

Gedankenexperimente über Quantenmechanik und Gravitation

Gerd Ch. Krizek

10. Dezember 2008

Abstract

In dieser Arbeit sollen Gedankenexperimente über Quantenmechanik und Gravitation formuliert und analysiert werden. Wir wollen untersuchen welche Möglichkeiten im Rahmen eines Gedankenexperimentes bestehen mehr über die Beziehung von Quantenmechanik und Gravitation zu lernen. Diese Gedankenexperimente sollen auch auf Ihre Realisierbarkeit untersucht werden.

In einem ersten Gedankenexperiment wird einer Überlegung Werner Heisenbergs zur Suche nach Unschärferelationen gefolgt und diese auf die Gravitation angewendet. Dabei wird ein Weg gezeigt Unschärferelationen für linearisierte Gravitationsfelder (gravitoelektromagnetische Felder) zu finden.

In einem zweiten Gedankenexperiment wird die Dekohärenz bei Interferenzexperimenten durch gravitative Wechselwirkung untersucht und welche Auswirkungen dies für verschiedene Modelle des spontanen Wellenkollapses hat. Es werden zwei Gedankenexperimente mit Mach-Zehnder Interferometern formuliert, die eine Unterscheidung zwischen Alternativmodellen und der Quantenmechanik ermöglichen. Wie gezeigt wird, sind diese Experimente mit dem momentanen Stand der Experimental-Technik nicht zu realisieren und dienen der Anschauung.

Zusammenfassung

Gravitation und Quantenmechanik sind die beiden bedeutendsten Theorien des 20. Jahrhunderts. In dieser Arbeit haben wir Gedankenexperimente angegeben, die uns helfen sollen mehr über das Verhältnis der beiden Theorien zu lernen und eine Richtung zu zeigen in der zukünftige Experimente Aufschluss und neue Erkenntnisse bringen könnten.

Dabei wird zuerst ein Gedankenexperiment über die Unschärferelationen für das Gravitationsfeld aufgestellt. Es sei dabei darauf hingewiesen, dass die Quantisierung der Raumzeit ein großes Problem der Physik darstellt, da man mit Problemen bei der Renormierung konfrontiert ist. Wir befassen uns in dieser Arbeit nicht mit dieser Problematik, sondern wollen konzeptuelle Schwierigkeiten aufzeigen.

Wir haben uns dabei eines Gedankenexperiments von W.Heisenberg für elektromagnetische Felder bedient und es mit dem Formalismus des Gravitoelektromagnetismus reproduziert. Erhalten haben wir Unschärferelationen für gravitoelektromagnetische Felder. Diese folgen aus der Unschärferelation für Ort und Impuls des Probeteilchens. Gravitoelektromagnetische Felder sind eine niedrige Näherung der allgemeinen Relativitätstheorie, die eine Beschreibung der Gravitation als „elektrische“ und „magnetische“ Felder im Minkowskiraum erlaubt. Unter niedriger Näherung verstehen wir die linearisierten Feldgleichungen für kleine Geschwindigkeiten. Diese Unschärferelationen sind ein Gedankenanstoß über weitere Konsequenzen nachzudenken. Ist es möglich in dieser Näherung Konzepte aus der Quantenmechanik und Quantenoptik in die Gravitationstheorie zu übernehmen? Können wir von Superpositionen von Gravitationsfeldern oder gar Verschränkung in diesem Zusammenhang sprechen? Diese Fragen können im Rahmen dieser Arbeit nur aufgeworfen, aber nicht beantwortet werden. Wir erhalten allerdings Aufschluß darüber welche Variablen der linearisierten Relativitätstheorie zu quantisieren sind, um zumindest eine Quantisierung der linearisierten Theorie zu erreichen.

In einem weiteren Gedankenexperiment haben wir uns mit einem Mach-Zehnder Interferometer befasst, in dem wir massive quantenmechanische Systeme zur Interferenz bringen wollen. Wir haben die Vorhersagen der Quantenmechanik mit verschiedenen

Alternativmodellen (den Kollapsmodellen) verglichen, anhand eines Gedankenexperiments mit einem Mach-Zehnder-Interferometer mit massiven Teilchen. Kollapsmodelle sind alternative Modelle zur Quantenmechanik, die einen objektiven Kollaps der Wellenfunktion vorschreiben.

Dieser Kollaps kann verschiedene Ursachen haben. So beruhen die Ursachen bei den Modellen von Penrose, Diosi, Frenkel-Károlyházy auf der klassischen Struktur der Gravitation keine Superpositionen zuzulassen, während das Modell von Ghirardi, Rimini und Weber die Ursache in einer Statistik sieht, die von der Teilchenzahl und einer charakteristischen Längen- und Zeitskala abhängt. Gemeinsam haben all diese Kollapsmodelle, dass die makroskopische Superpositionen verhindern.

Jedem dieser Kollapsmodelle kann eine charakteristische Zeitskala zugeordnet werden, nach der es zum objektiven Kollaps in unserem gedanklichen Mach-Zehnder-Interferometer kommen soll. Das Interferometer soll wiederum Interferenzen mit massiven Teilchen erzeugen. Indem nun die Interferenzen überdauert, wenn die Flugzeit des quantenmechanischen Systems größer ist als die Kollapszeit, wäre eine Ausschließung der Kollapsmodelle auf diesem Weg möglich. Eine quantitative Auswertung zeigt jedoch, dass die experimentellen Parameter momentan Größenordnungen vom Bereich des Möglichen entfernt liegen.

Weiters besteht auch die Möglichkeit, dass die Gravitation eine Sonderstellung unter den Wechselwirkungen einnimmt und sich generell klassisch verhält. Diese Möglichkeiten sind experimentell bis dato nicht unterscheidbar und äquivalent.

Abschließend wird noch der Vorschlag von Penrose für ein Experiment erwähnt.

Motivation

Die zwei bedeutendsten physikalischen Theorien des 20. Jahrhunderts sind mit Sicherheit die Quantenmechanik und die allgemeine Relativitätstheorie. Beide Theorien entstanden im ersten Viertel des vergangenen Jahrhunderts haben die Paradigmen der Physik erschüttert.

Die Relativitätstheorie hat unsere Vorstellung von Raum und Zeit von Grund auf verändert und das Bild der unabänderlich verlaufenden Zeit und des unveränderlichen Raumes revidiert.

Die Quantenmechanik revolutionierte nicht nur das Gebiet der Kernphysik und angewandten Physik sondern vor allem auch die Vorstellungswelt der Physiker. Diese Einschnitte waren so gravierend, dass Ihre Auswirkungen bis heute zu spüren sind und die Diskussion um grundlegende Fragen der Interpretation der Quantenmechanik bis heute offen sind. Hat die Relativitätstheorie unsere Vorstellung von Raum und Zeit verändert, so stellt die Quantenmechanik unsere Vorstellung einer objektiven Realität in Frage.

Die Quantenmechanik fand schnell Ihre Fortführung zur Quantenfeldtheorie und Ihre Anwendung auf die elektromagnetische Wechselwirkung. Daraus entstand die Quantenelektrodynamik, die schließlich zur elektroschwachen Wechselwirkung vereinheitlicht werden konnte. Einzig die Gravitation lies eine sinnvolle Quantisierung aus verschiedenen Gründen bislang nicht zu.

Die Idee dieser Arbeit ist es nun nicht eine Theorie für Quantengravitation zu untersuchen, sondern lediglich Überschneidungen von Quantenmechanik und Gravitation in Gedankenexperimenten zu finden und zu untersuchen, ob diese in realen Experimenten beobachtet werden können.

Unschärferelationen für Gravitation

Unschärferelation für elektromagnetische Felder

Werner Heisenberg hat 1927 seine berühmten Unschärferelationen für die Quantenmechanik formuliert. Bereits 1930 beschäftigte ihn die Frage ob sich das elektromagnetische Feld auch quantisieren ließe. Um zu zeigen, dass dies sinnvoll ist, hat er für das elektromagnetische Feld Unschärferelationen abgeleitet. Seine Ideen legten dabei bereits die Grundlagen für die sich entwickelnde Quantenfeldtheorie.

So schreibt Heisenberg in [1]¹:

“... we must first discuss briefly what is meant by an exact knowledge of a wave amplitude – for instance, that of an electric or magnetic field strength. Such an exact knowledge of the amplitude at every point of a region of space is obviously an abstraction that can never be realized.”

In der Folge zeigt Heisenberg einen Weg zur Herleitung dieser Unschärferelationen. Die Messung von Feldern ist mit Messobjekten verbunden, die im fundamentalen Limit den Beschränkungen durch die Unschärferelation unterliegen.

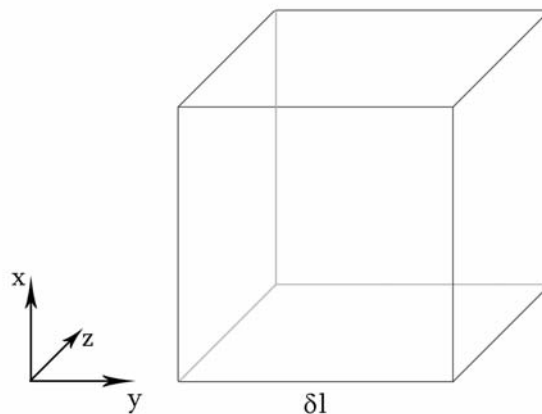


Abbildung 1

Wir betrachten ein räumliches Volumen mit der Seitenlänge δl . Das Volumen wird als genügend klein angenommen. In diesem Volumen ist ein elektromagnetisches Feld ausgebildet.

¹ [1] Seite 48

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass das elektrische Feld nur einen Anteil in Ortsrichtung x , und das magnetische Feld nur einen Anteil in Ortsrichtung z aufweist.

Diese Anteile können als homogen angenommen werden. Diese Annahme ist aber aus folgendem Grund nicht notwendig. Eine Messung des Feldes in einem kleinen Volumen erlaubt nur eine Aussage über den Mittelwert des Feldes in dem Volumen. Man kann also die in Abbildung 2 gezeigten Feldvektoren des elektrischen und magnetischen Feldes als Mittelwerte der jeweiligen Felder auffassen, die einer Messung im Rahmen dieses Aufbaus nicht weiter zugänglich sind, da reale Messungen immer nur Messungen innerhalb Volumina sind.

Heisenberg dazu in [1]²

“For precision of thought we therefore assume that our measurement always give average values over a very small space region of volume $(\delta l)^3$, which depends on the method of measurement.”

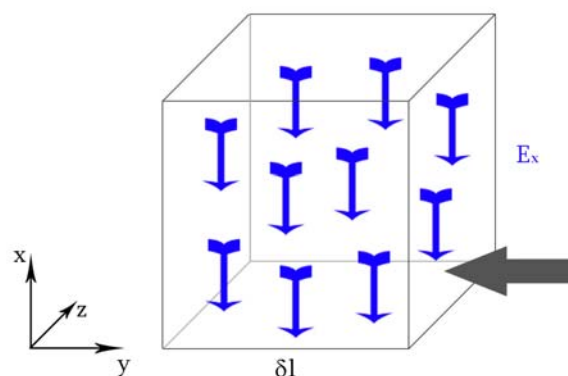


Abbildung 2

Zum besseren Verständnis des Messvorgangs nehmen wir jetzt nur die x -Komponente des elektrischen Feldes. Die Messung des Feldes erfolgt durch die Ablenkung von geladenen Teilchen. Die Teilchen, deren Ladung wir als negativ annehmen, erfahren durch das Feld in Ortsrichtung x auch eine Ablenkung in x Richtung.

² [1] Seite 49

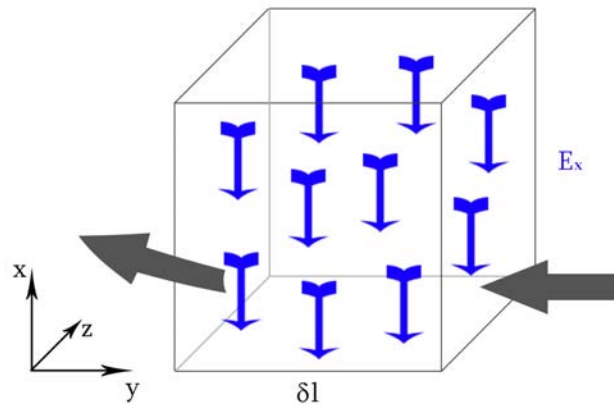


Abbildung 3

Eine Messung des magnetischen Feldes erfolgt ebenfalls durch ein Messteilchen. Es wird ein zweites Teilchen in entgegengesetzter Richtung in das Volumen geschickt um eine Ablenkung durch das Magnetfeld zu bestimmen.

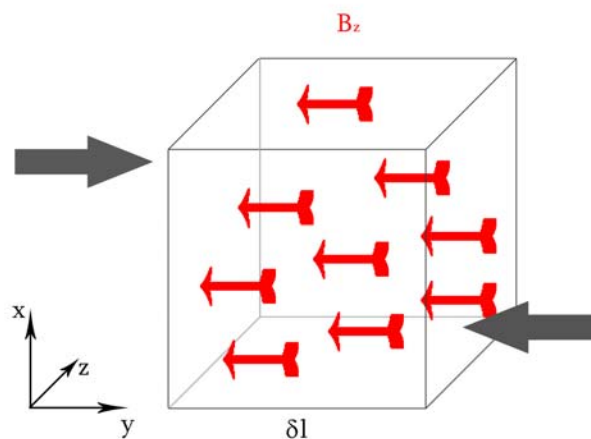


Abbildung 4

Die Messanordnung umfasst nun also ein Messvolumen in dem mit Hilfe zweier Messteilchen die gegengleich in das Volumen eintreten die Mittelwerte der elektrischen und magnetischen Feldstärken gemessen werden. Unser Ziel ist die zeitgleiche Messung der Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes. Nur dadurch ist die Bestimmung beider Feldgrößen überhaupt möglich.

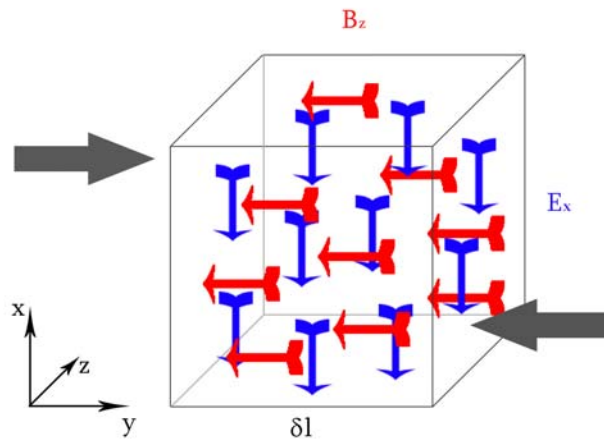


Abbildung 5

Die Ablenkung der geladenen Meßteilchen ist bedingt durch die Lorentzkraft. Dabei bezeichnet \vec{F} die Kraft auf ein Teilchen in Newton. q beschreibt die Ladung in Coulomb. \vec{E} ist das elektrische Feld in Volt pro Meter. \vec{B} bezeichnet die magnetische Flussdichte in Tesla.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Gl. 1

In unserem Gedankenexperiment verfügen die zu messenden Felder zu über je eine Komponente. Alle anderen Komponenten sind null. Das ist im Fall des Magnetfeldes die Komponente in z-Richtung, im Falle des elektrischen Feldes die Komponente in x-Richtung. Die Ablenkung der Messteilchen durch die Felder ergibt sich nun durch Reduzierung des Kreuzproduktes folgendermaßen:

$$x_{\pm}(t) = \frac{a_{\pm}}{2} t^2 = \frac{q}{2m} \left(E_x \pm \frac{p_y}{m} B_z \right) t^2$$

Gl. 2

Das Vorzeichen der Ablenkung resultiert aus der Wahl der Richtung, mit der wir die Messteilchen in das Volumen hineinschicken. Da wir eine Messung mit 2 Messteilchen anstreben, die gleichzeitig durch das Messvolumen hindurchtreten, bezeichnen wir die beiden Ablenkungen mit + und -. Weiters bezeichnet a_{\pm} die Beschleunigung der Teilchen infolge der Kraftwirkung durch die Feldern. p_y bezeichnet den Impuls mit dem die Messteilchen durch das Messvolumen fliegen. Der Impuls p_y wird hierbei als scharf angenommen. Diese Annahme ist immer

möglich, da die Ortsunschärfe der Wellenfunktion in y -Richtung beliebig groß gewählt werden kann. t ist der Zeitparameter. m ist die träge Masse des Messteilchens.

Wir betrachten nun die Ablenkung der Teilchen nach der Flugzeit durch das Volumen, also nach $T = \frac{\delta l m}{p_y}$. Damit wird Gl. 2 zu

$$x_{\pm}(T) = \frac{q}{2m} \left(E_x \pm \frac{p_y}{m} B_z \right) \left(\frac{\delta l m}{p_y} \right)^2.$$

Gl. 3

Die Messung der Felder durch die Ablenkung der Teilchen muss gleichzeitig erfolgen, da somit eine Bestimmung der Feldgrößen aus den Messwerten der Ablenkungen möglich ist. Dazu muß man neue Größen bilden, die sich aus den Ablenkungen der Teilchen zusammensetzen. Diese erlauben dann eine eindeutige Berechnung der Felder aus den Ablenkungen der Teilchen. Wir bezeichnen die neuen Größen mit $\alpha_{1,2}$.

$$\alpha_1 = x_+ + x_- = \frac{e(\delta l)^2 m}{p_y^2} E_x$$

$$\alpha_2 = -x_- + x_+ = \frac{e(\delta l)^2}{p_y} B_z$$

Gl. 4

Daraus folgt

$$E_x = \frac{p_y^2}{e(\delta l)^2 m} \alpha_1$$

$$B_z = \frac{p_y}{e(\delta l)^2} \alpha_2$$

Gl. 5

Die Unschärfen der neuen Meßgrößen beeinflussen bzw. definieren die Unschärfen der zu bestimmenden Felder.

$$\Delta E_x = \frac{p_y^2}{e(\delta l)^2 m} \Delta \alpha_1$$

$$\Delta B_z = \frac{p_y}{e(\delta l)^2} \Delta \alpha_2$$

Gl. 6

Hierbei nehmen wir an, dass Δp_y sehr gering ist und vernachlässigt wird.

Nun ist aber die Orts-Unschärfe der Meßteilchen nach der Flugdauer durch das Volumen zu bestimmen.

Für die Entwicklung der Orts-Unschärfe während der Flugzeit der Meßteilchen durch das Volumen verwendet Heisenberg die freie Evolution des Systems

$$\hat{x}(t) = \frac{\hat{p}}{m} t + \hat{x}(0).$$

Gl. 7

Wir wollen als Notation $x(0) = x_0$, $p(0) = p_0$ verwenden.

Die lineare Evolution ist die freie Bewegung des Teilchens durch das Volumen. Dies ist in unserem Fall, in dem eine Kraft auf die Meßteilchen wirkt nur eine Näherung.

Allgemein gilt für die Unschärfe des Produkts von zwei Operatoren:

$$\Delta \hat{A} \cdot \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

Gl. 8

Indem wir nun die freie Evolution des Ortes in diese Relation einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}(t) \cdot \Delta \hat{x}_0 &\geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{x}(t), \hat{x}_0] \rangle \right| = \\ &\frac{1}{2} \left| \left\langle \left[\frac{\hat{p}_0 t}{m}, \hat{x}_0 \right] + [\hat{x}_0, \hat{x}_0] \right\rangle \right| \end{aligned}$$

Gl. 9

Der zweite Kommutator fällt weg und wir erhalten:

$$\Delta \hat{x}(t) \cdot \Delta \hat{x}_0 \geq \frac{1}{2} \frac{t}{m} \left| \langle [\hat{p}_0, \hat{x}_0] \rangle \right|$$

Gl. 10

Indem wir die bekannte Kommutatorrelation für Ort und Impuls einsetzen erhalten wir:

$$\Delta\hat{x}(t) \cdot \Delta\hat{x}_0 \geq \frac{1}{2} \frac{t}{m} |\langle i\hbar \rangle|$$

Gl. 11

Somit erhalten wir:

$$\Delta\hat{x}(t) \cdot \Delta\hat{x}_0 \geq \frac{\hbar t}{2m}$$

Gl. 12

Wir schätzen nun die Unschärfe des Ortsoperators zu einer bestimmten Zeit wie folgt ab:

$$\Delta\hat{x}(t) \geq \frac{\hbar t}{2m \Delta\hat{x}_0}$$

Gl. 13

Somit erhalten wir für die Unschärfe der Ortsmessung nach der Flugzeit

$$\Delta\hat{x}(T) \geq \frac{\hbar \delta l}{2 p_y \Delta\hat{x}_0}.$$

Gl. 14

Dies entspricht nun den Unschärfen $\Delta\alpha_1$ und $\Delta\alpha_2$ in Gl. 6. Damit erhalten wir:

$$\Delta E_x \geq \frac{\hbar p_y}{2em \delta l \Delta x_0}$$

$$\Delta B_z \geq \frac{\hbar}{2e \delta l \Delta x_0}$$

Gl. 15

Bis dato haben wir die Unschärfe für die magnetische Flußdichte bestimmt. Wir wollen aber die Unschärferelation für die magnetische Feldstärke bestimmen. Die magnetische Feldstärke und die Flußdichte sind über die Permeabilität verknüpft. Im Vakuum reduziert sich die Permeabilität auf die Permeabilität des Vakuums μ_0 .

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Gl. 16

Daher folgt für die Unschärfen der elektrischen und magnetischen Feldstärke:

$$\Delta E_{x1} \geq \frac{\hbar p_y}{e m \delta l \Delta x_0}$$

$$\Delta H_{z1} \geq \frac{\hbar}{e \mu_0 \delta l \Delta x_0}$$

Gl. 17

Nun führt Heisenberg in [1]³ weiters aus:

“One essential factor remains to be considered, however. Each of the two electrons which pass through ... simultaneously modifies the field, and hence the path of the other electron. The amount of this modification is uncertain to some extent, since it is not known at which point in the cathode ray the electron is to be found.”

Daher folgt ein weiterer Beitrag zur Unschärfe des Feldes. Dieser resultiert aus dem Beitrag den das Meßteilchen zum Feld in dem Volumen liefert.

Für das elektrische Feld des Meßteilchens verwendet Heisenberg die Gleichung für das elektrische Feld eines Punktteilchens

$$\vec{E} = \frac{e}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Gl. 18

Die Unschärfe des Feldes führen wir auf die Unschärfe der Position zurück und benutzen wie oben die lineare Evolution. Dabei verwenden wir nur den zeitunabhängigen Teil, d.h. die anfängliche Ortsunschärfe.

$$\Delta E = \frac{e}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{\Delta r}{r^3}$$

Gl. 19

³ [1] Seite 53

Angewendet auf unsere Situation bedeutet dies für die Unschärfe des Feldes infolge einer unscharfen Position:

$$\Delta E_x \geq \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e\Delta x_0}{(\delta l)^3}$$

Gl. 20

Das bewegte Teilchen trägt nun auch etwas zu dem Magnetfeld im Volumen bei. Infolge des unscharfen Ortes ergibt sich daraus wieder ein Beitrag zur Unschärfe. Für die Bestimmung dieses Beitrages verwenden wir als Näherung das Biot-Savart Gesetz für das Magnetfeld eines unendlich langen geraden Leiters.

$$B_z = \frac{I}{2\pi r} \mu_0$$

Gl. 21

Dabei ist I die Gesamtmenge der pro Zeiteinheit durch das Messvolumen bewegten Ladungen, also der Gesamtstrom. r bezeichnet den Abstand zum Leiter.

Man kann Gl.21 nun auch umschreiben und erhält

$$B_z = \frac{e\mu_0 p_y}{2\pi\delta l m r}$$

Gl. 22

Wir betrachten die Unschärfe der Flussdichte in Abhängigkeit der Ortsunschärfe:

$$\Delta B_z = \frac{e\mu_0 p_y}{2\pi\delta l m r^2} \Delta r$$

Gl. 23

Nun benutzen wir wiederum die lineare Evolution, bzw. damit die anfängliche Unschärfe (Gl.14) und setzen diese in Gl.23 ein. Damit ergibt sich für die Unschärfe der magnetischen Flussdichte

$$\Delta B_z \geq \frac{e\mu_0 p_y}{2\pi\delta l^3 m} \Delta x_0$$

Gl. 24

Die beiden zusätzlichen Terme, die zur Unschärfe beitragen sind also:

$$\Delta E_{x2} \geq \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e\Delta x_0}{(\delta l)^3}$$

$$\Delta H_{z2} \geq \frac{e p_y}{2\pi\delta l^3 m} \Delta x_0$$

Gl. 25

Nun werden die Beiträge der Unschärfen aufaddiert und das Produkt aus den Unschärfen des magnetischen und elektrischen Feldes gebildet.

$$\Delta E_x \Delta H_z = (\Delta E_{x1} + \Delta E_{x2}) \cdot (\Delta H_{z1} + \Delta H_{z2})$$

Gl. 26

Daher folgt:

$$\Delta E_x \Delta H_z =$$

$$\left(\frac{\hbar p_y}{e m \delta l \Delta x_0} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e\Delta x_0}{(\delta l)^3} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{\hbar}{e \mu_0 \delta l \Delta x_0} + \frac{e p_y}{2\pi\delta l^3 m} \Delta x_0 \right) =$$

Gl. 27

Aus diesem Produkt der 2 Terme folgen 4 Terme für die Produktunschärfe:

$$= \frac{\hbar^2 p_y}{4e^2 m (\delta l)^2 \mu_0 (\Delta x_0)^2} + \frac{\hbar p_y^2}{8\pi m^2 (\delta l)^4} +$$

$$\frac{\hbar}{2\pi\epsilon_0 \mu_0 (\delta l)^4} + \frac{e^2 p_y (\Delta x_0)^2}{8\pi^2 \epsilon_0 m (\delta l)^6}$$

Gl. 28

Die Größe des Impulses in y-Richtung, d.h. die Geschwindigkeit der Meßteilchen ist eine experimentelle Größe, die wir beliebig klein wählen. Deshalb beschreiben der 1. 2. und 4. Term keine fundamentale Unschärfe. Damit reduziert sich Gl. 28 auf

$$\Delta E_x \Delta H_z \underset{p_y \rightarrow 0}{\geq} \frac{\hbar}{2\pi\epsilon_0 \mu_0 (\delta l)^4}.$$

Gl. 29

Das Produkt der Dielektrizitätskonstante und der Permeabilität des Vakuums steht mit der Lichtgeschwindigkeit in Relation. Damit erhalten wir

$$\Delta E_x \Delta H_z \geq \frac{\hbar c^2}{2\pi(\delta l)^4}$$

Gl. 30

Diese Unschärfe sieht Heisenberg als fundamental an, da sie unter allen experimentelle Bedingungen auftritt.

Im Folgenden wollen wir nun das Ergebnis von Heisenbergs Herleitung im Sinne der Überlegungen von Bohr und Rosenfeld diskutieren.

N. Bohr und L. Rosenfeld schrieben mit [2]⁴ eine bedeutende Arbeit zur Messbarkeit von Feldern. Sie leiten Ihre Arbeit mit den Worten ein:

„ Die Frage nach der im Wirkungsquantum begründeten Begrenzung der Messbarkeit elektromagnetischer Feldgrößen hat durch die Diskussion der noch ungelösten Schwierigkeiten der relativistischen Atommechanik ein besonderes Interesse gewonnen. ... Heisenberg [versuchte] durch Betrachtungen orientierenden Charakters eine ähnliche Verbindung zwischen der Begrenzung der Messbarkeit von Feldgrößen und der Quantentheorie der Felder nachzuweisen, wie den durch das Unbestimmtheitsprinzip ausgedrückten Zusammenhang zwischen der komplementären Begrenzung der Messbarkeit kinematischer und dynamischer Größen und dem nichtrelativistischen Formalismus der Quantenmechanik. ...“

Wie schon Heisenberg betonten Bohr und Rosenfeld die prinzipielle Unmöglichkeit eine Feldgröße an einem Punkt in Raum und Zeit zu bestimmen. Alles was wir tun können ist die Bestimmung von Mittelwerten von Feldgrößen über Raum- und Zeitintervalle. Siehe [2]⁵

„... kommt die bereits erwähnte Tatsache zu Vorschein, dass die quantentheoretischen Feldgrößen nicht als eigentliche Punktfunktionen zu betrachten sind, sondern erst Raumzeitintegralen über die Feldkomponenten ein eindeutiger Sinn zukommt.“

Bohr und Rosenfeld vergleichen den Diracschen Formalismus der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes mit Heisenbergs Herleitung der Unschärferelation. Dabei verfolgen Bohr und Rosenfeld sehr konsequent den Formalismus und weisen auf Widersprüche der Heisenbergschen Herleitung zum Formalismus von Dirac hin, die sich daraus ergeben, dass Heisenberg die Unschärferelationen zu einem

⁴ [2] Seite 1

⁵ Seite 10

Zeitpunkt in demselben Volumen betrachtet. Dazu schreiben Bohr und Rosenfeld in [2]⁶:

„Diese Resultate können zunächst mit den aus der Heisenberg-Paulischen Darstellung des Formalismus abzuleitenden Vertauschungsrelationen zwischen Mittelwerten von Feldgrößen zu einem und demselben Zeitpunkt über endliche Raumgebiete, die im zitierten Buch von Heisenberg diskutiert sind, unvereinbar erscheinen. ... Dieser Gegensatz löst sich aber einfach dadurch, dass es sich in der Heisenbergschen Behandlung um einen Grenzübergang handelt, bei dem zwei ursprünglich nicht zusammenfallende Raumzeitgebiete erst dann zur Deckung gebracht werden, nachdem Ihre zeitlichen Ausdehnungen sich zu einem und demselben Zeitpunkt zusammengezogen haben.“

In der weiteren Arbeit zeigen Bohr und Rosenfeld in sehr gründlicher Weise eine Herleitung für die Unschärferelationen von Feldern in zwei nicht überlappenden Raumzeitbereichen. Im Spezialfall Grenzfall der Heisenbergschen Betrachtung deckt sich das Ergebnis mit Heisenbergs Herleitung.

Für die Herleitung benutzen Bohr und Rosenfeld nicht die Ablenkung von punktförmigen Messteilchen beim Durchtritt durch das Volumen, sondern benutzen über das ganze Volumen ausgedehnte Probekörper. Die Verwendung von ausgedehnten klassischen Probekörpern ist nach Bohr und Rosenfeld in [2]⁷ von entscheidender Bedeutung:

„Für die Prüfung des quantenelektromagnetischen Formalismus kommen, wie schon betont, nur Messungen mit Probekörpern endlich ausgedehnter Ladungsverteilung in Betracht, da jede wohldefinierte Aussage dieses Formalismus sich ja auf Mittelwerte der Feldkomponenten über endliche Raumzeitgebiete bezieht.“

⁶ Seite 12f

⁷ [2] Seite 14

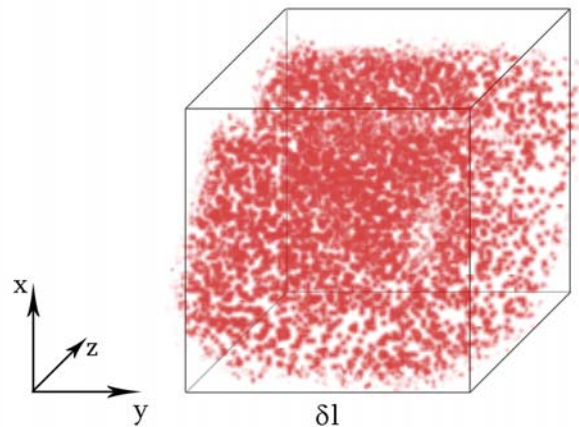


Abbildung 6

Gemessen wird der Impulsunterschied der Probekörper im Volumen nach einer gewissen verstrichenen Zeit. Aus dem Impulsunterschied kann man nun auf die Feldgröße des entsprechenden Feldes schließen.

Es ist nun möglich die Herleitung von Heisenberg ebenfalls mit der Messung von Impulsen durchzuführen. Dazu betrachtet man anstatt der Versetzung der Meßteilchen beim Durchtritt infolge der Felder, die Veränderung des Impulses durch die Wirkung der zu messenden Felder. Dazu gehen wir wiederum von der Beziehung für die Lorentzkraft aus:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Gl. 31

Anders geschrieben bedeutet dies:

$$\left(\frac{p_x'' - p_x'}{T} \right)_{\pm} = e \left(E_x \pm \frac{p_y}{m} B_z \right)$$

Gl. 32

$$(p_x'' - p_x')_{\pm} = eT \left(E_x \pm \frac{p_y}{m} B_z \right)$$

Gl. 33

$(p_x'' - p_x')_{\pm}$ sind die Änderungen der Impulse der beiden Messteilchen, wobei ein Teilchen mit + und eines mit – bezeichnet wird. Damit lassen sich neue Impulsgrößen definieren anhand derer die Felder eindeutig zu bestimmen sind:

$$p_1 = (p_x'' - p_x')_+ + (p_x'' - p_x')_- = 2eT E_x = \frac{2e\delta l m}{p_y} E_x$$

$$p_2 = -(p_x'' - p_x')_- + (p_x'' - p_x')_+ = \frac{2e p_y}{m} T B_z = 2e\delta l B_z$$

Gl. 34

Die Felder lassen sich nun einfach durch diese neuen Impulsgrößen ausdrücken:

$$E_x = \frac{p_y}{2e\delta l m} p_1$$

$$B_z = \frac{1}{2e\delta l} p_2$$

Gl. 35

Die Unschärfen der Messgrößen beeinflussen auch hier die Unschärfen der Feldgrößen. Daher haben wir:

$$\Delta E_x = \frac{p_y}{2e\delta l m} \Delta p_1$$

$$\Delta B_z = \frac{1}{2e\delta l} \Delta p_2$$

Gl. 36

Indem wir nun die Unschärferelation anwenden, können wir Gl.36 umschreiben.

$$\Delta x_0 \cdot \Delta p_0 \approx \frac{\hbar}{2}$$

Gl. 37

In der Herleitung nach Bohr und Rosenfeld reicht es aus die Unschärfen vor Beginn der Messung zu verwenden.

Wir erhalten somit:

$$\Delta E_x = \frac{\hbar p_y}{4e\delta l m \Delta x_0}$$

$$\Delta B_z = \frac{\hbar}{4e\delta l \Delta x_0}$$

Gl. 38

Wir interessieren uns aber wiederum für die Unschärfe der Feldstärke und formen somit um:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Gl. 39

$$\Delta E_x = \frac{\hbar p_y}{4e \delta l m \Delta x_0}$$

$$\Delta H_z = \frac{\hbar}{4e \mu_0 \delta l \Delta x_0}$$

Gl. 40

Wie bereits in der Herleitung von Heisenberg ist es nun notwendig die Feldwirkung der Messteilchen zu berücksichtigen. Dabei berücksichtigen wir die Tatsache, dass die Messteilchen einen Beitrag zu dem zu messenden Feld leisten. Für das elektrische Feld des Messteilchens ergibt sich aus dem Coloumb-Gesetz

$$\Delta E = \frac{e}{2\pi \varepsilon_0} \frac{\Delta r}{r^3}.$$

Gl. 41

Wir erhalten das gleiche Ergebnis wie schon in der Herleitung von Heisenberg:

$$\Delta E_x \geq \frac{1}{2\pi \varepsilon_0} \frac{e \Delta x_0}{(\delta l)^3}$$

Gl. 42

Für die magnetische Flussdichte verwenden wir wiederum die Näherung eines linienförmigen Stromes und erhalten damit analog zu der Herleitung von Heisenberg:

$$\Delta B_z \geq \frac{e \mu_0 p_y}{2\pi \delta l m \Delta x_0}$$

Gl. 43

Damit erhalten wir für das magnetische Feld:

$$\Delta H_z \geq \frac{e p_y}{2\pi \delta l m \Delta x_0}$$

Gl. 44

Somit haben wir 2 Terme für die Unschärfe des elektrischen Feldes und 2 Terme für die Unschärfe des magnetischen Feldes. Durch Bildung des Produktes erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Delta E_x \Delta H_z &= \\
&(\Delta E_{x1} + \Delta E_{x2})(\Delta H_{z1} + \Delta H_{z2}) = \\
&\left(\frac{\hbar p_y}{2e\delta l m \Delta x_0} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e\Delta x_0}{(\delta l)^3} \right) \left(\frac{\hbar}{2e\mu_0\delta l \Delta x_0} + \frac{e p_y}{2\pi\delta l m \Delta x_0} \right) = \\
&\frac{\hbar^2 p_y}{4e^2\mu_0(\delta l)^2 m(\Delta x_0)^2} + \frac{\hbar p_y^2}{4\pi(\delta l)^2 m^2(\Delta x_0)^2} + \frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0\mu_0(\delta l)^4} + \frac{e^2 p_y}{4\pi^2\epsilon_0 m(\delta l)^4}
\end{aligned}$$

Indem wir die experimentelle Größe p_y klein werden lassen, können wir alle Terme, bis auf einen zum Verschwinden bringen und erhalten

$$\Delta E_x \Delta H_z \underset{p_y \rightarrow 0}{\geq} \frac{\hbar}{2\pi\epsilon_0\mu_0(\delta l)^4}.$$

Gl. 45

Unter Verwendung der Beziehung zwischen Vakuumlichtgeschwindigkeit und Dielektrizitätskonstante und Permeabilität des Vakuums erhalten wir

$$\Delta E_x \Delta H_z \underset{p_y \rightarrow 0}{\geq} \frac{\hbar c^2}{2\pi(\delta l)^4}.$$

Gl. 46

Es ist also analog möglich die Herleitung, die Heisenberg mit der Messung von Ablenkungen gemacht hat, mit Impulsmessungen in der Art von Bohr und Rosenfeld durchzuführen und zu dem gleichen Ergebnis zu kommen. Dabei kann bei der Herleitung nach Bohr und Rosenfeld mit der Impulsmethode sogar auf die Näherung der freien Evolution der Ortsunschärfe verzichtet werden.

Nochmals muss betont werden, dass diese Herleitung eine sehr grobe Näherung an die Theorie der Quantenelektrodynamik ist. Bohr und Rosenfeld führen dies in im Detail aus. Unsere Motivation für die Verwendung dieser Herleitung liegt aber in der Anwendbarkeit auf den Gravitationselektromagnetismus, der sich sehr analog zum Elektromagnetismus verhält.

Unschärferelation für gravitoelektromagnetische Felder

Im vorangegangenen Kapitel haben wir Unschärferelationen für elektromagnetische Felder abgeleitet. Die Ableitung ist nicht mathematisch exakt sondern ein Ansatz den Heisenberg verwendet hat, um auf die Notwendigkeit der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes hinzuweisen. In der Folge der heisenbergschen Betrachtungen wurde die Quantenelektrodynamik entwickelt die einen Formalismus für das Quantenverhalten der elektromagnetischen Felder liefert.

In vorangegangenen Kapitel konnten wir die Überlegung Heisenbergs darstellen wonach die Messung von Feldern einer Unschärferelation unterliegen muss, da sie über die Messung mit der Orts-Impuls Unschärfe des Probeteilchens verbunden ist. Eine Verletzung der Unschärferelation für die Felder würde auch eine Verletzung der Unschärferelation für Ort und Impuls der Probeteilchen mit sich bringen.

Wir wollen nun ähnlich vorgehen, aber nicht für das elektromagnetische Feld, sondern für das linearisierte Gravitationsfeld. Wir wollen dabei eine Analogie zwischen dem elektromagnetischen Feld und dem Gravitationsfeld ausnutzen, um den Heisenberg-Ansatz auch für das Gravitationsfeld anwenden zu können.

Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt Raum und Zeit mathematisch mit Tensorgleichungen, den berühmten Einsteinschen Feldgleichungen. Es sind nichtlineare Tensorgleichungen, für die wir immer noch nur eine begrenzte Anzahl von Lösungen für sehr spezielle Fälle kennen. Der Grund dafür ist die komplizierte mathematische Struktur der Gleichungen. Es gibt nun Näherungen, die zwischen der vollen allgemeinen Relativitätstheorie und der newtonschen Gravitation liegen. So eine Näherung sind die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen, die unter der Voraussetzung schwacher Felder, kleiner Geschwindigkeiten und stationärer Felder gelten. Wir werden die Herleitung der linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen später nachvollziehen. Entscheidend für unser Ziel Unschärferelationen für das Gravitationsfeld zu finden, ist jedoch die Analogie zwischen den linearisierten Feldgleichungen und den Maxwellgleichungen des Elektromagnetismus.

Im stationären Fall lassen sich die linearisierten Feldgleichungen direkt analog zu den Maxwellgleichungen aufschreiben. Man kann ein

„gravitoelektrisches“ und ein „gravitomagnetisches“ Feld einführen. Das gravitoelektrische Feld ist hierbei nichts anderes als das klassische Newtonsche Gravitationsfeld. Das gravitomagnetische Feld hat allerdings keine Entsprechung in der Newtonschen Gravitation und ist ein Beitrag der allgemeinen Relativitätstheorie in niedriger Näherung.

Die Tatsache, dass es eine Analogie in den Gleichungen zwischen Elektromagnetismus und Gravitation gibt, wollen wir im Folgenden benutzen um Unschärferelationen für das linearisierte Gravitationsfeld zu finden. Diese Unschärfen folgen direkt aus der quantenmechanischen Unschärfen für den Ort x und den Impuls p und den Prinzipien der Messung. Dies ist ein starkes Argument für die Quantisierung der Gravitation.

Die Feldgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie ist eine nichtlineare Tensorgleichung mit 10 unabhängigen Komponenten.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

Gl. 47

Der Energieimpulstensor $T_{\mu\nu}$ auf der rechten ist der Quellterm der allgemeinen Relativitätstheorie und repräsentiert alle Quellen eines Gravitationsfeldes. Darunter ist natürlich auch die Masse, die wie in der Newtonschen Gravitation ein Quellterm ist. Daneben können sich aber auch Beiträge aus Strahlung, Druck und Impulsen finden. κ ist die Einsteinsche Gravitationskonstante. $R_{\mu\nu}$ ist der Ricci-Tensor und R ist der Krümmungsskalar.

Lösungen der Feldgleichung ist eine Metrik $g_{\mu\nu}$, die der Feldgleichung genügt. Die Nichtlinearität besteht nun darin, dass der Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ und der Ricci-Skalar R ihrerseits wiederum in komplexer Weise von der Metrik abhängen. Aus diesem Grund sind Lösungen auch nicht superponierbar.

Ich möchte nun nicht weiter auf die Feldgleichungen eingehen und verweise für weitere Details auf Fachliteratur⁸. Für die Herleitung der Unschärferelation ist die Linearisierung der Feldgleichungen entscheidend und die dafür getroffenen Annahmen.

⁸ Siehe [3]

Bei schwachen Gravitationsfeldern ist die Raumzeit nur schwach gekrümmt und es existieren Koordinaten für die gilt:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Gl. 48

Koordinaten die Gl. 48 erfüllen, nennt man auch quasi-minkowski Koordinaten, da die Abweichungen zur Minkowski-metrik klein sind.

In dem man nun die Feldgleichungen nach $h_{\mu\nu}$ entwickelt kann man bereits die Grundfassung der linearisierten Feldgleichungen erhalten. Dabei verwendet man das sogenannte „trace reverse“ $\bar{h}_{\mu\nu}$ zu $h_{\mu\nu}$ um die Anzahl der Terme zu reduzieren.

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho = -2\kappa T_{\mu\nu}$$

Gl. 49

∂_μ ist der Vierergradient, \square ist der d'Alembert Operator. Es gilt:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ für } \mu = 1, 2, 3, 4$$

$$\partial^\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_\nu$$

$$\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Gl. 50

Die genaue Herleitung findet sich in der Literatur⁹. Nun lässt sich Gl. 49 weiter vereinfachen, indem wir die Lorenz-Eichung anwenden. Damit reduziert sich die Form weiter und wir erhalten:

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}$$

Gl. 51

Die Lorenz-Eichung ist definiert durch:

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

Gl. 52

⁹ Siehe [3] S. 470 - 471

Nun nehmen wir eine weitere Vereinfachung an, indem wir nur stationäre Lösungen betrachten. Dabei sei deutlich festgehalten, dass stationär nicht statisch bedeutet. Stationäre Lösungen erlauben sehr wohl bewegte Teilchen, aber mit starken Einschränkungen. Ein Standardbeispiel ist das Gravitationsfeld einer rotierenden Kugel. Für stationäre Lösungen gilt:

$$\partial_0 T^{\mu\nu} = 0$$

Gl. 53

Durch die Reduktion auf stationäre Fälle fällt die Retardierung in der allgemeinen Lösung der linearisierten Feldgleichung weg. Damit fällt die Berücksichtigung der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitationsfelder weg und wir haben ähnlich der Newtonschen Gravitation eine instantane Kraftwirkung. Indem wir nichtrelativistische stationäre Fälle betrachten erhalten wir weitere Reduktion. Für diesen Fall gilt $v \ll c$.

Indem wir die Metrikkomponenten folgendermaßen umbenennen

$$h^{00} = h^{11} = h^{22} = h^{33} = \frac{2\Phi_g}{c^2}$$

$$h^{0i} = \frac{A_g^i}{c} \quad ; \quad h^{ij} = 0$$

Gl. 54

erhalten wir für die linearisierten Feldgleichungen folgende Form:

$$\nabla^2 \Phi_g = 4\pi G \rho$$

$$\nabla^2 \vec{A}_g = \frac{16\pi G}{c^2} \vec{j}$$

Gl. 55

Dabei sind Φ_g und A_g^i das gravitative Skalar- und Vektorpotential, dass sich aus der allgemeinen Lösung der linearisierten Feldgleichungen ergibt.

$$\Phi_g = -G \int \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y}$$

$$\vec{A}_g = -\frac{4G}{c^2} \int \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y}$$

Gl. 56

Indem wir nun Gl. 56 mit dem Skalarpotential und dem Vektorpotential aus der Elektrodynamik vergleichen erkennen wir die Analogie

zwischen den linearisierten Einsteingleichungen und der Elektrodynamik.

$$\Phi_{EM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}$$

$$\vec{A}_{EM} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}$$

Gl. 57

Der Ladungsdichte der Elektrodynamik entspricht die Massendichte ρ der Gravitation. Der Ladungsstromdichte entspricht die Massenstrom- bzw. Impulsdichte \vec{j} . Für die Permeabilitätskonstante des Vakuums und die Permittivität des Vakuums lassen sich ebenfalls Entsprechungen in der linearisierten Gravitation finden.

$$\epsilon_0 \leftrightarrow -\frac{1}{4\pi G}$$

$$\mu_0 \leftrightarrow -\frac{16\pi G}{c^2}$$

Gl. 58

Die Analogie kann nun noch weiter geführt werden, indem wir zu den Potentialen auch noch Feldgrößen einführen. Diese Feldgrößen entsprechen direkt den elektromagnetischen Feldgrößen. Daher nennen wir sie auch gravitoelektromagnetische Felder.

$$\vec{E}_g = -\nabla\Phi_g = -\nabla(h^{11}; h^{22}; h^{33}; h^{44})$$

$$\vec{B}_g = \vec{\nabla} \times \vec{A}_g = \vec{\nabla} \times (h^{01}; h^{02}; h^{03}; h^{04})$$

Gl. 59

Nun kann man für die so definierten gravitoelektromagnetischen Felder zeigen, dass diese folgende Relationen erfüllen. Diese Relationen sind das Analogon der Maxwell Gleichungen für die Gravitation.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g = -4\pi G \rho \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_g = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_g = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_g = -\frac{16\pi G}{c^2} \vec{j}$$

Gl. 60

An dieser Stelle sei nochmals explizit darauf hingewiesen, dass die Analogie zwischen Elektromagnetismus und Gravitation nur unter folgenden Bedingungen gültig ist:

- Schwache Felder - kleine Krümmungen
- Stationäre Felder
- Nichtrelativistische Geschwindigkeiten

Die Einschränkung der stationären Bewegungen bedeutet nicht, dass wir es mit unbewegter Materie zu tun haben, sondern, dass Gl.53 erfüllt ist.

Daher sind rotierende Kugeln z.B ein stationärer Fall. Ein weiterer stationärer Fall, der für unsere Herleitung der Unschärferelation relevant ist, ist ein unendlich ausgedehnter Impulsstrom. Ein solcher Impulsstrom wäre äquivalent zu einem unendlich ausgedehnten elektrischen Leiter, der bei Stromfluss von einem Magnetfeld umgeben ist. Analog dazu ist der unendlich ausgedehnte Impulsstrom von einem gravitomagnetischen Feld umgeben.

Um die Kraftwirkung auf Probekörper - im Fall der Elektrodynamik sind das Ladungen - zu beschreiben wird in der klassischen Elektrodynamik die Lorentzkraft postuliert. Im Fall des Gravitoelektromagnetismus muss man keine Kraft postulieren, sondern folgt dem Formalismus der allgemeinen Relativitätstheorie und betrachtet die Geodätengleichung, die die Bewegung von Probemassen im Gravitationsfeld beschreibt.

$$\ddot{x}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

Gl. 61

Da wir die Maxwell Gleichungen für die Gravitation für den Fall kleiner Geschwindigkeiten, also nichtrelativistisch, hergeleitet haben, können wir diese Näherung auch nun für die Geodätengleichung anwenden. Dadurch können wir Terme der Ordnung $\frac{v^2}{c^2}$ vernachlässigen und erhalten damit $\gamma \approx 1$

Damit folgt für die Vierergeschwindigkeit:

$$\dot{x}^\mu = \gamma(c, \vec{v}) \approx (c, \vec{v})$$

Gl. 62

Aus Gl.62 können wir direkt erkennen, dass für die zweite Ableitung $\ddot{x}^\mu = 0$ gelten muss, sowie $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1$.

Dadurch erhält man

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\left(c^2 \Gamma^i_{00} + 2c \Gamma^i_{0j} + \Gamma^i_{ij} v^i v^j\right) \approx -\left(c^2 \Gamma^i_{00} + 2c \Gamma^i_{0j} v^j\right)$$

Gl. 63

wobei die quadratischen Terme vernachlässigt hat.

Indem wir nun die Christoffelsymbole für die linearisierten Felder verwenden

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial^\sigma h_{\mu\nu} \right)$$

Gl. 64

und berücksichtigen, dass für die Lorentzbeziehung $\partial_0 h_{\mu\nu} = 0$ gilt, erhalten wir indem wir die Definitionen für die Potentiale des gravitoelektromagnetischen Feldes verwenden:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \approx -\vec{\nabla} \Phi_g + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_g)$$

Gl. 65

Mit den Definitionen für die gravitoelektrischen und gravitomagnetischen Felder aus Gl. 59 schreiben wir

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \approx \vec{E}_g + \vec{v} \times \vec{B}_g.$$

Gl. 66

Indem wir nun den Trägheitssatz anwenden, kommen wir auf die entsprechende Kraft, die ein Analogon zu Lorentzkraft aus der Elektrodynamik darstellt. In der Elektrodynamik muss die Lorentzkraft postuliert werden, während sie sich im Gravitoelektromagnetismus aus dem Grundprinzip der Geodätenbewegung ableiten lässt.

$$\vec{F} \approx m \left(\vec{E}_g + \vec{v} \times \vec{B}_g \right)$$

Gl. 67

Der Ladung der Elektrodynamik entspricht hier die Masse des Teilchens, wobei diese nur positive Werte annehmen darf. Daher ist die Analogie auch nicht wirklich vollständig.

Ausgehend von der Lorentzkraft für gravitoelektromagnetische Felder wollen wir nun analog, wie wir es bereits für elektromagnetische Felder getan haben, Unschärferelationen herleiten.

Dazu betrachten wir wiederum die gleichzeitige Ablenkung von zwei Testteilchen in einem Volumen. Die Gleichzeitigkeit ist notwendig um beide Feldgrößen bestimmen zu können.

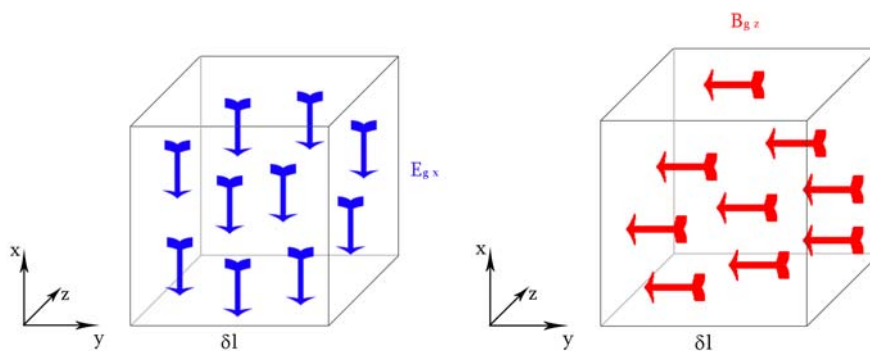


Abbildung 7

$$x_{\pm}(t) = \frac{a_{g\pm}}{2} t^2 = \frac{1}{2} \left(E_{gx} \pm \frac{p_y}{m} B_{gz} \right) t^2$$

Gl. 68

Sofort fällt auf, dass die Ladung des Testkörpers in diesem Fall gleich der Masse ist und sich mit der Masse aus dem Trägheitssatz kürzt.

Wir betrachten nun wiederum die Ablenkung der Teilchen nach der Flugzeit durch das Volumen, also nach $T = \frac{\delta l m}{p_y}$. Damit erhalten wir:

$$x_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \left(E_{gx} \pm \frac{p_y}{m} B_{gz} \right) \frac{\delta l^2 m^2}{p_y^2}$$

Gl. 69

Indem wir nun neue Messgrößen definieren, separieren wir die Messung des gravitoelektrischen und gravitomagnetischen Feldes. Damit können die Felder direkt aus den gemessenen Ablenkungen bestimmt werden.

$$\alpha_1 = x_+(t) + x_-(t) = \frac{\delta l^2 m^2}{p_y} E_{gx}$$

$$\alpha_2 = -x_-(t) + x_+(t) = \frac{\delta l^2 m}{p_y} B_{gz}$$

Gl. 70

Daraus ergibt sich für die Bestimmung der Feldgrößen durch triviale Umformung:

$$E_{gx} = \frac{p_y^2}{\delta l^2 m^2} \alpha_1$$

$$B_{gz} = \frac{p_y}{\delta l^2 m} \alpha_2$$

Gl. 71

Die Unschärfen der Messgrößen beeinflussen die Unbestimmtheit der Feldgrößen. Daher gilt:

$$\Delta E_{gx} = \frac{p_y^2}{\delta l^2 m^2} \Delta \alpha_1$$

$$\Delta B_{gz} = \frac{p_y}{\delta l^2 m} \Delta \alpha_2$$

Gl. 72

Die Unbestimmtheit des Ortes bestimmen wir mit der linearen Evolution, die wir bereits in der Herleitung für die Unschärfe der elektromagnetischen Felder begründet haben. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass die Näherung der linearen Evolution in der Herleitung nach der Bohr Rosenfeld Methode entfällt und nicht benötigt wird. Wir werden dies in einem späteren Schritt zeigen.

Wir verwenden also für die Unschärfe aus der linearen Evolution aus Gl.14 folgend

$$\Delta \hat{x}(T) \geq \frac{\hbar \delta l}{2 p_y \Delta \hat{x}_0}$$

Gl. 73

und erhalten damit für die Unschärfe der gravitomagnetischen Felder analog wie bei der Herleitung nach Heisenberg

$$\Delta E_{g x} = \frac{\hbar p_y}{2 \delta l m^2 \Delta x_0}$$

$$\Delta B_{g z} = \frac{\hbar}{2 \delta l m \Delta x_0}.$$

Gl. 74

Das Feld, das wir als gravitomagnetisches Feld definiert haben, ist aber genauso genommen das Analogon zur magnetischen Flussdichte. Die Verknüpfung zwischen der gravitomagnetischen Feldstärke und der gravitomagnetischen Flussdichte erfolgt analog zur Elektrodynamik über eine Konstante. In der Elektrodynamik ist dies die Permeabilität des Vakuums μ_0 . In Gl.58 haben wir bereits das Analogon dieser Konstante im Gravitoelektromagnetismus gefunden $\mu_0 \leftrightarrow -\frac{16 \pi G}{c^2}$.

Damit ergibt sich für die jeweiligen Feldstärken:

$$\Delta E_{g x1} = \frac{\hbar p_y}{2 \delta l m^2 \Delta x_0}$$

$$\Delta H_{g z1} = \frac{\hbar c^2}{32 \pi G \delta l m \Delta x_0}$$

Gl. 75

Wir wollen nun noch den Beitrag der Messteilchen als Quellen der Felder berücksichtigen. Die Meßteilchen tragen selber Masse und erzeugen ihrerseits einen Beitrag zum Feld der in der Ableitung ebenfalls berücksichtigt wird. In der Herleitung für die Unschärfen des elektromagnetischen Feldes haben wir ebenfalls diesen Beitrag berücksichtigt.

Das gravitoelektrische Feld leistet einen Beitrag über das Newtonsche Gravitationsfeld des Messteilchens. Dieser ist ganz einfach die Newtonsche Gravitationskraft des Messteilchens. Für den Beitrag der Unschärfe gilt:

$$\Delta E_{g x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{m \Delta x_0}{\delta l^3} = \frac{4 \pi G m \Delta x_0}{\delta l^3}$$

Gl. 76

Den Feldunschärfebeitrag des gravitomagnetischen Feldes durch das Messteilchen bestimmen wir über das Analogon zum Biot-Savart Gesetz für gravitomagnetische Felder.

$$B_{gz} = \mu_0 \frac{I_{gr}}{r} = \mu_0 \frac{m}{r \frac{\delta l m}{P_y}} = \frac{P_y}{\delta l r}$$

Gl. 77

Das gravitomagnetische Feld kommt in der Newtonschen Theorie nicht vor. Es ist eine Erweiterung durch die allgemeine Relativitätstheorie in der niedrigsten Näherung. Damit ergibt sich für die Unschärfe des gravitomagnetischen Feldes:

$$\Delta B_{gz} = \frac{P_y}{\delta l \Delta x_0}$$

Gl. 78

Da es sich bei B_{gz} um ein Analogon zur magnetischen Flußdichte handelt wollen wir nun den entsprechenden Wert für die gravitomagnetische Feldstärke erhalten und benutzen dafür wiederum die Relation $\mu_0 \leftrightarrow -\frac{16\pi G}{c^2}$.

Zusammenfassend haben wir damit für die Beiträge der Messteilchen zu den Unschärfen:

$$\Delta E_{gx2} = \frac{4\pi G m \Delta x_0}{\delta l^3}$$

$$\Delta H_{gz2} = \frac{P_y c^2}{16\pi G \delta l \Delta x_0}$$

Gl. 79

Durch Bildung des Produkts der summierten Unschärfen erhalten wir die Unschärfe für das Produkt aus den Unschärfen:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{g_x} \Delta H_{g_z} &= (\Delta E_{g_{x1}} + \Delta E_{g_{x2}}) \cdot (\Delta H_{g_{z1}} + \Delta H_{g_{z2}}) = \\
&= \left(\frac{\hbar p_y}{2\delta l m^2 \Delta x_0} + \frac{4\pi G m \Delta x_0}{\delta l^3} \right) \cdot \\
&\left(\frac{\hbar c^2}{32\pi G \delta l m \Delta x_0} + \frac{p_y c^2}{16\pi G \delta l \Delta x_0} \right) = \\
&= \frac{\hbar^2 p_y c^2}{64\pi G \delta l^2 m^3 \Delta x_0} + \frac{\hbar p_y^2 c^2}{32\pi G \delta l^2 m^2 \Delta x_0^2} + \\
&+ \frac{\hbar c^2}{8\delta l^4} + \frac{p_y m c^4}{4\delta l^4}
\end{aligned}$$

Gl. 80

Indem wir nun den Impuls der Messteilchen in Flugrichtung der Teilchen, also p_y klein werden lassen, können wir alle Terme bis auf einen zum Verschwinden bringen. Diesen Term betrachten wir als fundamental. Er repräsentiert nach der Herleitung von Heisenberg eine fundamentale Unschärfe für die gravitoelektromagnetischen Felder, d.h für die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen.

$$\Delta E_{g_x} \Delta H_{g_z} \Big|_{p_y \rightarrow 0} = \frac{\hbar c^2}{8\delta l^4}$$

Gl. 81

Daraus schließen wir auf die Unschärferelation für gravitoelektromagnetische Felder:

$$\boxed{\Delta E_{g_x} \Delta H_{g_z} \geq \frac{\hbar c^2}{8\delta l^4}}$$

Gl. 82

Wir haben auf diesem simplen Weg, der nichts mehr als ein intuitiver Zugang ist, eine Unschärferelation hergeleitet, die zeigen soll, dass für gravitoelektromagnetische Felder eine ähnliche algebraische Struktur findbar sein könnte, wie für die Quantenelektrodynamik. Wie dieses Ergebnis zu diskutieren ist, wird im folgenden Kapitel behandelt.

Interpretation:

Werner Heisenberg wollte durch seinen Ansatz zur Herleitung für Unschärferelationen die Notwendigkeit der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes zeigen.

Im Falle des Gravitationsfeldes ist es aufgrund der jahrelangen Bestrebungen das Gravitationsfeld zu quantisieren nicht notwendig auf diesen Umstand besonders hinzuweisen, da es bis dato starke Bestrebungen in dieser Richtung gab, die aber bisher keinen endgültigen Erfolg gebracht haben. Unser Ziel ist es mehr einen Gedankenanstoß zur konzeptuellen Situation zu geben.

In der Quantenoptik haben wir es mit vielen nichtklassischen Konzepten wie Superposition oder Verschränkung zu tun. Diese Konzepte verlangen neue Sichtweisen über die Natur der Realität und das Wesen der Naturerscheinungen. Die Gravitation wird weiterhin mit klassischen Augen betrachtet und es fällt schwer von dem gewohnten Bild der von der Messung unabhängigen Einsteinschen gekrümmten Raumzeit Abschied zu nehmen.

Diese Tatsache drückt sich in Konzepten wie dem gravitativen Kollaps nach Penrose aus. Dabei wird das Konzept der Raumzeit genutzt um dem quantenmechanischen Kollaps eine fundamentale Ursache zu geben. Der Raumzeit wird die Eigenschaft zugeordnet sich gegen Superposition von massiven Objekten zu wehren und die quantenmechanische Superposition von massiven Objekten und damit die Superposition von Raumzeitkonfigurationen durch einen Kollaps in einen definierten Zustand zu untersagen. Verwandte Konzepte gibt es von Diosi und Frenkel. Gemeinsam ist diesen Ideen die Überlegung, dass die Raumzeitgeometrie keine Superpositionen zulässt und diese durch Kollaps des quantenmechanischen Zustands verhindert.

Die Frage, die uns beschäftigt hat, ist allerdings warum dies so sein sollte. Warum sollte die Raumzeit quantenmechanische Eigenschaften wie Superposition nicht zulassen. Damit würde man kein Konzept eines spontanen Kollaps benötigen und die Raumzeitstruktur in das quantenmechanische Geschehen mit einbinden. Eine offenkundige Schwierigkeit stellt die Nichtlinearität der allgemeinen Relativitätstheorie dar, die wir in unseren Überlegungen auch bewusst umgangen haben. Durch Näherung auf die linearisierte Theorie konnten wir die Methode von Heisenberg bzw. Bohr und Rosenfeld nutzen um Unschärferelationen zu finden.

Dies stellt aber eigentlich keinen Abschluss sondern erst den Beginn der weiteren Arbeit dar. Die Unschärferelationen sind eigentlich ja kein Ausgangspunkt sondern eher ein Ergebnis einer Quantisierung. Die nächsten Schritte wären die Observablen der quantisierten Theorie zu finden und einen Formalismus für das linearisierte Gravitationsfeld zu erstellen. In Folge könnten bekannte Konzepte aus der Quantenmechanik bzw. Quantenoptik in die linearisierte Gravitation übernommen werden. Insbesondere Superposition und Verschränkung.

Dies würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher wollen wir im Folgenden die Ergebnisse mit den Resultaten von anderen Arbeiten vergleichen, die sich ein ähnliches Ziel gesetzt haben.

Vergleich mit Resultaten nach Peres und Rosen

Asher Peres und Nathan Rosen¹⁰ haben sich 1960 mit ebenfalls mit den Grenzen der Messbarkeit des Gravitationsfeldes beschäftigt. Ihre Motivation war die Frage, ob das Gravitationsfeld quantisiert werden soll:

„The existence of uncertainty relations provides an argument in support of the standpoint that the gravitational field must be quantized”

Dabei benutzen sie ebenfalls die Analogie des gravitoelektromagnetischen Feldes zum elektromagnetischen Feld und leiten nach Bohr und Rosenfeld Unschärferelationen her.

$$\Delta\Gamma^k_{00} \Delta\Gamma^k_{0n} \geq \frac{Gh}{r^2 LT}$$

Gl. 83

Hierbei bezeichnen L und r räumliche Ausdehnung der Messvolumina und deren Abstand. Diese beiden Größen sind bei unserer Herleitung zusammenfallend und mit δl bezeichnet. Das Zeitintervall T ist die Messdauer und unterliegt der Relation

$$T = \frac{\delta l}{c}$$

Gl. 84

Das Ergebnis ist mit unserem Ergebnis in Gl.82 konform, da Peres und Rosen $c=1$ gesetzt haben. Die Äquivalenz erkennt man deutlicher

¹⁰ Siehe [4]

indem wir unser Ergebnis Gl.82, welches wir für die Feldgrößen formuliert haben, umschreiben.

Dabei schreiben wir die Unschärferelation für das gravitoelektrische Feld und die gravitomagnetische Flussdichte, da diese beiden Größen die den Christoffelsymbolen entsprechenden Feldgrößen sind.

$$\Delta E_{g_x} \Delta B_{g_z} \geq \frac{G h}{\delta l^4}$$

Gl. 85

Peres und Rosen schließen mit der Feststellung:

“The existence of these quantum uncertainties in the gravitational field is a strong argument for the necessity of quantizing it. It is very likely that a quantum theory of gravitation would then generalize these uncertainty relations to all other Christoffel symbols.”

Peres und Rosen haben für die Herleitung einen anderen Zugang gewählt, der weniger auf den Messprozess eingeht.

Vergleich mit Resultaten von Borzeszkowski & Treder:

Borzeszkowski und Treder befassen sich in Ihrer Arbeit¹¹ nicht mehr nur mit der linearisierten Gravitationstheorie, sondern befassen sich auch mit der allgemeinen Relativitätstheorie. Sie kommen in Ihrer Arbeit auch auf die Unschärfen für die linearisierte Gravitation zu sprechen, erwähnen die Unschärferelationen für Produkte von Feldgrößen nur in einem Nebensatz. Sie befassen sich mehr mit der fundamentalen Begrenzung der einzelnen Feldgrößen, die auf die Planklänge führt.

In den Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie schreiben sie:

„ one may conclude that a measurement taking into account the action of a curved background leads to stronger and more principle limitations on measurement of fields than the usual quasi-euclidian one”

Die gefundene Relation Gl. 82 ist im Einklang mit den Ergebnissen von Borzeszkowski und Treder.

¹¹ Siehe [5]

Ausblick:

Unsere Motivation war die Frage, ob es möglich ist quantenmechanische Konzepte wie Superposition und Verschränkung in die Gravitationstheorie zu übernehmen. Die Frage stellt sich da bislang immer noch nicht geklärt ist, ob das Gravitationsfeld ein klassisches Feld im Sinne der Quantenmechanik ist oder ob das Gravitationsfeld ebenfalls eine Quantisierung benötigt. In der historischen Entwicklung gab es den Standpunkt, dass eine Quantisierung der Gravitation nicht nötig wäre, da sich das Gravitationsfeld rein klassisch verhält. Diesen Standpunkt vertritt man heute weitgehend nicht mehr.

Trotzdem gibt es Konzepte die weiterhin auf einer klassischen Raumzeit basieren. So z.B. das Konzept des gravitativ induzierten Kollaps der Wellenfunktion nach Penrose, bzw. Diosi und Frenkel. Dabei ist vor allem Penrose hervorzuheben, da sein Konzept als Ursache für den Kollaps der Wellenfunktion explizit eine klassische Eigenschaft der Raumzeit angibt. So soll sich die Raumzeit bei einer quantenmechanischen Superposition von massiven Objekten gegen die Superposition zur Wehr setzen und diese zu einem Kollaps zwingen. Penrose gibt dafür keine explizite Theorie oder Modell an, sondern leitet eine mittlere Kollapszeit ab, innerhalb derer die Raumzeit den quantenmechanischen Zustand zum Kollabieren bringt. Die Kollaps-Modelle von Penrose und Diosi werden im zweiten Teil noch ausführlich diskutiert.

Diesen Konzepten gegenüber stehen Überlegungen die Raumzeit zu quantisieren. Dafür gibt es verschiedene Ansätze, deren Diskussion ebenfalls den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Unsere Überlegung ist es quantenmechanische Konzepte in die Gravitationstheorie zu übernehmen. Darunter Konzepte wie Superposition und Verschränkung und darauf basierende Anwendungen wie „Entanglement swapping“¹² oder Teleportation.

Die Herleitung der Unschärferelationen nach Heisenberg, bzw. Bohr und Rosenfeld hat dazu nur eine kleine Vorarbeit geleistet und kann nur als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen dienen.

¹² „Entanglement swapping“ ist die Übertragung eines Verschränkungszustandes mittels verschränkter Teilchen. Dabei werden zwei Teilchen miteinander verschränkt, die niemals direkt in Wechselwirkung gekommen sind.

Als Abschluss dieses Kapitels sei auf eine Arbeit¹³ von Suraj Gupta hingewiesen, der eine Quantisierung der linearisierten Gravitationstheorie durchgeführt hat. Dies kann als Basis für die Übernahme von quantenmechanischen Konzepten in dieser Näherung dienen.

¹³ Siehe [6]

Interferometer mit gravitativem Kollaps

Im Folgenden soll nun ein weiteres Gedankenexperiment besprochen werden, mit dem sich verschiedene zuvor erwähnte Modelle überprüfen lassen und dass zu einem besseren Verständnis beim Zusammenwirken von Gravitation und Quantenmechanik führen kann.

Das Mach-Zehnder Interferometer

Das Mach-Zehnder Interferometer geht auf die den Prager Physiker L.Mach und den Züricher Physiker L.Zehnder zurück. Es ist eine Fortführung des Jamin-Interferometers und wurde 1892 vorgestellt.

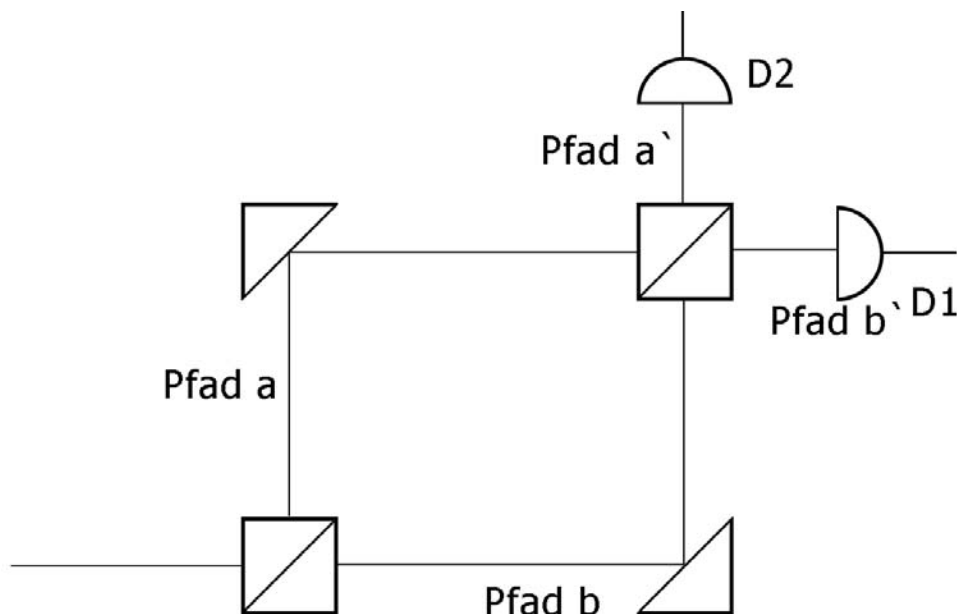


Abbildung 8

Der Vorteil zu allen vorangegangenen Interferometern (z.B. dem Jamin-Interferometer) besteht nun in der Tatsache, dass die beiden Interferometer-Pfade beliebig groß gemacht werden können, ohne die Beschränkung der Geometrie der Glasplatten. Zehnder beschreibt seinen Apparat wie folgt¹⁴:

„Mein Interferenzrefraktor unterscheidet sich von den Jamin'schen prinzipiell dadurch, dass die reflektierenden Flächen nicht zu Paaren fest miteinander verbunden, sondern alle gegen einander beweglich

¹⁴ Siehe [7]

sind, so dass man die interferierenden Strahlen a und b nach Bedarf beliebig auseinander- oder zusammenrücken kann; indessen wird bei einem übermäßig großen Abstand derselben der Sichtbarkeit der Interferenzstreifen durch die Unvollkommenheit der Glasplatten eine Grenze gesetzt.“

Die Funktionsweise des Mach-Zehnder¹⁵ Interferometers basiert auf der Interferenz der beiden Teilstrahlen, die an den beiden Ausgängen des Interferometers komplementäre Interferenzbilder zeigen. Diese Interferenzbilder sind in der Praxis mehr oder weniger ideale Linien- und Ringmuster, je nach Güte des optischen Aufbaus. Im Fall des idealisierten Mach-Zehnder Interferometers betrachtet man nur die Strahlen auf der optischen Achse. Für eine Analyse des realen Falles verweise ich auf [8].

Das Mach-Zehnder Interferometer hatte früher vor allem praktische Anwendung im Bereich der Analyse. Heute liegt die Bedeutung eher im Bereich der Grundlagenforschung der Quantenmechanik. Der Grund darin liegt im Übergang zu einzelnen Quanten. Im klassischen Mach-Zehnder Interferometer hat man es immer mit Licht in hoher Intensität und damit mit einer Vielzahl von Photonen zu tun. Diese verhalten sich in Summe den optischen Gesetzen entsprechend. Betrachtet man jedoch das Verhalten von einzelnen Photonen so kommt man in den Gültigkeitsbereich der Quantenmechanik. Das klassische Bild der Lichtwelle, die im Interferometer aufgespaltet wird und am Ausgang zu einem Interferenzbild führt ist beim einzelnen Photon nicht mehr anwendbar. Wir müssen übergehen zur Quantenmechanik in der die Kopenhagen Interpretation dem einzelnen Photon einen geänderten Realitätsbegriff zuordnet, als es in der klassischen Physik üblich war. Wir betrachten dazu das Verhalten eines Photonenzustandes beim Durchlaufen des Interferometers:

Wir beschreiben ein einlaufendes Photon in einem beliebigen Zustand durch den Zustandsvektor $|A\rangle_0$. Der Zustand beschreibt ein einfallendes Photon auf dem Beamsplitter.

¹⁵ Der Apparat von Mach unterscheidet sich lediglich in seiner mechanischen Anbringung vom Aufbau von Zehnder. Mach hat die Spiegel auf einem Ring angebracht, welcher drehbar gelagert ist. Er führt dafür aber keine Begründung an. Es ist daher zu schließen, dass dies rein einen praktisch mechanischen Grund hatte. Aufgrund der nahezu zeitgleichen voneinander unabhängigen Entwicklung werden Interferometer dieser Art heute nach beiden Entwicklern benannt.

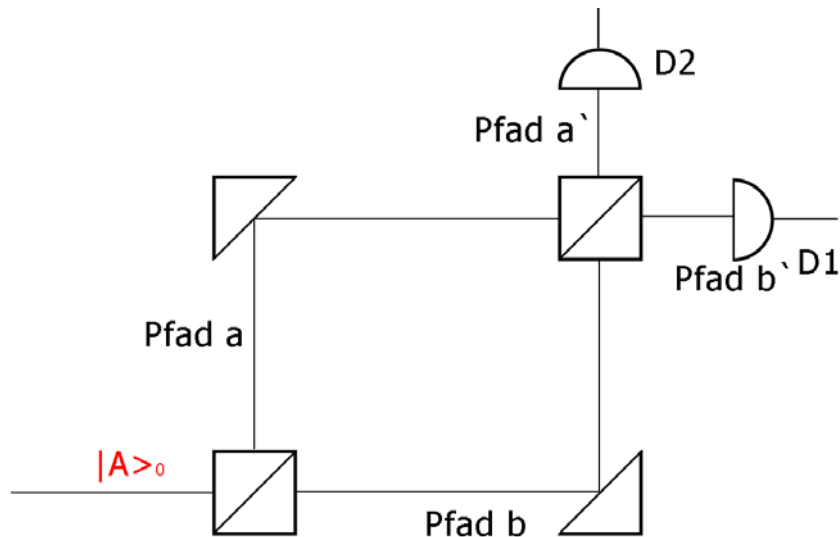


Abbildung 9

In Bezug auf die Ausbreitungsrichtung, die wir den Pfaden a und b zuordnen schreiben wir den Photonenzustand

$$|A\rangle_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |A\rangle_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gl. 86

Beim Eintreffen auf dem halbdurchlässigen Spiegel bietet sich dem Photon die Möglichkeit den Weg zu nehmen bei dem es reflektiert wird, oder den Weg bei dem es transmittiert wird. Der halbdurchlässige Spiegel ist durch den Hadamard Operator realisiert.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Gl. 87

Angewendet auf unseren einlaufenden Zustand ergibt sich:

$$H|A\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|A\rangle_a + |A\rangle_b)$$

Gl. 88

Im Allgemeinen sind die optischen Pfade a und b nicht gleich lang. Dadurch ergibt sich ein Phasenschub relativ zwischen den Pfaden. Dies äußert sich wie folgt:

$$\varphi H|A\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle_a + e^{i\varphi}|A\rangle_b)$$

Gl. 89

Ein weiterer Strahlteiler wird durch erneutes Anwenden des Hadamard Operators ausgedrückt. Wir indizieren nun mit den neuen Pfaden a' und b'

$$H \varphi H|A\rangle_0 = \frac{1}{2}[(|A\rangle_{a'} + |A\rangle_{b'}) + e^{i\varphi}(|A\rangle_{a'} + |A\rangle_{b'})]$$

Gl. 90

Durch Umformung erhalten wir.

$$|\psi\rangle = H \varphi H|A\rangle_0 = \frac{1}{2}[(1 + e^{i\varphi})|A\rangle_{a'} + (1 - e^{i\varphi})|A\rangle_{b'}]$$

Gl. 91

Dieser Zustand beschreibt das Photonverhalten nach dem zweiten halbdurchlässigen Spiegel in den Pfaden a' und b'. Wir wollen jetzt die Erwartungswerte in den jeweiligen Ausgängen bestimmen. Für den Ausgang im Pfad a', also den Detektor D2 folgt.

$$|\langle A|_{a'}\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}|1 + e^{i\varphi}|^2$$

Gl. 92

Man kann Gl.92 umformen zu

$$|\langle A|_{a'}\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}(1 + 1 + 2 \operatorname{Re}(e^{i\varphi})) = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$$

Gl. 93

Für den Ausgang im Pfad b, also Detektor D1 folgt:

$$|\langle A|_{b'}\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}|1 - e^{i\varphi}|^2$$

Gl. 94

Durch Umformung erhalten wir

$$|\langle A |_{b'} \psi \rangle|^2 = \frac{1}{4} (1 + 1 - 2 \operatorname{Re}(e^{i\varphi})) = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi)$$

Gl. 95

Wir stellen bei Vergleich der Erwartungswerte in den Ausgängen fest, dass die zueinander phasenverschoben sind. Gehen wir von einem Phasenschub $\varphi = 0$ aus haben wir eine Detektionswahrscheinlichkeit von 1, also 100% im Detektor D2.

Im Detektor D1 eine Detektionswahrscheinlichkeit von 0%. Das bedeutet, dass Teilchen immer im Detektor D2 gemessen werden.

Den Phasenschub durch die Reflexion an den Spiegeln haben wir vernachlässigt, da dieser symmetrisch in beiden Armen auftritt und daher in der Gesamtberechnung nur einen totalen Phasenschub bewirkt, der aber im Prinzip nicht messbar und daher für uns nicht von Bedeutung ist.

Weiters haben wir die transversale Ausdehnung des einfallenden Strahles nicht berücksichtigt. Im realen Experiment werden wir am Ausgang nicht punktuelle Klicks im Teilchendetektor messen, sondern auf einem Schirm ausgedehnte Interferenzringe beobachten können, wobei es jedoch verbotene Bereiche gibt in denen keine oder kaum Teilchen gemessen werden.

Durch Messung der Weginformation kann nun das Interferenzmuster zerstört werden. Dieses Verhalten eines Quantensystems wird beim „Quanteneraser“¹⁶ ganz deutlich demonstriert, wobei hier sogar gezeigt wird, dass die Weginformation wieder gelöscht werden kann um das Interferenzmuster wieder sichtbar zu machen.

Wir wollen die Eigenschaft, dass die Weginformation die Interferenz zerstört ebenfalls in unserem Gedankenexperiment nutzen. Zuvor müssen jedoch noch Alternativmodelle zur Quantenmechanik besprochen werden, die im Rahmen des Gedankenexperimentes getestet werden können.

¹⁶ Siehe [18]

Kollapsmodelle

Die Quantenmechanik ist sicher eine der erfolgreichsten Theorien der Physik. Trotzdem ist die Quantenmechanik und vor allem die Interpretation dieser bis heute ein umstrittenes Gebiet. In den meisten Fällen setzt die Kritik beim sogenannten Messpostulat der Quantenmechanik an. Die Quantenmechanik beschreibt mit ihrem Formalismus nicht, warum ein bestimmter Messwert bei einer Messung als Ergebnis erscheint. In der Messung wird nur ein einziger Messwert aus den möglichen Eigenwerten der Observablen gefunden. Das Messpostulat besagt, dass sich der Zustand nach der Messung in einem Eigenzustand befindet. Für den Zustand muss deshalb ein Kollaps stattfinden, der einen nichtunitären Prozess darstellt und damit nicht der Schrödinger-Zeitentwicklung unterliegt.

In der Kopenhagen Deutung der Quantenmechanik ist der Kollaps der Wellenfunktion kein realer Kollaps. Die Wellenfunktion repräsentiert unsere Information über das System. Der Kollaps ist nun also nicht physikalisch, sondern bezieht sich lediglich auf unser Wissen über den Zustand.

Es gibt nun Kritiker der Quantenmechanik die diesen Kollaps und auch den Zustand selbst als physikalisch real ansehen. Die Vertreter dieser Kollapsmodelle sind überzeugt, dass es sich beim Kollaps um eine physikalische Veränderung des Zustandes handelt.

Penrose-Kollapsmodell

Roger Penrose formulierte ein Kollapsmodell¹⁷ in dem er den Kollaps der Wellenfunktion bedingt durch die Gravitation erklärt. Penrose führt dies auf fundamentale Probleme zurück die entstehen, wenn man Superpositionen von massiven Objekten im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie betrachten möchte. Ausgangspunkt ist für ihn jedoch das Messproblem der Quantenmechanik. Er schreibt¹⁸:

“One of the most puzzling features of quantum entanglement is that, according to the standard quantum-mechanical procedures of unitary evolution, entanglements will have a tendency simply to spread throughout the universe, so that it becomes exceedingly unlikely that any given quantum state can be treated as unentangled. The answer to

¹⁷ Siehe [9] und [10]

¹⁸ Siehe [10] Seite 1931

this problem is essentially bound up with the measurement problem of quantum mechanics.”

Für Penrose liegt der Grund im Messproblem der Quantenmechanik, dass für ihn auf unbefriedigende Weise gelöst ist. Er legt in Folge die 4 möglichen philosophischen Standpunkte dar wie mit dem Messproblem zu verfahren ist:

Die Kopenhagen Deutung, den Dekohärenzansatz, die Viel-Welten-Interpretation oder eine neue Theorie.

Penrose schreibt:

“(1) According to the ‘Copenhagen’ viewpoint of Niels Bohr, the state vector is not considered to represent a quantum-level ‘reality’, but merely the ‘state of mind’ of the experimenter. On this view, the ‘jumping’ that occurs in the procedure of state-vector reduction is considered to be merely the result of a discontinuous change in the state of knowledge of the experimenter and not a physical change to which can be attributed a physical reality.”

Penrose betrachtet hier die vor allem die Informationsinterpretation der Kopenhagen Deutung, derzufolge die Wellenfunktion die Information des Beobachters über ein System repräsentiert.

Unserer Ansicht nach stellt der Dekohärenzansatz keine befriedigende Lösung des Messproblems dar, da die Dekohärenz nur die Unterdrückung der nichtdiagonalen Elemente erklären kann, aber nicht den Mechanismus der bei der Messung für die Auswahl eines bestimmten Diagonalelements verantwortlich ist. Den Dekohärenzansatz und die Viel-Welten-Interpretation möchten wir im Rahmen dieser Arbeit nicht näher behandeln.

Unter neuen Theorien versteht Penrose:

“Finally, it may be considered that the conventional formulation of quantum mechanics is provisional, and some new theory is needed in order to make real sense of the process of measurement. ...

...According to some of these (such as the de Broglie-Bohm theory (cf. de Broglie 1956; Bohm 1952; Bohm & Hiley 1994)), the new formalism is not considered to have any observable consequences different from standard quantum mechanics, but according to others, there would, in

principle at least, be experiments to distinguish the new theory from standard quantum mechanics.”

Für Penrose ist die experimentelle Bestimmbarkeit eines Unterschieds zur Standardquantenmechanik ein entscheidendes Kriterium, welches ihn dazu bringt ebenfalls den Ansatz der Bohm-deBroglie Interpretation als unbefriedigend zu betrachten.

Für Ihn ist der entscheidende Punkt ein Zusammenhang des Messproblems mit den Schwierigkeiten, die mit der Verbindung zwischen allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik auftreten. Im Gegensatz zur Ghirardi, Rimini, Weber und Pearle, die ein ähnliches Modell anführen, aber in der Wahl der Ursache für den Kollaps ein unbestimmtes Feld anführen, ist Penrose sehr konkret und stellt fest:

“To be more specific, I belong to the general school of thought that maintains that the phenomenon of quantum state reduction is a gravitational phenomenon, and that essential changes are needed in the framework of quantum mechanics in order that its principles can be adequately married with the principles of Einstein's general relativity.”

Penrose führt nun im folgenden aus wie sein Modell aufgebaut ist. Er geht davon aus, dass eine Superposition von zwei Zuständen immer eine Superposition von Raumzeitgeometrien zu Folge haben müsste. Penrose geht davon aus, dass so ein Zustand nicht stabil sein darf. Er ordnet der Superposition eine gravitative Selbstenergie zu, die der Differenz der in Superposition befindlichen Massen entspricht.

Penrose schreibt¹⁹:

“This estimate turns out to be the gravitational self-energy of the difference between the mass distributions of the two superposed states.”

Dieser gravitativen Selbstenergie ordnet Penrose über die Energie-Zeitunschärfe eine charakteristische Zeit zu, in der der Zustand in einen der beiden Eigenzustände kollabiert.

$$\tau = \frac{\hbar}{E_g}$$

Gl. 96

¹⁹ Siehe [10] Seite 1933

Indem wir das Newtonsche Potential für eine räumliche Superposition einer Masse m mit einem relativen Abstand d einsetzen, erhalten wir für die Kollapszeit:

$$\tau_{PR} = \frac{\hbar d}{4\pi G m^2}$$

Gl. 97

Das Penrose Modell sagt also für Superpositionen aus massiven Objekten einen Kollaps voraus. Begründet wird dieser durch die Eigenschaft der Raumzeit eindeutig zu sein und damit keine Superpositionen zuzulassen. Die Berechnung erfolgt trotzdem im Rahmen der Newton'schen Näherung.

Um ein besseres Verständnis zu geben, wollen wir den genauen Weg der Herleitung für die Kollapszeit betrachten:

Penrose geht aus von einer Newton-Cartan Raumzeit, die sich dadurch auszeichnet, dass sich eine universelle Zeitkoordinate einführen lässt. In dieser Raumzeit lässt er nun eine Masse m in Superposition von zwei Orten sein. Dies führt auf eine Energieunschärfe aus der Penrose die Lebensdauer des Zustandes abschätzen will. Die Energieunschärfe schätzt Penrose durch Punktidentifikation der zwei Raumzeiten, in denen die Masse jeweils an einem der beiden möglichen Orte ist, ab.

$$\frac{1}{G} |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2$$

Gl. 98

Gl.98 stellt nun einen Skalar dar, der invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen ist. \vec{F}_1 stellt die Kraft pro Masseneinheit, also die Beschleunigung, einer Testmasse im Feld der Masse m in der einen Raumzeit dar. \vec{F}_2 ist dann die zugehörige Beschleunigung in der anderen Raumzeit dar.

Die Beschleunigungen drückt Penrose nun durch die zugehörigen Potentiale aus:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -\vec{\nabla}\Phi_1 \\ \vec{F}_2 &= -\vec{\nabla}\Phi_2\end{aligned}$$

Gl. 99

Wobei $\vec{\nabla}$ der Nabla Operator ist, für den gilt:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Gl. 100

Um die Energieunschärfe abzuschätzen integriert Penrose den Skalar aus Gl.98 über den gesamten Raum, und benutzt dabei die Potentiale. ΔE steht hier als Symbol für die Unschärfe der Energie und hat nichts mit dem Laplace-Operator zu tun.

Penrose leitet weiter ab:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{G} \int (\vec{\nabla} \Phi_1 - \vec{\nabla} \Phi_2)^2 d^3 \vec{r} \\ &= -\frac{1}{G} \int (\Phi_1 - \Phi_2) (\vec{\nabla}^2 \Phi_1 - \vec{\nabla}^2 \Phi_2) d^3 \vec{r} \end{aligned}$$

Gl. 101

Indem wir nun die Poissongleichung für das Gravitationsfeld benutzen

$$\Delta \Phi = 4 \pi G \rho_i,$$

Gl. 102

erhalten wir durch Einsetzen:

$$\Delta E = \frac{1}{G} \int (\Phi_1 - \Phi_2) (\rho_1 - \rho_2) d^3 \vec{r}$$

Gl. 103

Unter Verwendung der integralen Poissongleichung

$$\Phi = G \int \frac{\rho_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}'$$

Gl. 104

Können wir für die Energieunschärfe weiter schreiben:

$$\Delta E = \frac{1}{G} \int \int \frac{(\rho_1(r) - \rho_2(r))(\rho_1(\vec{r}') - \rho_2(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r} d^3 \vec{r}'$$

Gl. 105

Die Energieunschärfe ist also nach Penrose gerade die Differenz der Wechselwirkungsenergien der Dichteverteilungen in ihrem eigenen Gravitationsfeld.

Nun benutzt Penrose die Energie-Zeitunschärfe

$$\Delta E \Delta T \approx \hbar$$

Gl. 106

und schätzt damit die Lebensdauer eines Zustandes in Superposition ab:

$$\Delta T = \frac{\hbar}{\frac{1}{G} \int \int \frac{(\rho_1(r) - \rho_2(r))(\rho_1(\tilde{r}) - \rho_2(\tilde{r}))}{|r - \tilde{r}|} d^3\vec{r} d^3\vec{\tilde{r}}}$$

Gl. 107

Angewendet auf die Superposition einer sphärisch verteilten homogenen Massenverteilung liefert uns dies die bereits angeführte Kollapszeit nach Penrose

$$\tau_{PR} = \frac{\hbar d}{4 \pi G m^2}$$

Gl. 108

Wobei d der Abstand der Schwerpunkte der in Superposition befindlichen Massen ist. Für die sphärischen Massen also der Abstand der Mittelpunkte.

Zur Sichtweise von Messungen schreibt Penrose²⁰:

“As a final comment, it should be made clear that, according to the state-reduction scheme of this section, all quantum measurements arise because of the instability of quantum superpositions involving significant mass displacements. In various circumstances, where a piece of physical apparatus is involved in making the measurement, the mass movement would occur in the measuring apparatus itself.”

Über mögliche reale Experimente, darunter den Vorschlag von Penrose, werde ich in einem späteren Kapitel berichten.

²⁰ Siehe [10] S.1935

Diosi-Kollapsmodell

Lajos Diosi hat ebenfalls ein eigenes Kollapsmodell²¹ erstellt, das dem Penrose-Modell sehr ähnlich ist. Diosi gibt als Ursache für den Kollaps der Wellenfunktion ähnlich zu Penrose das Gravitationsfeld an. Wobei Diosi rein mit dem newtonschen Gravitationsfeld arbeitet, während Penrose vorwiegend mit der allgemeinen Relativitätstheorie in der Newton-Cartan Näherung rechnet. Während bei Newton Raum und Zeit unabhängig von der Materie sind, werden innerhalb der Newton Cartan Näherung Materie und Raum nicht unabhängig voneinander angenommen. Trotzdem wird eine absolute Zeit eingeführt.

Diosi schreibt²²:

“In both localization and decoherence mechanisms, the relevant quantity is the newtonian interaction between two mass densities corresponding to two configurations of the macro objects that form our quantum system.”

Diosi benutzt die Schrödinger-Newton Gleichung, eine nichtlineare Erweiterung der Schrödingergleichung, die für die Lokalisierung der Zustände verantwortlich ist. Er schreibt:

“The studies of our interest concentrated on two inter-related elements of classical behaviour of a rigid macro-object: precise center of mass localisation and decoherence (decay) of superposition between separate positions. To guarantee the first, the attractive Newtonian self-consistent gravitational field was introduced into the Schrödinger equation. To guarantee the second, a universal decay mechanism was postulated for superpositions between separate positions, scaled by the difference between the corresponding Newtonian field strengths.”

Als ausschlaggebend für beide Prozesse sieht er das newtonsche Wechselwirkungspotential.

$$U(X, X') = -G \int \frac{f(r, X) f(r', X')}{|r - r'|} dr dr'$$

Gl. 109

²¹ Siehe [11]

²² Siehe [11] Seite 2990

Dabei repräsentieren die X und X' die beiden Massen-Konfigurationen – die im Fall sphärischer Symmetrie bzw. punktförmiger Massen mit den Schwerpunkt-Koordinaten zusammenfallen, – die den Superpositions-zustand bilden, und sind nicht mit Ortskoordinaten zu verwechseln. Die Funktionen $f(r, X)$ sind die Dichte in der jeweiligen Konfiguration. Dieses Wechselwirkungspotential wird nun in der Schrödinger-Newton Gleichung verwendet um die Lokalisation der Masse zu definieren.

Nach Diosi gibt dies aber noch keine Antwort auf den Prozess des Kollapses. Für den Kollaps macht Diosi die von-Neumann-Newton-Gleichung verantwortlich. Die von-Neumann-Newton Gleichung ist eine nichtlineare Erweiterung der von-Neumann Gleichung, die ebenfalls mit dem Wechselwirkungspotential erweitert werden.

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{U(X, X) + U(Y, Y) - 2U(X, Y)}{2\hbar} \hat{\rho}(X, Y)$$

Gl. 110

Die herkömmliche von-Neumann Gleichung verzichtet einfach auf den letzten Term mit den Wechselwirkungspotentialen.

Allerdings ist sie nicht mit der Schrödinger-Newton Gleichung ident, wie das bei Schrödinger Gleichung und von-Neumann Gleichung der Fall ist. Die Schrödinger Gleichung und die von-Neumann Gleichung können direkt ineinander übergeführt werden. Aus der von-Neumann-Newton Gleichung folgt ein Kollaps mit einer charakteristischen Zeit.

$$\tau_{DJ} = \frac{2\hbar}{2U(X, Y) - U(X, X) - U(Y, Y)}$$

Gl. 111

Für eine sphärisch verteilte Masse M homogener Dichte mit dem Radius R bestimmt Diosi in Folge die Kollapszeit²³. Dabei reduzieren sich die Funktionen in Abhängigkeit der Konfigurationen X, Y auf Funktionen in Abhängigkeit der Schwerpunktskoordinaten der sphärisch verteilten Massen.

Dabei entwickelt er das Wechselwirkungspotential nach $|x' - x|$.

²³ Siehe [11] S.2992-S.2993

$$U(x, x') = U_0 + \frac{1}{2} M \omega_g^2 |x' - x|^2$$

Gl. 112

U_0 ist ein konstantes Potential. ω_g^2 bezeichnet er hierbei als Gravitationsfrequenz

$$\omega_g^2 = \frac{4\pi}{3M} G \int f^2(r) dr.$$

Gl. 113

Es ergibt sich also für homogene Massenverteilungen

$$\tau_{DJ} = \frac{2\hbar R^3}{GM^2} \frac{1}{|x - y|^2}.$$

Gl. 114

Dabei ist R der Radius der sphärischen Massenansammlung, und $|x - y|$ der räumliche Abstand der Superpositionen.

Diosi sieht sein Kollapsmodell als Zwischenlösung und hofft auf die Behandlung im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie, da ja bisher nur über Änderungen des quantenmechanischen Konzepts vorgenommen wurden und die Gravitation unmodifiziert gelassen wurde. Er schreibt²⁴:

“... we stress that the Newtonian mechanisms are responsible for the emergent classical behaviour of the massive non-relativistic quantised matter then the intellectual perspective includes not only the modification of the standard quantum mechanics but the refinement of our concept of gravity and space-time. The Schrödinger-Newton and the von-Neumann-Newton eqs. represent the modification of quantum mechanics. So far we have not modified or refined our concept of gravity. This perspective may overcome the encountered difficulties of the modified quantum equations.”

Ghirardi, Rimini, Weber-modell

Ghirardi, Rimini und Weber (GRW) haben ein Modell postuliert²⁵ in dem ebenfalls der quantenmechanische Zustand objektiv kollabiert.

²⁴ [11] S. 2995

²⁵ Siehe [13]

Dieser Kollaps erfolgt vollkommen spontan. Das GRW Modell ist mit Sicherheit das Kollapsmodell mit dem am besten ausgearbeiteten Formalismus. Wir wollen darauf nicht im Detail eingehen, sondern lediglich die für uns bedeutenden Ergebnisse übernehmen.

GRW sehen die Probleme der Quantenmechanik wie die Autoren der anderen Kollapsmodelle verbunden mit der Möglichkeit von makroskopischen Superpositionen. Sie schreiben:

“Almost all difficulties can be tracked back to the problem of accounting for the behaviour of macroscopic objects and for their interaction with microscopic ones, and are strictly related to the occurrence of linear superpositions of macroscopically distinguishable states of a macroscopic system.”

Als Lösung bieten GRW einen stochastischen Prozess an der den quantenmechanischen Zustand in bestimmten Zeitskalen und Längenskalen kollabieren lässt. Zwischen den Sprüngen verhält sich das System unitär nach der Zeitentwicklung der Schrödingergleichung. Das Modell und seine Parameter sind so gewählt, dass die üblichen quantenmechanischen Vorhersagen für mikroskopische Systeme erfüllt werden, aber sich für makroskopische Systeme von den Vorhersagen der Quantenmechanik unterscheiden. Der Grund für die Lokalisierung wird nicht so genau angeführt wie es bei Diosi und Penrose der Fall ist.

“We do not consider here the problem of the physical origin of this localizations for microscopic systems, but we simply postulate that they occur.”

Das Model von Ghirardi, Rimini und Weber fügt der dynamischen Entwicklung Zusatzterme hinzu. Dies sind stochastische Terme, die einem Lokalisationsprozess entsprechen.

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t) \right] - \sum_{i=1}^N \lambda_i (\hat{\rho}(t) - T_i[\hat{\rho}(t)])$$

Gl. 115

Hierbei sind λ_i die Lokalisierungsfrequenzen (siehe unten), $T_i[\rho(t)]$ der stochastische Lokalisierungsprozess, \hat{H} der Hamiltonoperator und $\hat{\rho}(t)$ der Dichteoperator. Dazu schreiben GRW²⁶:

²⁶ Siehe [13] S.479

“If one wants to introduce such processes, one either uses projection operators on definite space intervals (and introduces an arbitrary discretization of space) or resorts to the more general formalism mentioned above, based on the concept of operational valued measures (OVM).”

Für den stochastischen Term der ein solches OVM repräsentiert geben sie an:

$$T_i[\hat{\rho}(t)] = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\hat{q}_i - x)^2} \hat{\rho} e^{-\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\hat{q}_i - x)^2}$$

Gl. 116

Dabei ist α ein Parameter der die Skala der Lokalisierung festlegt. \hat{q}_i ist der Ortsoperator des i-ten Teilchens.

Indem man nun annimmt, dass die Lokalisierungsfrequenzen für alle Teilchen annähernd gleich sind erhält man

$$\lambda_{macro} = N \lambda_{micro}.$$

Gl. 117

Der Wert α und die Lokalisierungsfrequenz λ erlauben eine Skalierung der Theorie um die Vorhersagen an die Quantenmechanik für mikroskopische Systeme anzupassen.

GRW wählen

$$\lambda_{micro} \approx 10^{-16} s^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \approx 10^{-5} cm.$$

GRW zufolge wird jedes Teilchen mit einer bestimmten Frequenz lokalisiert. Dies führt zu einer Zeitskala in der ein Zustand kollabiert

$$\tau_{GRW} = \frac{10^{16}}{N} s.$$

Die Größe N ist die Teilchenzahl. Damit ist ein Zustand makroskopischer Natur, d.h. mit vielen Konstituenten auch stärker von diesem stochastischen Prozess betroffen.

Diese Zeitskala ist postuliert und folgt aus keiner zugrunde liegenden Theorie. GRW können die Skala noch variieren, allerdings ist der

Spielraum durch Experimente mittlerweile drastisch eingeschränkt worden.

GRW schreiben²⁷:

“...we observe that, if one assumes that the localization frequencies λ_i of all microscopic constituents of a macroscopic body are of the same magnitude $\lambda_i = \lambda_{micro}$, the center of mass is affected by the same process with a frequency $\lambda_{macro} = N \lambda_{micro}$, where N is of the order of Avogadro's Number. As we shall see that will allow us to choose the parameters λ_{micro} and α in such a way that standard quantum mechanics holds exactly for extremely long times for microscopic systems, while for a macroscopic body possible linear superpositions of far away states are rapidly suppressed, the dynamical evolution of the center of mass position is the classical one and the internal structure remains unaffected.”

Das Messproblem wird im Rahmen des GRW Modells auch erklärt. Eine Messung ist eine Verschränkung eines Teilchens mit einem makroskopischen Apparat, d.h. einer Anordnung von vielen Teilchen. Infolge der großen Teilchenzahl des Messapparats ist ein spontaner Kollaps hochgradig wahrscheinlich.

Für den Vergleich des Ghirardi Rimini Weber Modells mit den anderen Kollapsmodellen ist es sinnvoll die charakteristische Zeitskala zu verwenden.

Frenkel-Károlyházy Modell

A.Frenkel führt das Kollapsmodell von Karolyházy weiter aus in dem wiederum ähnlich zu Penrose die Gravitation verantwortlich für den spontanen Kollaps von Zuständen ist. Penrose und Karolyházy sehen beide die Ursache in der Unverträglichkeit der Raumzeit mit quantenmechanischen Superpositionen, unterscheiden sich aber im mathematischen Konzept Ihrer Abschätzung.

Frenkel schreibt über die Arbeit Karolyházy's²⁸:

„First, he noticed that the incompatibility between the sharply determined structure of the Einsteinian space-time on the one hand,

²⁷ Siehe [13] S.480

²⁸ Siehe [17] S.1

and the quantum mechanical indeterminacies of the positions and of the momenta of the bodies determining that structure on the other hand, can be lifted if one associates a small amount of indeterminacy with the space-time structure.”

Die von Karolyhazy erwähnte Unschärfe der Raumzeit bewirkt eine Unschärfe in den relativen Phasen der Wellenfunktion die in dieser Raumzeit propagiert. Dadurch kommt es zu einem Verlust der Kohärenz. Die Bedingung für den Kohärenzverlust gibt Frenkel wie folgt an:

$$\Delta_{\phi}(x, x') \geq \pi$$

Gl. 118

Ist also die relative Phase $\Delta_{\phi}(x, x')$ der Wellenfunktion zwischen zwei Punkten größer als π so spricht man von einem Verlust von Kohärenz. Den örtlichen Bereich in dem der relative Phasenschub kleiner als π ist, definiert Frenkel als Kohärenzzelle des Teilchens. Er schreibt wie folgt:

„Thus a coherence cell of a microparticle is a sphere of a diameter a_c ...“

$$\Delta_{\phi}(a_c) = \pi$$

Gl. 119

Nach längerer Ableitung, die wir hier nicht ausführen, erhält Frenkel für die Größe der Kohärenzzelle:

$$a_c \approx \left(\frac{L}{\Lambda}\right)^2 L$$

Gl. 120

Wobei L die Compton-Wellenlänge des Teilchens ist und Λ die Planklänge.

Für makroskopische Objekte scheint es sehr komplex zu die relative Phase zu berechnen.. Nach Frenkel und Karolyhazy lässt sich aber überraschenderweise eine gute Abschätzung finden ²⁹:

“A salient point hinting at the relative simplicity of the situation, is that the wave function of an isolated solid body expands practically only in the center of mass coordinate subspace. ... Therefore in very good approximation, in $\Delta_{\phi}(x, x') = \pi$ only the center of mass coordinates play a role.”

²⁹ Siehe [17] S.10

Weiters zeigt sich das die Kohärenzzelle eines homogenen sphärisch symmetrischen Körpers ebenfalls symmetrisch ist. Für nichtsymmetrische Anordnungen von Teilchen werden sich entsprechend komplex geformte Kohärenzzellen ergeben.

Überschreitet die räumliche Ausdehnung eines Zustandes die Größe einer Kohärenzzelle um ein bestimmtes Maß, so findet eine stochastische Reduktion der Wellenfunktion auf die Größe der Kohärenzzelle statt. Diese stochastische Reduktion entspricht dem spontanen Kollaps der Quantenmechanik, wobei eben Karolyhazy und Frenkel einen Mechanismus angeben. Für diesen Kollaps gibt Frenkel eine Zeitskala an:

$$\tau_{FR} = \frac{\hbar^3}{G^2 M^5}$$

Gl. 121

Die Zeitskala ist für ein gaußartiges Wellenpaket gerechnet, wir wollen diese Zeitskala jedoch trotzdem stellvertretend für das Modell heranziehen.

Das Gedankenexperiment

Ich der Folge möchte ich ein Gedankenexperiment aufstellen, in dem wir ein Mach-Zehnder Interferometer für massive Teilchen annehmen werden.

Dabei bringen wir einen Körper mit der Masse m in das Zentrum des Interferometers. Das interferierende Teilchen wird in eine räumliche Superposition des oberen und unteren Pfades gebracht.

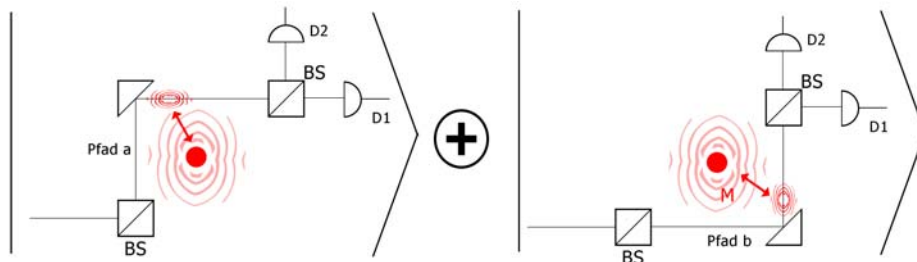


Abbildung 10

Wir werden eine Pfaddetektion mittels Gravitation durchführen und damit verschiedene Modelle zumindest hypothetisch testbar machen.

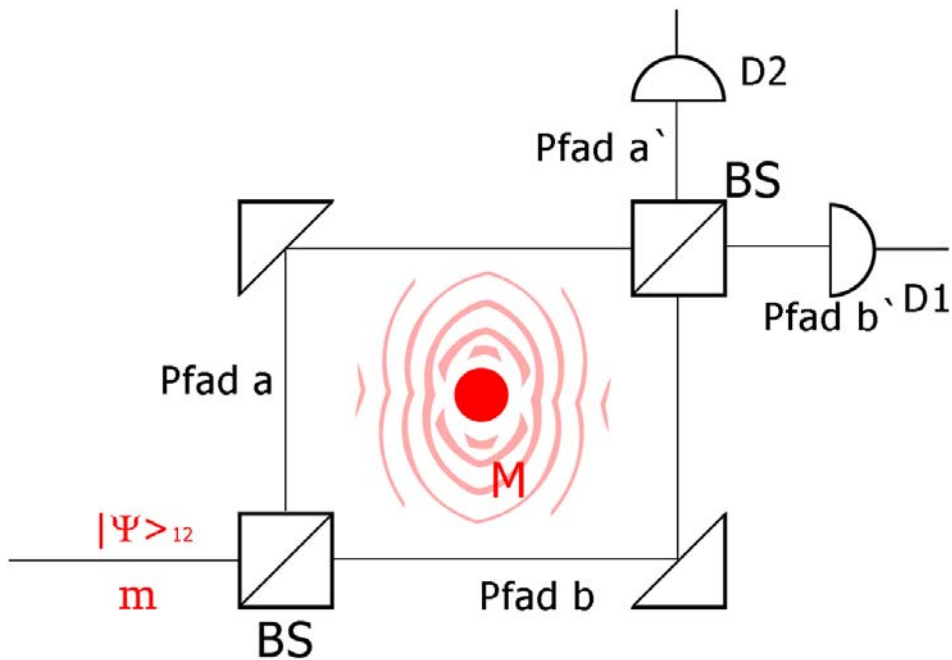


Abbildung 11

Wir benutzen eine Mach-Zehnder Anordnung wie bereits vorher beschrieben und bringen eine Masse in das Zentrum des Interferometers. Der Impulsübertrag auf die Zentralmasse dient als Meßapparat auf gravitativem Weg für den Pfad des Teilchens.

Wir wollen nun abschätzen für welche Größenordnung von experimentellen Parametern in unserem Gedankenexperiment die Kohärenz am Ausgang des Interferometers durch gravitative Messung der Pfadinformation verloren gehen müsste. Diese Abschätzung bedient sich lediglich der gewöhnlichen Quantenmechanik.

Für die Zentralmasse muss die Unschärferelation erfüllt sein:

$$\Delta x \cdot \Delta p > \hbar$$

Gl. 122

Die räumliche Unschärfe des interferierenden Teilchens muss sehr viel kleiner sein als die räumlichen Dimensionen unseres Interferometers. Die Impulsunschärfe muss deutlich kleiner sein als der Impulsübertrag durch das Gravitationsfeld. Die Größe a ist die räumliche Dimension des Interferometers, also in etwa die Seitenlänge. Die Größe p_w ist der Impulsübertrag durch die gravitative Wechselwirkung. Unser Experiment muss also erfüllen:

$$\Delta x \ll a$$

$$\Delta p \ll p_w$$

Gl. 123

Wir nehmen für die Abschätzung an, dass das Schwerfeld der Zentralmasse M auf dem gesamten Interferometerarm gleich stark wirkt, und damit während der Flugzeit durch das Interferometer annähernd dieselbe Kraft wirkt. Wir erhalten daher für den Impulsübertrag:

$$p_w \approx m v_w$$

Gl. 124

mit

$$v_w \approx g \Delta t \approx \frac{GM}{a^2} \frac{2a}{v_m} \approx \frac{2GM}{a v_m}$$

Gl. 125

g ist die Beschleunigung der Masse. Somit ist der Impulsübertrag:

$$p_w \approx \frac{2GMm}{a v_m}$$

Gl. 126

Um die zweite Bedingung aus Gl. 123 zu erfüllen, muß gelten:

$$\frac{GMm}{av_m} \gg \Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x}$$

Gl. 127

Damit erhalten wir zusammen mit der ersten Bedingung aus Gl.123

$$\frac{GMm}{\hbar v_m} \gg \frac{a}{\Delta x} \gg 1.$$

Gl. 128

Wenn die Versuchsanordnung diese Bedingungen erfüllt, sollten wir Dekohärenz durch Messung der Pfadinformation erhalten. Es gibt nun Modelle, die von der Quantenmechanik abweichen und andere Vorhersagen treffen.

Man könnte von einem Modell ausgehen, in dem die Gravitation als klassisches Feld auf die Wellenfunktion wirkt. In so einem Fall würde das Mach-Zehnder-Interferometer die Kohärenz am Ausgang nicht verlieren, da die Wellenfunktion ja gleichmäßig über die Interferometerpfade verteilt ist. Ein konkretes Modell, das diesen Ansatz verfolgt ist die Schrödinger-Newton Gleichung.

Gemäß der Schrödinger-Newton Gleichung ist die Masse die einem Teilchen und seinem Wellenpaket zugeordnet wird räumlich mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\psi|^2$ verteilt. Dies würde für die Masse des Wellenpaketes bedeuten, dass die Masse über die beiden Interferometerpfade verteilt ist, und eine Messung der Pfadinformation durch Gravitation unter Umständen prinzipiell nicht möglich ist.

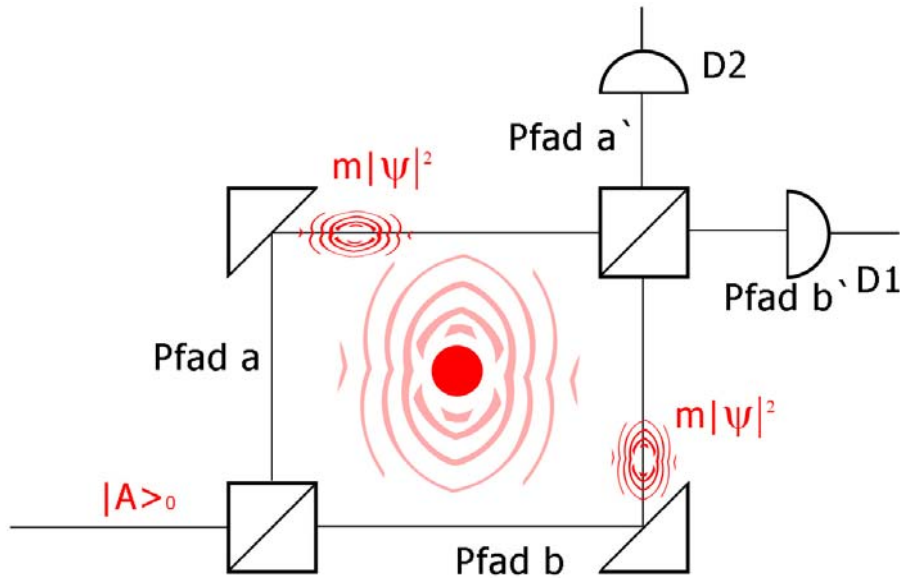


Abbildung 12

Dies stellt einen großen Gegensatz zur Quantenmechanik dar. Hier stellt sich die Situation ganz anders dar. Die Gravitation ist keine ausgezeichnete Wechselwirkung sondern funktioniert wie jede andere Wechselwirkung auch. Dies bedeutet eine Wechselwirkung auf die Teilcheneigenschaft der Masse. Wird über die Wechselwirkung die Pfadinformation zugänglich, verliert das quantenmechanische System seine Kohärenz und damit verschwindet die Interferenz im Ausgang.

Hier liegt also ein direkter Widerspruch zwischen der gewöhnlichen Quantenmechanik und den Modellen, die sich auf die Schrödinger-Newton Gleichung stützen vor. Die Schrödinger-Newton Gleichung ist inhärenter Bestandteil der Modelle von Penrose und Diosi. Eine zusätzliche Schwierigkeit in unserer Überlegung tritt aber noch auf, die wir später noch berücksichtigen werden.

Wir wollen nun die experimentellen Anforderungen quantitativ abschätzen. Dazu benutzen wir unsere Bedingungen Gl. 128 (wir nehmen an, dass $\frac{a}{\Delta x} \gg 1$) und formen nochmals um:

$$\frac{GMm}{v_m \hbar} > 1$$

Gl. 129

Die Wahl der Zentralmasse sollte so groß als möglich erfolgen, jedoch sollte die Zentralmasse in ein Interferometer mit realistischen

Abmessungen passen. Für die Abmessungen des Interferometers nehmen wir an

$$a \approx 10^0 m .$$

Diese Abmessung kommt zwar nicht in der Bedingung vor. Legt uns aber eine obere Grenze für die Zentralmasse fest. Daher wählen wir die Zentralmasse zu

$$M \approx 10^2 kg .$$

Für die Masse des interferierenden Teilchens wählen wir in Anlehnung an bereits erfolgte Experimente mit C60 Fullerenen³⁰ in dieser Größenordnung. Die momentanen Entwicklungen lassen jedoch hoffen, dass die Masse von makroskopischen Quantenobjekten weiter steigerbar ist. Daher nehmen wir für die Abschätzung an

$$m \approx 10^{-24} kg .$$

Die Geschwindigkeit der quantenmechanischen Systems durch das Interferometer geht ebenfalls ein. Wie wir in der Bedingung erkennen können ist es sinnvoll einen möglichst geringen Wert anzunehmen. Da die Geschwindigkeit der Teilchen bei herkömmlichen Teilchenquellen mit $v \approx 10^2 m s^{-1}$ relativ groß war, und schwer zu reduzieren ist, wählen wir den Wert für die Abschätzung zwar niedriger aber in einer realistischen Größenordnung von

$$v \approx 10^0 m s^{-1} .$$

§

Damit erhalten wir für unsere Bedingung Gl. 129 in quantitativer Auswertung:

$$10^1 > 1$$

Gl. 130

Die Bedingung ist nur sehr knapp erfüllt und es ist aufgrund weiterer experimenteller Parameter anzunehmen, dass zumindest einige Größenordnungen Reserve notwendig sind um hier einen Verlust von Kohärenz zu sehen. Da die Geschwindigkeit nicht mehr nennenswert kleiner gemacht werden kann, liegt die Hoffnung in einer signifikanten Erhöhung Masse des quantenmechanischen Systems.

³⁰ Siehe [15]

Zusammengefasst kann man also feststellen:

Die Quantenmechanik legt für eine experimentelle Situation wie oben beschrieben fest, dass es ein Limit experimenteller Parameter gibt ab denen die Kohärenz durch eine Wechselwirkung, in der die Pfadinformation ausgelesen wird, verloren geht. Dieses Limit gilt nach der Quantenmechanik für alle Arten von Wechselwirkungen, d.h. die Gravitation stellt hier keine Ausnahme dar.

Das Modell der Schrödinger-Newton Gleichung sagt eine räumliche Verteilung der Masse mit dem Quadrat der Wellenfunktion vorher. Man könnte nun davon ausgehen, dass die Masse des interferierenden Quantensystems gleichmäßig über die Interferometerarme verteilt ist, und es somit zu keiner Dekohärenz kommen kann. Man würde daher entgegen der Erwartung der Quantenmechanik keine Dekohärenz feststellen können, da das interferierende Quantensystem auf gravitativem Weg nicht zur Dekohärenz gebracht werden kann.

Diese Überlegung berücksichtigt aber nur das interferierende massive System und nicht die Zentralmasse. Unser Fall ist daher komplizierter. Wir haben ein interferierendes massives System, das in gravitativer Wechselwirkung mit einem massiven Objekt steht. Die Schwierigkeit besteht nun darin, dass man argumentieren könnte, dass die Einteilchen-Schrödinger-Newton Gleichung aus diesem Grund nicht anwendbar ist, da das interferierende massive System ein Mehrteilchensystem mit der Zentralmasse bildet. Es ist aber bisher nicht untersucht, wie sich oben beschriebenes System im Fall einer Mehrteilchen-Schrödinger-Newton-Gleichung mit Wechselwirkung verhalten sollte.

Es wäre daher notwendig zu untersuchen welche Vorhersage die Mehrteilchen Schrödinger Newton Gleichung für eine solche experimentelle Anordnung machen würde. Dies sollte Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein.

MZ-Interferometer zum Test von Kollapsmodellen

Wir haben vorher die Kollapsmodelle beschrieben und einen Weg gezeigt auf dem man möglicherweise zwischen Modellen, die die Schrödinger-Newton Gleichung benutzen, und der gewöhnlichen Quantenmechanik unterscheiden kann.

Es gibt eine Möglichkeit mit der man zwischen allen vorher beschriebenen Kollapsmodellen und der Quantenmechanik entscheiden kann. Dazu benutzen wir die gemeinsame Eigenschaft der Kollapsmodelle einen spontanen Kollaps für massive Teilchen vorherzusagen. Das Modell von Frenkel bzw. Karolyhazy benutzt dazu nicht die Schrödinger-Newton Gleichung, ebenso nicht das Modell von Ghirardi, Rimini und Weber. Trotzdem skaliert die charakteristische Kollapszeit in allen Modellen mit einer Potenz der Masse.

Eine Möglichkeit diese Modelle zu testen ist wieder ein Mach-Zehnder Interferometer.

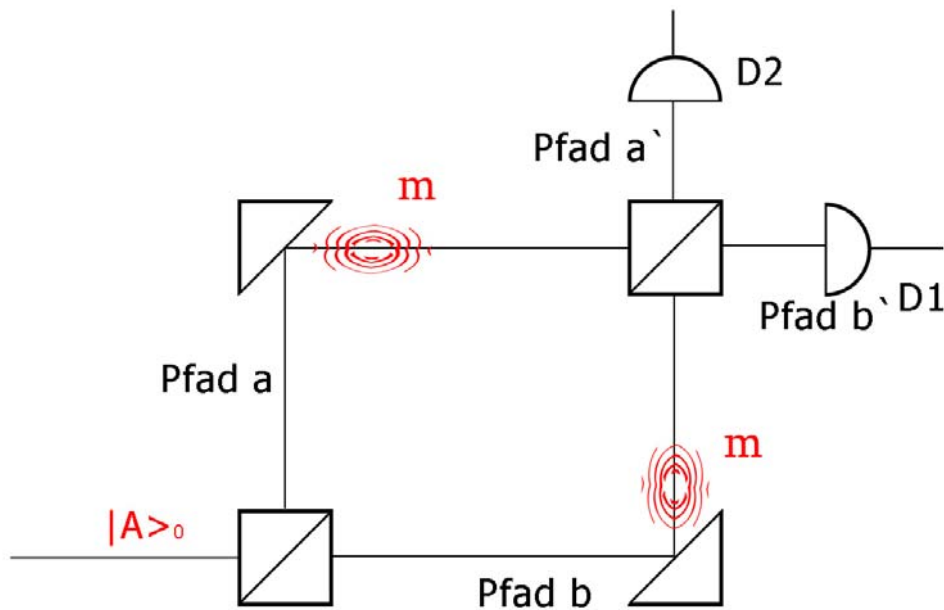


Abbildung 13

Wir benötigen hier keine Masse im Zentrum des Interferometers, sondern nehmen ein Mach-Zehnder Interferometer für massive Teilchen an. Für Neutronen gibt es bereits Mach-Zehnder Interferometer³¹. Wie wir später in der Auswertung der quantitativen Abschätzung sehen werden benötigen wir aber viel massivere Quantensysteme für einen Test.

³¹ Siehe [14] und andere Arbeiten von der Gruppe von Helmut Rauch

Wir wollen im Ausgang an den Detektoren wiederum Kohärenz beobachten. Dabei gehen wir jetzt von folgender Annahme aus, die in allen Kollapsmodellen gültig ist:

Ein räumlich delokalisierte quantenmechanische Zustand kollabiert nach einer charakteristischen Zeit.

Diese Annahme ist für alle beschriebenen Modelle gültig auch wenn sich die Ursachen in den Modellen durchwegs unterscheiden.

Wir gehen jetzt von einem Mach-Zehnder Interferometer aus in dem die Voraussetzungen gemäß der Quantenmechanik gegeben sind um Kohärenz zu sehen. Wir erzeugen durch das Interferometer eine räumliche Superposition, die einen Kollaps gemäß den Kollapsmodellen erwarten ließe. Dieser geschieht nach einer charakteristischen Zeit. Um die Interferenz im Interferometer zu verlieren muß folgende Bedingung gelten:

$$t_f \gg t_{\text{Kollaps}}$$

Gl. 131

Die Flugzeit des quantenmechanischen Systems durch das Interferometer muss signifikant größer sein als die Kollapszeit des zu testenden Kollapsmodells. Dann ist davon auszugehen, dass dadurch statistisch die meisten Teilchen Ihre Kohärenz verlieren werden und es zu keiner Interferenz am Ausgang des Interferometers kommen wird.

Für die Flugzeit im Interferometer gilt:

$$t_f = \frac{2a}{v} \approx \frac{a}{v}$$

Gl. 132

Wir nehmen nun als Näherung an, dass die Delokalisierung des massiven Quantensystems in der Größenordnung der Länge der Interferometerarme a ist. Die tatsächliche Situation ist natürlich eine zeitlich abhängige Delokalisierung mit einer maximalen Delokalisierung von $\sqrt{2} a$. Für eine Abschätzung reicht diese Näherung aber aus. v ist die Geschwindigkeit des quantenmechanischen Systems

durch das Interferometer. Also die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes.

Für die Kollapszeiten aus den verschiedenen Modellen gilt:

$$\begin{aligned}\tau_{PR} &= \frac{\hbar d}{4\pi G m^2} \\ \tau_{DJ} &= \frac{2\hbar R^3}{G M^2} \frac{1}{|x-y|^2} \\ \tau_{FR} &= \frac{\hbar^3}{G^2 M^5} \\ \tau_{GRW} &= \frac{10^{16}}{N} s\end{aligned}$$

Die Notationen der verschiedenen Modelle aus den Originalarbeiten wurden beibehalten. So ist die Größe d im Penrosemodell der räumliche Abstand der Superpositionen, während dies im Diosi Modell durch $|x-y|$ repräsentiert wird.

Indem wir nun die Zeiten in Gl.131 einsetzen, erhalten wir eine Relation, die unser Experiment erfüllen muss, um einen Kohärenzverlust durch spontanen Kollaps sichtbar zu machen. Der Übersicht halber habe ich die aus den Kollapszeiten folgenden Relationen in einer Tabelle angeordnet. R ist der Radius des gedachten Klumpens Materie den unser massives Quantensystem im Modell von Diosi repräsentiert. N ist dabei die Teilchenzahl des quantenmechanischen Systems.

	Penrose	Diosi	Frenkel-Karolyhazy	GRW
	$\tau_{PR} = \frac{\hbar d}{4\pi G m^2}$	$\tau_{DJ} = \frac{2\hbar R^3}{G M^2} \frac{1}{ x-y ^2}$	$\tau_{FR} = \frac{\hbar^3}{G^2 M^5}$	$\tau_{GRW} = \frac{10^{16}}{N} s$
	$\frac{G m^2}{\hbar v} \gg 1$	$\frac{G m^2 a}{\hbar v R} \gg 1$	$\frac{G^2 m^5 a}{\hbar^3 v} \gg 1$	$\frac{N a}{10^{16} v} \gg 1$

Im direkten Vergleich der Modelle sehen wir, dass die Zeiten der Kollapsmodelle verschiedene Massenskalierungen haben. So skaliert das Penrose und das Diosi-Modell mit dem Quadrat der Masse. Das Frenkel bzw. Karolyhazy-Modell skaliert mit der fünften Potenz der Masse. Aufgrund der Abhängigkeit nach der Teilchenzahl skaliert das GRW Modell linear mit der Masse.

Durch quantitative Auswertung sollen die experimentellen Parameter festgelegt werden mit denen eine Überprüfung möglich wäre.

Wir wollen von folgenden Grundparametern ausgehen:

Die Größenskala des Interferometers skaliert linear. Ein großes Interferometer wäre also von Vorteil für die Erreichung unseres Ziels. Die ist auch logisch einsichtig, da ein großes Interferometer eine lange Flugzeit mit sich bringt. Daher wählen wir die Größe des Interferometers mit:

$$a \approx 10^0 m$$

Die Masse des quantenmechanischen Systems wählen wir entsprechend den Entwicklungen für makroskopische Quanteneffekte. So war bereits 1999 Interferenz in einem Talbot Lau Interferometer mit C60 Molekülen nachweisbar³². Die Entwicklungen gehen momentan dahin komplexe organische Moleküle in der Gasphase zu Interferenz zu bringen. C60 Fullerene haben bereits 720amu, d.h. $1,19 \cdot 10^{-24} kg$.

Wir wollen also für die Masse in dieser Größenordnung bleiben und wählen:

$$m \approx 10^{-24} kg$$

Damit erhalten wir für die zu erfüllenden Relationen

	Penrose	Diosi	Frenkel-Karolyhazy	GRW
	$\frac{10^{-24}}{v} \gg 1$	$\frac{10^{-15}}{v} \gg 1$	$\frac{10^{-39}}{v} \gg 1$	$\frac{10^{-13}}{v} \gg 1$

Die Geschwindigkeit unseres quantenmechanischen Systems beim Durchlauf durch das Interferometer haben wir als freien Parameter gelassen. Wir sehen, aber bereits ganz deutlich, dass diese Relationen um neben der experimentellen Erfüllbarkeit liegen. Die Geschwindigkeit der Teilchen ist neben anderen Parametern einer der am schwersten zu kontrollierenden Parameter bei makroskopischen Quantensystemen. Für das Experiment mit C60 Fullerenen liegt er bei ca. $10^2 m s^{-1}$.

³² Siehe [15]

Da unsere angenommenen Größenordnungen zu keiner positiven Bewertung der experimentellen Situation führen, wollen wir die Auswertung in Abhängigkeit der Masse darstellen.

Dazu nehmen wir eine experimentelle Größenordnung für die Geschwindigkeit des quantenmechanischen Systems an.

$$v \approx 10^0 \text{ m s}^{-1}$$

Damit erhalten wir für die quantitative Auswertung:

	Penrose	Diosi	Frenkel-Karolyhazy	GRW
	$10^{24} \text{ m}^2 \gg 1$	$10^{33} \text{ m}^2 \gg 1$	$10^{82} \text{ m}^5 \gg 1$	$10^{11} \text{ m} \gg 1$

Indem wir nun die 4 Relationen auftragen sehen wir die Größenordnungen von Massen, die benötigt werden, um in einem realen Experiment einen Verlust an Kohärenz aufgrund eines Kollaps zu sehen.

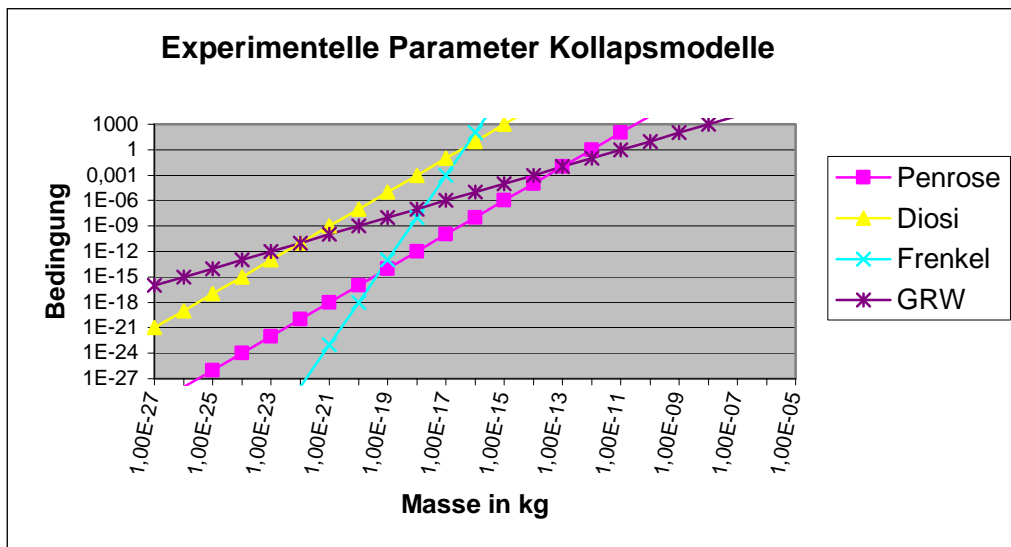


Abbildung 14

Die Darstellung zeigt die starke Abhängigkeit des Frenkel bzw. Karolyhazy-Modells nach der Masse. Diosi und Frenkel erfüllen die Bedingung für die Entdeckung des Kollapses ab einer Masse des interferierenden Objekts von 10^{-16} kg .

Die Modelle von GRW und Penrose erfüllen diese Grenze ab einer Massenskala, die nochmals 3-4 Größenordnungen darüber liegt. Das Modell, das mit dieser Methode am ehesten zu verifizieren wäre ist das Modell von Frenkel und Karolyhazy, da die hohe Potenz mit der die Masse eingeht am ehesten dazu führen kann die Detektion des Kollapses zu ermöglichen. Trotzdem muss man feststellen, dass dieses Gedankenexperiment weit von der praktischen Realisierung entfernt ist.

Geplante und realisierte Experimente

Als Abschluß möchte ich einen kurzen Ausblick auf die momentane experimentelle Situation geben. Der Bereich der Experimente, die sich mit der Verifizierung von Kollapsmodellen befassen ist sehr klein. Dies liegt einfach an der extrem problematischen experimentellen Umsetzung. Es gibt jedoch ein postuliertes Experiment, das von vielen für machbar gehalten wird.

Zuerst möchte ich das Experiment von R. Penrose erwähnen, das dieser 1994 postuliert hat³³.

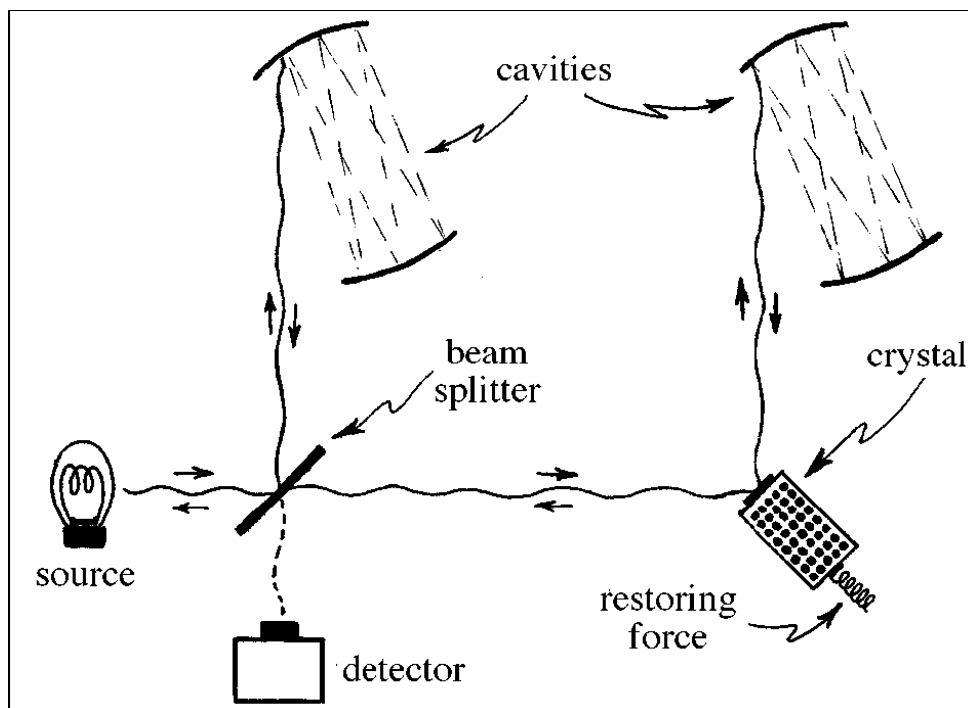


Abbildung 15³⁴

Hierbei soll ein Photon durch einen Strahlteiler in zwei Pfade aufgespalten werden. Ein Pfad führt das Photon in eine cavity, ein zweiter Pfad zu einem Kristall-Spiegel. Das Photon gibt einen Impulsübertrag an den Spiegel und damit an den Kristall ab. Durch Reflexion wird das Photon ebenfalls in eine cavity geleitet. Der Kristall ist ein makroskopischer Körper mit ca. 10^{15} Teilchen. Da sich das Photon nach dem Strahlteiler in einer Superposition der beiden Pfade befindet, wird der Kristall ebenfalls in eine räumliche Superposition gebracht. Beide cavities sollen so beschaffen sein, dass sie das Photon für $10^{-1} s$

³³ Siehe [9]

³⁴ Übernommen aus [10]

speichern. Nach dieser Zeit verlassen die Photonen wieder die cavity und kehren auf den Pfaden zurück zum Strahlteiler.

Der Kristall verfügt über eine Rückstellkraft, die als Feder symbolisch dargestellt ist, die ihn wieder in die Ausgangsposition bringt. Die Photonen treffen auf dem Strahlteiler wieder aufeinander, was dazu führt, dass durch Interferenz kein Photon den Detektor erreicht. Sollte das postulierte Kollapsmodell richtig sein, so wird sich in Folge der räumlichen Delokalisierung des massiven Kristalls ein objektiver Kollaps einstellen. Dieser Kollaps bewirkt, dass auch das Photon in einen Zustand kollabiert, da es mit dem Kristall verschränkt ist. Diese Tatsache führt dazu, dass im Detektor Photonen messbar sein sollten.

Wie Penrose selber feststellt sind die experimentellen Schwierigkeiten sehr groß³⁵:

“Of course, in any actual experiment of this nature, there are liable to be many other forms of decoherence which would destroy the interference between the two returning beams. The idea here is that after all these other forms of decoherence are reduced to a sufficiently small degree, then by varying the parameters involved (size and specific nature of the crystal, the distance it is displaced in relation to lattice spacing, etc.), it would be possible to identify the particular signature of decoherence time inherent in the proposal.”

Mittlerweile gibt es Bestrebungen dieses Experiment durchzuführen. Wir verweisen dazu auf die Arbeiten von Markus Aspelmeyer³⁶, die sich mit den Eigenschaften von mikromechanischen Spiegeln befassen.

³⁵ Siehe [9] S.1936

³⁶ Siehe [19]

Referenzen:

- [1] „Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie“
W. Heisenberg
Hirzel Verlag Leipzig, 1930

- [2] „Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen
Feldgrößen“
N. Bohr und L. Rosenfeld
Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab
Mathematisk-fysiske Meddelelser XII, 8
1933

- [3] “General relativity”
M.P.Hobson, G.Efstathiou and A.N.Lasenby
Cambridge University Press 2006

- [4] “Quantum Limitations on the Measurement of
gravitational fields”
A.Peres, N.Rosen
Physical Review 118 Volume 1, S. 335-336
1960

- [5] “Quantum Theory and Einstein ‘s General Relativity”
H. v.Borzeszkowski, H.J. Treder
Foundations of Physics Vol.12 Nr. 11
1982

- [6] “Quantization of Einstein ‘s Gravitational field: Linear
Approximation”
Suraj Gupta
The proceedings of the physical society
Section A ; Vol 65 Part 3 Nr. 387A
1952

- [7] „Ein neuer Interferenzrefraktor“
L. Zehnder
Zeitschrift für Instrumentenkunde
XI Jahrgang, S. 23 – 285.
August 1891

- [8] “Theoretical Study of the Interferometry”
J. Chamier
www.sciences.univ-nantes.fr/Physique/enseignement/tp/michelson/michp/html.
2000
- [9] “On Gravity’s role in quantum state reduction”
R. Penrose
Gen. Relativ. Grav. 28, 581
1996
- [10] “Quantum computation, Entanglement and state reduction”
R. Penrose
Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, 356
1998
- [11] “Notes on certain Newton gravity mechanism of wavefunction localization and decoherence”
L. Diosi
Journal of Physics A: Math.Theor.40 S.2989-2995
2007
- [12] “The frictional Schrödinger—Newton equation in models of wave function collapse”
L. Diosi
arxiv: quant-ph/0703170
- [13] “ Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems”
G.C.Ghirardi, A.Rimini, T.Weber
Physical Review D Volume 34 Nr. 2 S.470-491
1986
- [14] “Spatial non-cyclic geometric phase in neutron interferometry”
H.Rauch et al
presented at the Int. Conference on Precision Measurements with Slow Neutrons, April 2004, NIST, Gaithersburg, US
[arXiv:quant-ph/0408144](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0408144)
2004

- [15] “Wave-particle duality of C60 molecules“
Arndt et al., Nature 401, 680.
1999
- [16] “Space-like Separation in a Bell Test assuming
Gravitationally Induced Collapses”
N. Gisin et al.
[arXiv:0803.2425](https://arxiv.org/abs/0803.2425)
2008
- [17] „Is there a Relation between the breakdown of the
superposition principle and an indeterminacy in the
structure of the einsteinian space-time?“
Andor Frenkel
- [18] „Quantum optical tests of complementarity“
M.Scully, B.Englert, H.Walther
Nature 351 , S.111-S.116
1991
- [19] „Self-cooling of a micromirror by radiation pressure”
S. Gigan, H. R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G.
Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab, D. Bäuerle, M.
Aspelmeyer, A. Zeilinger, ,
Nature 444, S.67-70
2006

Danksagung

Ich möchte mich chronologisch bei allen bedanken, die mein Interesse an der Physik geweckt und gefördert haben. Meinem Vater für das Hinterfragen der Gegebenheiten der Natur und die ersten astronomischen Schritte hinaus ins Universum. Friedrich Track für die Hilfe beim Wiederentdecken der Begeisterung an der Mathematik. Meinen Lehrern in der Schule, die mich mathematisch und physikalisch gefördert haben. Darunter besonders Prof. Karl Silhavy und Prof. Friedrich Jelinek, denen ich zu einem großen Stück die Begeisterung für die Physik verdanke. Meinem Bundesheer-Kollegen Tino Lindner der mir sogar während des Grundwehrdienstes physikalisch sinnvolle Dinge lernte. Meinen Universitätsprofessoren a.o.Univ.Prof. Dr. Paul Wagner, a.o.UnivProf. Dr. Reinhold Bertlmann, a.o.Univ.Prof Harald Grosse und Doz.Dr. Franz Embacher, bei denen ich das meiste über das Wesen der Physik lernen durfte. O.Univ.Prof. Dr. Anton Zeilinger bei dem ich noch vor der Matura in der Schule eine Vorlesung über Quanteninformation besucht habe, und der sofort mein Interesse an der Materie geweckt hat. A.o.Univ Prof. Markus Arndt für ein lehrreiches Praktikum und vielen tiefen experimentellen Einblicken in das Wesen der Natur. Meinem Betreuer a.o. Univ.Prof Dr. Caslav Brukner für die Möglichkeit bei ihm eine Diplomarbeit über ein so interessantes Thema schreiben zu dürfen, die vielen Diskussionen und seine Geduld.

Zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern, meiner Freundin Tina und meinen Freunden für die Unterstützung abseits der Universität bedanken, die den notwendigen Ausgleich darstellt.

Curriculum Vitae

Name:	Ing. Gerd Ch. Krizek
Geburtstag:	23.02.1980
Geburtsort:	Wien
Schulbildung:	1986 - 1990 Volksschule Halirschgasse 1990 - 1994 GRG 17 Geblergasse 1994 - 1999 HTL TGM Wien XX Abtlg. Nachrichtentechnik 1999 Matura mit ausgezeichnetem Erfolg
Grundwehrdienst:	1999 - 2000 Grundwehrdienst Gardebataillon Wien
Berufliche Laufbahn:	1999 Gründung der Fa. NOVATECHNOLOGY 1999 – dato Geschäftsführertätigkeit NOVATECHNOLOGY
Universität:	2001 – 2008 Studium Diplom Physik