



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Überall ist Chaos!
Dynamische Systeme in der Biologie“

Verfasserin

Renate Angrosch

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, im April 2009

Matrikelnummer:	0405735
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 445
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Unterrichtsfach Mathematik
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith

Danksagung

Für die ausgezeichnete Betreuung dieser Diplomarbeit bedanke ich mich bei ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith. Nicht nur bei der Erstellung der Diplomarbeit, sondern auch während meiner gesamten Studienzzeit konnte ich immer mit seiner Unterstützung rechnen. Dafür, sowie für das Vertrauen in mich, bedanke ich mich an dieser Stelle sehr herzlich.

Dank gebührt auch meinem Mathematikprofessor, der während der Zeit am Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium meine Freude an Mathematik gefördert hat.

Auch bei meiner Familie, die mich zum einen bei der Entscheidung dieses Studium zu beginnen und zum anderen während der gesamten Studienzzeit immer unterstützt hat, möchte ich mich herzlich bedanken. Besonders danke ich meiner Mutter, die mich darin bestärkt hat meine Berufung zum Beruf zu machen. Meinem Vater danke ich dafür, dass er meinen Geschwistern und mir vorgelebt hat, dass jeder für sein Leben und dessen Gestaltung selbst verantwortlich ist. Meine Eltern haben meinen Geschwistern und mir ermöglicht unsere Talente zu fördern und an uns geglaubt. Vielen Dank dafür!

Ganz besonderer Dank gebührt auch meinem Freund Thomas, der immer für mich da ist.

„Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, dass unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet.“

David Hilbert

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Allgemeines	5
1.2	Ziel der Arbeit	6
1.3	Aufbau der Arbeit	6
2	Dynamische Systeme	9
2.1	Einleitung	9
2.2	Arten von dynamischen Systemen	10
2.3	Dynamische Systeme in der Populationsbiologie	11
2.3.1	Exponentielles Wachstum	11
2.3.2	Logistisches Wachstum	16
3	Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme	25
3.1	Diskrete Systeme	25
3.1.1	Fixpunkte	25
3.1.2	Stabilitätskriterium	30
3.2	Kontinuierliche Systeme	31
3.2.1	Qualitative Theorie autonomer Differenzialgleichungen	31
3.2.2	Stabilitätsanalyse	34
3.3	Lotka-Volterra-Modell	39
3.3.1	Einfaches Lotka-Volterra-Modell	39
3.3.2	Erweitertes Lotka-Volterra-Modell	46
3.4	SIR-Modell	52
4	Bifurkation	59
4.1	Einleitung	59
4.1.1	Bifurkation in diskreten Systemen	60
4.1.2	Bifurkation in kontinuierlichen Systemen	61

4.2	Sattel-Knoten-Bifurkation	61
4.3	Pitchfork-Bifurkation	66
4.4	Transkribische Bifurkation	68
4.5	Periodenverdoppelung-Bifurkation	69
5	Diskrete dynamische Systeme	77
5.1	Definitionen	77
5.2	Das Newtonverfahren	79
5.2.1	Juliamenge und Fraktal	84
5.3	Topologische Entropie	88
5.3.1	Definition nach Dinaburg und Bowen	88
5.3.2	Definition nach Adler, Konheim und McAndrew	90
5.3.3	Äquivalenz der beiden Definitionen	92
5.4	Berechnung der topologischen Entropie	93
5.5	Maßtheoretische Entropie	94
5.5.1	Variationsprinzip	99
5.6	Topologischer Druck	106
5.7	Abbildungen auf dem Intervall	107
5.8	Stabilitätsanalyse von Intervallabbildungen	112
5.8.1	Stetigkeit der topologischen Entropie	113
5.8.2	Stetigkeit des topologischen Drucks	115
6	Zusammenfassung	121
	Abbildungsverzeichnis	124
	Tabellenverzeichnis	125
	Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	127
	Literaturverzeichnis	129
	Kurzzusammenfassung	135
	Abstract	137
	Lebenslauf	139

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Allgemeines

Der Begriff „Chaos“ ist in vielen Bereichen des Alltags und der Wissenschaft allgegenwärtig. Doch was ist „Chaos“? Kann „Chaos“ definiert, bestimmt oder gar berechnet werden?

„Chaos“ tritt in dynamischen Systemen auf, die in zahlreichen Bereichen der Wissenschaft vorkommen. Begriffe wie „Chaos“ und Schmetterlingseffekt sind aus der Meteorologie bekannt. Der CO₂-Kreislauf sowie auch der Klimawandel unterliegen einem dynamischen chaotischen System. Anhand der in dieser Arbeit behandelten Theorie zu Stabilität und stabilen und instabilen Bahntypen, kann in der Astronomie die Entstehung von Bahnen um Planeten, wie zum Beispiel die bekannten Ringe des Saturns erklärt werden. In Teilgebieten der Physik, wie etwa der Mechanik beschreiben dynamische Systeme Sachverhalte, wie das Schwingen eines Pendels oder weitere Bewegungsabläufe. Der Ausgang beim Werfen eines Würfels ist zwar theoretisch durch das Newton'sche Gesetz der Mechanik exakt bestimmbar, aber in der Praxis ein chaotisches dynamisches System. Für die Beschreibung der Abläufe bei Reaktionsgleichungen werden dynamische Systeme in der Chemie herangezogen. In der Biologie beschreiben dynamische Systeme Vorgänge in der Ökologie, wie das Populationswachstum. Auch die Darstellung der Photosynthese kann durch dynamische Systeme erfolgen.

1.2 Ziel der Arbeit

Ziel der Arbeit ist es zu beschreiben, was ein dynamisches System ist und wann es stabil oder instabil ist. Unter welchen Bedingungen sich die Stabilität dynamischer Systeme ändert und was nach langer Zeit oder bei Iteration passiert, soll ebenfalls analysiert werden.

Darüber hinaus soll diese Arbeit veranschaulichen, dass bereits bei sehr einfachen Funktionen „Chaos“ auftreten kann. Hier sei besonders auf die logistische Funktion hingewiesen, die in dieser Arbeit immer wieder für Beispiele herangezogen wird. Weiters wird versucht den Begriff „Chaos“ durch Eigenschaften zu beschreiben. Eine zentrale Frage in diesem Zusammenhang ist wie genau getroffene Vorhersagen sind. Zahlreiche grundlegende Anfangsbedingungen eines Systems können nur mit einer bestimmten Genauigkeit, also mit der Wahrscheinlichkeit P mit $P < 1$ gemacht werden. Dies hat zur Folge, dass kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen sehr große Änderungen im Verhalten des dynamischen Systems bewirken und so keine genauen Vorhersagen getroffen werden können. Das beschriebene Merkmal ist ein wesentliches Merkmal von dynamischen chaotischen Systemen.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist es einen Einblick in die Theorie diskreter dynamischer Systeme zu geben.

1.3 Aufbau der Arbeit

Zu Beginn der Arbeit wird in Kapitel zwei erklärt, was dynamische Systeme sind und welche Arten von dynamischen Systemen es gibt. Zur Veranschaulichung werden Beispiele aus der Populationsbiologie angeführt. In Kapitel drei wird die Stabilität von dynamischen Systemen untersucht. Auch in diesem Kapitel werden die Inhalte anhand bekannter Modelle aus der Biologie reflektiert. Das nächste Kapitel behandelt Bifurkationen, die in dynamischen Systemen auftreten können. An einem Beispiel aus der Populationsbiologie wird der Weg ins „Chaos“ gezeigt. Dies führt zum fünften Kapitel, indem „Chaos“ genauer betrachtet wird. Nach einem einleitenden Beispiel aus der Mathematik, bei dem ebenfalls „Chaos“ auftritt wird die topologische Entropie, die ein Maß dafür ist wie „chaotisch“ ein dynamisches System ist, definiert. Weiters wird beschrieben wie sie berechnet werden kann. Neben der topologischen Entropie wird auch die maßtheoretische Entropie, sowie der Zusammenhang dieser beiden behandelt. Eine Verallgemeinerung der topo-

logischen Entropie stellt der topologische Druck dar, der ebenfalls in Kapitel fünf definiert wird. Abschließend werden Abbildungen auf einem Intervall und die Stabilität der topologischen Entropie und des topologischen Drucks auf Intervallabbildungen beschrieben.

In dieser Arbeit werden vor allem Beispiele aus dem Bereich der Biomathematik zur Veranschaulichung herangezogen. Dabei sei jedoch darauf hingewiesen, dass theoretische Modelle die Wirklichkeit nur vereinfacht wiedergeben können. Nicht alle Aspekte, die in der Realität miteinfließen, können auch im Modell berücksichtigt werden.

Einige Inhalte der Arbeit werden graphisch veranschaulicht. Alle Abbildungen wurden mit *Mathematica 7* eigenhändig erstellt.

Kapitel 2

Dynamische Systeme

Dieses Kapitel gibt eine erste Beschreibung dynamischer Systeme. Beispiele aus der Populationsbiologie veranschaulichen diskrete und kontinuierliche dynamische Systeme.

2.1 Einleitung

Vielen einfach erscheinenden Phänomenen liegen sehr komplizierte dynamische Systeme zugrunde. Was ein dynamisches System ist, wird in diesem Kapitel anhand einiger Beispiele näher beschrieben.

Ein einfaches und anschauliches Beispiel für ein diskretes dynamisches System ist

$$x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots$$

Die Grundfrage, die sich bei der Behandlung dynamischer Systeme stellt ist, was mit einer Funktion T und einem Startwert x bei wiederholter Anwendung

$$x, T(x), T(T(x)), T(T(T(x))), \dots$$

nach langer Zeit passiert. (vgl. [12] S. 2 und [10] S. 19).

Diese Zusammensetzung von Funktionen

$$\begin{aligned} T(T(x)) &= T^2(x) \\ T(T(T(x))) &= T^3(x) \\ T(T(T(T(x)))) &= T^4(x) \end{aligned}$$

⋮

wird *Iteration* genannt. Dabei ist Iteration (lat. „Wiederholung“) die „Bez. für die schrittweise Annäherung an eine gesuchte Zahl, wobei man jedesmal denselben Rechengang auf den zuvor berechneten Wert anwendet.“ ([33], S. 48).

2.2 Arten von dynamischen Systemen

Es kann zwischen diskreten und kontinuierlichen dynamischen Systemen unterschieden werden. Diskrete dynamische Systeme werden zu gewissen Zeitpunkten betrachtet, während bei kontinuierlichen dynamischen Systemen die Änderungen in gewissen Zeitspannen untersucht werden. Erstere werden in der Mathematik durch Differenzgleichungen beschrieben. Kontinuierliche dynamische Systeme werden durch Differenzialgleichungen dargestellt. Bei einem kontinuierlichen dynamischen System, das durch eine Differenzialgleichung mit der unabhängigen Variable t beschrieben wird, stellen sich die typischen Fragen für dynamische Systeme: Was passiert nach langer Zeit $t \rightarrow +\infty$ und was war vor langer Zeit $t \rightarrow -\infty$? Bei diskreten dynamischen Systemen wird das Verhalten der Punkte $x, T(x), T^2(x), \dots, T^n(x)$ bei wachsendem n untersucht. (vgl. [12] S. 17).

Neben der Unterscheidung in diskrete und kontinuierliche dynamische Systeme erfolgt weiters eine Unterscheidung in lineare und nicht lineare Systeme. Die Dimension dynamischer Systeme kann ebenfalls zur Unterscheidung herangezogen werden. Es gibt nulldimensionale, eindimensionale, zweidimensionale und höherdimensionale dynamische Systeme. Was ein topologisches dynamisches System ist, wird in dieser Arbeit in Kapitel fünf behandelt. Eine Definition eines diskreten topologischen dynamischen Systems in einem kompakten metrischen Raum wird in Abschnitt 5.3 in Definition 29 gegeben. Von Bedeutung ist weiters das chaotische dynamische System. In einem chaotischen dynamischen System ist theoretisch alles vorhersagbar, nicht jedoch in der Praxis. „Chaos“ beschreibt theoretisch ein deterministisches System, indem durch Gesetze alles vollständig beschrieben werden kann. Deterministisch bedeutet in diesem Zusammenhang nach Arnold (vgl. [3] S. 9), dass der gesamte zukünftige und der gesamte vergangene Verlauf durch den gegenwärtigen Zustand eindeutig bestimmt werden kann. Tatsächlich handelt es sich in der Praxis jedoch um ein wahrscheinlichkeitstheoretisches System, bei dem die Ergebnisse nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vorhergesagt werden können.

2.3 Dynamische Systeme in der Populationsbiologie

Als weitere Motivation zur Erklärung eines dynamischen Systems dienen nachfolgende Beispiele aus der Populationsbiologie. In der Populationsbiologie wird die langfristige Entwicklung von Populationen einer Art betrachtet. Als *Population* wird nach Bick ([6] S. 17) die „Gesamtheit der Individuen einer Organismenart mit gemeinsamen genetischen Gruppenmerkmalen in einem bestimmten Raum“ bezeichnet. Mathematische Modelle werden herangezogen, um die Fluktuation unter gewissen Parametern, wie Nahrungsressourcen, Anzahl der Prädatoren oder klimatische Bedingungen zu beschreiben. Je nach dem, wie oft die Population betrachtet wird, ist das Ergebnis in Form einer Differenzialgleichung (kontinuierliche Funktion) oder in Form einer Differenzengleichung (diskrete Funktion) darstellbar. Es stellt sich also die typische Frage für dynamische Systeme: Kann die langfristige Entwicklung einer Population vorhergesagt werden, wenn die Anzahl der Individuen der Ausgangspopulation gegeben ist? (vgl. [12] S. 3, 4).

Um diese Frage zu behandeln wird das Wachstum von Populationen in einem Modell dargestellt. Zu den grundlegenden Modellen in der Populationsbiologie zählen die des exponentiellen und des logistischen Wachstums. Diese beiden Wachstumsmodelle werden nun näher beschrieben.

2.3.1 Exponentielles Wachstum

In dem Modell des exponentiellen Wachstums wird angenommen, dass die Umweltfaktoren konstant bleiben und es keine Störfaktoren gibt, die mit steigender Individuenzahl in der Population zunehmen. Es werden somit Einflussfaktoren, wie zum Beispiel Nahrungsknappheit oder die Knappheit von Raum nicht berücksichtigt. Eine weitere grundlegende Annahme ist, dass es keine Zu- und Abwanderung gibt. (vgl. [6] S. 233).

Dieses Modell wird zum Beispiel für die Beschreibung des Bevölkerungswachstums, des Wachstums von Bakterien oder des Wachstums durch Zellteilung angewendet. Ein weiteres Anwendungsgebiet ist die Neubesiedlung von Lebensräumen durch Erstbesiedler, wie zum Beispiel Protisten, Pflanzen oder Tiere. Exponentielles Wachstum ist jedoch in der Natur nur über kurze Zeiträume zu beobachten. (vgl. [6] S. 234).

Nachstehend wird zuerst das Modell des diskreten und anschließend das Modell des kontinuierlichen exponentiellen Wachstums behandelt.

Diskretes exponentielles Wachstum

Wird die Veränderung der Population von einem Jahr zum nächsten oder von einer Generation zur nächsten betrachtet, so spricht man von einem diskreten Modell. Die Zeit t ist eine diskrete Variable und nimmt Werte aus \mathbb{N}_0 an. Das diskrete Modell führt zu Differenzgleichungen. Mit N_n wird die Populationsgröße nach n Generationen, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist, beschrieben. Die Populationsgröße der nächsten Generation ist direkt proportional zur aktuellen Populationsgröße

$$N_{n+1} = kN_n.$$

Dabei ist die Wachstumsrate k konstant. Für eine Ausgangspopulation N_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} N_1 &= kN_0, \\ N_2 &= kN_1 = k^2N_0, \\ N_3 &= kN_2 = k^3N_0, \\ &\vdots \\ N_n &= kN_{n-1} = k^nN_0. \end{aligned}$$

Aussagen sind nur über die Populationsgröße zu den einzelnen Zeitpunkten möglich, nicht jedoch über Werte dazwischen. Das langfristige Schicksal der Population kann in zwei Fälle unterschieden werden. Ist zum einen $k > 1$, dann wächst die Population unkontrolliert ($N_n \rightarrow \infty$). Ist jedoch $0 < k < 1$, so stirbt die Population nach langer Zeit aus ($N_n \rightarrow 0$). (vgl. [12] S. 4, 5).

Nachstehendes Beispiel dient zur Veranschaulichung des beschriebenen Wachstumsmodells.

Beispiel 1. Das Wachstum einer Bakterienkultur wird untersucht. Dazu wird jede Stunde die Größe der Kultur bestimmt. Die Ausgangspopulation N_0 hat zu Beginn der Messung eine Fläche von 2 cm^2 besiedelt. Es sei die Wachstumsrate $k = 1,35$. Somit kann die Größe der Kultur nach n Stunden durch

$$N_n = 1,35^n \cdot 2$$

berechnet werden.

In Tabelle 2.1 ist die Entwicklung der Bakterienkultur in den ersten 20 Stunden mit gerundeten Werten angeführt. Für die graphische Darstellung der Entwicklung der Bakterienkultur siehe Abbildung 2.1.

Tabelle 2.1: Diskretes exponentielles Wachstum einer Bakterienkultur

ZEIT [STUNDEN]	GRÖSSE DER BAKTERIENKULTUR [CM ²]
0	2
1	2,7
2	3,65
3	4,92
4	6,64
5	8,97
6	12,11
7	16,34
8	22,06
9	29,79
10	40,21
11	54,29
12	73,29
13	98,94
14	133,57
15	180,32
16	243,43
17	328,63
18	443,65
19	598,92
20	808,55

Kontinuierliches exponentielles Wachstum

Kann die Zeit t alle reellen positiven Werte $t \in \mathbb{R}^+$ annehmen, so handelt es sich um ein kontinuierliches Modell. Dieses Modell wird nach Bick (vgl. [6] S. 233, 234) beschrieben.

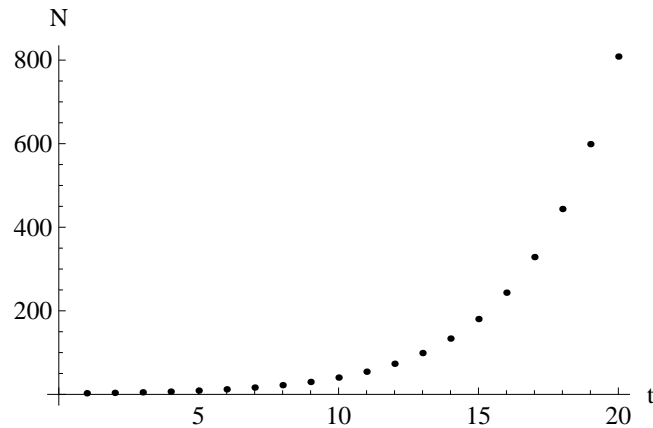


Abbildung 2.1: Entwicklung der Bakterienkultur

Die Differenzialgleichung lautet

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = kN, \quad (2.1)$$

wobei

N ... die Anzahl der Individuen der Population,

t ... die Zeit und

k ... die spezifische Vermehrungsrate, also die Differenz aus Geburtenrate und Sterberate pro Individuum der Population ist.

Ist die Ausgangspopulation N_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt, so ist durch die Lösung der Differenzialgleichung (2.1)

$$N(t) = N_0 e^{kt} \text{ für alle } t \geq 0$$

die Anzahl der Individuen der Population zur Zeit t gegeben.

Langfristig ($t \rightarrow +\infty$) kann es zum einen zu einem ungehemmten Ausbreiten der Population kommen $N(t) \rightarrow \infty$, falls die spezifische Vermehrungsrate positiv ist. Zum anderen kann es zum Aussterben der Population kommen $N(t) \rightarrow 0$, falls die spezifische Vermehrungsrate negativ ist. (vgl. [12] S. 4). Nachstehendes Beispiel aus Heuser (vgl. [16] S. 22) veranschaulicht die Grenzen dieses Modells.

Beispiel 2. Es wird die menschliche Bevölkerung der Erde mit dem Modell des exponentiellen Wachstums beschrieben. Die spezifische Vermehrungsrate sei näherungsweise 0,02 pro Jahr. Im Jahr 1986 lebten nach Angabe der Vereinten Nationen ungefähr 5 Milliarden Menschen auf der Erde. Die Anzahl der Erdbevölkerung zum Zeitpunkt t Jahre nach 1986 kann somit durch

$$N(t) = 5 \cdot 10^9 \cdot e^{0,02t}$$

ermittelt werden.

In Tabelle 2.2 ist die Größe der Erdbevölkerung bis zum Jahr 2501 angegeben. Die entsprechende graphische Darstellung ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

Tabelle 2.2: Kontinuierliches exponentielles Wachstum der Erdbevölkerung

JAHR	ZEIT [JAHRE NACH 1986]	ERDBEVÖLKERUNG
1986	0	$5 \cdot 10^9$
1990	4	$5,41644 \cdot 10^9$
2000	14	$6,61565 \cdot 10^9$
2010	24	$8,08037 \cdot 10^9$
2020	34	$9,86939 \cdot 10^9$
2030	44	$1,20545 \cdot 10^{10}$
2040	54	$1,47234 \cdot 10^{10}$
2050	64	$1,79832 \cdot 10^{10}$
2100	114	$4,88834 \cdot 10^{10}$
2200	214	$3,61202 \cdot 10^{11}$
2300	314	$2,66894 \cdot 10^{12}$
2400	414	$1,97210 \cdot 10^{13}$
2500	514	$1,45719 \cdot 10^{14}$
2501	515	$1,48663 \cdot 10^{14}$

Die Bevölkerungszahl von 148,7 Billionen Menschen im Jahr 2501 kann wie folgt veranschaulicht werden. Die Landfläche der Planeten Erde beträgt 149 Billionen Quadratmeter. Würde sich die Bevölkerung nach dem Modell des exponentiellen Wachstums entwickeln, so hätte jeder Mensch im Jahr 2501 statistisch nur einen Quadratmeter Land zur Verfügung.

Das angeführte Beispiel zeigt ebenfalls, dass beim Modell des exponentiellen Wachstums die Wachstumsgeschwindigkeit $\frac{dN}{dt} = kN$ mit zunehmendem

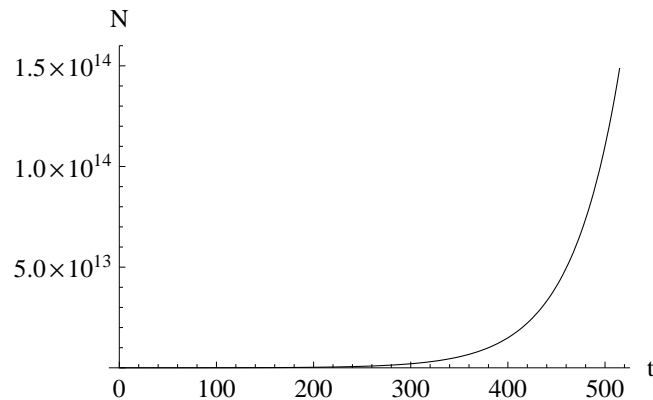


Abbildung 2.2: Entwicklung der Erdbevölkerung

Wachstum größer wird. Somit wächst die Population umso schneller, je größer sie bereits ist. (vgl. [16] S. 21).

Die langfristige Entwicklung einer Population kann natürlich nicht nur zu den zwei dargestellten Fällen des ungehemmten Wachstums und des Aussterbens führen. Wie bereits erwähnt, tritt exponentielles Wachstum in der Natur meist nur in kurzen Zeiträumen auf. Das Wachstum wird durch Faktoren wie Mangel an Lebensraum, Mangel an Nahrung oder das Auftreten von Seuchen begrenzt. Somit ist eine wesentliche Verbesserung des Modells nicht unbegrenztes Wachstum sondern, wie für reale Prozesse viel häufiger, begrenztes Wachstum anzunehmen. Darauf wird im nächsten Abschnitt mit dem Modell des logistischen Wachstums eingegangen.

2.3.2 Logistisches Wachstum

Eine Möglichkeit zur Verbesserung des Wachstumsmodells ist einen limitierenden Faktor L für die Population einzuführen. Dieser beschreibt die Kapazitätsgrenze der Population und kann durch Faktoren wie Konkurrenten, Prädatoren, abiotische Faktoren, Nahrung und Raum bestimmt werden. Geht die Größe der Population $N(t)$ über L hinaus, wird das Wachstum der Population zurück gehen. Andererseits hat die Population die Möglichkeit zu wachsen, falls $N(t) < L$ ist. Dieser Sachverhalt wird mit dem Modell des logistischen Wachstums dargestellt. Das Modell des logistischen Wachstums verbindet das Modell des exponentiellen Wachstums mit dem des beschränkten

Wachstums. Es geht auf den Mathematiker und Statistiker Pierre-François Verhulst (1804 – 1849) zurück. (vgl. [12] S. 5, [39] S. 143 und [51] S. 324).

Kontinuierliches logistisches Wachstum

Im Vergleich zum Modell des kontinuierlichen exponentiellen Wachstums wird die Differenzialgleichung mit dem Faktor $L - N$ multipliziert. Damit ergibt sich, dass die Wachstumsrate k nicht nur proportional zur Größe der Population N , sondern auch zur Kapazität, die bis zum Erreichen des limitierenden Faktors noch vorhanden ist. Das Modell des kontinuierlichen logistischen Wachstums wird durch die Differenzialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = kN(L - N) \quad (2.2)$$

mit $k, L > 0$ und konstant dargestellt. In dieser Gleichung beschreibt k die Wachstumsrate und L den Sättigungspunkt oder die Kapazitätsgrenze, bei dem das gehemmte Wachstum in ein Schrumpfen übergeht. (vgl. [12] S. 5, 6 und [16] S. 22, 23).

Die Lösung der Differenzialgleichung (2.2) kann durch die Methode der Trennung der Variablen ermittelt werden. Wird dabei der Logarithmus verwendet, so ist der Logarithmus zur Basis e gemeint. Bei der Berechnung wird die Variable N , die die Populationsgröße beschreibt, durch die Variable x , wie in der mathematischen Schreibweise üblich, ersetzt. Somit folgt

$$\frac{dx}{dt} = kx(L - x) = k(Lx - x^2).$$

Die Variablen werden getrennt, indem die Gleichung formal mit dt und mit dem Kehrwert von $Lx - x^2$ multipliziert wird. Es ergibt sich

$$\frac{1}{Lx - x^2} dx = k dt.$$

Durch Integration der Gleichung folgt daraus

$$\int \frac{1}{Lx - x^2} dx = \int k dt. \quad (2.3)$$

Bei der Partialbruchzerlegung erhält man für $Lx - x^2 = 0$ die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = L$ und somit den Ansatz

$$\frac{A}{x - L} + \frac{B}{x} = \frac{1}{Lx - x^2}. \quad (2.4)$$

Wird mit dem Nenner $Lx - x^2$ multipliziert, ergibt sich folgende Gleichung

$$-Ax + B(L - x) = -Ax + BL - Bx = 1.$$

Die Koeffizienten A und B werden mittels Koeffizientenvergleich bestimmt. Aus dem Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} BL &= 1 \\ -A - B &= 0 \end{aligned}$$

aus dem sich $A = -\frac{1}{L}$ und $B = \frac{1}{L}$ ergeben. Werden die ermittelten Koeffizienten in (2.4) eingesetzt, ergibt sich aus (2.3)

$$\int \frac{-\frac{1}{L}}{x-L} dx + \int \frac{\frac{1}{L}}{x} dx = \int k dt.$$

Bevor das Integral berechnet wird, kann der Faktor $\frac{1}{L}$ herausgehoben werden. Somit ist

$$\frac{1}{L} \left(\int \frac{-1}{x-L} dx + \int \frac{1}{x} dx \right) = \int k dt.$$

Beim Lösen des Integrals ist die Integrationskonstante \tilde{c} zu berücksichtigen. Es ist

$$\frac{1}{L} (-\log|x-L| + \log|x|) = kt + \tilde{c}.$$

Wird die Gleichung mit L multipliziert, ergibt sich

$$\log|x| - \log|x-L| = Lkt + L\tilde{c}.$$

Gemäß den Rechenregeln für Logarithmen folgt

$$\log \left| \frac{x}{x-L} \right| = Lkt + L\tilde{c},$$

woraus sich

$$\left| \frac{x}{x-L} \right| = e^{Lkt+L\tilde{c}} = e^{Lkt} c \tag{2.5}$$

ergibt. Durch Einsetzen der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ kann die Integrationskonstante c ermittelt werden. Es ist

$$\frac{x_0}{x_0-L} = e^0 c = c.$$

Wird die ermittelte Integrationskonstante in (2.5) eingesetzt, ergibt sich

$$\frac{x}{x-L} = e^{Lkt} \frac{x_0}{x_0-L}$$

und somit

$$\frac{1}{1-\frac{L}{x}} = \frac{x_0 e^{Lkt}}{x_0-L}.$$

Wird der Kehrwert genommen, so ist

$$1 - \frac{L}{x} = \frac{x_0 - L}{x_0 e^{Lkt}}.$$

Einfache Umformungsschritte führen zu

$$\frac{L}{x} = 1 - \frac{x_0 - L}{x_0 e^{Lkt}} = \frac{x_0 e^{Lkt} - x_0 + L}{x_0 e^{Lkt}}.$$

Wird x explizit ausgedrückt, erhält man

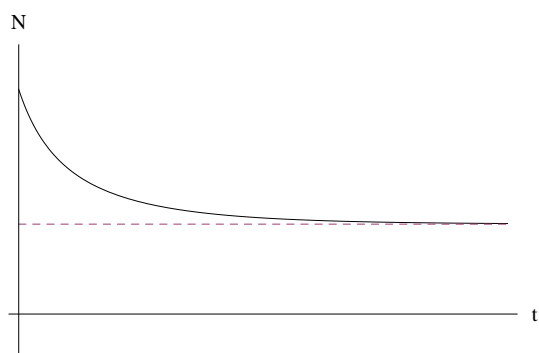
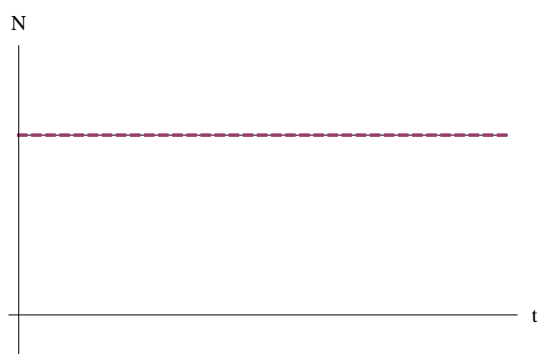
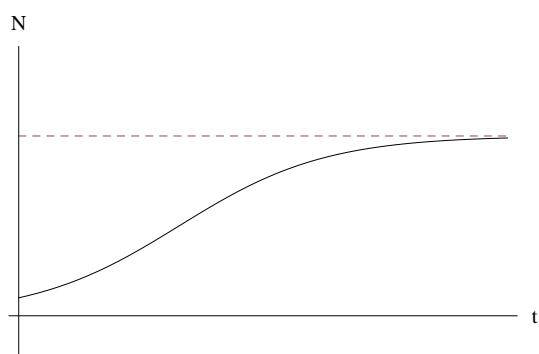
$$x(t) = \frac{Lx_0 e^{Lkt}}{L - x_0 + x_0 e^{Lkt}}.$$

Daraus ergibt sich mit der ursprünglichen Variable N für die Größe der Population

$$N(t) = \frac{LN_0 e^{Lkt}}{L - N_0 + N_0 e^{Lkt}}.$$

Ist $k > 0$, so können nach Devaney (vgl. [12] S. 5) folgende drei Fälle unterschieden werden.

1. Fall: $N > L$, $\frac{dN}{dt} < 0$
Hat die Population eine Größe, die über dem limitierenden Faktor liegt, so nimmt ihre Größe ab. Dieser Fall ist in Abbildung 2.3 dargestellt.
2. Fall: $N = L$, $\frac{dN}{dt} = 0$
Entspricht die Populationsgröße genau der Kapazitätsgrenze, so bleibt sie langfristig konstant. Die graphische Abbildung ist in Abbildung 2.4 zu sehen.
3. Fall: $N < L$, $\frac{dN}{dt} > 0$
Wie Abbildung 2.5 zeigt, nimmt in diesem Fall die Größe der Population zu, da die Kapazitätsgrenze noch nicht erreicht ist.

Abbildung 2.3: Logistisches Wachstum mit $N > L$ Abbildung 2.4: Logistisches Wachstum mit $N = L$ Abbildung 2.5: Logistisches Wachstum mit $N < L$

Von besonderem Interesse ist der 3. Fall, in dem die Größe der Population die Kapazitätsgrenze noch nicht erreicht hat. Zur Veranschaulichung des Modells des kontinuierlichen logistischen Wachstums sind nachstehende Beispiele aus der Biologie angeführt.

Beispiel 3. Die Entwicklung einer Population von Fruchtfliegen (*Drosophila*) wird durch das logistische Wachstum beschrieben. Die Ausgangspopulation besteht aus 8 Tieren und die Wachstumsrate wird mit 0,00068 pro Tag angenommen. Es ist ausreichend Lebensraum und Nahrung für höchstens 1250 Fliegen vorhanden. Der Bestand an Fruchtfliegen zum Zeitpunkt t kann durch

$$N(t) = \frac{1250 \cdot 8 e^{0,85t}}{1250 - 8 + 8 e^{0,85t}}$$

ermittelt werden. In Tabelle 2.3 ist die Entwicklung der Fruchtfliegenpopulation in den ersten 14 Tagen dargestellt.

Tabelle 2.3: Kontinuierliches logistisches Wachstum bei Fruchtfliegen

ZEIT [TAGE]	FRUCHTFLIEGENPOPULATION [ANZAHL]
0	8
1	19
2	43
3	95
4	202
5	389
6	642
7	890
8	1066
9	1164
10	1212
11	1233
12	1243
13	1247
14	1249

Wie in Abbildung 2.6 zu sehen ist, verläuft das Wachstum zu Beginn exponentiell und nimmt immer weiter ab, bis es sich schließlich mit einer Wachs-

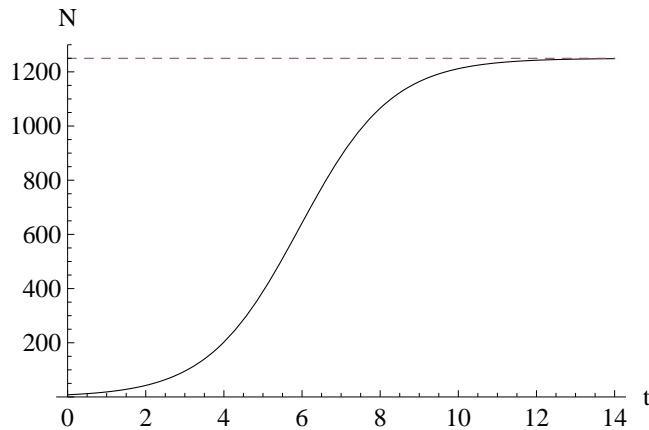


Abbildung 2.6: Entwicklung der Fruchtfliegenpopulation

tumsrate von ungefähr null der Kapazitätsgrenze nähert. Der S-förmige Verlauf der Lösungskurve wird als *sigmoid* bezeichnet.

Das Modell des logistischen Wachstums spiegelt das reale Wachstum einer Population besser wider, als das Modell des exponentiellen Wachstums.

Auch das Wachstum von Pflanzen kann mit dem Modell des kontinuierlichen logistischen Wachstums beschrieben werden. Zur Veranschaulichung ist nachstehendes Beispiel in Anlehnung an die empirische Untersuchung von Reed und Holland in [37] über das Höhenwachstum von Sonnenblumen angeführt.

Beispiel 4. Die Entwicklung von Sonnenblumen wird durch das logistische Wachstum beschrieben. Keimlinge mit einer Größe von ungefähr 2 cm werden ausgepflanzt und ihr Wachstum 12 Wochen lang beobachtet. Die Wachstumsrate wird mit 0,00046 pro Tag und die maximal erreichbare Höhe mit 255 cm angenommen. Die durchschnittliche Höhe der Sonnenblumen zum Zeitpunkt t in Tagen kann durch

$$N(t) = \frac{255 \cdot 2 e^{0,1173t}}{255 - 2 + 2 e^{0,1173t}}$$

ermittelt werden.

Tabelle 2.4 zeigt die Entwicklung des Höhenwachstums von Sonnenblumen mit gerundeten Werten in den ersten 12 Wochen. Die graphische Darstellung des Wachstums von Sonnenblumen ist in Abbildung 2.7 zu sehen.

Tabelle 2.4: Kontinuierliches logistisches Wachstum von Sonnenblumen

ZEIT [TAGE]	HÖHE DER SONNENBLUMEN [CM]
0	2
7	4,5
14	10,0
21	21,7
28	44,5
35	82,8
42	133,1
49	181,8
56	216,6
63	236,6
70	246,5
77	251,2
84	253,3

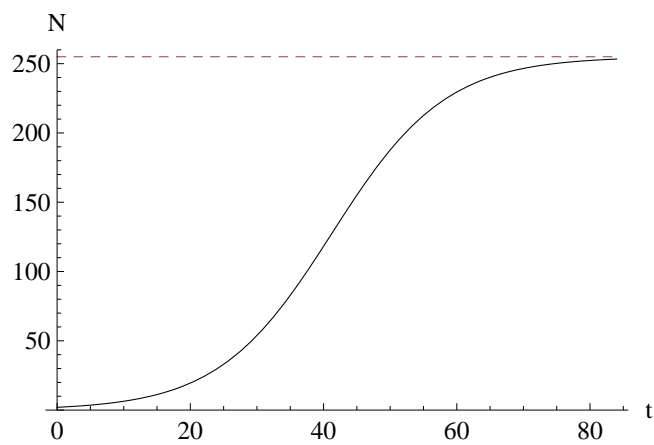


Abbildung 2.7: Höhenwachstum von Sonnenblumen

Diskretes logistisches Wachstum

Es könnte angenommen werden, dass die der Differentialgleichung korrespondierende Differenzgleichung sich auf lange Sicht ähnlich verhält. Wie sich in dieser Arbeit herausstellen wird, ist dies jedoch nicht der Fall.

Das Wachstum der Population wird durch die nicht lineare Differenzgleichungen

$$N_{n+1} = kN_n(L - N_n)$$

mit konstantem Wachstumsfaktor $k > 0$ beschrieben. Dabei stellt L wieder den limitierenden Faktor oder die Kapazitätsgrenze dar.

In weiterer Folge wird zur Vereinfachung die Annahme getroffen, dass der limitierende Faktor $L = 1$ ist. Somit wird nicht die gesamte Population, sondern nur ein gewisser Anteil betrachtet. Der Anteil der Population in der Generation n ist N_n . Daher ergibt sich die Differenzgleichung

$$N_{n+1} = kN_n(1 - N_n), \text{ mit } k > 0 \text{ konstant.}$$

Es sei

$$N_1 = T(x), N_2 = T(T(x)), N_3 = T(T(T(x))), \dots$$

und die Größe der Ausgangspopulation $N_0 = x$. Dann ergibt sich die logistische Funktion

$$T(x) = kx(1 - x). \tag{2.6}$$

Es wird sich zeigen, dass die logistische Gleichung zu einem der grundlegendsten nicht linearen dynamischen Systeme führt. Die der Differentialgleichung des kontinuierlichen logistischen Wachstums analoge Differenzgleichung führt somit zu einem dynamischen System, dessen Dynamik bis heute wissenschaftlich nicht vollständig geklärt ist. (vgl. [12] S. 6).

Auf die logistische Gleichung wird in Abschnitt 4.5 näher eingegangen.

Kapitel 3

Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme

In der Theorie dynamischer Systeme spielen Fixpunkte eine wichtige Rolle. Wird ein dynamisches System auf lange Sicht betrachtet, so kann ein Fixpunkt anziehend oder abstoßend sein. Die Analyse der Stabilität dynamischer Systeme erfolgt in diesem Kapitel zuerst in diskreten und anschließend in kontinuierlichen Systemen. Konkrete Anwendung finden die behandelten Inhalte im Lotka-Volterra-Modell und im SIR-Modell.

3.1 Diskrete Systeme

3.1.1 Fixpunkte

Die Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten in diskreten dynamischen Systemen wird im Banach'schen Fixpunktsatz gezeigt. Bevor dieser Satz formuliert und bewiesen wird, sind einige wichtige Definitionen angeführt.

Definition 1. Sei die Menge $M \neq \emptyset$. Es wird jedem Paar von Elementen $x, y \in M$ eine reelle Zahl $d(x, y)$ zugeordnet. Die Funktion $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ wird **Metrik** auf M genannt, falls

1. $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in M$,
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in M$ und

$$4. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$$

erfüllt ist. Dabei heißt (M, d) **metrischer Raum**.

Die Definition der Metrik kann zum Beispiel in Reitmann (vgl. [38] S. 227) oder in Brucks und Bruin (vgl. [10] S. 1) nachgelesen werden.

Definition 2. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$ eine Menge. Ein Punkt $x \in M$ heißt **Häufungspunkt** von A , falls in jeder Umgebung von x Punkte aus A liegen, die von x verschieden sind, also $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A$ mit $y \neq x$ und $d(y, x) < \varepsilon$.

In Reitmann (vgl. [38] S. 227) ist die Definition eines Häufungspunkts gegeben.

Definition 3. Ist T eine Funktion, so heißt x **Fixpunkt**, falls $T(x) = x$ gilt. Der Punkt x wird auf sich selbst abgebildet.

Diese Definition besagt, dass sich der Wert von x bei Anwendung der Funktion T nicht mehr ändert und somit das dynamische System auf diesem Fixpunkt verharrt.

Nachstehende Definition ist nach Verhulst (vgl. [44] S. 211).

Definition 4. Ein Punkt $x \in X$ heißt **periodischer Punkt**, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $T^n(x) = x$.

Definition 5. Die **Periode von x** wird durch das kleinste n mit der Eigenschaft

$$n = \min\{k \in \mathbb{N} : T^k(x) = x\}$$

beschrieben. Dabei heißt x **Punkt der Periode n** . Ein Punkt der Periode 1 ist ein Fixpunkt.

Für die angeführte Definition 5 siehe Brucks und Bruin (vgl. [10] S. 20).

Definition 6. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere Menge. Weiters sei $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt T **Lipschitz-stetig** auf M , falls eine Lipschitz-Konstante K existiert ($\exists K \in \mathbb{R}$), sodass $|T(x) - T(y)| \leq K|x - y|$ für alle $x, y \in M$ gilt.

Definition 7. Eine Abbildung einer Menge M in sich selbst, $T : M \rightarrow M$, heißt **Kontraktion**, falls es ein $q < 1$ gibt, sodass für alle $x, y \in M$ gilt:

$$d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y)$$

Die Menge M wird bei mehrfacher Anwendung der Kontraktion in sich kontrahiert.

Bemerkung 1. Diese Definition entspricht Definition 6 von Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante $K < 1$.

Nachstehend ist der Banach'sche Fixpunktsatz allgemein formuliert. Er gibt Auskunft über die Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten in diskreten Systemen. Der Banach'sche Fixpunktsatz ist nach dem Mathematiker Stefan Banach (1892 – 1945) benannt. (vgl. [48] S. 163).

Satz 1 (Banach'scher Fixpunktsatz). Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x_0 von T . Weiters gilt für alle $x \in M$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x_0$$

die Näherung an den Fixpunkt beschreibt. Zusätzlich gibt die Fehlerabschätzung

$$\forall x \in M \forall n \in \mathbb{N} : d(T^n(x), x_0) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(T(x), x)$$

die Entfernung vom Fixpunkt an.

Der angeführte Beweis des Banach'schen Fixpunktsatzes entspricht dem Standardbeweis, der etwa in Heuser (vgl. [17]) nachzulesen ist. Im Zuge des Beweises werden Behauptungen aufgestellt, die anschließend bewiesen werden.

Beweis. Behauptung: Falls es einen Fixpunkt gibt, ist dieser eindeutig bestimmt.

Beweis der Behauptung: Es gilt $T(x_0) = x_0$, $T(y_0) = y_0$ und

$$d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) \leq qd(x_0, y_0).$$

Da $q < 1$ ist und daher $d(x_0, y_0) = 0$ ist, folgt $x_0 = y_0$.

Behauptung: Sei $x \in M$. Dann konvergiert $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
 Beweis der Behauptung: Sei $\varepsilon > 0$. So gilt

$$\exists N : \forall n \geq N : \frac{q^n}{1-q} d(T(x), x) < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Seien $n, m \geq N$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n < m$ annehmen. Wird die Dreiecksungleichung angewendet, so ergibt sich

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^m(x)) &\leq d(T^n(x), T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)) + \dots \\ &\quad + d(T^{m-1}(x), T^m(x)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wird die Kontraktion angewendet ergibt sich für den zweiten Summand

$$d(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)) = d(T \circ T^n(x), T \circ T^{n+1}(x)) \leq q d(T^n(x), T^{n+1}(x)),$$

für den dritten Summand

$$d(T^{n+2}(x), T^{n+3}(x)) \leq q d(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)) \leq q^2 d(T^n(x), T^{n+1}(x))$$

und so fort bis zum letzten Summand, für den gilt

$$d(T^{m-1}(x), T^m(x)) \leq q^{m-n-1} d(T^n(x), T^{n+1}(x)).$$

Wird der Ausdruck $d(T^n(x), T^{n+1}(x))$ herausgehoben, ergibt sich für (3.2) daher

$$\dots \leq d(T^n(x), T^{n+1}(x)) (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-n-1}) = \dots$$

Der verbleibende Ausdruck ist eine endliche geometrische Reihe. Deshalb folgt

$$\dots = d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \leq d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \frac{1}{1 - q}.$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} d(T^n(x), T^{n+1}(x)) &\leq \frac{1}{1-q} q d(T^{n-1}(x), T^n(x)) \leq \\ &\leq \frac{1}{1-q} q^2 d(T^{n-2}(x), T^{n-1}(x)) \leq \dots \leq \frac{1}{1-q} q^n d(T(x), x). \end{aligned}$$

Gemäß (3.1) gilt

$$\frac{q^n}{1-q}d(T(x), x) < \varepsilon.$$

Somit ist $T^n(x)$ eine Cauchyfolge. Da M vollständig ist, folgt dass $T^n(x)$ konvergiert.

Zusatz: Es gilt $d(T^n(x), \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x)) \leq \frac{q^n}{1-q}d(T(x), x)$.

Beweis Zusatz: Definiere $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein N mit $\forall k \geq N : d(T^k(x), y) < \varepsilon$. Wähle $k > \max\{N, n\}$. Es ist

$$d(T^n(x), y) \leq d(T^n(x), T^k(x)) + d(T^k(x), y).$$

Weiters ist $d(T^n(x), T^k(x)) \leq \frac{q^n}{1-q}d(T(x), x)$ und $d(T^k(x), y) < \varepsilon$. Somit folgt

$$d(T^n(x), y) \leq \frac{q^n}{1-q}d(T(x), x).$$

Behauptung: Sei $x \in M$ und der Grenzwert $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x)$. Dann gilt $T(x_0) = x_0$.

Beweis der Behauptung: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N mit $\forall n \geq N : d(T^n(x), x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle $n \geq N$. Es ist

$$d(T(x_0), x_0) \leq d(T(x_0), T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x), x_0).$$

Da $d(T(x_0), T^{n+1}(x)) \leq qd(x_0, T^n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(T^{n+1}(x), x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, ergibt sich

$$d(T(x_0), x_0) \leq d(T(x_0), T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x), x_0) < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daher ist $d(T(x_0), x_0) = 0$ und somit $T(x_0) = x_0$.

Es wurde also gezeigt, dass $T^n(x)$ konvergiert und der Grenzwert wurde x_0 genannt. Weiters wurde gezeigt, dass x_0 ein Fixpunkt ist. Da zu Beginn des Beweises gezeigt wurde, dass der Fixpunkt eindeutig ist, ergibt sich, dass $T^n(x)$ für alle $x \in M$ gegen x_0 konvergiert. \square

Der Banach'sche Fixpunktsatz besagt auch, dass x_0 ein stabiler Fixpunkt ist.

3.1.2 Stabilitätskriterium

Wurden die Fixpunkte einer Funktion T ermittelt, so kann in weiterer Folge die Stabilität der Fixpunkte analysiert werden.

Definition 8. Sei x ein Punkt der Periode n . Wenn $|(T^n)'(x)| \neq 1$ ist, so heißt der Punkt x **hyperbolisch**.

Definition 9. Der Punkt x wird **anziehender periodischer Punkt** oder **Attraktor** genannt, falls x ein hyperbolischer Punkt der Periode n ist und $|(T^n)'(x)| < 1$ gilt.

Definition 10. Der Punkt x wird **abstoßender periodischer Punkt** oder **Repellor** genannt, falls x ein hyperbolischer Punkt der Periode n ist und $|(T^n)'(x)| > 1$ gilt.

Diese beiden Definitionen sind nach Devaney (vgl. [12] S. 24, 25, 26).

Nachstehende Definition der Jacobi-Matrix in diskreten Systemen ist nach Plaschko und Brod (vgl. [34] S. 3, 8).

Definition 11. Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$ und durch

$$x_{j+1} = T(x_j)$$

eine Iteration gegeben. Dann ist die **Jacobi-Matrix**

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \frac{\partial T_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend kann die Stabilität von Fixpunkten diskreter Systeme nach Plaschko und Brod (vgl. [34] S. 10), wie nachstehend beschrieben, klassifiziert werden.

Definition 12. Je nach Lage der Eigenwerte λ_j mit $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ der Jacobi-Matrix einer linearen oder nichtlinearen Iteration können Fixpunkte wie folgt unterschieden werden.

- Der Fixpunkt ist stabil und wird **Senke** oder **Attraktor** genannt, wenn für alle Eigenwerte $|\lambda_j| < 1$ gilt. In der Gaußschen Zahlenebene bedeutet das, dass alle Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises liegen.

- Der Fixpunkt ist instabil und wird **Quelle** oder **Repellor** genannt, wenn alle Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises liegen, also $|\lambda_j| > 1$ für alle Eigenwerte gilt.
- Ein Fixpunkt ist instabil und wird **Sattelpunkt** genannt, wenn mindestens ein Eigenwert außerhalb und mindestens ein Eigenwert innerhalb des Einheitskreises liegt. Es ist somit $|\lambda_j| > 1$ für $j = 1, 2, \dots, m < n$ und $|\lambda_k| < 1$ für $k = m + 1, \dots, n$.

Falls für einen Eigenwert $|\lambda_j| = 1$ ist, kann mit dieser Linearisierungsmethode keine Aussage getroffen werden.

In Abbildung 3.1 ist die Definition in der Gaußschen Zahlenebene graphisch dargestellt.

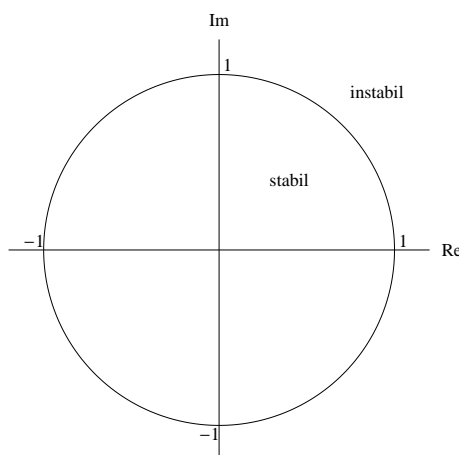


Abbildung 3.1: Stabilität der Fixpunkte in der Gaußschen Zahlenebene

3.2 Kontinuierliche Systeme

3.2.1 Qualitative Theorie autonomer Differenzialgleichungen

Für nichtlineare Differenzialgleichungssysteme gibt es keine einfachen Lösungsverfahren. Lösungswerte werden daher oft durch numerische Verfahren

bestimmt. Reicht es jedoch aus das Lösungsverhalten des Systems zu ermitteln, so kann dies ohne großen Aufwand anhand einer qualitativen Analyse erfolgen. (vgl. [16] S. 528).

Definition 13. Eine Differentialgleichung der Form $\dot{x} = T(x)$, die nicht von t abhängt, wird **autonome Differentialgleichung** genannt.

Diese Definition kann in Verhulst (vgl. [44] S. 7) nachgelesen werden.

Definition 14. Seien $\dot{x}_1 = T(x_1, x_2)$ und $\dot{x}_2 = F(x_1, x_2)$ jeweils autonome Differentialgleichungen. Dann wird

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= T(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= F(x_1, x_2)\end{aligned}$$

ein **System autonomer Differentialgleichungen erster Ordnung** genannt.

Für diese Definition siehe Arnold (vgl. [3] S. 117, 118).

Definition 15. Ein Punkt x_0 heißt **Fixpunkt** von $\dot{x} = T(x)$, falls $T(x_0) = 0$ ist.

Die Definition des Fixpunkts ist nach Verhulst (vgl. [44] S. 11).

Proposition 1. *Der Punkt x_0 ist genau dann ein Fixpunkt von $\dot{x} = T(x)$, wenn $x(t) = x_0 \forall t$ eine Lösung von $\dot{x} = T(x)$ ist.*

Beweis. (\Rightarrow) Betrachte $x(t) = x_0$. Es gilt $0 = \dot{x}(t) = 0 = T(x_0) = T(x(t))$.
(\Leftarrow) $T(x_0) = T(x(t)) = \dot{x}(t) = 0$. □

Der Fixpunkt x_0 wird in der Literatur, wie zum Beispiel in Arnold (vgl. [3] S. 15) oder in Heuser (vgl. [16] S. 535) auch kritischer Punkt, stationärer Punkt, singulärer Punkt, Ruhelage oder Gleichgewichtspunkt genannt. Die Lösung $\dot{x} = T(x)$ wird als stationäre Lösung bezeichnet.

Für eine erste Analyse bei der Untersuchung von Systemen nichtlinearer Differentialgleichungen kann die Theorie von linearen Gleichungen herangezogen werden. Somit ist es möglich Aussagen über die Stabilität von Fixpunkten zu machen. Die nachstehende formale Definition ist nach Arnold (vgl. [3] S. 157, 158) und Grüne und Junge (vgl. [15] S.47).

Definition 16. Ein linearer Operator im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n sei durch $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, wobei A die **Systemmatrix** genannt wird. Dann wird durch die sogenannte **Linearisierung**

$$\dot{x} = Ax$$

ein System von n linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

Wenn ein System autonomer Differentialgleichungen hyperbolisch genannt wird, ist nach Hirsch, Smale und Devaney (vgl. [18] S. 66) in nachstehender Definition angeführt.

Definition 17. Ist der Realteil aller Eigenwerte einer Matrix A ungleich null, also liegt kein Eigenwert auf der imaginären Achse, so wird die Matrix **hyperbolisch** genannt. Ein System von Differentialgleichungen heißt genau dann **hyperbolisch**, wenn die Matrix A des linearisierten Systems $\dot{x} = Ax$ hyperbolisch ist.

Um das Verhalten in der Nähe eines Fixpunkts zu beschreiben wird die Jacobi-Matrix des Systems ermittelt. Das Lösungsverhalten wird durch die Eigenwerte der entsprechenden Jacobi-Matrix am Fixpunkt bestimmt.

Definition 18. Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist die **Jacobi-Matrix**

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_m}{\partial x_1} & \frac{\partial T_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial T_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2. Die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = T(x(t))$ lautet in Komponentenschreibweise

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ T_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ T_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}.$$

Es sei x_0 ein Fixpunkt. Die Jacobi-Matrix von T an der Stelle x_0 ist

$$J(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} T_1(x_0) & \frac{\partial}{\partial x_2} T_1(x_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} T_1(x_0) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} T_2(x_0) & \frac{\partial}{\partial x_2} T_2(x_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} T_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} T_n(x_0) & \frac{\partial}{\partial x_2} T_n(x_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} T_n(x_0) \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Stabilitätsanalyse

In diesem Abschnitt wird die Frage, was mit den Lösungen von $\dot{x} = T(x)$ nach langer Zeit passiert, behandelt.

Um die Struktur von Lösungen in kleinen Umgebungen von Fixpunkten zu analysieren wird der Satz von Hartman und Grobman formuliert.

(vgl. [34] S. 40, [52] S. 234, [15] S. 94 und [19] S. 304).

Satz 2 (Satz von Hartman und Grobman). *Es sei $\dot{x} = T(x)$ ein autonomes System nichtlinearer Differenzialgleichungen und x_0 ein hyperbolischer Fixpunkt. Dann ist in einer Umgebung des Fixpunkts das nichtlineare System $\dot{x} = T(x)$ und seine Linearisierung $\dot{x} = Ax$ lokal topologisch konjugiert. Dies bedeutet, dass es lokal eine umkehrbare, eindeutige, stetige Abbildung mit stetiger Inversen, also einen lokalen Homöomorphismus gibt.*

Ein Beweis des Satzes ist in Jiménez López (vgl. [19] S. 304 – 317) angeführt.

Zusammengefasst sagt der Satz von Hartman und Grobman aus, dass sich die Lösungen der autonomen Differenzialgleichung in der Nähe des Fixpunkts, wie die des linearisierten Systems verhalten.

Das langfristige Verhalten der Lösungen eines autonomen, homogenen linearen Systems $\dot{x} = Ax$ hängt qualitativ vom Vorzeichen der Realteile der relevanten Eigenwerte der Matrix A ab. Es können entsprechende Eigenräume E^S und E^U nach dem qualitativen Langzeitverhalten der in ihnen enthaltenen Lösungen, wie in nachstehendem Satz nach Grüne und Junge (vgl. [15] S. 93) angeführt, zusammengefasst werden.

Satz 3 (Stabilitätskriterium). *Es sei A eine reelle $n \times n$ Matrix und $\dot{x} = Ax$. Die Eigenwerte der Matrix A werden mit λ_j bezeichnet. Dann gibt es stabile Unterräume E^S und instabile Unterräume E^U von \mathbb{R}^n mit den Eigenschaften:*

1. Für $x_0 \in E^S \setminus \{0\}$ erfüllt die Lösung x von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, dass $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ und $\limsup_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = +\infty$ ist.
2. Für $x_0 \in E^U \setminus \{0\}$ erfüllt die Lösung x von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, dass $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ ist.

Die Dimension von E^S ist die Anzahl (mit algebraischer Vielfachheit) der Eigenwerte mit negativem Realteil, also $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$. Das qualitative Verhalten der in dem Unterraum E^S enthaltenen Lösungen ist stabil. Im Unterraum E^U

sind jene Lösungen enthalten, deren qualitatives Verhalten instabil ist. Die Dimension dieses Teilraums ist die Anzahl (mit algebraischer Vielfachheit) der Eigenwerte mit positivem Realteil $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$. Ist der Realteil genau null, so kann mithilfe dieses Satzes keine Aussagen getroffen werden.

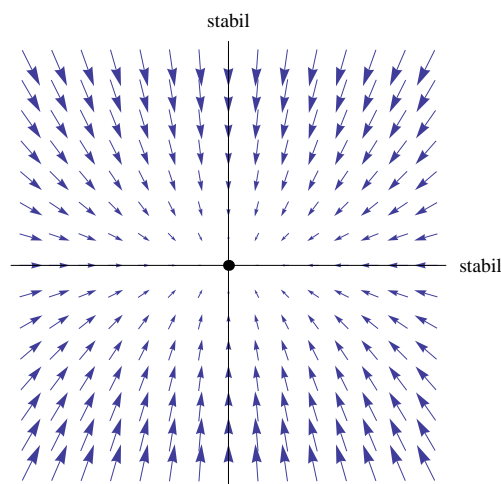


Abbildung 3.2: Attraktor

Hyperbolische Fixpunkte dynamischer Systeme können nach Plaschko und Brod (vgl. [34] S. 45) wie folgt klassifiziert werden.

Definition 19. Sei x_0 ein hyperbolischer Fixpunkt eines dynamischen Systems.

- Sind die Realteile aller Eigenwerte negativ, so ist der Fixpunkt stabil und wird **Senke** oder **Attraktor** genannt. (siehe Abbildung 3.2).
- Sind die Realteile aller Eigenwerte positiv, so ist der Fixpunkt instabil und wird **Quelle** oder **Repellor** genannt. (siehe Abbildung 3.3).
- Hat ein Teil der Eigenwerte positive Realteile und ein Teil negative, so ist der hyperbolische Fixpunkt instabil und wird **Sattelpunkt** genannt. (siehe Abbildung 3.4).

Bei dem Teil der Eigenwerte mit positivem Realteil herrscht Instabilität. Die Phasenkurven werden vom Fixpunkt abgestoßen. Andererseits herrscht bei dem Teil der Eigenwerte mit negativem Realteil Stabilität. Die Phasenkurven werden vom Fixpunkt angezogen.

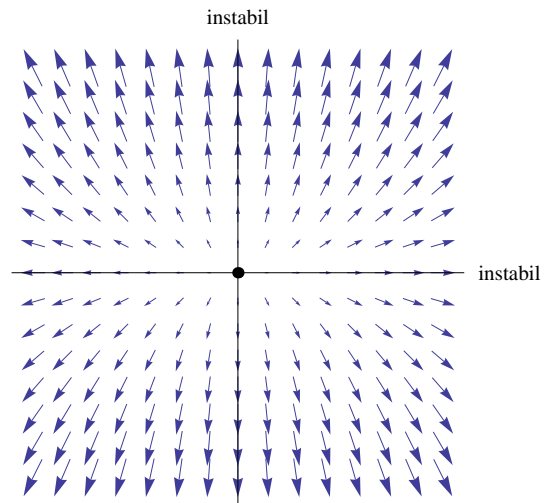


Abbildung 3.3: Repellor

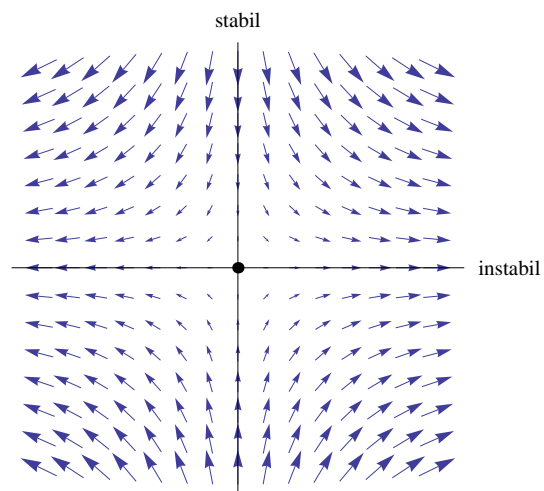


Abbildung 3.4: Sattelpunkt

Sind jedoch die Realteile der Eigenwerte null, also handelt es sich um ein nicht hyperbolisches System, kann die beschriebene Klassifizierung zur Untersuchung der Stabilität nicht herangezogen werden.

Für diesen Fall wird nachstehend die Lyapunov Funktion nach Heuser (vgl. [16] S. 547) und Wiggins (vgl. [52] S. 10, 11) definiert.

Definition 20. Sei

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= T(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= F(x_1, x_2)\end{aligned}$$

ein autonomes System und x_0 sei ein Fixpunkt dieses Systems. Dann heißt eine Funktion $L(x_1, x_2)$ **Lyapunov Funktion**, falls sie in einer offenen Umgebung U von x_0 folgende Eigenschaften besitzt:

1. L ist stetig differenzierbar,
2. L verschwindet im Fixpunkt und ist außerhalb des Fixpunkts positiv und
3. $\frac{\partial L}{\partial x_1}T + \frac{\partial L}{\partial x_2}F$ verschwindet im Fixpunkt und ist außerhalb des Fixpunkts ≤ 0 .

Bemerkung 2. Gilt bei der 3. Bedingung sogar $\frac{\partial L}{\partial x_1}T + \frac{\partial L}{\partial x_2}F < 0$, so wird L eine strikte oder strenge Lyapunov Funktion genannt.

Für eine Definition der Lyapunov Funktion in \mathbb{R}^n siehe Wiggins (vgl. [52] S. 12).

Die nach dem russischen Mathematiker Alexander Michailovič Lyapunov (1857 – 1918) (vgl. [50] S. 307) benannte Funktion dient dazu, die Stabilität eines Fixpunkts in einem dynamischen System zu beschreiben.

Für ein autonomes System, dessen Lyapunov Funktion bekannt ist, gelten nach Heuser (vgl. [16] S. 547) die in nachstehender Definition angeführten Stabilitätskriterien. Obwohl diese Definition von der sonst in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnung abweicht, wird sie hier angeführt, da sie sehr gebräuchlich ist.

Definition 21. Sei

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= T(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= F(x_1, x_2)\end{aligned}$$

ein autonomes System mit dem Fixpunkt x_0 und das System besitze die Lyapunov Funktion L . Dann ist der Fixpunkt x_0 **stabil** (d. h. eine Lösung, die nahe bei x_0 startet, bewegt sich nicht „zu weit“ von x_0 weg). Der Fixpunkt x_0 ist asymptotisch stabil (d. h. startet man nahe bei x_0 , dann gilt $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$), falls L eine strikte Lyapunov Funktion ist.

Zur Veranschaulichung der behandelten Theorie dient nachstehendes Beispiel.

Beispiel 5. Das autonome System S sei durch

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 6, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + 4x_1 - 5x_2 - 1\end{aligned}$$

gegeben. Der Fixpunkt wird bestimmt, indem $S(x) = 0$ gesetzt wird. Aus der ersten Gleichung ergibt sich für $x_1 = 3$. Wird dieses Ergebnis in die zweite Gleichung eingesetzt, so erhält man $x_2 = 4$. Somit ist der Fixpunkt $x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Das Verhalten des Systems von Differenzialgleichungen in der Nähe des Fixpunkts wird durch

$$dS(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2x_1 + 4 & -5 \end{pmatrix}$$

an der Stelle x_0 , also durch die Matrix

$$dS \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$$

bestimmt. Sind alle Einträge einer Matrix oberhalb der Hauptdiagonale null, so wird sie untere Dreiecksmatrix genannt. Analog spricht man von einer oberen Dreiecksmatrix, wenn alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonale null sind. Eine Eigenschaft von Dreiecksmatrizen ist, dass die Elemente der Hauptdiagonale die Eigenwerte der Matrix sind. Da es sich in diesem Beispiel um eine untere Dreiecksmatrix handelt, sind die Eigenwerte abzulesen. Es ist $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -5$. Da beide Eigenwerte negativ sind, ergibt sich nach Satz 3 $\dim E^S = 2$ und $\dim E^U = 0$. Gemäß Definition 19 liegt hier ein stabiler Fixpunkt, nämlich ein Attraktor vor.

Beispiele für dynamische Systeme gibt es nicht nur in der Mathematik. Einige nichtlineare Systeme dienen als mathematische Modelle für biologische Systeme. In den nächsten beiden Abschnitten werden das Lotka-Volterra-Modell und das SIR-Modell beschrieben.

3.3 Lotka-Volterra-Modell

3.3.1 Einfaches Lotka-Volterra-Modell

Es sei die Population der Prädatoren (Räuber) durch R und die Population der Beutetiere durch B festgelegt. Die Größe der jeweiligen Population ist von der Zeit abhängig. Somit gilt $R(t)$ und $B(t)$. Wie jedes Modell spiegelt auch das Räuber-Beute-Modell die Wirklichkeit aufgrund der dem Modell zugrunde gelegten Bedingungen nur vereinfacht wider. Zur Beschreibung des Modells werden die unrealistischen Annahmen getroffen, dass zum einen das gesamte Nahrungsangebot der Prädatoren die Beutepopulation ist und zum anderen das Nahrungsangebot für die Beutepopulation unbegrenzt ist. Gibt es keine Prädatoren, so wächst die Beutepopulation exponentiell. Sei a die Reproduktionsrate der Beutetiere. Dann ist die Geschwindigkeit der Vermehrung

$$\dot{B} = aB,$$

wobei $a > 0$ ist. Die Größe der Beutepopulation zum Zeitpunkt t kann durch $B(t) = B_0 e^{at}$ bestimmt werden, falls die Population der Prädatoren $R = 0$ ist. Die Kontakthäufigkeit der Prädatoren und der Beutetiere wird durch das Produkt RB beschrieben. Bei Vorhandensein von Prädatoren nimmt die Populationsgröße der Beute in Abhängigkeit von der Anzahl der Zusammenreffen zwischen Prädatoren und Beutetieren ab. Dies wird durch cBR mit $c > 0$ im Modell dargestellt. Die Differenzialgleichung für die Beutepopulation ist somit

$$\dot{B} = aB - cBR.$$

Sie beschreibt die Rate, mit der sich die Anzahl der Beutetiere ändert. Ist andererseits keine Beute vorhanden, also gilt $B = 0$, so nimmt die Population der Prädatoren exponentiell ab. Die Sterberate der Prädatorenpopulation wird durch s beschrieben. Für $B = 0$ gilt

$$\dot{R} = -sR$$

mit $s > 0$ und somit $R(t) = R_0 e^{-st}$. Langfristig stirbt die Population der Prädatoren aus. Sind jedoch Beutetiere vorhanden, so nimmt die Populationsgröße der Prädatoren je nach Anzahl der Zusammentreffen zwischen Prädatoren und Beutetieren zu. Die Zuwachsrate der Prädatoren wird durch pBR mit $p > 0$ beschrieben. Für die Geschwindigkeit mit der sich die Prädatorenpopulation vermehrt ergibt sich daher die Differenzialgleichung

$$\dot{R} = -sR + pBR.$$

(vgl. [18] S. 239 – 246, [15] S. 188, 189 und [3] S. 25, 26).

Sind $a, c, p, s > 0$ und die Größen der beiden Populationen $R, B \geq 0$, so wird die Wechselwirkung zwischen der Prädatorenpopulation und der Population der Beutetiere durch das Räuber-Beute-Modell in Form eines autonomen Systems von zwei nicht linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \frac{\partial B}{\partial t} = aB - cBR = B(a - cR) \\ \dot{R} &= \frac{\partial R}{\partial t} = -sR + pBR = R(-s + pB) \end{aligned} \quad (3.3)$$

beschrieben. Dieses Modell geht auf den italienischen Mathematiker Vito Volterra (1860 – 1940) und den Mathematiker Alfred James Lotka (1880 – 1949) zurück. (vgl. [51] S. 354).

Da das System von Differenzialgleichungen nicht geschlossen lösbar ist, wird eine qualitative Analyse durchgeführt.

(vgl. [18] S. 239 – 243, [9] S. 192 – 200, [15] S. 188, 189, [29] S. 79 – 83 und [16] S. 528 – 532).

Die Fixpunkte des Differenzialgleichungssystems werden ermittelt, indem \dot{B} und \dot{R} null gesetzt werden. Aus

$$\begin{aligned} B(a - cR) &= 0 \\ R(-s + pB) &= 0 \end{aligned}$$

ergibt sich zum einen ein Fixpunkt im Ursprung $(B, R)_1 = (0, 0)$ und ein weiterer bei $(B, R)_2 = \left(\frac{s}{p}, \frac{a}{c}\right)$.

Zur Ermittlung der Stabilität der Fixpunkte ist das linearisierte System der Differenzialgleichungen notwendig. Dieses ist

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a - cR & -cB \\ pR & -s + pB \end{pmatrix} x.$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$J(B, R) = \begin{pmatrix} a - cR & -cB \\ pR & -s + pB \end{pmatrix}.$$

Wird der erste Fixpunkt $(B, R)_1 = (0, 0)$ in die Jacobi-Matrix eingesetzt, so ergibt sich

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}.$$

Da es sich in diesem Fall um eine Dreiecksmatrix handelt, können die Eigenwerte, die die Elemente der Hauptdiagonale sind, abgelesen werden. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = a$ und $\lambda_2 = -s$. Der Realteil von λ_1 ist positiv und jener von λ_2 negativ. Daher ergibt sich nach Satz 3 $\dim E^S = 1$ und $\dim E^U = 1$. In diesem Fall handelt es sich um einen Sattelpunkt. Der Fixpunkt ist hyperbolisch instabil. Wie in Abbildung 3.5 dargestellt, herrscht in der R-Achse (Ordinate) Stabilität. Die Bahnkurven werden vom Fixpunkt angezogen. Andererseits herrscht in der B-Achse (Abszisse) Instabilität und die Bahnkurven werden vom Fixpunkt abgestoßen.

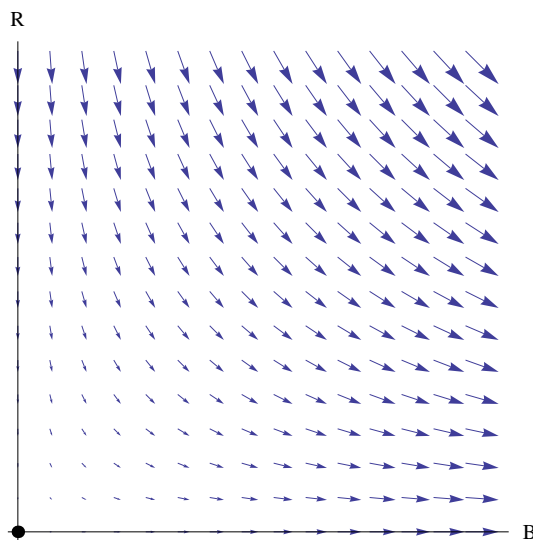


Abbildung 3.5: Phasenportrait des Fixpunkts $(0, 0)$

Für den zweiten Fixpunkt $(B, R)_2 = \left(\frac{s}{p}, \frac{a}{c}\right)$ ist die Jacobi-Matrix

$$J\left(\frac{s}{p}, \frac{a}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cs}{p} \\ \frac{ap}{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei der Bestimmung der Eigenwerte der Matrix müssen die Lösungen der quadratischen Gleichung $\lambda^2 = -as$ ermittelt werden. Somit erhält man die rein imaginären Eigenwerte $\lambda_1 = i\sqrt{as}$ und $\lambda_2 = -i\sqrt{as}$. Über die Stabilität des zweiten Fixpunkts kann zunächst nach Satz 2 und Satz 3 nichts ausgesagt werden.

Deshalb erfolgt eine erste Analyse des Verlaufs der Lösungskurven. Dazu wird nachstehende Definition der Trajektorien gegeben, die in Braunk, Junek und Krainer (vgl. [9] S. 194) nachzulesen ist.

Definition 22. Sei $\dot{x} = T(x)$ ein autonomes System von zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung. Alle Lösungskurven im Phasenraum, die durch die Zuordnung $t \rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ entstehen werden **Phasenportrait** des Systems genannt. Die Phasenkurven heißen **Trajektorien** oder **Orbits**.

Die Bestimmung der Trajektorien kann wie folgt beschrieben werden. (vgl. [16] S. 531, 532, [3] S. 26, 27, [18] S. 241 und [21] S. 132).

Um den Verlauf der Lösungskurven zu analysieren werden die Isoklinen ermittelt. Unter Isoklinen versteht man Kurven gleicher Steigung $k = T(x)$ der Differenzialgleichung $\dot{x} = T(x)$. (vgl. [16] S. 57).

Aus der Lösung von $\dot{B} = aB - cBR = 0$ ergibt sich die erste Isokline $R = \frac{a}{c}$ und die Lösung von $\dot{R} = -sR + pBR = 0$ führt zur zweiten Isokline $B = \frac{s}{p}$. Der Schnittpunkt der beiden Isoklinen ist der zweite Fixpunkt $(B, R)_2 = \left(\frac{s}{p}, \frac{a}{c}\right)$. Der Definitionsbereich $B, R \geq 0$ wird daher von den Isoklinen in vier Bereiche unterteilt. Wird am Punkt der Trajektorie mit dem kleinsten Bestand an Prädatoren ($R < \frac{a}{c}$) begonnen, so wächst die Beutepopulation und aufgrund zunehmender Nahrungsvorräte auch die Anzahl der Prädatoren. Im ersten Bereich nimmt also sowohl die Population der Beutetiere $\dot{B} > 0$, als auch die Population der Prädatoren $\dot{R} > 0$ zu. Die Lösungskurve bewegt sich gegen den Uhrzeigersinn, bis sie die Isokline $R = \frac{a}{c}$ schneidet. Die Population der Prädatoren wird übermächtig. Die Größe der Beutepopulation hat den maximalen Wert erreicht und bleibt konstant, während die Zahl der Prädatoren weiter zunimmt. Im zweiten Bereich nimmt somit die Beutepopulation ab $\dot{B} < 0$ und die Prädatorenpopulation zu $\dot{R} > 0$.

Unterschreitet die Größe der Beutepopulation den Schwellenwert $B = \frac{s}{p}$, so ist für die Prädatoren zu wenig Nahrung vorhanden und somit nimmt auch ihre Populationsgröße ab. Im dritten Bereich nimmt also sowohl die Beutepopulation $\dot{B} < 0$, als auch die Prädatorenpopulation $\dot{R} < 0$ ab. Sinkt die Populationsgröße der Prädatoren unter den Schwellenwert von $R = \frac{a}{c}$, so kann sich die Beutepopulation, die ihr Minimum erreicht hat, wieder erholen. Im vierten Bereich nimmt die Größe der Prädatorenpopulation weiter ab $\dot{R} < 0$, während die Zahl der Beutetiere zunimmt $\dot{B} > 0$. Erreicht die Population der Beutetiere den Schwellenwert $B = \frac{s}{p}$, so ist genug Beute vorhanden, um wieder ein Wachstum der Prädatorenpopulation zu ermöglichen und der Zyklus beginnt von neuem.

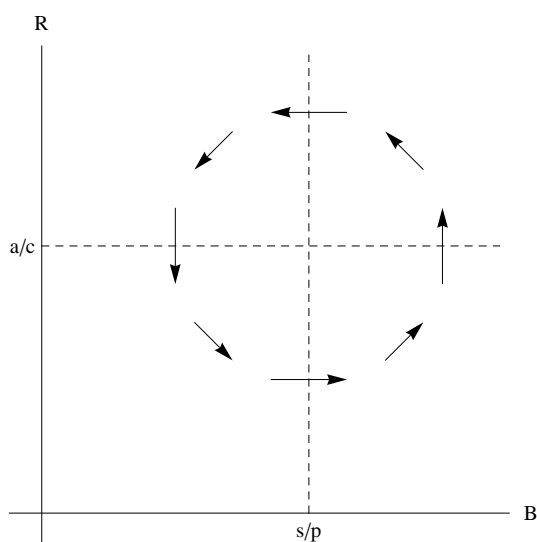


Abbildung 3.6: Analyse der Lösungskurven im Lotka-Volterra-Modell

Wie die Lösungskurven tatsächlich aussehen kann nach dieser ersten Analyse jedoch noch nicht gesagt werden. So könnten sie sich spiralförmig dem Fixpunkt nähern oder geschlossen sein, was eine periodische Schwankung der Populationsgrößen bedeuten würde.

Zur weiteren Bestimmung wird die Lyapunov Funktion nach Hirsch, Smale und Devaney (vgl. [18] S. 241, 242) durch die Methode der Trennung der Variablen ermittelt. Sei $L(B, R)$ die Lyapunov Funktion, so ist

$$\dot{L}(B, R) = \frac{\partial L(B, R)}{\partial t} = \frac{\partial L(B, R)}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial L(B, R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Werden $\frac{\partial B}{\partial t}$ und $\frac{\partial R}{\partial t}$ gemäß (3.3) ersetzt, erhält man

$$\dot{L}(B, R) = \frac{\partial L(B, R)}{\partial B} B(a - cR) + \frac{\partial L(B, R)}{\partial R} R(-s + pB).$$

Wird $\dot{L} = 0$ gesetzt ergibt sich, dass

$$\frac{\partial L(B, R)}{\partial B} \frac{B}{-s + pB} = \frac{\partial L(B, R)}{\partial R} \frac{R}{-a + cR}$$

konstant ist. Wird diese Konstante gleich 1 gesetzt, so folgt

$$\frac{\partial L(B, R)}{\partial B} = \frac{-s + pB}{B} = \frac{-s}{B} + p = p - \frac{s}{B}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial L(B, R)}{\partial R} = \frac{-a + cR}{R} = \frac{-a}{R} + c = c - \frac{a}{R}. \quad (3.6)$$

Werden die Ergebnisse von (3.5) und (3.6) in die Lyapunov Funktion (3.4) eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned} \dot{L}(B, R) &= \left(p - \frac{s}{B}\right) \frac{\partial B}{\partial t} + \left(c - \frac{a}{R}\right) \frac{\partial R}{\partial t} \\ &= p \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{s}{B} \frac{\partial B}{\partial t} + c \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{a}{R} \frac{\partial R}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wird integriert, so ergibt sich die Lyapunov Funktion

$$L(B, R) = pB - s \log B + cR - a \log R \text{ mit } B, R > 0.$$

Nach Definition 21 ist der Fixpunkt $(B, R)_2 = \left(\frac{s}{p}, \frac{a}{c}\right)$ daher stabil.

Die graphische Darstellung der Entwicklung der beiden Populationen kann in einem Phasendiagramm und in einem Zeitdiagramm erfolgen. Beim Phasendiagramm in Abbildung 3.7 ist die Größe der Beutepopulation auf der Abszisse und die Populationsgröße der Prädatoren auf der Ordinate aufgetragen. Die konstante Lyapunov Funktion

$$L(B, R) = pB - s \log B + cR - a \log R$$

beschreibt die Phasenkurven. Die Lösungskurven bewegen sich um den zweiten Fixpunkt $(B, R)_2 = \left(\frac{s}{p}, \frac{a}{c}\right)$. Dieser bestimmt somit die durchschnittlichen Größen der beiden Populationen.

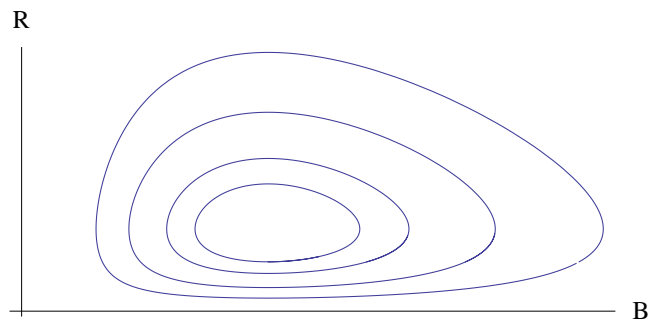


Abbildung 3.7: Phasendiagramm des Lotka-Volterra-Modells

Für jede Ausgangspopulation der Beutetiere $B(0) \neq 0$ und der Prädatoren $R(0) \neq 0$ schwanken die beiden Populationsgrößen zyklisch und zeitlich versetzt. Unabhängig von der Größe der Ausgangspopulationen kommt es weder zum Aussterben noch zu einem unbeschränkten Wachstum. (vgl. [18] S. 243).

Die Populationen der Prädatoren und der Beutetiere unterliegen periodischen Änderungen. Es kommt zu einer ungedämpften Schwingung oder Oszillation.

Das in Abbildung 3.8 angeführte Zeitdiagramm zeigt die Entwicklung der Prädatoren- und der Beutepopulation in Abhängigkeit von der Zeit t .

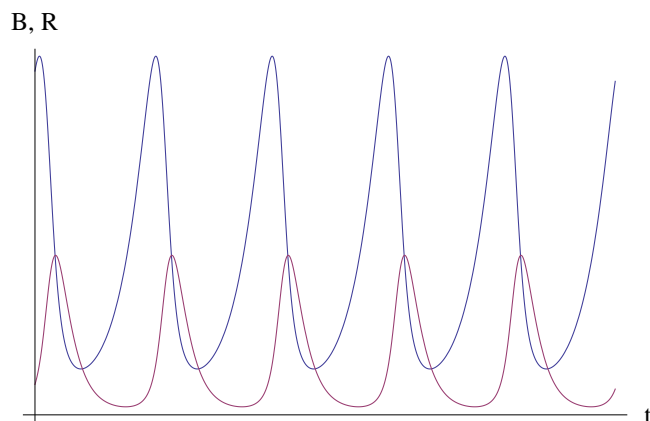


Abbildung 3.8: Zeitdiagramm des Lotka-Volterra-Modells

In dem einfachen Lotka-Volterra-Modell wurde etwa der Einfluss von intraspezifischer Konkurrenz nicht berücksichtigt. Diese Bedingung wird in dem erweiterten Lotka-Volterra-Modell miteinbezogen. Das erweiterte Modell spiegelt die Wirklichkeit besser wider als das einfache Modell.

3.3.2 Erweitertes Lotka-Volterra-Modell

Eine Erweiterung des Räuber-Beute-Modells erfolgt, indem der Aspekt der intraspezifischen Konkurrenz zum Beispiel in Form von Überweidung hinzugefügt wird. (vgl. [18] S. 243 – 246).

Die Darstellung der intraspezifischen Konkurrenz in dem Modell erfolgt durch Subtraktion von Termen, die proportional zu B^2 und R^2 sind. Gemäß dem Modell des logistischen Wachstums wird die Entwicklung der Beutepopulation ohne Vorhandensein von Prädatoren durch die Gleichung

$$\dot{B} = aB - \lambda B^2$$

beschrieben. Die Population der Prädatoren wird unter dem Aspekt der intraspezifischen Konkurrenz durch die Gleichung

$$\dot{R} = -sR - \mu R^2,$$

falls $B = 0$ ist, dargestellt.

Das erweiterte Räuber-Beute-Modell unter Berücksichtigung des begrenzten Wachstums der Populationen in Form der logistischen Gleichung wird durch das autonome System

$$\begin{aligned}\dot{B} &= \frac{\partial B}{\partial t} = B(a - cR - \lambda B) \\ \dot{R} &= \frac{\partial R}{\partial t} = R(-s + pB - \mu R)\end{aligned}$$

beschrieben. Die Größen a, c, p, s, λ und μ sind positiv und konstant. (vgl. [18] S. 243).

Die Fixpunkte des Differenzialgleichungssystems werden ermittelt, indem \dot{B} und \dot{R} null gesetzt werden. Aus

$$\begin{aligned}B(a - cR - \lambda B) &= 0 \\ R(-s + pB - \mu R) &= 0\end{aligned}$$

ergeben sich die Fixpunkte $(B, R)_1 = (0, 0)$ im Ursprung, $(B, R)_2 = \left(\frac{a}{\lambda}, 0\right)$ und $(B, R)_3 = \frac{1}{cp+\lambda\mu} (a\mu + cs, ap - s\lambda)$. Der Punkt $(B, R) = \left(0, -\frac{s}{\mu}\right)$ liegt nicht in der Definitionsmenge $B, R \geq 0$ und wird deshalb nicht behandelt.

Es wird wieder die Stabilität der Fixpunkte untersucht. (vgl. [18] S. 243 – 246, [16] S. 567 – 568 und [15] S. 189 – 191).

Das linearisierte System ist

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a - cR - 2\lambda B & -cB \\ pR & -s + pB - 2\mu R \end{pmatrix} x.$$

Für den ersten Fixpunkt $(B, R)_1 = (0, 0)$ ist die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall handelt es sich um eine Dreiecksmatrix aus der die Eigenwerte abgelesen werden können. Diese sind $\lambda_1 = a$ und $\lambda_2 = -s$. Der Realteil von λ_1 ist positiv und der von λ_2 negativ. Daher ergibt sich nach Satz 3 $\dim E^S = 1$ und $\dim E^U = 1$. Es handelt sich, wie im Fall des einfachen Lotka-Volterra-Modells um einen Sattelpunkt. Die graphische Darstellung ist in Abbildung 3.5 angeführt.

Für die Analyse der beiden anderen Fixpunkte werden zunächst die Isoklinen bestimmt. Sie ergeben sich, indem $\dot{B} = 0$ und $\dot{R} = 0$ gesetzt werden. Somit ist

$$\begin{aligned} \dot{B} = 0 &\Rightarrow a - cR - \lambda B = 0 \text{ und} \\ \dot{R} = 0 &\Rightarrow -s + pB - \mu R = 0. \end{aligned}$$

Es wird nur der erste Quadrant behandelt, da gemäß dem Definitionsbereich $B, R \geq 0$ sind. Wie in Abbildung 3.9 und in Abbildung 3.10 dargestellt, können zwei Fälle unterschieden werden.

1. Fall: Der Schnittpunkt der Isoklinen liegt nicht im ersten Quadranten.
2. Fall: Der Schnittpunkt der Isoklinen liegt im ersten Quadranten.

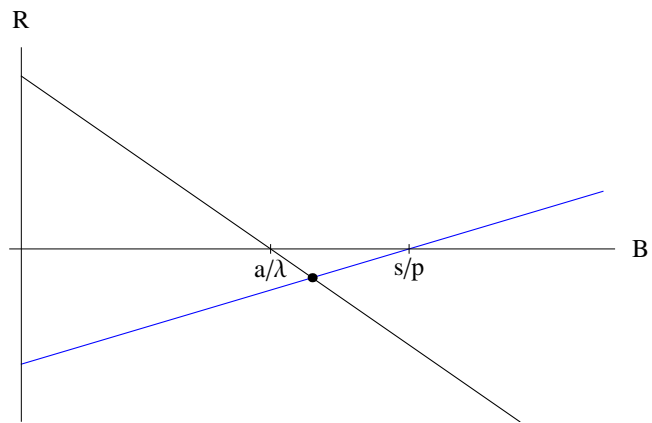


Abbildung 3.9: Isoklinien mit Schnittpunkt außerhalb des ersten Quadranten

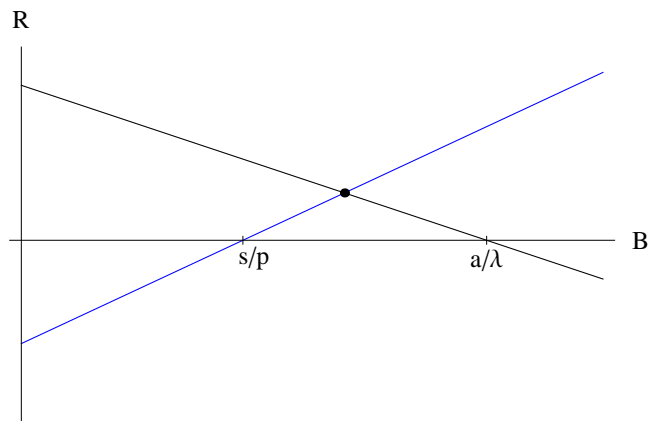


Abbildung 3.10: Isoklinien mit Schnittpunkt im ersten Quadranten

Betrachten wir zuerst den 1. Fall. Die Bestimmung der Stabilität des zweiten Fixpunkts erfolgt durch Linearisierung. Für den zweiten Fixpunkt $(B, R)_2 = \left(\frac{a}{\lambda}, 0\right)$ ergibt sich die Jacobi-Matrix

$$J\left(\frac{a}{\lambda}, 0\right) = \begin{pmatrix} -a & -c\frac{a}{\lambda} \\ 0 & -s + p\frac{a}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix eine obere Dreiecksmatrix ist, können die Eigenwerte $\lambda_1 = -a$ und $\lambda_2 = -s + p\frac{a}{\lambda}$ abgelesen werden. Der Realteil des Eigenwertes λ_1 ist negativ. Ob der Realteil des zweiten Eigenwertes positiv oder negativ ist, muss wie folgt analysiert werden. Der Schnittpunkt der Isoklinen liegt nicht im ersten Quadranten. Werden die beiden Schnittpunkte der Isoklinen mit der B -Achse betrachtet, so zeigt sich, dass der zweite Fixpunkt $(B, R)_2 = \left(\frac{a}{\lambda}, 0\right)$ links von $(B, R) = \left(\frac{s}{p}, 0\right)$ liegt. Somit gilt

$$\frac{a}{\lambda} < \frac{s}{p}.$$

Da die Variable p positiv ist, kann mit ihr multipliziert werden ohne die Ungleichung zu ändern. Daraus folgt

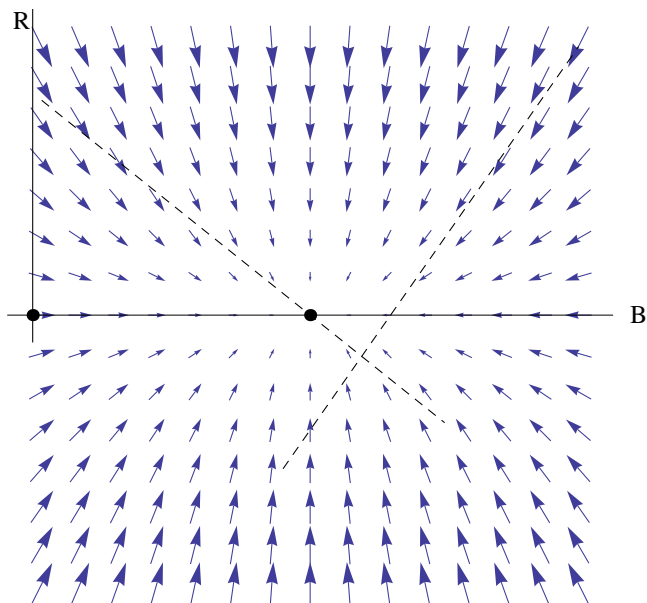
$$\frac{a}{\lambda}p < s$$

und somit ist

$$-s + p\frac{a}{\lambda} < 0.$$

Der Eigenwert $\lambda_2 = -s + p\frac{a}{\lambda}$ ist negativ. Die Realteile der beiden Eigenwerte sind reell negativ. Daher ergibt sich $\dim E^S = 2$ und $\dim E^U = 0$. Der Fixpunkt ist nach Definition 19 stabil und somit ein Attraktor.

Wie in Abbildung 3.11 dargestellt zeigt sich, dass alle Lösungskurven zu dem zweiten Fixpunkt $(B, R)_2 = \left(\frac{a}{\lambda}, 0\right)$ konvergieren. Für die beiden Populationen bedeutet diese Lösung, dass die Population der Prädatoren unabhängig von der Größe der Ausgangspopulation nach einiger Zeit ausstirbt. Der Grund dafür ist, dass zu wenig Beutetiere vorhanden sind und die Prädatoren daher nicht ausreichend Nahrung haben. Die Größe der Beutetierpopulation stabilisiert sich langfristig bei der Kapazitätsgrenze $B = \frac{a}{\lambda}$. Selbst die Populationsgröße der Beutetiere an der Kapazitätsgrenze ist zu gering, um ausreichend Nahrung für die Prädatoren darstellen zu können. Auf lange Sicht ist daher eine Koexistenz der beiden Populationen nicht möglich. (vgl. [16] S. 567 und [18] S. 244, 245).

Abbildung 3.11: Phasenportrait des Fixpunkts $(\frac{a}{\lambda}, 0)$

Sei nun der Schnittpunkt der beiden Isoklinen im ersten Quadranten. Durch einfaches Nachrechnen zeigt sich, dass in diesem Fall der Isoklinenschnittpunkt der bereits ermittelte dritte Fixpunkt

$$(B, R)_3 = \frac{1}{cp + \lambda\mu} (a\mu + cs, ap - s\lambda)$$

ist.

Durch Linearisierung ergibt sich für diesen Fixpunkt die Jacobi-Matrix

$$J(B, R)_3 = \begin{pmatrix} -\lambda B & -cB \\ pR & -\mu R \end{pmatrix}.$$

Bei der Bestimmung der Eigenvektoren der Matrix ist die quadratische Gleichung $x^2 + (\mu R + \lambda B)x + \lambda\mu BR + cpBR = 0$ zu lösen. Daraus folgt

$$x = -\frac{\mu R + \lambda B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\mu R - \lambda B)^2}{4} - cpBR}.$$

Der Wurzelausdruck kann nun abgeschätzt werden. Durch Weglassen des Summanden $-cpBR$, der sicher negativ ist, da die Faktoren c, p, B, R positiv

sind, ergibt sich

$$\sqrt{\frac{(\mu R - \lambda B)^2}{4} - cpBR} < \sqrt{\frac{(\mu R - \lambda B)^2}{4}} = \frac{|\mu R - \lambda B|}{2}.$$

Wird die Dreiecksungleichung angewendet, so folgt

$$\frac{|\mu R - \lambda B|}{2} \leq \frac{\mu R + \lambda B}{2}.$$

Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix sind daher entweder beide reell negativ oder beide komplex mit negativem Realteil. Daraus ergibt sich nach Satz 3 $\dim E^S = 2$ und $\dim E^U = 0$. Gemäß den Stabilitätskriterien in Definition 19 ist der Fixpunkt stabil und somit ein Attraktor. (vgl. [18] S. 245).

Die graphische Darstellung des Phasenportraits des Fixpunkts $(B, R)_3 = \frac{1}{cp+\lambda\mu} (a\mu + cs, ap - s\lambda)$ ist in Abbildung 3.12 zu sehen.

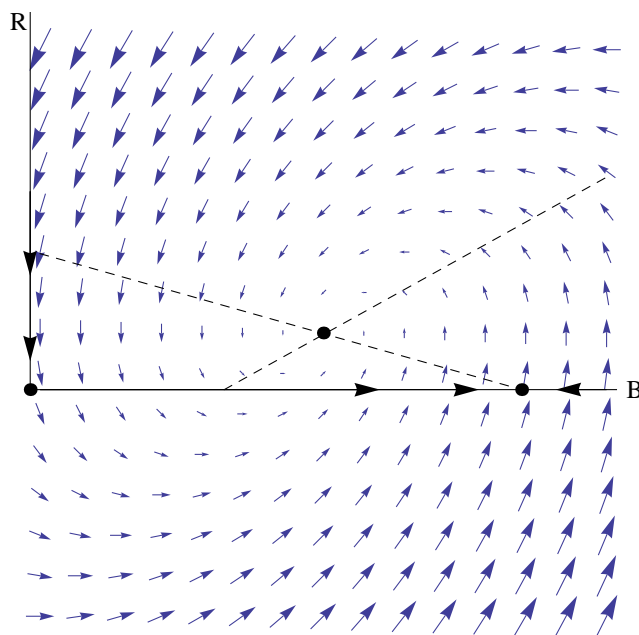


Abbildung 3.12: Phasenportrait des Fixpunkts $\frac{1}{cp+\lambda\mu} (a\mu + cs, ap - s\lambda)$

Für die Populationen der Prädatoren und der Beutetiere ist eine Koexistenz langfristig möglich. (vgl. [16] S. 567).

3.4 SIR-Modell

In diesem Abschnitt wird ein weiteres Modell vorgestellt, das durch nichtlineare Differenzialgleichungen beschrieben werden kann und dessen Stabilität analysiert wird.

Das SIR-Modell, wobei SIR für Susceptible Infected Recovered steht, stammt aus dem Themenbereich der Epidemiologie. Gemäß der Definition im Brockhaus ([32] S. 462) ist die Epidemiologie die „Lehre von der statist. Häufigkeit und Verteilung von ansteckenden Krankheiten (...) in der Bev. i. w. S. auch von nichtinfektiösen Erkrankungen wie Diabetes, Herzinfarkt, Krebs. Wesentl. Aspekte sind die Erforschung der Risikofaktoren innerhalb bestimmter Bevölkerungsgruppen, der Ursachen, Übertragungswege, klimat. und geomedizin. Voraussetzungen sowie der sozialen und volkswirtschaftl. Folgen.“

Erstmals wurde das SIR-Modell von Kermack und McKendrick 1927 in [20] beschrieben. Durch die Untersuchung einer Pestepidemie in Mumbai (früher Bombay) konnte das Modell von Kermack und McKendrick quantitativ bestätigt werden. (vgl. [16] S. 562).

Dieses Modell von nichtlinearen Differenzialgleichungen dient dazu, um die Verbreitung von Infektionskrankheiten wie zum Beispiel Masern oder Malaria darzustellen. An dieser Stelle sei erwähnt, dass Sir Ronald Ross (1857 – 1932) die Krankheit Malaria erforschte und ihre Verbreitung mit einem von ihm entwickelten mathematischen Modell beschrieb. 1902 erhielt er den Nobelpreis für Medizin für seine Arbeiten über den Nachweis, wie die Krankheit in den menschlichen Organismus gelangt. (vgl. [13] S.183, 184).

Die Grundfrage, die mit dem SIR-Modell behandelt wird, ist, wie sich eine Infektionskrankheit in einer Population entwickelt. Kann sich die Epidemie dauerhaft durchsetzen oder ist es möglich die Krankheit auszurotten? Das SIR-Modell beschreibt die Verbreitung von Infektionskrankheiten, bei denen es zur Immunitätsbildung kommt. Beispiele sind Masern, Mumps und Pocken. (vgl. [18] S. 235, 236).

Nachstehende Beschreibung des SIR-Modells ist nach Hirsch, Smale und Devaney (vgl. [18] S. 235-237), Murray (vgl. [29] S. 319-325), Thieme (vgl. [42] S. 293 – 303) sowie Ellner und Guckenheimer (vgl. [13] S. 183 – 191).

Als Grundlage dieses Modells wird die Annahme getroffen, dass die Größe der Gesamtpopulation konstant ist. Eine Infektion erfolgt durch Kontakt eines infizierten Individuums mit einem nicht Infizierten. Dabei wird angenommen, dass es keine Inkubationszeit gibt und jedes Individuum der Po-

pulation mit jedem anderen in Kontakt kommen kann. Diese Annahme wird in dem Modell durch das Produkt SI dargestellt. Somit ist das Risiko einer Infektion für alle gesunden Individuen einer Population fiktiv gleich. Die gesamte Population wird in drei disjunkte Teile (S, I, R) gegliedert, die je eine von der Zeit t abhängige Funktion darstellen.

- $S \dots$ ist die Anzahl der gesunden Individuen (susceptible individuals), die mit der Krankheit infiziert werden können.
- $I \dots$ beschreibt die Anzahl der infizierten Individuen (infected population), die die Infektion weiter verbreiten können.
- $R \dots$ ist die Anzahl der genesenen und nun immunen Individuen einer Population (recovered population).

Es sei $S \geq 0$, $I \geq 0$ und $R \geq 0$.

Der Zusammenhang dieser drei Gruppen der Population kann durch

$$S \rightarrow I \rightarrow R$$

dargestellt werden.

Sei die Anzahl der Gesamtpopulation $S + I + R$ konstant. Somit gilt

$$\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0.$$

Die Ansteckung von gesunden Individuen fließt in das Modell in Form der Infektionsrate e mit $e > 0$ und konstant ein. Diese ist proportional zu der Anzahl der gesunden Individuen und zur Anzahl der Infizierten. Die Heilung von Kranken wird durch die Genesungsrate g mit $g > 0$ und konstant berücksichtigt.

Das SIR-Modell wird durch die drei Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \frac{\partial S}{\partial t} = -eSI, \\ \dot{I} &= \frac{\partial I}{\partial t} = eSI - gI, \\ \dot{R} &= \frac{\partial R}{\partial t} = gI\end{aligned}$$

beschrieben.

Die Anfangsbedingungen sind

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0 \text{ mit } S_0 > 0, \\ I(0) &= I_0 \text{ mit } I_0 > 0 \text{ und} \\ R(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Modell dient dazu, um bei gegebenen e, a, S_0 und I_0 herauszufinden, ob die Krankheit sich ausbreitet, wie sich die Epidemie entwickelt und wann die Anzahl der erkrankten Individuen in der Population wieder abnimmt. (vgl. [29] S. 321).

Sind $S(t)$ und $I(t)$ gegeben, so kann $R(t)$ berechnet werden. Somit ist es ausreichend das zweidimensionale System

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{\partial S}{\partial t} = -eSI \\ \dot{I} &= \frac{\partial I}{\partial t} = eSI - gI \end{aligned}$$

zu betrachten. Zur Ermittlung der Fixpunkte werden die beiden Gleichungen null gesetzt. Aus

$$\begin{aligned} -eSI &= 0 \text{ und} \\ eSI - gI &= 0 \end{aligned}$$

ergibt sich, dass für $I = 0$ die Größe S beliebige Werte aus dem Definitionsbereich annehmen kann. Alle Fixpunkte liegen daher auf der S -Achse, der Abszisse.

Das linearisierte System ist

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -eI & -eS \\ eI & eS - g \end{pmatrix} x.$$

Für jeden Wert S aus dem Definitionsbereich ergibt sich mit $(S, 0)$ die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -eS \\ 0 & eS - g \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix eine obere Dreiecksmatrix ist, können die Eigenwerte abgelesen werden. Sie sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = eS - g$. Falls $0 < S < \frac{g}{e}$ ist, dann ist der

Eigenwert λ_2 negativ. Er ist positiv, falls $S > \frac{g}{e}$ gilt. Da ein Eigenwert null ist, kann nach Satz 2 und Satz 3 zunächst nichts über die Stabilität ausgesagt werden.

Für eine erste Analyse werden die Isoklinen betrachtet. Aus

$$\dot{I} = eSI - gI = 0$$

folgt

$$eS = g$$

und es ergibt sich die Isokline

$$S = \frac{g}{e}.$$

Ist $I > 0$, dann gilt für die Anzahl der gesunden Individuen S :

1. Ist $S > \frac{g}{e}$, so folgt dass die Zahl der Infizierten zunimmt $\dot{I} > 0$,
2. ist $S = \frac{g}{e}$, so ist die Zahl der infizierten Personen auf einem konstanten Niveau $\dot{I} = 0$,
3. und wenn $S < \frac{g}{e}$ ist, dann nimmt die Zahl der Infizierten ab $\dot{I} < 0$.

(vgl. [29] S. 320, 321).

Diese Analyse der Lösungskurven ist in Abbildung 3.13 graphisch dargestellt.

Nach der ersten Analyse werden nun zur genaueren Betrachtung die Trajektorien bestimmt. Die Trajektorien sind die Integralkurven der Differenzialgleichungen

$$\frac{\dot{I}}{\dot{S}} = \frac{\frac{\partial I}{\partial t}}{\frac{\partial S}{\partial t}} = \frac{\partial I}{\partial S} = \frac{eSI - gI}{-eSI} = -1 + \frac{g}{eS}.$$

(vgl. [16] S. 561).

Durch die Methode der Trennung der Variablen folgt

$$\int 1 dI = - \int 1 dS + \frac{g}{e} \int \frac{1}{S} dS,$$

woraus sich

$$I(S) = -S + \frac{g}{e} \log S + C \tag{3.7}$$

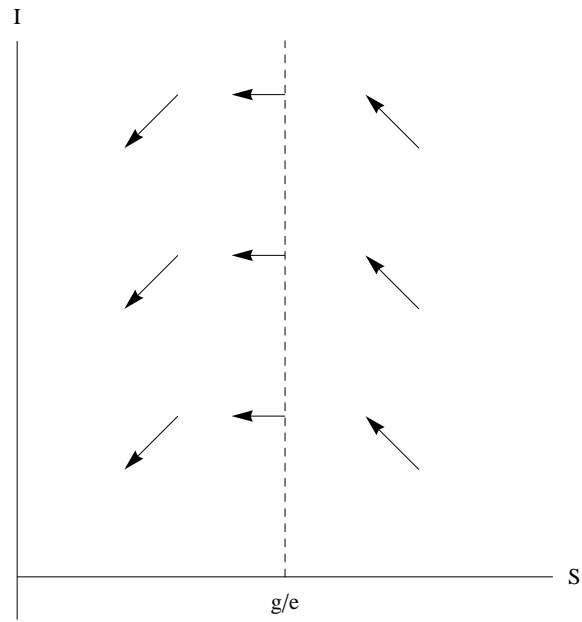


Abbildung 3.13: Analyse der Lösungskurven im SIR-Modell

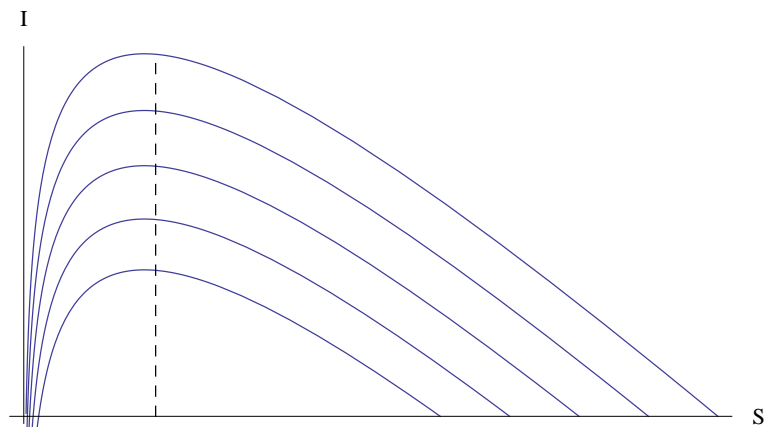


Abbildung 3.14: Phasendiagramm des SIR-Modells

ergibt. Dabei ist C eine Integrationskonstante. Die konstante Funktion (3.7) beschreibt die Lösungskurven. Wie in Abbildung 3.14 dargestellt, wird durch die Lösungskurven jeder Fixpunkt aus dem Intervall $\frac{g}{e} < S < \infty$ mit einem Fixpunkt aus $0 < S < \frac{g}{e}$ verbunden. (vgl. [18] S. 237).

Dies bedeutet für jede Ausgangspopulation S_0 mit $S_0 < \frac{g}{e}$, dass die Anzahl der Infizierten abnimmt und die Krankheit rasch verschwindet. Ist die Ausgangspopulation $S_0 > \frac{g}{e}$, so nimmt die Anzahl der gesunden Individuen ab und die Anzahl der infizierten Individuen zu. Dies bedeutet, dass sich die Krankheit zu einer Epidemie auswächst. Erst nach dem Erreichen des Maximalwertes, der auf der Isokline $S = \frac{g}{e}$ liegt, wird die Epidemie wieder abklingen. Nach Überschreiten dieses Schwellenwertes nimmt die Zahl der infizierten Individuen ab, bis $I = 0$ ist. Die Gefahr, die eine Epidemie mit sich bringt, wird durch die Größe $\frac{g}{e}$ bestimmt. Je kleiner dieser Wert ist, desto größer ist die Gefahr einer Epidemie. (vgl. [16] S. 562).

Auch beim *SIR*-Modell gibt es ein erweitertes Modell, das an dieser Stelle kurz erwähnt wird. Im erweiterten *SIRS*-Modell wird die zusätzliche Annahme getroffen, dass die genesenen Individuen (R) wieder in die Klasse der gesunden und somit für die Infektionskrankheit anfälligen Individuen (S) zurückkehren. Dieses Modell wird zum Beschreiben von Infektionskrankheiten wie Malaria oder Tuberkulose herangezogen. Nähere Informationen dazu können in Hirsch, Smale und Devaney (vgl. [18] S. 238, 239) oder Heuser (vgl. [16] S. 562, 563) nachgelesen werden.

Allgemein sind für die Beschreibung mathematischer Modelle in der Biologie die Werke [29] und [30] von Murray zu empfehlen.

Kapitel 4

Bifurkation

In diesem Kapitel wird die Änderung der Stabilität von Fixpunkten behandelt. Nach einer Erklärung des Begriffs Bifurkation erfolgt eine Beschreibung verschiedener Arten von Bifurkationen. Eine davon ist die Periodenverdoppelung-Bifurkation, die einen Weg ins „Chaos“ beschreibt. Anhand dieses Beispiels wird am Ende des Kapitels „Chaos nach Devaney“ definiert.

4.1 Einleitung

Bifurkation (lat. *furca* „Gabel“) bedeutet Gabelung. Der Name Bifurkation tritt in vielen Bereichen auf. In der Anatomie wird durch Bifurkation die Gabelung der Luftröhre in den rechten und linken Hauptbronchenast beschrieben. Die Gabelung von Fließgewässern in der Hydrologie stellt ebenfalls eine Bifurkation dar. Im Bereich der Mathematik ist die Bifurkationstheorie ein „mathemat. Forschungsgebiet, in dem Gleichungen behandelt werden, deren parameterabhängige Lösungen sich für bestimmte Werte der Parameter verzweigen.“ ([31] S. 294).

Bifurkationen können in diskreten und kontinuierlichen dynamischen Systemen auftreten. Deshalb werden zunächst diese beiden Fälle genauer beschrieben. Anschließend werden die häufigsten Arten von Bifurkationen, nämlich die Sattel-Knoten-Bifurkation, die Pitchfork-Bifurkation, die transkribische Bifurkation und die Periodenverdoppelung-Bifurkation dargestellt. Die angeführten Bifurkationen werden jeweils anhand eines passend gewählten Beispiels in einem diskreten oder kontinuierlichen dynamischen System beschrieben.

4.1.1 Bifurkation in diskreten Systemen

In der Bifurkationstheorie diskreter dynamischer Systeme wird die Veränderung von Funktionen unter ändernden Parametern untersucht. Von dieser Änderung ist oft die Struktur von periodischen Punkten betroffen. (vgl. [12] S. 79).

Bei einer Bifurkation kann es auch zur Entstehung von neuen Fixpunkten kommen. Nachstehende Proposition besagt, dass in diskreten dynamischen Systemen neue Fixpunkte oder periodische Punkte nur in der Nähe von Fixpunkten oder periodischen Punkten, die nicht hyperbolisch sind, auftreten können. Ebenso kann nur in so einer Situation ein Fixpunkt oder periodischer Punkt zerstört werden. (vgl. [12] S. 85 und [18] S. 333).

Proposition 3. *Eine Familie von stetig differenzierbaren Funktionen, die nur von dem Parameter λ abhängt, wird durch T_λ beschrieben. Weiters sei $(x, \lambda) \mapsto T_\lambda(x)$ stetig differenzierbar. Für den Fixpunkt x_0 gelte $T_{\lambda_0}(x_0) = x_0$ und $T'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$. Dann gibt es um x_0 ein Intervall I und um λ_0 ein Intervall N , sowie eine stetig differenzierbare Funktion $f : N \rightarrow I$, sodass $f(\lambda_0) = x_0$ und $T_\lambda(f(\lambda)) = f(\lambda)$ gilt. Im Intervall I hat die Familie von Funktionen T_λ keine weiteren Fixpunkte.*

Mithilfe des Satzes über die implizite Funktion kann die Proposition bewiesen werden. Der Beweis wird nach Devaney (vgl. [12] S. 86) und Hirsch, Smale und Devaney (vgl. [18] S. 333) geführt.

Beweis. Definiere eine stetig differenzierbare Funktion $F(x, \lambda) := T_\lambda(x) - x$. Um den Satz über die implizite Funktion anwenden zu können, müssen zwei Voraussetzungen nachgeprüft werden. Zum einen ist $F(x_0, \lambda_0) = 0$ und zum anderen ist $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \lambda_0)$ invertierbar, da gilt $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = T'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0$. Nach dem Satz über die implizite Funktion gibt es ein Intervall I um x_0 , ein Intervall N um λ_0 und eine stetige Funktion $f : N \rightarrow I$ mit $f(\lambda_0) = x_0$, sodass gilt

$$F(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow x = f(\lambda).$$

Somit folgt

$$F(f(\lambda), \lambda) = T_\lambda(f(\lambda)) - f(\lambda) = 0,$$

woraus sich $T_\lambda(f(\lambda)) = f(\lambda)$ ergibt. □

Wird T durch T^n ersetzt, so gilt diese Proposition auch für periodische Punkte. (vgl. [12] S. 87).

4.1.2 Bifurkation in kontinuierlichen Systemen

Nach Grüne und Junge (vgl. [15] S. 137) beschreibt eine Bifurkation die Änderung von qualitativen Eigenschaften der Lösungen eines kontinuierlichen dynamischen Systems, das von externen Parametern abhängt.

Systeme, bei denen Bifurkationen auftreten bezeichnet man als *strukturell instabil*. Treten Bifurkationen beim Übergang von einem Fixpunkt zu einem anderen auf, so werden sie *statische Bifurkationen* genannt. Es kann jedoch auch durch die Änderung eines Parameters zum Übergang von einem Fixpunkt zu einem Grenzzyklus kommen. Von *dynamischen Bifurkationen* spricht man, wenn sie beim Übergang von einem Grenzzyklus zu einem anderen Grenzzyklus auftreten. (vgl. [34] S. 71).

Es kann nicht nur zwischen statischen und dynamischen, sondern auch zwischen lokalen und globalen Bifurkationen unterschieden werden. Lokale Bifurkationen laufen nahe einzelner Orbits eines dynamischen Systems ab. Betreffen Bifurkationen sofort einen großen Teil des Phasenraums, so werden sie globale Bifurkationen genannt. (vgl. [38] S. 115).

In weiterer Folge werden nur lokale und statische Bifurkationen behandelt.

4.2 Sattel-Knoten-Bifurkation

Es werden zuerst ein Beispiel der Sattel-Knoten-Bifurkation in einem diskreten und anschließend zwei Beispiele in einem kontinuierlichen dynamischen System dargestellt.

Sattel-Knoten-Bifurkation in diskreten Systemen

In diskreten Systemen wird die Sattel-Knoten-Bifurkation durch nachstehende Proposition beschrieben. (vgl. [12] S. 87 und [52] S. 358 – 361).

Proposition 4. *Sei $(T_\lambda)_\lambda$ eine Familie von Funktionen, sodass $(x, \lambda) \mapsto T_\lambda(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Weiters gelten*

1. $T_{\lambda_0}(x_0) = x_0$,
2. $T'_{\lambda_0}(x_0) = 1$,
3. $T''_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$ und
4. $\frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$.

Dann gibt es ein Intervall I um x_0 und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, sodass gilt $T_{f(x)}(x) = x$, $f(x_0) = \lambda_0$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.

Der Beweis dieser Proposition ist in Devaney (vgl. [12] S. 88, 89) angeführt.

Ein Beispiel der Sattel-Knoten-Bifurkation ist nach Devaney (vgl. [12] S. 79, 80) durch die Familie der Exponentialfunktionen der Form

$$T(x) = \lambda e^x, \text{ mit } \lambda > 0$$

gegeben. Bifurkation tritt bei $\lambda = \frac{1}{e}$ auf. Es können drei Fälle unterschieden werden.

1. Fall: $\lambda > \frac{1}{e}$
Der Graph der Funktion und die Diagonale berühren einander nicht. Die Funktion T hat keinen Fixpunkt. Anschaulich folgt, dass bei Iteration $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = \infty$ für alle x gilt.
2. Fall: $\lambda = \frac{1}{e}$
In diesem Fall berührt der Graph der Funktion die Diagonale. Die Funktion hat an der Stelle 1 einen Fixpunkt, da $T(1) = 1$ gilt. Auf lange Sicht können zwei Fälle unterschieden werden. Zum einen ist $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = 1$ für alle $x < 1$ und zum anderen ist $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = \infty$ für alle $x > 1$.
3. Fall: $0 < \lambda < \frac{1}{e}$
Der Graph der Funktion und die Diagonale schneiden einander in zwei Punkten. Diese sind a mit $T'(a) < 1$ und b mit $T'(b) > 1$. Da $T(a) = a$ und $T(b) = b$ gilt, hat die Funktion T in diesem Fall zwei Fixpunkte. Diese sind sozusagen neu entstanden. Ist $x < b$, so wird die langfristige Entwicklung durch $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = a$ beschrieben. Ist im anderen Fall $x > b$, so folgt langfristig $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = \infty$.

Das beschriebene Beispiel einer Sattel-Knoten-Bifurkation ist in den Bifurkationsdiagrammen in den Abbildungen 4.1, 4.2 und 4.3 dargestellt. Der Parameter λ ist auf der Abszisse und die Werte der periodischen Punkte x sind auf der Ordinate aufgetragen.

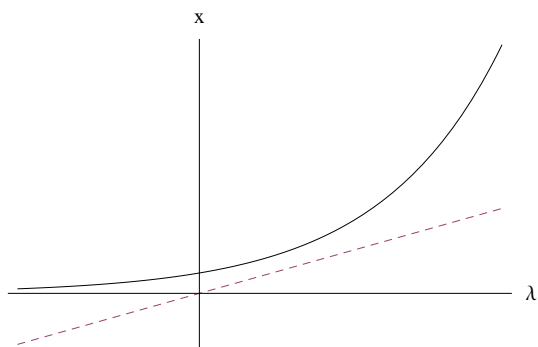


Abbildung 4.1: Sattel-Knoten-Bifurkation λe^x mit $\lambda > \frac{1}{e}$

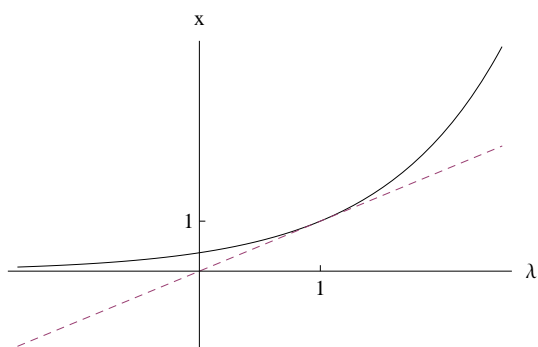


Abbildung 4.2: Sattel-Knoten-Bifurkation λe^x mit $\lambda = \frac{1}{e}$

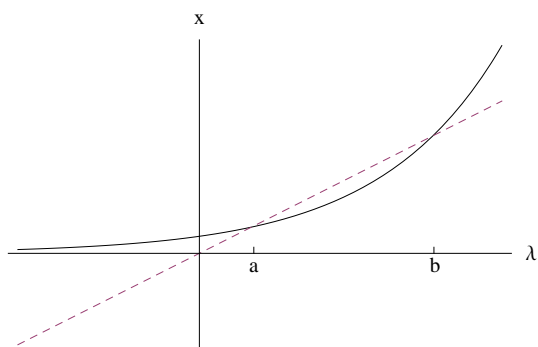


Abbildung 4.3: Sattel-Knoten-Bifurkation λe^x mit $0 < \lambda < \frac{1}{e}$

Sattel-Knoten-Bifurkation in kontinuierlichen Systemen

Die Sattel-Knoten-Bifurkation in einem kontinuierlichen dynamischen System wird nach Hirsch, Smale und Devaney (vgl. [18] S. 177) und Wiggins (vgl. [52] S. 279) durch nachstehende Proposition beschrieben.

Proposition 5. *Sei $\dot{x} = T_\mu(x)$ eine Differenzialgleichung erster Ordnung, wobei $(x, \mu) \mapsto T_\mu(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Falls gilt*

1. $T_{\mu_0}(x_0) = 0$,
2. $T'_{\mu_0}(x_0) = 0$,
3. $T''_{\mu_0}(x_0) \neq 0$ und
4. $\frac{\partial T_{\mu_0}}{\partial \mu}(x_0) \neq 0$,

dann tritt bei $\mu = \mu_0$ eine Sattel-Knoten-Bifurkation auf.

Der Beweis dieser Proposition ist in Hirsch, Smale und Devaney (vgl. [18] S. 177, 178) nachzulesen.

Eine Sattel-Knoten-Bifurkation ist zum Beispiel durch die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = T(x) = \mu - x^2$$

mit $x, \mu \in \mathbb{R}$ gegeben.

(vgl. [34] S. 80 – 84, [15] S. 138 – 141 und [52] S. 255, 256).

Die Fixpunkte sind $x_1 = \sqrt{\mu}$ und $x_2 = -\sqrt{\mu}$ für $\mu > 0$. Ist $\mu = 0$ erhält man den Fixpunkt $x_0 = 0$ und falls $\mu < 0$ ist, so gibt es keine Fixpunkte.

Zusammengefasst können drei Fälle unterschieden werden. Diese sind

1. Fall: $\mu < 0$
Die Funktion $T(x)$ enthält keine Fixpunkte.
2. Fall: $\mu = 0$
Der Fixpunkt $x_0 = 0$ ist der einzige Fixpunkt der Funktion. Er wird Bifurkationspunkt genannt.
3. Fall: $\mu > 0$
Die Funktion hat die beiden Fixpunkte $x_1 = \sqrt{\mu}$ und $x_2 = -\sqrt{\mu}$. Um die Stabilität der Fixpunkte zu analysieren, wird $T'(x) = -2x$ bestimmt. Bei $x_1 = \sqrt{\mu}$ ergibt sich $T'(\sqrt{\mu}) = -2\sqrt{\mu}$. Da $T' < 0$ ist, ist der Fixpunkt stabil. Für $x_2 = -\sqrt{\mu}$ erhält man $T'(-\sqrt{\mu}) = 2\sqrt{\mu} > 0$. Somit ist dieser Fixpunkt instabil.

In Abbildung 4.4 ist ein Beispiel der Sattel-Knoten-Bifurkation dargestellt. Auf der Abszisse ist der Parameter μ und auf der Ordinate sind die Fixpunkte x aufgetragen. Der Bereich der stabilen Fixpunkte ist durch eine durchgehende Linie und der Bereich der instabilen Fixpunkte durch eine strichlierte Linie dargestellt.

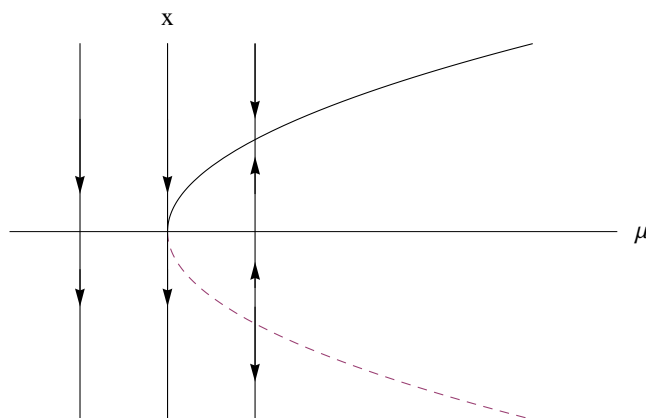


Abbildung 4.4: Sattel-Knoten-Bifurkation von $\dot{x} = \mu - x^2$

Warum diese Art der Verzweigung Sattel-Knoten-Bifurkation heißt, ist anhand des nachstehenden Beispiels ersichtlich.

(vgl. dazu [18] S. 179, 180 und [15] S. 140).

In der Ebene \mathbb{R}^2 wird das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - \mu \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

betrachtet. Wieder können drei Fälle unterschieden werden. Diese sind

1. Fall: $\mu < 0$

In diesem Fall besitzt das System keinen Fixpunkt.

2. Fall: $\mu = 0$

Das System hat einen Fixpunkt. Dieser ist $x_0 = 0$.

3. Fall: $\mu > 0$

In diesem Fall gibt es zwei Fixpunkte, nämlich $x_1 = \sqrt{\mu}$ und $x_2 = -\sqrt{\mu}$.

Das linearisierte System ist

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Für den Fixpunkt x_1 ist die Jacobi-Matrix

$$J(x_1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix eine Dreiecksmatrix ist, können die Eigenwerte $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu}$ und $\lambda_2 = -1$ abgelesen werden. Der Realteil von λ_1 ist positiv und der Realteil von λ_2 negativ. Daher ergibt sich nach Satz 3 $\dim E^S = 1$ und $\dim E^U = 1$. Der Fixpunkt ist ein Sattelpunkt.

Wird der zweite Fixpunkt x_2 eingesetzt, ergibt sich die Jacobi-Matrix

$$J(x_2) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -2\sqrt{\mu}$ und $\lambda_2 = -1$. Da die Realteile beider Eigenwerte negativ sind, ist $\dim E^S = 2$ und $\dim E^U = 0$. Der stabile Fixpunkt wird Attraktor oder wie in einigen Werken (vgl. [15] S. 140) auch „Knoten“ genannt. Da einer der auftretenden Fixpunkte ein Sattel und der andere ein Knoten ist, wird diese Art der Bifurkation Sattel-Knoten-Bifurkation genannt.

Sattel-Knoten-Bifurkationen können auch für höherdimensionale Systeme auf \mathbb{R}^n verallgemeinert werden. Nähere Information dazu kann zum Beispiel in Plaschko und Brod (vgl. [34] S. 81 – 84) nachgelesen werden.

4.3 Pitchfork-Bifurkation

Die nachfolgend beschriebene Bifurkation, die anhand von einem Beispiel in kontinuierlichen dynamischen Systemen veranschaulicht wird, wird Pitchfork-Bifurkation oder Heugabel-Bifurkation genannt.

Eine Pitchfork-Bifurkation wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{x} = T(x) = \mu x - x^3$$

beschrieben.

(vgl. [15] S. 141, 142, [34] S. 85, 86, [18] S. 178, 179 und [52] S. 257, 258).

Wird $\mu x - x^3 = 0$ gesetzt, so erhält man die Fixpunkte $x_0 = 0$ für alle μ sowie $x_1 = \sqrt{\mu}$ und $x_2 = -\sqrt{\mu}$ für alle $\mu > 0$. Es werden somit folgende zwei Fälle unterschieden

1. Fall: $\mu \leq 0$

Der Fixpunkt ist $x_0 = 0$. Die Stabilität kann durch $\frac{\partial T}{\partial x}(x, \mu) = \mu - 3x^2$ analysiert werden. Da $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, \mu) = \mu$ ist, ergibt sich für $\mu < 0$, dass $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, \mu) < 0$ ist. Bei $\mu = 0$ ist $\dot{x} = -x^3$ und $\frac{\partial T}{\partial x}(x, \mu) = -3x^2 < 0$. Somit ist der Fixpunkt $x_0 = 0$ stabil.

2. Fall: $\mu > 0$

In diesem Fall treten die drei Fixpunkte $x_0 = 0$, $x_1 = \sqrt{\mu}$ und $x_2 = -\sqrt{\mu}$ auf. Es wird $\frac{\partial T}{\partial x}(x, \mu) = \mu - 3x^2$ zur Stabilitätsanalyse herangezogen. Im Fall des ersten Fixpunkts ist $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, \mu) = \mu$ positiv. Der Fixpunkt $x_0 = 0$ ist daher instabil. Die beiden anderen Fixpunkte x_1 und x_2 sind stabil, da $\frac{\partial T}{\partial x}(x_1, \mu) = \mu - 3\mu = -2\mu < 0$ und $\frac{\partial T}{\partial x}(x_2, \mu) = \mu - 3\mu = -2\mu < 0$ sind.

Der Fixpunkt $x_0 = 0$ verliert seine Stabilität bei $\mu = 0$ an die beiden anderen Fixpunkte. (vgl. [15] S. 141, 142).

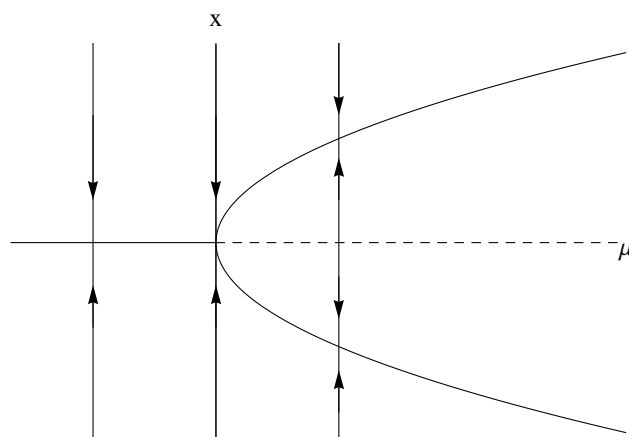


Abbildung 4.5: Pitchfork-Bifurkation

Die Pitchfork-Bifurkation ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Das Aussehen der Grafik erklärt den Namen Pitchfork-Bifurkation oder Heugabel-Bifurkation.

4.4 Transkribische Bifurkation

Die transkribische Bifurkation wird anhand eines Beispiels in einem kontinuierlichen dynamischen System beschrieben. Diese Bifurkation ist durch die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = T(x) = \mu x - x^2$$

gegeben.

(vgl. [34] S. 80, 84, 85, [52] S. 256, 257 und [44] S. 183, 184).

Wird $\dot{x} = 0$ gesetzt, so ergeben sich die Fixpunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = \mu$. Bei der Analyse der Stabilität der Fixpunkte wird $\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \mu - 2x$ ermittelt. Es können drei Fälle unterschieden werden.

1. Fall: $\mu < 0$

Da $\frac{\partial T}{\partial x}(x_1) = \mu < 0$ ist, ist der Fixpunkt $x_1 = 0$ stabil. Andererseits ist $\frac{\partial T}{\partial x}(x_2) = \mu - 2\mu = -\mu > 0$ und somit ist der Fixpunkt $x_2 = \mu$ instabil.

2. Fall: $\mu = 0$

Bei $\mu = 0$ und $x = 0$ tritt Bifurkation auf. In diesem Fall ist der Fixpunkt stabil. Der Punkt $(0, 0)$ wird Bifurkationspunkt genannt.

3. Fall: $\mu > 0$

Es ist $\frac{\partial T}{\partial x}(x_1) = \mu > 0$. Der Fixpunkt $x_1 = 0$ ist instabil. Da $\frac{\partial T}{\partial x}(x_2) = -\mu < 0$ gilt, ist der Fixpunkt $x_2 = \mu$ stabil.

Bei der transkribischen Bifurkation ändert sich die Stabilität der beiden Fixpunkte am Bifurkationspunkt. Abbildung 4.6 zeigt die transkribische Bifurkation. Stabile Fixpunkte sind durch eine durchgehende und instabile durch eine strichlierte Linie dargestellt.

Die transkribische Bifurkation kann für höherdimensionale Systeme auf \mathbb{R}^n verallgemeinert werden. In Plaschko und Brod (vgl. [34] S. 84, 85) kann darüber nachgelesen werden.

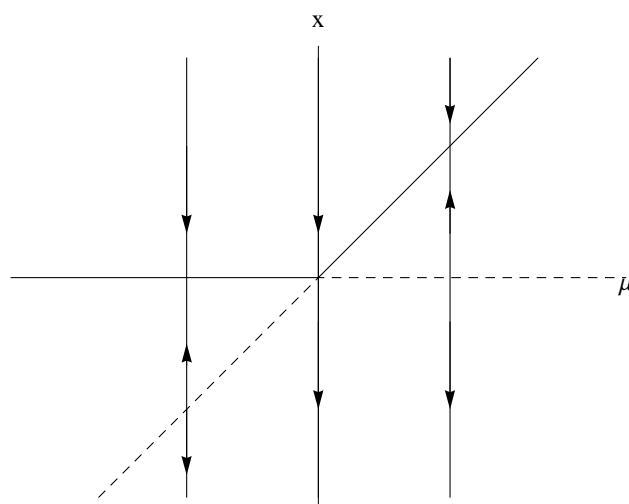


Abbildung 4.6: Transkribische Bifurkation

4.5 Periodenverdoppelung-Bifurkation

Die Periodenverdoppelung-Bifurkation tritt nur in diskreten dynamischen Systemen auf. Nachstehende Proposition beschreibt diese Bifurkation. (vgl. [12] S. 89 und [52] S. 371 – 374).

Proposition 6. *Es sei $(T_\lambda)_\lambda$ eine Familie von Funktionen, für die $(x, \lambda) \mapsto T_\lambda(x)$ dreimal stetig differenzierbar ist. Weiters gelte*

1. $T_\lambda(x_0) = x_0$ für alle Parameter λ in einem Intervall um λ_0 ,
2. $T'_{\lambda_0}(x_0) = -1$,
3. $T'''_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$ und
4. $\frac{\partial(T_\lambda^2)'}{\partial\lambda}(x_0) \neq 0$.

Dann gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Intervall I um x_0 , sodass $T_{f(x)}(x) \neq x$ und $T_{f(x)}^2(x) = x$ gelten.

Der Beweis dieser Proposition kann in Devaney (vgl. [12] S. 90, 91) nachgelesen werden.

Die Periodenverdoppelung-Bifurkation wird anhand eines Anwendungsbeispiels aus der Populationsbiologie beschrieben.

(vgl. [11] S. 30ff, 45, [12] S. 31 – 36, [44] S. 213 – 217 und [23] S. 13 – 20). Die Funktion $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit

$$T(x) = ax(1 - x) \quad (4.1)$$

beschreibt das logistische Wachstum. Dieses Beispiel wird herangezogen um Bifurkation, genauer Periodenverdoppelung zu beschreiben.

Das Maximum von (4.1) wird bestimmt, indem die Ableitung null gesetzt wird. Somit folgt

$$T'(x) = a(1 - 2x) = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Dies bedeutet, dass bei $x = \frac{1}{2}$ die Geschwindigkeit mit der die Population wächst am größten ist. Aus $T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}$ und den Randwerten $T(0) = T(1) = 0$ ergibt sich, dass a zwischen 0 und 4 liegt, also $a \in [0, 4]$.

Je nachdem wie groß a ist können drei Fälle unterschieden werden.

1. Fall $0 \leq a \leq 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$

Der Ursprung ist der einzige periodische Punkt. Bei beliebigem Startwert konvergiert die Funktion gegen den Fixpunkt $(0, 0)$. Dies ist in Abbildung 4.7 für die Startwerte $\frac{1}{3}$ und $\frac{7}{9}$ der logistischen Funktion $T(x) = \frac{4}{5}x(1 - x)$ dargestellt.

Für eine Population bedeutet dieser Fall, dass die gesamte Population langfristig ausstirbt, unabhängig davon wie groß die Ausgangspopulation war.

Im Besonderen wird auf den Fall $a = 1$ hingewiesen, da hier die erste Bifurkation stattfindet. Der anziehende Fixpunkt (Attraktor) $x = 0$ wird bei $a = 1$ zu einem neutralen Fixpunkt und mit steigendem a zu einem abstoßenden (Repellor). Es entsteht ein neuer Fixpunkt, der im nächsten Fall dargestellt ist.

2. Fall $1 < a \leq 3$: $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = 1 - \frac{1}{a}, \forall x \in (0, 1)$

Die Funktion T besitzt einen einzigen periodischen Punkt, nämlich den stabilen Fixpunkt $1 - \frac{1}{a}$. Dieser kann berechnet werden, indem die Gleichung $T(x) - x = 0$ gelöst wird. Graphisch erhält man die Lösung als Schnittpunkt des Graphen mit der Diagonale. Langfristig stabilisiert sich die Populationsgröße auf den Wert $1 - \frac{1}{a}$.

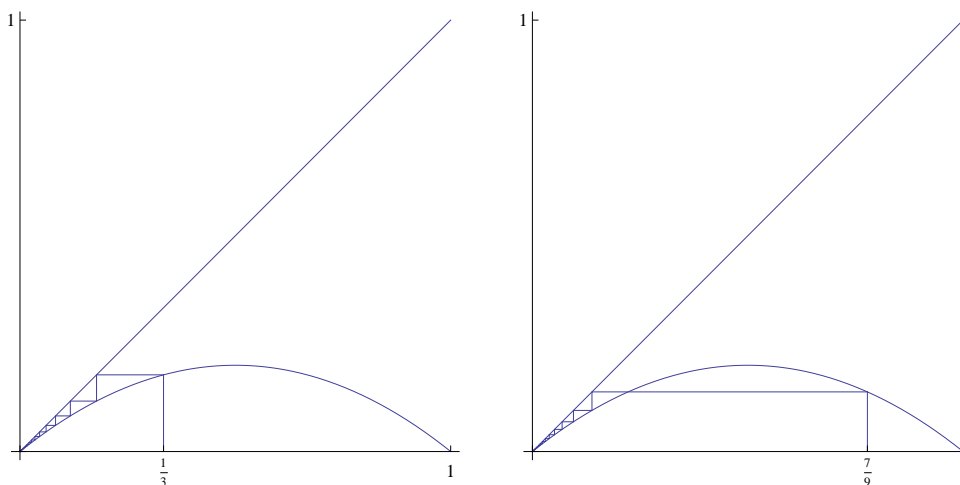


Abbildung 4.7: Graph der logistischen Funktion $T(x) = \frac{4}{5}x(1-x)$

Ein konkretes Beispiel für $a = \frac{5}{2}$ ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Der Orbit (eine exakte Definition folgt in Definition 30) von $\frac{1}{3}$ konvergiert gegen den Fixpunkt $\frac{3}{5}$. Bei $a = 3$ tritt die nächste Bifurkation auf. Der anziehende Fixpunkt $1 - \frac{1}{a}$ wird abstoßend und es entstehen anziehende periodische Punkte. Der Punkt 3 wird Bifurkationspunkt genannt.

- Fall $a > 3$: Wird a etwas größer als 3, so wird aus dem stabilen Fixpunkt $1 - \frac{1}{a}$ ein instabiler. Es entsteht ein periodischer Punkt der Periode 2, der wieder stabil ist. Dies bedeutet, dass es ein x_1 und ein x_2 aus dem Intervall $(0, 1)$ mit $x_1 \neq x_2$ gibt, sodass $T(x_1) = x_2$ und $T(x_2) = x_1$ gilt. Somit sind x_1 und x_2 periodische Punkte der Periode 2, da $T^2(x_1) = x_1$ und $T^2(x_2) = x_2$ gilt.

Mit wachsendem a wird der Orbit der Periode 2 instabil und es entsteht ein stabiler Orbit der Periode 4. Wird a größer, so wird auch dieser instabil und es entsteht ein stabiler Orbit der Periode 8. Wird das beschriebene Szenario fortgeführt, entstehen periodische Punkte der Länge $2, 4, 8, 16, 32, \dots, 2^n, \dots$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Zusammenfassend wird mit wachsendem a die Dynamik von T zunehmend komplizierter. Dies ist in Abbildung 4.9 für $a = 3, 1$, Abbildung 4.10 für $a = 3, 2$, Abbildung 4.11 für $a = 3, 8$ und Abbildung 4.12 für $a = 3, 999$ dargestellt. Der Startwert ist jeweils $\frac{1}{3}$.

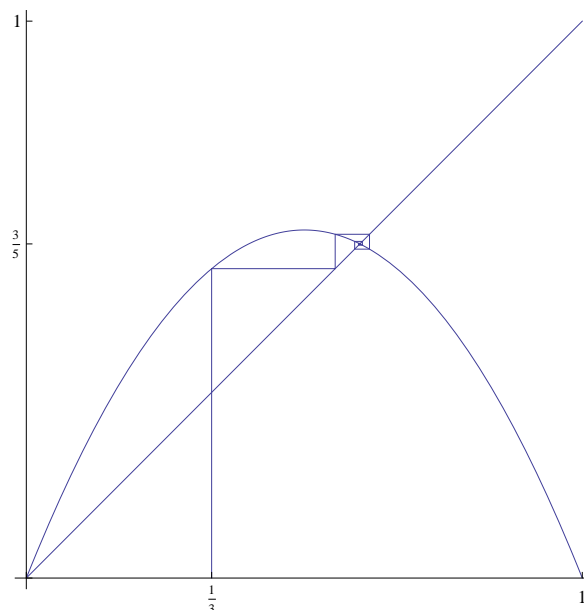


Abbildung 4.8: Graph der logistischen Funktion $T(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$

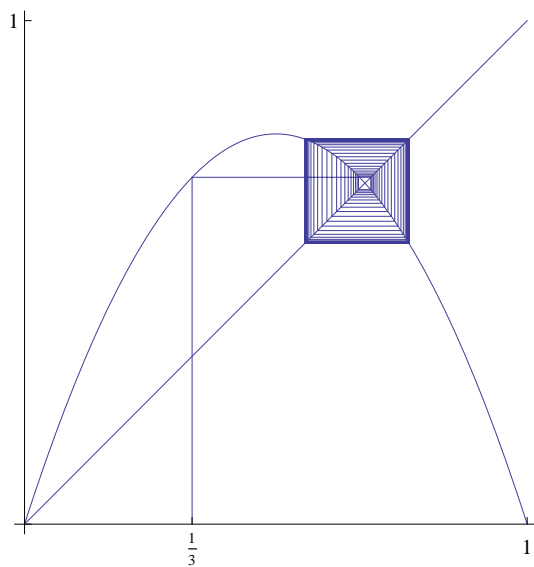
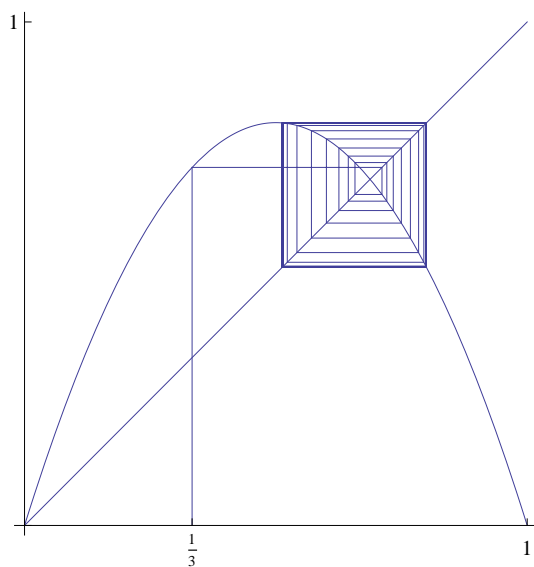
Für $a = 4$ besteht „totales Chaos“. $T(x) = 4x(1-x)$ ist auf dem Intervall $I = [0, 1]$ „chaotisch“. Das bedeutet unter anderem, dass geringfügige Änderungen der Größe der Ausgangspopulation zu einer beliebig großen Änderung der Populationsdichte führen. Eine Detailvorhersage ist nicht mehr möglich. Zusammenfassend kann festgehalten werden welche Eigenschaften „Chaos“ hat.

Um „Chaos“ zu beschreiben ist es notwendig vorab zwei Definitionen nach Devaney (vgl. [12] S. 49) anzuführen.

Definition 23. Seien U und V offene Mengen, sodass $U, V \subseteq X$ gilt. Die Abbildung $T : X \rightarrow X$ wird **topologisch transitiv** genannt, falls für U und V ein $k > 0$ existiert, sodass

$$T^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

ist.

Abbildung 4.9: Graph der logistischen Funktion $T(x) = 3,1 x(1 - x)$ Abbildung 4.10: Graph der logistischen Funktion $T(x) = 3,2 x(1 - x)$

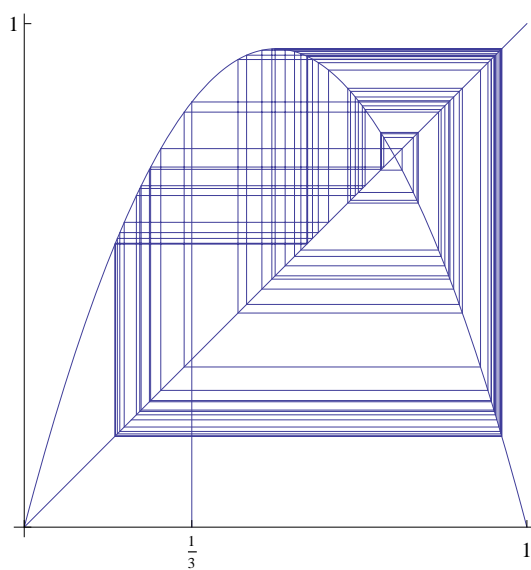


Abbildung 4.11: Graph der logistischen Funktion $T(x) = 3,8x(1-x)$

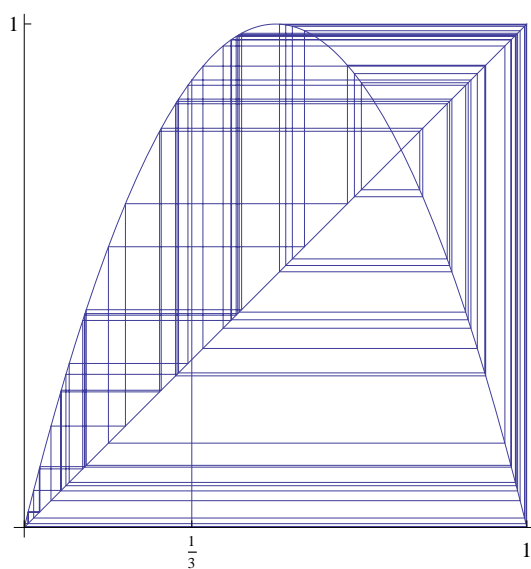


Abbildung 4.12: Graph der logistischen Funktion $T(x) = 3,999x(1-x)$

Definition 24. Die Abbildung $T : X \rightarrow X$ weist **starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen** auf, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in X$ und für jede δ -Umgebung U von x mit $\delta > 0$ ein $y \in U$ existiert und für ein $n \in \mathbb{N}$

$$|T^n(y) - T^n(x)| > \varepsilon$$

gilt.

Nun wird nach Devaney (vgl. [12] S. 50) beschrieben welche Eigenschaften „Chaos“ hat.

- Es gilt die bereits beschriebene Eigenschaft der starken Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Dies bedeutet, dass es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, sodass es für alle $x \in [0, 1]$ und alle $\delta > 0$ ein $y \in [0, 1]$ mit $|y - x| < \delta$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|T^n(y) - T^n(x)| > \varepsilon_0$ gilt. Ein chaotisches dynamisches System ist aufgrund der starken Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen unvorhersagbar und unberechenbar.
- Die periodischen Punkte in $[0, 1]$ liegen dicht. Das bedeutet, dass es für alle $x \in [0, 1]$ und alle $\delta > 0$ ein $y \in [0, 1]$ mit $|y - x| < \delta$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $T^n(y) = y$ gilt. Inmitten des „chaotischen Verhaltens“ gibt es ein Element der Ordnung, nämlich dass die periodischen Punkte in der Menge dicht liegen.
- Die dritte Eigenschaft, mit der „Chaos“ beschrieben werden kann, wird topologisch transitiv genannt. Damit ist gemeint, dass es ein $x \in [0, 1]$ gibt, sodass für alle $y \in [0, 1]$ es eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k}(x) = y$ gibt. Dabei ist $\omega(x) = [0, 1]$ die ω -Limes Menge von x , also $\omega(x) := \{y \in X : \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}, (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist streng monoton wachsend und } \lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k}(x) = y\}$ (siehe auch Definition 33). Diese Eigenschaft besagt, dass die Menge unzerlegbar ist. Sie kann nicht in zwei invariante, offene Teilmengen zerfallen, die unter Anwendung der Abbildung T nicht aufeinander wirken.

Zusammenfassend kann der Begriff „Chaos“ in dynamischen Systemen nach Devaney (vgl. [12] S. 50) wie folgt definiert werden. Man nennt diese Eigenschaft „Chaos nach Devaney“.

Definition 25. Sei X eine Menge. Dann ist die Abbildung $T : X \rightarrow X$ **chaotisch**, falls folgende drei Eigenschaften erfüllt sind.

1. T hat die Eigenschaft der starken Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.
2. Die periodischen Punkte liegen dicht in X .
3. T ist topologisch transitiv.

Kapitel 5

Diskrete dynamische Systeme

Ein weiteres Beispiel, das einen Weg ins „Chaos“ zeigt, soll die folgenden Inhalte dieses Kapitels motivieren. Ziel ist es „Chaos“ mathematisch zu beschreiben. Ein Maß dafür, wie „chaotisch“ ein diskretes dynamisches System ist, ist die topologische Entropie. Neben der topologischen Entropie werden die maßtheoretische Entropie und der topologische Druck definiert. Die Analyse der Stabilität der topologischen Entropie auf stückweisen monotonen Abbildungen bildet den Abschluss des Kapitels.

Zahlreiche Sätze, die in diesem Kapitel angeführt sind, wurden erst in den letzten Jahrzehnten formuliert und bewiesen.

5.1 Definitionen

Definition 26. Liegt jeder Punkt aus der Menge M mindestens in einer Menge U_j , so wird das Mengensystem $(U_j)_{j \in J}$ aus offenen Mengen **offene Überdeckung** genannt.

Diese Definition kann in Reitmann (vgl. [38] S. 227) nachgelesen werden.

Definition 27. Sei (M, d) ein metrischer Raum und die Menge $C \subseteq M$. Falls es für jede Familie $(U_j)_{j \in J}$ von offenen Mengen mit $C \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ eine endliche Teilmenge $J_0 \subseteq J$ mit $C \subseteq \bigcup_{j \in J_0} U_j$ gibt, wird C **kompakt** genannt.

Bemerkung 3. *Eine Menge C heißt somit kompakt, falls aus jeder offenen Überdeckung der Menge eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann.*

Für die Definition von kompakt siehe Brucks und Bruin (vgl. [10] S. 5) oder Arnold (vgl. [3] S. 100).

Definition 28. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann heißt A **zusammenhängend**, falls es keine offenen Mengen V_1 und V_2 mit

1. $A \cap V_1 \neq \emptyset$,
2. $A \cap V_2 \neq \emptyset$,
3. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und
4. $A \subseteq V_1 \cup V_2$

gibt.

Bemerkung 4. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass A genau dann zusammenhängend ist, wenn \emptyset und A die einzigen Teilmengen von A sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Definition 29. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann nennt man (X, T) ein **diskretes topologisches dynamisches System**.

Diese Definition ist nach Alsedà, Llibre und Misiurewicz (vgl. [2] S. 187). Für alle $x \in X$ wird $T^0(x) = x = \text{id}(x)$, $T^1(x) = T(x)$ und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ wird $T^n(x) = (T \circ T^{n-1})(x)$ gesetzt.

Die folgende Definition ist nach Devaney (vgl. [12] S. 17).

Definition 30. Für $x \in X$ bezeichnet die Folge $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ den **Orbit** von x unter T .

Der Orbit kann folgenderweise vorgestellt werden. Zur Zeit 0 ist man im Zustand x , zur Zeit 1 im Zustand $T(x)$, zur Zeit 2 im Zustand $T^2(x)$, ..., zur Zeit n im Zustand $T^n(x)$, ...

Definition 31. Das n -tupel $(x, T(x), T^2(x), \dots, T^{n-1}(x))$ wird der **Orbit der Länge n von x unter T** genannt.

Das System wird also nur zu den Zeitpunkten $0, 1, 2, \dots, n-1$ betrachtet.

In Walters (vgl. [46] S. 122) und Devaney (vgl. [12] S. 18) kann die nachstehende Definition nachgelesen werden.

Definition 32. Ein Punkt $x \in X$ heißt **periodisch**, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n(x) = x$ gibt. Das kleinste n mit dieser Eigenschaft nennt man die **Periode von x** .

Bemerkung 5. Ein Punkt der Periode 1 ist ein Fixpunkt. Fixpunkte erfüllen daher $T(x) = x$.

Definition 33. Sei (X, T) ein dynamisches System und $x \in X$. Dann heißt die Menge der Häufungspunkte von $T^n(x)$ der **ω -Limes** von x unter T . Es ist also

$$\omega(x) := \{y \in X : \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ monoton steigend mit } \lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k}(x) = y\}.$$

Für diese Definition siehe Walters (vgl. [46] S. 123) sowie Brucks und Bruin (vgl. [10] S. 25).

Wird in diesem Kapitel der Logarithmus verwendet, so ist der Logarithmus zur Basis e gemeint. Alle Definitionen und Sätze behalten ihre Gültigkeit, falls der Logarithmus zu einer anderen Basis gewählt wird.

5.2 Das Newtonverfahren

Neben der Funktion, die das logistische Wachstum beschreibt (siehe Abschnitt 2.3.2 und Abschnitt 4.5), ist das Newtonverfahren ein weiteres Beispiel für ein diskretes dynamisches System mit auftretendem „Chaos“.

Um die Nullstellen von Funktionen ersten und zweiten Grades zu finden, gibt es sehr einfache Lösungsmethoden. Für Polynomfunktionen dritten und vierten Grades gibt es komplizierte Mehrschrittverfahren um die Nullstellen zu berechnen. Ab Polynomfunktionen fünften Grades können keine einfachen geschlossenen Lösungsformeln erwartet werden. (vgl. [5] S. 79).

Zum Bestimmen der Nullstellen einer Funktion f höheren Grades dient zum Beispiel das Newtonverfahren. Es ist ein Näherungsverfahren.

Allgemein sind Näherungsverfahren Iterationsverfahren, bei denen ausgehend von einem Startwert mithilfe einer Iterationsfunktion T weitere Näherungswerte x_1, x_2, \dots für die Nullstelle x_0 berechnet werden. Dabei ist in einer Umgebung U der Nullstelle der Grenzwert der Folge der Näherungswerte, die man durch die Iterationsfunktion erhält, die gesuchte Nullstelle x_0 . (vgl. [14] S. 289, 290).

Dies ist in den beiden folgenden Sätzen formuliert.

Satz 4. Sei $T : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, $x_0 \in (a, b)$ erfülle $T(x_0) = x_0$ und $|T'(x_0)| < 1$. Dann gibt es ein offenes Intervall $U \subseteq (a, b)$ mit $x_0 \in U$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x_0$ für alle $x \in U$ gilt.

Beweis. Es gibt ein offenes Intervall $U = (x_0 - r, x_0 + r)$ mit $\bar{U} \subseteq (a, b)$, $x_0 \in U$ und es gibt ein $q < 1$ mit $|T'| \leq q$ für alle $x \in \bar{U}$. Nach dem Mittelwertsatz gilt $|T(x) - T(y)| \leq q|x - y|$ für alle $x, y \in \bar{U}$. Für $x \in \bar{U}$ gilt $|T(x) - x_0| = |T(x) - T(x_0)| \leq q|x - x_0|$. Da $q < 1$ ist und $|x - x_0| \leq r$ ist, folgt

$$|T(x) - x_0| = |T(x) - T(x_0)| \leq q|x - x_0| \leq r.$$

Somit gilt $T(x) \in [x_0 - r, x_0 + r] = \bar{U}$. Daher ist T eine Kontraktion (siehe dazu Definition 7) auf dem vollständigen metrischen Raum \bar{U} . Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz (siehe Satz 1) gilt für alle $x \in \bar{U}$ und somit für alle $x \in U$, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x_0$ ist. \square

Nachstehender Satz besagt, dass das Newtonverfahren gegen eine Nullstelle konvergiert, falls genügend nahe an der Nullstelle gestartet wird.

Satz 5 (Newtonverfahren). Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$ erfülle $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$. Dann gibt es ein offenes Intervall $U \subseteq (a, b)$ mit $x_0 \in U$. Sei die Abbildung T durch $T(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ definiert. Für alle $x \in U$ erfüllt die durch $x_1 := x$, $x_2 := T^1(x) = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, \dots , $x_n := T^{n-1}(x) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ für $n > 1$ definierte Folge, dass ihr Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ist.

Beweis. Es gibt ein offenes Intervall $(a_0, b_0) \subseteq (a, b)$ mit $x_0 \in (a_0, b_0)$, sodass $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a_0, b_0)$ gilt, weil f' stetig in x_0 und $f'(x_0) \neq 0$ ist. Für $x \in (a_0, b_0)$ sei die Abbildung T durch $T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ definiert. Dann ist $T'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ stetig, da f , f' und f'' stetig sind und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a_0, b_0)$ ist. Es gilt $T(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{0}{f'(x_0)} = x_0$ und $T'(x_0) = \frac{f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)^2} = 0$, also $|T'(x_0)| = 0 < 1$. Daher gibt es nach Satz 4 ein offenes Intervall U mit $x_0 \in U$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x_0$ für alle $x \in U$. Für $x \in U$ ist $x_1 = x = T^0(x)$ und $T^{n-1}(x) = T(T^{n-2}(x)) = T(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_n$. \square

Das Newtonverfahren konvergiert aber im Allgemeinen nicht für jeden Startwert, wie nachstehendes Gegenbeispiel zeigt.

Beispiel 6. Das Newtonverfahren wird für die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$ mit dem Startwert $\sqrt[2]{\frac{3}{5}}$ durchgeführt.

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 3} = x - \frac{1}{3} \frac{x^3 - x - 2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{3}x + \frac{2x}{3(x^2 - 1)}.$$

$$T\left(\sqrt[2]{\frac{3}{5}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[2]{\frac{3}{5}} + \frac{2\sqrt[2]{\frac{3}{5}}}{3\left(\frac{3}{5} - 1\right)} = \frac{2}{3}\sqrt[2]{\frac{3}{5}} + \frac{2\sqrt[2]{\frac{3}{5}}}{-\frac{6}{5}} = \sqrt[2]{\frac{3}{5}}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\right) = -\sqrt[2]{\frac{3}{5}},$$

$$T^2\left(\sqrt[2]{\frac{3}{5}}\right) = T\left(-\sqrt[2]{\frac{3}{5}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt[2]{\frac{3}{5}} - \frac{2\sqrt[2]{\frac{3}{5}}}{-\frac{6}{5}} = \sqrt[2]{\frac{3}{5}}\left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) = \sqrt[2]{\frac{3}{5}}.$$

Falls n gerade ist, ist $T^n\left(\sqrt[2]{\frac{3}{5}}\right) = \sqrt[2]{\frac{3}{5}}$ und falls n ungerade ist, dann ergibt sich $T^n\left(\sqrt[2]{\frac{3}{5}}\right) = -\sqrt[2]{\frac{3}{5}}$. Es zeigt sich, dass das Newtonverfahren für den Startwert $\sqrt[2]{\frac{3}{5}}$ in diesem Fall nicht gegen eine Nullstelle konvergiert.

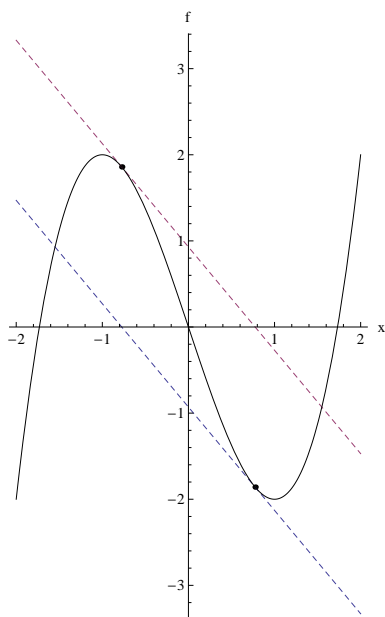


Abbildung 5.1: Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 3x$

Dass die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$ drei Nullstellen hat, kann jedoch leicht nachgerechnet werden. Für $x^3 - 3x = 0$ ergibt sich $x_1 = 0$ als eine Nullstelle. Die anderen beiden Nullstellen erhält man aus der Gleichung

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt[2]{3} \approx \pm 1,7320508076.$$

Die drei Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x$ sind daher $-\sqrt[2]{3}, 0$ und $\sqrt[2]{3}$. In Abbildung 5.1 ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$ graphisch dargestellt.

Das Newtonverfahren kann als diskretes dynamisches System gemäß Definition 29 angesehen werden. Dazu wird das langfristige Verhalten der stetigen Funktion T und des Startwertes x bei wiederholter Anwendung betrachtet. Zum Zeitpunkt 0 ist das dynamische System im Zustand x , zum Zeitpunkt 1 im Zustand $T(x)$, ... und zum Zeitpunkt n im Zustand $T^n(x)$.

Dieses diskrete dynamische System wird untersucht, indem das Newtonverfahren in \mathbb{C} angewendet wird. Um das globale Verhalten des Newtonverfahrens auf \mathbb{C} , bzw. auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu untersuchen, wird das Newtonverfahren für das Polynom $z^3 - 1$ auf \mathbb{C} betrachtet.

Die Ableitung ist in \mathbb{C} analog zu jener in \mathbb{R} definiert.

Das Newtonverfahren für $f(z) = z^3 - 1$ wird auf \mathbb{C} betrachtet. Daher ist

$$T(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3z^2}.$$

Gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra hat die Funktion $f(z) = z^3 - 1$ drei Nullstellen. Diese sind 1, $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und $e^{\frac{4\pi i}{3}}$.

Da Iterationsfolgen bei einer der Nullstellen enden, falls genügend nahe an der Nullstelle gestartet wurde, haben die Nullstellen die Eigenschaft von Attraktoren. Wird mit einem Startwert in der Nähe der Nullstelle begonnen, so führt die Iteration auf den jeweiligen Attraktor. Es stellt sich die Frage, wie die Einzugsgebiete der Attraktoren aussehen. Wo ist mit den Iterationen zu beginnen, um bei einem bestimmten Attraktor zu landen?

(vgl. [5] S. 78ff und S. 101ff).

Zur Behandlung dieser Frage werden die Mengen U_1, U_2 und U_3 definiert. Sie beschreiben die Attraktionsgebiete. Setze

$$\begin{aligned} U_1 &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(z) = 1 \right\}, \\ U_2 &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \right\} \text{ und} \\ U_3 &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(z) = e^{\frac{4\pi i}{3}} \right\}. \end{aligned}$$

Diese drei Mengen sind offen. Es wird ein entsprechender Ausschnitt aus der Ebene der komplexen Zahlen, der die Attraktoren enthält, Punkt für Punkt untersucht. Je nach Zugehörigkeit zu den Attraktionsgebieten werden die Startpunkte der Iterationsfolgen unterschiedlich eingefärbt. (vgl. [5] S. 101ff).

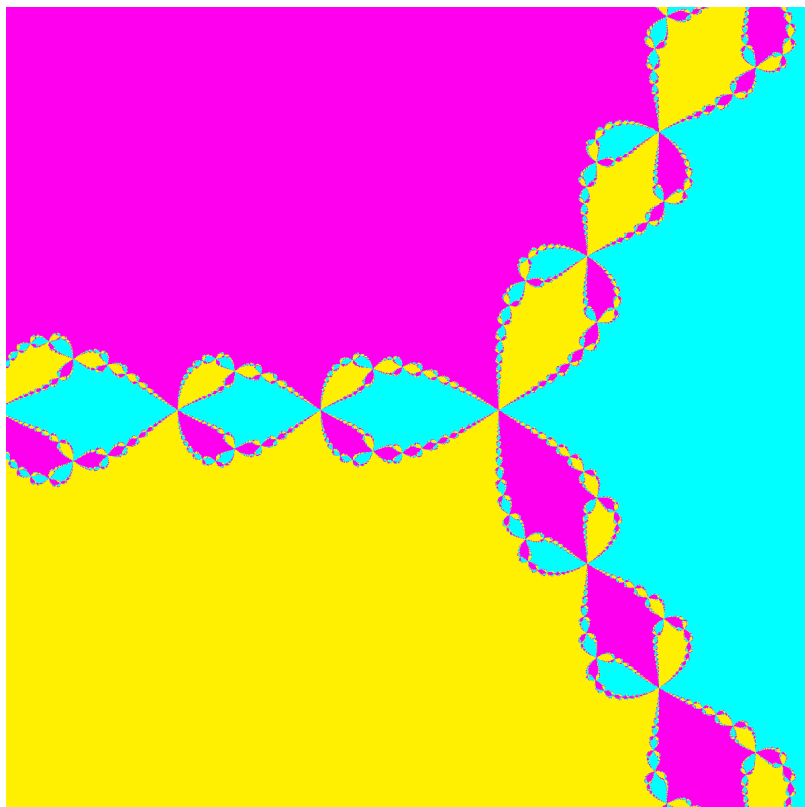


Abbildung 5.2: Newtonverfahren für $z^3 - 1$

In Abbildung 5.2, die von Peter Raith erstellt wurde, sind die Einzugsgebiete der drei Nullstellen unterschiedlich gefärbt. Die Menge U_1 ist in Abbildung 5.2 türkis, die Menge U_2 rosa und die Menge U_3 gelb dargestellt. Jene Punkte, für die nach einer bestimmten vorgegebenen Anzahl von Iterationsschritten noch kein Attraktor erreicht wurde, werden zur Grenze gezählt. (vgl. [5] S. 107).

Dass es eine Grenze gibt, kann wie folgt begründet werden. Gäbe es ein z , das sich in zwei der Mengen befindet, würde es gleichzeitig gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren. Deshalb sind die drei Mengen U_1 , U_2 und U_3 paarweise disjunkt. Die drei Mengen U_1 , U_2 und U_3 können nicht ganz \mathbb{C} sein, da \mathbb{C} zusammenhängend ist, $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ aber nicht. Dies kann direkt mit Definition 28 gezeigt werden.

5.2.1 Juliamenge und Fraktal

Man setzt $J := \mathbb{C} \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U_3)$. Da U_1 , U_2 und U_3 offen und paarweise disjunkt sind, ist J abgeschlossen und nicht leer. Die Menge J wird die *Juliamenge* des Newtonverfahrens für $z^3 - 1$ genannt. Die Juliamenge, die eine komplexe Grenze mit selbstähnlichen Elementen beschreibt (vgl. [5] S. 99), ist nach dem französischen Mathematiker Gaston Maurice Julia (1893 – 1978) benannt. (vgl. [50] S. 73).

Auf J konvergiert das Newtonverfahren nicht gegen eine Nullstelle. Weiters besteht auf J „Chaos“. Die Juliamenge besteht aus überabzählbar vielen Punkten.

Die Vereinigung der Mengen, für die das Newtonverfahren gegen eine Nullstelle konvergiert

$$U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \{z \in \mathbb{C} : T^n(z) = 1\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : T^n(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : T^n(z) = e^{\frac{4\pi i}{3}} \right\},$$

wird *Fatoumenge* genannt. Die Fatoumenge ist nach dem französischen Mathematiker und Astronom Pierre Joseph Louis Fatou (1878 – 1929) benannt. (vgl. [49] S. 136).

Das Komplement der Fatoumenge ist die Juliamenge. Die Juliamenge ist ein Fraktal. Fraktale sind selbstähnlich. Egal wie nahe in die Menge J gezoomt wird, sieht die Menge immer fast genauso aus, wie aus der Ferne. Weiters besitzt ein Fraktal keine glatten Begrenzungen. Je stärker die Grenze vergrößert wird, desto länger wird sie. Somit ist die Grenze eigentlich unendlich lang und hat die Breite null. (vgl. [5] S. 112, 113).

Fraktale treten oft bei „chaotischem Verhalten“ auf. Der Begriff Fraktal wurde von Benoit Mandelbrot entwickelt. (vgl. [5] S. VII).

Weitere Beispiele für Fraktale sind die Cantormenge und das Sierpiński-Dreieck. Die Cantormenge ist nach dem deutschen Mathematiker Georg Ferdinand Ludwig Cantor (1845 – 1918) benannt (vgl. [48] S. 275) und das

Sierpiński-Dreieck nach dem polnischen Lehrer und Mathematiker Waclaw Franciszek Sierpiński (1882 – 1969) (vgl. [51] S. 22). Bei den genannten Beispielen handelt es sich um selbstähnliche Mengen, die nun genauer beschrieben werden.

Cantormenge

Eine allgemeine Definition der Cantormenge ist nach Reitmann (vgl. [38] S. 147, 148) und Brucks und Bruin (vgl. [10] S. 7) gegeben.

Definition 34. Sei (M, d) ein metrischer Raum und C eine Menge darin. Hat die Menge C die folgenden Eigenschaften:

1. C ist kompakt,
2. C ist abgeschlossen und jeder Punkt ist Häufungspunkt, also C ist perfekt und
3. C ist total unzusammenhängend, d. h. für jeden Punkt $x \in C$ besteht die größte zusammenhängende Menge, die x enthält nur aus $\{x\}$,

so wird sie **Cantormenge** genannt.

Anhand eines Beispiels nach Devaney (vgl. [12] S. 37, 135) und Hirsch, Smale und Devaney (vgl. [18] S. 349 – 352) wird eine Cantormenge beschrieben. Es handelt sich dabei um die sogenannte *übliche Cantormenge*.

Beispiel 7. Sei I das Einheitsintervall $[0, 1]$ (also (I, d) ist ein metrischer Raum). Aus dem Einheitsintervall wird das mittlere Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entfernt. Es bleibt die Menge

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Nun wird aus den verbleibenden zwei abgeschlossenen Intervallen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wieder jeweils das mittlere Drittel entfernt. Somit ergibt sich

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

aus 2^2 abgeschlossenen Intervallen, die jeweils die Länge $(\frac{1}{3})^2$ haben. Wird dieses Verfahren fortgesetzt ergibt sich mit $n \rightarrow \infty$ die Cantormenge

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Die Menge C_n besteht aus 2^n abgeschlossenen Intervallen, die jeweils die Länge $(\frac{1}{3})^n$ haben. Alle Intervalle, die herausgenommen werden sind jeweils offen. Es gilt, dass eine beliebige Vereinigung von offenen Mengen offen ist. Da $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ ist und der beliebige Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen ist, ist die Cantormenge C abgeschlossen. In Abbildung 5.3 ist die Konstruktion der beschriebenen Cantormenge dargestellt.

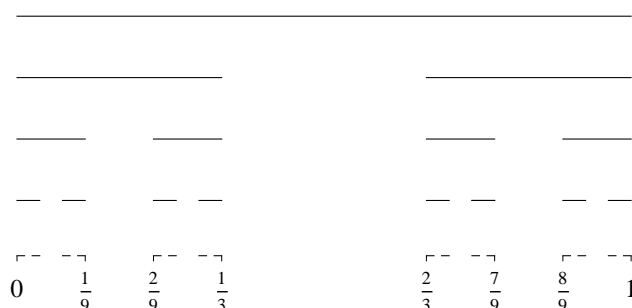


Abbildung 5.3: Cantormenge

Die Cantormenge ist eine selbstähnliche Menge, also ein Fraktal. Bei diesem Fraktal geht die Länge der Linien gegen 0 und die Anzahl der Punkte in der Menge konvergiert gegen ∞ . Die Cantormenge ist überabzählbar. Der Beweis kann bei Hirsch, Smale und Devaney (vgl. [18] S. 350 – 352) nachgelesen werden.

Sierpiński-Dreieck

Die Konstruktion des Sierpiński-Dreiecks erfolgt analog, wie die Konstruktion der Cantormenge, allerdings im \mathbb{R}^2 . Ein gleichseitiges Dreieck wird in vier gleichseitige Dreiecke geteilt und das mittlere entfernt. Jedes der drei verbleibenden Dreiecke wird wieder geviertelt und das mittlere entfernt. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. In Abbildung 5.4 sind die ersten Konstruktionschritte dargestellt.

Ein Beispiel eines Sierpiński-Dreiecks nach Denker (vgl. [11] S. 16) ist nachstehend angeführt.

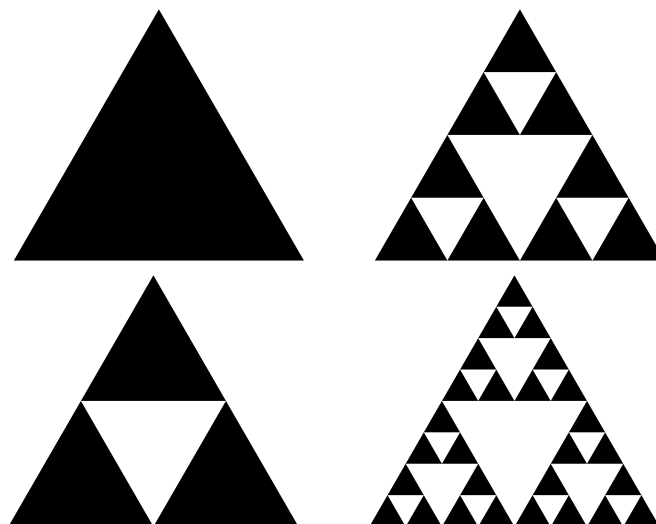


Abbildung 5.4: Sierpiński-Dreieck

Beispiel 8. Die drei Punkte

$$p_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), p_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), p_3 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

definieren ein gleichseitiges Dreieck im \mathbb{R}^2 . Durch die affinen Abbildungen $T(x) = \frac{1}{2}(x + p_j)$ werden die Seiten des Dreiecks um die Hälfte verkleinert und p_j invariant gelassen. Die zugehörige selbstähnliche Menge heißt das Sierpiński-Dreieck. Die Fläche geht bei diesem Fraktal gegen 0 und die Länge des Randes konvergiert gegen ∞ .

Nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der realen Welt treten Fraktale auf. Sie kommen in der Natur sehr häufig vor. Wie in einem Artikel von Robert Walgate in *Die Zeit* nachzulesen ist, gilt für Lebewesen ein interessantes Phänomen: Je kleiner das Wesen, desto größer die Welt. (vgl. [45]). Demnach ist der Lebensraum eines Lebewesens umso größer, je kleiner der Organismus selbst ist. Weitere Beispiele für Fraktale in der Natur sind das Aussehen von Wolken, Bergen oder Pflanzen wie Karfiol, Romanesco oder Sonnenblumen. Die Küstenlinie einer Insel ist ebenfalls ein Fraktal. Je genauer die Linie betrachtet wird, also je kleiner der gewählte Maßstab ist, desto länger ist die Küstenlinie. (vgl. [5] S. 113).

Nun werden nach der Beschreibung von Fraktalen die Eigenschaften der Juliamenge zusammengefaßt.

Eigenschaften der Juliamenge

Die Abbildung T verhält sich auf der Juliamenge „chaotisch“. Damit sind folgende Eigenschaften von T auf der Juliamenge gemeint.

- Die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen ist erfüllt (siehe Definition 24).
- Die periodischen Punkte liegen dicht in J .
- Es gibt ein $z \in J$ mit $\omega(z) = J$. Diese Eigenschaft wird topologisch transitiv genannt. Man kann zeigen, dass diese Eigenschaft zu der in Definition 23 beschriebenen äquivalent ist.

Nach Definition 25 ist das Newtonverfahren auf der Juliamenge „chaotisch nach Devaney“. Ein Maß dafür, wie „chaotisch“ ein dynamisches System ist, ist die topologische Entropie.

5.3 Topologische Entropie

Die topologische Entropie soll beschreiben wie „chaotisch“ ein dynamisches System ist. Es gibt zahlreiche unterschiedliche Definitionen der topologischen Entropie. 1965 wurde von Adler, Konheim und McAndrew erstmals die topologische Entropie als topologisches Analogon zur maßtheoretischen Entropie in [1] definiert. Definitionen der maßtheoretischen Entropie stammen von Kolmogorov (1958) und von Sinai (1959). Dinaburg (1970) und Bowen (1971) haben in [7] die topologische Entropie äquivalent definiert.

5.3.1 Definition nach Dinaburg und Bowen

Die Definition der topologischen Entropie nach Dinaburg und Bowen in [7] wird wie in Walters (vgl. [46] S. 168 – 173) beschrieben.

Anschaulich ist ein dynamisches System umso „chaotischer“, je stärker die Anzahl der Orbits der Länge n mit wachsendem n steigt. Da es unendlich viele Orbits der Länge n gibt, hat die anschauliche Betrachtung wörtlich

keinen Sinn. Sehr nahe nebeneinander liegende Orbits werden nicht als verschieden gezählt. So können zum Beispiel zwei Punkte x und y genau dann unterschieden werden, wenn der Abstand zwischen ihnen größer als ε , also $d(x, y) > \varepsilon$ ist. Weiters können zwei Orbits der Länge n genau dann unterschieden werden, wenn sie sich zu einem der Zeitpunkte $0, 1, 2, \dots, n-1$ um mehr als ε unterscheiden. Die maximale Anzahl der Orbits der Länge n , die auf diese Weise unterschieden werden können, wird $k_n(\varepsilon)$ genannt. (vgl. [2] S. 190).

Nachstehende Definition von (n, ε) -trennend kann in Alsedà, Llibre und Misiurewicz (vgl. [2] S. 190) nachgelesen werden.

Definition 35. Sei (X, T) ein dynamisches System, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Eine Menge $E \subseteq X$ heißt (n, ε) -**trennend**, falls es für alle $x, y \in E$ mit $x \neq y$ ein $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ gibt, sodass $d(T^j(x), T^j(y)) > \varepsilon$ ist.

Definition 36. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und K eine kompakte Teilmenge von X . Dann ist $k_n(\varepsilon, K)$ die größte Kardinalität von (n, ε) -trennenden Mengen von K .

Somit ist die maximale Anzahl der Orbits der Länge n , die unterschieden werden können $k_n(\varepsilon) = \sup\{\text{card } E : E \text{ ist } (n, \varepsilon)\text{-trennend}\}$.

Bei vielen Beispielen erhält man

$$k_n(\varepsilon) \approx c_\varepsilon e^{nh}, \quad (5.1)$$

für ein $h \geq 0$. Je größer die Zahl h ist, umso „chaotischer“ ist das System. Die Zahl h wird als Maßzahl für das „chaotische Verhalten“ eines Systems herangezogen und topologische Entropie genannt. Wird (5.1) mit dem natürlichen Logarithmus logarithmiert, so erhält man

$$\log k_n(\varepsilon) \approx \log c_\varepsilon + nh.$$

Die Zahl h wird explizit ausgedrückt. Es ergibt sich

$$h \approx \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon) - \frac{1}{n} \log c_\varepsilon.$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert der Summand $\frac{1}{n} \log c_\varepsilon$ gegen null. Es bleibt

$$h \approx \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon).$$

Nun wird die Entropie h als Grenzwert

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon)$$

definiert.

Dabei treten zwei Probleme auf. Zum einen muss der Grenzwert nicht existieren und zum anderen kann h von ε abhängen.

1. Es kann sein, dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon)$ nicht existiert. Wird statt $\lim_{n \rightarrow \infty}$ der $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ genommen, dann existiert

$$h(\varepsilon) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon)$$

sicher, wenn für $h(\varepsilon)$ der Wert $+\infty$ zugelassen wird.

2. Die Zahl h hängt von ε ab. Falls $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, dann ist $k_n(\varepsilon_1) \geq k_n(\varepsilon_2)$. Es ist

$$h(\varepsilon_1) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon_1) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log k_n(\varepsilon_2) = h(\varepsilon_2).$$

Daher existiert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h(\varepsilon)$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h(\varepsilon) = \sup_{\varepsilon > 0} h(\varepsilon)$, wenn für $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$ und $\sup_{\varepsilon > 0}$ der Wert $+\infty$ zugelassen wird.

Bei der formalen Definition der topologischen Entropie wird für $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$ der Wert $+\infty$ zugelassen.

Definition 37. Sei (X, T) ein topologisches dynamisches System. Dann ist

$$h_{\text{top}}(X, T) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \text{card } E$$

die **topologische Entropie** von (X, T) , wobei das Supremum (\sup_E) über alle (n, ε) -trennenden Mengen $E \subseteq X$ genommen wird.

5.3.2 Definition nach Adler, Konheim und McAndrew

Die ursprüngliche Definition der topologischen Entropie wurde von Adler, Konheim und McAndrew 1965 in [1] gegeben. Dabei wird der Begriff der ε -trennenden Punkte nicht verwendet. Diese Definition der topologischen

Entropie basiert auf offenen Überdeckungen.
(vgl. [46] S. 164 – 167 und [2] S. 188, 189).

Sei X ein kompakter metrischer Raum. Falls α und β offene Überdeckungen von X sind, dann sei $\alpha \vee \beta$ die offene Überdeckung aller Mengen der Form $A \cap B$, mit $A \in \alpha$ und $B \in \beta$. Analog definiert man $\bigvee_{j=1}^n \alpha_j$ als offene Überdeckung von X mit Mengen der Form $\bigcap_{j=1}^n A_j$ mit $A_j \in \alpha_j$ für $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Es handelt sich um offene Überdeckungen, weil der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen ist.

Eine offene Überdeckung β ist eine Verfeinerung der offenen Überdeckung α , falls jedes Element von β eine Teilmenge eines Elementes von α ist, also: $\forall B \in \beta \exists A \in \alpha$ mit $B \subseteq A$. Man schreibt $\alpha < \beta$.

Wenn α eine offene Überdeckung von X ist, und $T : X \rightarrow X$ stetig ist, dann sei $T^{-1}(\alpha)$ die offene Überdeckung, die aus allen Mengen der Form $T^{-1}(A)$ mit $A \in \alpha$ besteht.

Es sei α eine offene Überdeckung von X . Weil X kompakt ist, kann X durch endlich viele Elemente aus α überdeckt werden. Setze $N(\alpha) := \min\{n : X \text{ kann durch } n \text{ Elemente aus } \alpha \text{ überdeckt werden}\}$, also $N(\alpha)$ bezeichnet die Anzahl der Mengen in einer Teilüberdeckung von α mit minimaler Kardinalität.

Sei α eine offene Überdeckung von X . Dann wird die Entropie von α als $h(\alpha) := \log N(\alpha)$ definiert.

Definition 38. Es sei α eine offene Überdeckung von X und $T : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann ist

$$h(T, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\alpha) \right)$$

die **Entropie von T bezüglich α** .

Definition 39. Sei $T : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Die **topologische Entropie** von T wird als

$$h(T) = \sup_{\alpha} h(T, \alpha)$$

definiert, wobei das Supremum über alle offenen Überdeckungen von X genommen wird.

5.3.3 Äquivalenz der beiden Definitionen

Die Äquivalenz der beiden Definitionen der topologischen Entropie wurde von Bowen 1971 in [8] nachgeprüft. Nachstehend wird der Zusammenhang der beiden Definitionen der topologischen Entropie nach Walters (vgl. [46] S. 173 – 174) dargestellt.

Definition 40. Sei (X, T) ein dynamisches System, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Eine Menge $E \subseteq X$ heißt (n, ε) -**erzeugend**, falls es für alle $x \in X$ ein $y \in E$ und ein $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ gibt, sodass $d(T^j(x), T^j(y)) \leq \varepsilon$ ist.

Definition 41. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und K eine kompakte Teilmenge von X . Dann ist $r_n(\varepsilon, K)$ die kleinste Kardinalität von (n, ε) -erzeugenden Mengen von K .

Die angeführten Definitionen sind nach Alsedà, Llibre und Misiurewicz (vgl. [2] S. 190). Für die Definition von (n, ε) -trennend siehe Definition 35 und 36.

Definition 42. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und seien α und γ offene Überdeckungen von X . Dann heißt δ die **Lesbeguezahl der Überdeckung** γ , mit $\delta > 0$, falls es zu jeder offenen Überdeckung γ eine Zahl δ gibt, sodass jede Menge α mit dem Durchmesser $\text{diam}(\alpha) < \delta$ in einer überdeckenden Menge γ enthalten ist.

Bemerkung 6. Aus Definition 42 folgt, dass $\gamma < \alpha$ ist, falls der Durchmesser $\text{diam}(A)$ jeder Menge $A \in \alpha$ aus einer offenen Überdeckung α von X kleiner als die Lesbeguezahl δ von γ ist.

Proposition 7. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

1. Falls α eine offene Überdeckung von X mit der Lesbeguezahl δ ist, so gilt

$$N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\alpha) \right) \leq r_n \left(\frac{\delta}{2}, X \right) \leq k_n \left(\frac{\delta}{2}, X \right).$$

2. Sei $\varepsilon > 0$ und γ eine offene Überdeckung. Der Durchmesser von γ ist $\text{diam}(\gamma) := \sup\{\text{diam}(A) = A \in \gamma\}$. Falls $\text{diam}(\gamma) \leq \varepsilon$ ist, dann gilt

$$r_n(\varepsilon, X) \leq k_n(\varepsilon, X) \leq N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\gamma) \right).$$

Korollar 1. *Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung sowie $\varepsilon > 0$. Alle offenen Überdeckungen von X mit der offenen Kugel mit Radius 2ε werden durch α_ε beschrieben. Weiters beschreibt γ_ε alle offenen Überdeckungen von X mit der offenen Kugel mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt*

$$N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\alpha_\varepsilon) \right) \leq r_n(\varepsilon, X) \leq k_n(\varepsilon, X) \leq N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\gamma_\varepsilon) \right).$$

Proposition 8. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, $T : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und sei $\varepsilon > 0$. Dann sind die beiden Definitionen 37 und 39 der topologischen Entropie ident.*

5.4 Berechnung der topologischen Entropie

Nach Plaschko und Brod (vgl. [34] S. 190) wird invariant wie folgt definiert.

Definition 43. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge und $T : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Die Menge M heißt *T -invariant*, falls für alle x aus M und alle n aus \mathbb{N} gilt $T^n(x) \in M$.

Ist die Entropie auf kleinen Teilmengen bekannt, so kann sie mit nachstehendem Satz berechnet werden.

Satz 6. *Sei $(X_j)_{j \in J}$ eine endliche oder abzählbare Familie von abgeschlossenen, T -invarianten Teilmengen von X und es gelte für alle $x \in X$, dass $\omega(x) \subseteq \bigcup_{j \in J} X_j$ ist. Dann ist $h_{\text{top}}(T) = \sup_{j \in J} h_{\text{top}}(X_j, T)$.*

Satz 7. *Falls X endlich ist, dann ist $h_{\text{top}}(T) = 0$.*

Beweis. Es gilt $\text{card } X = N$ und $\text{card } E \leq N$. Für die topologische Entropie ist $h_{\text{top}}(T) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N = 0$. \square

Satz 8. *Falls $X = \bigcup_{j=1}^n X_j$, X_j abgeschlossen, $X_{j_1} \cap X_{j_2}$ endlich und $T : X_j \rightarrow X$ bijektiv ist, dann ist*

$$h_{\text{top}}(T) \geq \log n.$$

Bemerkung 7. *In vielen einfachen Fällen ist die Entropie von T unter den Voraussetzungen von Satz 8 $h_{\text{top}}(T) = \log n$.*

Die Entwicklung einer Population kann mit der logistischen Funktion $T(x) = ax(1 - x)$ beschrieben werden. Wie in Abschnitt 4.5 besprochen besteht für $a = 4$ „totales Chaos“. Nun wird in nachstehendem Beispiel versucht mit den bekannten Sätzen die topologische Entropie zu berechnen.

Beispiel 9. Sei die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ durch

$$T(x) = 4x(1 - x)$$

gegeben. Der Graph der Funktion ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Das Ein-

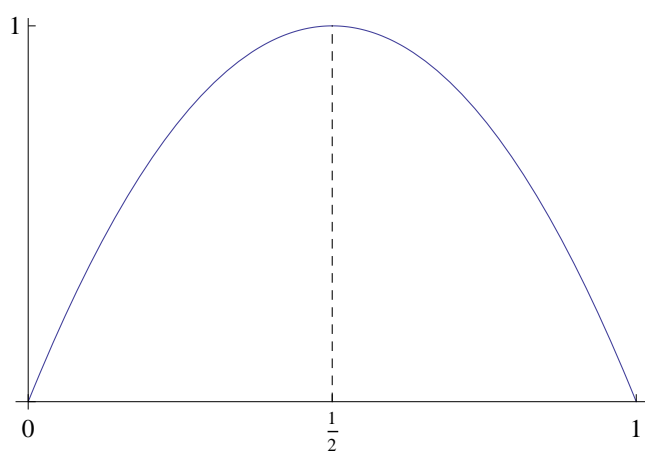


Abbildung 5.5: Graph der logistischen Funktion $T(x) = 4x(1 - x)$

heitsintervall kann in zwei Teilintervalle $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ und $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ zerlegt werden. Die Abbildungen $T : I_1 \rightarrow [0, 1]$ und $T : I_2 \rightarrow [0, 1]$ sind jeweils bijektiv. Da $I_1 \cap I_2$ endlich ist, kann die topologische Entropie mithilfe der Bemerkung nach Satz 8 berechnet werden. In diesem Fall ist die topologische Entropie

$$h_{\text{top}}(T) = \log 2 \approx 0,693147180559945309.$$

Auf dieses Beispiel werden wir nach Korollar 3 zurückkommen.

5.5 Maßtheoretische Entropie

Die maßtheoretische Entropie wurde vor der topologischen Entropie 1958 von Kolmogorov und 1959 von Sinai definiert.

Nachstehend sind einige Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie angeführt, bevor die maßtheoretische Entropie beschrieben wird. Dabei ist Ω die Menge aller möglichen Ereignisse und $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis.

Definition 44. Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Familie \mathcal{M} von Teilmengen von Ω (also $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \subseteq \Omega$), wird σ -**Algebra** genannt, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. $\Omega \in \mathcal{M}$,
2. ist $A \in \mathcal{M}$, so ist das Komplement $\Omega \setminus A \in \mathcal{M}$,
3. ist $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{M} , so ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$.

(vgl. [22] S. 128 und [4] S. 16).

Satz 9. *Jeder Durchschnitt von σ -Algebren ist wieder eine σ -Algebra in Ω .*

Dieser Satz kann durch nachprüfen der Eigenschaften einer σ -Algebra gemäß Definition 44 bewiesen werden. (vgl. [4] S. 17).

Definition 45. Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und \mathcal{M} eine σ -Algebra auf Ω . Eine Funktion $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf \mathcal{M} , falls folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

1. $P(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{M}$,
2. $P(\Omega) = 1$ und
3. P ist σ -**additiv**, also ist $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Folge in \mathcal{M} , so gilt

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

(vgl. [4] S. 129 und [22] S. 129).

Definition 46. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge, \mathcal{M} eine σ -Algebra auf Ω und $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{M} . Dann wird (Ω, \mathcal{M}, P) **Wahrscheinlichkeitsraum** genannt.

(vgl. [4] S. 129 und [22] S. 129).

Definition 47. Sei (Ω, \mathcal{M}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt \mathcal{C} mit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ eine **Partition** von Ω , falls gilt

1. $P(C_1 \cap C_2) = 0$ für alle $C_1 \neq C_2 \in \mathcal{C}$ und
2. $P\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) = 1$.

Definition 48. Der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{M}, P) und das Ereignis A mit $A \in \mathcal{M}$ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P(A)$ sind gegeben. Dann heißt $-\log P(A)$ die **Information**, die das Ereignis A liefert.

Wenn \mathcal{A} eine endliche Teil- σ -Algebra von \mathcal{M} ist, dann gibt es eine endliche Partition $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, sodass es für alle $A \in \mathcal{A}$ eine Menge $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ mit $A = \bigcup_{j \in J} A_j$ gibt.

Definition 49. Sei \mathcal{A} eine endliche Teil- σ -Algebra von \mathcal{M} . Dann ist die **Entropie von \mathcal{A}**

$$H(\mathcal{A}) = - \sum_{j=1}^n P(A_j) \log P(A_j).$$

Für diese Definition siehe Walters (vgl. [46] S. 78).

Somit ist $H(\mathcal{A})$ ein Maß für die durchschnittliche Information eines Experiments mit den möglichen Ausgängen $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Ist der Ausgang des Experiments sicher, so ist $H(\mathcal{A}) = 0$. Das ist genau dann der Fall, wenn $P(A_j) = 0$ oder $P(A_j) = 1$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist.

Es stellt sich die Frage, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(A_j)$ mit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ die größte durchschnittliche Information oder Entropie liefert. Dazu wird nachstehende Proposition nach Walters (vgl. [46] S. 80) formuliert und bewiesen.

Proposition 9. *Ist $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, so ist die Entropie $H(\mathcal{A}) \leq \log n$. Gleichheit $H(\mathcal{A}) = \log n$ liegt genau dann vor, wenn $P(A_j) = \frac{1}{n}$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist.*

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion geführt.

Sei $n = 1$. Somit ist $H(\mathcal{A}) = -1 \log 1 = 0 = \log 1$.

Sei $n > 1$. Mithilfe der Lagrange'schen Multiplikatoren wird eine Extremwertaufgabe gelöst. Dabei ist $\sum_{j=1}^n P(A_j) = 1$ die Nebenbedingung. Es ergibt sich

$$F = - \sum_{j=1}^n P(A_j) \log P(A_j) - \lambda \left(\sum_{j=1}^n P(A_j) - 1 \right).$$

Um das Maximum der Entropie zu bestimmen wird die erste Ableitung null gesetzt. Dies führt zu

$$\frac{\partial F}{\partial P(A_j)} = -\log P(A_j) - 1 - \lambda = 0,$$

woraus sich durch Umformung

$$\log P(A_j) = -1 - \lambda$$

und schließlich

$$P(A_j) = e^{-1-\lambda}$$

ergibt. Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung ist

$$1 = \sum_{j=1}^n P(A_j) = n e^{-1-\lambda}$$

und daher

$$e^{-1-\lambda} = \frac{1}{n}.$$

Somit ist $P(A_j) = \frac{1}{n}$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Für die Entropie ergibt sich an dieser Extremstelle

$$H(\mathcal{A}) = -\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \log n = \log n.$$

Abschließend werden die Randwerte untersucht. Diese liegen bei einem j mit $P(A_j) = 0$. Wird das j -te Element herausgenommen, ergibt sich für die Entropie

$$H(\mathcal{A}) = -\sum_{k=1}^n P(A_k) \log P(A_k) = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n P(A_k) \log P(A_k) \leq \log(n-1) < \log n.$$

Daher ist das Maximum der Entropie $H(\mathcal{A}) = \log n$, wobei $P(A_j) = \frac{1}{n}$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist. \square

Definition 50. Sei \mathcal{A} eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{M} und $T : \Omega \rightarrow \Omega$ eine maßtheoretische Transformation (d.h.: $\forall A \in \mathcal{M}$ ist $T^{-1}(A) \in \mathcal{M}$). Dann beschreibt $T^{-n}(\mathcal{A})$ die Teil- σ -Algebra $\{T^{-n}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ mit $n \geq 0$.

Die angeführte Definition kann in Walters (vgl. [46] S. 76) nachgelesen werden.

Definition 51. In einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{M}, P) sei eine maßtheoretische Transformation $T : \Omega \rightarrow \Omega$ gegeben. Die endliche Teil- σ -Algebra von \mathcal{M} ist \mathcal{A} . Dann wird die **Entropie von T bezüglich \mathcal{A}** durch

$$h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\mathcal{A}) \right)$$

beschrieben.

(vgl. [46] S. 86).

Bemerkung 8. In Walters (vgl. [46] S. 86 – 88) wird gezeigt, dass der Grenzwert immer existiert.

Definition 52. In einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{M}, P) sei eine maßtheoretische Transformation $T : \Omega \rightarrow \Omega$ gegeben. Dann ist die **maßtheoretische Entropie von T**

$$h(T) = \sup_{\mathcal{A}} h(T, \mathcal{A}).$$

Das Supremum wird über alle endlichen Teil- σ -Algebren \mathcal{A} von \mathcal{M} genommen.

Bemerkung 9. Wird das Supremum über alle endlichen Partitionen μ von (Ω, \mathcal{M}, P) genommen, so lautet die Definition der maßtheoretischen Entropie von T

$$h(T) = \sup_{\mu} h(T, \mu).$$

Die in dieser Bemerkung angeführte Definition ist nach Walters (vgl. [46] S. 87).

In der Literatur ist für die maßtheoretische Entropie die Bezeichnung metrische Entropie, Kolmogorov-Sinai-Entropie oder KS-Entropie üblich.

(vgl. [38] S. 184).

5.5.1 Variationsprinzip

Der Zusammenhang zwischen der topologischen und der maßtheoretischen Entropie wird durch das Variationsprinzip nach Walters (vgl. [46] S. 187 – 191) beschrieben.

In einem metrischen Raum (X, d) sei \mathcal{B} die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen enthält. Man nennt \mathcal{B} die σ -Algebra der Borelmengen. Sei $M(X)$ die Menge aller Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße auf X . Für einen kompakten metrischen Raum (X, d) und eine stetige Funktion $T : X \rightarrow X$ sei $M(X, T)$ die Menge aller T -invarianten Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße μ auf X . Dabei heißt μ T -invariant, falls $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt.

Weiters ist die Funktion $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \text{ und} \\ x \log x, & \text{falls } x \neq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

gegeben. Durch Induktion (vgl. [46] S. 79) ergibt sich für $x_j \in [0, \infty)$, $\alpha_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ die Ungleichung

$$\phi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi(x_j).$$

Definition 53. Es sei (X, \mathcal{B}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiters seien $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ und $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_v\}$ zwei endliche Teil- σ -Algebren von \mathcal{B} . Dann ist die **bedingte Entropie** von \mathcal{A} unter \mathcal{V}

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A}|\mathcal{V}) &= - \sum_{j=1}^v P(V_j) \sum_{i=1}^m \frac{P(A_i \cap V_j)}{P(V_j)} \log \frac{P(A_i \cap V_j)}{P(V_j)} = \\ &= - \sum_{j=1}^v \sum_{i=1}^m P(V_j) \phi\left(\frac{P(A_i \cap V_j)}{P(V_j)}\right). \end{aligned}$$

Für diese Definition siehe Walters (vgl. [46] S. 80, 82).

Proposition 10. Sei (X, \mathcal{B}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und \mathcal{A} und \mathcal{V} endliche Teil- σ -Algebren von \mathcal{B} . Dann gilt die Ungleichung

$$H(\mathcal{A} \vee \mathcal{V}) \leq H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{V}).$$

Für die Proposition und den Beweis siehe Walters (vgl. [46] S. 81, 82).

Proposition 11. *Sei (X, \mathcal{B}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der maßtheoretischen Transformation T . Weiters seien \mathcal{A} und \mathcal{V} zwei endliche Teil- σ -Algebren von \mathcal{B} . Dann gilt $h(T, \mathcal{A}) \leq h(T, \mathcal{V}) + H(\mathcal{A}|\mathcal{V})$, wobei $H(\mathcal{A}|\mathcal{V})$ die bedingte Entropie von \mathcal{A} unter \mathcal{V} ist.*

Die Proposition und der Beweis sind in Walters (vgl. [46] S. 89 – 91) nachzulesen.

Proposition 12. *Sei (X, \mathcal{B}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der maßtheoretischen Transformation T . Dann gilt für die maßtheoretische Entropie $h(T^m) = mh(T)$, wobei $m > 0$ ist.*

Der Beweis kann in Walters (vgl. [46] S. 91, 92) oder in Denker (vgl. [11] S. 206, 207) nachgelesen werden.

Das entsprechende Analogon der Proposition für die topologische Entropie ist in nachstehender Proposition zusammengefasst. (vgl. [46] S. 174, 175, [2] S. 191 und [10] S. 121).

Proposition 13. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $T : X \rightarrow X$ eine gleichmäßig stetige Abbildung und $m > 0$. Dann gilt für die topologische Entropie $h_{\text{top}}(T^m) = mh_{\text{top}}(T)$.*

Proposition 14. *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung darin. Weiters sei $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $M(X)$. Definiere $\mu_n = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \nu_n \circ T^{-j}$. Dann liegt jeder Häufungswert μ der Folge $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ in $M(X, T)$.*

Die Proposition sowie der Beweis sind in Walters (vgl. [46] S. 151) nachzulesen.

In einem metrischen Raum (X, d) mit $A \subseteq X$ wird die kleinste abgeschlossene Menge \overline{A} , die A enthält, der Abschluss von A genannt. Die größte offene Menge, die in A enthalten ist heißt das Innere von A . Man schreibt A° . Der Rand von A ist der Abschluss ohne dem Inneren $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Er ist stets abgeschlossen.

Lemma 1. *Es ist X ein kompakter metrischer Raum und $\mu \in M(X)$. Sei $\delta > 0$, dann gibt es eine endliche Partition $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ von $(X, \mathcal{B}(X))$ mit $\text{diam}(A_j) < \delta$ und $\mu(\partial A_j) = 0$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.*

Das Lemma und der Beweis sind nach Walters (vgl. [46] S. 187, 188).

Lemma 2. Sei $\mu_j \in M(X)$, $p_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ für $1 \leq j \leq n$. Dann gilt für jede Partition \mathcal{A} von $(X, \mathcal{B}(X))$

$$H_{\sum_{j=1}^n p_j \mu_j}(\mathcal{A}) \geq \sum_{j=1}^n p_j H_{\mu_j}(\mathcal{A}).$$

Für dieses Lemma siehe Walters (vgl. [46] S. 188).

Lemma 3. Es seien $q, n \in \mathbb{N}$ fest mit $1 < q < n$ und für $0 \leq j \leq q$ sei $a(j) = \left[\frac{n-j}{q} \right]$, wobei die Gaußklammer [...] eine Funktion beschreibt, die jeder reellen Zahl (\mathbb{R}) die nächstkleinere ganze Zahl (\mathbb{Z}) zuordnet. Weiters sei $0 \leq j \leq q-1$ fest. Setze

$$S := \{0, 1, 2, \dots, j-1, j+a(j)q, j+a(j)q+1, \dots, n-1\}.$$

Dann gilt

$$\{0, 1, 2, \dots, n-1\} = \{j+rq+t : 0 \leq r \leq a(j)-1, 0 \leq t \leq q-1\} \cup S.$$

Weiters ist die Kardinalität von S höchstens $2q$.

Beweis. Da $j+a(j)q \geq j + \left[\frac{n-j}{q} - 1 \right] q = n-q$ gilt, ist die Kardinalität von S sicher $\leq 2q$. \square

Das angeführte Lemma und der Beweis können in Walters (vgl. [46] S. 188) nachgelesen werden.

Lemma 4. Seien $q, n \in \mathbb{N}$ fest mit $1 < q < n$ und für $0 \leq j \leq q$ sei $a(j) = \left[\frac{n-j}{q} \right]$. Es gilt

$$(a(j)-1)q + j \leq \left[\frac{n-j}{q} - 1 \right] q + j = n - q$$

für jedes $0 \leq j \leq q-1$. Ist $0 \leq j \leq q-1$ und $0 \leq r \leq a(j)-1$, so sind alle Zahlen $\{j+rq\} < n-q$ und voneinander verschieden.

Siehe Walters (vgl. [46] S. 188) für das angeführte Lemma.

Lemma 5. *Es sei $\mu \in M(X, T)$. Weiters gilt für den Rand einer Menge $\partial \left(\bigcap_{j=0}^{n-1} T^{-j}(A_j) \right) \subseteq \bigcap_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\partial A_j)$. Ist $\mu(\partial A_j) = 0$ für $0 \leq j \leq n-1$, so ist*

$$\mu \left(\partial \left(\bigcap_{j=0}^{n-1} T^{-j}(A_j) \right) \right) = 0.$$

Dieses Lemma kann in Walters (vgl. [46] S. 188) nachgelesen werden.

Lemma 6. *Seien μ_n und $\mu \in M(X)$, wobei $n \geq 1$ ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

1. μ_n konvergiert gegen μ .
2. Sei \mathcal{B} die kleinste σ -Algebra, die alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von X enthält. Für jedes $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(\partial A) = 0$ gilt $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$.

Für dieses Lemma siehe Walters (vgl. [46] S. 149).

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen der topologischen Entropie und der maßtheoretischen Entropie nach Walters (vgl. [46] S. 188).

Satz 10 (Variationsprinzip). *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann gilt*

$$h_{\text{top}}(T) = \sup\{h_{\mu}(T) \mid \mu \in M(X, T)\}.$$

Das Supremum wird über alle Wahrscheinlichkeitsmaße μ genommen.

Der nachstehende Beweis des Variationsprinzips geht auf Misiurewicz in [25] zurück und wird nach Walters (vgl. [46] S. 189, 190) geführt.

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird gezeigt, dass $h_{\mu}(T) \leq h_{\text{top}}(T)$ ist und im zweiten Teil, dass $k(\varepsilon, X, T) \leq h_{\mu}(T)$ gilt.

1. Teil: Behauptung: Es gilt $h_{\mu}(T) \leq h_{\text{top}}(T)$.

Eine Partition von $(X, \mathcal{B}(X))$ sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$. Es wird $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\varepsilon < \frac{1}{m \log m}$ ist. Es gibt kompakte Mengen B_j mit $B_j \subseteq A_j$, wobei $1 \leq j \leq m$ ist, sodass $\mu(A_j \setminus B_j) < \varepsilon$ gilt. Sei $\mathcal{V} = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_m\}$ eine Partition, wobei $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j$ ist. Dann gilt

$$\mu(B_0) < m\varepsilon. \tag{5.3}$$

Die bedingte Entropie ist nach Definition 53

$$H_\mu(\mathcal{A}|\mathcal{V}) = - \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^m \mu(B_i) \phi \left(\frac{\mu(B_i \cap A_j)}{\mu(B_i)} \right).$$

Wird die erste Summe aufgelöst, fallen nach (5.2) alle Summanden bis auf den ersten weg. Somit ist die Entropie

$$H_\mu(\mathcal{A}|\mathcal{V}) = -\mu(B_0) \sum_{j=1}^m \phi \left(\frac{\mu(B_0 \cap A_j)}{\mu(B_0)} \right).$$

Nach Proposition 9 ist

$$H_\mu(\mathcal{A}|\mathcal{V}) \leq \mu(B_0) \log(m).$$

Wird nun $\mu(B_0)$ gemäß (5.3) ersetzt, so ist

$$H_\mu(\mathcal{A}|\mathcal{V}) < m\varepsilon \log(m) < 1. \quad (5.4)$$

Sei $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V})$ eine Partition und die Anzahl der nicht leeren Mengen in ihr wird durch $N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V}))$ beschrieben. Ist $n \geq 1$, so folgt nach Proposition 9

$$H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V}) \right) \leq \log N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V}) \right).$$

Ist $i \neq 0$, so ist die Vereinigung $B_0 \cup B_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i} B_j$ eine offene Menge. Somit ist $\mathcal{D} = \{B_0 \cup B_1, B_0 \cup B_2, \dots, B_0 \cup B_m\}$ eine offene Überdeckung von X . Für die Entropie ergibt sich

$$H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V}) \right) \leq \log N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{D}) \right) \cdot 2^n.$$

Somit folgt

$$h_\mu(T, \mathcal{V}) \leq h(T, \mathcal{D}) + \log 2 \leq h_{\text{top}}(T) + \log 2. \quad (5.5)$$

Aus Proposition 11 folgt

$$h_\mu(T, \mathcal{A}) \leq h_\mu(T, \mathcal{V}) + H_\mu(\mathcal{A}|\mathcal{V}).$$

Wird der erste Summand gemäß (5.5) und der zweite gemäß (5.4) ersetzt, so ergibt sich

$$h_\mu(T, \mathcal{A}) \leq h_{\text{top}}(T) + \log 2 + 1.$$

Zusammengefasst gilt für jede stetige Abbildung T mit $\mu \in M(X, T)$, dass die Entropie $h_\mu(T) \leq h_{\text{top}}(T) + \log 2 + 1$ ist. Für die iterierte Abbildung T^n folgt unter Berücksichtigung von Proposition 12 und Proposition 13, dass $nh_\mu(T) \leq nh_{\text{top}}(T) + \log 2 + 1$ ist, also $h_\mu(T) \leq h_{\text{top}}(T) + \frac{\log 2 + 1}{n}$. Damit wurde die Behauptung des ersten Teils des Beweises, nämlich dass $h_\mu(T) \leq h_{\text{top}}(T)$ ist, gezeigt.

2. Teil: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $\mu \in M(X, T)$ mit $h_\mu(T) \geq k(\varepsilon, X, T)$. Somit folgt, dass $\sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in M(X, T)\} \geq h_{\text{top}}(T)$ ist.

Behauptung: Es gibt ein $\mu \in M(X, T)$ mit $k(\varepsilon, X, T) \leq h_\mu(T)$.

Eine (n, ε) -trennende Menge E_n von X mit der Kardinalität $k_n(\varepsilon, X)$ sei gegeben (siehe dazu Definition 36). Das Maß, das auf der Menge E_n definiert werden kann ist $\sigma_n \in M(X)$ mit $\sigma_n = \left(\frac{1}{k_n(\varepsilon, X)}\right) \sum_{x \in E_n} \delta_x$. Sei $\mu_n \in M(X)$ wie in Proposition 14 definiert. Nach Proposition 14 liegt ein Häufungswert μ der Folge $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ in $M(X, T)$. Da $M(X)$ kompakt ist, gibt es weiters eine konvergente Teilfolge $(n_j) \in \mathbb{N}$, sodass der Grenzwert $\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n_j}\right) \log k_{n_j}(\varepsilon, X) = k(\varepsilon, X, T)$ ist und $\mu_{n_j} \rightarrow \mu$. Da $\mu \in M(X)$ ist, kann nach Lemma 1 eine Partition $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ von (X, \mathcal{B}) so gewählt werden, dass der Durchmesser $\text{diam}(A_i) < \varepsilon$ ist. Weiters gilt für $1 \leq i \leq m$, dass $\mu(\partial A_i) = 0$ ist. Da kein Element von $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A})$ mehr als ein Element von E_n beinhaltet, haben $k_n(\varepsilon, X)$ Elemente von $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A})$ das σ_n -Maß $\frac{1}{k_n(\varepsilon, X)}$ und alle weiteren Elemente das σ_n -Maß null. Es ist

$$H_{\sigma_n} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right) = \log k_n(\varepsilon, X).$$

Wähle $q, n \in \mathbb{N}$ fest mit $1 < q < n$ und sei $a(j) = \left\lfloor \frac{n-j}{q} \right\rfloor$ für $0 \leq j \leq q$. Weiters sei $S = \{0, 1, 2, \dots, j-1, j+a(j)q, j+a(j)q+1, \dots, n-1\}$. Nach Lemma 3 gilt

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A}) = \bigvee_{r=0}^{a(j)-1} T^{-(rq+j)} \bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \vee \bigvee_{l \in S} T^{-l}(\mathcal{A}) \quad (5.6)$$

und die Kardinalität von S ist höchstens $2q$. Somit ist

$$\log k_n(\varepsilon, X) = H_{\sigma_n} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right).$$

Wird $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A})$ gemäß (5.6) ersetzt und Proposition 10 angewendet, so ergibt sich

$$\log k_n(\varepsilon, X) \leq \sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_n} \left(T^{-(rq+j)} \bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right) + \sum_{m \in S} H_{\sigma_n} (T^{-m}(\mathcal{A})).$$

Proposition 9 führt zu

$$\log k_n(\varepsilon, X) \leq \sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_n \circ T^{-(rq+j)}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right) + 2q \log(m).$$

Nun wird die Ungleichung über alle j mit $0 \leq j \leq q-1$ summiert. Unter Berücksichtigung von Lemma 4 führt dies zu

$$q \log k_n(\varepsilon, X) \leq \sum_{p=0}^{n-1} H_{\sigma_n \circ T^{-p}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right) + 2q^2 \log(m).$$

Im nächsten Schritt wird die Ungleichung durch n dividiert und Lemma 2 angewendet. Somit ist

$$\frac{q}{n} \log k_n(\varepsilon, X) \leq H_{\mu_n} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right) + \frac{2q^2}{n} \log(m). \quad (5.7)$$

Die Grenzen der Elemente von $\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A})$ haben gemäß Lemma 5 das μ -Maß null. Somit ist für alle Elemente B von $\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A})$ nach Lemma 6 der Grenzwert $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_{n_j}(B) = \mu(B)$. Es ergibt sich

$$\lim_{j \rightarrow \infty} H_{\mu_{n_j}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right) = H_{\mu} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right).$$

Nun wird in (5.7) die Variable n durch n_j ersetzt. Für $j \rightarrow \infty$ erhält man

$$qk(\varepsilon, X, T) \leq H_{\mu} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right).$$

Wird zum einen die Ungleichung durch q dividiert und geht zum anderen $q \rightarrow \infty$, so ergibt sich

$$k(\varepsilon, X, T) \leq h_\mu(T, \mathcal{A}) \leq h_\mu(T).$$

Damit wurde gezeigt, dass $\sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in M(X, T)\} \geq h_{\text{top}}(T)$ ist. Zusammenfassend folgt daher aus dem ersten und dem zweiten Teil des Beweises

$$h_{\text{top}}(T) = \sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in M(X, T)\}.$$

□

5.6 Topologischer Druck

Der topologische Druck wird nach Walters (vgl. [46] 207ff) und Reitmann (vgl. [38] S. 183, 184) beschrieben.

Eine Verallgemeinerung der topologischen Entropie wird erreicht, indem jedem Punkt ein gewisses „Gewicht“ gegeben wird. Je höher dieses Gewicht ist, umso wichtiger ist der Punkt. Eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ wird Gewichtsfunktion genannt. Der Punkt x erhält das Gewicht $f(x)$.

Definition 54. Das **Gewicht des Orbits** $(x, T(x), T^2(x), \dots, T^{n-1}(x))$ der Länge n ist

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)).$$

Bei x werden entlang der Orbits die Gewichte summiert.

Der topologische Druck wurde erstmals in Spezialfällen 1973 in [40] von David Ruelle und im allgemeinen Fall 1976 in [47] von Peter Walters definiert.

Definition 55. Sei (X, T) ein topologisches dynamisches System und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$p(X, T, f) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \sum_{x \in E} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \right) \quad (5.8)$$

der **topologische Druck** von (X, T) mit der Gewichtsfunktion f , wobei das Supremum (\sup_E) über alle (n, ε) -trennenden Mengen $E \subseteq X$ gemessen wird.

Satz 11. *Der topologische Druck ist die Verallgemeinerung der topologischen Entropie, da $p(X, T, 0) = h_{\text{top}}(X, T)$ gilt.*

Beweis. 0 bedeutet die Nullfunktion, also ist $0(x) := 0$ für alle $x \in X$.

$$\begin{aligned}
 p(X, T, 0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \sum_{x \in E} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} 0(T^j(x)) \right) = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \sum_{x \in E} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} 0 \right) = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \sum_{x \in E} \exp(0) = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \sum_{x \in E} 1 = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \text{card } E = h_{\text{top}}(X, T).
 \end{aligned}$$

□

Analog zu Satz 6 kann der topologische Druck mithilfe des nachstehenden Satzes berechnet werden, wenn er auf kleinen Teilmengen bekannt ist.

Satz 12. *Seien $(X_j)_{j \in J}$ eine endliche oder abzählbare Familie von abgeschlossenen T -invarianten Teilmengen von X . Weiters gelte für alle $x \in X$, dass $\omega(x) \subseteq \bigcup_{j \in J} X_j$. Dann ist $p(T, f) = \sup_{j \in J} p(X_j, T, f)$.*

5.7 Abbildungen auf dem Intervall

In diesem Abschnitt wird besonders auf Intervallabbildungen der Form $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eingegangen. Jede Abbildung S in sich selbst $S : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ kann normiert werden, indem $T(x) := \frac{1}{\beta - \alpha}(S(\alpha + (\beta - \alpha)x) - \alpha)$ definiert wird. Die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist nun normiert.

Der Satz von Šarkovsky gibt Auskunft über die Struktur von periodischen Punkten und die Existenz von weiteren periodischen Punkten. Im Wesentlichen kann mithilfe des Satzes zwischen „Chaos“ und „Nicht-Chaos“ getrennt werden.

Vor der Formulierung des Satzes wird die Šarkovsky-Ordnung nach Alsedà, Llibre und Misiurewicz (vgl. [2] S. 17) und Brucks und Bruin (vgl. [10] S. 22, 23) definiert.

Definition 56. Die **Šarkovsky-Ordnung** der natürlichen Zahlen wird wie folgt definiert: $3 \ll 5 \ll 7 \ll 9 \ll \dots \ll 2 \cdot 3 \ll 2 \cdot 5 \ll 2 \cdot 7 \ll 2 \cdot 9 \ll \dots \ll 2^2 \cdot 3 \ll 2^2 \cdot 5 \ll 2^2 \cdot 7 \ll \dots \ll 2^3 \cdot 3 \ll 2^3 \cdot 5 \ll 2^3 \cdot 7 \ll \dots \ll 2^3 \ll 2^2 \ll 2 \ll 1$.

Nachstehender Satz wurde von Šarkovsky 1964 in [41] bewiesen.

Satz 13. *Es gilt die Šarkovsky-Ordnung. Falls $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Abbildung des Einheitsintervalls ist und T einen Punkt der Periode n besitzt, mit $n \ll m$, dann besitzt T auch einen Punkt der Periode m .*

Der Beweis des Satzes von Šarkovsky wird in Devaney (vgl. [12] S. 62 – 65) und in Denker (vgl. [11] S. 46 – 48) beschrieben. Für die Anwendung dieses Satzes muss nur eine wesentliche Voraussetzung, nämlich die Stetigkeit der Abbildung erfüllt sein. Er gilt nicht nur, wie hier beschrieben für Abbildungen auf dem Einheitsintervall der Form $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, sondern allgemeiner für alle reellen Abbildungen $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Der Satz hat jedoch nur im eindimensionalen Fall Gültigkeit. Es gibt kein höherdimensionales Analogon. (vgl. [12] S. 67 und [24] S. 58).

Aus Satz 13 ergibt sich nach Metzler (vgl. [24] S. 58) folgendes Korollar.

Korollar 2. *Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Abbildung. Hat T einen periodischen Punkt der Periode 3, so hat T periodische Punkte aller anderen Perioden. Die Periode 3 ist daher die größte Periode in der Šarkovsky-Ordnung.*

Satz 14. *Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig. Dann ist $h_{\text{top}}(T) > 0$ genau dann, wenn es einen Punkt der Periode k gibt, wobei $k \notin \{2^n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist.*

Dieser Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen der topologischen Entropie und der Šarkovsky-Ordnung.

Definition 57. Eine Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ heißt **stückweise monoton**, wenn es $c_0 := 0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{N-1} < c_N := 1$ gibt, sodass für alle $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ die Funktion $T|_{(c_{j-1}, c_j)} : (c_{j-1}, c_j) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton ist.

Zu dieser Definition nach Alsedà, Llibre und Misiurewicz (vgl. [2] S. 198, 199) ist zu bemerken, dass

- die Abbildung T nicht stetig sein muss. In diesem Kapitel werden jedoch in weiterer Folge nur stetige, stückweise monotone Abbildungen betrachtet.
- Die Intervalle $(c_0, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{N-2}, c_{N-1}), (c_{N-1}, c_N)$ nennt man Monotonieintervalle von T . Die Menge E ist die Menge aller Endpunkte der Monotonieintervalle von T , mit Ausnahme der Punkte 0 und 1, also

$$E := \{c_1, c_2, \dots, c_{N-2}, c_{N-1}\}.$$

- Es kann sein, dass zum Beispiel die Abbildung $T|_{(c_0, c_2)} : (c_0, c_2) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton ist. Deshalb werden

$$(c_0, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{N-2}, c_{N-1}), (c_{N-1}, c_N)$$

als die maximalen Monotonieintervalle von T definiert, falls für jedes $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ die Funktion $T|_{(c_{j-1}, c_{j+1})} : (c_{j-1}, c_{j+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ nicht stetig oder nicht monoton ist. Man nennt T eine Abbildung mit N Monotonieintervallen. In diesem Kapitel werden in weiterer Folge nur maximale Monotonieintervalle betrachtet.

Es wird nun stets angenommen, dass

$$(c_0, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{N-2}, c_{N-1}), (c_{N-1}, c_N)$$

die maximalen Monotonieintervalle von T sind. Nach Alsedà, Llibre und Misiurewicz (vgl. [2] S. 200) gilt, dass T^n stückweise monoton ist, falls T stückweise monoton ist.

Definition 58. Sei T eine stückweise monotone Abbildung. Für $n \in \mathbb{N}$ wird die **Anzahl der Monotonieintervalle** von T^n mit $c_n(T)$ bezeichnet.

Für diese Definition siehe Alsedà, Llibre und Misiurewicz (vgl. [2] S. 200, 201).

Satz 15. Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, stückweise monotone Abbildung. Dann gilt $h_{\text{top}}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n(T)$.

Der Satz liefert eine Formel für die Berechnung der topologischen Entropie und wurde von Misiurewicz und Szlenk 1980 in [28] bewiesen.

Korollar 3. Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, stückweise monotone Abbildung. Für alle $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ gelte $T[c_{j-1}, c_j] = [0, 1]$. Dann ist $h_{\text{top}}(T) = \log N$.

Beweis. Behauptung: $c_n(T) = N^n$.

Der Beweis der Behauptung wird durch Induktion nach n geführt. Für $n = 1$ gilt $c_1(T) = N^1 = N$. Sei $n > 1$ und sei I ein Monotonieintervall von T^{n-1} . Das Intervall I wird in N Intervalle geteilt, auf denen T^n streng monoton ist und die durch T^n auf ganz $[0, 1]$ abgebildet werden. Für die Anzahl der Monotonieintervalle gilt $c_n(T) = N \cdot c_{n-1}(T) = N \cdot N^{n-1} = N^n$. Daher ist nach Satz 15 $h_{\text{top}}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N^n = \log N$. \square

Für die Abbildung $T(x) = 4x(1-x)$ aus Beispiel 9 (siehe Abbildung 5.5) ist $c_1 = \frac{1}{2}$, $T[0, \frac{1}{2}] = [0, 1]$ und $T[\frac{1}{2}, 1] = [0, 1]$. Deshalb ist nach Korollar 3 $h_{\text{top}}(T) = \log 2$. Damit ist das in Beispiel 9 vorgestellte Ergebnis exakt hergeleitet.

Satz 16. Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, stückweise monotone Abbildung. Für alle $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ sei die Funktion $T|_{(c_{j-1}, c_j)}$ differenzierbar und es gebe ein $c > 1$, sodass $|T'(x)| = c$ für alle $x \in (0, 1) \setminus E$ ist. Dann gilt $h_{\text{top}}(T) = \log c$.

Der Beweis wurde von Misiurewicz und Szlenk 1980 in [28] erbracht. Anhand der nachstehenden Beispiele wird die Bedeutung dieses Satzes zur Berechnung der topologischen Entropie veranschaulicht.

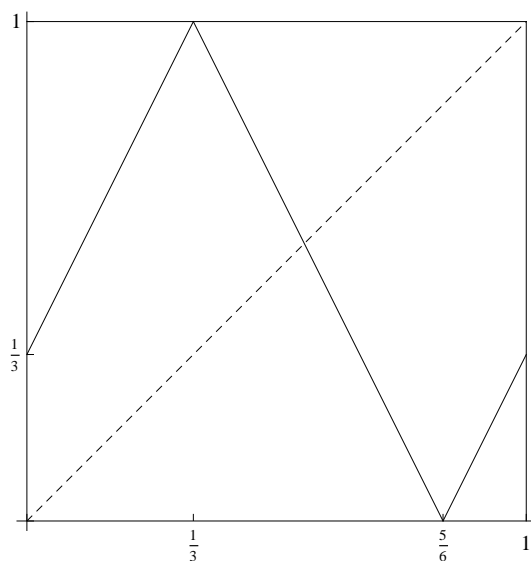
Beispiel 10. Sei die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ durch

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + 2x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 1\frac{2}{3} - 2x, & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{5}{6}], \\ -1\frac{2}{3} + 2x, & \text{für } x \in [\frac{5}{6}, 1] \end{cases}$$

definiert. Eine Darstellung der Funktion T ist in Abbildung 5.6 zu sehen. Die Menge aller Endpunkte der Monotonieintervalle von T , mit Ausnahme der Punkte 0 und 1, ist $E = \{\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\}$. Für $x \in (0, 1) \setminus E$ ist $|T'(x)| = 2$. Da $2 > 1$ ist, kann Satz 16 angewendet werden. Es folgt daher, dass die topologische Entropie

$$h_{\text{top}}(T) = \log 2 \approx 0.693147180559945309$$

ist.

Abbildung 5.6: Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 10

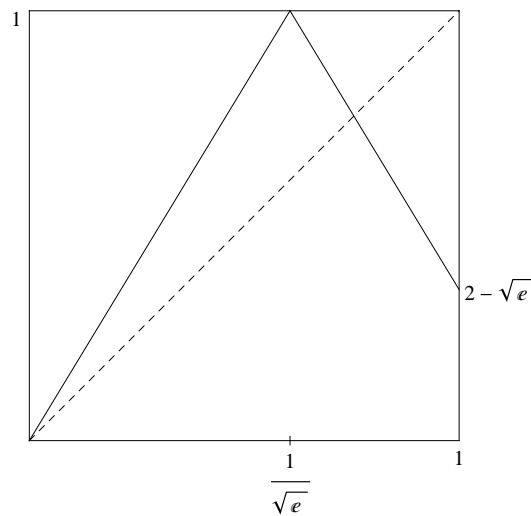
Beispiel 11. Die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sei

$$T(x) = \begin{cases} \sqrt{e}x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{\sqrt{e}}], \\ 2 - \sqrt{e}x, & \text{für } x \in [\frac{1}{\sqrt{e}}, 1]. \end{cases}$$

In Abbildung 5.7 ist der Graph der Funktion dargestellt. Die Menge aller Endpunkte der Monotonieintervalle von T ist $E = \left\{ \frac{1}{\sqrt{e}} \right\}$. Für $x \in (0, 1) \setminus E$ gilt $|T'(x)| = \sqrt{e}$. Die Voraussetzung $\sqrt{e} > 1$ ist erfüllt. Daher folgt nach Satz 16, dass die topologische Entropie durch

$$h_{\text{top}}(T) = \log \sqrt{e} = \frac{1}{2} \log e = \frac{1}{2}$$

berechnet werden kann.

Abbildung 5.7: Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 11

5.8 Stabilitätsanalyse von Intervallabbildungen

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen kleiner Störungen der Funktion T untersucht.

Haben zwei Funktionen T und die „gestörte“ Funktion \tilde{T} dasselbe dynamische System, so ist die Funktion T strukturell stabil. Besonders in der praktischen Anwendung ist die strukturelle Stabilität von großer Bedeutung. Ein dynamisches System beschreibt meist ein Modell aus der realen Welt. Dieses ist jedoch aufgrund von getroffenen Hypothesen und Annahmen sowie durch experimentelle Fehler mit zahlreichen Ungenauigkeiten behaftet. Insbesondere ist das dynamische System nur eine Annäherung an das Modell, welches selbst eine Annäherung an die Realität darstellt. Ist das dynamische System strukturell stabil, so ist es von kleinen Fehlern unabhängig. Dies ist bei der realen Umsetzung von entscheidender Bedeutung. (vgl. [12] S. 53).

Definition 59. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet M_N die Menge aller stetigen, stückweise monotonen Abbildungen $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit N Monotonieintervallen. Dabei sind $(c_0, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{N-2}, c_{N-1}), (c_{N-1}, c_N)$ die maximalen Monotonieintervalle von T .

Nachstehende Definition sagt aus, was unter kleinen Störungen der Funktion T zu verstehen ist. Sie ist nach Devaney (vgl. [12] S. 54) und Brucks

und Bruin (vgl. [10] S. 120) formuliert.

Definition 60. Sei $T \in M_N$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann nennt man $\tilde{T} \in M_N$ ε -nahe bei T , falls der Graph von \tilde{T} in einer ε -Umgebung des Graphen von T liegt.

Wird etwa die Funktion $F : M_N \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet, so bedeutet die Definition von ε -nahe, dass

$$\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} F(\tilde{T}) = a : \Leftrightarrow \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0, \text{ sodass für alle } \tilde{T} \in M_N \\ \text{mit } \tilde{T} \text{ ist } \delta\text{-nahe bei } T : |F(\tilde{T}) - a| < \varepsilon \text{ gilt.}$$

Weiters ist zum Beispiel

$$\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} F(\tilde{T}) = a : \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ sodass für alle } \tilde{T} \in M_N \text{ mit } \tilde{T} \text{ ist} \\ \delta\text{-nahe bei } T \text{ gilt } F(\tilde{T}) < a + \varepsilon \text{ und} \\ 2. \forall \varepsilon > 0 \text{ und } \forall \delta > 0 \text{ gibt es ein } \tilde{T} \in M_N \text{ mit } \tilde{T} \text{ ist} \\ \delta\text{-nahe bei } T \text{ und } F(\tilde{T}) > a - \varepsilon. \end{cases}$$

5.8.1 Stetigkeit der topologischen Entropie

Der folgende Satz besagt, dass die topologische Entropie nach unten halbstetig ist, also dass bei kleinen Störungen das dynamische System nicht „weniger chaotisch“ wird. Der Beweis dieses Satzes wurde von Misiurewicz und Szlenk 1980 in [28] erbracht.

Satz 17. Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, stückweise monotone Abbildung. Dann gilt

$$\liminf_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) \geq h_{\text{top}}(T).$$

Für die Halbstetigkeit der topologischen Entropie nach oben wird vorausgesetzt, dass $\max \emptyset := -\infty$ ist. Falls $c \in E$ periodisch ist, dann wird $n(c)$ als die Periode von c definiert, also $n(c) := \min\{n \in \mathbb{N} : T^n(c) = c\}$. Weiters gilt $k(c) := \text{card}(\{c, T(c), T^2(c), \dots, T^{n(c)-1}(c)\} \cap E)$. Die Zahl $k(c)$ gibt an wie viele Elemente des Orbits $\{c, T(c), T^2(c), \dots, T^{n(c)-1}(c)\}$ in E liegen.

Satz 18. Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, stückweise monotone Abbildung. Dann gilt

$$\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = \max \left\{ h_{\text{top}}(T), \max \left\{ \frac{k(c)}{n(c)} \log 2 : c \in E, c \text{ ist periodisch} \right\} \right\}.$$

Dieser Satz, der von Misiurewicz 1989 in [26] bewiesen wurde besagt, dass die topologische Entropie nach oben halbstetig ist, falls keine periodischen Punkte in E sind.

Nach Alsedà, Llibre und Misiurewicz (vgl. [2] S. 236) ist die topologische Entropie stetig, falls sie nach unten und nach oben halbstetig ist.

Korollar 4. *Falls $h_{\text{top}}(T) \geq \max \left\{ \frac{k(c)}{n(c)} \log 2 : c \in E, c \text{ ist periodisch} \right\}$ ist, dann gilt $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$.*

Beweis. Für den Beweis dieses Korollars ist Satz 18 anzuwenden. Da

$$h_{\text{top}}(T) \geq \max \left\{ \frac{k(c)}{n(c)} \log 2 : c \in E, c \text{ ist periodisch} \right\}$$

und

$$\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = \max \left\{ h_{\text{top}}(T), \max \left\{ \frac{k(c)}{n(c)} \log 2 : c \in E, c \text{ ist periodisch} \right\} \right\}$$

gelten, folgt dass $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$ ist. \square

In Korollar 4 ist die topologische Entropie stetig. Aus der Definition von $k(c)$ folgt, dass $k(c) \leq n(c)$ ist. Daher gilt $\frac{k(c)}{n(c)} \log 2 \leq \log 2$ sowie $\max \left\{ \frac{k(c)}{n(c)} \log 2 : c \in E, c \text{ ist periodisch} \right\} \leq \log 2$. Aus Korollar 4 ergibt sich, dass auch im folgenden Korollar die topologische Entropie stetig ist.

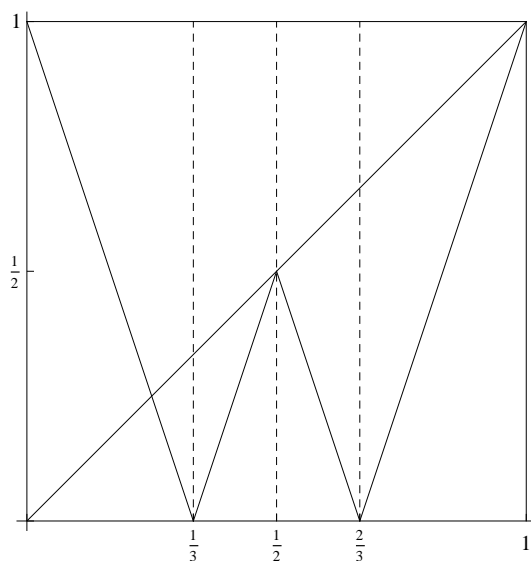
Korollar 5. *Falls $h_{\text{top}}(T) \geq \log 2$ ist, dann gilt $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$.*

Zur Veranschaulichung der Bedeutung dieses Korollars für die Stetigkeit der topologischen Entropie wird nachstehendes Beispiel angeführt.

Beispiel 12. Die Abbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sei durch

$$T(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ 3x - 1, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \\ 2 - 3x, & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \\ 3x - 2, & \text{für } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

definiert. In Abbildung 5.8 ist der Graph der Funktion T dargestellt. Die Menge aller Endpunkte der Monotonieintervalle ist $E = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right\}$. Für

Abbildung 5.8: Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 12

$x \in (0, 1) \setminus E$ gilt $|T'(x)| = 3$. Da $3 > 1$ ist, kann Satz 16 angewendet werden. Somit ist die topologische Entropie

$$h_{\text{top}}(T) = \log 3 \approx 1.09861228866810969.$$

Da $h_{\text{top}}(T) = \log 3 \geq \log 2$ ist, folgt nach Korollar 5, dass

$$\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$$

gilt. Die topologische Entropie ist stetig.

5.8.2 Stetigkeit des topologischen Drucks

Nachstehender Satz besagt, dass der topologische Druck nach unten halbstetig ist, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Er wurde 1987 von Urbański in [43] bewiesen.

Satz 19. Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, stückweise monotone Abbildung und $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Falls $p(T, f) > \sup_{x \in [0, 1]} f(x)$ ist, dann gilt

$$\liminf_{\substack{\tilde{T} \rightarrow T \\ \|\tilde{f} - f\|_{\infty} \rightarrow 0}} p(\tilde{T}, \tilde{f}) \geq p(T, f).$$

Für die Halbstetigkeit des topologischen Drucks nach oben gilt ein ähnlicher Satz, wie für die topologische Entropie.

Satz 20. *Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, stückweise monotone Abbildung und sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann gilt*

$$\limsup_{\substack{\tilde{T} \rightarrow T \\ \|\tilde{f} - f\|_\infty \rightarrow 0}} p(\tilde{T}, \tilde{f}) = \max \left\{ p(T, f), \max \left\{ \frac{k(c)}{n(c)} \log 2 + \frac{1}{n(c)} \sum_{j=0}^{n(c)-1} f(T^j(c)) : c \in E, c \text{ ist periodisch} \right\} \right\}.$$

Dieser Satz wurde von Raith 1992 in [35] als *Korollar 2.2* formuliert und bewiesen.

Bevor die Frage behandelt wird, wann der topologische Druck für alle Gewichtsfunktionen nach oben halbstetig ist, werden noch zwei Bemerkungen angeführt.

Bemerkung 10. *Falls $\limsup_{\substack{\tilde{T} \rightarrow T \\ \|\tilde{f} - f\|_\infty \rightarrow 0}} p(\tilde{T}, \tilde{f}) \leq p(T, f)$ für alle Gewichtsfunktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann gilt $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$. Die topologische Entropie ist stetig, falls der topologische Druck für alle Gewichtsfunktionen nach oben halbstetig ist. Dies gilt, da $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, 0) \leq p(T, 0)$, also $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) \leq h_{\text{top}}(T)$ ist und $\liminf_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) \geq h_{\text{top}}(T)$ ist.*

Bemerkung 11. *Falls die topologische Entropie nicht stetig ist und somit $\lim_{\tilde{T} \rightarrow T} h_{\text{top}}(\tilde{T}) = h_{\text{top}}(T)$ nicht gilt, dann gibt es eine stetige Funktion, nämlich die Gewichtsfunktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\limsup_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) > p(T, f)$. Die stetige Funktion ist $f = 0$.*

Nachstehender Satz sagt aus, wann der topologische Druck nach oben halbstetig für alle Gewichtsfunktionen ist. Er wurde 2001 von Raith in [36] als *Theorem 7* formuliert und bewiesen.

Satz 21. *Sei $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, stückweise monotone Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt*

$$\limsup_{\substack{\tilde{T} \rightarrow T \\ \|\tilde{f} - f\|_\infty \rightarrow 0}} p(\tilde{T}, \tilde{f}) \leq p(T, f).$$

2. Für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die $\liminf_{\tilde{T} \rightarrow T} p(\tilde{T}, f) \geq p(T, f)$ erfüllt, gilt

$$\lim_{\substack{\tilde{T} \rightarrow T \\ \|\tilde{f} - f\|_\infty \rightarrow 0}} p(\tilde{T}, f) = p(T, f).$$

3. Die Menge E enthält keine periodischen Punkte.

Zur Veranschaulichung der Stetigkeit des topologischen Drucks werden nachstehend zwei Beispiele angeführt.

Beispiel 13. Definiere die Funktion $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$T(x) = \begin{cases} 1 - 4x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ 4x - 1, & \text{für } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 3\frac{2}{5} - 4\frac{4}{5}x, & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}], \\ 4\frac{4}{5}x - 3, & \text{für } x \in [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}], \\ 6 - 6x, & \text{für } x \in [\frac{5}{6}, 1]. \end{cases}$$

Der Graph der Funktion ist in Abbildung 5.9 dargestellt.

Die Menge aller Endpunkte der Monotonieintervalle von T , mit Ausnahme der Punkte 0 und 1, ist $E = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\}$. Nun wird untersucht, ob die Menge E periodische Punkte enthält. Der Punkt $\frac{1}{4}$ ist nicht periodisch, da

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = 0, T(0) = 1, T(1) = 0$$

gilt. Für den Punkt $\frac{1}{2}$ ergibt sich

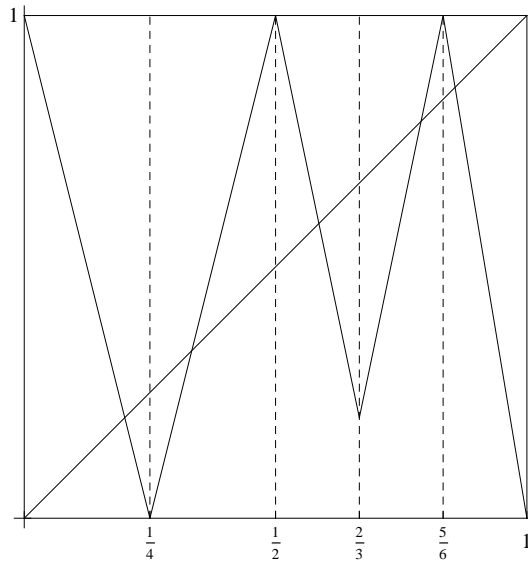
$$T\left(\frac{1}{2}\right) = 1, T(1) = 0, T(0) = 1.$$

Somit ist auch dieser Punkt nicht periodisch. Da

$$T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}, T\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

ist, ist auch der Punkt $\frac{2}{3}$ nicht periodisch. Für den letzten Punkt der Menge E gilt

$$T\left(\frac{5}{6}\right) = 1, T(1) = 0, T(0) = 1.$$

Abbildung 5.9: Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 13

Somit ist auch der Punkt $\frac{5}{6}$ nicht periodisch. Da die Menge E keine periodischen Punkte enthält ist nach Satz 21 der topologische Druck nach oben halbsteigend. Für jede Gewichtsfunktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt daher

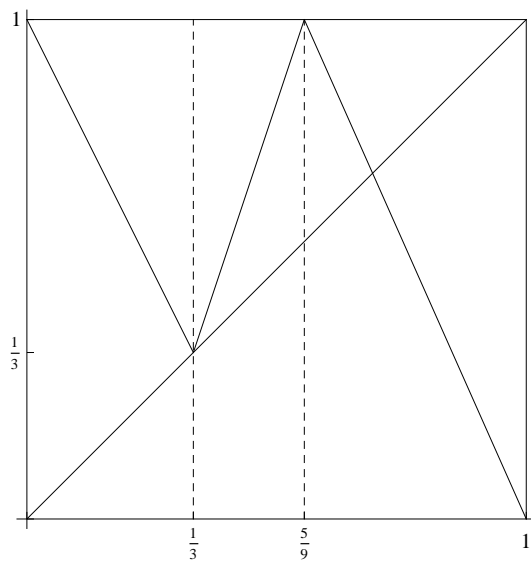
$$\limsup_{\substack{\tilde{T} \rightarrow T \\ \|\tilde{f} - f\|_\infty \rightarrow 0}} p(\tilde{T}, \tilde{f}) \leq p(T, f).$$

Beispiel 14. Die Funktion $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sei durch

$$T(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 3x - \frac{2}{3}, & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{5}{9}], \\ 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4}x, & \text{für } x \in [\frac{5}{9}, 1]. \end{cases}$$

definiert. In Abbildung 5.10 ist der Graph der Funktion T dargestellt. Es ist $E = \{\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\}$ die Menge aller Endpunkte der Monotonieintervalle von T . Für den Punkt $\frac{1}{3}$ gilt

$$T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \dots$$

Abbildung 5.10: Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 14

Daher ist $\frac{1}{3}$ ein periodischer Punkt der Periode 1, also ein Fixpunkt. Der Punkt $\frac{5}{9}$ ist nicht periodisch, da

$$T\left(\frac{5}{9}\right) = 1, T(1) = 0, T(0) = 1$$

ist. Nach Satz 21 folgt, dass die Ungleichung

$$\limsup_{\substack{\tilde{T} \rightarrow T \\ \|\tilde{f} - f\|_{\infty} \rightarrow 0}} p(\tilde{T}, \tilde{f}) \leq p(T, f).$$

nicht für alle Gewichtsfunktionen f gilt und daher der topologische Druck nicht für alle Gewichtsfunktionen f nach oben halbstetig ist.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, dass in scheinbar einfachen dynamischen Systemen „Chaos“ auftreten kann. Eine Unterteilung dynamischer Systeme erfolgt in diskrete und kontinuierliche. Diese beiden Arten von dynamischen Systemen wurden in Kapitel zwei anhand von Wachstumsmodellen besprochen. Eine wichtige Frage im Zusammenhang mit dynamischen Systemen ist die der langfristigen Entwicklung. Dazu wurde die Stabilität von dynamischen Systemen untersucht. Je nach Stabilität des Fixpunkts konnte zwischen Attraktor, Repellor und Sattelpunkt unterschieden werden. Die Stabilitätsanalyse in kontinuierlichen dynamischen Systemen wurde in Kapitel drei anhand von zwei bekannten biologischen Modellen, nämlich dem Lotka-Volterra-Modell und dem SIR-Modell, demonstriert. Bei der Untersuchung der langfristigen Entwicklung von dynamischen Systemen treten häufig Bifurkationen auf. In Kapitel vier wurden statische Bifurkationen beschrieben, bei denen es zu einer Änderung der Stabilität von Fixpunkten kommt. Anhand der Periodenverdoppelung-Bifurkation ist zu erkennen, dass die logistische Funktion ins „Chaos“ führt. Es zeigte sich, dass „Chaos nach Devaney“ durch die starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, topologische Transitivität und die Eigenschaft, dass die periodischen Punkte dicht liegen, beschrieben werden kann. Auch das scheinbar einfache Newtonverfahren für $z^3 - 1$ führt ins „Chaos“. Dabei herrscht auf der Juliamenge „Chaos“. Diese Menge ist selbstähnlich und daher ein Fraktal. Weitere Beispiele für Fraktale sind die in Kapitel fünf beschriebene Cantormenge und das Sierpiński-Dreieck. Zahlreiche Beispiele für Fraktale sind auch in der Natur zu finden. Ein Maß, um zu beschreiben wie „chaotisch“ ein dynamisches System ist, ist die topologische Entropie. Neben der Definition von Dinaburg und Bowen wurde die Definition nach Adler, Konheim

und McAndrew gegeben. Die topologische Entropie kann in manchen Fällen mithilfe einiger Sätze, die in dieser Arbeit formuliert wurden, sehr einfach berechnet werden. Neben der topologischen Entropie wurde die maßtheoretische Entropie definiert. Den Zusammenhang zwischen der topologischen und der maßtheoretischen Entropie beschreibt das Variationsprinzip. Eine Verallgemeinerung der topologischen Entropie ist der topologische Druck. Zwischen „Chaos“ und „Nicht-Chaos“ kann mithilfe des Satzes von Šarkovskij getrennt werden. In Kapitel fünf wurden weitere Abbildungen auf dem Intervall beschrieben. Die topologische Entropie von Intervallabbildungen kann mithilfe der angeführten Sätze bestimmt werden. Abschließend wurde die Stabilität der topologischen Entropie und des topologischen Drucks auf Intervallabbildungen untersucht. Die Analyse, welche Auswirkungen kleine Störungen haben, ist vor allem für Modelle der realen Welt von großer Bedeutung.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Entwicklung der Bakterienkultur	14
2.2	Entwicklung der Erdbevölkerung	16
2.3	Logistisches Wachstum mit $N > L$	20
2.4	Logistisches Wachstum mit $N = L$	20
2.5	Logistisches Wachstum mit $N < L$	20
2.6	Entwicklung der Fruchtfliegenpopulation	22
2.7	Höhenwachstum von Sonnenblumen	23
3.1	Stabilität der Fixpunkte in der Gaußschen Zahlenebene	31
3.2	Attraktor	35
3.3	Repellor	36
3.4	Sattelpunkt	36
3.5	Phasenportrait des Fixpunkts $(0, 0)$	41
3.6	Analyse der Lösungskurven im Lotka-Volterra-Modell	43
3.7	Phasendiagramm des Lotka-Volterra-Modells	45
3.8	Zeitdiagramm des Lotka-Volterra-Modells	45
3.9	Isoklinen mit Schnittpunkt außerhalb des ersten Quadranten	48
3.10	Isoklinen mit Schnittpunkt im ersten Quadranten	48
3.11	Phasenportrait des Fixpunkts $(\frac{a}{\lambda}, 0)$	50
3.12	Phasenportrait des Fixpunkts $\frac{1}{cp+\lambda\mu} (a\mu + cs, ap - s\lambda)$	51
3.13	Analyse der Lösungskurven im SIR-Modell	56
3.14	Phasendiagramm des SIR-Modells	56
4.1	Sattel-Knoten-Bifurkation λe^x mit $\lambda > \frac{1}{e}$	63
4.2	Sattel-Knoten-Bifurkation λe^x mit $\lambda = \frac{1}{e}$	63
4.3	Sattel-Knoten-Bifurkation λe^x mit $0 < \lambda < \frac{1}{e}$	63
4.4	Sattel-Knoten-Bifurkation von $\dot{x} = \mu - x^2$	65
4.5	Pitchfork-Bifurkation	67

4.6	Transkribische Bifurkation	69
4.7	Graph der logistischen Funktion $T(x) = \frac{4}{5}x(1-x)$	71
4.8	Graph der logistischen Funktion $T(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$	72
4.9	Graph der logistischen Funktion $T(x) = 3,1x(1-x)$	73
4.10	Graph der logistischen Funktion $T(x) = 3,2x(1-x)$	73
4.11	Graph der logistischen Funktion $T(x) = 3,8x(1-x)$	74
4.12	Graph der logistischen Funktion $T(x) = 3,999x(1-x)$	74
5.1	Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 3x$	81
5.2	Newtonverfahren für $z^3 - 1$	83
5.3	Cantormenge	86
5.4	Sierpiński-Dreieck	87
5.5	Graph der logistischen Funktion $T(x) = 4x(1-x)$	94
5.6	Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 10	111
5.7	Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 11	112
5.8	Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 12	115
5.9	Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 13	118
5.10	Graph der Funktion $T(x)$ in Beispiel 14	119

Tabellenverzeichnis

2.1	Diskretes exponentielles Wachstum einer Bakterienkultur . . .	13
2.2	Kontinuierliches exponentielles Wachstum der Erdbevölkerung	15
2.3	Kontinuierliches logistisches Wachstum bei Fruchtfliegen . . .	21
2.4	Kontinuierliches logistisches Wachstum von Sonnenblumen . .	23

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$A \cup B$	Vereinigung der Mengen A und B
$A \cap B$	Durchschnitt der Mengen A und B
Bev.	Bevölkerung
Bez.	Bezeichnung
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
diam	Durchmesser
\exists	es existiert
\forall	für alle
h_{top}	topologische Entropie
i. w. S.	im weiteren Sinne
inf	Infimum, untere Schranke
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen und Null
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	Vektorraum mit der Dimension n über \mathbb{R}
SIR	Susceptible Infected Recovered
sup	Supremum, obere Schranke
$x \in A$	Element x aus der Menge A
\dot{x}	Ableitung von x nach t , auch $\frac{\partial x}{\partial t}$
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen

Literaturverzeichnis

- [1] R. Adler, A. Konheim, M. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309 – 319.
- [2] Ll. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, World Scientific Publishing, Singapore, New Jersey, London, 1993.
- [3] V. Arnold, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [4] H. Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, de Gruyter, Berlin, New York, 1978.
- [5] K. Becker, M. Dörfler, *Dynamische Systeme und Fraktale*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.
- [6] H. Bick, *Grundzüge der Ökologie*, Fischer, Stuttgart, 1998.
- [7] R. Bowen, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 401 – 414; erratum: Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 509 – 510.
- [8] R. Bowen, *Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 377 – 397.
- [9] H.-A. Braunß, H. Junek, T. Krainer, *Grundkurs Mathematik in den Biowissenschaften*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2007.
- [10] K. Brucks, H. Bruin, *Topics from One-Dimensional Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

- [11] M. Denker, *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.
- [12] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, California, 1986.
- [13] S. Ellner, J. Guckenheimer, *Dynamic Models in Biology*, Princeton University Press, Princeton, 2006.
- [14] R. Freund, R. Hoppe, *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [15] L. Grüne, O. Junge, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [16] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner, Wiesbaden, 2006.
- [17] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, Teubner, Stuttgart, 1981.
- [18] M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, Amsterdam, Boston, Heidelberg, 2004.
- [19] V. Jiménez López, *Ecuaciones Diferenciales*, Servicio de Publicaciones, Universidad de Murcia, 2000.
- [20] W. Kermack, A. McKendrick, *Contribution to the mathematical theory of epidemics*, Proc. R. Soc. Lond. A **115** (1927), 700 – 721.
- [21] M. Koth, *Mathematische Modelle aus Biologie und Ökologie*, Österreichische Mathematische Gesellschaft, **19** (1991), 129 – 150, <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1991%20Band%2019/Koth1991.pdf>, Stand vom 16.2.2009.
- [22] U. Krengel, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg, Wiesbaden, 2003.
- [23] R. Leven, B.-P. Koch, B. Pompe, *Chaos in dissipativen Systemen*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.
- [24] W. Metzler, *Nichtlineare Dynamik und Chaos*, Teubner, Stuttgart, 1998.

- [25] M. Misiurewicz, *A short proof of the variational principle for a Z_+^N action on a compact space*, *Asterisque* **40** (1976), 147 – 187.
- [26] M. Misiurewicz, *Jumps of entropy in one dimension*, *Fund. Math.* **132** (1989), 215 – 226.
- [27] M. Misiurewicz, S. V. Šljáčkov, *Entropy of piecewise continuous interval maps*, in: *European Conference of Iteration Theory* (Batschuns, 1989), World Scientific, River Edge, 1991, pp. 239 – 245.
- [28] M. Misiurewicz, W. Szlenk, *Entropy of piecewise monotone mappings*, *Studia Math.* **67** (1980), 45 – 63.
- [29] J. Murray, *Mathematical Biology. I. An Introduction*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [30] J. Murray, *Mathematical Biology. II. Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, New York, 2003.
- [31] o.A., *Brockhaus Enzyklopädie in 24 Bänden, Dritter Band*, Brockhaus, Mannheim, 1990.
- [32] o.A., *Brockhaus Enzyklopädie in 24 Bänden, Sechster Band*, Brockhaus, Mannheim, 1990.
- [33] o.A., *Brockhaus Enzyklopädie in 24 Bänden, Elfter Band*, Brockhaus, Mannheim, 1990.
- [34] P. Plaschko, K. Brod, *Nichtlineare Dynamik, Bifurkation und Chaotische Systeme*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1995.
- [35] P. Raith, *Continuity of the Hausdorff dimension for piecewise monotonic maps*, *Israel J. Math.* **80** (1992), 97 – 133.
- [36] P. Raith, *Discontinuities of the pressure for piecewise monotonic interval maps*, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **21** (2001), 197 – 232.
- [37] H. Reed, R. Holland, *The growth rate of an annual plant helianthus*, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **5** (1919), 135 – 144, <http://www.pnas.org/content/5/4/135.full.pdf>, Stand vom 23.3.2009.

- [38] V. Reitmann, *Reguläre und chaotische Dynamik*, Teubner, Stuttgart, 1996.
- [39] H. Remmert, *Ökologie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [40] D. Ruelle, *Statistical mechanics on a compact set with Z^ν action satisfying expansiveness and specification*, Trans. Amer. Math. Soc. **185** (1973), 237 – 251.
- [41] A. N. Šarkovskiy, *Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrain. Math. Zn. **16** (1) (1964), 61 – 71.
- [42] H. Thieme, *Mathematics in Population Biology*, University Press Princeton, Princeton, Oxford, 2003.
- [43] M. Urbański, *Invariant subsets of expanding mappings of the circle*, Ergodic Theory Dynam. Systems **7** (1987), 627 – 645.
- [44] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [45] R. Walgate, *Je kleiner das Wesen, desto größer die Welt*, in: Die Zeit **20** (1985), <http://www.zeit.de/1985/20/Je-kleiner-das-Wesen-desto-groesser-die-Welt.pdf>, Stand vom 3.3.2009.
- [46] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
- [47] P. Walters, *A variational principle for the pressure of continuous transformations*, Amer. J. Math. **17** (1976), 937 – 971.
- [48] G. Walz (Red.), *Lexikon der Mathematik 1 A bis Eif*, Spektrum, Heidelberg, 2001.
- [49] G. Walz (Red.), *Lexikon der Mathematik 2 Eig bis Inn*, Spektrum, Heidelberg, 2001.
- [50] G. Walz (Red.), *Lexikon der Mathematik 3 Inp bis Mon*, Spektrum, Heidelberg, 2001.
- [51] G. Walz (Red.), *Lexikon der Mathematik 5 Sed bis Zyl*, Spektrum, Heidelberg, 2002.

- [52] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1990.

Kurzzusammenfassung

Der Begriff „Chaos“ wird in vielen Bereichen der Wissenschaft und des Alltags verwendet. In der Mathematik zeigt sich, dass bereits in scheinbar einfachen dynamischen Systemen „Chaos“ auftreten kann. Um dies zu veranschaulichen werden Beispiele aus der Biologie und der Mathematik angeführt. Ziel der Arbeit ist es, „Chaos“ durch Eigenschaften zu beschreiben und ein passendes Maß zur Beschreibung wie „chaotisch“ ein dynamisches System ist, zu finden. Dazu werden in Kapitel zwei ein dynamisches System definiert und verschiedene Arten beschrieben. Zur Veranschaulichung diskreter und kontinuierlicher dynamischer Systeme werden Beispiele aus der Biologie beschrieben. Eine Analyse der Stabilität dynamischer Systeme erfolgt in Kapitel drei. Dazu werden die bekannten Beispiele des Lotka-Volterra-Modells und des SIR-Modells vorgestellt. Dass es in dynamischen Systemen häufig zum Auftreten von Bifurkationen kommt, wird in Kapitel vier behandelt. Ein Beispiel dieses Kapitels ist die Periodenverdoppelung-Bifurkation der logistischen Funktion, die zu „Chaos“ führt. In Kapitel fünf wird mit dem Newtonverfahren für $z^3 - 1$ ein weiteres einfaches Beispiel gegeben, bei dem „Chaos“ auftritt. Ein Maß dafür, wie „chaotisch“ ein dynamisches System ist, ist die topologische Entropie. Neben der Definition von Dinaburg und Bowen wird die Definition nach Adler, Konheim und McAndrew gegeben. Weiters wird die maßtheoretische Entropie definiert sowie der Zusammenhang zwischen der topologischen und der maßtheoretischen Entropie im Variationsprinzip beschrieben. Eine Verallgemeinerung der topologischen Entropie ist der topologische Druck, der ebenfalls behandelt wird. Abschließend werden stückweise monotone Abbildungen auf dem Intervall sowie die Stabilität der topologischen Entropie und des topologischen Drucks auf Intervallabbildungen untersucht.

Abstract

The concept “chaos” is used in many areas of science and everyday life. In this study “chaos”, in terms of mathematics, will be analysed. The logistic map is taken as an example to demonstrate that “chaos” occurs in elementary dynamical systems. The goal of this study is to characterize “chaos” and to find out how to measure “chaos” in dynamical systems. Therefore, a dynamical system will be defined in chapter two. To illustrate a discrete and a continuous dynamical system the growth of a population will be explained. Chapter three deals with the stability of dynamical systems. In this context the Lotka-Volterra-Model and the SIR-Model will be defined. Bifurcation might appear in dynamical systems such as the period-doubling bifurcation of the logistic map, which results in “chaos”. This is topic of chapter four. Newton’s method used for $z^3 - 1$ is another road to “chaos”. In chapter five the topological entropy, which is a measurement of how “chaotic” a dynamical system is, will be defined. In addition to this the definition of the measure-theoretic entropy will be given. The variational principle describes the correlation between these two definitions. Also the topological pressure is considered, which is a generalization of the topological entropy. The next part deals with interval maps. At the end of this paper the stability of the topological entropy on interval maps will be analyzed.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Mag. (FH) Renate Angrosch
Anschrift	3950 Gmünd, Hans-Lenz-Straße 2
Geburtsdatum	2. Mai 1982
Geburtsort	Gmünd
Eltern	Ing. Franz und Dipl.-Päd. Maria Angrosch
Geschwister	Mag. Marlies Angrosch Bernhard Angrosch
Staatsangehörigkeit	Österreich
Konfession	römisch katholisch
Familienstand	ledig

Schulbildung

1988 – 1992	Peter-Rosegger-Volksschule, Gmünd
1992 – 2000	BG und BRG Gmünd Matura mit ausgezeichnetem Erfolg im Juni 2000

Studium und beruflicher Werdegang

2000 – 2004	Studium an der Fachhochschule Wiener Neustadt Studiengang Wirtschaftsberatende Berufe mit den Vertiefungen Immobilienmanagement und Unternehmensrechnung und Revision Sponsion zu Mag. (FH) im Juni 2004
8/2004 – 11/2005	Berufserfahrung im Bereich der Immobilien- wertermittlung
2005 – 2009	Studium an der Universität Wien Lehramt Unterrichtsfach Mathematik und Unter- richtsfach Biologie und Umweltkunde
seit 3/2008	Tutorin an der Universität Wien, Fakultät für Mathematik