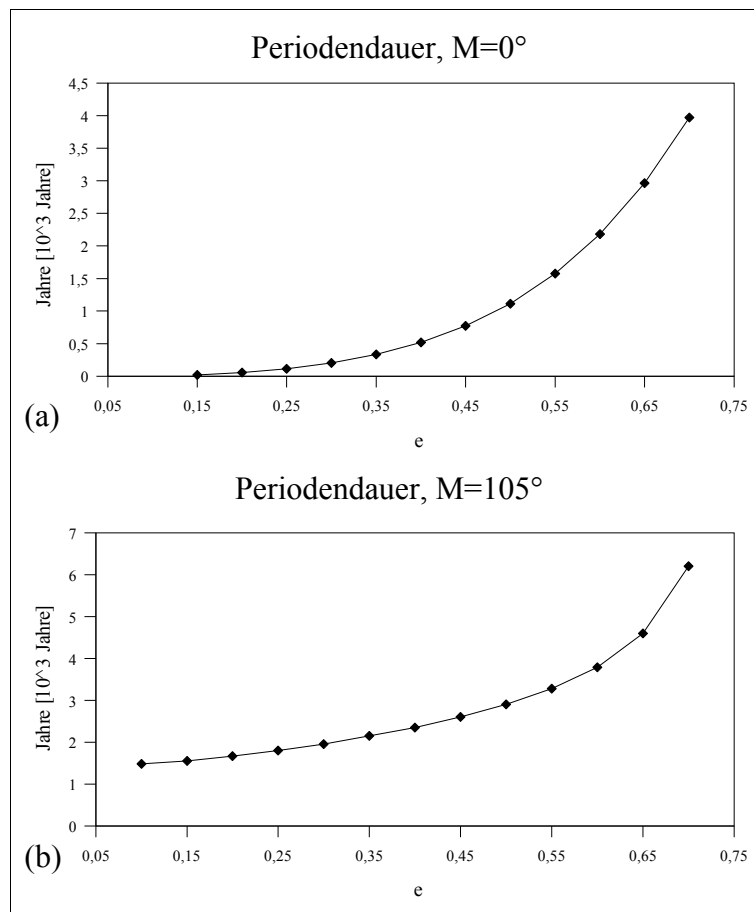


**Abb 5.32:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  bei  $m=1 \times 10^{-5} M_S$  und einer anfänglichen mittleren Anomalie von (a)  $M=0^\circ$ , (b)  $M=90^\circ$  und (c)  $M=140^\circ$



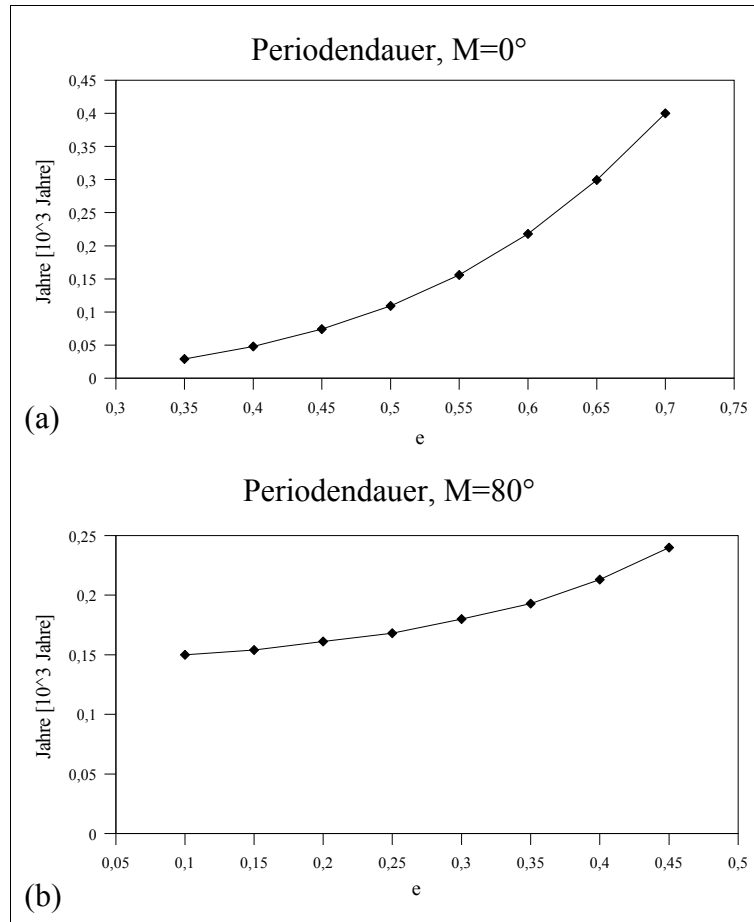
Auch hier sieht man, dass eine Vergrößerung der mittleren Anomalie eine Vergrößerung der Periodendauer bedeutet. Vergleicht man nun Abbildungen 5.32 mit 5.31, so sieht man, dass eine Verzehnfachung der Masse zu einer Verringerung der Periodendauer auf ein Zehntel bedeutet.

#### 5.4.1.3 $m=1 \times 10^{-4} M_S$



**Abb 5.33:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  bei  $m=1 \times 10^{-4} M_S$  und einer anfänglichen mittleren Anomalie von (a)  $M=0^\circ$  und (b)  $M=105^\circ$

5.4.1.4  $m=1 \times 10^{-3} M_s$



**Abb 5.34:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  bei  $m=1 \times 10^{-3} M_s$  und einer anfänglichen mittleren Anomalie von (a)  $M=0^\circ$  und (b)  $M=80^\circ$

Der Trend setzt sich, wie man sieht, auch bei Abbildungen 5.33 und 5.34 fort. Allerdings ist bei 5.34 aufgrund der Instabilitätsbereiche (s. Kapitel 5.2) die Bandbreite für die Exzentrizität  $e$  vor allem bei höheren Anfangswerten für die mittlere Anomalie bereits stark eingeschränkt. In Kapitel 5.4.1 wurde zuerst untersucht, wie sich die Periodendauer in Abhängigkeit von der Exzentrizität  $e$  bei verschiedenen mittleren Anomalien  $M$  und Massen  $m$  verhält.

Vergleicht man die Abbildungen 5.31 (a), (b) und (c) miteinander, sieht man zweierlei. Erstens erkennt man, dass die Periodendauer potenziell mit der Exzentrizität ansteigt. Zweitens sieht man, dass die Periodendauer auch von der mittleren Anomalie in einer nicht linearen Weise abhängt. Betrachtet man die Periodendauer bei einer mittleren Anomalie  $M=0^\circ$

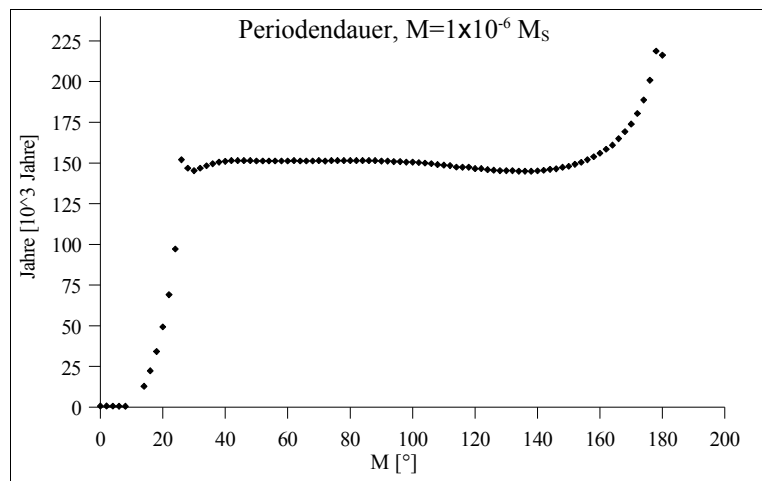
in Abbildung 5.31(a) mit den Abbildungen 5.31(b) und 5.31(c) so sieht man, dass der Sprung in der Periodendauer zwischen  $M=0^\circ$  und  $M=90^\circ$  wesentlich größer ist, als der Sprung zwischen  $M=90^\circ$  und  $M=180^\circ$ . Dieses Verhalten wurde in Kapitel 5.4.2 näher betrachtet.

Vergleicht man nun weiter die Abbildungen 5.31 bis 5.34 untereinander, erkennt man einen indirekten Zusammenhang zwischen Masse und Periodendauer. Mit Zunahme der Masse um einen Faktor von 10 verringert sich die Periodendauer um einen Faktor 10.

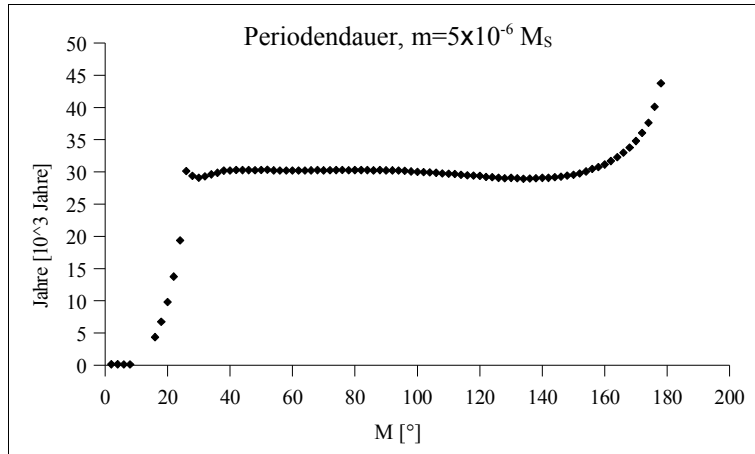
## 5.4.2 Abhängigkeit der Periodendauer der Exzentrizität $e$ in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie $M$ bei verschiedenen Massen $m$ und Exzentrizität $e$

Es wurde untersucht, wie sich die Periodendauer bei verschiedenen Werten für die mittlere Anomalie verhält. Als Anfangswerte für die Exzentrizität  $e$  wurden die Werte  $e=0,10$ ,  $e=0,40$  und  $e=0,70$  gewählt. Für die Massen wurden  $m=1 \times 10^{-6} M_S$ ,  $m=5 \times 10^{-6} M_S$ ,  $m=1 \times 10^{-5} M_S$ ,  $m=5 \times 10^{-5} M_S$ ,  $m=1 \times 10^{-4} M_S$  und  $m=5 \times 10^{-4} M_S$  gewählt. Die mittlere Anomalie wurde in  $\Delta M=2^\circ$  Schritten geändert. Es wurde teilweise auch in den instabilen Zonen die Periodendauer bestimmt, sofern die Konfiguration eine vollständige Periode durchlief.

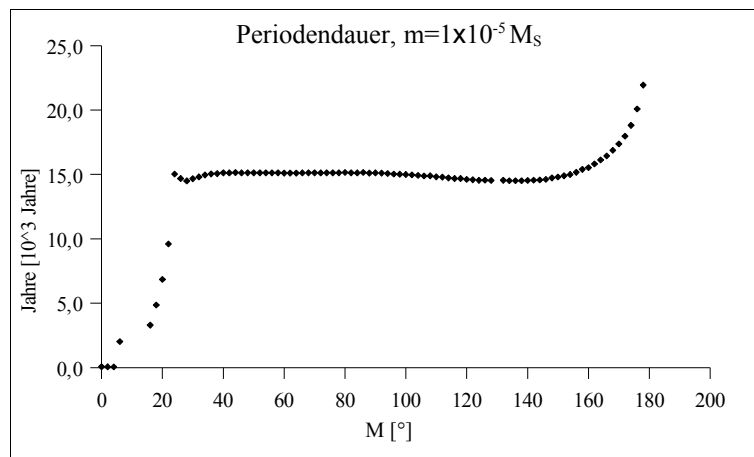
### 5.4.2.1 $e=0,10$



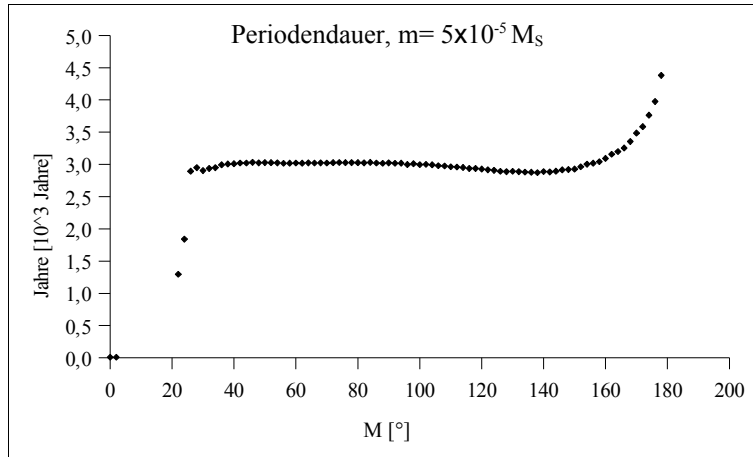
**Abb 5.35:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,10$  und  $m=1 \times 10^{-6} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=9^\circ$  bis  $M=13^\circ$  (s. Kapitel 5.2)



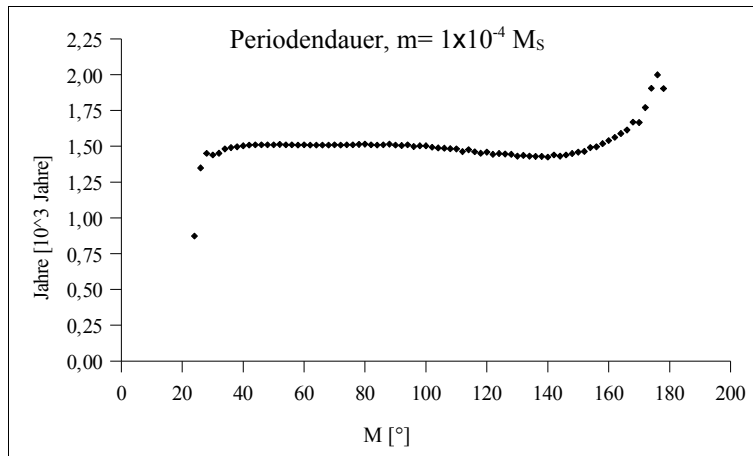
**Abb 5.36:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,10$  und  $m=5 \times 10^{-6} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=9^\circ$  bis  $M=14^\circ$  (s. Kapitel 5.2)



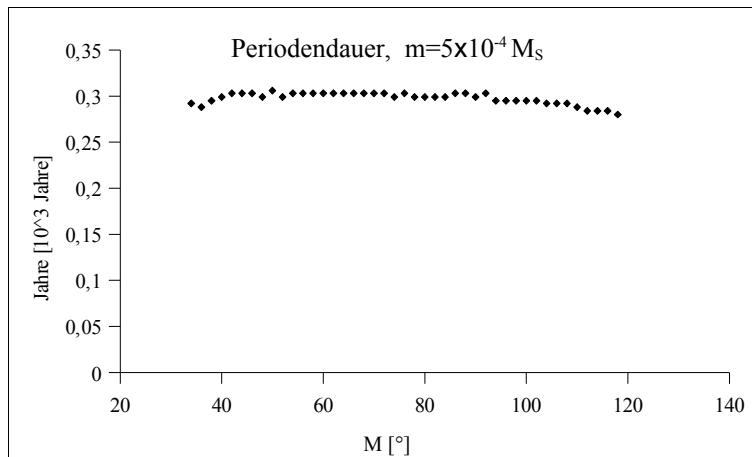
**Abb 5.37:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,10$  und  $m=1 \times 10^{-5} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=7^\circ$  bis  $M=17^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



**Abb 5.38:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,10$  und  $m=5 \times 10^{-5} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=0^\circ$  bis  $M=17^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



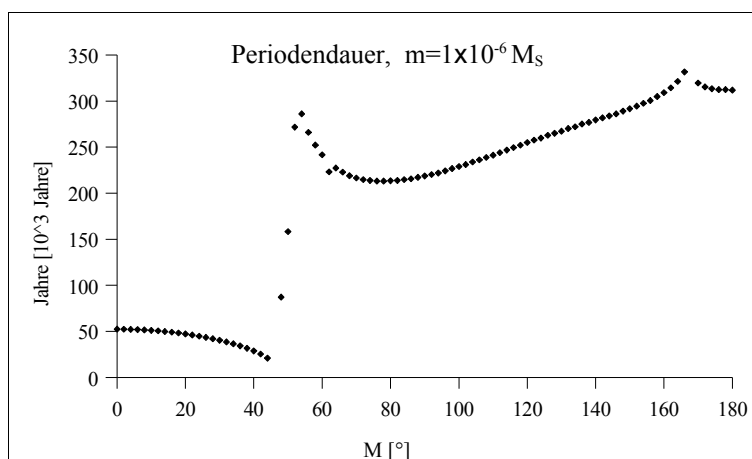
**Abb 5.39:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,10$  und  $m=1 \times 10^{-4} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=0^\circ$  bis  $M=25^\circ$  sowie zwischen  $M=153^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



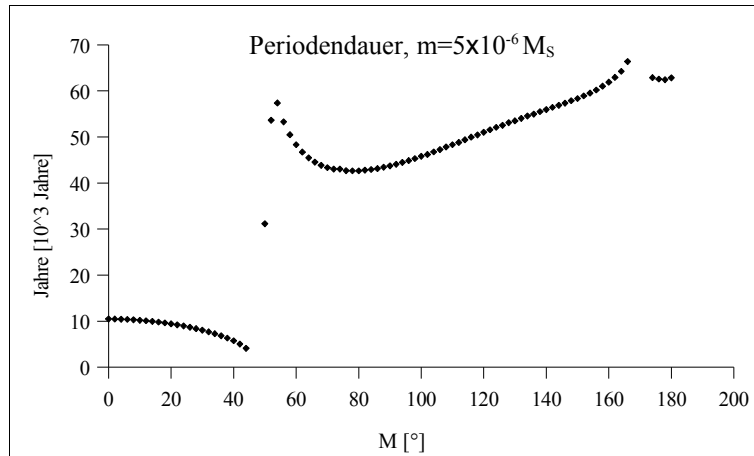
**Abb 5.40:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,10$  und  $m=5 \times 10^{-4} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=0^\circ$  bis  $M=35^\circ$  sowie zwischen  $M=111^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2).

Wie man in den Abbildungen 5.35 bis 5.39 sieht, ist die Periodendauer im niedrigen Bereich der mittleren Anomalie bis zum Instabilitätsbereich sehr gering, sobald jedoch der Instabilitätsbereich zu höheren Werten für die mittlere Anomalie verlassen wird, steigt die Periodendauer sprunghaft an, bleibt für einen relativ großen Bereich annähernd konstant, um dann ab ca.  $M=150^\circ$  wieder stark an zu steigen. In der Abbildung 5.39 nimmt die Periodendauer sogar merklich ab, bevor sie stark ansteigt.

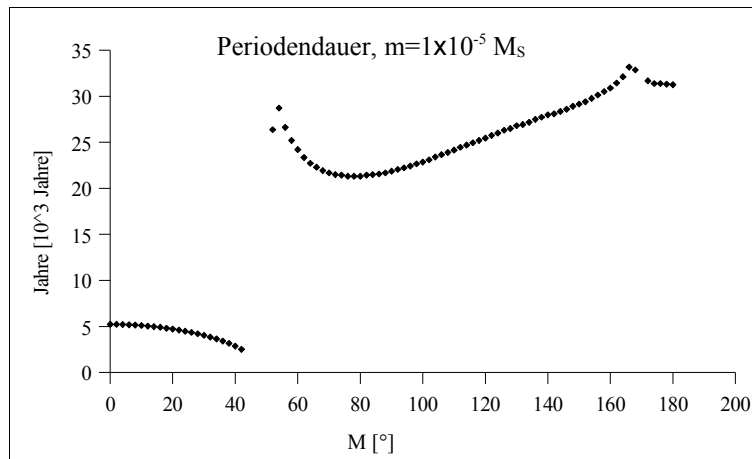
#### 5.4.2.2 $e=0,40$



**Abb 5.41:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,40$  und  $m=1 \times 10^{-6} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=40^\circ$  bis  $M=48^\circ$  (s. Kapitel 5.2).

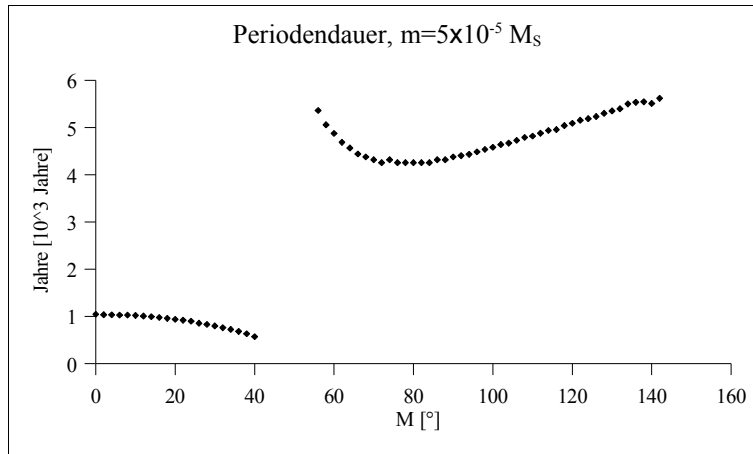


**Abb 5.42:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,40$  und  $m=5 \times 10^{-6} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=42^\circ$  bis  $M=50^\circ$  (s. Kapitel 5.2).

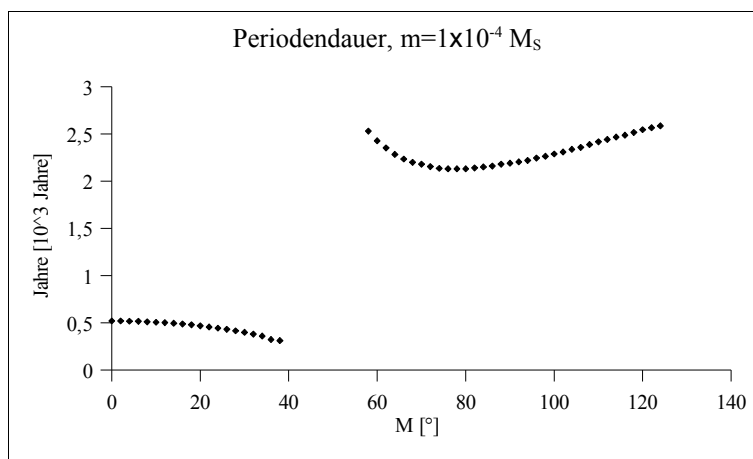


**Abb 5.43:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,40$  und  $m=1 \times 10^{-5} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=41^\circ$  bis  $M=52^\circ$  (s. Kapitel 5.2).

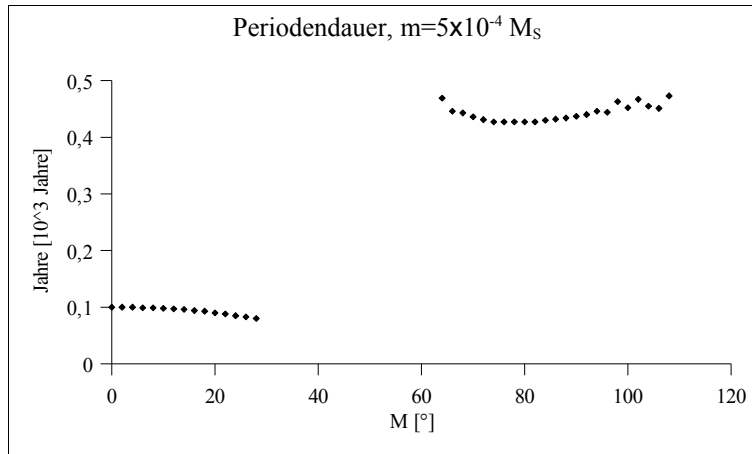




**Abb 5.44:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,40$  und  $m=5 \times 10^{-5} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=39^\circ$  bis  $M=57^\circ$  sowie zwischen  $M=130^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



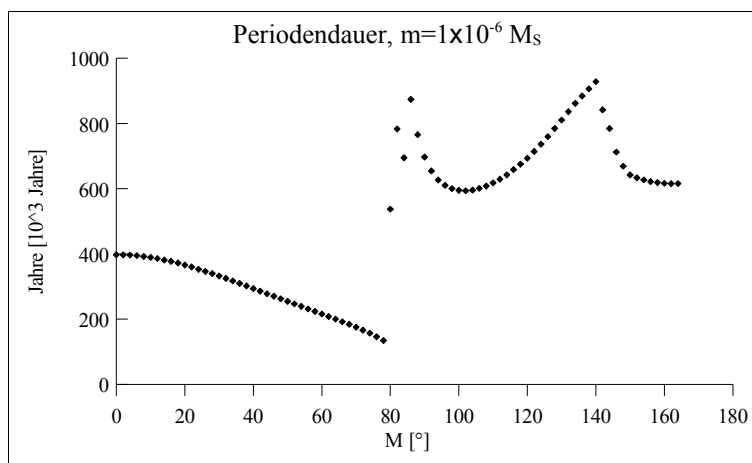
**Abb 5.45:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,40$  und  $m=1 \times 10^{-4} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=37^\circ$  bis  $M=60^\circ$  sowie zwischen  $M=112^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2)



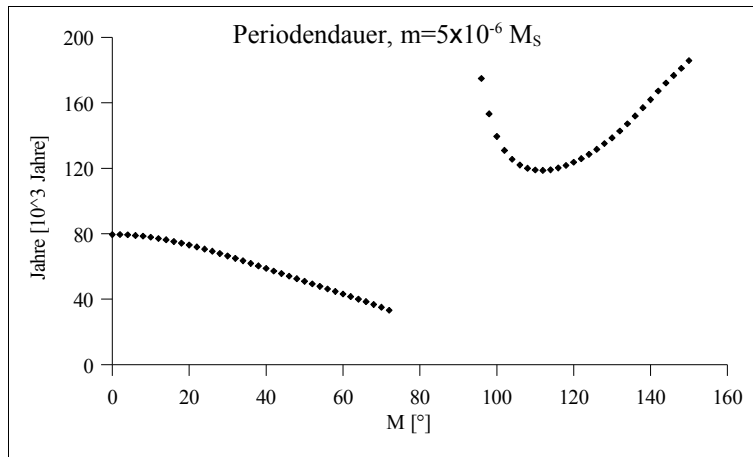
**Abb 5.46:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,40$  und  $m=5 \times 10^{-4} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=26^\circ$  bis  $M=69^\circ$  sowie zwischen  $M=93^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2).

Auch bei einer Exzentrizität von  $e=0,40$  ergibt sich ein interessanter Verlauf. Nach einer anfänglichen leichten Abnahme der Periodendauer bis zum Instabilitätsbereich kommt es wieder zu einer sprunghaften Zunahme der Periodendauer. Dann kommt es wieder zu einer Abnahme der Periodendauer bis zu einem Wert für die mittlere Anomalie  $M \sim 75^\circ$ . Anschließend steigt die Periodendauer annähernd linear wieder an.

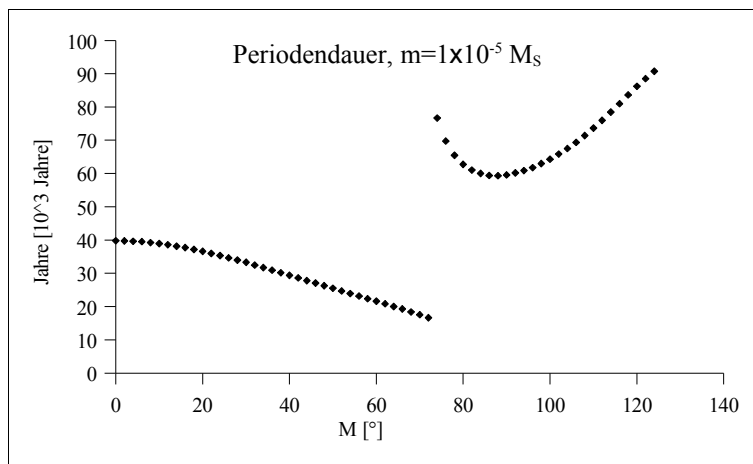
#### 5.4.2.3 $e=0,70$



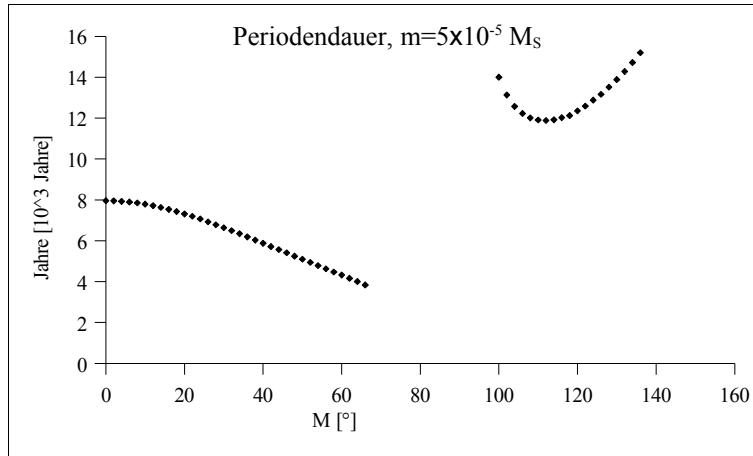
**Abb 5.47:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,70$  und  $m=1 \times 10^{-6} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=80^\circ$  bis  $M=89^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



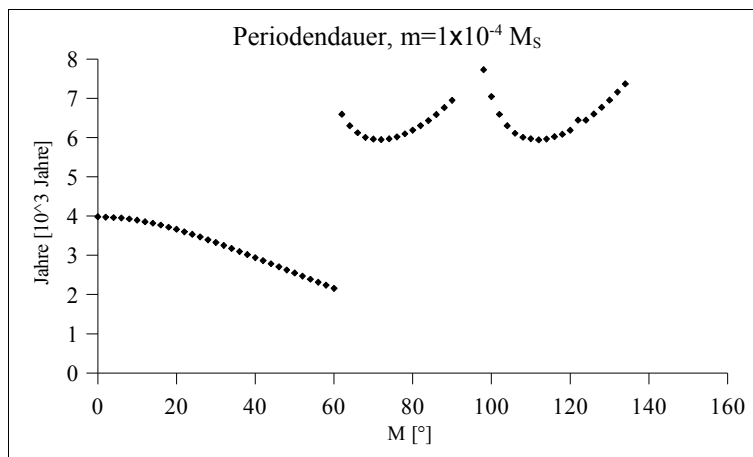
**Abb 5.48:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,10$  und  $m=5 \times 10^{-6} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=74^\circ$  bis  $M=95^\circ$  sowie zwischen  $M=154^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



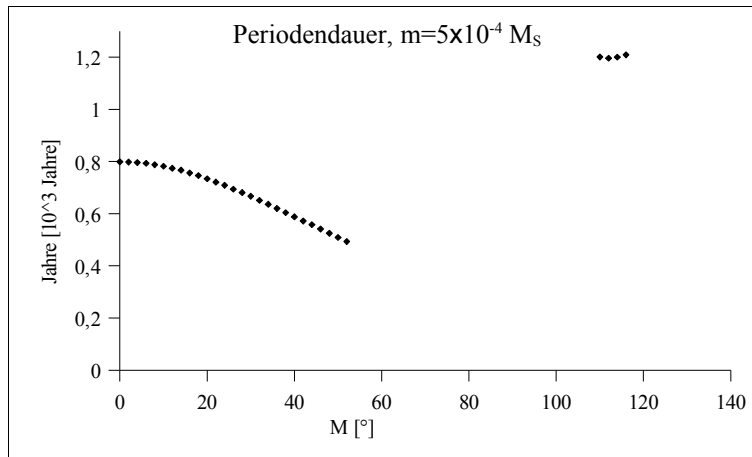
**Abb 5.49:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,70$  und  $m=1 \times 10^{-5} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=74^\circ$  bis  $M=96^\circ$  sowie zwischen  $M=150^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



**Abb 5.50:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,70$  und  $m=5 \times 10^{-5} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=67^\circ$  bis  $M=98^\circ$  sowie zwischen  $M=138^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



**Abb 5.51:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,70$  und  $m=1 \times 10^{-4} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=62^\circ$  bis  $M=100^\circ$  sowie zwischen  $M=131^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



**Abb 5.52:** Periodendauer der Exzentrizität  $e$  in Abhängigkeit von der mittleren Anomalie  $M$  bei  $e=0,70$  und  $m=5 \times 10^{-4} M_S$ . Der Instabilitätsbereich liegt zwischen  $M=53^\circ$  bis  $M=108^\circ$  sowie zwischen  $M=116^\circ$  bis  $M=180^\circ$  (s. Kapitel 5.2).

Auch hier fällt die Periodendauer anfänglich (nun etwas stärker als bei 5.4.2.1 und 5.4.2.2) ab um dann, nach dem Instabilitätsbereich, wieder sprunghaft anzusteigen, wieder ab zu fallen und schließlich wieder zu steigen. In Abbildung 5.47 fällt auf, dass es einen weiteren Abfall bei  $M=140^\circ$  gibt. In Abbildung 5.52 ist der Instabilitätsbereich bereits so groß, dass der zweite Teil der Kurve nur noch aus wenigen Datenpunkten besteht.

Betrachtet man zu Beginn Abbildung 5.35 (hier und in den folgenden Abbildungen 5.36 bis 5.40 wurde die Periodendauer für eine Exzentrizität von  $e=0,10$  betrachtet), so sieht man, dass die Periodendauer der Exzentrizität  $e$  zu Beginn kaum steigt. Sobald die mittlere Anomalie  $M$  den Instabilitätsbereich (der hier bei  $M=9^\circ$  bis  $M=13^\circ$  liegt) erreicht, steigt die Periodendauer stark an. Um etwa  $M=25^\circ$  fällt die Periodendauer wieder etwas ab und bleibt bei etwa  $M=30^\circ$  bis  $M=150^\circ$  annähernd konstant, um dann wieder stark anzusteigen. In den folgenden Abbildungen 5.36 bis 5.40 wurde die Masse  $m$  erhöht. Wieder sieht man, dass mit Zunahme der Masse  $m$  die Periodendauer abnimmt. Der grundsätzliche Verlauf der Kurven ändert sich kaum, erst bei einer Masse von  $m=5 \times 10^{-4} M_S$  (Abbildung 5.40) bleibt nur mehr der konstante Teil der Kurve übrig. Grund dafür ist, dass bei Massen dieser Größenordnung die Instabilitätsbereiche bereits einen sehr großen Bereich der mittleren Anomalie abdecken.

Bei einer Exzentrizität von  $e=0,40$  (Abbildungen 5.41 bis 5.46) ändert sich das Bild. Aufgrund der Verschiebung des Instabilitätsbereichs hin zu höheren Werten für die Mittlere Anomalie  $M$  ist nun der Bereich von  $M=0^\circ$  bis zur Instabilitätszone wesentlich größer.

Betrachtet man Abbildung 5.41, so sieht man, dass die Periodendauer leicht absinkt bis zum Instabilitätsbereich. Im Instabilitätsbereich steigt die Periodendauer wieder sehr stark an, um dann wieder im Bereich von  $M=50^\circ$  bis  $M=70^\circ$  jetzt exponentiell ab zu fallen und anschließend wieder linear anzusteigen (bei  $e=0,10$  war dieser Bereich annähernd konstant). Bei etwa  $M=165^\circ$  gibt es noch einmal einen kleinen Sprung, und danach fällt die Periodendauer wieder ab.

Mit Zunahme der Masse wird sowohl der Anfangsbereich, aufgrund der Vergrößerung des Instabilitätsbereichs als auch der Bereich nach dem Instabilitätsbereich kleiner, wobei die Veränderung nach dem Instabilitätsbereich wesentlich augenscheinlicher ist.

Noch deutlicher fällt die Abhängigkeit der Periodendauer der Exzentrizität  $e$  von der Masse bei  $e=0,70$ . Im Grund gilt auch hier, was bereits bei  $e=0,40$  über den Verlauf gesagt wurde, allerdings sind die Anstiege und Abfälle wesentlich steiler als bei der Exzentrizität  $e=0,40$ .

## **5.5 Periastrondrehung**

Ein weiteres Phänomen, das bei Exchange-Orbits in der 1:1-Resonanz auftritt, ist eine Periastrondrehung beider Orbits. Hier wurde die Periastrondrehung für  $m=1 \times 10^{-6} M_S$ ,  $m=5 \times 10^{-6} M_S$ ,  $m=1 \times 10^{-5} M_S$ ,  $m=5 \times 10^{-5} M_S$ ,  $m=1 \times 10^{-4} M_S$  und  $m=5 \times 10^{-4} M_S$  bei  $e=0,70$  als Anfangsbedingung für den exzentrischen Orbit und für die mittlere Anomalie wurde ein Startwert von  $M=0^\circ$  für beide Orbits gewählt.

Die Periastrondrehung lässt sich dadurch erklären, dass die Periode eines Exchanges nicht mit der Orbitalperiode übereinstimmt (wenn die Exzentrizität  $e$  einer Umlaufbahn des Planeten das Maximum erreicht, hat der Planet selbst noch keinen vollen Umlauf abgeschlossen). Weiters erkennt man, dass die Drehung des Periastrons auch von der Masse der Planeten abhängt, was wieder durch die erhöhte Gravitationskraft bei höheren Massen zu erklären ist.

### 5.5.1 $m=1 \times 10^{-6} M_S$

Für die Integrationsdauer wurden hier 70.000 Jahre gewählt.

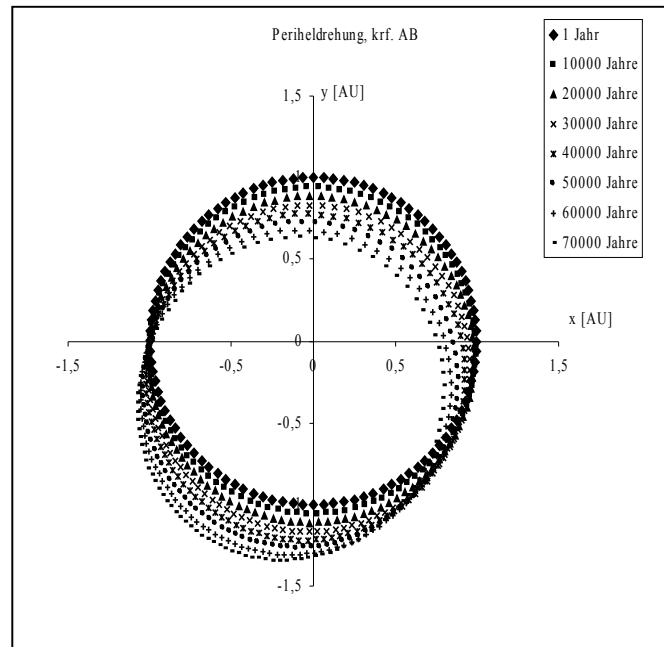


Abb 5.53: Periastrondrehung für den Orbit mit kreisförmiger Anfangsbedingung

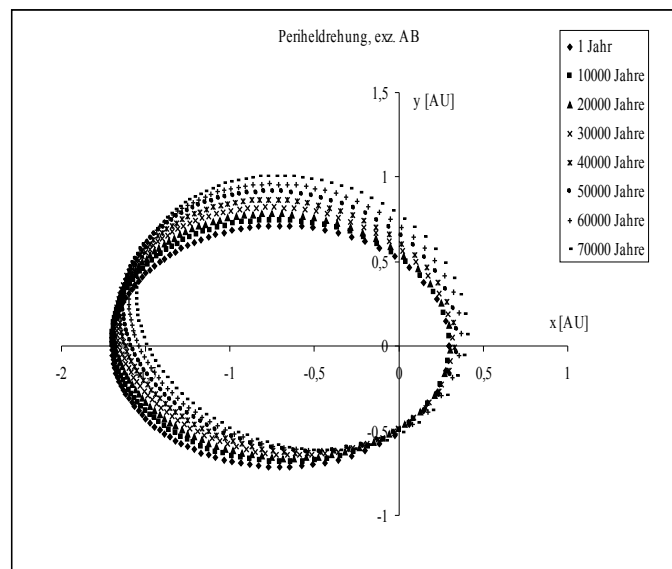
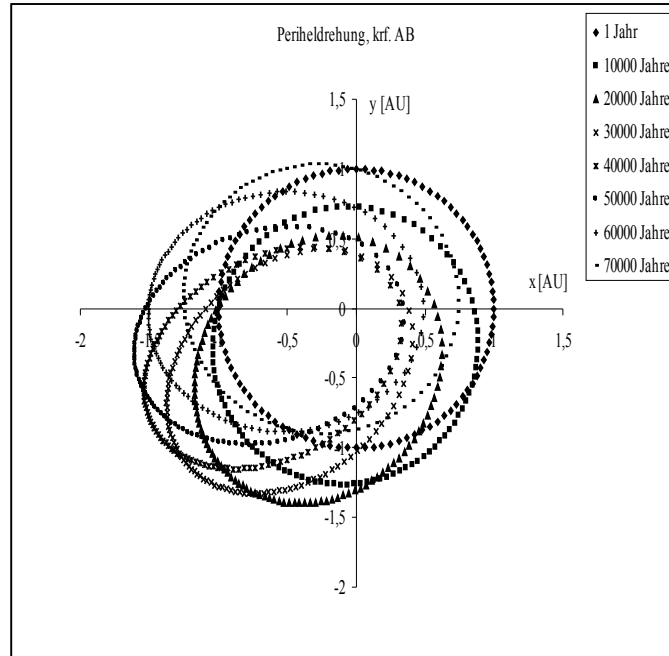


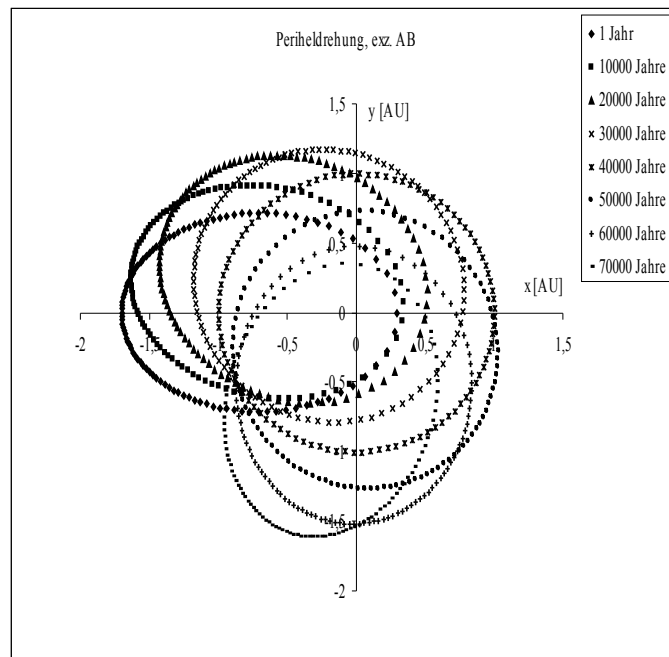
Abb 5.54: Periastrondrehung für den Orbit mit exzentrischer Anfangsbedingung

### 5.5.2 $m=5 \times 10^{-6} M_s$

Auch hier wurde eine Integrationsdauer von 70.000 Jahre gewählt.



*Abb 5.55: Periastrondrehung für den Orbit mit kreisförmiger Anfangsbedingung*



*Abb 5.56: Periastrondrehung für den Orbit mit exzentrischer Anfangsbedingung*



### 5.5.3 $m=1 \times 10^{-5} M_s$

Für die Integrationsdauer wurden jetzt 1.100 Jahre gewählt.

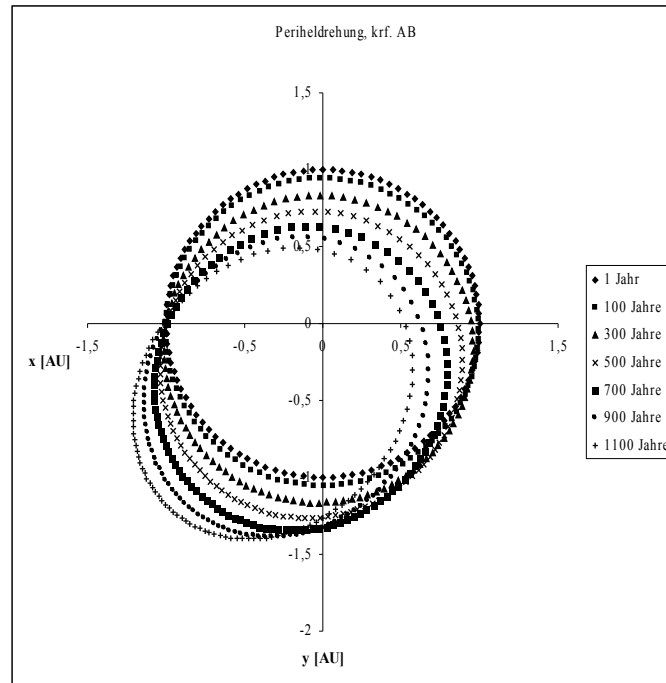


Abb 5.57: Periastrondrehung für den Orbit mit kreisförmiger Anfangsbedingung

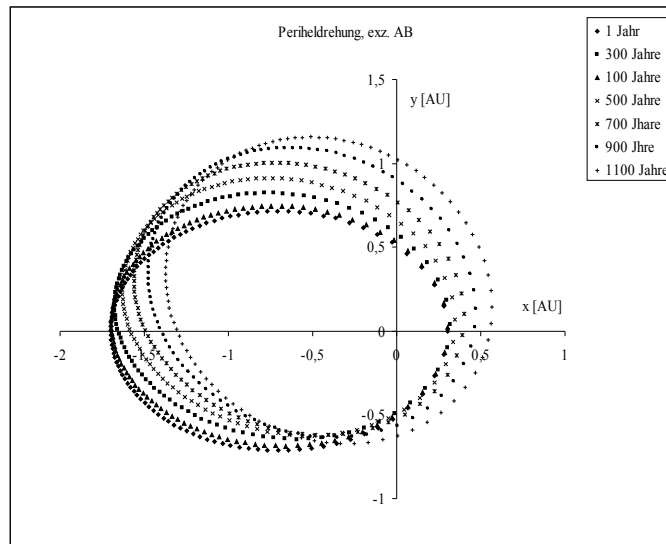
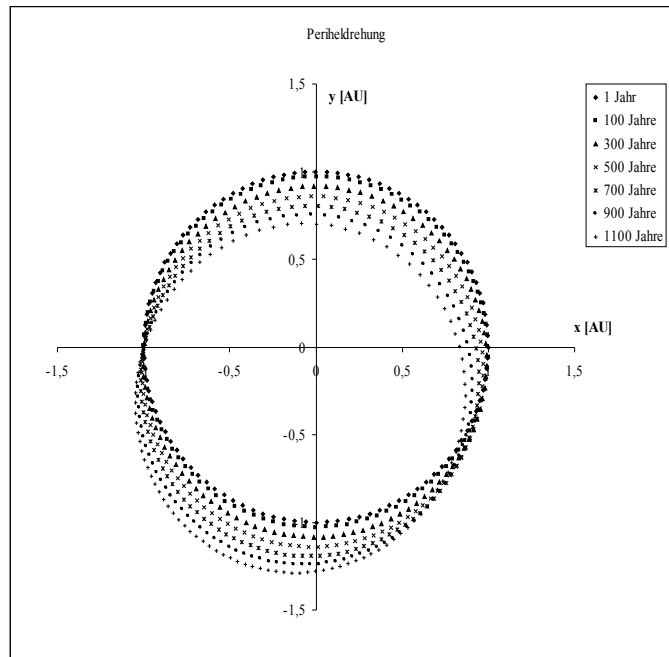


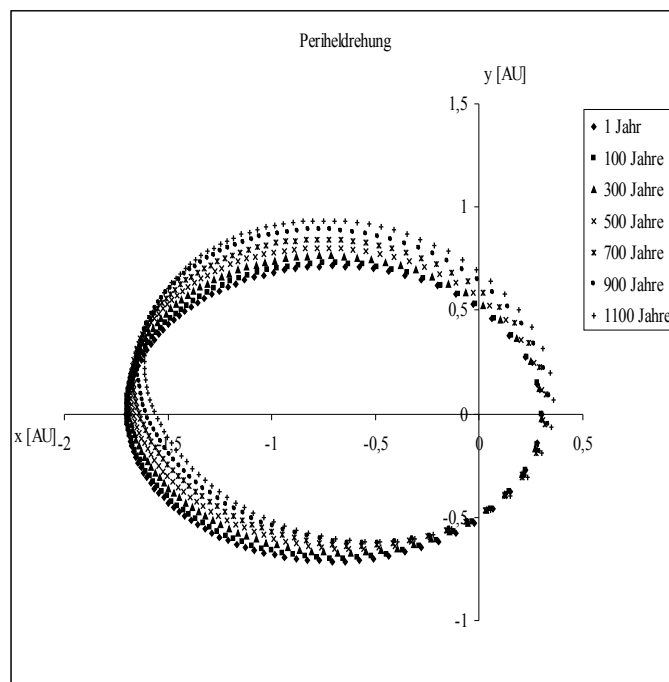
Abb 5.58: Periastrondrehung für den Orbit mit exzentrischer Anfangsbedingung

### 5.5.4 $m=5 \times 10^{-5} M_{\odot}$

Auch hier wurde die Integrationsdauer auf 1.100 Jahre gesetzt.



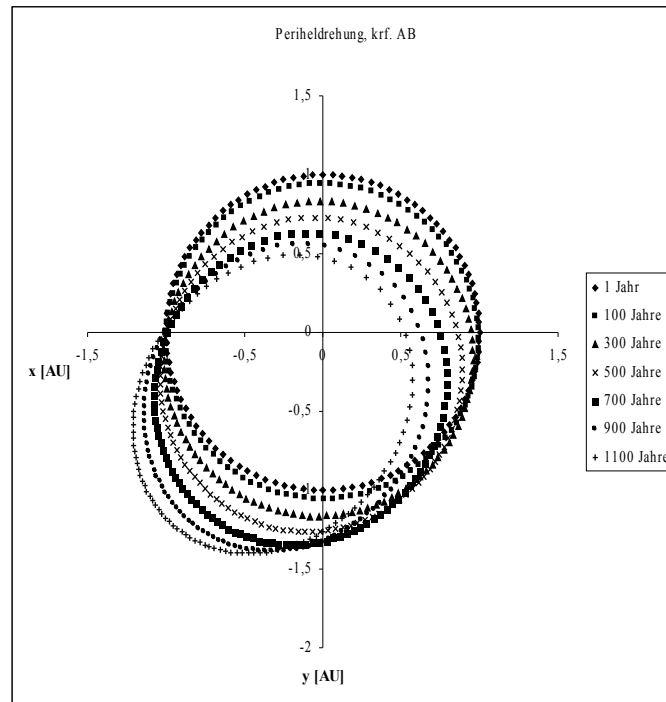
*Abb 5.59: Periastrondrehung für den Orbit mit kreisförmiger Anfangsbedingung*



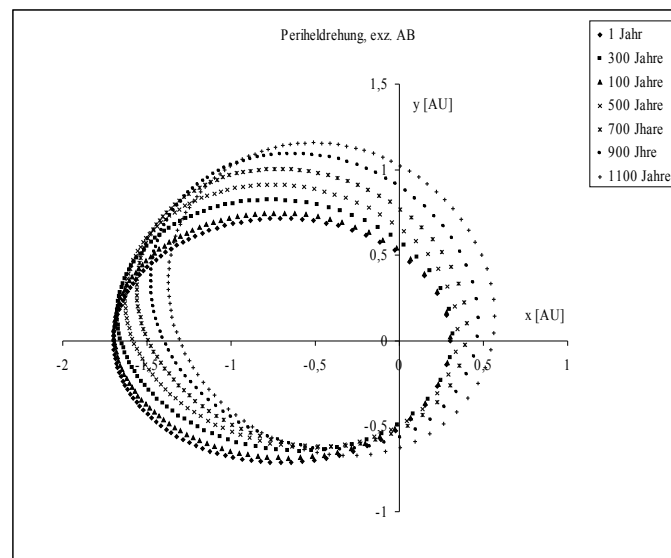
*Abb 5.60: Periastrondrehung für den Orbit mit exzentrischer Anfangsbedingung*

### 5.5.5 $m=1 \times 10^{-4} M_S$

Auch hier wurde für die Integrationsdauer 1.100 Jahre gewählt.



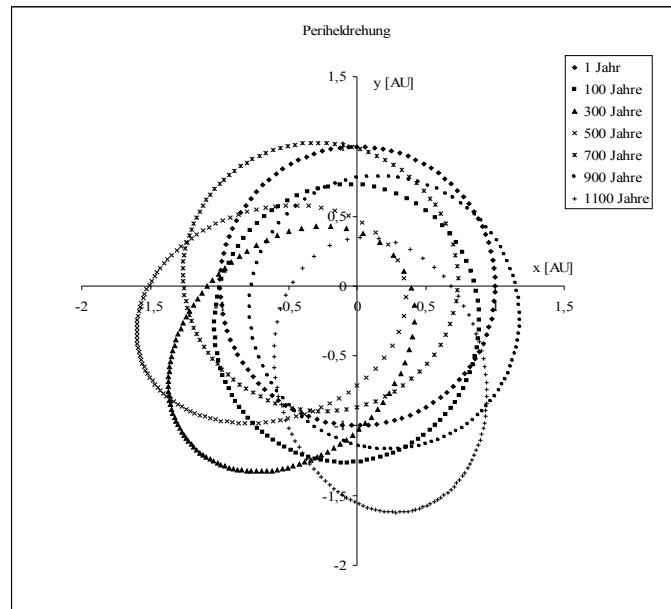
*Abb 5.61: Periastrondrehung für den Orbit mit kreisförmiger Anfangsbedingung*



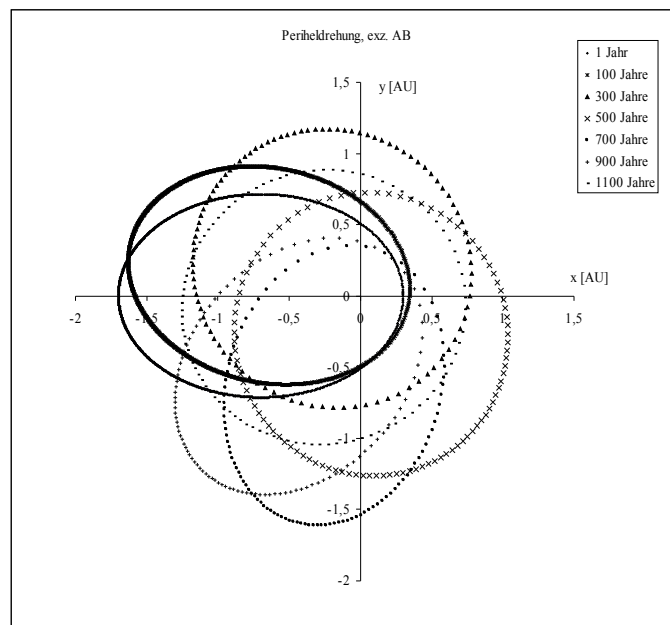
*Abb 5.62: Periastrondrehung für den Orbit mit exzentrischer Anfangsbedingung*

### 5.5.6 $m=5 \times 10^{-4} M_{\odot}$

Für die Integrationsdauer wurden hier wieder 1.100 Jahre gewählt.



*Abb 5.63: Periastrondrehung für den Orbit mit exzentrischer Anfangsbedingung*



*Abb 5.64: Periastrondrehung für den Orbit mit exzentrischer Anfangsbedingung*

## 5.6 Verschiedene Exchange-Orbits

In diesem Kapitel werden verschiedene Exchange-Orbits untersucht. Vor allem Einfluss der Masse, mittlere Anomalie und auch der Zusammenhang mit dem Drehimpuls  $L$  sollen untersucht werden. Für die Exzentrizität wurde ein Startwert von  $e=0,70$  gewählt.

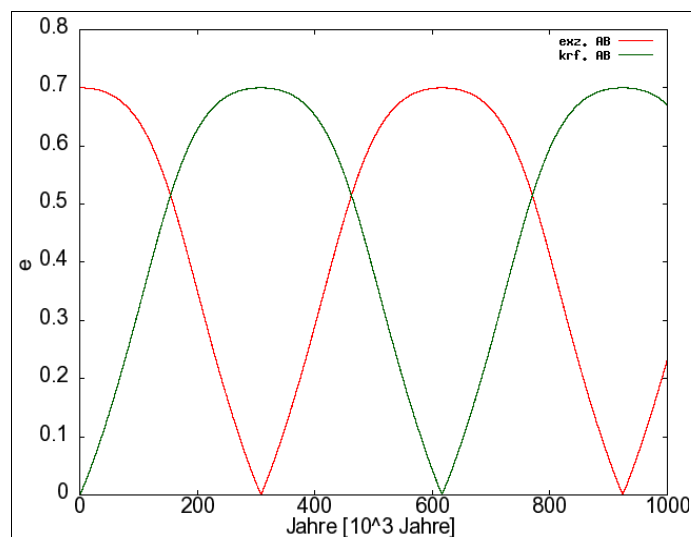
### 5.6.1 $m=1 \times 10^{-6} M_s$

Zuerst wurden Konfigurationen mit einer Planetenmasse von  $m=1 \times 10^{-6} M_s$  bei verschiedenen Startwerten für die mittlere Anomalie  $M$  untersucht.

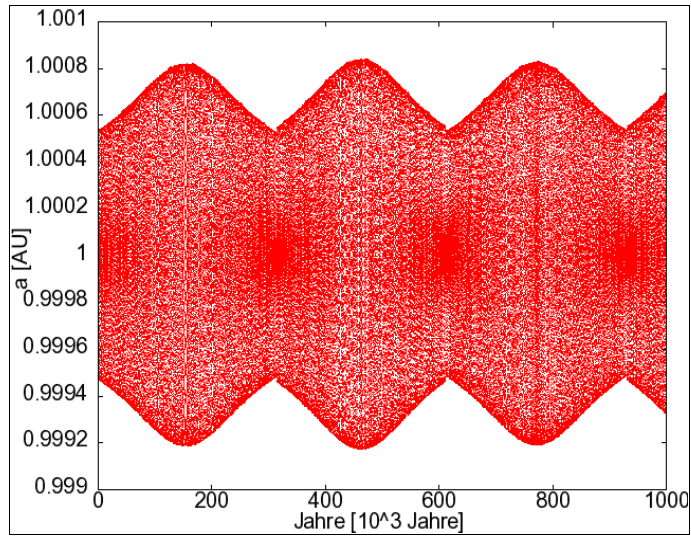
#### 5.6.1.1 $M=180^\circ$

	a [AU]	e	i [°]	$\Omega$ [°]	$\omega$ [°]	M [°]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	180,0	$1 \times 10^{-6}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-6}$

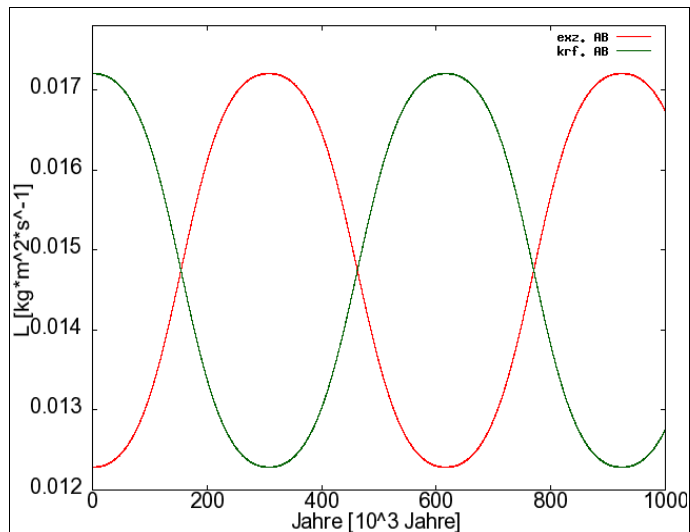
*Tabelle 5.14: Startwerte*



*Abb 5.65: Verlauf der Exzentrizität  $e$  für die kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingungen*



**Abb 5.66:** Verlauf der großen Halbachsen  $a$ .



**Abb 5.67:** Verlauf des Drehimpulses  $L$  für die kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung

Die Abbildungen 5.65 und 5.66 zeigen den Verlauf der Bahnelemente  $a$  und  $e$  mit der Zeit. Abbildung 5.67 zeigt den Verlauf des Drehimpulses  $L$  gegen die Zeit. Vergleicht man nun die Abbildungen 5.65 und 5.67 sieht man, dass die Periodendauer der Exzentrizität  $e$  und des Drehimpulses  $L$  korrelieren, wobei der Planet mit der kreisförmigen Anfangsbedingung einen höheren Anfangsdrehimpuls aufweist als der exzentrische.

5.6.1.2  $M=140^\circ$

	a [AU]	e	i [ $^\circ$ ]	$\Omega$ [ $^\circ$ ]	$\omega$ [ $^\circ$ ]	M [ $^\circ$ ]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	140,0	$1 \times 10^{-6}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-6}$

Tabelle 5.15: Startwerte

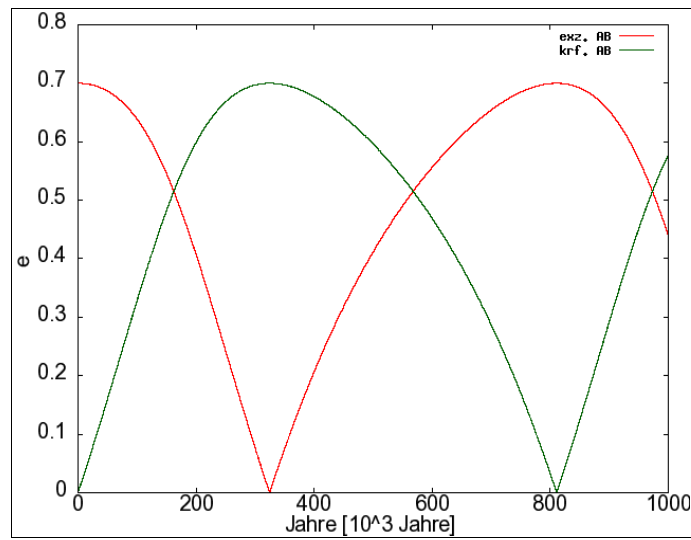


Abb 5.68: Verlauf der Exzentrizität  $e$  für die kreisförmigen und exzentrischen Anfangsbedingungen

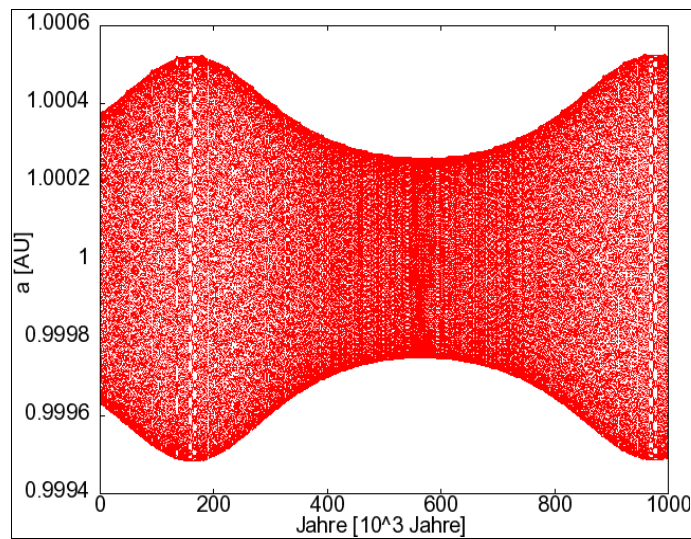
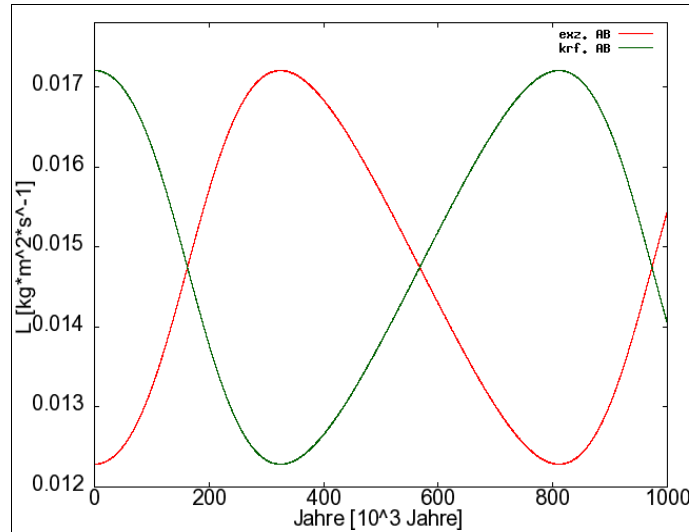


Abb 5.69: Verlauf der großen Halbachsen  $a$ .



**Abb 5.70:** Verlauf des Drehimpulses  $L$  für die kreisförmigen und exzentrischen Anfangsbedingungen

In Abbildung 5.68 lässt sich ersehen, dass die Periodendauer von der Exzentrizität  $e$  abhängt, wenn man mit der Periodendauer in Abbildung 5.65 vergleicht (s. auch Kapitel 5.3 ff).

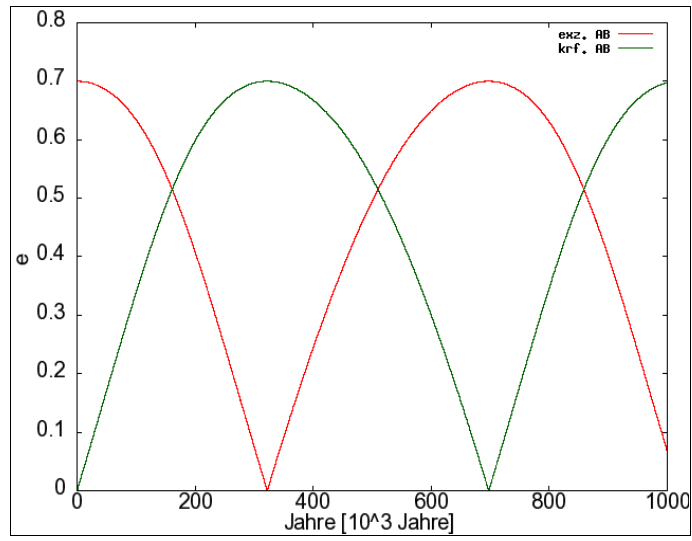
In Abbildung 5.68 sieht man auch, dass vom Startwert der mittleren Anomalie  $M$  auch die Form der Schwingungen abhängt. Entsprechend ist auch der Verlauf des Drehimpulses  $L$  verzerrt (s. Abbildung 5.70).

### 5.6.1.3 $M=100^\circ$

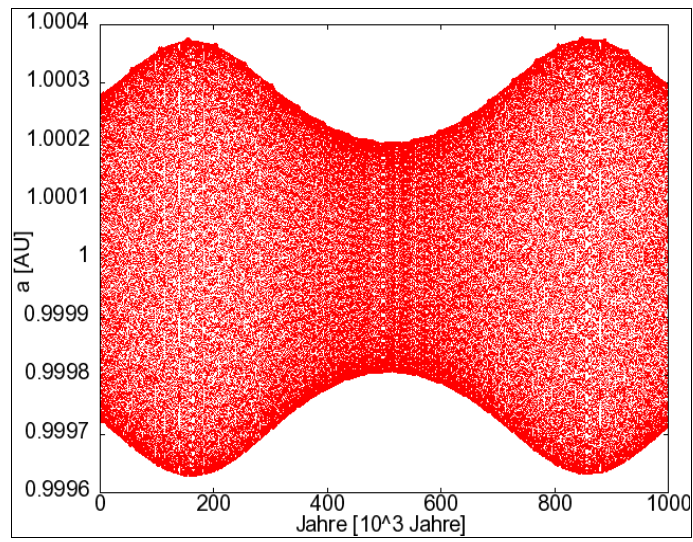
	a [AU]	e	i [°]	$\Omega$ [°]	$\omega$ [°]	M [°]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	100,0	$1 \times 10^{-6}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-6}$

**Tabelle 5.16:** Startwerte

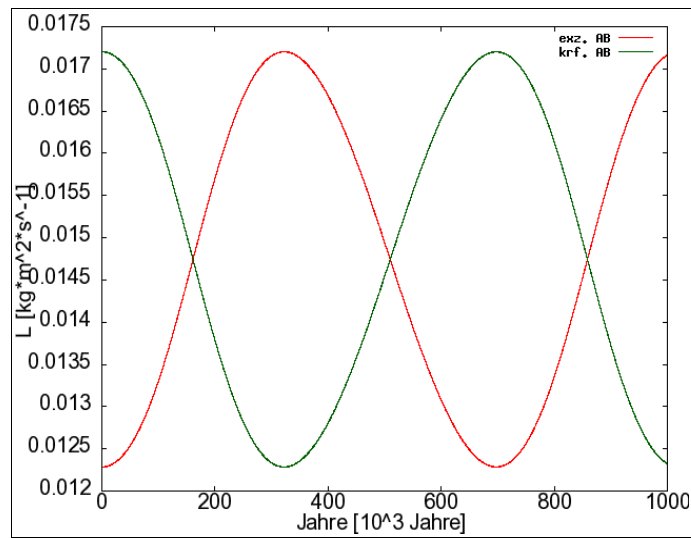




*Abb 5.71: Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung*



*Abb 5.72: Verlauf der großen Halbachsen  $a$*



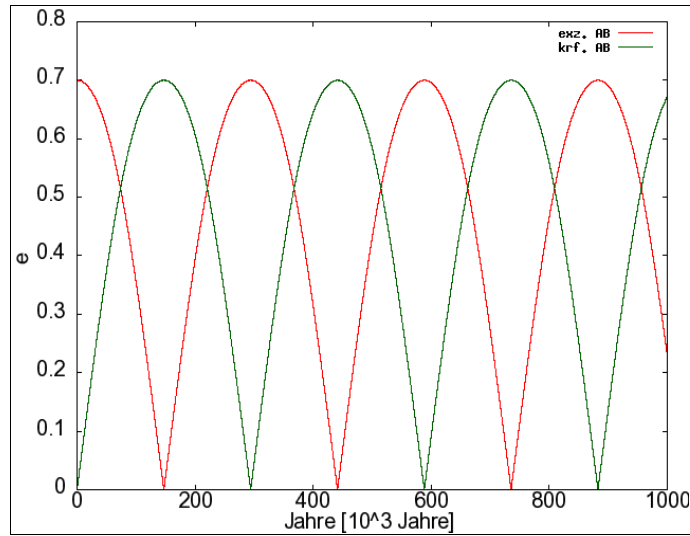
**Abb 5.73:** Verlauf des Drehimpulses  $L$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung

Auch hier ist eine leichte Deformierung bei den Schwingungen der Exzentrizität wie in Abbildung 5.71 zu erkennen. Allerdings nicht mehr so deutlich wie in Abbildung 5.68.

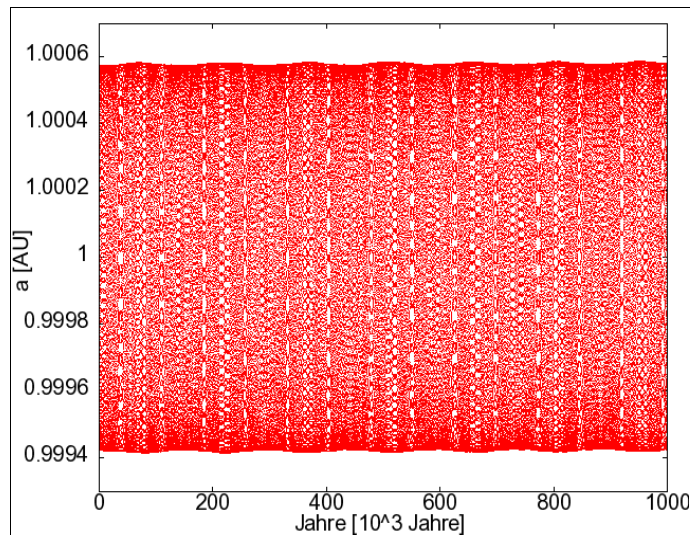
#### 5.6.1.4 $M=40^\circ$

	a [AU]	e	i [°]	$\Omega$ [°]	$\omega$ [°]	M [°]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	40,0	$1 \times 10^{-6}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-6}$

**Tabelle 5.17:** Startwerte



**Abb 5.74:** Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung



**Abb 5.75:** Verlauf der großen Halbachsen  $a$

In Abbildung 5.74 sieht man eine deutliche Verkürzung der Periodendauer für die Exzentrizität im Vergleich zur den Periodendauer in den Abbildungen 5.65, 5.68 und 5.71. In Abbildung 5.75 sieht man, dass sich auch der Verlauf der großen Halbachsen  $a$  im Vergleich mit den Abbildungen 5.66, 5.69 und 5.72 stark verändert hat.

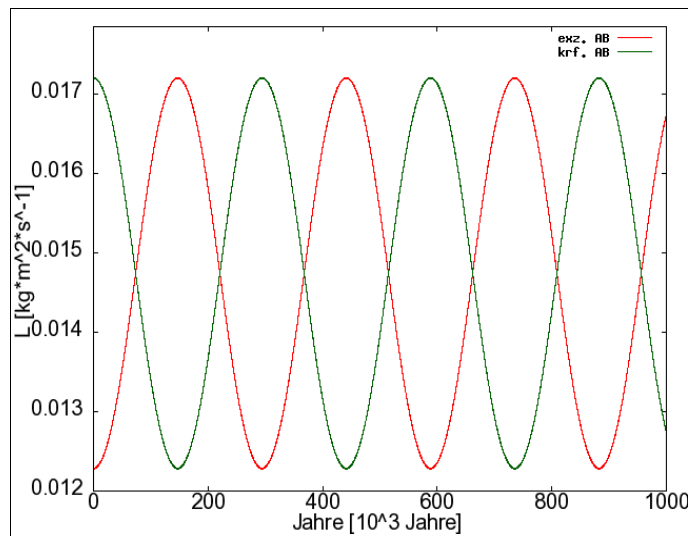


Abb 5.76: Verlauf des Drehimpulses  $L$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung

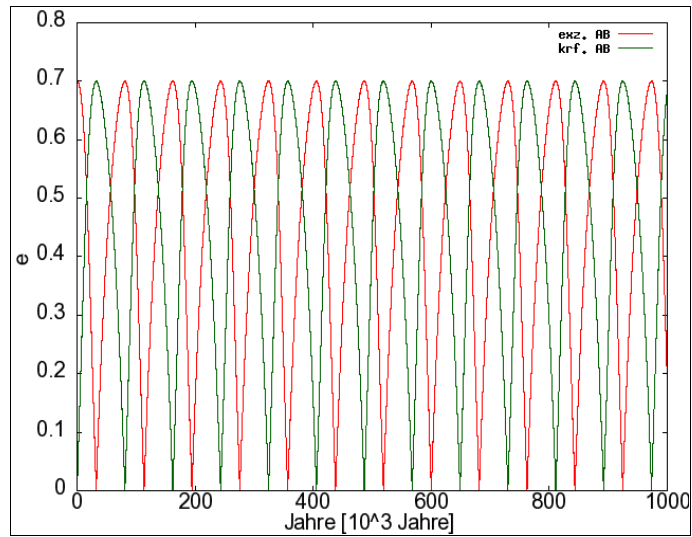
### 5.6.2 $m=1 \times 10^{-5} M_s$

Hier wurden Konfigurationen mit einer Planetenmasse von  $m=1 \times 10^{-5} M_s$  bei verschiedenen Startwerten für die mittlere Anomalie  $M$  untersucht bei eine Exzentrizität  $e=0,70$ .

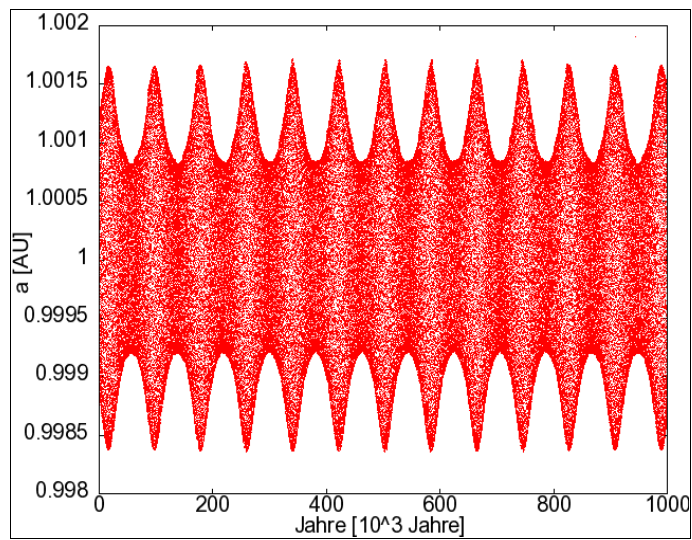
#### 5.6.2.1 $M=140^\circ$

	a [AU]	e	i [ $^\circ$ ]	$\Omega$ [ $^\circ$ ]	$\omega$ [ $^\circ$ ]	M [ $^\circ$ ]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	140	$1 \times 10^{-5}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-5}$

Tabelle 5.18: Startwerte



*Abb 5.77: Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung*



*Abb 5.78: Verlauf der großen Halbachsen  $a$*

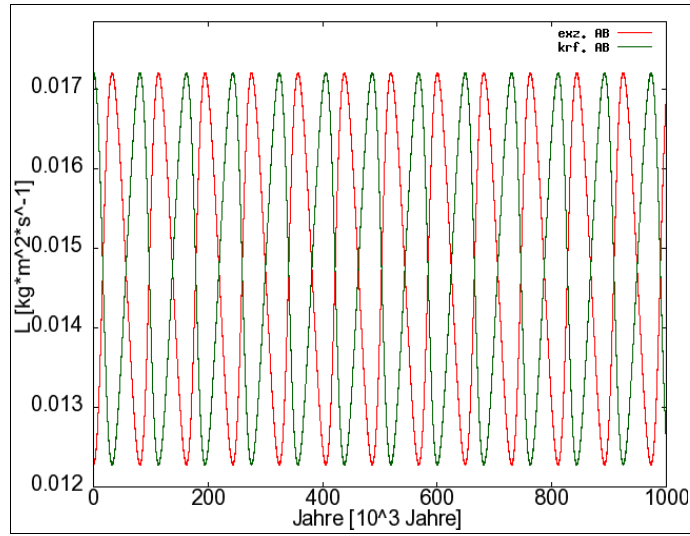
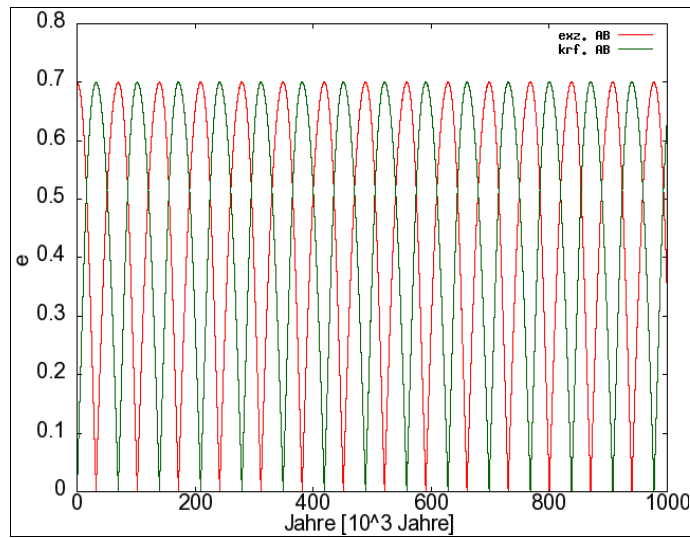


Abb 5.79: Verlauf des Drehimpulses  $L$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung

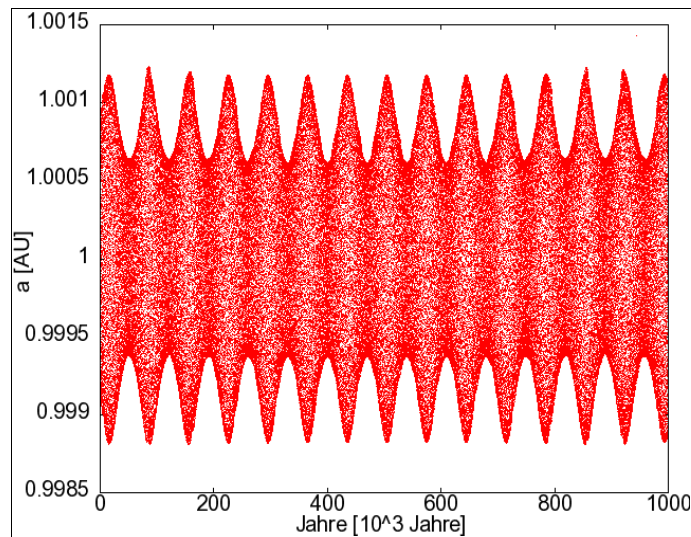
5.6.2.2  $M=100^\circ$

	a [AU]	e	i [°]	$\Omega$ [°]	$\omega$ [°]	M [°]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	100	$1 \times 10^{-5}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-5}$

Tabelle 5.19: Startwerte



*Abb 5.80: Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung*



*Abb 5.81: Verlauf der großen Halbachsen  $a$*

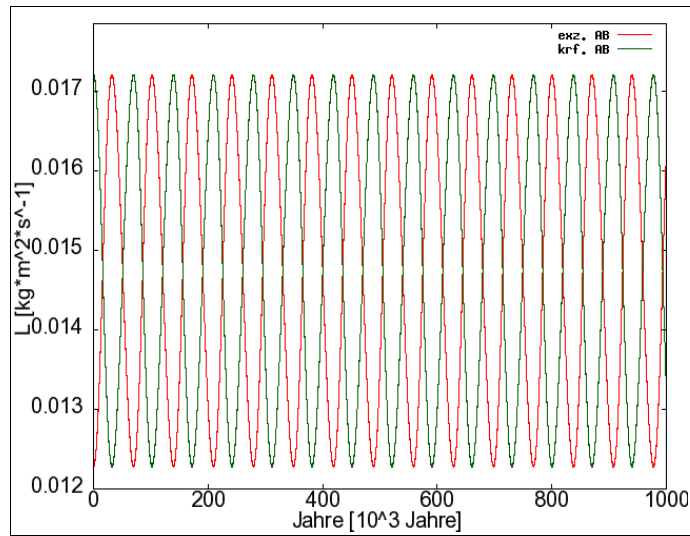


Abb 5.82: Verlauf des Drehimpulses  $L$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung

5.6.2.3  $M=40^\circ$

	a [AU]	e	i [°]	$\Omega$ [°]	$\omega$ [°]	M [°]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	40	$1 \times 10^{-5}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-5}$

Tabelle 5.20: Startwerte

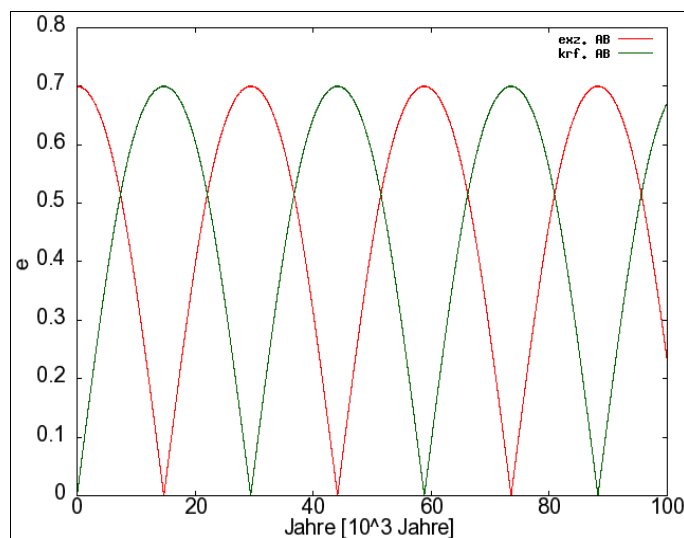


Abb 5.83: Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung



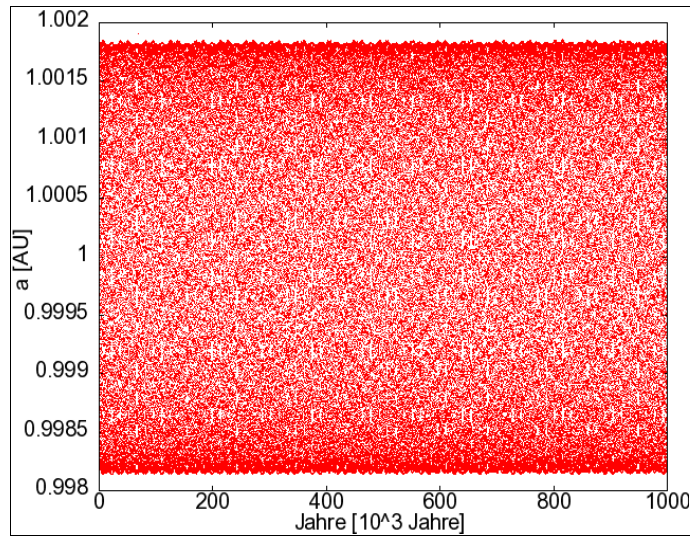


Abb 5.84: Verlauf der großen Halbachsen  $a$

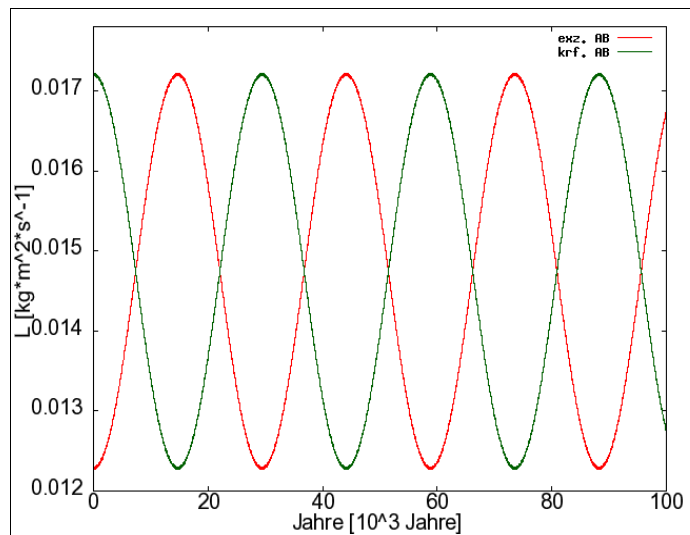


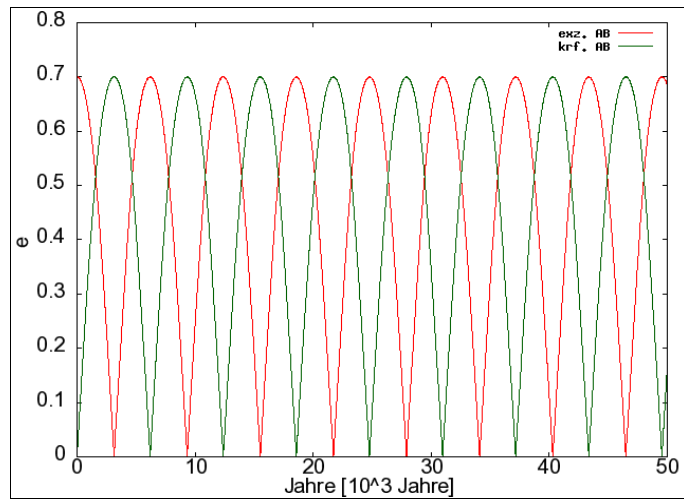
Abb 5.85: Verlauf des Drehimpulses  $L$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung

### 5.6.3. $m=1 \times 10^{-4} M_s$

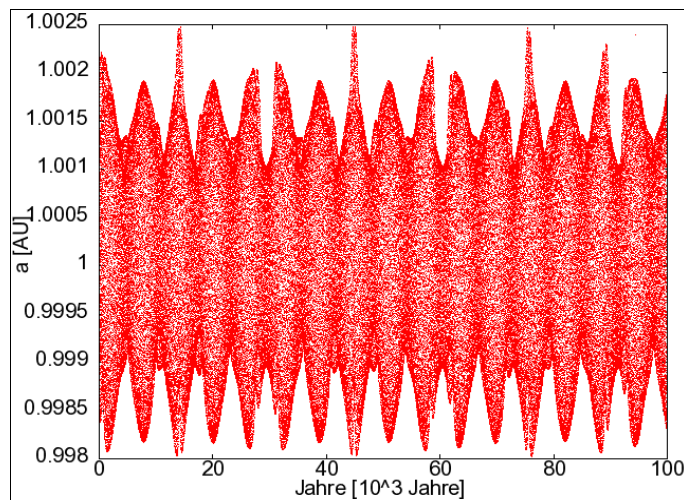
#### 5.6.3.1 $M=120^\circ$

	$a$ [AU]	$e$	$i$ [ $^\circ$ ]	$\Omega$ [ $^\circ$ ]	$\omega$ [ $^\circ$ ]	$M$ [ $^\circ$ ]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	120	$1 \times 10^{-4}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-4}$

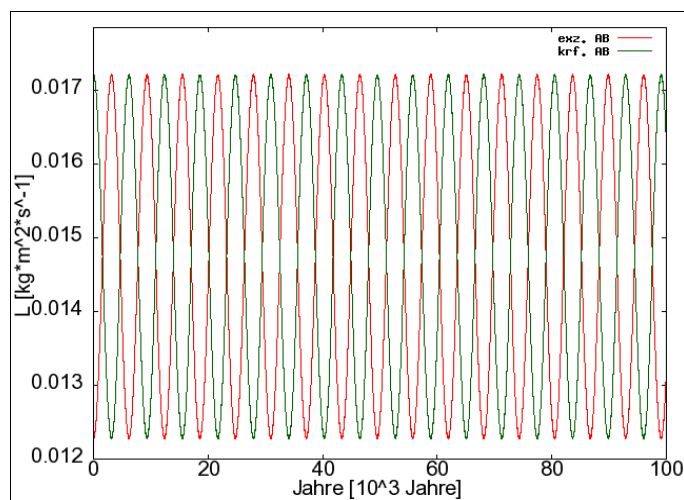
Tabelle 5.21: Startwerte



**Abb 5.86:** Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung



**Abb 5.87:** Verlauf der großen Halbachsen  $a$

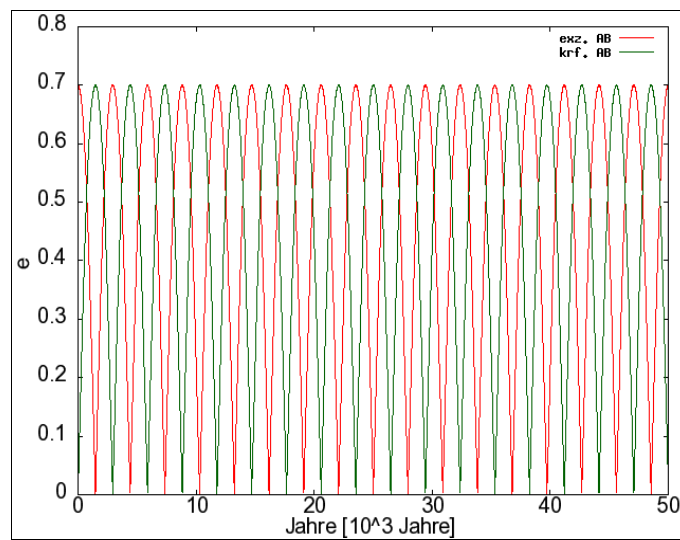


**Abb 5.88:** Verlauf des Drehimpulses  $L$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung

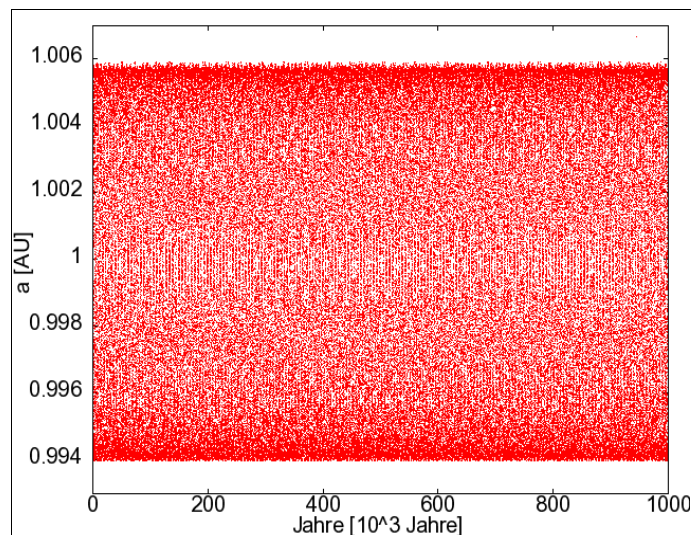
### 5.6.3.2 $M=40^\circ$

	a [AU]	e	i [ $^\circ$ ]	$\Omega$ [ $^\circ$ ]	$\omega$ [ $^\circ$ ]	M [ $^\circ$ ]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	40	$1 \times 10^{-4}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-4}$

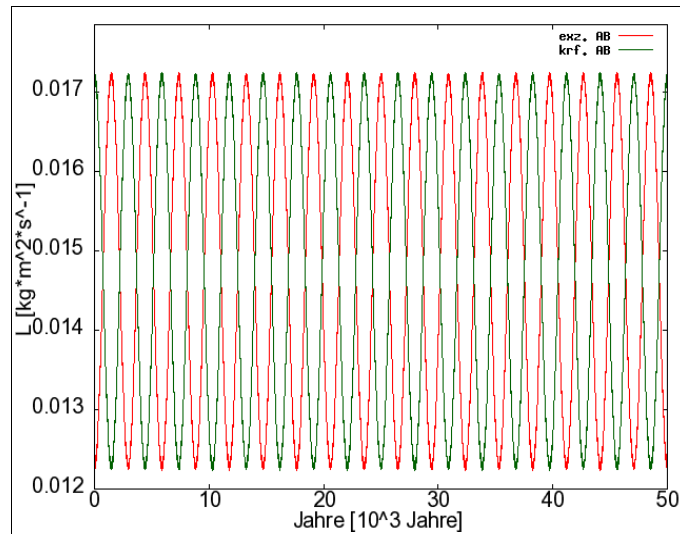
**Tabelle 5.22:** Startwerte



**Abb 5.89:** Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung



**Abb 5.90:** Verlauf der großen Halbachsen  $a$



**Abb 5.91:** Verlauf des Drehimpulses für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, erfolgt der Austausch der Orbits durch Drehimpulsübertragung. Dabei sieht man, dass die Exzentrizität  $e$  Sinushalbschwingungen ähnlich verläuft, während der Drehimpuls  $L$  einen sinusähnlichen Verlauf hat. Der Verlauf der großen Halbachse  $a$  zeigt eine andere Form als Drehimpuls  $L$  und Exzentrizität  $e$ , Minima und Maxima stehen aber im Zusammenhang mit den Verläufen von Drehimpuls  $L$  und Exzentrizität  $e$ .

Betrachtet man zuerst die Abbildungen 5.65 bis 5.67, so sieht man, dass die große Halbachse  $a$  nicht gleich bleibt, sondern ebenfalls, so wie Exzentrizität  $e$  und Drehimpuls  $L$ , schwingt. Auffällig ist, dass die Maximalauslenkung dieser Schwingung bei jenem Zeitpunkt liegt, bei dem die Exzentrizitäten der beiden Planeten bzw. deren Drehimpulse gleich sind. Die minimale Auslenkung der großen Halbachse  $a$  fällt wiederum mit jenem Zeitpunkt zusammen, an dem der Drehimpuls  $L$  der exzentrischen Anfangsbedingung maximal und der Drehimpuls der kreisförmigen Anfangsbedingung minimal ist bzw. die beiden Planeten wieder ihre Anfangsexzentrizität erreicht haben.

In den Abbildungen 5.68 bis 5.71 erkennt man eine Deformierung der Schwingungen gegenüber der Abbildung 5.65. Der Verlauf der Auslenkung der großen Halbachsen  $a$  entspricht wieder den Schnittpunkten der Exzentrizität  $e$  bzw. des Drehimpulses  $L$  so wie für die Abbildungen 5.64 bis 5.67 beschrieben. Daraus ergibt sich der auseinander gezogene

Verlauf der Maximalauslenkungen der großen Halbachsen  $a$  in Abbildung 5.69. Der Verlauf des Drehimpulses  $L$  ist ebenfalls deformiert.

In den Abbildungen 5.71 bis 5.73 sieht man nur noch eine geringe Deformierung, während die Abbildungen 5.74 bis 5.76 keine Deformierung mehr aufweisen. Ansonsten gilt für den Verlauf von Exzentrizität  $e$ , Halbachse  $a$  und Drehimpuls  $L$  das bereits oben gesagte.

In weiterer Folge wurde die Masse der Planeten erhöht. Die Form des Verlaufs von Exzentrizität  $e$  und Drehimpulses  $L$  bleibt weiterhin sinusförmig so wie oben beschrieben. Allerdings ändert sich wie in Kapitel 5.4 beschrieben die Periodendauer sowohl für die Exzentrizität als auch für den Drehimpuls. Auch auffallend ist, dass sich die Maximalauslenkung für die große Halbachse  $a$  mit Zunahme der Masse erhöht. Ansonsten ist auch hier die Auslenkung der Halbachsen  $a$  mit dem Verlauf der Exzentrizität  $e$  und dem Drehimpuls  $L$  gekoppelt.

## 5.7 Exchange-Orbits mit Inklination

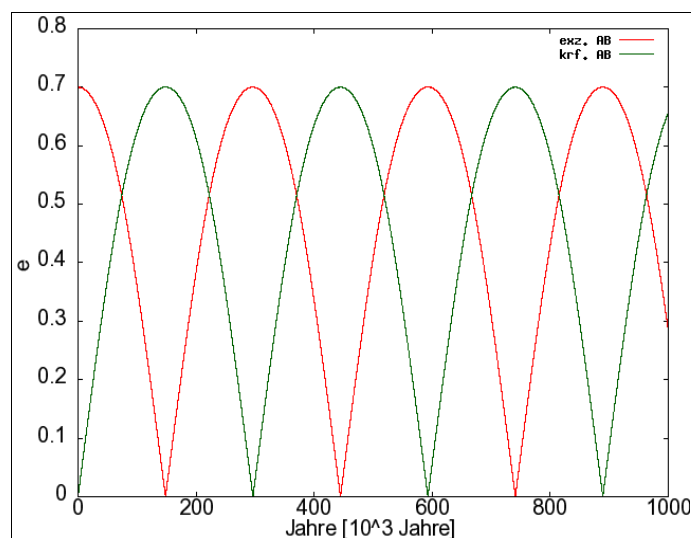
Bisher wurden die Exchange-Orbits nur in der Ebene (also bei einer Inklination von  $i=0^\circ$ ) betrachtet. Hier soll nun noch untersucht werden, wie sich die Orbits bei einer Inklination  $i \neq 0^\circ$  verhalten.

Dazu wurde für die Planeten eine Masse von  $m=1 \times 10^{-6} M_S$ , für die Exzentrizität  $e=0,70$  und für die mittlere Anomalie  $M=40^\circ$  als Startwerte gewählt. Die Orbits wurden bei Inklinationen  $i=5^\circ$ ,  $i=20^\circ$ ,  $i=60^\circ$  und  $i=90^\circ$  untersucht.

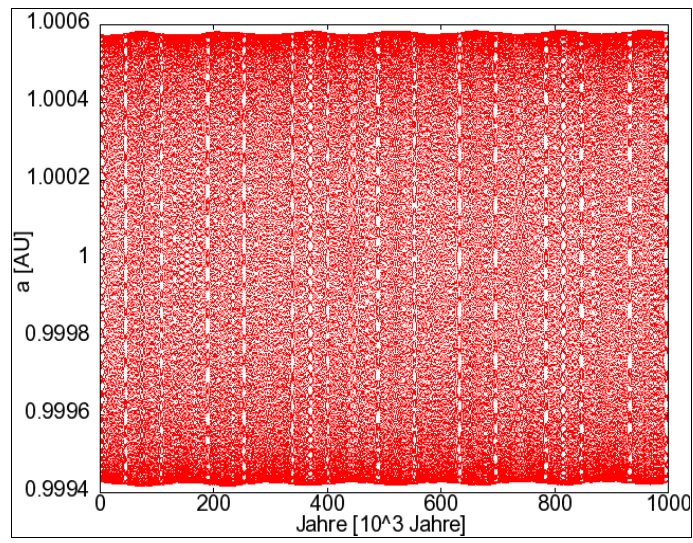
### 5.7.1 $i=5^\circ$

	a [AU]	e	i [ $^\circ$ ]	$\Omega$ [ $^\circ$ ]	$\omega$ [ $^\circ$ ]	M [ $^\circ$ ]	Masse [ $M_S$ ]
kreisförmige Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	40	$1 \times 10^{-6}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	5,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-6}$

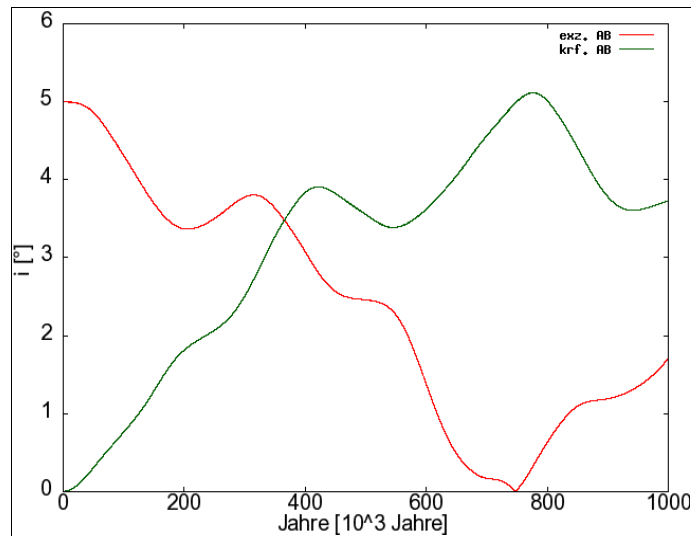
**Tabelle 5.23:** Startwerte



**Abb 5.92:** Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung



*Abb 5.93: Verlauf der großen Halbachsen  $a$*



**Abb 5.94:** Verlauf der Inklination  $i$  für exzentrische und kreisförmige Anfangsbedingung

Vergleicht man die Abbildungen 5.92 und 5.93 mit den Abbildungen 5.74 und 5.75 in Punkt 5.6.1.4 (dort wurden die selben Anfangsbedingung gewählt, nur die Inklination war dort  $i=0^\circ$ ), so sieht man keine Unterschiede in Form und der Periodendauer der Exzentrizität.

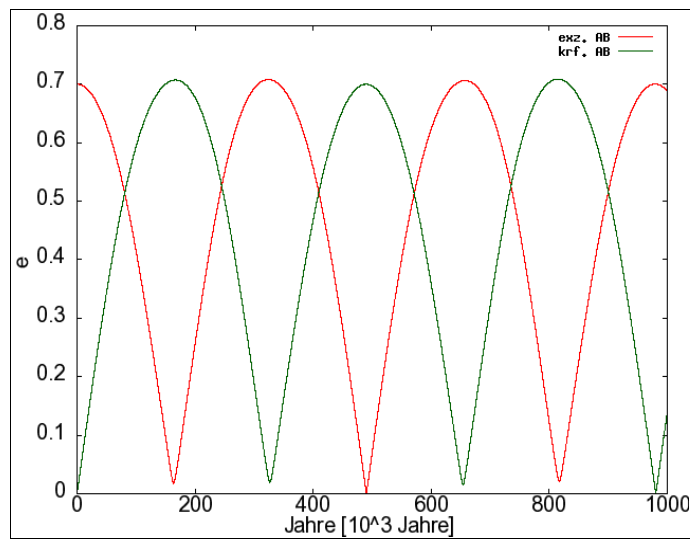
Abbildung 5.94 zeigt den Verlauf der Inklination. Wie man sieht, wird auch die Inklination zwischen den beiden Planeten ausgetauscht, jedoch nicht periodisch wie bei der Exzentrizität oder dem Drehimpuls. Auch wird der Anfangswert der Inklination überschritten (bei ca. 800.000 Jahren). Bei höheren Inklinationen tritt dieser Effekt zumindest nicht bei den ersten 1.000.000 Umläufen auf.

### 5.7.2 $i=20^\circ$

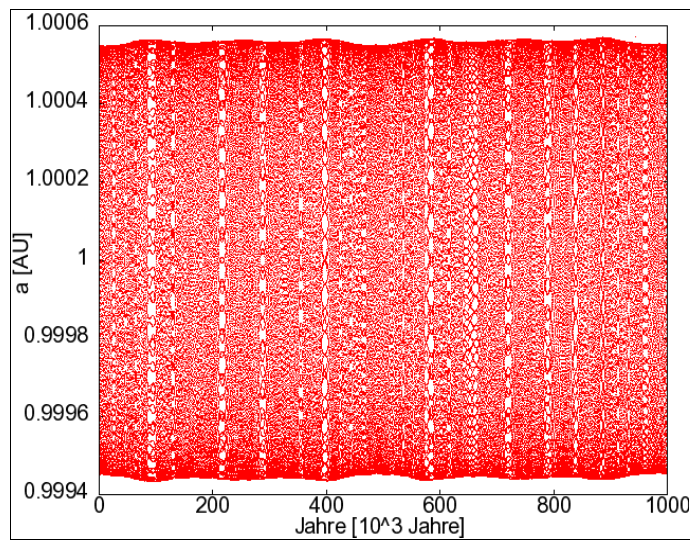
	a [AU]	e	i [°]	$\Omega$ [°]	$\omega$ [°]	M [°]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmiger Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	40	$1 \times 10^{-6}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	20,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-6}$

**Tabelle 5.24:** Startwerte

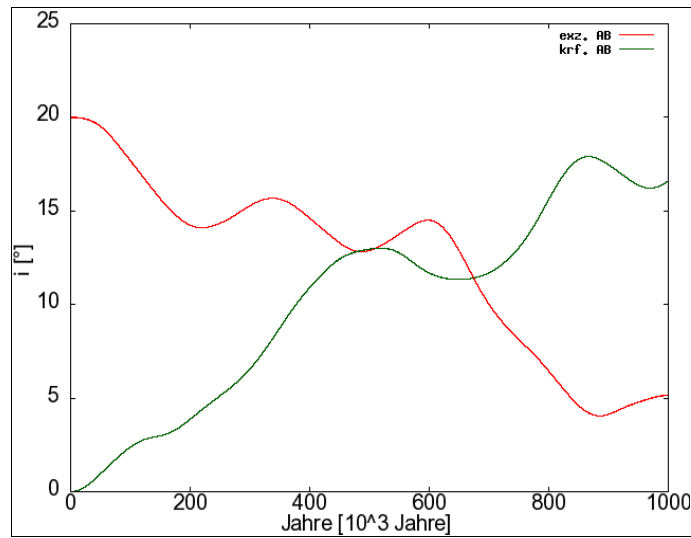




*Abb 5.95: Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung*



*Abb 5.96: Verlauf der großen Halbachsen  $a$*



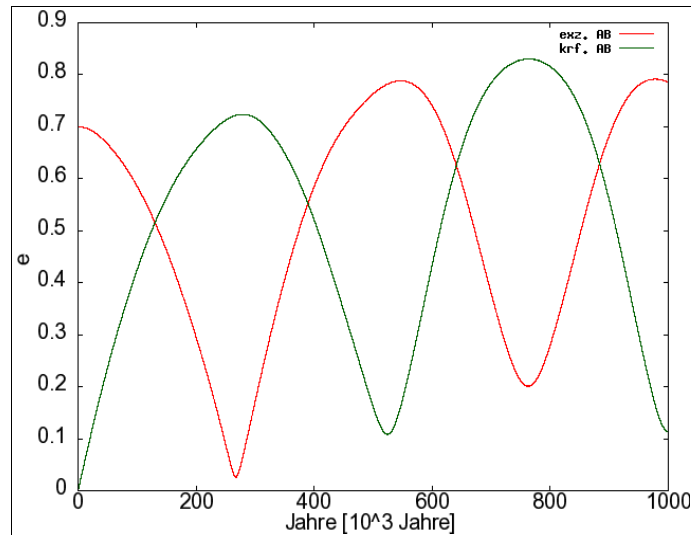
**Abb 5.97:** Verlauf der Inklination  $i$  für exzentrische und kreisförmige Anfangsbedingung

In Abbildung 5.95 sieht man, dass die Exzentrizität nicht bei jeder Periode wieder vollständig auf den Nullwert zurückgeht. Bei noch höheren Inklinationen ist dieser Effekt noch deutlicher sichtbar.

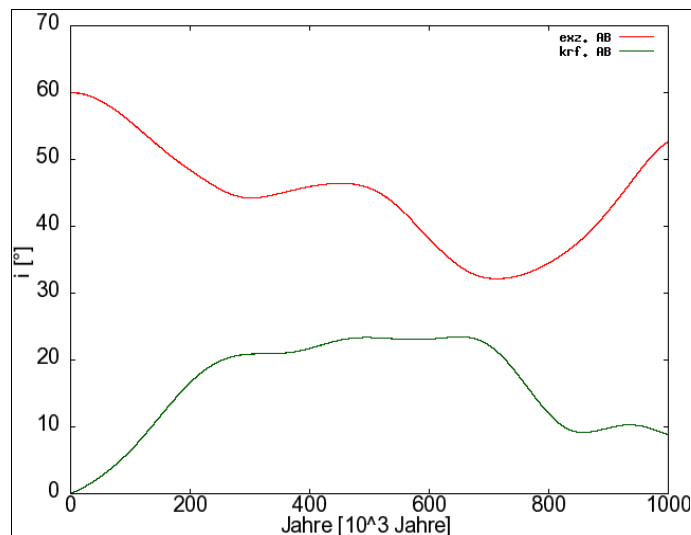
### 5.7.3 $i=60^\circ$

	a [AU]	e	i [°]	$\Omega$ [°]	$\omega$ [°]	M [°]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmiger Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	40	$1 \times 10^{-6}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	60,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-6}$

**Tabelle 5.25:** Startwerte



**Abb 5.98:** Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung



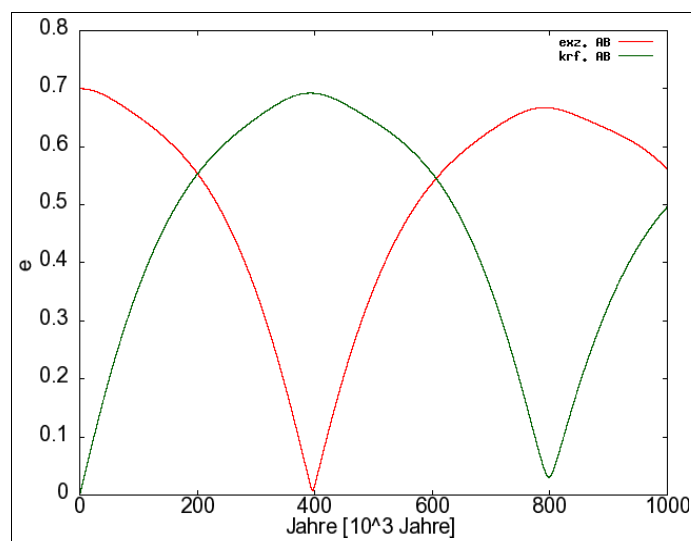
**Abb 5.99:** Verlauf der Inklination  $i$  für exzentrische und kreisförmige Anfangsbedingung

Der schon unter Kapitel 5.7.2 festgestellte Trend für die Exzentrizität setzt sich (s. Abbildung 5.98) fort. Die Exzentrizität  $e$  übersteigt jetzt sogar den Startwert, fällt aber dann wieder ab. Die Inklination  $i$  verläuft auch hier nach keinem feststellbaren Muster.

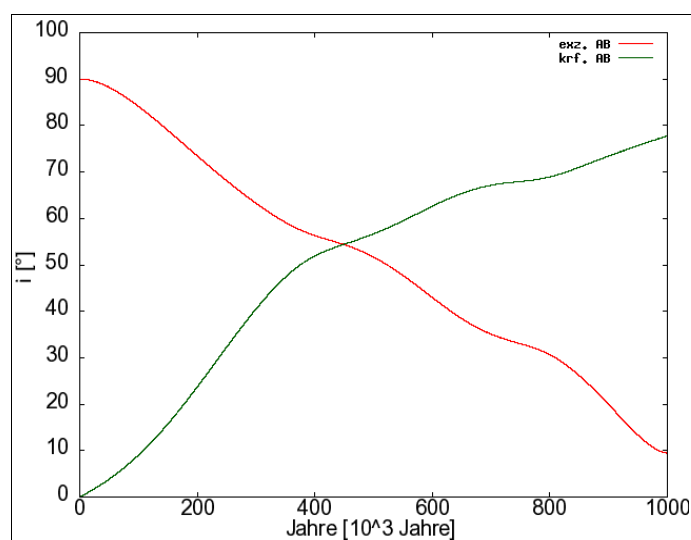
### 5.7.4 $i=90^\circ$

	a [AU]	e	i [ $^\circ$ ]	$\Omega$ [ $^\circ$ ]	$\omega$ [ $^\circ$ ]	M [ $^\circ$ ]	Masse [ $M_s$ ]
kreisförmiger Umlaufbahn	1,0	$10^{-8}$	0,0	0,0	0,0	40	$1 \times 10^{-6}$
exzentrische Umlaufbahn	1,0	0,7	90,0	0,0	0,0	0,0	$1 \times 10^{-6}$

**Tabelle 5.26:** Startwerte



**Abb 5.100:** Verlauf der Exzentrizität  $e$  für kreisförmige und exzentrische Anfangsbedingung



**Abb 5.101:** Verlauf der Inklination  $i$  für exzentrische und kreisförmige Anfangsbedingung

Bei einer Inklination von  $i=5^\circ$  sind beim Verlauf von Exzentrizität  $e$  und großer Halbachse  $a$  noch keine Veränderungen zu bemerken (Abbildung 5.92 und 5.93). Bei höheren Inklinationen sieht man, dass die Exzentrizität  $e$  nicht immer auf den Nullwert zurückgeht bzw. dass die Anfangsexzentrizität leicht überstiegen wird (Abbildung 5.95). Steigt die Inklination weiter, wird dieser Effekt immer stärker (s. Abbildung 5.98), wobei zu beachten ist, dass die Exzentrizität, nachdem sie einen maximalen Wert erreicht hat, wieder auf den Startwert zurückgeht, um dann wieder zu steigen.

Die Inklination  $i$  zeigt ebenfalls ein Austauschverhalten, das jedoch nicht periodisch wie bei der Exzentrizität  $e$  ist (s. Abbildungen 5.94, 5.97, 5.99 und 5.101).

Dieser Effekt ist auf die Kozai-Resonanz zurück zu führen, die eine Änderung der Inklination und zusätzlich eine Erhöhung der Exzentrizität hervorruft. Wobei der Wert für

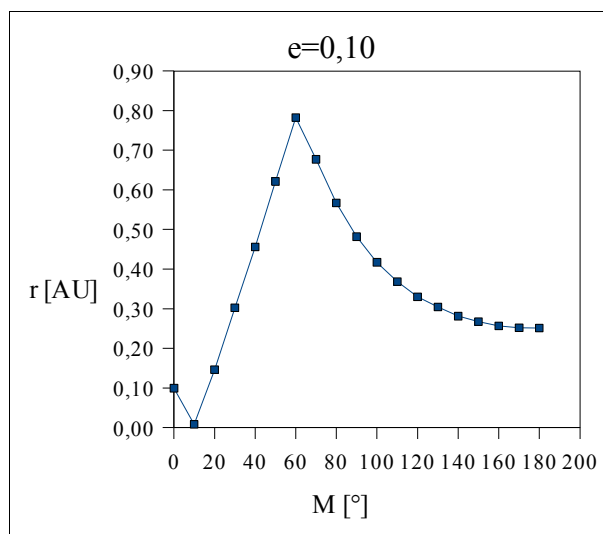
$$H_K = \sqrt{(1-e^2)} \cos i \quad (6.1)$$

erhalten bleibt.

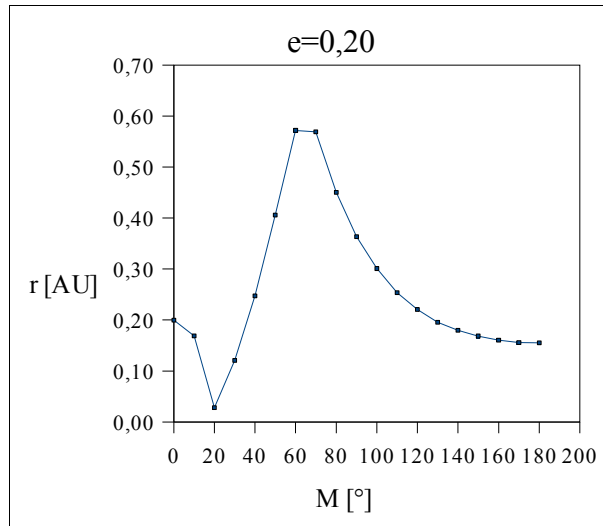
Bei einer Inklination von  $i=90^\circ$  beginnt die retrograde Bewegung bei Planeten. Bei der Exzentrizität sieht man wieder, dass der Nullpunkt bzw. der Maximalwert (hier  $e=0,70$ ) nach einer Periode nicht erreicht wird. Es ist ersichtlich, dass der Startwert für die Exzentrizität  $e$  sogar unterschritten wird.

## 5.8 Verlauf des minimalen Abstands der Planeten zueinander

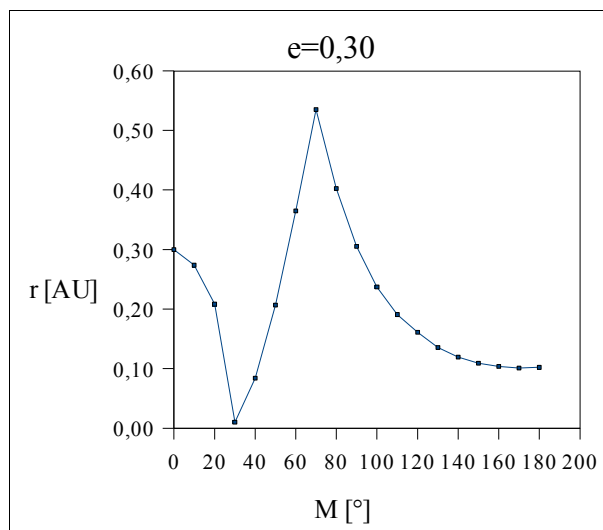
Hier wurde untersucht, wie sich die minimalen Abstände  $r$  (in Astronomischen Einheiten  $AU$ ) der Planeten zueinander bei verschiedenen Startwerten verhalten. Für die Exzentrizität wurden die Werte  $e=0,10$  bis  $e=0,70$  in Abständen von  $\Delta e=0,10$  gewählt. Für die mittlere Anomalie  $M$  wurden Werte von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  mit einem  $\Delta M=10^\circ$  gewählt. Die Masse der Planeten wurde  $m=1 \times 10^{-6} M_S$  gesetzt.



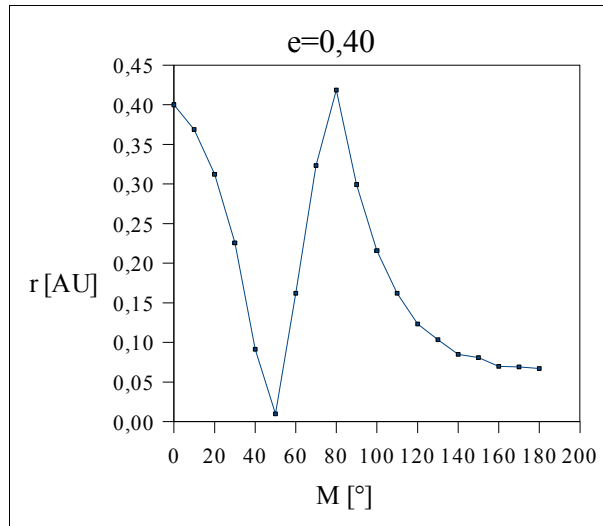
**Abb. 5.102:** Verlauf des minimalen Abstands der beiden Planeten bei  $e=0,10$ . Der Instabilitätsbereich liegt hier zwischen  $M=9^\circ$  und  $M=13^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



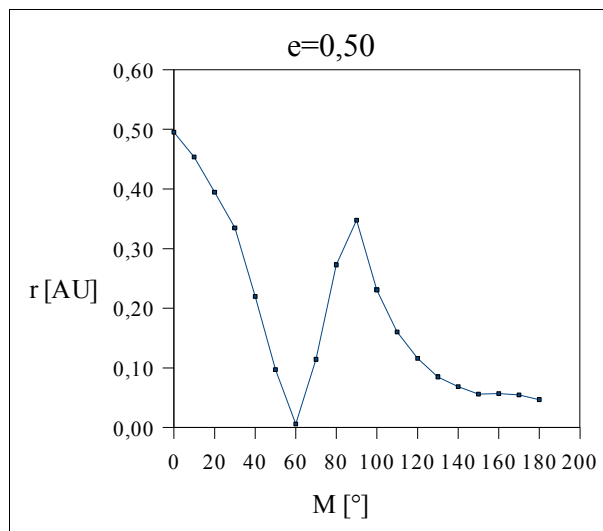
**Abb. 5.103:** Verlauf des minimalen Abstands der beiden Planeten bei  $e=0,20$ . Der Instabilitätsbereich liegt hier zwischen  $M=20^\circ$  und  $M=24^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



**Abb. 5.104:** Verlauf des minimalen Abstands der beiden Planeten bei  $e=0,30$ . Der Instabilitätsbereich liegt hier zwischen  $M=30^\circ$  und  $M=36^\circ$  (s. Kapitel 5.2).

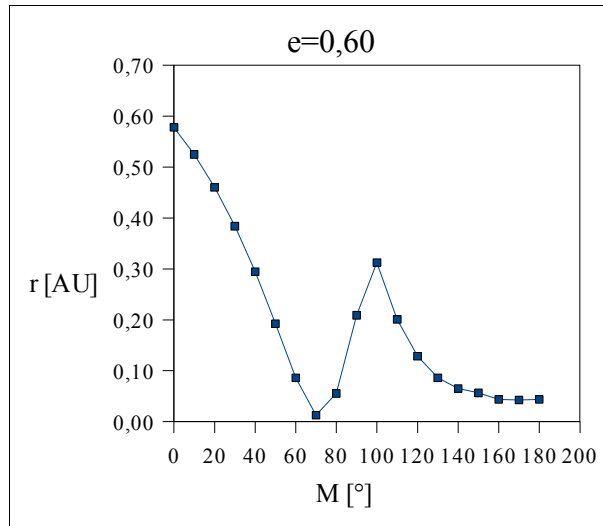


**Abb. 5.105:** Verlauf des minimalen Abstands der beiden Planeten bei  $e=0,40$ . Der Instabilitätsbereich liegt hier zwischen  $M=40^\circ$  und  $M=48^\circ$  (s. Kapitel 5.2).

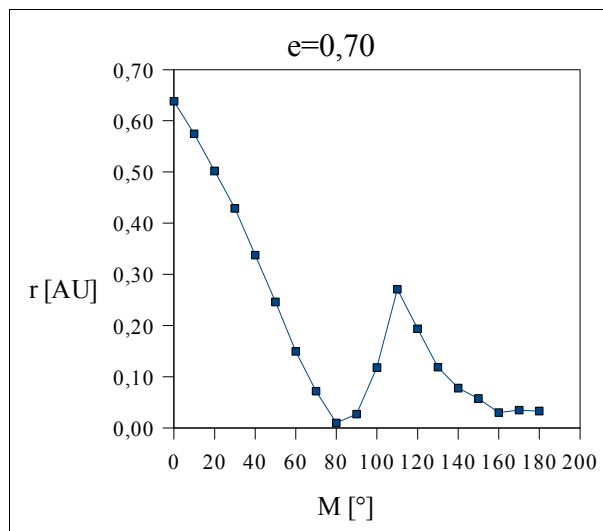


**Abb. 5.106:** Verlauf des minimalen Abstands der beiden Planeten bei  $e=0,50$ . Der Instabilitätsbereich liegt hier zwischen  $M=51^\circ$  und  $M=61^\circ$  (s. Kapitel 5.2).





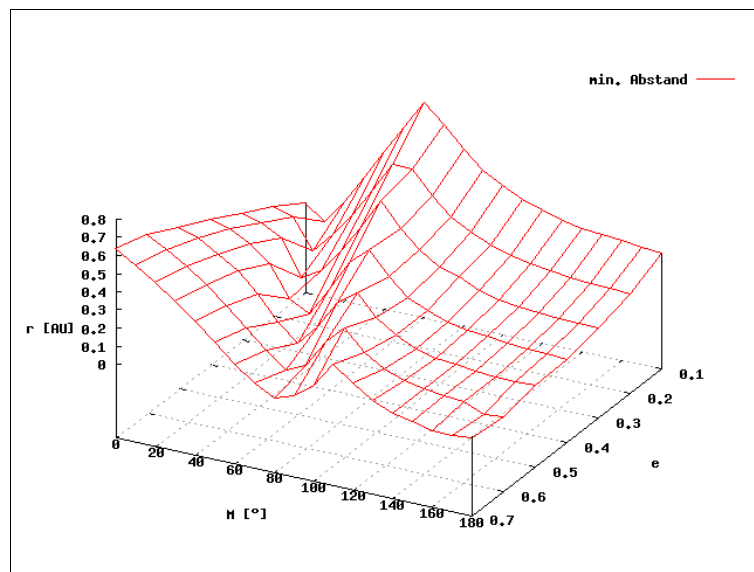
**Abb. 5.107:** Verlauf des minimalen Abstands der beiden Planeten bei  $e=0,70$ . Der Instabilitätsbereich liegt hier zwischen  $M=80^\circ$  und  $M=89^\circ$  (s. Kapitel 5.2).



**Abb. 5.108:** Verlauf des minimalen Abstands der beiden Planeten bei  $e=0,70$ . Der Instabilitätsbereich liegt hier zwischen  $M=80^\circ$  und  $M=89^\circ$  (s. Kapitel 5.2).

Wie man sieht, erhält man zwei Maximalwerte für den minimalen Abstand: Einmal bei  $M=0^\circ$  und einen zweiten, der von der Exzentrizität abhängt: Je größer die Exzentrizität, desto größer ist auch der Wert der mittleren Anomalie  $M$ , bei der dieses zweite Maximum auftritt. Weiters sieht man, dass der zweite Maximalwert bei kleineren Exzentrizitäten größer ist als bei großen Exzentrizitäten, während der erste Maximalwert ein umgekehrtes Verhalten zeigt.

Trägt man die erhaltenen Werte in ein dreidimensionales Diagramm, s. Abbildung 5.109, so sieht man den Verlauf des minimalen Abstands im Instabilitätsbereich als „Tal“. Auffallend ist, dass der Maximalwert des minimalen Abstands mit zunehmender Exzentrizität abnimmt. Gleiches gilt auch für den Minimalwert, allerdings ist dieser Abfall weniger steil als für den Maximalwert.



**Abb. 5.109:** Der Verlauf des minimalen Abstands als dreidimensionales Diagramm.

Betrachtet man zuerst das Verhalten bei  $M=0$ , so fällt auf, dass der minimale Abstand mit zunehmender Exzentrizität  $e$  anwächst und ein erstes Maximum bildet.

Betrachtet man nun das Minimum des minimalen Abstandes, so sieht man erstens, dass dieses mit zunehmender Exzentrizität  $e$  entlang der Achse der mittleren Anomalie zu höheren Werten für  $M$  wandert und zweitens, dass der minimale Wert immer in der Instabilitätszone (s. Kapitel 5.2) liegt. Nach dem minimalen Wert folgt ein Anstieg zu einem weiteren Maximum, das jedoch im Gegensatz zum Maximum bei  $M=0^\circ$  mit zunehmender Exzentrizität  $e$  abnimmt und ebenfalls, so wie das Minimum, entlang der Achse der mittleren Anomalie  $M$  zu höheren Werten von  $M$  wandert.

## 6 Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit extrasolaren Planeten in der 1:1 Mean-Motion-Resonanz in der so genannten „exzentrischen Resonanz“. Dabei betrachtet man zwei Planeten mit gleicher Masse und gleich großer Halbachse, wobei sich ein Planet auf einer hoch exzentrischen Bahn (hier wurde der Bereich  $0,70 \leq e \leq 0,10$  gewählt) befindet und der zweite Planet sich auf einer annähernd kreisförmigen Bahn befindet. Diese beiden Planeten tauschen nun Drehimpuls aus, wodurch nun ein Tausch der Orbits stattfindet. Das bedeutet, dass die Bahn des Planeten, der im exzentrischen Orbit startet, eine Abnahme in der Exzentrizität erfährt, bis er einen kreisförmigen Orbit erreicht, während der Planet in der kreisförmigen Umlaufbahn eine Zunahme der Exzentrizität erfährt, und zwar solange, bis er in der exzentrischen Umlaufbahn ist. Die beiden Planeten haben also kontinuierlich ihre Umlaufbahnen ausgetauscht, und dieser Austausch wiederholt sich nun immer wieder.

Es handelt sich hierbei um ein allgemeines Dreikörperproblem, das nur numerisch gelöst werden kann. Als Integrationsmethode wurde die Lie-Integrationsmethode verwendet (Hanslmeier, A. & Dvorak, R.: Numerical integration with Lie-series. Astronomy and Astrophysics 132, S. 203-207, 1984). Die Integrationszeit betrug eine Millionen Orbits und da für die große Halbachse beider Bahnen eine Astronomische Einheit gewählt wurde, bedeutet dies gleichzeitig, dass die Integrationszeit eine Millionen Jahre betrug. Für die Zentralmasse wurde eine Sonnenmasse  $M_S$  gewählt. Die Bandbreite der Exzentrizität wurde von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$ , für die Bestimmung der Instabilitätsbereiche und Periodendauer der Exzentrizität, gewählt. Für die restlichen Bestimmungen wurde der Startwert die Exzentrizität auf  $e=0,70$  gesetzt. Die Planetenmassen wurden von  $m=10^{-6} M_S$  bis  $m=10^{-3} M_S$  gewählt. Die Inklination wurde für die meisten Berechnungen  $i=0^\circ$  gesetzt. Das Verhalten der Exchange-Orbits bei einer Inklination  $i \neq 0^\circ$  wurde in einem eigenen Punkt behandelt.

Zuerst wurden die Instabilitätszonen ermittelt, wobei die mittlere Anomalien gegen die Exzentrizität betrachtet wurde, während die Masse der Planeten erhöht wurde. In den Instabilitätszonen bleiben die Orbits weniger als eine Millionen Umläufe stabil. Es zeigt sich, dass sich für niedrigere Planetenmassen (weniger als eine Erdmasse) zwei Instabilitätsstreifen ausbilden, während für höhere Massen (über eine Erdmasse) zusätzlich zwei Instabilitätsinseln entstehen. Für noch höhere Massen wachsen diese Zonen, bis sie

schließlich miteinander verschmelzen. Dieses Verhalten ist auf die Zunahme der Gravitationskraft bei zunehmender Masse und daraus folgende stärkere gegenseitige Störung zurück zu führen.

Im zweiten Abschnitt der Auswertung wurde der Einfluss der Exzentrizität auf die Instabilitätszonen untersucht, und es wurde die mittlere Anomalie gegen die Masse betrachtet. Hier zeigt sich, dass für niedrige Exzentrizitäten zwei Inseln und ein gegabelter Instabilitätsstreifen existieren. Mit zunehmender Exzentrizität spaltet sich diese Gabelung weiter auf, bis zwei getrennte Instabilitätsstreifen entstehen, die mit zunehmender Exzentrizität in Richtung der Inseln wandern, bis schließlich die Inseln mit den Streifen verschmelzen, wobei sowohl die Inseln als auch die Streifen mit anwachsender Exzentrizität nur gering an Größe zunehmen.

Im nächsten Abschnitt wurde die Periodendauer der Exzentrizität betrachtet und zwar im Zusammenhang mit der mittleren Anomalie, der Masse und der Exzentrizität selbst. Dabei zeigt sich, dass der Verlauf der Funktion in Abhängigkeit von der Exzentrizität, mit der sich die Periode ändert, einer Potenzfunktion ähnelt. Gleichzeitig hängt die Periodendauer selbst indirekt proportional von der Masse ab (wenn die Masse ansteigt, sinkt die Periodendauer um den selben Faktor). Die Abhängigkeit der Periodendauer von der mittleren Anomalie ist weitaus komplexer und zeigt beim Erreichen der Instabilitätszone einen starken Anstieg der Periodendauer.

Eine weitere Eigenschaft der Exchange Orbits in exzentrischer Resonanz ist eine Drehung des Periastrons. Grund dafür ist, dass die Orbitalperiode nicht der Periode der Exzentrizität  $e$  in Phase ist. Dazu wurden für einige Massen ( $m=1 \times 10^{-6} M_S$ ,  $m=5 \times 10^{-6} M_S$ ,  $m=1 \times 10^{-5} M_S$ ,  $m=5 \times 10^{-5} M_S$ ,  $m=1 \times 10^{-4} M_S$ , und  $m=5 \times 10^{-4} M_S$ ) die Bahnen explizit dargestellt und für die mittlere Anomalie ein Startwert von  $M=0^\circ$  und für die Exzentrizität  $e=0,70$  gewählt. Wie sich zeigt, hängt die Periastrondrehung von der Masse ab, das heißt je größer die Masse ist desto größer ist auch die Periastrondrehung. Dies ist auf die stärkere Gravitationskraft zurück zu führen, die bei größeren Massen wirkt und damit auch eine größere Beeinflussung der Planeten zur Folge hat.

Weiters wurde das Verhalten von Exzentrizität, großer Halbachse und Drehimpuls verschiedener Exchange-Orbits untersucht. Dazu wurde für die Exzentrizität  $e=0,70$  gesetzt, sowie die Massen der Planeten von  $m=1 \times 10^{-6} M_S$  bis  $m=1 \times 10^{-4} M_S$  und verschiedene Startwerte für die mittlere Anomalie gewählt. Wie bereits erwähnt, zeigen Exzentrizität und Drehimpuls ein ähnliches Verhalten, das auf den Austausch der Orbits durch Austausch von Drehimpuls zurück zu führen ist. Auch die große Halbachsen  $a$  bleiben nicht konstant, sondern variieren im Bereich von tausendstel Astronomischen Einheiten. Auch hier zeigt sich eine Oszillation, die mit dem Verlauf von Drehimpuls und Exzentrizität korreliert, wobei die größte Auslenkung in jenem Zeitbereich beobachtet wird, in dem die Exzentrizitäten der beiden Planeten bzw. deren Drehimpulse gleich groß sind. Bei einer Inklination von  $i \neq 0$  zeigt sich der Einfluss der Kozai-Resonanz, der bei hohen Inklinationen zu einem Anstieg der Exzentrizität über den Anfangswert hinaus führt. Aufgrund des periodischen Verhaltens, das vor allem beim Drehimpuls  $L$  beobachtbar ist, lässt sich vermuten, dass die Bewegung der Planeten harmonischen Oszillatoren entsprechen.

Im letzten Abschnitt der Auswertung wurde noch der minimale Abstand der Planeten zu einander untersucht. Dabei wurde die Masse der Planeten auf  $m=1 \times 10^{-6} M_S$  gesetzt, die Exzentrizität von  $e=0,10$  bis  $e=0,70$  und die mittlere Anomalie von  $M=0^\circ$  bis  $180^\circ$  betrachtet. Die Inklination wurde  $i=0^\circ$  gesetzt. Es zeigt sich, dass die geringsten Abstände in den Instabilitätsbereichen liegen. Dies lässt die Annahme zu, dass Instabilitäten in den Orbits dann entstehen, wenn sich die beiden Planeten zu nahe kommen. Da die Gravitationskraft proportional zu  $r^{-2}$  ist, wirkt sich der geringe Abstand besonders stark aus und das System wird aufgrund der gegenseitigen Störungen der Planeten instabil.

Betrachtet man die Ergebnisse insgesamt, so sieht man, dass die Exchange-Orbits in exzentrischer Resonanz sehr stark von der Masse der Planeten abhängen. Vor allem ist dies anhand der Instabilitätsbereiche ersichtlich, die mit zunehmender Masse anwachsen. Dies ist auf die größeren Gravitationskräfte zurück zu führen, die ja direkt proportional von der Masse abhängen. Auch die indirekt proportionale Abhängigkeit der Periodendauer der Exzentrizität  $e$ , also die Tatsache, dass die Periodendauer um denselben Faktor sinkt wie die Masse steigt, zeigt den Einfluss der Masse der Planeten.

Die Exzentrizität wiederum verschiebt eher die Instabilitätsbereiche, hat aber auch einen gewissen Einfluss auf die Größe der Instabilitätsinseln. Sie beeinflusst aber auch die eigene Periodendauer: mit höherer Exzentrizität steigt auch die Periodendauer an. Auch die mittlere Anomalie  $M$  beeinflusst die Periodendauer der Exzentrizität in einer nicht linearen Weise wie man bei Vergleich der Periodendauer bei verschiedenen Werten für die mittlere Anomalie feststellen kann.

## A) Literaturverzeichnis

1. **Bate, Roger R. & Mueller, Donald D. & White, Jerry E.:** *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, Inc., New York, 1977
2. **Foster, O.:** *Analysis I*. Vieweg Verlag S.73 ff (2006)
3. **Gröbner, W.:** *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967 – VI
4. **Hanslmeier, A. & Dvorak, R.:** *Numerical integration with Lie-series*. Astronomy and Astrophysics 132, S. 203-207 (1984)
5. **Laughlin, G. & Chambers J. E.:** *Extrasolar Trojans: The viability and detectability of Planets in the 1:1 Resonance*. The Astronomical Journal, 124: 592-600, 2002 July
6. **Meyber, K., Vachenaer, P.:** *Höhere Mathematik I*. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag S. 315 (2001)
7. **Murray, C. D. & Dermott, S. F.:** *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 1999
8. **Nauenberger, M.:** *Stability and eccentricity for two planets in a 1:1 Resonance, and their possible occurrence in extrasolar planetary systems*. The Astronomical Journal, 124: 2332:2338, 2002 October
9. **Stöcker, H.:** *Taschenbuch der Physik*. 5., korrigierte Aufl., Frankfurt/ Main: Verlag Harri Deutsch
10. **Unsöld A., Baschek, B.:** *Der Neue Kosmos*. 5.Aufl., Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag

## Lebenslauf

<b>Persönliche Daten:</b>	
Name:	Markus Roth
Adresse:	Gunthergasse 14 3430 Tulln
e-mail:	a9550722@univie.ac.at
Geburtsdatum:	30.01.1975
Matrikelnummer	9550722
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Bekenntnis:	römisch-katholisch
<b>Ausbildung:</b>	
seit Oktober 2001:	Studium der Astronomie an der Hauptuniversität Wien
1996-1999:	Medizinstudium an der Hauptuniversität Wien
1995:	BWL an der WU Wien
1989-1994:	HTBLA Hollabrunn Abteilung für Elektrotechnik, Matura bestanden am 06.06.1994
1985-1989:	Hauptschule Tulln
1981-1985:	Volksschule Tulln
<b>Berufserfahrung/Praktika:</b>	
2005 bis 2007:	Fa. Esarom/Oberrohrbach, Angestellter
1996-2001:	Med. chem. Labor Dr. Paula/Wien als technischer Laborassistent
Sommer 1993:	PSK Wien als Schalterbeamter
Sommer 1992:	Gemeindeverband für Müllbeseitigung/Tulln als EDV- Sachbearbeiter
Sommer 1991:	Zuckerfabrik Tulln als Elektrotechniker
Sommer 1990:	Elektro Schmidberger/Tulln als Elektrotechniker
<b>EDV-Kenntnisse:</b>	
MS-Office Paket, Windows NT 4.0; IRAF, MIDAS; C, FORTRAN;	