



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Zugänge zur Nichtstandard-Analyse

Verfasserin

Nicole Burian

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, November 2008

Matrikelnummer:	9908962
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 405
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuer:	ao.Univ.-Prof. Dr. Peter Schmitt



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>5</b>
<b>1 Lindstrøms Zugang zur Nichtstandard-Analysis</b>	<b>9</b>
1.1 Die hyperreellen Zahlen . . . . .	9
1.2 Die “schönen” Teilmengen von ${}^*\mathbb{R}$ . . . . .	14
1.2.1 Standard-Mengen . . . . .	18
1.2.2 Hyperendliche Mengen . . . . .	19
<b>2 Landers und Rogges Zugang zur Nichtstandard-Analysis</b>	<b>22</b>
2.1 Die Grundlagen . . . . .	22
2.1.1 Superstrukturen und ihre “super” Strukturen . . . . .	23
2.1.2 Aussagen in Superstrukturen . . . . .	27
2.2 Von der Standard-Welt zur Nichtstandard-Welt . . . . .	30
2.3 Die Nichtstandard-Welt und die hyperreellen Zahlen . . . . .	35
<b>3 Die Schönheit der Nichtstandard-Analysis</b>	<b>42</b>
3.1 Definitionen einmal anders . . . . .	42
3.2 Der Umgang mit Infinitesimalen, wie wir ihn immer schon wollten . . . . .	44
<b>4 Unterschiede und Übereinstimmungen</b>	<b>46</b>
4.1 Das Transfer-Prinzip . . . . .	47
4.2 Interne Mengen – Standard-Mengen . . . . .	50
4.3 Die hyperendlichen Mengen und die *-endlichen Mengen . . . . .	52
4.4 Saturation im Vergleich . . . . .	53
4.5 Die Eleganz der Vereinigung . . . . .	55
4.6 Über Filter und Ultrafilter . . . . .	56
<b>5 Vorzüge der jeweiligen Zugänge</b>	<b>58</b>
<b>6 Resümee und Ausblick</b>	<b>60</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>62</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>64</b>



# Vorwort

A. Robinson schildert am Beginn seines Buches *Non-Standard Analysis*<sup>1</sup> folgendes Szenario: Man nehme an, man würde einem, wie er sagt “*well-trained*” Mathematiker die Definition der Ableitung einer Funktion, wie sie in der Nichtstandard-Analysis gebracht wird, vorlegen. Diese Definition verwendet “infinitesimal kleinen Zahlen” und somit meint Robinson weiter, wäre die Reaktion des Mathematikers etwa so: “*This definition may be simpler in appearance but unfortunately it is also meaningless.*”<sup>2</sup>

Vielleicht sind die Reaktionen auf die Erwähnung unendlich kleiner Zahlen heute nicht mehr so dramatisch, wie sie es in den 1960er Jahren durchaus noch sein konnten. Vielleicht ist das Staunen darüber, dass man einen Körper konstruieren kann, in dem man mit infinitesimal kleinen und infinitesimal großen Zahlen rechnen kann, heute nicht mehr ganz so groß, wie es damals bei den ersten Präsentationen gewesen sein muss. Ganz sicher gibt es heute immer mehr MathematikerInnen, die sich der Eleganz und der Vorteilen der Nichtstandard-Theorie bewusst sind und sie in diversen Gebieten anwenden.

Wie sich in der Geschichte schon oft gezeigt hat, ist bei der Entwicklung einer Wissenschaft, oder eines Teilgebietes davon, der Weg von einer Idee, einem Ansatz, bis zur allgemein verbreiteten Theorie oft ein sehr langwieriger und keinesfalls geradliniger. Die Analysis an sich ist dafür ein sehr gutes Beispiel. Schon ihre “Geburtsstunde” ist unklar und zweigeteilt durch ihre “Väter” Newton und Leibniz. Auf ihre Entwicklung bis zu dem Stadium in dem sie heute, weitestgehend einheitlich, in Schulen und Universitäten gelehrt wird, soll hier nicht genauer eingegangen werden. Klar ist allerdings, dass die Infinitesimalrechnung eine der am heftigsten diskutierten und unstrittenen mathematischen Theorien innerhalb und wohl auch außerhalb der Mathematik war bzw. noch ist. Man denke an die lange Zeit enger Verbundenheit der Begriffe Unendlichkeit und Göttlichkeit. Hierbei handelt es sich um eine spannende und facettenreiche Frage, zu der Näheres in der ausführlichen “Geschichte der Analysis” von Hans Niels Jahnke nachgelesen werden kann.<sup>3</sup>

Die Berechtigung der klassischen Infinitesimalrechnung, wie sie heute verwendet wird, steht außer Frage. Trotzdem hat sich ein weiterer oder vielleicht auch ursprünglicherer<sup>4</sup> Weg entwickelt - die Nichtstandard-Analysis. Auch wenn ihre Wurzeln im Grunde

---

<sup>1</sup>[12]

<sup>2</sup>[12]; Seite 1

<sup>3</sup>[4] oder auch [15] und [14]

<sup>4</sup>Im Sinne von zurück zum Anfang - zu Leibniz

genommen weit zurück reichen, ist die Nichtstandard-Analyse mit ihrer Entstehung in den 1960ern ein relativ junges Gebiet der Mathematik. Es ist daher nicht verwunderlich, dass sich noch keine einheitliche Methode herauskristallisiert hat, um sie zu anzuwenden - im Gegenteil.

Die sogenannte Nichtstandard-Analyse hat ihren Ursprung in den 1930er Jahren bei dem Logiker Skolem genommen. *“Th. Skolem hat 1933 gezeigt, daß das Peanosche Axiomensystem für die natürlichen Zahlen außer  $\mathbb{N}$  auch noch größere, nicht zu  $\mathbb{N}$  isomorphe Modelle besitzt - bei einer geeigneten Auffassung. Diese wurden Nichtstandard-Modelle genannt.”*<sup>5</sup> Robinson entwickelte in den 1960er Jahren ein analoges System für die Analyse und so entstand der Name Non-Standard-Analyse für dieses Gebiet. Wenn hier die Rede von den Anfängen der Nichtstandard-Analyse ist, so beziehe ich mich auf die Entwicklungen im zwanzigsten Jahrhundert. Im Grunde kann man aber auch sagen, dass der Anfang schon bei Leibniz selbst liegt, denn auch er hat von unendlich kleinen Zahlen gesprochen. So meint zum Beispiel Robinson dazu: *“[...] G.W. Leibniz argued that the theory of infinitesimals implies the introduction of ideal numbers which might be infinitely small or infinitely large compared with the real numbers but which were to possess the same properties as the latter.”*<sup>6</sup>

Robinson war ein Mathematiker und mathematischer Logiker. Demnach braucht man auch ein sehr großes Verständnis für die Logik, um seine ursprüngliche Einführung in die Nichtstandard-Analyse nachvollziehen zu können. Der Vorteil dieser neuartigen Theorie hat sich allerdings bald herausgestellt. Nicht zuletzt bestach die Nichtstandard-Analyse von Anfang an vor allem durch ihre vielseitige Anwendbarkeit in vielen Gebieten der Mathematik, wie etwa der Topologie oder der Maßtheorie, aber auch außerhalb, wie zum Beispiel in der mathematischen Ökonomie. (Siehe dazu etwa *Non-standard Analysis for the Working Mathematician*<sup>7</sup>.) So wurde im Lauf der Zeit eine Vielzahl von Ansätzen gefunden, die mit weit weniger Logik auskommen und daher die Theorie auch für reine Mathematiker oder Anwender aus anderen Gebieten zugänglicher macht.

Wie bereits erwähnt, gibt es viele Wege zur Nichtstandard-Analyse. Alleine in dem 2006 erschienenen Buch, *Nonstandard Methods and Applications in Mathematics*<sup>8</sup> beschreiben die Autoren Benci, Forti und Di Nasso in ihrem Artikel *The eightfold path to Nonstandard Analysis*, acht Wege, wie man sich der Nichtstandard-Analyse nähern kann. Den wohl größten Unterschied macht es, ob man den Weg über die Robinsonsche Methode wählt oder den über die von Nelson. Verkürzt ausgedrückt konstruiert man nach der Methode Robinsons einen neuen Zahlenkörper  ${}^*\mathbb{R}$ , der neben  $\mathbb{R}$  auch unendlich große und unendlich kleine Elemente enthält, und in den sich die Eigenschaften für  $\mathbb{R}$  übertragen lassen.<sup>9</sup> Nelson wählte hingegen einen ganz anderen Weg. Er erweiterte ZFC (die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre zusammen mit dem Auswahlaxiom) mit drei weiteren Axiomen I,S,T und kommt so auf eine ebensogut anwendbare Version der

---

<sup>5</sup>[6]; Seite 9

<sup>6</sup>[12]; Seite 2

<sup>7</sup>[9], oder auch [10]

<sup>8</sup>[2]

<sup>9</sup>[12]

Nichtstandard-Analysis.<sup>10</sup>

Nun ist es aber keineswegs so, dass diese zwei Richtungen den einzigen Unterschied für den Zugang zur Nichtstandard-Analysis machen würden. Vor allem innerhalb der Robinsonschen Nichtstandard-Analysis gibt es wieder viele verschiedene Möglichkeiten, sich ihr zu nähern. Zwei dieser Annäherungsmöglichkeiten sollen in dieser Arbeit näher betrachtet werden. Nach einer Einführung in die beiden Herangehensweisen sollen sie verglichen, anhand von Beispielen ihre Vor- und Nachteile erörtert sowie gezeigt werden, wo ihre Gemeinsamkeiten liegen.

Der erste Zugang, der in der vorliegenden Arbeit beschrieben werden soll, ist der, den Dieter Landers und Lothar Rogge in ihrem Buch *Nichtstandard Analysis*<sup>11</sup> wählen. Dieses Buch ist vor allem im deutschsprachigen Raum eine der meistverwendeten Unterlagen zur Einführung in die Nichtstandard-Analysis. Die beiden deutschen Professoren haben mit sehr großer Ausführlichkeit ihren Zugang beschrieben, den man als einen axiomatischen Zugang innerhalb der Robinsonschen Nichtstandard-Analysis bezeichnen kann. Axiomatisch insofern, als sie Eigenschaften, die die hyperreellen Zahlen  ${}^*\mathbb{R}$  erfüllen sollen, axiomatisch vorgeben. Der von ihnen beschriebene Zugang verläuft über die Einführung von Superstrukturen. Diese sind im Grunde genommen Mengen, die so mächtig sind, dass sie für beliebige mathematische Theorien die nötigen Objekte als Elemente enthalten. Zusammen mit einer geeigneten Sprache, der Prädikatenlogik, wird dann  ${}^*\mathbb{R}$  eingeführt. Um  ${}^*\mathbb{R}$  zu erhalten wird verlangt, dass  $\mathbb{R}$  ein Element dieser Superstruktur und eine echte Teilmenge ist. Dieser Weg über Superstrukturen, den Landers und Rogge hier wählen, ist erstmals von Robinson gemeinsam mit E. Zakon entwickelt worden.<sup>12</sup>

Der zweite Zugang auf den hier eingegangen werden wird ist der, den Tom Lindstrøm in seinem Artikel *An Invitation to Nonstandard Analysis*<sup>13</sup> beschreibt. Dieser Artikel ist als Einführung zu dem von Nigel Cutland herausgegebenen Buch *Nonstandard Analysis and its Applications* erschienen. Dieses Buch wurde im Anschluss an eine Konferenz zu eben diesem Thema herausgegeben, wobei Lindstrøms Vortrag als relativ schneller Einstieg in die Nichtstandard-Analysis gedacht ist. Dementsprechend knapp und vor allem anwendungsorientiert ist dieser Artikel. Lindstrøms Zugang kann gegenüber dem axiomatischen Zugang von Landers und Rogge als ein konstruktiver Weg bezeichnet werden. Er konstruiert tatsächlich diesen neuen Körper, in dem auch unendlich kleine und unendlich große Elemente enthalten sind.

Abgesehen von den inhaltlichen Unterschieden der beiden Werke differieren sie auch im Aufbau. Im Gegensatz zu Landers und Rogge lässt Lindstrøm viele Beweise weg - mit der lapidaren Bemerkung “[...] *I shall gladly leave all book-keeping of this sort to you*”.<sup>14</sup> Zum besseren Verständnis werden in der vorliegenden Arbeit manche Beweise Lindstrøms genauer ausgeführt, während bei Landers und Rogge vieles nur auf das Wesentlichste beschränkt werden soll.

---

<sup>10</sup>[11]

<sup>11</sup>[5]

<sup>12</sup>[13]

<sup>13</sup>[8]

<sup>14</sup>[8]; Seite 6

Es soll hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass die vorliegende Arbeit eine Gegenüberstellung zweier Werke ist und die meisten der Definitionen, Sätze und Beweise von Lindstrøm und Landers und Rogge übernommen wurden, auch ohne diese ausdrücklich zu zitieren.

Ausserdem soll klargestellt werden: Wenn im Folgenden von den Theorien von Lindstrøm bzw. Landers und Rogge die Rede ist, dass damit nicht gemeint ist, dass die Theorien und Konzepte auf sie zurückgehen, sondern dass der von ihnen gewählten Darstellung gefolgt wird.

## Danksagung

Abschließend möchte ich noch einigen Personen meinen herzlichen Dank aussprechen. Da seien zuerst meine Eltern Sylvia und Bertram Burian erwähnt, die mich beide auf ihre Art stark, wenn auch vielleicht nicht bewusst, dazu animierten, das Studium der Mathematik zu beginnen und auch zu beenden. Auch sei meinen Geschwistern und meinen Freunden und Kollegen gedankt, dass sie mir die Zeit meines Studiums stets zu versüßen wussten. Ganz besonderer Dank gilt hiebei Curdin Sedlacek, der mit seiner unermüdlichen Motivation und Begeisterung unseren Sohn Leon und mich immer wieder zum Lachen und "Durchhalten" gebracht hat. Selbstverständlich danke ich auch Leon, der mir in jeglichen Momenten die Sonne im Herzen scheinen lässt.

Im speziellen möchte ich mich auch bei Professor Peter Schmitt für die Betreuung dieser Arbeit bedanken und bei Dr. Hans Ploss für die vielen Ideen und Verbesserungsvorschläge. In diesem Sinne möchte ich auch Mag. Dr. Heinz Weisshaupt danken, der mich schon zu Beginn meiner Arbeit durch viele interessante Gespräche motivierte und Michael Greinecker, dass ich in den letzten Wochen stets mit Fragen kommen durfte.

# Kapitel 1

## Lindstrøms Zugang zur Nichtstandard-Analysis

Tom Lindstrøm hat in seinem Artikel *An invitation to Nonstandard Analysis*<sup>1</sup> einen eher unüblichen Zugang zur Robinsonschen Nichtstandard-Analysis gewählt, den man als einen konstruktiven bezeichnen kann. Analog zur Konstruktion der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  aus den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  mit Hilfe von Cauchy-Folgen, entwickelt Lindstrøm die hyperreellen Zahlen  ${}^*\mathbb{R}$  aus den reellen Zahlen. Es ist eine knappe Einführung in die Nichtstandard-Analysis mit Methoden, die einem Mathematiker bekannt sind. Dies ist wohl auch einer seiner großen Vorteile. In diesem Kapitel soll sein Weg zusammengefasst werden. Man wird sehen, wie er allein mit einer durch ein endliches additives Maß definierten Äquivalenzrelation auf den vollkommen neuen Körper der hyperreellen Zahlen kommt. Wenn man diese Methode von der Konstruktion von  $\mathbb{R}$  kennt, ist es zwar nicht besonders verwunderlich, denn auch hier entstehen schließlich ganz neuartige Zahlen. Dass man aber “plötzlich” und auf so einfache Weise, die scheinbar so unfassbaren “unendlich kleinen” und “unendlich großen” Zahlen erhält, und sie sich wunderschön in einen angeordneten Körper einfügen lassen, ist an dieser Stelle doch erstaunlich - wie man aber bald sehen wird, durchaus möglich.

### 1.1 Die hyperreellen Zahlen

Bei der Konstruktion von  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$  betrachtet man die Menge aller rationalen Cauchy-Folgen, führt eine Äquivalenzrelation darauf ein und erhält  $\mathbb{R}$  als Menge aller Äquivalenzklassen. Man kann dann zeigen, dass  $\mathbb{R}$  echt größer ist als  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  “enthalten” ist in dem Sinn, dass sich für jedes Element von  $\mathbb{Q}$  ein dazu äquivalentes in  $\mathbb{R}$  wiederfinden lässt. Mit der gleichen Methode konstruiert Lindstrøm die hyperreellen Zahlen aus den reellen Zahlen.

Es sei  $\mathcal{R}$  die Menge aller Folgen reeller Zahlen. Die passende Äquivalenzrelation darauf wird mittels eines endlichen additiven Maßes auf  $\mathbb{N}$  definiert. Es sei  $m$  so ein endliches additives Maß auf  $\mathbb{N}$ , das folgende beiden Bedingungen erfülle:

---

<sup>1</sup>[8]

- (a) Für alle  $A \subseteq \mathbb{N}$ , ist  $m(A)$  definiert als 0 oder 1.
- (b)  $m(\mathbb{N}) = 1$ , und  $m(A) = 0$  für alle  $A \subset \mathbb{N}$  endlich.

Dieses Maß  $m$  hat folgende einfache Eigenschaften:

**Lemma 1.1.1** (Eigenschaften von  $m$ ). *Es sei  $m$  das oben definierte Maß,  $A$  und  $B$  Teilmengen von  $\mathbb{N}$  und  $A^c$  das Komplement von  $A$  in  $\mathbb{N}$ .*

- (i) Für  $A \subseteq \mathbb{N}$  ist genau  $m(A) = 1$  oder  $m(A^c) = 1$ .
- (ii) Ist  $m(A) = 1$  und  $m(B) = 1$  so ist  $m(A \cap B) = 1$ .
- (iii)  $m$  teilt die Menge der Teilmengen von  $\mathbb{N}$  in zwei Klassen.

*Beweis.* (i) Es ist  $1 = m(\mathbb{N}) = m(A \cup A^c) = m(A) + m(A^c)$ . Daher muss genau  $m(A)$  oder  $m(A^c)$  Maß eins haben.

(ii) Es ist  $0 = 0 + 0 = m(A^c) + m(B^c) \geq m(A^c \cup B^c) = m((A \cap B)^c)$ . Daher muss  $m(A \cap B) = 1$  gelten.

(iii) Folgt aus der Definition des Maßes.

□

An dieser Stelle soll nicht näher auf die Existenz eines solchen Maßes eingegangen werden. Der Beweis für seine Existenz führt über die Konstruktion von Filtern und Ultrafiltern und verwendet das Auswahlaxiom. Ultrafilter kommen bei Lindström aber an keiner anderen Stelle seines Zugangs zur Nichtstandard-Analyse vor. Daher werden sie hier nicht näher behandelt. Es wird aber später noch einmal auf sie Bezug genommen werden (siehe Kapitel 4.6).

Mit Hilfe des Maßes  $m$  wird nun die oben erwähnte Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{R}$  definiert, und man erhält, wie angekündigt  ${}^*\mathbb{R}$  als Menge der Äquivalenzklassen.

**Definition 1.1.2.** (a) Sei  $\mathcal{R}$  die Menge aller Folgen reeller Zahlen,  $\{a_n\}$  und  $\{b_n\}$  aus  $\mathcal{R}$ , dann ist die Äquivalenzrelation  $\sim$  definiert durch:

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \text{ falls } m(\{n : a_n = b_n\}) = 1$$

d.h.:  $\{a_n\} = \{b_n\}$  fast überall.

(b) Die Menge der *hyperreellen* oder *nonstandard reellen Zahlen*  ${}^*\mathbb{R}$  ist definiert als Menge aller Äquivalenzklassen auf  $\mathcal{R}$  modulo  $\sim$

$${}^*\mathbb{R} := \mathcal{R} / \sim.$$

(c)  $\langle a_n \rangle$  bezeichne die Äquivalenzklasse von  $\{a_n\}$ . So kann eine Addition, Multiplikation und eine Ordnung auf  ${}^*\mathbb{R}$  wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle &:= \langle a_n + b_n \rangle \\ \langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle &:= \langle a_n \cdot b_n \rangle \\ \langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle &\text{ wenn } m(\{n : a_n < b_n\}) = 1 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass die in Definition 1.1.2 definierte Addition, Multiplikation und Ordnung auch wirklich unabhängig von den Repräsentanten  $\{a_n\}$  und  $\{b_n\}$  der Äquivalenzklassen  $\langle a_n \rangle$  und  $\langle b_n \rangle$  sind. Womit sich bereits jetzt der folgende wichtige Satz ergibt.

**Satz 1.1.3.**  *${}^*\mathbb{R}$  ist, zusammen mit der in Definition 1.1.2 definierten Addition, Multiplikation und Ordnung, ein angeordneter Körper mit Nullelement  $0 = \langle 0, 0, \dots \rangle$  und Einselement  $1 = \langle 1, 1, \dots \rangle$ .*

Es wird hier als Beispiel nur ein Punkt über die ordnungserhaltende Struktur von  ${}^*\mathbb{R}$  gezeigt. Es wäre mühselig, den Beweis für alle Körperaxiome und die Ordnung zu bringen, da die anderen Punkte dem gleichen Schema folgen. Lindstrøm selbst sagt hierzu in seiner großzügigen Art: “[...] *proving this in detail would just be boring* [...]”.<sup>2</sup>

*Beweis.* Es seien  $a, b, c \in {}^*\mathbb{R}$  und es sei  $a > 0$  und  $b < c$ . Zu zeigen ist:

$$a \cdot b < a \cdot c$$

Es ist  $a = \langle a_n \rangle$ ,  $b = \langle b_n \rangle$  und  $c = \langle c_n \rangle$  und daher gibt es Mengen  $A, B \subset \mathbb{N}$  mit Maß 1 so, dass  $a_n > 0$  für  $n \in A$  und  $b_n < c_n$  für  $n \in B$ . Damit folgt aber,  $a_n \cdot b_n < a_n \cdot c_n$  für alle  $n \in A \cap B$ , nach Lemma 1.1.1 ist das Maß von  $(A \cap B)$  auch gleich 1 und damit ist  $a \cdot b < a \cdot c$ .  $\square$

Wesentlich bei den hyperreellen Zahlen und ihrer Nützlichkeit bei Anwendungen sind zwei Dinge: Zum einen, dass  $\mathbb{R}$  eine Teilmenge von  ${}^*\mathbb{R}$  ist<sup>3</sup> und zum anderen, dass es eine echte Teilmenge ist. Das heißt, dass es in  ${}^*\mathbb{R}$  Elemente gibt, die in  $\mathbb{R}$  nicht vorkommen – die “infinitesimalen” und die “infiniten” Zahlen.

Zu zeigen, dass  $\mathbb{R}$  in  ${}^*\mathbb{R}$  liegt, ist bei Lindstrøm sehr einfach: Man betrachte die Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  ${}^*\mathbb{R}$ , die gegeben ist durch

$$a \mapsto \langle a, a, a, \dots \rangle.$$

Die Abbildung ist ein injektiver, ordnungserhaltender Homomorphismus, der  $\mathbb{R}$  in  ${}^*\mathbb{R}$  einbettet. Mit ihr kann man jedes Element aus  $\mathbb{R}$  mit seinem Bild unter dieser Abbildung identifizieren. Die reellen Zahlen sind also in diesem Sinne eine Teilmenge der hyperreellen Zahlen. Von nun an wird für reelles  $a$  in  ${}^*\mathbb{R}$  statt korrekterweise  $\langle a \rangle$ , nur  $a$  geschrieben.

Vor allem interessant ist natürlich die Frage, wie die Elemente, die nicht in  $\mathbb{R}$  liegen, aussehen, da hier ein wesentlicher Teil der Nichtstandard-Analysis geschieht. Es sei schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass sich alleine aus Definition 1.1.2 schon ein wesentlicher Unterschied von Lindstrøms Zugang zu dem von Landers und Rogge ergibt. Es ist bei Lindstrøm offensichtlich, dass es Elemente in  ${}^*\mathbb{R}$  gibt, die nicht in  $\mathbb{R}$

---

<sup>3</sup>Teilmenge ist hier wieder in dem Sinne zu verstehen, dass es für jedes  $r \in \mathbb{R}$  ein äquivalentes Element in  ${}^*\mathbb{R}$  gibt.

vorkommen. Man betrachte hierzu etwa die Zahl  $\langle n \rangle = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ . In  ${}^*\mathbb{R}$  darf man so eine Zahl bilden, aber mit Sicherheit liegt sie nicht in  $\mathbb{R}$ . Landers und Rogge hingegen werden die Tatsache, dass  ${}^*\mathbb{R}$  echt größer ist als  $\mathbb{R}$ , explizit fordern.

Hier also die Definition jener Elemente, die  ${}^*\mathbb{R}$  echt größer machen als  $\mathbb{R}$ :

**Definition 1.1.4.** Es seien  $x, y \in {}^*\mathbb{R}$  dann heißt:

- (a)  $x$  endlich oder *finit*, falls  $|x| < a$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $x$  infinitesimal, falls  $|x| < a$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ .
- (c)  $x$  unendlich, falls  $x$  nicht endlich ist, also  $|x| > a$  für alle  $a \in \mathbb{R}_+$ .
- (d)  $x$  infinitesimal benachbart zu  $y$  oder  $x$  unendlich nahe bei  $y$ , falls  $x - y$  infinitesimal ist. Man schreibt dafür auch  $x \approx y$ .
- (e) Die Menge der finiten Elemente von  ${}^*\mathbb{R}$  seien mit  $\text{fin}({}^*\mathbb{R}) := \{x \in {}^*\mathbb{R} : x \text{ ist finit}\}$  bezeichnet.

Die Vorstellung von endlichen Zahlen (abgesehen von den infinitesimalen Zahlen, die natürlich darin enthalten sind) ist etwas relativ Greifbares, etwas, woran man im Umgang mit den reellen Zahlen gewöhnt ist. Unendliche, aber auch infinitesimale Zahlen sind hingegen für eine/n "Standard-MathematikerIn" etwas Ungewöhnliches, vor allem, wenn erkennbar wird, wie einfach es sich in der Nichtstandard-Analysis damit rechnen lässt. Zur Veranschaulichung sollen die folgenden Beispiele beitragen.

**Beispiele 1.1.5.** (1) Offensichtlich ist 0 sowohl in  $\mathbb{R}$  als auch in  ${}^*\mathbb{R}$  infinitesimal. Sie ist auch gleichzeitig die einzige infinitesimale Zahl in  $\mathbb{R}$ .

(2) Es ist  $x_1 = \langle \frac{1}{n} \rangle = \langle \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle$  infinitesimal, da für  $a \in \mathbb{R}_+$  gilt, dass  $m(\{n : -a < \frac{1}{n} < a\}) = 1$  da die Menge alle (bis auf endlich viele)  $n$  enthält und sie daher als Komplement der endlichen Menge (die ja Maß null hat), Maß eins haben muss. Analog ist daher zum Beispiel auch  $x_2 = \langle \frac{1}{\sqrt{n}} \rangle$  infinitesimal.

(3)  $\langle n^2 \rangle$  und  $\langle -n \rangle$  sind Beispiele für positive bzw. negative unendliche Zahlen.

Lindstrøm verwendet von nun an, dass in  ${}^*\mathbb{R}$  alle arithmetischen Regeln erhalten bleiben, auch ohne dies im Detail zu beweisen. "[...] *the arithmetic rules hold as one would expect.*"<sup>4</sup> So bleibt die Summe zweier infinitesimalen Zahlen infinitesimal ebenso wie das Produkt einer endlichen und einer infinitesimalen Zahl infinitesimal ist. Auch der Absolutbetrag wird definiert wie in den reellen Zahlen.

Der nächste Satz zeigt nun die Struktur des endlichen Teiles der hyperreellen Zahlen und gibt damit ein erstes anschauliches Bild von  ${}^*\mathbb{R}$ .

**Satz und Definition 1.1.6.** Sei  $x \in {}^*\mathbb{R}$  endlich. So kann man  $x$  darstellen als

$$x = a + \varepsilon$$

---

<sup>4</sup>[8]; Seite 8

wobei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$  infinitesimal und beide eindeutig bestimmt sind.

Dieses eindeutige  $a$  heißt der Standardteil von  $x$  und wird als  $\text{st}(x)$  oder  ${}^\circ x$  geschrieben. Umgekehrt heißt für  $a \in \mathbb{R}$  die Menge aller  $x \in {}^*\mathbb{R}$ , die infinitesimal benachbart sind zu  $a$ , die Monade,  $\mathbf{m}(a)$ , von  $a$

$$\mathbf{m}(a) := \{x \in {}^*\mathbb{R} : x \approx a\}.$$

*Beweis. Existenz:* Wähle  $a = \sup\{b \in \mathbb{R} : x < b\}$ . Da  $x$  endlich ist, existiert so ein  $a$ . Es ist zu zeigen, dass  $a$  infinitesimal benachbart zu  $x$  ist. Angenommen, das wäre nicht so, dann gäbe es ein  $r \in \mathbb{R}$  mit  $0 < r < |x - a|$ . Für den Fall  $x - a > 0$  wäre dann  $a + r < x$  im Widerspruch zur Definition von  $a$ . Analog führt  $x - a < 0$  mit  $x < a - r$  zu einem Widerspruch. Daher sind  $x$  und  $a$  infinitesimal nahe beieinander, also unterscheiden sie sich nur um eine Infinitesimale  $\varepsilon$ .

*Eindeutigkeit:* Sei  $a_1 + \varepsilon_1 = x = a_2 + \varepsilon_2$  dann ist  $a_1 - a_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ . Die rechte Seite ist ein Element von  $\mathbb{R}$  und die linke Seite ist infinitesimal, daher kann die Gleichheit nur für 0 gelten. Womit die Eindeutigkeit bewiesen ist.  $\square$

Es lässt sich nun eine Struktur der hyperreellen Zahlen zeigen, ähnlich wie man sich die reellen Zahlen als eine Zahlengerade vorstellen kann. Da  ${}^*\mathbb{R}$  angeordnet ist, kann man das wieder anhand einer (unterbrochenen) Gerade machen.

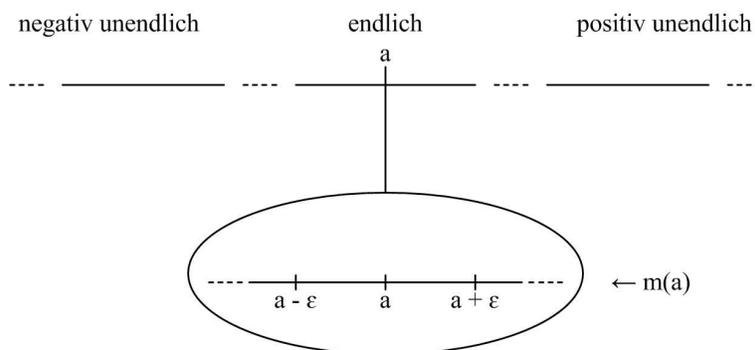


Abbildung 1.1:  ${}^*\mathbb{R}$  dargestellt durch eine (unterbrochene) Zahlengerade; für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist auch  $\mathbf{m}(a)$  in der Zahlengerade enthalten.

Abbildung 1.1 zeigt die drei Teile von  ${}^*\mathbb{R}$ , die negativen unendlichen Zahlen, die endlichen und die positiven unendlichen Zahlen.<sup>5</sup> Die Punkte zwischen den einzelnen Teilen sollen verdeutlichen, dass es in jedem dieser Bereiche kein größtes oder kleinstes Element gibt. Die drei Teile sind disjunkt. Der endliche Teil von  ${}^*\mathbb{R}$  schaut aus wie  $\mathbb{R}$ , bis auf die Tatsache, dass sich für jedes  $a \in \mathbb{R}$  auch die gesamte Monade von  $a$  in seiner Umgebung befindet. Diese Monaden zerteilen die endlichen Zahlen von  ${}^*\mathbb{R}$  wieder in disjunkte Bereiche, da zwei verschiedene reelle Zahlen nicht infinitesimal benachbart sein können und mit zwei infinitesimalen Zahlen auch ihre Summe infinitesimal ist, und diese daher wieder in der Monade drinnen liegt. Monaden haben daher auch kein größtes oder kleinstes Element. Man kann sich also die endlichen Zahlen auf einer Zahlengerade vorstellen, auf der sich jeder Punkt zu einer passenden Monade “aufblasen” lässt.

<sup>5</sup>Diese Abbildung ist angelehnt an jene von Landers und Rogge [5]; Seite 26

## 1.2 Die “schönen” Teilmengen von ${}^*\mathbb{R}$

Für Lindstrøm ist diese knappe Erklärung der hyperreellen Zahlen bereits ausreichend, um sich ihren wesentlichen Eigenschaften zu widmen. Das geschieht in der Nichtstandard-Analyse vor allem über die internen Mengen und internen Funktionen, oder wie Lindstrøm sagt: “*In nonstandard analysis the “nice” sets and functions are called internal.*”<sup>6</sup>

**Definition 1.2.1.** (a) Eine Folge  $\{A_n\}$  von Teilmengen von  $\mathbb{R}$  definiert eine Teilmenge  $\langle A_n \rangle$  von  ${}^*\mathbb{R}$  durch

$$\langle x_n \rangle \in \langle A_n \rangle \text{ falls } m(\{n : x_n \in A_n\}) = 1.$$

Eine Teilmenge  $\langle A_n \rangle$  von  ${}^*\mathbb{R}$ , die auf diese Weise beschrieben werden kann, nennt man *intern*.

(b) Eine Folge  $\{f_n\}$  von Funktionen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert eine Funktion  $\langle f_n \rangle : {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  durch

$$\langle f_n \rangle(\langle x_n \rangle) = \langle f_n(x_n) \rangle.$$

Eine Funktion  $\langle f_n \rangle$  auf  ${}^*\mathbb{R}$ , die auf diese Weise beschrieben werden kann, nennt man *intern*.

(c) Eine Teilmenge von  ${}^*\mathbb{R}$ , die nicht intern ist, heißt *extern*.

**Beispiele 1.2.2.** (1) Für  $a = \langle a_n \rangle$  und  $b = \langle b_n \rangle$ , beide aus  ${}^*\mathbb{R}$ , ist das Intervall  $[a, b] := \{x \in {}^*\mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  eine interne Menge, da man es als  $\langle [a_n, b_n] \rangle$  erhält.

(2) Seien  $x = \langle x_n \rangle$  und  $c = \langle c_n \rangle$  aus  ${}^*\mathbb{R}$ . Dann ist die Funktion  $\sin(cx)$  eine interne Funktion, definiert als  $\sin(cx) = \langle \sin(c_n x_n) \rangle$ .

(3) Es sind  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{R}$  Beispiele für externe Mengen in  ${}^*\mathbb{R}$ . Es ist nicht möglich, sie durch oben beschriebene Weise zu konstruieren. An dieser Stelle ist das noch nicht so ganz offensichtlich, es werden aber Sätze folgen, die zu unterscheiden helfen, wann eine Menge intern ist, und wann extern.

(4) Weiters ist auch die Menge  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  eine externe Menge. Sie besteht ausschließlich aus unendlich großen Elementen. Der Beweis hierfür soll im Kapitel von Landers und Rogge folgen (siehe Satz 2.3.2 und Satz 2.3.8)

(5) Auch die Monade einer hyperreelle Zahl ist eine externe Menge in  ${}^*\mathbb{R}$ .

---

<sup>6</sup>[8]; Seite 10

Die Beispiele (3)-(5) externer Mengen werden auch noch in Kapitel 4.1 genauer betrachtet, wo man noch weitere Hilfsmittel zur Verfügung hat, um zu unterscheiden, wann eine vorgegebene Menge intern oder extern ist.

Lindstrøms Zugang baut auf einer besonders wichtigen Eigenschaft der internen Mengen auf, nämlich ihrer produktähnlichen Struktur. Diese ermöglicht es, Operationen und Resultate komponentenweise von  $\mathbb{R}$  nach  ${}^*\mathbb{R}$  zu übertragen, was anhand des Beispiels Nichtstandard-Integral gezeigt sei:

**Beispiel 1.2.3.** Sei  $A = \langle A_n \rangle$  eine interne Menge und  $f = \langle f_n \rangle$  eine interne Funktion in  ${}^*\mathbb{R}$ . Dann ist das *Nichtstandard-Integral*  $\int_A f dx$  definiert durch:

$$\int_A f dx := \left\langle \int_{A_n} f_n dx \right\rangle.$$

Dieses Integral erbt die meisten Eigenschaften des Integrals über  $\mathbb{R}$ , so ist zum Beispiel

$$\int_A (f + g) dx = \int_A f dx + \int_A g dx$$

auch weiterhin gültig:

$$\begin{aligned} \int_A (f + g) dx &= \left\langle \int_{A_n} (f + g)_n dx \right\rangle = \left\langle \int_{A_n} (f_n + g_n) dx \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{A_n} f_n dx + \int_{A_n} g_n dx \right\rangle = \left\langle \int_{A_n} f_n dx \right\rangle + \left\langle \int_{A_n} g_n dx \right\rangle \\ &= \int_A f dx + \int_A g dx. \end{aligned}$$

Dieses Prinzip des Definierens und Beweisens von Eigenschaften interner Mengen oder Funktionen in  ${}^*\mathbb{R}$  durch die komponentenweise Rückführung auf deren zugehörige Eigenschaft in  $\mathbb{R}$  ist bei Lindstrøm wesentlich. Er baut viele seiner Beweise, auch bei späteren Anwendungen, darauf auf. Das allgemeine, dahinterstehende Prinzip ist, wie später gezeigt wird, das Transfer-Prinzip. In seiner knappen Einführung und dem von ihm gewählten konstruktiven Weg, legt Lindstrøm keinen Wert darauf, das Transfer-Prinzip zu beweisen. Er ist daher auf die Ausführung des immer wieder gleichen Schemas angewiesen. Lindstrøm geht erst am Schluss seines Artikels auf das Transfer-Prinzip ein, gewissermaßen um es als wesentliches Element der Nichtstandard-Analysis nicht auszulassen. Er benötigt es aber auf seinem Weg nicht. Dies ist einer der wesentlichen Unterschiede zwischen Lindstrøm und Landers und Rogge. Darauf wird später noch detaillierter einzugehen sein. (Siehe Kapitel 4.1)

Ein weiteres Beispiel für dieses Vorgehen ist der folgende Satz über die kleinste obere Schranke. Auch hier wird wieder eine Eigenschaft von  $\mathbb{R}$  auf die internen Mengen von  ${}^*\mathbb{R}$  übertragen, wobei die Definition von kleinster oberer Schranke analog zu der in  $\mathbb{R}$  ist.

**Satz 1.2.4** (Prinzip der kleinsten oberen Schranke). *Eine interne, nichtleere Teilmenge von  ${}^*\mathbb{R}$ , die nach oben beschränkt ist, hat eine kleinste obere Schranke.*

*Beweis.* Sei  $A = \langle A_n \rangle$  eine interne Menge, die durch  $a = \langle a_n \rangle$  nach oben beschränkt ist. Es sind dann fast alle  $A_n$  durch die passenden  $a_n$  beschränkt. O.B.d.A. seien alle  $A_n$  nach oben beschränkt (die anderen spielen nach Definition des Maßes keine Rolle). Damit existiert nach dem in  $\mathbb{R}$  gültigen Prinzip der kleinsten oberen Schranke<sup>7</sup> ein Supremum aller  $A_n$ , und die zugehörige Äquivalenzklasse  $b = \langle \sup(A_n) \rangle$  ist die kleinste obere Schranke von  $A$ .  $\square$

Es ist hier wesentlich, dass das Prinzip der kleinsten oberen Schranke nicht für alle Teilmengen des  ${}^*\mathbb{R}$  gilt, sondern sich eben auf interne Teilmengen einschränkt. Dieser wichtige Punkt wird noch in Kapitel 4.1 genauer aufgearbeitet. Der folgende Satz 1.2.5 ist ein weiteres wichtiges Hilfsmittel für die Entscheidung, wann eine Menge intern oder extern ist.

**Satz 1.2.5.** *Sei  $A$  eine interne Teilmenge von  ${}^*\mathbb{R}$ .*

- (i) (Overflow-Prinzip) *Enthält  $A$  beliebig große endliche Elemente, so enthält  $A$  ein unendliches Element.*
- (ii) (Underflow-Prinzip) *Enthält  $A$  beliebig kleine positive unendliche Elemente, so enthält  $A$  ein endliches Element.*

*Beweis.* (i) Ist  $A$  unbeschränkt, so enthält es ein unendliches Element. Sei also  $A$  nach oben beschränkt, dann gibt es nach Satz 1.2.4 eine kleinste obere Schranke  $a \in {}^*\mathbb{R}$ . Da  $A$  beliebig große Elemente enthält, muss  $a$  unendlich sein. Nach Definition der kleinsten oberen Schranke muss es ein  $x \in A$  geben mit  $\frac{a}{2} \leq x \leq a$  und dieses  $x$  ist unendlich da das Produkt einer endlichen und einer unendlichen Zahl unendlich ist - siehe Bemerkung vor Satz 1.1.6.

- (ii) Sei  $b \in {}^*\mathbb{R}$  die größte untere Schranke von  $A^+ := \{x \in A : x \text{ positiv}\}$ , dann muss  $b$  endlich sein und es existiert ein  $x \in A$  mit  $b \leq x \leq b + 1$ . Aus analogem Grund zu (i) muss  $x$  endlich sein.  $\square$

**Beispiel 1.2.6.** Mit diesem Satz lässt sich zum Beispiel zeigen, dass  $\mathbb{N}$  oder auch  $\mathbb{R}$  externe Mengen sein müssen. Sie enthalten beide beliebig große, aber natürlich keine unendlichen Elemente. Nach dem Overflow-Prinzip können  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}$  daher nicht intern sein.

Der folgende Satz ist, wie sich noch zeigen wird, von großer Bedeutung. Aus ihm folgen einige wichtige Sätze direkt, wie etwa auch Proposition 1.2.8. In der vorliegenden Arbeit sieht man davon eine schöne Anwendung zum Beispiel in Kapitel 4.5. Es sei bereits hier darauf hingewiesen, dass in diesem Punkt eine interessante Schnittstelle zwischen Lindstrøm und Landers und Rogge deutlich wird (siehe Kapitel 4.4). Der Beweis des folgenden Satzes ist sehr technisch und für den weiteren Verlauf der Arbeit nicht wesentlich, daher soll er ausgelassen werden. Er kann bei Lindstrøm in Kapitel I nachgelesen werden.

---

<sup>7</sup>Siehe dazu etwa [3]; Seite 72

**Satz 1.2.7** ( $\aleph_1$  - Saturation). Sei  $\{A^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge interner Mengen mit der Eigenschaft, dass  $\bigcap_{i \leq I} A^i \neq \emptyset$  für alle  $I \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A^i \neq \emptyset.$$

Die folgende Proposition beschreibt noch deutlicher die Eigenschaften interner Mengen, sie ist wie gesagt, eine direkte Folgerungen aus der  $\aleph_1$  - Saturation. Man kann zeigen, dass die Familie der internen Mengen unter endlichen Booleschen Operationen abgeschlossen ist und daher eine Boolesche Algebra bilden. Hierbei benötigt man folgende Aussagen:

- $\langle A_n \rangle \cap \langle B_n \rangle = \langle A_n \cap B_n \rangle$
- $\langle A_n \rangle \cup \langle B_n \rangle = \langle A_n \cup B_n \rangle$
- $\langle A_n \rangle^c = \langle A_n^c \rangle$ .

Wie die Proposition 1.2.8 zeigt, bildet die Familie der internen Mengen aber keine  $\sigma$ -Algebra. Diese Eigenschaft wird bei späteren Anwendungen der Nichtstandard-Theorie, zum Beispiel in der Maßtheorie, eine wichtige Rolle spielen. Um eine  $\sigma$ -Algebra zu sein, müsste für abzählbar viele interne Teilmengen auch immer ihre Vereinigung intern sein. So allgemein gilt das im System der internen Mengen aber nicht.

**Proposition 1.2.8.** Sei  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge interner Mengen. Dann gilt:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ intern} \iff \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \leq N} A_n \text{ für ein } N \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Angenommen, es ist

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

intern. Dann ist  $A \setminus A_n$  intern für alle  $n \in \mathbb{N}$  und es ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A \setminus A_n) = \emptyset.$$

Aus Satz 1.2.7 folgt, dass es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass

$$\bigcap_{n \leq N} (A \setminus A_n) = \emptyset$$

gilt und daher muss

$$A = \bigcup_{n \leq N} A_n$$

sein. □

Bis jetzt wurden vor allem allgemeine Eigenschaften interner Mengen beschrieben, während nun zwei wichtige Sonderfälle betrachtet werden sollen: die Standard-Mengen und die hyperendlichen Mengen.

## 1.2.1 Standard-Mengen

**Definition 1.2.9.** (a) Für  $A \subseteq \mathbb{R}$  heißt die interne Menge  ${}^*A = \langle A, A, A, \dots \rangle$  die *Nichtstandard-Version von  $A$* . Analog heißt für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die interne Funktion  ${}^*f = \langle f, f, f, \dots \rangle$ , die *Nichtstandard-Version von  $f$*

(b) Eine interne Menge bzw. eine interne Funktion heißt *Standard-Menge* bzw. *Standard-Funktion*, wenn sie von der Form  ${}^*A$  bzw.  ${}^*f$  ist.

Es ist, wie auch Lindström an dieser Stelle darauf hinweist,  ${}^*A$  im allgemeinen viel größer als  $A$ . So enthält zum Beispiel das Nichtstandard-Intervall  ${}^*[a, b]$  neben all den reellen Zahlen zwischen  $a$  und  $b$  auch alle Nichtstandard-Zahlen, also zu jedem reellen  $c \in {}^*[a, b]$  auch seine Monade  $\mathbf{m}(c)$ . Die folgende Proposition unterstützt das sehr schön.

**Proposition 1.2.10.** *Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist  $A \subseteq {}^*A$  und Gleichheit gilt genau dann wenn  $A$  endlich ist.*

*Beweis.* Dass  $A \subset {}^*A$  ist, sieht man leicht: Da für  $a \in A$  gilt,

$$a = \langle a, a, a, \dots \rangle \in \langle A, A, A, \dots \rangle = {}^*A.$$

Ist  $A$  unendlich, so gibt es Elemente, die in  ${}^*A$  liegen, aber nicht in  $A$ . Man wählt dazu eine Folge  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  von verschiedenen Elementen von  $A$ . Es ist dann  $\langle a_n \rangle \in {}^*A$ , aber verschieden von allen Elementen in  $A$ .

Ist hingegen  $A = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_k\}$  endlich und  $\langle a_n \rangle \in {}^*A$ , dann ist

$$\{n : a_n \in A\} = \{n : a_n = b_1\} \cup \{n : a_n = b_2\} \cup \dots \cup \{n : a_n = b_k\}$$

und da  $m(\{n : a_n \in A\}) = 1$ , muss es ein  $i$  geben, so dass  $m(\{n : a_n = b_i\}) = 1$  gilt. Daher ist also  $\langle a_n \rangle = b_i \in A$ . Womit gezeigt ist, dass die Gleichheit genau dann gilt, wenn  $A$  endlich ist.  $\square$

**Bemerkung:** Die zu 1.2.10 analoge Behauptung für Funktionen besagt, dass  ${}^*f$  immer eine Fortsetzung von  $f$  auf  ${}^*\mathbb{R}$  ist. Das ist leicht zu sehen, da für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt, dass

$${}^*f(a) = \langle f \rangle(\langle a \rangle) = \langle f(a) \rangle = f(a).$$

**Beispiele 1.2.11.** Wichtige Beispiele für Standard-Mengen sind  ${}^*\mathbb{N}$ ,  ${}^*\mathbb{Z}$ ,  ${}^*\mathbb{Q}$ , die hypernatürlichen, die hyperganzen und die hyperrationalen Zahlen. So besteht etwa  ${}^*\mathbb{N}$  aus allen Elementen von  ${}^*\mathbb{R}$ , die die Form  $\langle N_n \rangle$  haben, wobei  $N_n \in \mathbb{N}$  für fast alle  $n$  ist.  ${}^*\mathbb{N}$  enthält also auch unendliche natürliche Zahlen wie etwa  $\langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ . Auch hier werden wieder Operationen von  $\mathbb{N}$  übernommen, wie man es sich erwarten würde.

Selbstverständlich gibt es auch Beispiele für interne Mengen, die keine Standard-Mengen sind. Als Beispiel sei das Intervall  $[a, b]$  für  $a, b \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$  erwähnt, das natürlich keine Standard-Menge sein kann. Es sei hierzu auf Kapitel 4.2 verwiesen, wo auf dieses Beispiel noch genauer eingegangen wird.

Das ist soweit alles, was Lindström über Standard-Mengen und Standard-Funktionen schreibt, und er beendet diesen Teil mit dem Beisatz: *“The standard sets are important*

but not very exciting [...]”<sup>8</sup>. Aufregender hingegen sind nach Lindstrøms Meinung die bereits erwähnten hyperendlichen Mengen. “In my opinion, hyperfinite sets are one of the most important and interesting discoveries of nonstandard analysis [...]”<sup>9</sup>

## 1.2.2 Hyperendliche Mengen

**Definition 1.2.12.** (a) Eine interne Menge  $A = \langle A_n \rangle$  heißt *hyperendlich* oder *hyperfinit*, falls fast alle, also alle bis auf eine Menge mit Maß Null,  $A_n$  endlich sind.

(b) Ist  $|A_n|$  die Anzahl der Elemente von  $A_n$ , so heißt die nichtstandard Zahl  $|A| = \langle |A_n| \rangle$  die *interne Kardinalität* von  $A$ .

**Beispiel 1.2.13.** Sei  $N \in {}^*\mathbb{N}$ , so ist die Menge

$$H = \left\{ 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1 \right\}$$

ein Beispiel für eine hyperendliche Menge mit interner Kardinalität  $N + 1$ .

Man beachte, dass  $N$  selbstverständlich unendlich groß sein darf und da liegt die Frage nahe, wie die Punkte zwischen  $\frac{2}{N}$  und  $\frac{N-1}{N}$  zu interpretieren sind. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist natürlich auch  $k + 1 \in \mathbb{N}$  und umgekehrt ist für  $N$  unendlich groß auch  $N - k, k \in \mathbb{N}$  unendlich gross. Insofern, wäre die Beschreibung von  $H$  durch die Menge  $H_K := \left\{ \frac{K}{N} : K \leq N \text{ mit } K, N \in {}^*\mathbb{N} \right\}$  vielleicht besser, wenn auch weniger anschaulich. Dass  $H$  und  $H_K$  die gleichen Mengen beschreiben wird dadurch ersichtlich, dass  ${}^*\mathbb{R}$  und somit auch  ${}^*\mathbb{N}$  linear geordnet sind (siehe Satz 1.1.3 und Abbildung 1.1).

Es gilt somit für  $N = \langle N_n \rangle, H = \langle H_n \rangle$  wobei,  $H_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  folgendermaßen definiert ist:

$$H_n = \left\{ 0, \frac{1}{N_n}, \frac{2}{N_n}, \dots, \frac{N_n-1}{N_n}, 1 \right\}$$

ist. Es wird in Kapitel 4.3 noch genauer darauf eingegangen, wie man zeigen kann, dass  $H$  eine hyperendliche Menge ist.

Ein wesentlicher Vorzug von hyperendlichen Mengen ist, dass sie viele Eigenschaften von endlichen Mengen erben. Lindstrøm geht auf diese Tatsache nicht im Detail ein, sondern nennt folgende Beispiele, deren Beweise sich direkt aus der Definition ergeben:

- Eine hyperendliche Menge hat immer ein größtes und ein kleinstes Element.
- Die Vereinigung zweier hyperendlicher Mengen ist hyperendlich.

---

<sup>8</sup>[8]; Seite 15

<sup>9</sup>[8]; Seite 16

Ein interessantes Beispiel für die Anwendung von hyperendlichen Mengen ergibt sich, wenn man die Summe einer Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  über eine hyperendliche Menge betrachtet. Sei allgemein  $f = \langle f_n \rangle$  eine interne Funktion und  $A = \langle A_n \rangle$  eine hyperendliche Menge, so sei die Summe von  $f$  über  $A$  wie folgt definiert:

$$\sum_{a \in A} f(a) := \left\langle \sum_{a_n \in A_n} f_n(a_n) \right\rangle.$$

**Beispiel 1.2.14.** Sei die hyperendliche Menge  $H = \langle H_n \rangle$  wie in Beispiel 4.3.2 definiert und sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist nach dieser Definition

$$\sum_{h \in H} {}^*g(h) \frac{1}{N} = \left\langle \sum_{h_n \in H_n} g(h_n) \frac{1}{N_n} \right\rangle.$$

Ist nun  $g$  stetig auf  $\mathbb{R}$  und  $N$  unendlich groß, so ist

$$\sum_{h_n \in H_n} g(h_n) \frac{1}{N_n} \approx \int_0^1 g(h) dh$$

und somit

$$\int_0^1 g(h) dh = \text{st} \left( \sum_{h \in H} {}^*g(h) \frac{1}{N} \right).$$

Das Riemann Integral entspricht also einfach der Standardteil einer hyperendlichen Summe.

An Hand dieses Beispiels lässt sich erkennen, dass hyperendliche Mengen eine so wichtige Rolle in der Nichtstandard-Analyse spielen, wie Lindstrøm es zuvor meinte.

Bisher wurde in diesem Kapitel die Nichtstandard-Theorie über  $\mathbb{R}$  entwickelt. Es wurden die hyperreellen Zahlen  ${}^*\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{R}$  konstruiert und gezeigt, dass sie mit den geeigneten Operationen einen geordneten Körper bilden, der  $\mathbb{R}$  als echte Teilmenge enthält. Um die Struktur von  ${}^*\mathbb{R}$  besser zu verstehen und so den eigentlichen Unterschied gegenüber  $\mathbb{R}$  erfassen zu können, wurden spezielle Teilmengen von  ${}^*\mathbb{R}$ , die internen Mengen und noch spezieller die Standard-Mengen und die hyperendlichen Mengen, genauer betrachtet.

Nun sind aber die Anwendungsgebiete der Nichtstandard-Analyse weit verstreut und nicht alle sind alleine über  $\mathbb{R}$  entwickelbar. Zwei der wichtigsten Anwendungsgebiete, die nicht über  $\mathbb{R}$  alleine, sondern auch über allgemeinen Mengen existieren, sind etwa die Topologie und die Maßtheorie. Um die Nichtstandard-Theorie auf diese allgemeineren Gebieten anwenden zu können, braucht man einen allgemeineren Zugang, als den bisher beschriebenen. Lindstrøm erweitert daher seine Theorie und zeigt, wie man mit Hilfe von Superstrukturen eine allgemeine Nichtstandard-Theorie aufbauen kann. Superstrukturen sind allgemein Mengen, die die nötigen Objekte für eine bestimmte mathematische Theorie als Elemente enthalten. So können etwa das System aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen aber auch das System aller Maße oder

das aller offenen Mengen in einer Superstruktur enthalten sein. Lindstrøm konstruiert eine allgemeine Nichtstandard-Theorie mit der gleichen Methode, wie es hier über  $\mathbb{R}$  gezeigt wurde. Ausgehend von einer beliebigen Menge  $S$  bildet er die Menge  $\mathfrak{s} = S^{\mathbb{N}}$  aller Folgen über  $S$ . Mit der gleichen Definition des Maßes  $m$  bildet er, analog dazu, wie  ${}^*\mathbb{R}$  konstruiert wurde, nun

$${}^*S = \mathfrak{s} / \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  wieder definiert ist als

$$\{a_n\} \sim \{b_n\}, \text{ falls } m\{n : a_n = b_n\} = 1.$$

Um beliebige Elemente in der Menge  $S$  haben zu können, verwendet Lindstrøm also die Theorie von Superstrukturen. Ansonsten ändert sich bei seiner Methode nicht viel. Auch Landers und Rogge bauen ihren Zugang zur Nichtstandard-Analysis auf Superstrukturen auf. Da sie diese wesentlich genauer beschreiben, soll nun Lindstrøms Methode nicht mehr weiter verfolgt werden, sondern gleich zu Landers und Rogge übergegangen werden.

# Kapitel 2

## Landers und Rogges Zugang zur Nichtstandard-Analysis

Es wurde in Kapitel 1 gezeigt, wie auf relativ einfache Weise die hyperreellen Zahlen konstruiert werden können. Hiefür wurde eine Methode angewendet, die MathematikerInnen vertraut ist. Man kann mit Lindstrøms knapper Einführung schnell zum “Handwerk” Nichtstandard-Analysis übergehen, man kann sie schnell anwenden. Demgegenüber bringen Landers und Rogge eine sehr ausführliche Version, in der sie einen anderen Weg einschlagen - einen Wege, in dem sie eine Methode zur Einführung der Nichtstandard-Analysis wählen, die MathematikerInnen ebenso vertraut ist. Landers und Rogge werden wichtige Anforderungen, die sie an die hyperreellen Zahlen stellen, vorgeben. Sie gehen in diesem Sinne einen axiomatischen Weg. Diese Variante ist zunächst vielleicht nicht so überschaubar, wie die Lindstrøms, sie hat aber, wie man sehen wird, vor allem in der Anwendung dann ihre Vorteile.

Auch Landers und Rogge bringen am Anfang ihres Buches eine Nichtstandard-Theorie ausschließlich für die reellen Zahlen. Diese Theorie führen sie über Filter und Ultrafilter ein. Da dies jedoch als Motivation ihres später gewählten generellen Ansatzes dient, und sich sehr von diesem unterscheidet, sollen Ultrafilter hier nicht weiter ausführlich behandelt werden. In Kapitel 4.6 wird die Bedeutung von Ultrafiltern in dem Zugang zur Nichtstandard-Analysis von Landers und Rogge genauer besprochen werden. Ich gehe gleich auf die allgemeine Version von Landers und Rogge ein:

### 2.1 Die Grundlagen

In diesem Abschnitt werden kurz die Grundlagen dargelegt, auf denen Landers und Rogge ihren Zugang zur Nichtstandard-Analysis aufbauen. Es sind dies zum einen, wie am Ende des vorigen Kapitels angekündigt wurde, Superstrukturen. Doch um auf einer Superstruktur, die im wesentlichen nichts anderes als eine Menge ist, Mathematik betreiben zu können, braucht man auch eine Sprache, mit der das möglich ist - eine Sprache, in der man insbesondere formulieren kann, was eine Aussage und ebenso die Gültigkeit einer Aussage in dieser Superstruktur sind. Hiezu bedient man sich der mathematischen Logik Es wird definiert, welche Zeichen in dieser Sprache verwendet wer-

den dürfen, was ein Term in einer Superstruktur ist, was eine Formel, was eine Aussage in einer Superstruktur ist und was wesentlich ist, auch wann eine Aussage gültig oder nicht gültig ist. All das ist wichtig, um später die Standard- und Nichtstandard-Welt einführen und in ihr arbeiten zu können.

Da es sich hier vornehmlich um die Grundlagen dieses Zugangs zur Nichtstandard-Analyse handelt, und der Kern der Theorie erst in den Abschnitten 2.2 und 2.3 beschrieben wird, soll hier auf die meisten Beweise verzichtet werden, sie können jedoch bei Landers und Rogge in Kapitel 5 und 6 nachgelesen werden.<sup>1</sup>

### 2.1.1 Superstrukturen und ihre “super” Strukturen

Wie schon erwähnt wurde, sind Superstrukturen Mengen, die alle, für die Arbeit mit einer mathematischen Theorie wesentlichen, Objekte als Elemente enthalten. Landers und Rogge präzisieren das, indem sie verlangen, dass alle in endlich vielen Schritten mit Hilfe der zugrundeliegenden Menge der Urelemente erzeugbaren mathematischen Objekte in der Superstruktur liegen. Der Vorteil ist, wenn man all diese Objekte in einer Superstruktur  $\widehat{S}$  vereint hat, dass man sie dann in Aussagen über  $\widehat{S}$  verwenden kann. Für die Superstruktur  $\widehat{S}$  über der Menge  $S$  der Urelemente, soll also insbesondere gelten, dass

- (i)  $S \in \widehat{S}$
- (ii)  $A \in \widehat{S} \text{ Menge} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \widehat{S}$
- (iii)  $A, B \in \widehat{S} \text{ Mengen} \Rightarrow A \cup B \in \widehat{S}$
- (iv)  $A \in \widehat{S} \text{ Menge} \Rightarrow a \in \widehat{S} \text{ für alle } a \in A$

Bei der Definition von Superstrukturen geht man von einer Menge von Urelementen  $S$  aus. Dies ist eine Menge, deren Elemente selbst keine Mengen sind. Das heißt, mit  $a \in S$  folgt, dass es kein  $b$  gibt, mit  $b \in a$ .

**Definition 2.1.1.** Sei  $S$  eine nicht leere Menge von Urelementen und es bezeichne  $\mathcal{P}(A)$  die Potenzmenge einer Menge  $A$ . Definiert man eine Folge  $\{S_n\}$  von Mengen induktiv durch

$$S_0 := S$$

$$S_{n+1} := S_n \cup \mathcal{P}(S_n)$$

so heißt die Vereinigung

$$\widehat{S} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

die *Superstruktur* über  $S$ . Für jedes  $x \in \widehat{S}$  gibt es ein kleinstes  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $x \in S_n$  ist. Dieses  $n$  heißt der *Rang* von  $x$ .

---

<sup>1</sup>[5]; Kapitel 5 und 6

Für Superstrukturen kann gezeigt werden, dass sie die kleinsten Mengen sind, die die oben erwähnten Eigenschaften (i)-(iv) erfüllen.

Als Beispiel, wie man Objekte als Mengen auffassen kann, soll hier das geordnete Paar und  $n$ -Tupel nach Kuratowski definiert werden, wie es aus der Mengenlehre bekannt ist. Dass das so definierte geordnete Paar das *Gleichheitsaxiom für geordnete Paare* von Peano<sup>2</sup> erfüllt, ist leicht zu zeigen, wie die Ausführungen von Landers und Rogge belegen. Im Folgenden ist zu beachten, dass  $\langle a \rangle$  von den Äquivalenzklassen von Lindstrøm zu unterscheiden ist. Die spitzen Klammern werden nur deshalb verwendet, da den üblichen runden Klammern im Abschnitt 2.1.2 eine andere Bedeutung zukommt.

**Definition 2.1.2.** Das *geordnete Paar* von  $a, b$  ist definiert durch:

$$\langle a, b \rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Das *geordnete  $n$ -Tupel* von  $a_1, \dots, a_n$  wird für  $n \geq 3$  induktiv definiert durch:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle := \langle \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$$

Für  $n = 1$  definiert man der Vollständigkeit halber  $\langle a_1 \rangle := a_1$

Landers und Rogge gehen in ihrem Buch sehr genau und ausführlich vor. So beschreiben sie auch Superstrukturen bedeutend ausführlicher als Lindstrøm. An dieser Stelle soll nicht jeder Beweis nachvollzogen werden. Um aber ein besseres Verständnis zu ermöglichen, seien hier einige Eigenschaften von  $S_n$  und  $\widehat{S}$  angeführt. Für  $A_1, \dots, A_n$  Mengen soll dabei  $A_1 \times \dots \times A_n := \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle : a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$  das kartesische Produkt sein. Ausserdem wird von nun, wenn keine Verwechslungsgefahr auftreten kann an für Mengen  $A, B$  die Schreibweise  $A - B$  statt  $A \setminus B$  verwendet.

**Proposition 2.1.3** (Eigenschaften von  $S_n$ ). *Seien  $A, B$  Mengen und  $a, b$  können sowohl Mengen als auch Urelemente von  $S_n$  sein. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :*

- (i) *Es ist  $S_n$  transitiv, d.h.:  $A \in S_n \implies a \in S_n$  für alle  $a \in A$*
- (ii)  *$A \in S_n - S \iff A \subset S_{n-1}$*
- (iii)  *$A \in S_n - S \implies \mathcal{P}(A) \in S_{n+1}$*
- (iv)  *$B \subset A \in S_n - S \implies B \in S_n$*
- (v)  *$A_j \in S_n - S$  für  $j \in J \implies \bigcup_{j \in J} A_j \in S_n$*
- (vi)  *$a, b \in S_{n-1} \iff \{a, b\} \in S_n$*
- (vii)  *$a, b \in S_{n-1} \iff \langle a, b \rangle \in S_{n+1}$*
- (viii)  *$A, B \in S_n - S \implies A \times B \in S_{n+2}$*

---

<sup>2</sup>Zwei geordnete Paare sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten gleich sind.

**Proposition 2.1.4** (Eigenschaften von  $\widehat{S}$ ). Seien  $A, B, A_1, \dots, A_n$  Mengen und  $a_1, \dots, a_n$  können sowohl Mengen als auch Urelemente der Superstruktur  $\widehat{S}$  sein. Dann gilt:

(i) Es ist  $\widehat{S}$  transitiv.

(ii)  $\widehat{S} \notin \widehat{S}$

(iii)  $A \in \widehat{S} \implies \mathcal{P}(A) \in \widehat{S}$

(iv)  $A \in \widehat{S}, B \subset A \implies B \in \widehat{S}$

(v)  $A_1, \dots, A_n \in \widehat{S} \implies A_1 \cup \dots \cup A_n \in \widehat{S}$  und  $A_1 \times \dots \times A_n \in \widehat{S}$

(vi)  $a_1, \dots, a_n \in \widehat{S} \implies \{a_1, \dots, a_n\} \in \widehat{S}$  und  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \widehat{S}$

(vii)  $A_1, \dots, A_n \in \widehat{S} \implies \bigcup_{j=1}^n A_j \subset S_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bemerkung:** Nimmt man als Menge der Urelemente  $\mathbb{R}$  so folgt unter Betrachtung der Superstruktur  $\widehat{\mathbb{R}}$  aus Proposition 2.1.4, dass  $\mathbb{R}^n$  ein Element von  $\widehat{\mathbb{R}}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist.

Nachdem gezeigt wurde, dass man das geordnete Paar als Menge definieren kann und ein Überblick über die Superstrukturen gegeben wurde, können nun einige der wichtigen mathematischen Objekte definiert werden, von denen vorher die Rede war. Es wird der Begriff der Relation formal definiert. Relationen sind auch wieder als Menge definiert, womit später die relevanten Relationen in  $\widehat{S}$  zu Verfügung stehen.

**Definition 2.1.5.** Eine Menge  $R$  heißt eine *Relation*, wenn es Mengen  $A, B$  gibt, so dass  $R \subset A \times B$  gilt. Ist  $R \subset A \times A$ , so nennt man  $R$  auch eine *Relation über  $A$* . Meist wird für  $a, b \in A, B$  statt  $\langle a, b \rangle \in R$  wie in der Mathematik üblich,  $a R b$  geschrieben werden.

Die *Definitions-* und *Wertebereiche*  $\mathcal{D}(R)$  und  $\mathcal{W}(R)$  der Relation  $R$  sind definiert, wie man es erwarten würde, ebenso die *inverse Relation*  $R^{-1}$  von  $R$  und *Komposition*  $R_2 \circ R_1$  zweier Relationen  $R_1$  und  $R_2$ .

- $\mathcal{D}(R) := \{a \in A : \langle a, b \rangle \in R \text{ für ein } b \in B\}$
- $\mathcal{W}(R) := \{b \in B : \langle a, b \rangle \in R \text{ für ein } a \in A\}$
- $R^{-1} := \{\langle b, a \rangle : \langle a, b \rangle \in R\}$
- $R_2 \circ R_1 := \{\langle a, c \rangle : \langle a, b \rangle \in R_1 \text{ und } \langle b, c \rangle \in R_2 \text{ für ein } b\}$

Ist  $R \in \widehat{S}$  so kann gezeigt werden, dass auch  $\mathcal{D}(R)$  und  $\mathcal{W}(R)$  Elemente von  $\widehat{S}$  sind. Ebenso sind die inverse Relation und die Komposition von Relationen wieder Elemente der Superstruktur.

**Bemerkung:** Betrachtet man wieder das Beispiel der Superstruktur  $\widehat{\mathbb{R}}$ , so folgt dafür, dass jede Relation über  $\mathbb{R}^n$  ein Element von  $\widehat{\mathbb{R}}$  ist.

Der Begriff der Funktion ist ein grundlegender Begriff in mathematischen Theorien. Funktionen werden hier als spezielle Relationen eingeführt und sind somit insbesondere auch wieder Mengen.

**Definition 2.1.6.** Sei  $f$  eine Relation, sie heißt *Funktion* oder *Abbildung*, falls  $\langle a, b \rangle \in f$  und wenn aus  $\langle a, c \rangle \in f$  folgt, dass  $b = c$  sein muss. Es existiert daher für jedes  $a \in \mathcal{D}(f)$  genau ein  $b$  mit  $\langle a, b \rangle \in f$  und für dieses  $b$  schreibt man auch  $b = f(a)$ .

Als Beispiel für den Umgang mit der eingeführten Terminologie und um zu zeigen, dass die so definierten Funktionen trotzdem ihre gewohnten Eigenschaften besitzen, soll bewiesen werden, dass die Inverse einer injektiven Funktion wieder injektiv ist.

**Satz 2.1.7.** Sei  $f$  eine Funktion, wie oben definiert. Dann gilt:

- (i) Ist  $f$  injektiv, so ist  $f^{-1}$  eine Funktion und injektiv.
- (ii) Ist  $g$  eine weitere Funktion, so ist  $g \circ f$  eine Funktion und  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$  für alle  $a \in \mathcal{D}(g \circ f)$ .

*Beweis.* (i) Es muss als erster Schritt gezeigt werden, dass  $f^{-1}$  eine Funktion ist. Für  $\langle b, a_1 \rangle \in f^{-1}$  und  $\langle b, a_2 \rangle \in f^{-1}$  ist also zu zeigen, dass  $a_1 = a_2$ . Aus der Definition der inversen Relation folgt, dass  $\langle a_1, b \rangle \in f$  und  $\langle a_2, b \rangle \in f$  und da  $f$  eine Funktion ist, folgt  $f(a_1) = f(a_2) = f(b)$ . Aus der Injektivität von  $f$  folgt daher  $a_1 = a_2$ . Weiters ist zu zeigen, dass  $f^{-1}$  injektiv ist. Für  $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) = f^{-1}(a)$  ist also zu zeigen, dass  $b_1 = b_2$  gilt. Es sind  $\langle b_1, a \rangle \in f^{-1}$  und  $\langle b_2, a \rangle \in f^{-1}$  und folglich sind  $\langle a, b_1 \rangle \in f$  und  $\langle a, b_2 \rangle \in f$ . Da  $f$  eine Funktion ist, folgt  $b_1 = b_2$ .

(ii) Der Beweis zu Punkt(ii) verläuft analog zu (i).

□

Funktionen  $f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathcal{W}(f)$  werden wie üblich definiert. Die Frage, wann eine Funktion von  $A$  nach  $B$  in einer Superstruktur  $\widehat{S}$  liegt, lässt sich einfach dadurch beantworten, dass  $A$  und  $B$  Elemente von  $\widehat{S}$  sein müssen. Für  $a \in A$  ist dann auch jedes  $f(a) \in \widehat{S}$  und es ist  $B^A := \{f, \text{Funktion: } f : A \longrightarrow B\}$  in  $\widehat{S}$ .

**Bemerkung:** Insbesondere ist auch im Beispiel von  $\widehat{\mathbb{R}}$  das System aller Funktionen von  $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  ein Element von  $\widehat{\mathbb{R}}$ . Nach 2.1.4 sind auch dessen Teilmengen aller stetigen, differentierbaren oder aller linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , Elemente von  $\widehat{\mathbb{R}}$ .

Zum Abschluss dieses Abschnitts über Superstrukturen, werden nun noch die Operationen definiert. Sie werden in der üblichen Weise eingeführt. Da sie jedoch besondere Funktionen sind, sind auch sie wieder Mengen und können daher Elemente einer Superstruktur sein.

**Definition 2.1.8.** Für eine nichtleere Menge  $A$  heißt die Funktion  $\theta : A \times A \longrightarrow A$  eine *Operation in  $A$* . Meist wird für  $a, b \in A$  statt  $\theta(\langle a, b \rangle)$ , wie in der Mathematik üblich,  $a \theta b$  geschrieben.

**Bemerkung:** Insgesamt kann man also für das Beispiel der Superstruktur  $\widehat{\mathbb{R}}$  folgendes zusammenfassend sagen: “...  $\widehat{\mathbb{R}}$  ist umfassend genug, dass durch ‘Aussagen in der Superstruktur  $\widehat{\mathbb{R}}$ ’ Aussagen über alle in der reellen Analysis relevanten Objekte formulierbar sind.”<sup>3</sup>

## 2.1.2 Aussagen in Superstrukturen

Nachdem nun gezeigt wurde, dass Superstrukturen gut geeignete Mengen sind, um auf ihnen mathematische Theorien aufzubauen, ist der nächste wichtige Schritt um zu dieser Theorie zu kommen, den Begriff der Aussage zu definieren. Es muss festgelegt werden, wann eine Aussage gültig und wann sie nicht gültig ist. Aussagen sind spezielle Formeln, und Formeln wiederum spezielle Zeichenreihen vorgegebener Zeichen. Es würde hier zu weit führen, alle Definitionen, Sätze und Beweise in allen Einzelheiten anzuführen, die zum wesentlichen Punkt dieses Abschnittes führen, dem Gültigkeitsbegriff. Es werden nur die wichtigsten Begriffe genau erklärt und andere, wie etwa die Zeichen  $\exists$ ,  $\notin$ ,  $\neq$ ,  $\iff$  werden mit der herkömmlichen mathematischen Bedeutung ausreichend erklärt sein. Für ihre formal korrekte Definition sei unter anderem auf Landers und Rogge verwiesen.<sup>4</sup>

Wie schon erwähnt, bestehen Formeln aus einer gewissen Aneinanderreihung von Zeichen. Nach wie vor ist die Superstruktur  $\widehat{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$  die zugrundeliegende Menge, für die nun die passende “Sprache” entwickelt werden soll. Landers und Rogge verwenden hierbei folgende Zeichen:

- elf Symbole =  $\in \neg , \wedge \forall \langle \rangle ( ) \uparrow$
- Elemente von  $\widehat{S}$
- Variable (diese sollen im Unterschied zu den Elementen in  $\widehat{S}$  immer unterstrichen sein.)  $\underline{x} \underline{y} \underline{z} \dots \underline{A} \underline{B} \underline{C} \dots \underline{f} \underline{g} \underline{h} \dots$

Die Bedeutung dieser Symbole kann als allgemein bekannt angenommen werden, vielleicht mit der einen Ausnahme des Zeichens  $\uparrow$ . Dieses Symbol hat meist die Bedeutung, dass für eine Funktion  $g$  und ein  $a \in \mathcal{D}(g)$ , der Wert  $g \uparrow a$  der Funktionswert  $g(a)$  ist.  $g \uparrow a$  wird aber auch für beliebige  $g$  und  $a$  definiert, was den Umgang mit dem Symbol vereinfacht:  $g \uparrow a := b$ , falls es genau ein  $b$  gibt, mit  $\langle a, b \rangle \in g$ . Falls es kein, oder mehrere  $b$  gibt, ist  $g \uparrow a := \emptyset$ .

Durch die oben angegebenen Zeichen lassen sich nun formal Terme und Formeln in  $\widehat{S}$  definieren, wie es aus der Prädikatenlogik bekannt ist:

---

<sup>3</sup>[5]; Seite 46

<sup>4</sup>[5]; Kpitel 6

**Definition 2.1.9** (Terme und Formeln in  $\widehat{S}$ ).

(a) **Terme in der Superstruktur  $\widehat{S}$**

- (i) Elemente von  $\widehat{S}$  und Variable sind Terme in  $\widehat{S}$
- (ii) Sind  $\tau, \rho$  Terme in  $\widehat{S}$ , so sind auch  $\langle \tau, \rho \rangle$  und  $(\tau \uparrow \rho)$  Terme in  $\widehat{S}$ .
- (iii) Genau die Zeichenreihen, die sich in endlich vielen Schritten mittels (i) und (ii) erzeugen lassen, heißen *Terme* in  $\widehat{S}$ .

(b) **Formeln in der Superstruktur  $\widehat{S}$**

- (iv) Sind  $\tau, \rho$  Terme in  $\widehat{S}$ , so sind  $\tau = \rho$  und  $\tau \in \rho$  Formeln in  $\widehat{S}$ .
- (v) Sind  $\psi, \chi$  Formeln in  $\widehat{S}$ ,  $\underline{x}$  eine Variable und  $\tau$  ein Term in  $\widehat{S}$ , in dem  $\underline{x}$  nicht vorkommt, so sind

$$\neg\psi; (\psi \wedge \chi); (\forall \underline{x} \in \tau)\psi$$

Formeln in  $\widehat{S}$ .

- (vi) Genau die Zeichenreihen, die sich in endlich vielen Schritten mittels (iv) und (v) erzeugen lassen, sind *Formeln* in  $\widehat{S}$ .

**Beispiele 2.1.10.** (1) Einfache Beispiele für Formeln sind etwa

$$\underline{x} = \underline{y}, A \in a \text{ oder } b = \underline{B}$$

wobei  $a, b$  und  $A$  Elemente von  $\widehat{S}$  sind.

- (2) Etwas komplexer sind die Formeln  $\psi_1, \psi_2$  in  $\widehat{\mathbb{R}}$  für  $S = \mathbb{R}$ . Es sind  $\mathbb{N}, \mathbb{R}, 0 \in \widehat{\mathbb{R}}$  (nach den Eigenschaften einer Superstruktur).

$$\psi_1 \equiv (\forall \underline{x} \in \mathbb{N})(\underline{x} \in \mathbb{R})$$

$$\psi_2 \equiv (\underline{x} \in \underline{A}) \wedge (\forall \underline{x} \in \mathbb{N})\neg \underline{x} = 0$$

Dabei heißen zwei Zeichenreihen  $\varphi, \psi$  *identisch*, wenn sie gleich lang sind und an allen entsprechenden Stellen die gleichen Zeichen stehen. Man schreibt hierfür  $\varphi \equiv \psi$ .

- (3) Bildet man eine Formel in einer Superstruktur, so muss man darauf achten, dass die Elemente der Superstruktur wirklich darin vorkommen. So ist etwa  $\widehat{\mathbb{R}}$  nach 2.1.4 nicht Element von  $\widehat{\mathbb{R}}$  und daher  $\underline{x} \in \widehat{\mathbb{R}}$  keine Formel in  $\widehat{\mathbb{R}}$ .

Betrachtet man Beispiel (2), so gibt es zwischen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  einen wesentlichen Unterschied, der sich aus der Lage der Variablen ergibt. In einer Formel gibt es sogenannte freie und gebundene Variable. Eine Variable heißt *gebunden*, wenn an jeder Stelle, an der sie in der Formel auftritt, ein Allquantor auf sie wirkt. Ist die Variable an wenigstens einer ihrer Stellen in der Formel nicht gebunden, so heißt sie eine *freie Variable*.

Die Schreibweise  $\psi[\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n]$  soll verwendet werden, wenn in der Formel  $\psi$  genau die Variablen  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  frei vorkommen. So ist  $\underline{x}$  in  $\psi_1$  eine gebundene Variable und in  $\psi_2$  eine freie Variable, da sie in  $\psi_2$  an der zweiten Stelle der Formel nicht gebunden ist. Insbesondere ist somit  $\psi_1$  eine Aussage und  $\psi_2$  keine Aussage, denn Aussagen sind definiert als:

**Definition 2.1.11.** Eine Formel in  $\widehat{S}$ , in der keine Variable frei auftritt, heißt eine *Aussage*.

**Bemerkung 2.1.12.** Es lässt sich zeigen, dass man eine Aussage  $\varphi$ , abhängig von der Anzahl der in ihr enthaltenen logischen Symbole  $\forall \wedge \neg$ , in eine der folgenden Formen bringen kann.

(A) Kommt keines der logischen Symbole vor, so hat  $\varphi$  die Form

- (a)  $\tau = \rho$  oder
- (b)  $\tau \in \rho$

für eindeutig bestimmte Terme  $\tau$  und  $\rho$ , in denen keine Variablen auftreten und die daher Elemente von  $\widehat{S}$  sind.

(B) Kommen obige logische Symbole vor, so hat  $\varphi$  eine der folgenden Formen:

- (c)  $\neg\psi$  für eine eindeutig bestimmte Aussage  $\psi$
- (d)  $(\psi \wedge \chi)$  mit eindeutigen Aussagen  $\psi$  und  $\chi$
- (e)  $(\forall \underline{x} \in \tau)\psi$ , wobei  $\underline{x}$  eine Variable ist,  $\tau$  ein Term ohne Variable,  $\psi$  eine Formel, in der höchstens  $\underline{x}$  frei vorkommt, und alle eindeutig bestimmt sind.

Auf diese eindeutige Zerlegbarkeit von Aussagen aufbauend, kann nun die Gültigkeit einer Aussage definiert werden. Gültige Aussagen werden auch *Sätze* genannt. Diese Definition ist eine rein formale und sagt nichts über den *Wahrheitsgehalt* einer Formel aus.

**Definition 2.1.13.** Sei  $\varphi$  eine Aussage in  $\widehat{S}$ .

Tritt für  $\varphi$  der Fall (A) aus obiger Bemerkung auf, so heißt  $\varphi$  *gültig*, wenn

- (a)  $\tau$  und  $\rho$  dieselben Elemente von  $\widehat{S}$  sind bzw.
- (b)  $\tau$  ein Element von  $\rho$  ist.

Tritt für  $\varphi$  der Fall (B) auf, dass heißt, es treten logische Symbole auf, so definiert man induktiv. Es sei also die Gültigkeit für den Fall, dass  $n \in \mathbb{N}$  logische Symbole in  $\varphi$  auftreten schon definiert und  $\varphi$  habe nun  $n + 1$  logische Symbole.

- (c) Im Fall (c) der Bemerkung 2.1.12 heißt  $\varphi$  *gültig*, wenn  $\psi$  nicht gültig ist.
- (d) Im Fall (d) der Bemerkung 2.1.12 heißt  $\varphi$  *gültig*, wenn  $\psi$  und  $\chi$  gültig sind bzw.

- (e) Im Fall (e) der Bemerkung 2.1.12 ist  $\tau \in \widehat{S}$  und die Gültigkeit von  $\varphi$  ergibt sich wie folgt:
- (e1) Ist  $\tau$  eine nichtleere Menge und kommt  $\underline{x}$  in  $\psi$  frei vor, dann heißt  $\varphi$  gültig, falls für alle  $b \in \tau$  die Aussage  $\psi[b]$  gültig ist.
  - (e2) Ist  $\tau$  eine nichtleere Menge und kommt  $\underline{x}$  in  $\psi$  nicht frei vor, ist  $\psi$  eine Aussage, und  $\varphi$  heißt gültig, falls  $\psi[b]$  gültig ist.
  - (e3) Ist  $\tau = \emptyset$  oder ist  $\tau$  keine Menge, dann heißt  $\varphi$  gültig.

Zum Abschluss dieses Abschnittes über Aussagen, werden noch einige weitere Symbole erklärt. Da zu Beginn nur die elf Symbole  $= \in \neg , \wedge \forall \langle \rangle ( ) \uparrow$  eingeführt wurden, im Umgang mit einer mathematischen Theorie jedoch auch die Symbole  $\vee \implies \iff \exists \notin \neq \forall \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_j$ <sup>5</sup> von großem Nutzen sind, werden diese bei Landers und Rogge definiert und es wird die Bedingung für deren Gültigkeit gezeigt. Auf ihre Bedeutung soll hier nicht genauer eingegangen werden. Sie entspricht jener, die auch sonst in der Mathematik üblich ist. Hier wesentlich ist einzig, dass diese Abkürzungen auf eindeutige Weise aus den anfangs eingeführten Symbolen bestimmt werden können und damit auch ihre Gültigkeit definiert werden kann.

## 2.2 Von der Standard-Welt zur Nichtstandard-Welt

Es sind nun die nötigen Grundlagen geschaffen um mit der Superstruktur  $\widehat{S}$  die sogenannten Standard-Welten und Nichtstandard-Welten zu bilden. Wichtig ist hierbei, dass  $S$  eine beliebige Menge von Urelementen sein kann. Abhängig davon, welche Theorie man betrachtet, kann  $S$  die Menge der reellen Zahlen sein, oder aber auch eine andere Menge. Es wird sich zeigen, dass es für den weiteren Verlauf der Theorie allerdings notwendig ist, dass  $\mathbb{R}$  in  $S$  enthalten ist.

Die Superstruktur  $\widehat{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$  wird als *Standard-Welt* bezeichnet. Die Nichtstandard-Welt wird im nächsten Kapitel als ein Teil einer weiteren Superstruktur  $\widehat{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$  eingeführt werden. Diese beiden Welten sollen verbunden sein, durch eine Abbildung  $* : \widehat{S} \longrightarrow \widehat{T}$ , so dass jedem Objekt  $a \in \widehat{S}$  ein Objekt  $*a \in \widehat{T}$  zugeordnet wird.<sup>6</sup> Diese  $*$ -Abbildung soll eine entscheidende Eigenschaft besitzen, sie soll das sogenannte Transfer-Prinzip erfüllen. Das heißt, dass sie gültige Aussagen der Standard-Welt in gültige Aussagen der Nichtstandard-Welt transferieren soll, oder anders, dass für die Objekte  $*a$  der Nichtstandard-Welt dieselben Sätze wie für die Ausgangsobjekte  $a \in \widehat{S}$  gelten sollen.

Im Folgenden werden  $S$  und  $T$  stets nichtleere Mengen von Urelementen sein mit  $\widehat{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$  und  $\widehat{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$  die darauf aufgebauten Superstrukturen. Es sei für eine Formel  $\varphi$  in  $\widehat{S}$  und Elemente  $a_i \in \widehat{S}$ ,  $*\varphi$  die Formel in  $\widehat{T}$ , die entsteht, wenn man alle in  $\varphi$  vorkommenden  $a_i$  durch  $*a_i$  ersetzt. Ist  $\varphi$  eine Aussage in  $\widehat{S}$ , so ist auch  $*\varphi$  in  $\widehat{T}$  eine Aussage. Dies gilt analog für Terme. Nun kann also die erwähnte Abbildung definiert werden.

<sup>5</sup>als Abkürzung für  $(\forall \underline{x}_1 \dots) \dots (\forall \underline{x}_j \dots)$

<sup>6</sup>Es soll hier stets  $*a$  die Abkürzung für  $*(a)$  sein.

**Definition 2.2.1** (Die satztreue Einbettung und das Transfer-Prinzip). Die Funktion  $* : \widehat{S} \longrightarrow \widehat{T}$  heißt eine *satztreue Einbettung*, wenn sie folgendes erfüllt:

- (a)  $*S = T$
- (b)  $*s = s$  für alle  $s \in S$
- (c) für alle Aussagen  $\varphi$  in  $\widehat{S}$  ist  $\varphi$  gültig genau dann, wenn  $*\varphi$  gültig ist.

Die Eigenschaft (c) heißt das *Transfer-Prinzip*.

Nach (a) ist  $T = *S$ , also die Elemente von  $*S$  sind die Urelemente von  $\widehat{T}$ , und somit ist  $\widehat{T} = \widehat{*S}$ . Man sagt daher im Allgemeinen, dass die satztreue Einbettung von  $\widehat{S}$  nach  $\widehat{*S}$  geht.

Es soll darauf hingewiesen werden, dass das so wichtige Transfer-Prinzip hier als Eigenschaft definiert wird. Es wird also axiomatisch eingeführt und kann, anders als bei Lindström, nicht bewiesen werden.

Die Bedeutung des Transfer-Prinzips als eines der wichtigsten Prinzipien der Nichtstandard-Analysis wird durch die kommenden Folgerungen offensichtlich werden. Durch seine Hilfe lässt sich eine Struktur auf  $\widehat{*S}$  übertragen. Hat man etwa  $\mathbb{R}$  als die Menge der Urelemente, so lässt sich durch das Transfer-Prinzip die Eigenschaft, “ein angeordneter Körper” zu sein, von  $\mathbb{R}$  direkt auf  $*\mathbb{R}$  übertragen. Es müssen lediglich die Axiome (die natürlich insbesondere Aussagen sind) eines angeordneten Körpers für  $\mathbb{R}$  aufgeschrieben werden, und dann lässt man das Transfer-Prinzip “wirken”. Zuerst aber einfache Folgerungen aus dem Transfer-Prinzip. Hiefür werden ab nun die Zeichen  $*+, *\cdot, *\leq, \dots$  in  $\widehat{*S}$  mit den Zeichen  $+, \cdot, \leq, \dots$  beschrieben werden.

**Satz 2.2.2.** *Es sei  $* : \widehat{S} \longrightarrow \widehat{*S}$  eine satztreue Einbettung,  $a, b \in \widehat{S}$  und  $A, B \in \widehat{S} - S$ .<sup>7</sup> Dann gilt:*

- (i)  $a = b \iff *a = *b$
- (ii)  $a \in b \iff *a \in *b$
- (iii)  $a \text{ Menge} \iff *a \text{ Menge}$
- (iv)  $A \subset B \iff *A \subset *B$
- (v)  $A \text{ transitiv} \iff *A \text{ ist transitiv}$

Es sollen hier nicht alle Beweise im Detail gebracht werden. Als Beispiel soll hier der Punkt (v), die Transitivität von  $A$ , gezeigt werden. Weitere Beweise folgen demselben Schema: Behauptungen für  $\widehat{S}$  werden in Aussagen übersetzt, hernach wendet man das Transfer-Prinzip darauf an und erhält die entsprechende Behauptung für  $\widehat{*S}$ .

---

<sup>7</sup> $a$  und  $b$  können daher sowohl Urelemente als auch Mengen sein, während  $A$  und  $B$  nur Mengen sein können, da bei  $\widehat{S} - S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(S_n)$  nur die Mengen über bleiben.

*Beweis.* Die Transitivität von  $A$  in Punkt (v) läßt sich wie folgt durch eine Aussage  $\varphi$  darstellen:

$$\varphi \equiv (\forall \underline{b} \in A)(\forall \underline{a} \in \underline{b})\underline{a} \in A$$

Die Aussage  ${}^*\varphi$  lautet dann

$${}^*\varphi \equiv (\forall \underline{b} \in {}^*A)(\forall \underline{a} \in \underline{b})\underline{a} \in {}^*A$$

und aus dem Transfer-Prinzip folgt, dass  ${}^*\varphi$  gültig ist, da  $\varphi$  gültig ist.

Für die Punkte (i)-(iv) wird ganz analog vorgegangen. Dabei seien folgende Formeln verwendet: Für (i):  $a = b$ ; für (ii):  $a \in b$ ; für (iii):  $a \notin S$ ; für (iv):  $(\forall \underline{x} \in A)(\underline{x} \in B)$ .  $\square$

Es werden nun einige Objekte von  $\widehat{S}$  unter der satztreuen Einbettung betrachtet. Die Bedeutung dieser Sätze ist groß, die Beweise enthalten allerdings nicht sonderlich viel Neues und können bei Landers und Rogge in Kapitel 7 nachgelesen werden.<sup>8</sup>

**Satz 2.2.3.** *Es sei  ${}^* : \widehat{S} \longrightarrow {}^*\widehat{S}$  eine satztreue Einbettung,  $a, b, a_1, \dots, a_n \in \widehat{S}$  und  $A \in \widehat{S} - S$ . Dann gilt:*

$$(i) \quad {}^*\emptyset = \emptyset$$

$$(ii) \quad {}^*\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle {}^*a_1, \dots, {}^*a_n \rangle$$

$$(iii) \quad {}^*(a \upharpoonright b) = ({}^*a \upharpoonright {}^*b)$$

$$(iv) \quad {}^*a = a \text{ für alle } a \in S^n \text{ und für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$(v) \quad \{{}^*a : a \in A\} \subset {}^*A$$

$$(vi) \quad A \text{ eine endliche Menge} \implies ({}^*A \text{ eine endliche Menge und } {}^*A = \{{}^*a : a \in A\})$$

$$(vii) \quad A \subset S^n \implies (A \subset {}^*A \text{ und } {}^*A \cap S^n = A)$$

Für eine Menge  $A \in \widehat{S}$ , die durch eine Formel  $\varphi[\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n]$ , in der genau die Variablen  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$  frei vorkommen, beschrieben wird gilt:

$$(viii) \quad {}^*\{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A : \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ ist gültig}\}$$

$$= \{\langle b_1, \dots, b_n \rangle \in {}^*A : {}^*\varphi[b_1, \dots, b_n] \text{ ist gültig}\}.$$

Punkt (viii) ist hierbei besonders interessant. Er zeigt, wie einfach man für jene Mengen, die durch Formeln beschrieben werden, die  ${}^*$ -Werte bekommen kann. Der folgende Satz folgt im Wesentlichen daraus.

**Satz 2.2.4.** *Es sei  ${}^* : \widehat{S} \longrightarrow {}^*\widehat{S}$  eine satztreue Einbettung und  $A, B \in \widehat{S} - S$ . Dann gilt:*

$$(i) \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } A, B \subset S_n \implies A \times B \subset S_{n+2} \text{ und } {}^*A \times {}^*B \subset {}^*S_{n+2}$$

---

<sup>8</sup>[5]; Kapitel 7

$$(ii) \quad *(A \cap B) = *A \cap *B$$

$$(iii) \quad *(A - B) = *A - *B$$

$$(iv) \quad *(A \cup B) = *A \cup *B$$

$$(v) \quad *(A \times B) = *A \times *B$$

*Beweis.* Wieder soll exemplarisch nur ein Punkt bewiesen werden.

(iii): Es ist  $\varphi[\underline{x}] \equiv \underline{x} \in B$  eine Formel in  $\widehat{S}$  und es ist

$$A \cup B = \{a \in A : \varphi[a] \text{ ist gültig}\}.$$

Es ist also

$$*(A \cup B) = *\{a \in A : \varphi[a] \text{ ist gültig}\}$$

und aus Satz 2.2.3 Punkt (viii) folgt damit:

$$*(A \cup B) = \{a \in *A : *\varphi[a] \text{ ist gültig}\} = \{b \in *A : b \in *B\} = *A \cup *B.$$

□

Es wird nun gezeigt, wie sich Relationen, Funktionen und Operationen unter der satztreuen Einbettung verhalten. Wieder sei bei den Beweisen auf Landers und Rogge verwiesen, da die Beweise nicht besonders interessant, die Sätze aber der Vollständigkeit halber wichtig sind.

**Satz 2.2.5** (\*-Werte bei Relationen). *Es sei  $* : \widehat{S} \longrightarrow *\widehat{S}$  eine satztreue Einbettung und  $R, R_1, R_2 \in \widehat{S}$  Relationen. Dann sind auch  $*R, *R_1, *R_2$  Relationen und es gilt:*

$$(i) \quad \text{Für Definitionen und Wertebereich ist } *(\mathcal{D}(R)) = \mathcal{D}(*R) \text{ und } *(\mathcal{W}(R)) = \mathcal{W}(*R)$$

$$(ii) \quad A_0 \in \widehat{S} - S \implies *(R[A_0]) = *R[*A_0]$$

$$(iii) \quad *(R^{-1}) = (*R^{-1}) \text{ und } *(R_1 \circ R_2) = *R_1 \circ *R_2.$$

**Satz 2.2.6** (\*-Werte bei Funktionen). *Es sei  $* : \widehat{S} \longrightarrow *\widehat{S}$  eine satztreue Einbettung. Es seien  $A, B \in \widehat{S} - S$  und  $f : A \longrightarrow B$  eine Funktion. Dann ist  $f \in \widehat{S}$  und es gilt:*

$$(i) \quad \text{es ist } *f : *A \longrightarrow *B \text{ eine Funktion}$$

$$(ii) \quad f \text{ injektiv} \implies *f \text{ injektiv}$$

$$(iii) \quad f \text{ surjektiv} \implies *f \text{ surjektiv}$$

$$(iv) \quad *(f(a)) = *f(*a) \text{ für ein } a \in A$$

$$(v) \quad A \subset S^n, B \subset S^m \implies *f(a) = f(a) \text{ für } a \in A \text{ und } n, m \in \mathbb{N}.$$

**Satz 2.2.7** (\*-Werte von Operationen und Relationen über  $A$ ). *Es sei  $*$  :  $\widehat{S} \rightarrow \widehat{*S}$  eine satztreue Einbettung. Es sei  $A, \in \widehat{S} - S$  und nichtleer und  $a, b \in A$ . Es sei  $\Theta$  eine Operation und  $R$  eine Relation über  $A$ . Dann gilt:*

$$(i) \quad * \Theta \text{ ist eine Operation in } *A \text{ und } *(a \Theta b) = *a * \Theta *b$$

$$(ii) \quad *R \text{ ist eine Relation über } *A \text{ und } (a R b) \iff *a *R *b.$$

*Ist  $A \subset S^n$ , so ist  $A \subset *A$ , und  $*\Theta$  bzw.  $*R$  ist die Fortsetzung von  $\Theta$  bzw.  $R$ , das heißt, es gilt:*

$$(iii) \quad a * \Theta b = a \Theta b$$

$$(iv) \quad a *R b \iff a R b.$$

Wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt wurde, lässt sich mit Hilfe des Transfer-Prinzips nun leicht zeigen, dass  $*\mathbb{R}$  ein angeordneter Körper ist. Allgemein wird eine geordnete Menge durch die satztreue Einbettung in eine geordnete Menge und ein Körper in einen Körper überführt. Es gilt also folgender Satz:

**Satz 2.2.8.** *Es sei  $*$  :  $\widehat{S} \rightarrow \widehat{*S}$  eine satztreue Einbettung und  $X \in \widehat{S}$  eine nichtleere Menge. Dann gilt:*

$$(i) \quad \langle X, \leq \rangle \text{ ist partiell bzw. total geordnet} \\ \implies \langle *X, * \leq \rangle \text{ ist partiell bzw. total geordnet.}$$

$$(ii) \quad \langle X, + \rangle \text{ ist eine kommutative Gruppe mit Nullelement } 0 \\ \implies \langle *X, *+ \rangle \text{ ist eine kommutative Gruppe mit Nullelement } *0$$

$$(iii) \quad \langle X, +, \cdot \rangle \text{ ist ein Körper mit Nullelement } 0 \text{ und Einselement } 1 \\ \implies \langle *X, *+, *\cdot \rangle \text{ ist ein Körper mit Nullelement } *0 \text{ und Einselement } *1$$

$$(iv) \quad \langle X, +, \cdot, \leq \rangle \text{ ist ein angeordneter Körper} \\ \implies \langle *X, *+, *\cdot, * \leq \rangle \text{ ist ein angeordneter Körper}$$

Als direkte Folgerung aus Satz 2.2.8 ist nun  $\langle *\mathbb{R}, *+, *\cdot, * \leq \rangle$  ein angeordneter Körper mit Nullelement  $*0$  und Einselement  $*1$ . Voraussetzung dafür ist lediglich, dass  $\mathbb{R}$  Teilmenge der Urelementenmenge  $S$  ist. Es gilt dann nämlich nach Satz 2.2.3  $\mathbb{R} \subset *\mathbb{R}$  und für alle  $r \in \mathbb{R}$  ist  $*r = r$ . Insbesondere ist also auch  $*0 = 0$  und  $*1 = 1$ . Man kann auch zeigen, dass  $*+, *-, *\cdot, *:, * \leq, * <$  und der Betrag  $*|$  | einfache Fortsetzungen von  $+, -, \cdot, :, \leq, <$  und  $|$  | sind und wie in der Mathematik üblich, lässt man dann das  $*$ -Zeichen weg. Es ist also  $\langle *\mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$  ein angeordneter Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1. Natürlich lassen sich auch die Eigenschaften eines angeordneten Körpers von  $\mathbb{R}$  auf  $*\mathbb{R}$  durch das Transfer-Prinzip übertragen “[...] wir können daher in  $*\mathbb{R}$  stets so rechnen wie wir es in  $\mathbb{R}$  gewöhnt sind.”<sup>9</sup>

Wie man sieht, ist das Transfer-Prinzip ein sehr mächtiges Prinzip. Es scheint so, als könne man ohne es kaum in der “\*-Welt” arbeiten. An dieser Stelle sei noch einmal

---

<sup>9</sup>[5]; Seite 79

darauf aufmerksam gemacht, dass Landers und Rogge das Transfer-Prinzip in ihrem Zugang fordern. Es wird axiomatisch eingeführt. Lindstrøm kann gut auch ohne das Transfer-Prinzip arbeiten, er zeigt am Schluss seiner Arbeit, dass es sozusagen hinter seinen Beweisen als allgemeines Prinzip steckt. Lindstrøm kann das Transfer-Prinzip beweisen! Auf diesen wesentlichen Unterschied wird später noch genauer eingegangen werden (siehe Kapitel 4.1).

## 2.3 Die Nichtstandard-Welt und die hyperreellen Zahlen

Bis jetzt wurden einige Werte und Eigenschaften von  ${}^*\widehat{S}$  betrachtet und zuletzt auch von  ${}^*\mathbb{R}$ . Was aussteht, ist zu zeigen, dass  ${}^*\mathbb{R}$  in der Tat mehr Elemente besitzt als  $\mathbb{R}$ . Wie bei Lindstrøm hat natürlich auch  ${}^*\mathbb{R}$  von Landers und Rogge endliche, unendliche und infinitesimale Elemente. Wieder ist es so, dass Lindstrøm die Tatsache, dass  ${}^*\mathbb{R}$  echt größer ist als  $\mathbb{R}$  einfach aus der Konstruktion von  ${}^*\mathbb{R}$  erhielt, während Landers und Rogge diese wichtige Eigenschaft von  ${}^*\mathbb{R}$  axiomatisch vorgeben. Dies machen sie, indem sie die satztreue Einbettung zu einer Nichtstandard-Einbettung erweitern.

**Definition 2.3.1** (Die Nichtstandard-Einbettung). Eine satztreue Einbettung  $* : \widehat{S} \longrightarrow {}^*\widehat{S}$  heißt *Nichtstandard-Einbettung*, wenn für sie gilt:

- (a)  $\mathbb{R} \subset S$
- (b)  $\mathbb{R} \neq {}^*\mathbb{R}$ .

Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass Landers und Rogge die Existenz von Nichtstandard-Einbettungen beweisen müssen. Mit dem bisher Eingeführten geht das nicht, da man dazu die Konstruktion von *Filtern* und *Ultrafiltern* benötigt (siehe auch Kapitel 4.6).

Der Begriff der Nichtstandard-Einbettung ist ein wesentlicher bei Landers und Rogge. Er kommt immer wieder in verschiedenen Versionen und Abstufungen vor. Interessant sind die *starke Nichtstandard-Einbettung* und die  *$\widehat{S}$ -kompakte Nichtstandard-Einbettung*. Diese sollen in Kapitel 4.4 definiert werden und es soll eine weitere Verbindung zu Lindstrøm gezeigt werden.

Mit der Definition der Nichtstandard-Einbettung ist nun also sichergestellt, dass die hyperreellen Zahlen,  ${}^*\mathbb{R}$ , Elemente enthalten, die in  $\mathbb{R}$  nicht vorkommen. Landers und Rogge sagen an dieser Stelle noch nicht, wie diese Elemente genannt werden. Die Definition von endlichen, unendlichen und infinitesimalen Elementen von  ${}^*\mathbb{R}$  kommt bei ihnen erst, nachdem sie die internen Mengen sowie die Nichtstandard-Welt und einige ihrer Eigenschaften beschrieben haben. Die Elemente werden aber vollkommen gleich definiert, wie schon in Definition 1.1.4. Natürlich heißen auch die Elemente von  ${}^*\mathbb{N}$  wieder hypernatürliche Zahlen und sie enthalten mehr Elemente als  $\mathbb{N}$ . Landers und Rogge zeigen sogar, dass alle Elemente von  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  unendlich groß sind.

**Satz 2.3.2.** *Es sei  $*$  :  $\widehat{S} \longrightarrow * \widehat{S}$  eine Nichtstandard-Einbettung. Dann gilt:*

(i)  $\mathbb{N} \subset * \mathbb{N}$  und  $\mathbb{N} \neq * \mathbb{N}$

(ii)  $\omega \in * \mathbb{N} - \mathbb{N} \implies (\omega > n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \omega - 1 \in * \mathbb{N} - \mathbb{N})$

(iii)  $* \mathbb{N} - \mathbb{N}$  besitzt kein kleinstes Element.

*Beweis.* (i) Das  $\mathbb{N} \subset * \mathbb{N}$  ist, folgt aus Satz 2.2.3(vii). Es ist also zu zeigen, dass  $\mathbb{N} \neq * \mathbb{N}$ . Es sei indirekt angenommen, dass  $\mathbb{N} = * \mathbb{N}$ , dann wird nun gezeigt, dass  $* \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$  ist, wodurch sich jedoch wegen  $\mathbb{R} \subset * \mathbb{R}$  ein Widerspruch zur Annahme, dass  $*$  eine Nichtstandard-Einbettung ist, ergibt.

Es sei  $y \in * \mathbb{R}$ . Es wird gezeigt, dass es rationale Zahlen  $x_n$  gibt für die gilt:

$$|x_n - y| \leq \frac{1}{n} \text{ für } n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Es liegen die rationalen Zahlen dicht in  $\mathbb{R}$  und sind von der Form  $\frac{s-t}{u}$  für  $s, t, u \in \mathbb{N}$ . Daher ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  folgende Aussage gültig:

$$(\forall \underline{y} \in \mathbb{R})(\exists \underline{s}, \underline{t}, \underline{u} \in \mathbb{N}) \mid ((\underline{s} - \underline{t}) : \underline{u}) - \underline{y} \mid \leq \frac{1}{n}.$$

Wird darauf das Transfer-Prinzip angewendet, erhält man folgende Aussage:

$$(\forall \underline{y} \in * \mathbb{R})(\exists \underline{s}, \underline{t}, \underline{u} \in * \mathbb{N}) \mid ((\underline{s} - \underline{t}) : \underline{u}) - \underline{y} \mid \leq \frac{1}{n}.$$

Da nach der indirekten Annahme,  $\mathbb{N} = * \mathbb{N}$  gilt, folgt daher (2.1). Daraus folgt wiederum, dass  $(x_n), n \in \mathbb{N}$  eine Cauchy-Folge ist, die daher gegen ein Element  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert. Jetzt ist also

$$|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y|,$$

und wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und (2.1) sowie  $n \in \mathbb{N}$  folgt:

$$|x - y| \leq \frac{1}{k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wendet man auf die folgende gültige Aussage

$$(\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R})(\forall \underline{k} \in \mathbb{N})(|\underline{x} - \underline{y}| \leq \frac{1}{\underline{k}}) \implies \underline{x} = \underline{y}$$

das Transfer-Prinzip an, folgt  $x = y$  und daher  $y \in \mathbb{R}$ , also  $* \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ , woraus der Widerspruch  $\mathbb{R} = * \mathbb{R}$  folgt und somit ist  $\mathbb{N} \neq * \mathbb{N}$ .

(ii) Es wird  $\omega > n$  induktiv über  $n \in \mathbb{N}$  gezeigt. Es ist  $\omega \in * \mathbb{N}$  und daher  $\omega \geq 1$ . Wegen  $\omega \notin \mathbb{N}$  folgt  $\omega > 1$ . Sei induktiv  $\omega > n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Es ist  $\omega \in * \mathbb{N}$  und daher  $\omega \geq n + 1$ . Wegen  $\omega \notin \mathbb{N}$  folgt  $\omega > n + 1$ . Es ist noch zu zeigen, dass auch  $\omega - 1 \in * \mathbb{N} - \mathbb{N}$  gilt. Wegen  $\omega \in * \mathbb{N}$  und  $\omega > 1$  ist  $\omega - 1 \in * \mathbb{N}$ . Wegen  $\omega > n + 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\omega - 1 > n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und somit folgt  $\omega - 1 \notin \mathbb{N}$ .

(iii) folgt direkt aus (ii) da jedes  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  durch  $\omega - 1 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  unterschritten wird. □

Nun zum eigentlichen Thema dieses Abschnittes, der Nichtstandard-Welt, und zu dem spannenden Punkt, wie Landers und Rogge interne und externe Elemente definieren. Die Nichtstandard-Welt wird die Vereinigung aller internen Elemente sein.

**Definition 2.3.3.** Es sei  $*$  :  $\widehat{S} \longrightarrow {}^*\widehat{S}$  eine Nichtstandard-Einbettung.

(a) Die Menge

$$\mathcal{I} := \bigcup_{A \in \widehat{S} - S} {}^*A$$

heißt die *Nichtstandard-Welt*.

(b) Die Elemente der Nichtstandard-Welt heißen *interne Elemente* und die Elemente von  $\widehat{S} - \mathcal{I}$  heißen *externe Elemente*. Falls die Elemente Mengen sind, so nennt man sie *interne* oder *externe Mengen*.

(c) Es sei  $\varphi$  eine Formel in  $\widehat{S}$ . Sie heißt *interne Formel*, wenn die in der zugehörigen Zeichenreihe auftretenden Elemente von  $\widehat{S}$ , Elemente von  $\mathcal{I}$  sind. Ist eine interne Formel eine Aussage, so nennt man sie eine *interne Aussage*.

Es sind also jene Elemente  $b$  intern, für die gilt  $b \in {}^*A$ , für ein  $A \in \widehat{S} - S$ . Da der Unterschied von internen Elementen zu Standard-Elementen bei Landers und Rogge nicht sofort offensichtlich ist, sollen Standard-Elemente ebenfalls nun definiert werden. Zuvor noch ein paar wichtige Eigenschaften der Nichtstandard-Welt.

**Satz 2.3.4** (Eigenschaften der Nichtstandard-Welt). *Es sei  $*$  :  $\widehat{S} \longrightarrow {}^*\widehat{S}$  eine Nichtstandard-Einbettung. Dann gilt:*

(i)  $\mathcal{I} = \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^*S_n$

(ii)  $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{I} \implies b_1, \dots, b_k \in {}^*S_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$

(iii)  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{I}$  Mengen  $\implies B_1, \dots, B_k \subset {}^*S_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$

(iv) *Elemente einer internen Menge sind intern, d.h.:  $\mathcal{I}$  ist transitiv*

(v)  $\mathcal{I} \notin \mathcal{I}, \emptyset \in \mathcal{I}$

(vi)  ${}^*a \in \mathcal{I}$  für alle  $a \in \widehat{S}$

(vii)  $\langle a, b \rangle, a \upharpoonright b, \{a, b\} \in \mathcal{I}$  für alle  $a, b \in \mathcal{I}$

*Beweis.* Der Beweis ist nicht weiters schwierig, er wird im Wesentlichen auf das Transfer-Prinzip und auf Punkt (i) zurückgeführt. Es sollen daher nicht alle Punkte bewiesen werden, sondern nur (i), und ein Teil von Punkt (v), nämlich, dass die leere Menge Element der Nichtstandard-Welt ist.

- (i) Es ist zu zeigen  $\bigcup_{A \in \widehat{S} - S} *A = \bigcup_{n=0}^{\infty} *S_n$ , da die linke Seite nach Definition  $\mathcal{I}$  ist. (“ $\supset$ ”): Folgt, da  $S_n \in \widehat{S} - S$  gilt. (“ $\subset$ ”): Es sei  $A \in \widehat{S} - S$ . Dann ist nach Satz 2.1.4  $A \subset S_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Aus Satz 2.2.2 folgt dann, dass  $*A \subset *S_n$  ist.
- (v) Es wird gezeigt, dass die leere Menge ein Element der Nichtstandard-Welt ist. Es ist  $\emptyset \in S_1$  und daher nach Satz 2.2.2  $*\emptyset \in *S_1$ . Nach Satz 2.2.3 ist  $*\emptyset = \emptyset$ , also  $\emptyset \in *S_1$ . Da  $*S_1 \subset \mathcal{I}$  folgt  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .

□

Nun also, wie angekündigt, zu den Standard-Mengen bei Landers und Rogge.

**Definition 2.3.5** (Standard-Mengen nach Landers und Rogge). Elemente  $*a$  mit  $a \in \widehat{S}$  werden *Standard-Elemente* genannt. Ist  $a$  eine Menge, so nennt man  $*a$  eine *Standard-Menge*.

Es können also sowohl Urelemente als auch Mengen von  $\widehat{S}$  durch die Nichtstandard-Einbettung zu Standard-Elementen bzw. Standard-Mengen “gemacht” werden. Standard-Elemente und auch Standard-Mengen sind in  $\mathcal{I}$  enthalten. Der wichtigste Unterschied zu den internen Mengen ist nun, dass die Elemente einer Standard-Menge keine Standard-Elemente sein müssen, sehr wohl aber interne Elemente sind. Man denke hier wieder an das Beispiel von den Intervallen, das schon bei Lindstrøm gebracht wurde. Es ist, für  $a, b \in \mathbb{R}$ , das Intervall  $*[a, b]$  eine Standard-Menge und eine interne Menge. Es wären auch die Elemente  $*a$  und  $*b$  Standard-Elemente und interne Elemente, aber es gibt Elemente in  $*[a, b]$ , die interne Elemente, nicht aber Standard-Elemente sind. Man denke an die Monaden jedes  $*c \in *[a, b]$ . Die Monade selbst ist zwar extern (nach Beispiel 1.2.2), die Elemente der Monaden sind aber intern, da man sie etwa als Element eines Intervalls beschreiben kann, aber sie sind keine Standard-Elemente.

Es sind also alle Elemente einer Standard-Menge interne Elemente, aber nicht alle Elemente einer internen Menge sind Standard-Elemente. Ein weiteres Beispiel und eine sehr wichtige Folgerung daraus ergibt sich für die Potenzmenge einer Menge  $A \in \widehat{S}$ .

**Satz 2.3.6.** *Es sei  $A \in \widehat{S}$  eine Menge, dann besteht der  $*$ -Wert der Potenzmenge  $*(\mathcal{P}(A))$  nur aus den internen Teilmengen der Menge  $*A$  und nicht aus allen ihrer Teilmengen. Es ist also:*

$$*(\mathcal{P}(A)) = \{B \in \mathcal{I} : B \subset *A\}$$

*Insbesondere ist daher  $*(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$  die Menge aller internen Teilmengen von  $*\mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{P} := \mathcal{P}(A)$ . Nach Satz 2.1.4 ist dann  $\mathcal{P} \in \widehat{S}$  und es ist zu zeigen:

$$*\mathcal{P} = \{B \in \mathcal{I} : B \subset *A\}.$$

(“ $\subset$ ”): Es wird zuerst gezeigt, dass alle Elemente von  $*\mathcal{P}$  Mengen sind. Dazu wird auf  $(\forall \underline{b} \in \mathcal{P})(\underline{b} \notin S)$  das Transfer-Prinzip angewendet, wodurch man  $(\forall \underline{b} \in *\mathcal{P})(\underline{b} \notin *S)$  erhält. Es sind also alle Elemente von  $*\mathcal{P}$  Mengen und nach Definition von  $\mathcal{I}$  sind sie intern. Wendet man das Transfer-Prinzip auf  $(\forall \underline{B} \in \mathcal{P})(\forall \underline{x} \in \underline{B})(\underline{x} \in A)$  an, so bekommt man

$$(\forall \underline{B} \in {}^*\mathcal{P})(\forall \underline{x} \in \underline{B})(\underline{x} \in {}^*A)$$

womit gezeigt ist, dass jedes  $B \in {}^*\mathcal{P}$  eine Teilmenge von  ${}^*A$  ist.

(“ $\supset$ ”): Es sei  $B$  eine interne Menge mit  $B \subset {}^*A$ . Nach Satz 2.3.4 gibt es, weil  $B \in \mathcal{I} - {}^*S$  ist, ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $B \in ({}^*S_n - {}^*S) = {}^*(S_n - S)$ . Um zu zeigen, dass  $B \in {}^*\mathcal{P}$  ist, genügt es also zu zeigen, dass für jedes  $B \in {}^*(S_n - S)$  gilt, dass  $B \subset {}^*A \implies B \in {}^*\mathcal{P}$ . Hierfür wird das Transfer-Prinzip auf die Aussage

$$(\forall \underline{B} \in (S_n - S))((\forall \underline{x} \in \underline{B})\underline{x} \in A) \implies \underline{B} \in \mathcal{P}$$

angewendet, die besagt, dass jedes  $B \in (S_n - S)$ , welches Teilmenge von  $A$  ist, in  $\mathcal{P}$  liegt und somit eine gültige Aussage ist. Man erhält also wie gewünscht:

$$(\forall \underline{B} \in {}^*(S_n - S))((\forall \underline{x} \in \underline{B})\underline{x} \in {}^*A) \implies \underline{B} \in {}^*\mathcal{P}.$$

□

Es wurden schon in Kapitel 1 einige Varianten gezeigt, wie man unterscheiden kann, wann eine vorgegebene Menge intern oder extern ist. Ein weiteres, sehr wichtiges Hilfsmittel ist das Prinzip der internen Definition. Vor allem im Zusammenhang mit dem Transfer-Prinzip ist es fast unerlässlich. Es besagt, vereinfacht ausgedrückt, dass eine vorgegebene Menge intern ist, wenn sie sich durch eine Formel beschreiben lässt, in der alle darin vorkommenden Elemente intern sind. Der Beweis dieses Satzes ist sehr technisch und kann bei Landers und Rogge in Kapitel 8 nachgelesen werden.<sup>10</sup>

**Satz 2.3.7** (Das Prinzip der internen Definition). *Es sei  $*$ :  $\widehat{S} \longrightarrow {}^*\widehat{S}$  eine Nichtstandard-Einbettung und  $\psi[\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n]$  eine interne Formel, in der nur die Variablen  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$  frei vorkommen. Dann gilt für jede interne Menge  $B$ :*

$$\{ \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in B : \psi[b_1, \dots, b_n] \text{ ist gültig} \}$$

*ist eine interne Menge.*

Aus dem Prinzip der internen Definition kann man einige einfache Folgerungen und Beispiele für interne und externe Mengen ableiten. Der folgende Satz zeigt einige zum Gebrauch von  $\mathcal{I}$  wichtige Beispiele. Manche der folgenden Behauptungen werden in Kapitel 1 auch gezeigt (vergleiche etwa Punkt (viii) mit Proposition 1.2.10), andere erwähnt Lindström, ohne sie aber weiter zu beweisen.

**Satz 2.3.8.** *Es sei  $*$ :  $\widehat{S} \longrightarrow {}^*\widehat{S}$  eine Nichtstandard-Einbettung. Dann gilt:*

- (i) *Ist  $A$  eine nichtleere interne Teilmenge von  ${}^*\mathbb{N}$ , so besitzt  $A$  ein kleinstes Element. Insbesondere ist damit  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  extern.*
- (ii) *Sind  $A_1, \dots, A_n, B$  interne Mengen, so sind  $A_1 \cup \dots \cup A_n$ ,  $A_1 \cap \dots \cap A_n$ ,  $A_1 \times \dots \times A_n$  und  $A - B$  interne Mengen.*
- (iii) *Ist  $A$  endlich,  $B$  intern und  $A \subset B$ , so ist  $A$  intern.*
- (iv) *Ist  $A$  extern,  $B$  intern und  $A \subset B$ , so ist  $B - A$  extern.*

---

<sup>10</sup>[5]; Kapitel 8

- (v) Sind  $R, R_1, R_2$  interne Relationen und  $A$  eine interne Menge, so sind  $\mathcal{D}(R)$ ,  $\mathcal{W}(R)$ ,  $R^{-1}$ ,  $R_1 \circ R_2$  und  $R(A)$  intern.
- (vi) Ist  $A \in \widehat{S}$  eine unendliche Menge, so sind  $\{^*a : a \in A\}$ ,  $^*A - \{^*a : a \in A\}$  und  $\mathcal{P}(^*A)$  externe Mengen.
- (vii) Ist  $A \subset S^k$  eine unendliche Menge, so sind  $A$ ,  $^*A - A$  extern und es ist  $A \subsetneq ^*A$ .
- (viii) Es sind  $\mathbb{N}$ ,  $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$ ,  $S$ ,  $^*S - S$  externe Mengen.

*Beweis.* Die Beweise folgen meist aus dem Prinzip der internen Definition. Es soll daher nur Punkt (i) und, um ein Beispiel zu haben, wie das interne Definitionsprinzip angewendet wird, ein Teil aus Punkt (ii) bewiesen werden. In den anderen Punkten sei auf Landers und Rogge Kapitel 8 verwiesen.<sup>11</sup>

- (i) In  $\mathbb{N}$  hat jede nichtleere Teilmenge  $A$  ein kleinstes Element. Das kann geschrieben werden als:

$$(\forall \underline{A} \in (\mathcal{P}(\mathbb{N}))) (\underline{A} \neq \emptyset) \implies (\exists \underline{m} \in \underline{A}) (\forall \underline{n} \in \underline{A}) \underline{m} \leq \underline{n}.$$

Wendet man darauf das Transfer-Prinzip an, so erhält man:

$$(\forall \underline{A} \in (^*\mathcal{P}(\mathbb{N}))) (\underline{A} \neq \emptyset) \implies (\exists \underline{m} \in \underline{A}) (\forall \underline{n} \in \underline{A}) \underline{m} \leq \underline{n}.$$

und da  $^*(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$  die Menge aller internen Teilmengen von  $^*\mathbb{N}$  ist, hat jede nichtleere interne Teilmenge von  $^*\mathbb{N}$  ein kleinstes Element. Da nach Satz 2.3.2 die Menge  $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  kein kleinstes Element besitzt, muss sie daher extern sein.

- (ii) Es soll auch hier nur  $A_1 \cup \dots \cup A_n$  intern gezeigt werden. Es sei der Beweis für zwei interne Mengen  $A$  und  $B$  geführt. Der Rest folgt unmittelbar:  
Es ist

$$\varphi[\underline{x}] \equiv (\underline{x} \in A \vee \underline{x} \in B)$$

eine interne Formel, in der nur  $x$  frei vorkommt. Nach dem Prinzip der internen Definition und da  $A, B \subset ^*S_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  (siehe Satz 2.3.4 (iii)), folgt:

$$A \cup B = \{c \in ^*S_n : \varphi[c] \text{ ist gültig}\} \text{ ist eine interne Menge.}$$

□

Aus dem Prinzip der internen Definition folgt unter anderem noch ein weiterer sehr wichtiger Satz. Wie schon in Kapitel 1.2 erwähnt, ist ein gutes Hilfsmittel im Umgang mit internen und externen Mengen, das dort erwähnte Prinzip von “Overflow” und “Underflow”. Auch bei Landers und Rogge gibt es dieses Prinzip. Zusammen mit einer dritten Behauptung nennt man es das Permanenzprinzip für interne Formeln. Es lassen

---

<sup>11</sup>[5]; Kapitel 8

sich damit Behauptungen über gewisse externe Mengen auf bestimmte interne Mengen ausdehnen. Für den Beweis sei wieder auf Landers und Rogge Kapitel 9 verwiesen. Der Beweis verläuft im Wesentlichen mit Hilfe des Prinzip der internen Definition. Eine schöne Anwendung davon wird man in Kapitel 4.5 sehen.

**Satz 2.3.9** (Das Permanenzprinzip für interne Formeln). *Es sei  $\varphi[\underline{x}]$  eine interne Formel, in der genau  $x$  als freie Variable vorkommt.*

- (i) (“Overflow-Prinzip”): *Falls  $\varphi[n]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dann gibt es ein  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , so dass  $\varphi[n]$  für alle  $n \in {}^*\mathbb{N}$  mit  $n \leq \omega$  gilt.*
- (ii) (“Underflow-Prinzip”): *Falls  $\varphi[\omega]$  für alle  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  gilt, dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\varphi[n]$  für alle  $n \in {}^*\mathbb{N}$  mit  $n \geq N$  gilt.*
- (iii) *Falls  $\varphi[\epsilon]$  für alle  $\epsilon \approx 0$  gilt, dann gibt es ein  $b \in \mathbb{R}_+$ , so dass  $\varphi[a]$  für alle  $a \in {}^*\mathbb{R}$  mit  $|a| \leq b$  gilt.*

Nun sind Landers und Rogge so weit, dass sie reelle Nichtstandard-Analyse betreiben können. Zwar sind oft ihre Beweise teilweise sehr verschieden zu denen von Lindstrøm, die Aussagen für  ${}^*\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}$  mittels der Nichtstandard-Analyse sind jetzt allerdings die gleichen. Landers und Rogge definieren endliche, unendliche und infinitesimale Elemente von  ${}^*\mathbb{R}$  genau so, wie es bei Lindstrøm vorkommt (Definition 1.1.4). Auch zeigen sie, dass  ${}^*\mathbb{R}$  diese Elemente besitzt und beschreiben Eigenschaften der verschiedenen Elemente. So wird etwa ein zu Satz 1.1.6 analoger Satz über die Struktur der hyperreellen Zahlen bewiesen. Es gibt also selbstverständlich wieder Standardteile  $\text{st}(x)$  eines endlichen  $x \in {}^*\mathbb{R}$  und umgekehrt Monaden  $\mathfrak{m}(r)$  eines  $r \in \mathbb{R}$ .

Es ist von Interesse, dass sich viele Definitionen von Landers und Rogge und Lindstrøm wesentlich unterscheiden, wie in diesem Kapitel ersichtlich wurde. Lässt es sich zeigen, dass diese oft verschiedenen Definitionen und Sätze die gleiche Bedeutung haben? Die Beantwortung dieser Frage wird auch zu den hyperendlichen Mengen führen, die bei Lindstrøm so große Bedeutung hatten und bei Landers und Rogge noch gar nicht betrachtet wurden.

Zunächst sollen aber noch einige Beispiele gebracht werden, wie die Nichtstandard-Analyse betrieben wird, wie nun mit Hilfe der Nichtstandard-Theorie Definitionen wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Ähnliches tatsächlich aussehen.

# Kapitel 3

## Die Schönheit der Nichtstandard-Analysis

Diese beiden relativ knappen Einführungen in die Nichtstandard-Theorien durch Lindstrøm sowie Landers und Rogge bieten die Grundlage für einige schöne Anwendungsbeispiele der Nichtstandard-Analysis. Es zeigt sich nun, wie elegant mit ihrer Hilfe so komplexe Begriffe wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit einer Funktion in  $\mathbb{R}$  definiert werden können und wie “anschaulich” diese Begriffe auf einmal werden. Besonders gut wird sich am Beispiel der Kettenregel für die Differentiation zeigen lassen, wie sich fast spielerisch mit der Nichtstandard-Analysis umgehen lässt. Im Folgenden soll Nichtstandard-Analysis mit  $S = \mathbb{R}$  betrieben werden.

### 3.1 Definitionen einmal anders

Wie schon erwähnt, unterscheiden sich die Sätze und Definitionen zwischen Lindstrøm und Landers und Rogge von hier an nicht. Sehr wohl sind aber manche Beweise noch verschieden. Um die Vorteile beider Varianten zu sehen, wird, je nachdem, welche Methode die angenehmere ist, ein Beispiel für einen Beweis mit Lindstrøms Methode und eines für die mit Landers und Rogge gebracht werden. Zur Erinnerung:  $a \approx b$  steht für  $a$  ist unendlich nahe oder infinitesimal benachbart zu  $b$ .

**Satz 3.1.1** (Nichtstandard-Definition für Stetigkeit). *Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  ist stetig in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn  ${}^*f(y) \approx f(x)$  für alle  $y \in \mathbb{R}$  mit  $y \approx x$ .*

*Beweis.* (Beweis nach Lindstrøm).

( $\Rightarrow$ ): Es sei  $f$  stetig in  $x$  und es sei  $y = \langle y_n \rangle$  infinitesimal benachbart zu  $x$ . Nach der Definition von infinitesimal benachbart ist zu zeigen, dass für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  gilt, dass

$$|{}^*f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Es sei hierzu  $\delta \in \mathbb{R}_+$  so, dass für alle  $a \in \mathbb{R}$  mit  $|a - x| < \delta$  folgt  $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$ . So ein  $\delta$  gibt es, nach der Stetigkeit von  $f$ . Es ist dann

$$\{n : |f(y_n) - f(x)| < \varepsilon\} \supset \{n : |y_n - x| < \delta\}.$$

Da  $y \approx x$  ist, hat die rechte Menge Maß 1 und daher auch die linke Menge. Es ist also  $|*f(y) - f(x)| < \varepsilon$  erfüllt.

( $\Leftarrow$ ): Sei indirekt angenommen:  $f$  ist nicht stetig in  $x$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  und eine Folge  $\{y_n\}$  in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$  so, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $|f(y_n) - f(x)| > \varepsilon$ . Dann ist aber für  $y = \langle y_n \rangle$  infinitesimal benachbart zu  $x$  auch  $|*f(y) - f(x)| > \varepsilon$ , und das steht im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Fast noch beeindruckender ist die anschauliche Definition, die für die gleichmäßige Stetigkeit folgt.

**Satz 3.1.2** (Nichtstandard-Definition für gleichmäßige Stetigkeit). *Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  ist gleichmäßig stetig auf  $A \subset \mathbb{R}$  genau dann, wenn  $*f(x) \approx *f(y)$  für alle  $x, y \in *A$  mit  $x \approx y$ .*

*Beweis.* (Beweis nach Landers und Rogge).

( $\Rightarrow$ ): Es sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ . Nach der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  existiert ein  $\delta \in \mathbb{R}_+$ , so dass folgende Aussage gilt:

$$(\forall \underline{x}, \underline{y} \in A)(|\underline{x} - \underline{y}| \leq \delta \implies |f \upharpoonright \underline{x} - f \upharpoonright \underline{y}| \leq \varepsilon).$$

Wendet man darauf das Transfer-Prinzip an, so erhält man:

$$(\forall \underline{x}, \underline{y} \in *A)(|\underline{x} - \underline{y}| \leq \delta \implies |*f \upharpoonright \underline{x} - *f \upharpoonright \underline{y}| \leq \varepsilon).$$

Es gilt also auch für beliebige vorgegebene  $x, y \in *A$  mit  $x \approx y$ , dass für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ,  $|*f(x) - *f(y)| \leq \varepsilon$  ist, also  $*f(x) \approx *f(y)$ .

( $\Leftarrow$ ): Es sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ . Nach Voraussetzung ist die Aussage

$$(\exists \underline{\delta} \in * \mathbb{R}_+)(\forall \underline{x}, \underline{y} \in *A)(|\underline{x} - \underline{y}| \leq \underline{\delta} \implies |*f \upharpoonright \underline{x} - *f \upharpoonright \underline{y}| \leq \underline{\varepsilon})$$

gültig. Wendet man das Transfer-Prinzip darauf an, erhält man die gültige Aussage, dass  $f$  gleichmäßig stetig ist.  $\square$

Selbstverständlich folgen auch die üblichen aus der Analysis bekannten Sätze. So kann man in der Nichtstandard-Analysis zeigen, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ein Minimum und ein Maximum annimmt und gleichmäßig stetig ist. Eine der wohl interessantesten Fragen, wenn man als “Standard-MathematikerIn” auf die Nichtstandard-Analysis stößt, ist jene, wie Differenzierbarkeit definiert wird. Hier soll sich nun die Spannung lösen, und wenn man will, kann man den folgenden Satz in Gedanken an Leibniz, Newton und all ihre Befürworter und Gegner lesen und sich dabei freuen oder wundern, dass über 200 Jahre später ein so spannender Ansatz entwickelt wurde, der den ihrigen vielleicht ein bisschen näher kommt (zumindest von der Idee her) als jene Analysis, die aus ihren Grundlagen entwickelt wurde und nun die gängige ist.

**Satz 3.1.3.** *Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  ist differenzierbar in  $x \in \mathbb{R}$  genau, wenn es eine Zahl  $y \in \mathbb{R}$  gibt, so dass*

$$\frac{*f(s) - *f(x)}{s - x} \approx y$$

für alle  $s \approx x$  mit  $s \neq x$ . Gibt es so ein  $y$ , so gilt  $f'(x) = y$ .

Weder der Satz noch der Beweis dazu ist an dieser Stelle noch besonders überraschend. Der Beweis kann etwa bei Landers und Rogge in Kapitel 11 nachgelesen werden.<sup>1</sup> Anstelle dessen soll nun gezeigt werden, wie sich auf sehr elegante Weise die Kettenregel für differenzierbare Funktionen beweisen lässt.

## 3.2 Der Umgang mit Infinitesimalen, wie wir ihn immer schon wollten

Eine schöne Anwendung der Nichtstandard-Theorie ist auch der Beweis zur Kettenregel differenzierbarer Funktionen. Lindström meint sogar: “[...] *you can now prove the chain rule the way you always wanted to.*”<sup>2</sup> Die Kettenregel ist ein Beispiel für eine direkte Anwendung der Nichtstandard-Analysis. Die Unterscheidung, ob man bis hierher den Weg über Lindströms Zugang oder jenen über Landers und Rogge gewählt hat ist an dieser Stelle hinfällig. Man kann den Beweis auf einfache Art führen und dabei einzig und alleine auf das Nichtstandard-Kriterium von Stetigkeit und Differenzierbarkeit zurückgreifen. ”Standard-Mathematik” spielt hier sozusagen keine direkte Rolle mehr.

**Satz 3.2.1.** *Es seien  $g, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Es sei  $g$  in  $x \in \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f$  in  $g(x)$ . Dann ist  $f \circ g$  differenzierbar und es gilt:*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

*Beweis.* Es sei  $s \approx x$ . Zu zeigen ist:

$$\frac{{}^*f({}^*g(s)) - {}^*f({}^*g(x))}{s - x} \approx f'(g(x))g'(x)$$

Man betrachte zwei Fälle:

(1):  ${}^*g(s) = {}^*g(x)$ , dann sind beide Seiten der Gleichung Null. Für die linke Seite sieht man das sofort. Für die rechte Seite folgt dies, da  $f'(g(x)) = 0$  wird, denn es ist

$$f'(g(x)) = \frac{{}^*f(g(s)) - {}^*f(g(x))}{g(s) - g(x)} = \frac{{}^*f({}^*g(s)) - {}^*f({}^*g(x))}{{}^*g(s) - {}^*g(x)}.$$

Die hintere Gleichheit folgt, da  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und auch  $x \in \mathbb{R}$  ist, und somit  ${}^*g(x) = g(x)$  gilt. Die vordere gilt nach Definition der Ableitung, und weil aus der Differenzierbarkeit von  $g$  in  $x$  insbesondere auch ihre Stetigkeit folgt, also ist für  $s \approx x$  auch  ${}^*g(s) \approx {}^*g(x)$  und man kann somit  $f$  auf  ${}^*g(x)$  anwenden.

(2): Für den Fall  ${}^*g(s) \neq {}^*g(x)$  gilt:

$$\frac{{}^*f({}^*g(s)) - {}^*f({}^*g(x))}{s - x} = \frac{{}^*f({}^*g(s)) - {}^*f({}^*g(x))}{{}^*g(s) - {}^*g(x)} \cdot \frac{{}^*g(s) - {}^*g(x)}{s - x}.$$

---

<sup>1</sup>[5]; Kapitel 11

<sup>2</sup>[8]; Seite 19

Da  $g$  in  $x$  differenzierbar und  $s \approx x$  ist, ist

$$\frac{{}^*g(s) - {}^*g(x)}{s - x} \approx g'(x).$$

Wegen  ${}^*g(s) \approx {}^*g(x)$  und  ${}^*g(x) = g(x)$  und weil man damit  $f$  auf  ${}^*g(x)$  anwenden kann, ist

$$\frac{{}^*f({}^*g(s)) - {}^*f({}^*g(x))}{{}^*g(s) - {}^*g(x)} \approx f'(g(x)).$$

Insgesamt ist damit

$$\frac{{}^*f({}^*g(s)) - {}^*f({}^*g(x))}{s - x} = \frac{{}^*f({}^*g(s)) - {}^*f({}^*g(x))}{{}^*g(s) - {}^*g(x)} \cdot \frac{{}^*g(s) - {}^*g(x)}{s - x} \approx f'(g(x))g'(x).$$

□

Dies ist also ein Beispiel für den anschaulichen Umgang der Nichtstandard-Analysis mit Infinitesimalen und vielleicht ist es auch so, wie Lindstrøm meinte, dass es der Umgang ist, wie ihn sich viele MathematikerInnen, SchülerInnen und StudentInnen der Mathematik wünschen würden. Ob der Weg zur Analysis rein über die Nichtstandard-Analysis wirklich der "bessere" ist, wie manche meinen, sei dahingestellt. Als zusätzliche Variante, Analysis zu betreiben, hat er aber, wie man alleine schon an diesem Beispiel sieht, seine Vorzüge.

# Kapitel 4

## Unterschiede und Übereinstimmungen

Was ist nun der wesentliche Unterschied zwischen dem Zugang zur Nichtstandard-Analysis von Lindstrøm und jenem von Landers und Rogge? Nun gut, es ist wohl offensichtlich, dass es nicht nur einen Unterschied gibt. Es gibt eine Vielzahl von Unterscheidungspunkten. Lindstrøm konstruiert im wahrsten Sinne eine neue “Welt”, die Nichtstandard-Welt. Er erhält auf scheinbar unglaublich leichtem Weg einen neuen Zahlenkörper, in den er dann mit einer dem/der MathematikerIn sehr vertrauten Art mittels Folgen und Äquivalenzklassen Definitionen und Sätze von  $\mathbb{R}$  überträgt.

Dem gegenüber bringen Landers und Rogge einen axiomatischen Zugang zur Nichtstandard-Analysis. Axiomatisch in dem Sinne, dass sie grundlegende Eigenschaften von  ${}^*\mathbb{R}$  vorgeben. Dies geschieht bei der Definition der satztreuen Einbettung mit dem darin enthaltenen Transfer-Prinzip und auch wieder bei der Definition der Nichtstandard-Einbettung, wo explizit gefordert wird, dass  ${}^*\mathbb{R}$  echt größer ist als  $\mathbb{R}$ . Lindstrøm erhält viele Eigenschaften und Strukturen scheinbar fast von selbst, allein durch die Art wie er  ${}^*\mathbb{R}$  konstruiert, während Landers und Rogge oft einen Beweis führen oder eingrenzendere Bedingungen in ihren Definitionen fordern müssen.

Es gibt also zweifelsohne viele Unterschiede in den beiden Wegen zur Nichtstandard-Analysis. Vielleicht wäre es daher angebrachter zu fragen, was die Gemeinsamkeiten der beiden Zugänge sind oder noch direkter, warum kommen sie auf die gleichen Ergebnisse, auf den gleichen Körper  ${}^*\mathbb{R}$ ? Denn das ist zweifellos der Fall. Was in den Kapiteln 1 und 2 gezeigt wurde, waren mögliche Wege zur Konstruktion der “Basis”, von der aus nun Nichtstandard-Analysis oder noch mehr, von der aus dann die Nichtstandard-Theorie auf verschiedene Gebiete der Mathematik (und auch auf andere Gebiete wie etwa der Mathematischen Ökonomie oder Physik), angewendet werden kann.

Um die Frage zu beantworten, was die Gemeinsamkeiten der beiden Ansätze sind, und weshalb sie auf die gleichen Endergebnisse kommen, werden hier die wesentlichen Grundzüge beider Versionen betrachtet. Dazu gehören zuerst jene Begriffe, die in beiden Versionen definiert wurden, wie etwa interne Mengen und Standard-Mengen. Es wird gezeigt werden, dass die Definitionen beider Versionen, obwohl so unterschiedlich, doch die gleichen Mengen beschreiben. Auch hyperendliche bzw. \*-endliche Mengen, wie Landers und Rogge diese nennen, werden verglichen werden. Es werden, wie in Abschnitt

2.3 angekündigt, jene zur Nichtstandard-Einbettung ähnlichen Definitionen von starker Nichtstandard-Einbettung und  $\widehat{S}$ -kompakter Nichtstandard-Einbettung dargelegt und im Vergleich zur  $\aleph_1$ -Saturation bei Lindstrøm betrachtet. Um zu zeigen, dass sowohl der Zugang zur Nichtstandard-Analysis von Lindstrøm als auch der von Landers und Rogge in manchen Situationen einen größeren Vorteil bieten, als die jeweils andere - man aber aus der Nutzung beider Varianten einen Vorteil ziehen kann - soll exemplarisch ein Satz bewiesen werden, in dem die Methoden von Lindstrøm und die von Landers und Rogge gemeinsam verwendet werden. Zu guter Letzt soll auf die bisher nur flüchtig erwähnten Ultrafilter näher eingegangen werden, da auch sie bei genauerer Betrachtung eine nicht unwesentliche Rolle bei beiden Arbeiten spielen. Zunächst zum ersten und vielleicht interessantesten Unterscheidungspunkt - dem Transfer-Prinzip:

## 4.1 Das Transfer-Prinzip

Ohne die Einführung des Transfer-Prinzips bei Landers und Rogge würde ihr Konstrukt der Nichtstandard-Analysis sofort zusammenbrechen. Sie bauen alles darauf auf. Gleichzeitig kommt das Prinzip bei Lindstrøm gar nicht vor, beziehungsweise wird es erst am Schluss als Zusatz hinzugefügt. Letztlich ist aber auch Lindstrøm veranlasst, das Transfer-Prinzip einzuführen, denn um die Beweise, die immer wieder der gleichen Idee folgen, nämlich Definitionen und Resultate von  $\mathbb{R}$  nach  ${}^*\mathbb{R}$  über die komponentenweise Struktur von  $A = \langle A_n \rangle$  zu bringen, auch anders verstehen zu können, braucht man das Transfer-Prinzip. So sagt Lindstrøm: *“Since then I have used this trick time and time again in a variety of contexts, and it has become natural, whether there is a general principle at play here; is it possible to classify, once and for all, what statements can be lifted in this way and with what consequences. [...] The general principle - aptly named the TransferPrinciple [...]”*<sup>1</sup>

Lindstrøm formuliert das Transfer-Prinzip genauso wie Landers und Rogge. Für ihn ist es aber ein Satz, den er beweisen kann. Natürlich muss auch er zuvor eine Sprache definieren, in der er Formulierungen in einer Superstruktur machen kann.<sup>2</sup> Um zu zeigen, dass das Transfer-Prinzip in Lindstrøms Arbeit sozusagen nicht explizit, aber eben doch enthalten ist, soll ein Satz, den Lindstrøm auf seine Art gezeigt hat, nun mit Hilfe des Transfer-Prinzips bewiesen werden. Auch Lindstrøm bringt hierfür Beispiele. So beweist er etwa das Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit mit Hilfe des Transfer-Prinzips. Lindstrøm bringt an dieser Stelle auch den Beweis des Prinzips der kleinsten oberen Schranke (Satz 1.2.4), der hier auch in abgeänderter Form und mit einigen zusätzlichen Ausführungen, gebracht werden soll. An Hand des Beweises dieses Satzes mit Hilfe des Transfer-Prinzips wird klar werden, dass das Transfer-Prinzip jenes Prinzip ist, das hinter Lindstrøms Methode steckt.

Zur Erinnerung: Das Prinzip der kleinsten oberen Schranke besagt, dass jede interne, nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von  ${}^*\mathbb{R}$  eine kleinste obere Schranke

---

<sup>1</sup>[8]; Seite 68

<sup>2</sup>Am Ende des Kapitels 1 wurde schon erwähnt, dass Lindstrøm für eine allgemeinere Verwendung seiner Nichtstandard-Theorie auch Superstrukturen einführt, auf welchen er am Schluss seiner Arbeit aufbaut.

besitzt.

*Beweis.* Zuerst muss das Prinzip der kleinsten oberen Schranke für  $\mathbb{R}$  in eine Formel bzw. in eine gültige Aussage gebracht werden, auf die dann das Transfer-Prinzip angewendet werden kann. Für  $\mathbb{R}$  heißt der Satz dann: Jede nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , die nach oben beschränkt ist, hat eine kleinste obere Schranke. Schritt für Schritt soll diese Aussage nun durch logische Symbole geschrieben werden. Es sei  $A$  jene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .  $A$  ist nichtleer:

$$\varphi_1(\underline{A}, \underline{x}) \equiv (\exists \underline{x} \in \mathbb{R})(\underline{x} \in \underline{A})$$

$A$  tritt hier noch frei auf. Um die Formeln übersichtlicher zu behalten, und da  $A$  in der Endformel  $\varphi$  gebunden ist, muss darauf nicht explizit Rücksicht genommen werden.

$A$  hat eine obere Schranke:

$$\varphi_2(\underline{A}, \underline{a}, \underline{c}) \equiv (\exists \underline{c} \in \mathbb{R})(\forall \underline{a} \in \underline{A})(\underline{a} \leq \underline{c})$$

$A$  hat ein Supremum, eine kleinste obere Schranke:

$$\varphi_3(\underline{A}, \underline{a}, \underline{c}, \underline{s}) \equiv$$

$$(\exists \underline{s} \in \mathbb{R})(\text{so dass } \underline{s} \text{ eine obere Schranke ist}) \wedge$$

$$(\forall \underline{c} \in \mathbb{R})(\text{mit } \underline{c} \text{ auch obere Schranke}) \implies (\underline{s} \leq \underline{c})$$

oder ganz in logischen Symbolen:

$$\varphi_3(\underline{A}, \underline{a}, \underline{c}, \underline{s}) \equiv (\exists \underline{s} \in \mathbb{R})(\varphi_2(\underline{A}, \underline{a}, \underline{s})) \wedge (\forall \underline{c} \in \mathbb{R})(\varphi_2(\underline{A}, \underline{a}, \underline{c})) \implies (\underline{s} \leq \underline{c})$$

Das Prinzip der kleinsten oberen Schranke für  $\mathbb{R}$  lautet dann:

$$\varphi \equiv (\forall \underline{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \implies \varphi_3$$

Also für alle Teilmengen  $A$  in  $\mathbb{R}$ , die nichtleer sind und eine kleinste obere Schranke haben, folgt, dass sie ein Supremum haben. Es sind nun alle Variablen gebunden und die Aussage ist gültig. Nun kann man das Transfer-Prinzip darauf wirken lassen und bekommt somit:

$$*\varphi \equiv (\forall \underline{A} \in *(\mathcal{P}(\mathbb{R})))(*\varphi_1 \wedge *\varphi_2) \implies *\varphi_3.$$

Was nichts anderes heißt, als dass jede Teilmenge von  $*(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ , die nichtleer in  $*\mathbb{R}$  ist und die in  $*\mathbb{R}$  nach oben beschränkt ist, auch ein Supremum in  $*\mathbb{R}$  besitzt. Aus der Folgerung 2.3.6 ist bekannt, dass  $*\mathcal{P}(\mathbb{R})$  genau das System aller internen Teilmengen von  $*\mathbb{R}$  ist, und damit ist das Prinzip der kleinsten oberen Schranke nun auch mittels dem Transfer-Prinzip bewiesen.  $\square$

**Beispiele für Mengen, die nach oben beschränkt sind, in  ${}^*\mathbb{R}$  aber kein Supremum haben:** Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass das Prinzip der kleinsten oberen Schranke nur für interne Mengen gilt. Es gibt also externe Mengen in  ${}^*\mathbb{R}$ , die nach oben beschränkt sind, aber kein Supremum haben. Dies ist eine weitere interessante Eigenschaft von  ${}^*\mathbb{R}$  und zeigt, wie wichtig die internen Mengen sind - was vor allem auch im Zusammenhang mit dem Transfer-Prinzip sichtbar wird. Zur Veranschaulichung nun einige Beispiele von Mengen, die in  ${}^*\mathbb{R}$  nach oben beschränkt sind, aber keine kleinste obere Schranke besitzen. Also müssen diese Mengen extern sein, und es zeigt sich, wie hilfreich das Prinzip der kleinsten oberen Schranke für die Erkennung von internen und externen Mengen ist.

**Beispiele 4.1.1.** (1) Es ist  $\mathbb{N}$  in  ${}^*\mathbb{R}$  nach oben beschränkt, ebenso auch  $\mathbb{R}$ . Andeutungsweise sieht man das schon in Abbildung 1.1, da  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}$  in  $\text{fin}({}^*\mathbb{R})$  liegen. Es ist jedes  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  unendlich groß und daher eine obere Schranke von  $\mathbb{N}$ . Da aber für jedes solche unendlich große  $\omega$  auch  $\omega - 1$  unendlich groß ist, kann ein Supremum nicht in der Menge der unendlich großen Elemente liegen. Natürlich kann es aber auch kein Element  $n \in \text{fin}({}^*\mathbb{R})$  geben, welches ein Supremum für  $\mathbb{N}$  ist, denn für jedes solche  $n$  gäbe es ein  $N \in \mathbb{N}$ , das größer wäre. Also ist  $\mathbb{N}$  in  ${}^*\mathbb{R}$  nach oben beschränkt, aber es gibt kein Supremum. Es ist also gezeigt, dass  $\mathbb{N}$  eine externe Menge ist.

(2) Auch die Menge  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  ist eine nichtleere beschränkte Teilmenge in  ${}^*\mathbb{R}$ . Zwar ist sie nicht nach oben beschränkt, sondern nach unten, aber natürlich gilt Satz 1.2.4 umgekehrt auch für das Infimum einer internen, nichtleeren nach unten beschränkten Teilmenge von  ${}^*\mathbb{R}$ . Es ist nun  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  durch jedes  $n \in \mathbb{N}$  nach unten beschränkt. Da aber wieder für jedes solche  $n$  auch  $n + 1 \in \mathbb{N}$  liegt, kann ein Infimum von  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  nicht in  $\mathbb{N}$  liegen, genauso, wie es nicht in  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  liegen kann, da wieder für jedes  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  auch  $\omega - 1 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  liegt. Also ist  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  nach unten beschränkt und hat in  ${}^*\mathbb{R}$  keine kleinste untere Schranke, somit ist sie eine externe Menge.

(3) Ganz analog sind alle Monaden von  $a \in \mathbb{R}$  Mengen, die sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt sind, aber in  ${}^*\mathbb{R}$  weder Supremum noch Infimum besitzen. Monaden können daher keine internen Mengen sein. Betrachtet man etwa die Monade um 0,  $\mathfrak{m}(0)$ , so ist jede positive Zahl aus  $\mathbb{R}$  eine obere Schranke und jede negative Zahl aus  $\mathbb{R}$  eine untere Schranke. Wieder können Infimum und Supremum nicht aus  $\mathbb{R}$  sein, da man immer eine Zahl aus  $\mathbb{R}$  finden würde, die näher an 0 liegt. Da aber für jede infinitesimale Zahl aus der Monade um Null auch wieder die nächst größere in der Monade liegt, können Infimum und Supremum auch nicht in der Monade liegen.

Man sieht also, wie wesentlich die Eigenschaft ist, interne Menge zu sein. Beim Anwenden des Transfer-Prinzips ist dann sehr genau darauf zu achten, dass das Resultat meist nicht für alle Teilmengen von  ${}^*\mathbb{R}$ , sondern nur für interne Mengen gilt. Insbesondere kann mit dem Prinzip der kleinsten oberen Schranke auf schöne Art gezeigt werden, ob eine Menge intern oder extern ist.

Es wurde nun das Transfer-Prinzip genauer betrachtet, und es zeigt sich eindeutig, dass die Beweise auf beide Arten geführt werden können. Das heißt in der Konsequenz, dass sich das Transfer-Prinzip tatsächlich hinter der konstruktiven Methode Lindstrøms versteckt. Es soll nach diesem wichtigen Schritt nun gezeigt werden, dass interne Mengen und auch Standard-Mengen die gleichen Mengen beschreiben, egal, ob sie bei Lindstrøm oder bei Landers und Rogge definiert wurden.

## 4.2 Interne Mengen – Standard-Mengen

Zuerst zur Erinnerung noch einmal die genaue Definition von internen Elementen und Mengen sowie Standard-Elementen und Mengen, wie sie Landers und Rogge bringen:

Für eine Nichtstandard-Einbettung  $*$ :  $\widehat{S} \rightarrow *S$  ist die Nichtstandard-Welt  $\mathcal{I}$  gegeben durch

$$\mathcal{I} := \bigcup_{A \in \widehat{S} - S} *A$$

Ihre Elemente heißen internen Elemente von  $*S$ . Falls die Elemente Mengen sind, so sind es die internen Mengen. Die Elemente bzw. Mengen von  $*S - \mathcal{I}$  heißen externe Elemente bzw. externe Mengen.

Standard-Elemente sind hingegen all jene Elemente von  $*S$ , die die Funktionswerte der Nichtstandard-Einbettung eines Elements von  $\widehat{S}$  sind. Falls so ein Element eine Menge ist, so heißt es eine Standard-Menge.

Wie schon in Kapitel 2.3 beschrieben, ist also eine Mengen intern genau dann, wenn sie Element einer Standard-Menge ist. Um zu zeigen, dass die Definition von internen Mengen bei Landers und Rogge sowie bei Lindstrøm einander entsprechen, wird gezeigt, dass obige Aussage auch bei Lindstrøm zutrifft.

Nocheinmal sei die Definition von internen Mengen und Standard-Mengen, wie sie Lindstrøm bringt, erwähnt: Durch eine Folge  $\{A_n\}$  von Teilmengen von  $\mathbb{R}$  wird eine Teilmenge  $A = \langle A_n \rangle$  von  $*\mathbb{R}$  definiert, und jede so definierbare Teilmenge von  $*\mathbb{R}$  nennt man eine interne Menge. Jede Teilmenge von  $*\mathbb{R}$ , die nicht intern ist, nennt man eine externe Menge.

Der folgende Satz wird nun allgemein über der Superstruktur  $*\widehat{S}$  bewiesen. Lindstrøm definiert interne Mengen und Standard-Mengen in  $*\widehat{S}$  analog zu obiger Definition, allerdings mit der zusätzlichen Forderung, dass für  $A = \langle A_n \rangle$ ,  $A_n \in S_k$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für ein  $k \in \mathbb{N}$  gelten muss.

Standard-Mengen sind bei Lindstrøm definiert als jene internen Mengen, die von der Form  $*A = \langle A, A, A, \dots \rangle$  sind. Es ist offensichtlich, dass Standard-Mengen bei Lindstrøm und Landers und Rogge die gleichen Mengen beschreiben, denn  $*A = \langle A, A, A, \dots \rangle$ , für  $A \subset \mathbb{R}$  ist eben nichts anderes, als die Anwendung der Nichtstandard-Einbettung auf jenes  $A$ .

In folgendem Satz 4.2.1, lässt sich in “Lindstrøms Welt” eine Eigenschaft von internen Mengen beweisen, welche Landers und Rogge als Definition eben jener nehmen.

**Satz 4.2.1.** *Eine Menge  $A \in *S$  ist genau dann intern, wenn sie ein Element einer Standard-Menge ist.*

*Beweis.* ( $\Leftarrow$ ): Nach der Konstruktion von internen Mengen ist jedes Element einer internen Menge intern. Insbesondere ist jedes Element einer Standard-Menge intern. (Standard-Mengen sind ja nur als spezielle interne Elemente definiert worden.) ( $\Rightarrow$ ): Umgekehrt gilt für eine interne Menge  $A \in \widehat{S}$  mit Rang  $n$  (siehe Definition 2.1.1), dass  $A$  Element von  ${}^*(S_n)$  ist.  $\square$

Man sieht also, dass interne Mengen die gleichen Mengen sind, egal wie sie konstruiert bzw. definiert wurden. Es soll hier noch einmal das Beispiel eines Intervalls in  ${}^*\mathbb{R}$  betrachtet und gezeigt werden, wie man bei Lindstrøm oder bei Landers und Rogge erkennt, wann ein Intervall intern und wann es extern ist.

**Beispiel 4.2.2.** Betrachtet man etwa das Intervall  ${}^*[0, 1]$ , so ist dieses nach Lindstrøms Methode eine Standard-Menge, da man es schreiben kann als

$${}^*[0, 1] = \langle [0, 1], [0, 1], \dots \rangle$$

wobei  $0 = \langle 0, 0, \dots \rangle$  und  $1 = \langle 1, 1, \dots \rangle$  ist. Insbesondere ist das Intervall daher auch eine interne Menge. Nach der Theorie von Landers und Rogge ist es eine Standard-Menge, da

$$[0, 1] = \{x \in {}^*\mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

eine echte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist, also ein Element von  $\widehat{S} - S$ . Nach Definition ist dann  ${}^*[0, 1]$  eine Standard-Menge. Insbesondere ist es aus demselben Grund auch wieder eine interne Menge (es ist  ${}^*[0, 1] \in \widehat{\mathbb{R}} - \mathbb{R}$ ).

Sei nun  $a, b \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$  und man betrachte das Intervall  $[a, b]$ , dann sind bei Lindstrøm  $a = \langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$  und  $b = \langle b_n \rangle = \langle b_1, b_2, \dots \rangle$  für  $a_i, b_i$  beliebig, und das Intervall ist daher gegeben durch:

$$[a, b] = \langle [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots \rangle.$$

Wenn, wie im allgemeinen Fall  $a_i \neq a_j$  und  $b_i \neq b_j$  für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  gilt, ist dieses Intervall keine Standard-Menge, aber sehr wohl eine interne Menge. Nach der Theorie von Landers und Rogge ist dieses Intervall eine interne Menge, nach dem Prinzip der internen Definition (Satz 2.3.7), denn man kann das Intervall wiederum als

$$[a, b] = \{x \in {}^*\mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

schreiben. (Da  ${}^*\mathbb{R}$  eine interne Menge ist, kann man das Prinzip der internen Definition anwenden, wenn man die interne Formel wie folgt wählt:  $\varphi[x] \equiv (a \leq x \wedge x \leq b)$ .) Das Intervall kann aber keine Standard-Menge sein, denn dann müsste es ein Element  $J \in \widehat{S}$  geben mit  $[a, b] = {}^*J$ . Da  ${}^*J \subset {}^*\mathbb{R}$  ist, müsste wegen des Transfer-Prinzips dann auch  $J \subset \mathbb{R}$  gelten. Das steht aber, wie man zeigen kann, im Widerspruch zu  $a, b \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$ . Da nach Definition des Intervalls  ${}^*J$  ein kleinstes Element  ${}^*m$  besitzt, müsste dann auch  $J$  ein kleinstes Element  $m \in \mathbb{R}$  besitzen. Dies folgt aus dem Transfer-Prinzip. Wiederum nach dem Transfer-Prinzip wäre dann  $m = {}^*m$  auch ein kleinstes Element von  ${}^*J = [a, b]$  und das steht eben im Widerspruch zu  $a \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$ . Somit ist auch durch die Methode von Landers und Rogge gezeigt, dass dieses Intervall keine Standard-Menge sein kann.

### 4.3 Die hyperendlichen Mengen und die $*$ -endlichen Mengen

Am Ende des Kapitels über Lindstrøms Zugang zur Nichtstandard-Analyse wurde darauf hingewiesen, dass die hyperendlichen Mengen in der Nichtstandard-Analyse eine besondere Rolle spielen. Natürlich sind auch bei Landers und Rogge hyperendliche Mengen, oder  *$*$ -endliche Mengen*, wie sie diese nennen, von Bedeutung.

Lindstrøm definiert hyperendliche Mengen als interne Mengen  $A = \langle A_n \rangle$ , wobei fast alle  $A_n$  endlich sind. Die interne Kardinalität  $|A|$  ist definiert als  $\langle |A_n| \rangle$ , wobei  $|A_n|$  die Anzahl der Elemente von  $A_n$  ist.

Nun ist wieder leicht zu sehen, dass die hyperendlichen Mengen, die sie definieren, bei beiden Zugängen die gleichen Mengen beschreiben. Landers und Rogge definieren nämlich hyperendliche Mengen im wesentlichen als Mengen, die sich durch eine interne bijektive Abbildung auf die Menge  $\{k \in {}^*\mathbb{N} : k \leq \omega\}$  für ein  $\omega \in {}^*\mathbb{N}$  darstellen lassen, während Lindstrøm genau das als Satz formuliert und auch beweisen kann:

**Satz 4.3.1.** *Eine interne Menge  $A$  ist eine hyperendliche Menge mit interner Kardinalität  $N$  genau dann, wenn eine interne Bijektion  $f : \{1, 2, 3, \dots, N\} \rightarrow A$  für ein  $N \in {}^*\mathbb{N}$  existiert.*

Es sei nun das in Kapitel 1.2.2 schon angeführte Beispiel einer hyperendlichen Menge genauer betrachtet:

**Beispiel 4.3.2.** Sei  $N \in {}^*\mathbb{N}$ , so ist die Menge

$$H = \left\{ 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1 \right\}$$

hyperendlich. Sei etwa  $N = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ . Zuerst ist zu zeigen, dass  $H = \langle H_n \rangle$  eine interne Menge ist. Es ist

$$H_1 = \{0, 1\}$$

$$H_2 = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$H_3 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\}$$

also allgemein:

$$H_n = \left\{ 0, \frac{1}{N_n}, \dots, \frac{N_n-1}{N_n}, 1 \right\}.$$

Man sieht also,  $H$  ist eine interne Menge.  $H$  ist offensichtlich auch hyperendlich, da  $H_n$  sogar für alle  $n \in \mathbb{N}$  endlich ist.

Um zu zeigen, dass die interne Kardinalität von  $H$  gleich  $N + 1$  ist, betrachte man die Anzahl der Elemente von  $H_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Es ist:

$$|H_1| = |0, 1| = 1 + 1$$

$$|H_2| = \left|0, \frac{1}{2}, 1\right| = 2 + 1$$

$$|H_3| = \left|0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right| = 3 + 1$$

also allgemein

$$|H_n| = \left|0, \frac{1}{N_n}, \dots, \frac{N_n-1}{N_n}, 1\right| = N_n + 1.$$

Also ist  $|H| = \langle |H_n| \rangle = \langle N_n + 1 \rangle = \langle N_n \rangle + 1 = N + 1$  und die interne Kardinalität von  $H$  ist  $N + 1$ .

Auch mit Hilfe des Satzes 4.3.1 läßt sich leicht zeigen, dass  $H$  eine hyperendliche Menge ist. Dass  $H$  intern ist wurde gerade gezeigt. Die passende interne bijektive Funktion ist wie folgt gegeben. Es sei  $f : \{0, 1, 2, \dots, N\} \rightarrow H$  definiert durch  $f(k) = \frac{k}{N}$  für  $(0 \leq k \leq N)$ . Diese Funktion ist offensichtlich bijektiv und auch intern, man schreibe sie als  $f(k) = \langle f_n(k_n) \rangle$  wobei  $f_n(k_n) = \frac{k_n}{N_n}$  ist. Also ist auch mit Satz 4.3.1 gezeigt, dass  $H$  eine hyperendliche Menge mit interner Kardinalität  $N + 1$  ist.

## 4.4 Saturation im Vergleich

Ein weiterer interessanter Unterscheidungs- und Übereinstimmungspunkt von Lindstrøm und Landers und Rogge sind die sogenannten Saturationen. In Kapitel 1 wurde ein wichtiger Satz, die  $\aleph_1$ -Saturation, dargelegt, der einige wichtige Folgerungen mit sich bringt.

Zum Vergleich, was Landers und Rogge diesbezüglich zeigen, seien die schon in Kapitel 2.3 erwähnten, zur Nichtstandard-Einbettung ähnlichen Definitionen von starker Nichtstandard-Einbettung und  $\widehat{S}$ -kompakter Nichtstandard-Einbettung gebracht. Doch bevor diese definiert werden, soll noch eine zu  $\mathbb{R} \neq {}^*\mathbb{R}$  äquivalente und sehr interessante Bedingung gezeigt werden. Man sagt, ein Mengensystem  $\mathcal{C}$  ist ein System mit *nicht-leeren endlichen Durchschnitten*, wenn  $\mathcal{C} \neq \emptyset$  und je endlich viele Mengen aus  $\mathcal{C}$  einen nichtleeren Durchschnitt haben. Wenn im Folgenden die Menge  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} {}^*C$  betrachtet wird, so soll dies als eine verkürzte Schreibweise der Menge  $\{{}^*C : C \in \mathcal{C}\}$  betrachtet werden.

**Satz 4.4.1.** *Es sei  $*$  :  $\widehat{S} \rightarrow {}^*\widehat{S}$  eine satztreue Einbettung mit  $\mathbb{R} \in S$ . Dann ist äquivalent:*

(i)  $\mathbb{R} \neq {}^*\mathbb{R}$

(ii) *Für jedes abzählbare System  $\mathcal{C} \subset \widehat{S} - S$  mit nichtleeren endlichen Durchschnitten ist*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} {}^*C \neq \emptyset.$$

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Es sei ein abzählbares System  $\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \widehat{S} - S$  mit nichtleeren endlichen Durchschnitten gegeben. Definiert man für  $n \in \mathbb{N}$

$$B_n := C_1 \cap \dots \cap C_n,$$

so bleibt also zu zeigen:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} {}^*B_n \neq \emptyset. \quad (4.1)$$

Es ist also  $B_n \subset C_1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wenn man  $B_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  als eine Abbildung  $B(n) := B_n$  auffasst, so geht  $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(C_1)$  in die Potenzmenge von  $C_1$ . Da nach Voraussetzung  $\mathbb{R} \subset S$  ist, folgt  $\mathbb{N} \in \widehat{S}$ . Aus Satz 2.1.4 folgt, dass auch  $\mathcal{P}(C_1) \in \widehat{S}$  ist. Insgesamt ist also  $B \in \widehat{S}$  (siehe dazu Bemerkung nach Satz 2.1.7). Nach Voraussetzung ist  $B(n) = B_n = C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$ , also gilt  $B \upharpoonright n \neq \emptyset$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dies ist eine gültige Aussage und somit ist nach dem Transfer-Prinzip für alle  $h \in {}^*\mathbb{N}$

$${}^*B \upharpoonright h \neq \emptyset. \quad (4.2)$$

Es sei  $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Nach Satz 2.3.2, gibt es so ein  $h$ , und es ist  $h \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es ist für  $n < m$  nach Definition  $B_m \subset B_n$ , und es folgt nun wieder aus dem Transfer-Prinzip

$${}^*B \upharpoonright h \subset {}^*B \upharpoonright n = {}^*(B_n). \quad (4.3)$$

Womit (4.1) bewiesen ist. Denn, wie groß das  $n \in \mathbb{N}$  von  ${}^*B_n$  auch ist, es wird nach (4.3) immer ein  $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  geben, so, dass  ${}^*B_h$  noch Teilmenge wäre, und nach (4.2) ist dann der Durchschnitt niemals  $\emptyset$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Setzt man  $C_n := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq n\}$  und  $\mathcal{C} := \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ , dann ist  $\mathcal{C}$  ein abzählbares System mit nichtleeren endlichen Durchschnitten. Es ist  $\mathcal{C} \in \widehat{S} - S$ , da  $\mathbb{R} \subset S$  und nach der Definition von  $C_n$ . Es ist (siehe Satz 2.2.3 (viii))

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} {}^*C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y \in {}^*\mathbb{R} : |y| \geq n\} \subset {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}.$$

Da nach Voraussetzung die linke Seite  $\neq \emptyset$  ist, folgt  ${}^*\mathbb{R} \neq \mathbb{R}$ .  $\square$

**Definition 4.4.2** (Die starke Nichtstandard-Einbettung). Eine satztreue Einbettung  ${}^* : \widehat{S} \rightarrow {}^*\widehat{S}$ , für die  $\mathbb{R} \subset S$  gilt, heißt eine *starke Nichtstandard-Einbettung*, wenn für jedes System  $\mathcal{C} \subset \widehat{S} - S$  mit nichtleeren endlichen Durchschnitten gilt:

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} {}^*C \neq \emptyset.$$

Im Unterschied zur Nichtstandard-Einbettung erfüllt eine starke Nichtstandard-Einbettung den nichtleeren endlichen Durchschnitt von jedem System, also nicht nur von jedem abzählbaren System. Die Definition der  $\widehat{S}$ -kompakten Nichtstandard-Einbettung fordert zusätzlich, dass die Anzahl der Elemente des Systems höchstens gleich der von  $\widehat{S}$  ist, dafür erhält sie dann, dass der Durchschnitt über alle  $C \in \mathcal{C}$  nichtleer ist.

**Definition 4.4.3** (Die  $\widehat{S}$ -kompakte Nichtstandard-Einbettung). Eine Nichtstandard-Einbettung  ${}^* : \widehat{S} \rightarrow {}^*\widehat{S}$  heißt eine *polysaturierte* oder  *$\widehat{S}$ -kompakte Nichtstandard-Einbettung*, wenn für jedes System  $\mathcal{C}$  mit nichtleeren endlichen Durchschnitten, das aus höchstens  $\widehat{S}$ -vielen internen Mengen besteht, gilt:

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

Im Gegensatz dazu besagt die  $\aleph_1$ -Saturation von Lindstrøm (Siehe Satz 1.2.7), dass für eine Folge interner Mengen, mit nichtleeren endlichen Durchschnitten, auch der Durchschnitt über ganz  $\mathbb{N}$  nicht leer ist.

$$\bigcap_{i \in I} A^i \neq \emptyset \text{ für alle } I \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A^i \neq \emptyset.$$

Selbstverständlich ist  $\mathbb{N}$  und damit auch jede Teilmenge  $I \subset \mathbb{N}$  in der Superstruktur  $\widehat{S}$  enthalten, da ja nach Voraussetzung sogar  $\mathbb{R}$  enthalten sein muss. Es ist also  $|\mathbb{N}| \leq |\widehat{S}|$  und damit erfüllt jede  $\widehat{S}$ -kompakte Nichtstandard-Einbettung die  $\aleph_1$ -Saturation von Lindstrøm. Hiermit wurde ein weiterer Schnittpunkt zwischen dem Zugang Lindstrøms und Landers und Rogges gezeigt.

## 4.5 Die Eleganz der Vereinigung

Es wurde nun gezeigt, wie zwei Methoden zur Entwicklung der Nichtstandard-Analyse nach Robinson ausschauen können - der konstruktive Weg von Lindstrøm im Gegensatz zum axiomatischen Weg von Landers und Rogge. Aus Anwendungen wurde ersichtlich, dass beide Varianten ihre Vorteile wie auch ihre Nachteile haben. Anhand des folgenden Satzes soll gezeigt werden, wie die Eleganz der Vereinigung beider Varianten wirken kann. Der folgende Beweis verwendet an geeigneter Stelle einmal die Methode von Lindstrøm und einmal die von Landers und Rogge.

Der Satz beschreibt einmal mehr die Struktur der internen Mengen. Er besagt, dass für interne Teilmengen von  $\text{fin}({}^*\mathbb{R})$  gilt, dass ihr Standardteil kompakt (in  $\mathbb{R}$ ) ist. Lindstrøm bringt mit den bisher eingeführten Mitteln einen ähnlichen Satz, in dem er aber nur beweist, dass der Standardteil abgeschlossen ist. Erst in Kapitel III und mit Hilfe der Topologie beweist er auch die Kompaktheit des Standardteiles einer internen Menge. In seiner Formulierung, lautet der Satz zwar, dass für jede interne Teilmenge ihr Standardteil abgeschlossen ist, allerdings beweist er es dann nur für interne Teilmengen aus  $\text{fin}({}^*\mathbb{R})$ . Zur Erinnerung:  $\text{fin}({}^*\mathbb{R})$  ist die Menge aller finiten Elemente von  ${}^*\mathbb{R}$ . Für ein  $x \in {}^*\mathbb{R}$  endlich ist der Standardteil  $\text{st}(x)$  von  $x$  jenes eindeutig definierte  $a \in \mathbb{R}$ , für das gilt:  $x = a + \varepsilon$ , wobei  $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$  infinitesimal und auch eindeutig bestimmt ist.

**Satz 4.5.1.** *Sei  $A$  eine interne Teilmenge von  $\text{fin}({}^*\mathbb{R})$ , dann ist der  $\text{st}(A)$  kompakt. Wobei  $\text{st}(A) = \{\text{st}(a) : a \in A\}$  der Standardteil der Menge  $A$  ist.*

*Beweis.* Der Standardteil der Menge  $A$  ist Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Also ist zu zeigen, dass  $\text{st}(A)$  beschränkt und abgeschlossen ist.

*Abgeschlossenheit:* Es ist  $\text{st}(A)$  genau dann abgeschlossen, wenn  $\text{st}(A) = \overline{\text{st}(A)}$ . Sei  $a \in \overline{\text{st}(A)}$  und es sei für  $n \in \mathbb{N}$  die Menge  $A_n$  definiert durch

$$A_n := A \cap \left\{ b \in {}^*\mathbb{R} : |a - b| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Es ist  $A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine nichtleere, interne Menge. Denn:

*Zu intern:* Es ist die Menge  $\{b \in {}^*\mathbb{R} : |a - b| < \frac{1}{n}\}$  nach dem Prinzip der internen

Definition (Satz 2.3.7), da  ${}^*\mathbb{R}$  eine interne Menge ist. Nach Voraussetzung ist auch  $A$  intern und nach Satz 2.3.8 ist daher  $A_n$  eine interne Menge.

*Zu nichtleer:* Da  $a \in \overline{\text{st}(A)}$ , gilt nach der Abgeschlossenheit von  $\overline{\text{st}(A)}$ , dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $d$  existiert mit  $d \in U_{\frac{1}{n}}(a) = \{x \in \text{st}(A) : |a - x| < \frac{1}{n}\}$ . Dieses  $d$  ist also insbesondere Element des Standardteiles von  $A$ , also von der Form  $d = \text{st}(c)$  für ein  $c \in A$ . Dieses  $c$  ist einerseits Element von  $A$  und andererseits muss es, da es in  $U_{\frac{1}{n}}(a)$  liegt, auch in  $\{b \in {}^*\mathbb{R} : |a - b| < \frac{1}{n}\}$  liegen. Es ist also  $A_n \neq \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Für ein  $N \in \mathbb{N}$  ist daher

$$\bigcap_{n \leq N} A_n \neq \emptyset \text{ und aus Satz 1.2.7 folgt damit } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Daher gibt es ein  $\beta$  mit  $\beta \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Es ist  $\beta \in A$  und nach der Definition der Monade ist  $\beta \in \mathfrak{m}(a)$ , oder anders ausgedrückt, ist  $a \approx \beta$ . Es ist also  $a = \text{st}(\beta)$  und somit ist jenes  $a$ , das am Anfang aus  $\text{st}(A)$  gewählt wurde, auch in  $\text{st}(A)$ . Womit die Abgeschlossenheit von  $\text{st}(A)$  gezeigt ist.

*Beschränktheit:* Zu zeigen gilt, dass  $A$  beschränkt ist, da daraus schon folgt, dass  $\text{st}(A)$  beschränkt ist. Es sei  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , also  $\omega$  unendlich groß. Da  $A \subset \text{fn}({}^*\mathbb{R})$  gilt:

$$\varphi[\omega] \equiv (\forall \underline{a} \in A)(\underline{a} \leq \underline{\omega})$$

und  $\varphi[\omega]$  ist eine interne Formel (da  $A$  intern ist), in der genau  $\omega$  frei vorkommt. Aus dem Permanenzprinzip für interne Formeln (Satz 2.3.9) folgt, dass es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\varphi[N]$  gilt. Durch dieses  $N$  ist also  $A$  nach oben beschränkt und somit auch  $\text{st}(A)$ . Die Beschränktheit nach unten folgt analog und somit ist  $\text{st}(A)$  kompakt.  $\square$

## 4.6 Über Filter und Ultrafilter

Es soll an dieser Stelle noch darauf eingegangen werden, welche Rolle die Theorie von Filtern und Ultrafiltern in den Zugängen zur Nichtstandard-Analyse von Lindstrøm und Landers und Rogge spielt. Bei der Beschäftigung mit der Nichtstandard-Analyse ist es fast unerlässlich, sich mit Ultrafiltern auseinanderzusetzen. Es würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit überschreiten, diese Theorie genau zu erläutern. Stattdessen sei hier nur der folgende Hinweis gegeben: Obwohl in der vorliegenden Arbeit Ultrafilter nicht näher erläutert werden, können die Theorien im Wesentlichen doch nicht ohne sie auskommen.

Es wurde schon in den Kapiteln 1 und 2 jeweils kurz erwähnt, an welchen Stellen die Ultrafilter einfließen. Lindstrøm baut im Wesentlichen seine ganze Arbeit darauf auf. Denn, um die Existenz eines additiven Maßes, wie er es fordert, zu beweisen, benötigt man die Theorie von Ultrafiltern. Wie gesagt, soll hier nicht die ganze Theorie erklärt werden, in kurzer Zusammenfassung ist es aber derart zu verstehen: Es ist das Maß, wie Lindstrøm es fordert, die Indikatorfunktion eines freien Ultrafilters. Das heißt, die Menge  $\{A : m(A) = 1\}$  ist ein freier Ultrafilter auf  $\mathbb{R}$ . Hat man umgekehrt einen freien Ultrafilter, so liefert die Indikatorfunktion ein Maß, wie Lindstrøm es benötigt. Die Existenz eines freien Ultrafilters wird mit Hilfe des Zornschen Lemmas bewiesen und

benötigt somit das Auswahlaxiom. Man sieht, dass auch der “konstruktive” Zugang zur Nichtstandard-Analysis von Lindstrøm auf einem “wackeligen” Axiom aufbaut.

Ebenso kommen auch Landers und Rogge ohne Ultrafilter nicht aus. Bei ihnen “steht und fällt” die ganze Theorie mit der Definition der Nichtstandard-Einbettung. Und um die Existenz eben dieser zu zeigen, brauchen auch Landers und Rogge Filter und Ultrafilter. Sie konstruieren die Nichtstandard-Einbettung mit Hilfe von Ultrafiltern. Es kommt bei ihnen auf die Wahl der Ultrafilter an, ob sie damit eine Nichtstandard-Einbettung, eine starke Nichtstandard-Einbettung oder eine  $\hat{S}$ -kompakte Nichtstandard-Einbettung erhalten.

Man sieht also, dass sowohl Lindstrøm als auch Landers und Rogge Ultrafilter brauchen, um die jeweiligen Zugänge zur Nichtstandard-Analysis exakt aufbauen zu können.

# Kapitel 5

## Vorzüge der jeweiligen Zugänge

Es bleibt die Frage, was die Vor- und Nachteile der beiden Einführungen in die Nichtstandard-Theorie sind. Dazu ist es sinnvoll, sich anzusehen, in welchem Zusammenhang und für welchen Zweck diese Arbeiten geschrieben worden sind.

Landers und Rogge haben ein ausführliches Lehrbuch zur Nichtstandard-Analysis geschrieben. Sie ermöglichen in leicht verständlicher Art und Weise auf fast fünfhundert Seiten einen gut strukturierten Einstieg in diese neuartige Theorie. Die Anforderungen an den Leser/die Leserin gehen nicht über die der Grundvorlesungen von Analysis und Linearer Algebra hinaus. Ihre Ausführungen und Beweise sind äußerst detailliert, was dem Leser/der Leserin einen guten Überblick sowie ein gutes Verständnis ermöglichen. Dies ist auch eines ihrer Ziele bei diesem Buch. So schreiben sie etwa im Vorwort: *“Beide Autoren stammen aus dem Bereich der Stochastik; in das Gebiet der Nichtstandard-Mathematik haben wir uns über unsere Vorlesungen eingearbeitet. Wir geben freimütig zu, daß uns daher vieles einer Erklärung und Ausführung bedurfte, was einem Experten auf diesem Gebiet als evident erscheinen mag. Wir denken jedoch, daß dieses Buch gerade dadurch lesbarer und verständlicher wird.”*<sup>1</sup>

Im Verlauf der vorliegenden Arbeit ist ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Zugang von Lindström und Landers und Rogge am stärksten hervorgetreten, nämlich das Verwenden bzw. Nichtverwenden des Transfer-Prinzips. Hat man beide Zugänge zur Nichtstandard-Analysis einmal kennengelernt, so scheint es doch von großem Vorteil, wenn man mit dem Transfer-Prinzip arbeiten kann. Es lassen sich viele wesentliche Eigenschaften von  $\widehat{S}$  nach  ${}^*S$  übertragen und noch mehr in die Nichtstandard-Welt  $\mathcal{I}$ . Es macht fast den Anschein, als “verteile man überall Sternchen” und habe damit die passenden Eigenschaften schon erhalten. Bei genauerem Hinsehen muss man dabei natürlich aufpassen, aber mit Hilfe des Transfer-Prinzips und des Prinzips der internen Definition kann man mit etwas Übung sehr einfach und elegant Beweise führen. Diese Vorteile sind in Kapitel 4.5 beim Beweis des Satzes über die Kompaktheit des Standardteils interner nichtleerer Mengen noch einmal hervorgetreten.

Was aber ist der Preis, den man zahlt, um mit diesen Methoden arbeiten zu können? Es ist die Logik, genauer die Prädikatenlogik. Um mit dem Transfer-Prinzip arbeiten zu können, bleibt einem der Weg über die explizite Verwendung der Prädikatenlogik

---

<sup>1</sup>[5]; Vorwort, Seite V

nicht erspart, und wenn man den Umgang mit ihr nicht gewöhnt ist, dauert es einige Zeit, bis man sicher damit arbeiten kann. Es bedarf einiger Routine, um “herkömmliche” Aussagen der Mathematik in Aussagen der Prädikatenlogik zu übersetzen. Dies ist aber die Grundvoraussetzung für das Transfer-Prinzip und alle weiteren Folgerungen daraus und damit unerlässlich für den Zugang, den Landers und Rogge zur Nichtstandard-Analysis wählten.

Damit ist aber auch schon einer der großen Vorteile von Lindstrøms Zugang zur Nichtstandard-Analysis beschrieben. In seiner Methode benötigt er keine Prädikatenlogik, genauer: sie kommt nicht explizit vor. Es wurde gezeigt, dass Lindstrøm durch die von ihm gewählte Konstruktion der hyperreellen Zahlen das Transfer-Prinzip sozusagen nur indirekt anwendet. Zwar muss er stattdessen immer wieder die gleichen Beweisschritte vollziehen, um Eigenschaften von  $\mathbb{R}$  nach  ${}^*\mathbb{R}$  durch die produktähnliche Struktur von  $a = \langle a_n \rangle$  zu übertragen. Trotzdem bleibt er in seiner Grundstruktur gut nachvollziehbar. Dies ist nicht zuletzt deshalb der Fall, weil man diese Art der Beweise aus anderen Gebieten der Mathematik gewöhnt ist.

Mit einer oberflächlichen Betrachtung hat Lindstrøm einen ungemein einfachen Weg zur Nichtstandard-Analysis beschritten, der sich vor allem für eine rasche Anwendung gut eignet. So sagt auch Lindstrøm selbst: *“I’m interested in the theory as a tool for studying and creating standard mathematical structures.”*<sup>2</sup> Bei genauerem Studium der Nichtstandard-Theorie mittels Lindstrøms Zugang, und um die Theorie in ihrer Ganzheit zu verstehen, muss man allerdings genau wie auch bei Landers und Rogge den Umweg über die Ultrafilter gehen. Nicht nur in diesem Punkt ist der Zugang Lindstrøms weniger trivial, als er auf den ersten Blick scheint. Es ist auch der Artikel selbst in einer so knappen Weise geschrieben, dass man an einigen Stellen stockt um die Beweise, die teilweise fast nur skizziert werden, genauer zu hinterfragen. In Summe gilt daher: Hat man vor allem die Anwendung als Ziel, so ist Lindstrøms Artikel gut geeignet, da er rasch auf die wesentlichen Punkte kommt. Will man sich hingegen mit der Nichtstandard-Theorie als solcher eingehender beschäftigen, bieten Landers und Rogge sicher einen übersichtlicheren und leichter nachvollziehbaren Zugang.

---

<sup>2</sup>[8], Vorwort, Seite 1

# Kapitel 6

## Resümee und Ausblick

Was zeigte sich in der bisherigen Analyse? Welche Wege können weiter gegangen werden?

Es wurden in der vorliegenden Arbeit zwei von vielen Zugängen zur Nichtstandard-Analysis beschrieben. Genauer gesagt, wurden zwei Zugänge zur Nichtstandard-Analysis beschrieben, deren beider Ursprünge zwar bei Robinson oder sogar Skolem liegen die aber andererseits in ihrer Art und in ihrem Aufbau große Differenzen aufweisen.

In der Betrachtung der beiden Zugänge von Lindstrøm und Landers und Rogge wurde gezeigt, dass sie stark unterschiedliche Methoden verwenden, um bis zum Punkt der Anwendung der Nichtstandard-Theorie zu kommen.

Auf der einen Seite steht Lindstrøms konstruktiver Weg, in dem er mit Hilfe eines additiven Maßes eine Äquivalenzrelation definiert, die ihm  ${}^*\mathbb{R}$  als Menge der Äquivalenzklassen von  $\mathbb{R}$  liefert. Auf der anderen Seite steht der Zugang von Landers und Rogge, in dem weder mit einem Maß noch mit einer Äquivalenzrelation gearbeitet wird. Landers und Rogge arbeiten mit Hilfe der Prädikatenlogik, die sie auf eine geeignete Superstruktur anwenden. Mit Hilfe der Definition von satztreuen Einbettungen und Nichtstandard-Einbettungen, die zwei wichtige Bedingungen enthalten, das Transfer-Prinzip und die Bedingung, dass  ${}^*\mathbb{R}$  echt größer ist als  $\mathbb{R}$ , erhalten sie auf axiomatischem Weg die Nichtstandard-Welt  $\mathcal{I}$  und die hyperreellen Zahlen  ${}^*\mathbb{R}$ .

Trotz dieser erheblichen Unterschiede der beiden Wege zeigt sich schön, wie viele Gemeinsamkeiten sie im Grunde doch haben. Es ist erstaunlich, dass die so unterschiedlich eingeführten Definitionen von internen Mengen, Standard-Mengen und auch hyperendlichen Mengen ein und dieselben Mengen beschreiben, dass schließlich  ${}^*\mathbb{R}$ , obwohl mit so verschiedenen Methoden definiert, die exakt selbe Menge beschreibt. Letztlich war dies natürlich zu erwarten, insofern sich das Staunen auch in Grenzen halten mag. Offensichtlich ist es jedoch keineswegs.

In Kapitel 4.6 wurden auch Gemeinsamkeiten erörtert, die sich anhand der Ultrafilter zeigen. Die Tatsache, dass beide Zugänge, obwohl sie Ultrafilter vordergründig in ihren Arbeiten nicht benötigen, im Grunde nicht ohne diese auskommen, wurde hervorgehoben. Insofern schließt sich hier wieder der Kreis, und man kann zurück zu der Tatsache kommen, dass beide Theorien von der sogenannten Robinsonschen Nichtstandard-Analysis ausgingen.

Mit der Idee der Nichtstandard-Analysis im Kopf bleiben manche spannende Fragen

offen, deren Antworten es im Rahmen dieser Arbeit nicht zu suchen galt. Hier ist zum einen die Überlegung interessant, welche didaktischen Vorteile das Erlernen der Analysis über die Nichtstandard-Theorie mit sich bringt. So beschreibt zum Beispiel Detlef Laugwitz in seinem Buch *Zahlen und Kontinuum* zwei derartige Versuche in den USA und in Deutschland.<sup>1</sup> Befürworter dieser Methode unternahmen auch schon Versuche, in Schulen die Nichtstandard-Analysis statt der herkömmlichen Analysis einzuführen. Um einen geeigneten Weg der Vermittlung der Nichtstandard-Analysis in Schulen zu finden, möge die vorliegende Arbeit hilfreich sein, da man mit ihrer Hilfe die Vorzüge und Mängel der Zugänge von Lindstrøm und Landers und Rogge klar erkennen kann.

Innerhalb der Nichtstandard-Analysis gibt es Diskussionen, welcher Weg “besser” zum Ziel führt. Ist der allgemeine Weg über Robinsons Knostruktionen vorzuziehen oder ist es besser, den im Vorwort erwähnten, rein axiomatischen Weg von Nelson und der von ihm entwickelten Internal Set Theory zu gehen? Auch hier finden sich Argumente für und gegen jeden der beiden Wege. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde diese Frage nicht weiter besprochen. Jedoch möge das Bild der Zugänge zur Robinsonschen Nichtstandard-Analysis übersichtlicher geworden, und insofern möge die Arbeit auch einen Beitrag leisten zur Herausarbeitung von Differenzierungskriterien bezüglich der “Entscheidungsfrage”: “Nichtstandard-Analysis nach Nelson oder nach Robinson?”

---

<sup>1</sup>[7]; Kapitel 7

# Literaturverzeichnis

- [1] BARENS, Donald W. und MACK, John M.: An Algebraic Introduction to Mathematical Logic. Springer-Verlag, New York Inc. 1975
- [2] BENCI, Vieri, FORTI, Marco und di NASSO, Mauro: The Eightfold Path to Nonstandard Analysis. In: Nonstandard Methods and its Applications in Mathematics, edited by CUTLAND, Nigel, Association for Symbolic Logic, Massachusetts 2006 (Seiten 3-44)
- [3] HEUSER, Harro: Lehrbuch der Analysis. B. G. Teubner, Stuttgart 1990
- [4] JAHNKE, Hans Niels: Geschichte der Analysis. 1999 Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg Berlin
- [5] LANDERS, Dieter und ROGGE, Lothar: Nichtstandard Analysis. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1994
- [6] LAUGWITZ, Detlef: Infinitesimalrechnung - Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis. Bibliographisches Institut AG, Zürich 1978
- [7] LAUGWITZ, Detlef: Zahlen und Kontinuum - Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik. Bibliographisches Institut Zürich 1986, Unveränderter Nachdruck 1994
- [8] LINDSTRØM, Tom: An Invitation to Nonstandard Analysis. In: Nonstandard Analysis and its Applications, edited by CUTLAND, Nigel, Cambridge University Press 1988 (Seiten 1-105)
- [9] LOEB, Peter A. und WOLFF, Manfred: Nonstandard Analysis for the Working Mathematician. 2000 Kluwer Academic Publishers
- [10] NELSON, Edward: Radically Elementary Probability Theory. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987 (Seiten 27-32)
- [11] NELSON, Edward: The Virtue of simplicity. In: The Strength of Nonstandard Analysis, edited by van den BERG, Imme und NEVES, Vitor: Springer-Verlag Wien 2007
- [12] ROBINSON, Abraham: Non-Standard Analysis, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1966

- [13] ROBINSON, Abraham und ZAKON, Elias: A set-theoretical characterization of enlargements. In: Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability, edited by, W.A.J. LUXEMBOURG. Holt, Rinehart and Winston, New York 1969 (Seiten 109-122)
- [14] TASCHNER, Rudolf: Das Unendliche. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1995
- [15] TULLITS, Sabine: Das Unendliche in der Mathematik und Philosophie - Eine Auswahl verschiedener Ansichten bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. Diplomarbeit an der Formal- und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Wien, 2000

# Zusammenfassung

Die Berechtigung der klassischen Infinitesimalrechnung, wie sie heute verwendet wird, steht außer Frage. Trotzdem hat sich eine weitere Richtung im Umgang mit der Analysis entwickelt - die Nichtstandard-Analysis. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit verschiedenen Zugängen zur Nichtstandard-Analysis. Es gibt bis heute viele verschiedene Wege, wie man sich der Nichtstandard-Analysis nähern kann. Den wesentlichsten Unterschied, macht es, ob man die den konstruktiven Weg von Abraham Robinson oder den axiomatische Weg von Edward Nelson wählt.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Zugänge zur Nichtstandard-Analysis, die auf Robinsons Ansätzen aufbauen, genauer betrachtet und verglichen.

Der erste Zugang, der beschrieben wird, ist der, den Dieter Landers und Lothar Rogge in ihrem Buch *Nichtstandard Analysis*<sup>2</sup> wählten. Dieses Buch ist vor allem im deutschsprachigen Raum eine der meistverwendeten Unterlagen zur Einführung in die Nichtstandard-Analysis. Die beiden deutschen Professoren haben mit sehr großer Ausführlichkeit ihren Zugang beschrieben, den man als einen axiomatischen Zugang innerhalb der Robinsonschen Nichtstandard-Analysis bezeichnen kann. Axiomatisch insofern, als sie Eigenschaften, die die hyperreellen Zahlen  ${}^*\mathbb{R}$  erfüllen sollen, axiomatisch vorgeben. Der von ihnen beschriebene Zugang verläuft über die Einführung von Superstrukturen. Diese sind im Grunde genommen Mengen, die so mächtig sind, dass sie für beliebige mathematische Theorien die nötigen Objekte als Elemente enthalten. Zusammen mit einer geeigneten Sprache, der Prädikatenlogik, wird dann  ${}^*\mathbb{R}$  eingeführt. Es wird axiomatisch vorgegeben, dass  $\mathbb{R}$  eine echte Teilmenge von  ${}^*\mathbb{R}$  ist. Dies geschieht durch die Definitionen von satztreuen Einbettungen  $e_n$  und Nichtstandard-Einbettungen.

Der zweite Zugang, auf den in der vorliegenden Arbeit eingegangen wird, ist der, den Tom Lindstrøm in seinem Artikel *An Invitation to Nonstandard Analysis*<sup>3</sup> beschreibt. Dieser Artikel ist als Einführung zu dem von Nigel Cutland herausgegebenen Buch *Nonstandard Analysis and its Applications* erschienen. Dieses Buch wurde im Anschluss an eine Konferenz zu eben diesem Thema herausgegeben, wobei Lindstrøms Vortrag als relativ schneller Einstieg in die Nichtstandard-Analysis gedacht ist. Dementsprechend knapp und vor allem anwendungsorientiert ist dieser Artikel. Lindstrøms Zugang kann gegenüber dem axiomatischen Zugang von Landers und Rogge als ein konstruktiver Weg bezeichnet werden. Er konstruiert im Rahmen der Mengenlehre einen neuen Körper, in dem auch unendlich kleine und unendlich große Elemente enthalten sind.

---

<sup>2</sup>[5]

<sup>3</sup>[8]

Seine Konstruktion verläuft mittels Äquivalenzklassen, die durch ein endliches additives Maß definiert werden und die man dann nach dem gleichen Schema erhält, wie man  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$  mittels Cauchy-Folgen erhält.

Nach einer Einführung in die jeweiligen Zugänge zur Nichtstandard-Analyse wird an Hand von Beispielen kurz gezeigt, wie sich die Nichtstandard-Analyse anwenden lässt. So wird etwa mit Nichtstandard-Methoden die Kettenregel für differenzierbare Funktionen bewiesen. An dieser Stelle ist es nicht mehr wesentlich welchen der beiden Zugänge zur Nichtstandard-Analyse man wählt, sie führen zur selben Theorie und unterscheiden sich ab dem Zeitpunkt nicht mehr.

Es werden in der vorliegenden Arbeit die Unterschiede und Gemeinsamkeiten herausgearbeitet, sowie Vor- und Nachteile der jeweiligen Zugänge zur Nichtstandard-Analyse dargelegt. Wesentliche Unterschiede findet man natürlich vorallem beim konkreten Aufbau der Zugänge. Lindstrøm führt Beweise über die Äquivalenzklassen und ihre komponentenweise Struktur, indem er damit Aussagen in  $\mathbb{R}$  auf Aussagen in  ${}^*\mathbb{R}$  überträgt. Mit der von ihm gewählten Konstruktion der hyperreellen Zahlen muss Lindstrøm immer wieder dieses Schema verwenden um Beweise zu führen. An dessen Stelle benützen Landers und Rogge das in der satztreuen Einbettung enthaltene und damit axiomatisch vorgegebene Transfer-Prinzip mit dessen Hilfe sich gültige Aussagen von  $\mathbb{R}$  nach  ${}^*\mathbb{R}$  übertragen lassen. Damit ist auch schon eine Gemeinsamkeit angedeutet, denn es wird in dieser Arbeit gezeigt, dass das Transfer-Prinzip genau jenes Prinzip ist, das hinter der Vorgehensweise von Lindstrøm steckt.

Weitere Gemeinsamkeiten werden in der vorliegenden Arbeit bei den Themen interne Mengen und Standard-Mengen, sowie bei hyperendlichen Mengen und Saturationen gezeigt. Es wird dargelegt, wie man mit der Verwendung des Zugangs zur Nichtstandard-Analyse von Lindstrøm gemeinsam mit dem von Landers und Rogge Beweise noch eleganter führen kann. Außerdem wird auf die Tatsache eingegangen, dass beide Zugänge bei exakter Formulierung nicht ohne Ultrafilter auskommen, auch wenn diese in den Arbeiten nur im jeweiligen Anhang erwähnt werden.

Es wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt, dass sich Lindstrøms Zugang eher für weiterreichende Anwendungen der Nichtstandard-Analyse von Vorteil ist, während Landers und Rogges Zugang sich auch zum Studium der Theorie selbst sehr gut eignet.



# Lebenslauf

## **Persönliche Daten:**

Vorname/ Nachname: Nicole Burian

Geburtsdaten: 30.10.1980, Wien

Staatsbürgerschaft: Österreich

## **Ausbildung:**

03/2000 - 11/2008 **Studium der Mathematik**  
Universität Wien

10/1999 - 02/2000 **Studium der Politikwissenschaft und Französisch**  
Universität Wien

09/1991 - 06/1999 **Bundesrealgymnasium Rahlgasse**  
Abschluss: Matura

## **Sonstiges:**

06/2008 **Geburt meines Sohnes**

Wien, am 11.11.2008