universität wien

MASTERARBEIT

Titel der Masterarbeit

Zur Konstruktion kokompakter arithmetisch definierter Untergruppen der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und geometrischer Zykel

Verfasser

Susanne Schimpf B.Sc.

angestrebter akademischer Grad

Master of Science (MSc.)

Wien, im Mai 2010

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 066 821
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuer:	Prof. Dr. Joachim Schwermer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Was ist eine arithmetisch definierte Untergruppe der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$? Der Begriff *arithmetische Untergruppe* ist zunächst einmal nur für Gruppen mit einer zusätzlichen arithmetischen Struktur definiert, wie z.B. für lineare algebraische Gruppen G über einem algebraischen Zahlkörper $k \subset \mathbb{R}$. In einem solchen Fall ist die kanonische arithmetische Untergruppe die Gruppe der O_k-rationalen Punkte, wobei O_k den Ring der ganzen Zahlen von k bezeichnet. Durch den Übergang zu den reellen Punkten $G(\mathbb{R})$ erhält man eine reelle Lie Gruppe, in die man die arithmetischen Untergruppen von G einbetten kann. Spricht man also von arithmetisch definierten Untergruppen von $G(\mathbb{R})$, so meint man die Untergruppen, die auf diese Weise von einer algebraischen Gruppe stammen und dort arithmetisch definiert sind.

Möchten wir arithmetisch definierte Untergruppen der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ untersuchen, so müssen wir also algebraische Gruppen über Zahlkörpern betrachten, deren Gruppen der reellen Punkte mit der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ übereinstimmen. Ein naheliegendes Beispiel für eine solche Gruppe ist die $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$ und deren arithmetisch definierte Untergruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ bzw. Untergruppen Γ von endlichem Index darin. Der Quotient $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\Gamma$ hat in diesem Fall zwar endliches Volumen bzgl. eines Haarmaßes, ist jedoch nicht kompakt. Um kokompakte arithmetische Untergruppen zu finden, muss man also von einer komplizierteren Situation ausgehen.

Dies kann man gut am Beispiel einer über $\mathbb{R}$ zerfallenden Quaternionenalgebra Q über $\mathbb{Q}$ und der algebraischen Gruppe $G := \mathrm{SL}_1(Q)$ veranschaulichen. Ist Q isomorph zur Matrixalgebra $M_2(\mathbb{Q})$, so gilt $G \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ und die Gruppe der reellen Punkte $G(\mathbb{R})$ ist isomorph zur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Jede arithmetische Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}_1(Q)$ ist dann als Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ arithmetisch definiert, jedoch nicht kokompakt. Ist Q allerdings eine Divisionsalgebra, so gilt wieder $G(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Jede arithmetische Untergruppe $\Gamma \subset G$ ist dann jedoch, aufgefasst als Untergruppe von $SL_2(\mathbb{R})$, arithmetisch definiert und kokompakt.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden wir solche Konstruktionen für beliebiges n durchführen. Dazu wählen wir einen total reellen algebraischen Zahlkörper $F \neq \mathbb{Q}$, der also mindestens zwei archimedische Stellen hat, eine reelle quadratische Erweiterung E von F und eine zentrale Divisionsalgebra D über E, deren Grad d ein Teiler von n ist. Für eine Involution τ zweiter Art auf D und eine nicht ausgeartete τ-hermitesche Form h auf D^m für $m := n/d$ betrachten wir die Gruppe $G := \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$. Dies ist eine algebraische Gruppe, die über F definiert ist und deren Gruppe der reellen Punkte isomorph zur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist. Jede arithmetische Untergruppe $\Gamma \subset G$ ist also auch eine Untergruppe der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, die arithmetisch definiert und diskret ist.

Doch wie können wir zusätzlich die Kompaktheit des Quotienten $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\Gamma$ sicherstellen? Hier spielt die Tatsache eine Rolle, dass der algebraische Zahlkörper F mindestens zwei archimedische Stellen hat. Mit Hilfe der Restriktion der Skalare finden wir eine über $\mathbb{Q}$ definierte algebraische Gruppe G' mit $G'(\mathbb{Q}) = G(F)$, deren Gruppe der reellen Punkte von der Form $G'(\mathbb{R}) \cong \prod_{v \in V_\infty} G_v$ ist. Dabei bezeichnet V_∞ die Menge der archimedischen Stellen von F. Für die Stelle v, die der Einbettung $\sigma : F \to \mathbb{R}$ entspricht, ist G_v die Gruppe der reellen Punkte von G^σ, der algebraischen Gruppe, die durch Anwendung von σ auf die definierenden Gleichungen entsteht. Sind nun in diesem Produkt alle Faktoren bis auf einen kompakte Lie Gruppen, so ist jede torsionsfreie arithmetische Untergruppe von G, als Unterguppe der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ aufgefasst, diskret, kokompakt und arithmetisch definiert.

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Ergebnisse des ersten Teils dieser Arbeit zusammen:

Satz. *Es sei F ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grad $r > 1$ und $a \in F$ mit $a > 0$ und $\sigma_i(a) < 0$ für $i = 2, \dots r$. Ferner sei $E := F(\sqrt{a})$ eine quadratische Erweiterung und $D = Q(\beta, \gamma|E)$ mit $\beta, \gamma \in F$ eine Quaternionen-Divisionsalgebra über E, die über $\mathbb{R}$ zerfällt. Wir betrachten auf D die Standard-Involution zweiter Art[1] τ und wählen eine τ-hermitesche Form h auf D^m mit Diagonaldarstellung $H = \mathrm{diag}(h_1, \dots, h_m)$ und der Eigenschaft $\delta_{\sigma_i(\beta),\sigma_i(\gamma)}((h_l^{\sigma_i})^{-1}) = 2$ für alle $1 \le l \le m$ und $i = 2, \dots r$. Hier bezeichnen die $\delta_{\sigma_i(\beta),\sigma_i(\gamma)}((h_l^{\sigma_i})^{-1})$ die Anzahl positiver Eigenwerte einer der Quaternionenalgebra $Q(\beta, \gamma|E)$, der Einbettung σ_i und dem Element $h_l \in D$ zugeordneten Matrix (siehe Satz 2.10). Dann gilt für die über F definierte algebraische Gruppe $G = \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$:*

$$G_v \cong \begin{cases} \mathrm{SL}_{2m}(\mathbb{R}) & \textit{für } v = 1 \\ \mathrm{SU}(2m) & \textit{für } v \neq 1 \end{cases}.$$

[1] Damit ist hier die Involution $\tau : x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto \iota(x_0) - \iota(x_1) i - \iota(x_2) j - \iota(x_3) k$ gemeint, wobei ι den nichttrivialen Galoisautomorphismus von E über F bezeichnet.

Außerdem lässt sich jede torsionsfreie arithmetische Untergruppe von $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ *als diskrete und kokompakte arithmetisch definierte Untergruppe der* $\mathrm{SL}_{2m}(\mathbb{R})$ *auffassen.*

Im zweiten Teil der Arbeit lassen wir eine auf diese Weise konstruierte, kokompakte arithmetisch definierte Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ auf den zur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ assoziierten symmetrischen Raum X wirken. Da Γ diskret, torsionsfrei und kokompakt ist, ist der Bahnenraum X/Γ ein kompakter lokalsymmetrischer Raum.

Es sei nun G die algebraische Gruppe über F, die zur Konstruktion von Γ verwendet wurde. Einer reduktiven Untergruppe $H \subset G$ kann man einen symmetrischen Raum $X_H := K_H \backslash H(\mathbb{R})$ zuordnen, wobei K_H eine maximal kompakte Untergruppe von $H(\mathbb{R})$ bezeichnet. Setzt man $\Gamma_H := \Gamma \cap H$, so ist X_H/Γ_H ein lokalsymmetrischer Raum, den man unter bestimmten Bedingungen injektiv in X/Γ einbetten kann. Teilmannigfaltigkeiten von X/Γ, die auf diese Weise von Untergruppen der ursprünglichen algebraischen Gruppe induziert werden, nennt man *geometrische Zykel* (siehe [17]).

In Kapitel 3 werden wir zwei Familien von geometrischen Zykeln von X/Γ konstruieren, so dass zu jedem Zykel der einen Familie ein Zykel komplementärer Dimension in der anderen Familie existiert. Diese werden von den Fixpunktmengen zweier Abbildungen auf G induziert. Wir erhalten damit das folgende Resultat:

Theorem. *Sei* $D := Q(\beta, \gamma | E)$ *für* $\beta, \gamma \in F$ *eine Quaternionenalgebra über* E, *die Divisionsalgebra ist und über* $\mathbb{R}$ *zerfällt. Auf* D *betrachten wir die Standard-Involution zweiter Art* τ *und die Reversion* τ_r. *Es sei* h *eine nicht-ausgeartete Form auf* D^m, *die bzgl.* τ *und* τ_r *hermitesch ist und* $H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_m)$ *sei eine Diagonaldarstellung von* h.

Gilt nun $\sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(h_l^{-1}) = n$ *und* $\sum_{i=1}^m \delta_{\sigma_i(\beta),\sigma_i(\gamma)}((h_l^{\sigma_i})^{-1}) = n$ *für* $1 \leq l \leq m$ *und* $i = 2, \ldots r$, *so wird jede torsionsfreie arithmetische Untergruppe von* $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ *zu einer diskreten, kokompakten arithmetisch definierten Untergruppe von* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. *Hierbei seien* $\varepsilon_{\beta,\gamma}(h_l^{-1})$ *und* $\delta_{\sigma_i(\beta),\sigma_i(\gamma)}((h_l^{\sigma_i})^{-1})$ *wie in Korollar 3.11 bzw. Satz 2.7 die Anzahl der positiven Eigenwerte einer der Quaternionenalgebra* $Q(\beta, \gamma | E)$, *der Einbettung* σ_i *und dem Element* $h_l \in D$ *zugeordneten Matrix.*

Darüber hinaus gibt es zwei Familien von kompakten geometrischen Zykeln

$$C_{p,q} := \mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) \backslash \mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})) / (\Gamma \cap \mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})))$$

$$\textit{und} \quad C'_{p,q} := \mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) \backslash \mathrm{SO}(p, q) / (\Gamma \cap \mathrm{SO}(p, q))$$

für gerade $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = n$. Diese kann man als Teilmannigfaltigkeiten des lokalsymmetrischen Raumes X/Γ auffassen.

Es gilt $\dim(C_{p,q}) = \frac{n^2+n-2(pq+1)}{2}$ und $\dim(C'_{p,q}) = pq$, die geometrischen Zykel sind also Teilmannigfaltigkeiten komplementärer Dimension.

Wir geben nun noch eine kurzen Überblick über den Inhalt der einzelnen Kapitel. In Kapitel 1 werden wir die nötigen Grundlagen über Involutionen, hermitesche Formen und algebraische Gruppen zusammenfassen. Außerdem zeigen wir dort, wie die Gruppe $G := \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ als algebraische Gruppe über F aufgefasst werden kann und bestimmen die Gruppe der reellen Punkten von G (Satz 1.20).

In Kapitel 2 behandeln wir die Konstruktion von kokompakten arithmetisch definierten Untergruppen der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ im Detail. Dort werden wir uns überlegen, welche Gestalt die Gruppen G^{σ_i} haben und wie man die Körpererweiterung E und die hermitesche Form h wählen muss, um die Kompaktheit der Faktoren G_v für $v \neq 1$ zu erhalten. Dafür werden wir uns auf den Fall einer Quaternionenalgebra über E einschränken. Darüber hinaus zeigen wir in Abschnitt 2.2, dass eine torsionsfreie arithmetische Untergruppe von G, als Untergruppe der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ aufgefasst, diskret und sogar kokompakt ist, sofern die Faktoren G_v für $v \neq 1$ kompakt sind (Satz 2.14).

Im dritten Kapitel erinnern wir zunächst an das Konzept symmetrischer und lokalsymmetrischer Räume. Danach werden wir uns überlegen, dass die Reversion τ_r auf D unter bestimmten Bedingungen eine Abbildung ϑ auf G induziert, die beim Übergang zu den reellen Punkten zu einer Cartan-Involution auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ wird. Dazu wird es hilfreich sein, die Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r)$ und deren reelle Punkte zu studieren. Des Weiteren können wir für gerade $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = n$ eine Matrix $\mathfrak{I}_{p,q} \in M_m(D)$ finden, die beim Übergang zur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ zur Matrix $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ wird, und die durch Konjugation auf G wirkt. Die Fixpunktgruppen von $\mathrm{Int}\,\mathfrak{I}_{p,q}$ und $\mathrm{Int}\,\mathfrak{I}_{p,q} \circ \vartheta$ in G induzieren dann zwei Familien von geometrischen Zykeln in X/Γ.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Schwermer für seine Unterstützung beim Verfassen dieser Masterarbeit recht herzlich bedanken. Er hat nicht nur ein interessantes Thema ausgewählt, sondern stand mir auch bei Fragen und Problemen immer zur Verfügung.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Notation

(1) Es sei k ein Körper mit algebraischem Abschluss $\bar{k}$. Die algebraischen Gruppen, die wir in dieser Arbeit betrachten, sind linear, d.h. zu einer solchen Gruppe G gibt es eine Einbettung $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\bar{k})$. Ist G über k definiert, so bezeichnen wir mit $G(k)$ die Gruppe der k-rationalen Punkte. Ist $R \subset k$ ein Ring, und $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\bar{k})$ eine gegebene Einbettung, so setzen wir $G_R := \rho(G) \cap \mathrm{GL}_n(R)$.

(2) Sei nun k ein algebraischer Zahlkörper, O_k der Ring der ganzen Zahlen und G eine über k definierte algebraische Gruppe. Eine Untergruppe Γ von $G(k)$ ist arithmetisch definiert, wenn $\rho(\Gamma)$ mit G_{O_k} kommensurabel ist, d.h. wenn $\rho(\Gamma) \cap G_{O_k}$ endlichen Index in $\rho(\Gamma)$ und G_{O_k} hat. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der gewählten Einbettung ρ.

Wir werden gelegentlich auch von einer arithmetisch definierten Untergruppe Γ einer rellen Lie Gruppe G' sprechen. Dies taucht auf, wenn G' die Gruppe der reellen Punkte einer algebraischen Gruppe G bezeichnet, die über $k \subset \mathbb{R}$ definiert ist. Wir meinen damit eine Untergruppe Γ von G', die als Untergruppe von $G(k)$ arithmetisch definiert ist.

(3) Reelle Lie Gruppen werden als linear und reduktiv vorausgesetzt.

(4) Für einen algebraischen Zahlkörper k vom Grad r über $\mathbb{Q}$ seien $\sigma_i : k \to \mathbb{C}$ für $1 \leq i \leq r$ die $r = s + 2t$ verschiedenen Einbettungen. Diese nummerieren wir stets so, dass $\sigma_i(k) \subset \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq s$ gilt, sowie $\sigma_{s+i}(k) \not\subset \mathbb{R}$ und $\bar{\sigma}_{s+i} = \sigma_{s+i+t}$ für $1 \leq i \leq t$. Ist $t = 0$, gibt es also nur reelle Einbettungen, so nennt man den Zahlkörper *total reell*.

Sei V_∞ die Menge der archimedischen Stellen von k. Diese lässt sich natürlicherweise mit der Menge der ersten $s+t$ Einbettungen $\{\sigma_i : 1 \leq i \leq s+t\}$ identifizieren.

Sprechen wir in dieser Arbeit von der Stelle $v = 1$, so ist damit immer die der Einbettung $\sigma_1 = \mathrm{id}$ entsprechende Stelle gemeint.

(5) Sei R ein Ring mit Eins. Wir bezeichnen mit I_m die Einheitsmatrix in $M_m(R)$ und mit $I_{p,q}$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{smallmatrix}\right)$ in $M_{p+q}(R)$. Die Transponierte der komplex Konjugierten einer Matrix $A \in M_m(\mathbb{C})$ wird als *die zu A adjungierte Matrix* bezeichnet und mit A^* notiert.

1.2 Involutionen

1.2.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt betrachten wir Involutionen auf (zentral einfachen) Algebren über einem Körper k.

Definition 1.1. (1) Sei A eine Algebra über k mit Zentrum $Z(A)$. Eine *Involution* auf A ist eine Abbildung $\sigma : A \to A$ mit folgenden Eigenschaften:

- σ ist k-linear,
- $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$ für alle $x, y \in A$,
- $\sigma^2 = \mathrm{id}$.

Ist $\sigma|_{Z(A)} = \mathrm{id}$, so nennt man σ eine *Involution erster Art*, ansonsten eine *Involution zweiter Art*.

(2) Seien nun (A_1, σ_1) und (A_2, σ_2) zwei k-Algebren mit Involution. Ein k-Algebrenisomorphismus $\varphi : A_1 \to A_2$ heißt *Isomorphismus von Algebren mit Involution*, wenn $\varphi(\sigma_1(x)) = \sigma_2(\varphi(x))$ für alle $x \in A_1$ gilt.

Bemerkung. Ist (A, τ) eine k-Algebra mit Involution erster Art, so werden wir im Folgenden immer annehmen, dass A einfach und zentral über k ist.

Ist (A, τ) eine k-Algebra mit Involution zweiter Art, so schränken wir uns auf zwei Fälle ein:

- A ist einfach. In diesem Fall ist $Z(A)$ ein Körper und wir nehmen an, dass $k = \mathrm{Fix}_{Z(A)}(\tau)$ gilt, k ist also der größte im Zentrum enthaltene Körper, auf dem τ trivial ist. Dann ist $Z(A)$ eine quadratische Erweiterung von k (siehe [7, Satz VI.1.3]).

- Es gilt $A \cong A_1 \oplus A_2$ für zentral einfache k-Algebren A_1, A_2 und $Z(A) \cong k \oplus k$.

Diese Einschränkung ist in der Literatur üblich, man spricht dann auch von *zentral einfachen k-Algebren mit Involution*, obwohl A im Falle einer Involution zweiter Art weder einfach noch zentral sein muss (vgl. [10, S.20]). Wir werden diese Notation gelegentlich verwenden, um unschöne Fallunterscheidungen zu vermeiden.

Das folgende Lemma setzt zwei Involutionen auf derselben Algebra miteinander in Beziehung und wird für spätere Beweise sehr nützlich sein:

Lemma 1.2. *Seien σ_1 und σ_2 zwei Involutionen einer zentral einfachen*[1] *k-Algebra A, die auf dem Zentrum von A übereinstimmen. Dann gibt es ein $g \in A^\times$ mit*

$$\sigma_2(x) = g\sigma_1(x)g^{-1} \text{ für } x \in A. \tag{1.1}$$

Darüber hinaus gilt $\sigma_1(g) = \pm g$, falls σ_1 erster Art ist bzw. $\sigma_1(g) = g$, falls σ_1 zweiter Art ist. Umgekehrt ist die durch (1.1) *beschriebene Abbildung für ein $g \in A^\times$ mit den genannten Bedingungen eine Involution auf A von derselben Art wie σ_1.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\sigma := \sigma_2 \circ \sigma_1$. Dies ist ein Automorphismus auf A und es gilt $\sigma|_{Z(A)} = (\sigma_2|_{Z(A)})^2 = \mathrm{id}$, da $\sigma_i(Z(A)) = Z(A)$ für $i = 1, 2$ ist und die beiden Involutionen auf dem Zentrum übereinstimmen. Aus dem Satz von Skolem-Noether in der Version für halbeinfache Algebren (siehe [2, §10.1, Cor., S.111]) folgt dann, dass $\sigma(x) = gxg^{-1}$ für alle $x \in A$ und ein geeignetes $g \in A^\times$ gilt. Setzt man nun $\sigma_1(x)$ in diese Gleichung ein, so erhält man $\sigma_2(x) = g\sigma_1(x)g^{-1}$, was zu zeigen war.

Aus $\sigma_2^2 = \mathrm{id}$ folgt dann $x = \sigma_2^2(x) = \sigma_2(g\sigma_1(x)g^{-1}) = g\sigma_1(g\sigma_1(x)g^{-1})g^{-1} = g\sigma_1(g)^{-1}x\sigma_1(g)g^{-1}$. Dies bedeutet aber, dass $g\sigma_1(g)^{-1}$ im Zentrum $Z(A)$ liegt, es gilt also $\sigma_1(g) = \lambda g$ für ein $\lambda \in Z(A)$. Ist nun σ_1 eine Involution erster Art, also trivial auf dem Zentrum k von A, so folgt daraus:

$$g = \sigma_1^2(g) = \sigma_1(\lambda g) = \lambda^2 g,$$

d.h. $\lambda = \pm 1$.

Ist σ_1 eine Involution zweiter Art und nehmen wir an, dass $Z(A) =: l$ ein Körper ist, so können wir die Norm $n_{l/k}$ des Elementes $g\sigma_1(g)^{-1} \in l$ berechnen:

$$n_{l/k}(g\sigma_1(g)^{-1}) = g\sigma_1(g)^{-1}\sigma_1(g\sigma_1(g)^{-1}) = 1.$$

[1] *zentral einfach* ist hier im Sinne der vorangehenden Bemerkung gemeint

Nach Hilberts Satz 90 (siehe [7, Satz VI.6.7]) gibt es dann ein Element $a \in l$ mit $g\sigma_1(g)^{-1} = a\sigma_1(a)^{-1}$. Setzen wir nun $g' := ga^{-1}$, so gilt $\sigma_1(g') = \sigma_1(g)\sigma_1(a)^{-1} = ga^{-1} = g'$. Da sich g' aber nur durch Multiplikation mit einem Skalar von g unterscheidet, ist dies ein Element, dass alle Forderungen des Satzes erfüllt.

Nehmen wir nun an, dass $Z(A)$ kein Körper ist, also $Z(A) = k \oplus k$ und $A = A_1 \oplus A_2$. Der einzige nichttriviale k-lineare Automorphismus auf $Z(A)$ ist dann die Vertauschung $\epsilon : (x, y) \mapsto (y, x)$. Wie oben gilt $\sigma_1(g) = \lambda g$ für ein $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in Z(A)$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in k$. Durch Anwendung von σ_1 folgt

$$g = \sigma_1^2(g) = \sigma_1(\lambda)\sigma_1(g) = \epsilon(\lambda)\lambda g = (\lambda_2\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)g.$$

Daraus folgt sofort, dass $\lambda_1\lambda_2 = 1$ gilt, also $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$. Es sei nun $\mu := (\mu_1, \mu_1\lambda_2) \in Z(A)$ für ein $\mu_1 \in k$. Wir setzen $g' = \mu g$. Dann rechnet man leicht nach, dass $\sigma_1(g') = \epsilon(\mu)\lambda g = \mu g = g'$ gilt. Außerdem ist $g'\sigma_1(x)g'^{-1} = \mu g\sigma_1(x)\mu^{-1}g^{-1} = g\sigma_1(x)g^{-1} = \sigma_2(x)$. Also ist g' ein Element, das alle geforderten Eigenschaften erfüllt.

Dass durch (1.1) eine Involution auf A definiert wird, folgt durch Nachrechnen. □

Wir beschäftigen uns nun genauer mit Involutionen erster Art auf zentral einfachen Algebren. Den folgenden Satz findet man in einer etwas allgemeineren Fassung auch in [10, S.1].

Satz 1.3. *Es gibt eine bijektive Korrespondenz zwischen den Involutionen erster Art auf $M_n(k)$ und den Äquivalenzklassen von symmetrischen oder schiefsymmetrischen Matrizen in $\mathrm{GL}_n(k)$ modulo Multiplikation mit einem Faktor aus $k^\times$.*

Beweis. Es bezeichne g eine symmetrische oder schiefsymmetrische Matrix, d.h. es gilt $g = \pm g^t$. Die Abbildung $x \mapsto x^t$ ist eine Involution erster Art auf $M_n(k)$. Also ist nach Lemma 1.2 auch $\sigma_g(x) := g^{-1}x^t g$ eine Involution erster Art auf $M_n(k)$.

Wir betrachten nun die Zuordnung $g \mapsto \sigma_g$ und überlegen uns, dass dadurch die im Satz genannte bijektive Korrespondenz gegeben ist: Es sei $\lambda \in k^\times$. Dann ist $\sigma_{\lambda g}(x) = (\lambda g)^{-1}x^t\lambda g = \lambda^{-1}\lambda g^{-1}x^t g = \sigma_g(x)$ für alle $x \in M_n(k)$, also definieren Matrizen derselben Äquivalenzklasse dieselbe Involution.

Sei nun auch $\tilde{g}$ eine symmetrische oder schiefsymmetrische Matrix und wir nehmen an, $\sigma_g = \sigma_{\tilde{g}}$. Dann gilt für alle $x \in M_n(k)$:

$$g^{-1}x^t g = \tilde{g}^{-1}x^t\tilde{g} \Leftrightarrow x^t g\tilde{g}^{-1} = g\tilde{g}^{-1}x^t,$$

d.h. $g\tilde{g}^{-1}$ liegt im Zentrum k von $M_n(k)$. Also gibt es ein Element $\lambda \in k^\times$ mit $g\tilde{g}^{-1} = \lambda I_n$, d.h. $g = \lambda\tilde{g}$ und die beiden Matrizen liegen in derselben Äquivalenzklasse. Dies zeigt, dass obige Zuordnung injektiv ist.

Die Surjektivität folgt dann aus Lemma 1.2 mit $A = M_n(k)$ und $\sigma_1 = \sigma_{\mathrm{id}} : x \mapsto x^t$: Für jede Involution σ erster Art auf $M_n(k)$ existiert ein $\tilde{g} \in \mathrm{GL}_n(k)$, so dass $\sigma(x) = \tilde{g}x^t\tilde{g}^{-1}$ gilt und $\tilde{g} = \tilde{g}^t$ oder $\tilde{g} = -\tilde{g}^t$ ist. Setzt man nun $g := \tilde{g}^{-1}$, so bedeutet dies, dass g symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist und $\sigma = \sigma_g$ gilt. □

Definition 1.4. Wir nennen eine Involution erster Art auf $M_n(k)$ *orthogonal*, wenn die zugehörige Matrix unter obiger Korrespondenz symmetrisch ist und *symplektisch*, wenn sie schiefsymmetrisch ist.

Diese Begriffe können wir nun mittels einer Zerfällung auf eine beliebige zentral einfache Algebra ausdehnen:

Sei also A eine beliebige zentrale und einfache k-Algebra und $\sigma : A \to A$ eine Involution erster Art. Ist l ein Zerfällungskörper von A mit zugehörigem Isomorphismus $\varphi : A \otimes_k l \to M_n(l)$, dann ist $\sigma_l := \sigma \otimes \mathrm{id}$ eine Involution auf $A \otimes_k l$ und $\varphi : (A \otimes_k l, \sigma_l) \to (M_n(l), \varphi\sigma_l\varphi^{-1})$ ein Isomorphismus von Algebren mit Involution. Wir nennen σ *von symplektischem Typ*, wenn $\varphi\sigma_l\varphi^{-1}$ auf $M_n(l)$ symplektisch ist, ansonsten *von orthogonalem Typ*. Dies ist wohldefiniert, da der Typ von σ_l unabhängig von der gewählten Zerfällung l ist (siehe z.B. [10, S.16]).

Der folgende nützliche Satz hilft bei der Bestimmung konkreter symplektischer und orthogonaler Involutionen auf gewissen Algebren.

Satz 1.5. *Es sei A eine zentral einfache Algebra über einem Körper k und σ eine Involution erster Art. Ist σ' eine weitere Involution erster Art auf A, so gibt es ein $u \in A^\times$ mit $\sigma(u) = \pm u$ und $\sigma'(x) = u\sigma(x)u^{-1}$ für alle $x \in A$. Der Typ von σ' stimmt genau dann mit dem Typ von σ überein, wenn $\sigma(u) = u$ gilt.*

Beweis. Die erste Aussage ist Lemma 1.2. Die zweite Aussage findet man in [10, Prop. I.2.7 (3)]. □

Bemerkung. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir im nächsten Abschnitt zeigen, dass es auf einer Quaternionenalgebra eine eindeutige symplektische Involution gibt.

Wir betrachten nun auf der zentral einfachen k-Algebra A eine Involution σ beliebiger Art. Dann können wir auf der Matrixalgebra $M_n(A)$ eine Involution * wie folgt definieren:

$$^* : M_n(A) \to M_n(A), \quad (a_{ij})^* := (\sigma(a_{ij}))^t = (\sigma(a_{ji})).$$

Satz 1.6. *Die Involution * ist von derselben Art wie σ. Ist σ erster Art, so hat * auch denselben Typ wie σ.*

Beweis. Siehe [10, Prop. I.2.20]. □

1.2.2 Involutionen auf Quaternionenalgebren

Wir beschäftigen uns nun speziell mit Involutionen auf Quaternionenalgebren. Da k in diesem Zusammenhang ein Basiselement bezeichnet, werden wir unseren Grundkörper in diesem Abschnitt F nennen. Um Spezialfälle auszuschließen, nehmen wir $\mathrm{char}(F) \neq 2$ an.

Definition 1.7. Es sei $Q = Q(a, b|F)$ eine Quaternionenalgebra[2] . Dann gibt es zwei wichtige Involutionen erster Art auf Q:

- $\tau_c : x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$, genannt die *Konjugation.*
- $\tau_r : x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto x_0 + x_1 i - x_2 j + x_3 k$, genannt die *Reversion.*

Bemerkung. Die Konjugation ist eine symplektische Involution, die Reversion eine orthogonale. Dies folgt durch Nachrechnen mit Hilfe einer konkreten Zerfällung oder direkt aus Proposition I.2.6 in [10]. Wir skizzieren hier kurz das Vorgehen für die Konjugation:

Durch Benutzen einer bekannten Zerfällung von Q sieht man, dass τ_c auf $M_2(\mathbb{C})$ zur Involution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wird. Bezeichnen wir mit J die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, so entspricht dies der Abbildung $x \mapsto J x^t J^{-1}$ auf $M_2(\mathbb{C})$. Da aber $J^t = -J$ gilt, hat diese Involution symplektischen Typ.

[2]Die Quaternionenalgebra $Q(a, b|F)$ für $a, b \in F^\times$ ist eine vierdimensionale Algebra über F mit Basiselementen $1, i, j, k$. Die Addition ist komponentenweise definiert, die Multiplikation ist auf den Basiselementen durch $i^2 = a, j^2 = b, k^2 = -ab$ und $ij = -ji = k$ gegeben.

Satz 1.8. *Es sei $Q := Q(a,b|F)$ eine Quaternionenalgebra. Dann ist τ_c die einzige symplektische Involution auf Q.*

Beweis. Sei $\sigma : Q \to Q$ eine symplektische Involution. Dann existiert nach Satz 1.5 ein Element $u \in Q^\times$ mit $\sigma(x) = u\tau_c(x)u^{-1}$ für alle $x \in Q$ und $\tau_c(u) = u$. Das bedeutet aber, wegen der Definition von τ_c, dass u in $F^\times$ liegt und damit gilt $\sigma(x) = uu^{-1}\tau_c(x) = \tau_c(x)$ für alle $x \in Q$. □

Bemerkung. Aus diesem Satz folgt dann direkt, dass τ_r von orthogonalem Typ ist: Wäre sie von symplektischem Typ, würde $\tau_r = \tau_c$ gelten, was aber offensichtlich nicht der Fall ist.

Satz 1.9 (Albert)**.** *Sei E/F eine quadratische Körpererweiterung und $\iota : E \to E$ der nichttriviale Galoisautomorphismus. Weiter sei Q eine Quaternionenalgebra über E und σ eine Involution zweiter Art auf Q, d.h. $\sigma|_E = \iota$. Dann existiert eine eindeutige Quaternionenalgebra $Q_0 \subset Q$ über F, so dass*

$$Q \cong Q_0 \otimes_F E \quad \text{und} \quad \sigma = \tau_c^0 \otimes \iota$$

gilt. Dabei bezeichnet τ_c^0 die Konjugation auf Q_0.

Beweis. Dies findet man bei [10, Prop. 2.22] □

1.3 Hermitesche Formen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit hermiteschen Formen über Divisionsalgebren beschäftigen. Für Details und Hintergrundwissen verweisen wir den Leser auf Jacobson [6, Kapitel 5]. Wir betrachten nun eine Divisionsalgebra D über einem Körper k versehen mit einer Involution $\tau : D \to D$. Weiter sei V ein D-Rechtsmodul vom Rang m.

Definition 1.10. Eine *hermitesche Form bzgl. τ* ist eine Abbildung $h : V \times V \to D$ mit folgenden Eigenschaften:

- $h(x_1\lambda + x_2, y) = \tau(\lambda)h(x_1, y) + h(x_2, y)$ für alle $x_1, x_2, y \in V$ und $\lambda \in D$,
- $h(x, y_1\lambda + y_2) = h(x, y_1)\lambda + h(x, y_2)$ für alle $x, y_1, y_2 \in V$ und $\lambda \in D$,
- $\tau(h(x, y)) = h(y, x)$ für alle $x, y \in V$.

Die Form h heißt *nicht ausgeartet*, falls für jedes $x \neq 0$ in V ein y in V existiert, so dass $h(x, y) \neq 0$.

Ist $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Basis von V über D so setzen wir $H := (h(e_i, e_j))$. Dies ist die *Matrix der hermiteschen Form* h bzgl. der Basis $\mathcal{E}$.

In kompletter Analogie zur Theorie von symmetrischen Bilinearformen über Körpern gilt dann folgender Satz:

Satz 1.11. *Sei $h : V \times V \to D$ eine τ-hermitesche Form. Dann existiert eine Basis $\{u_1, \ldots, u_m\}$ von V über D und eine nichtnegative Zahl $k \leq m$, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} h(u_i, u_i) &\neq 0 && \text{für } i = 1, \ldots, k, \\ h(u_i, u_i) &= 0 && \text{für } i = k+1, \ldots, m, \\ h(u_i, u_j) &= 0 && \text{für } 1 \leq i, j \leq m,\ i \neq j. \end{aligned}$$

Beweis. Den Beweis findet man bei Jacobson ([6, Ch. V, Thm. 3]). □

Da wir später mit nicht ausgearteten Formen arbeiten werden, brauchen wir noch folgendes Korollar:

Korollar 1.12. *Sei $h : V \times V \to D$ eine nicht ausgeartete τ-hermitesche Form. Dann existiert eine Basis $\{u_1, \ldots, u_m\}$ von V über D, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} h(u_i, u_i) &\neq 0 && \text{für } i = 1, \ldots, m, \\ h(u_i, u_j) &= 0 && \text{für } 1 \leq i, j \leq m,\ i \neq j. \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Matrix von h bzgl. dieser Basis eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge nicht 0 sind.

Beweis. Dies folgt leicht aus obigem Satz. Wir müssen nur zeigen, dass $k = m$ gilt, d.h., dass kein Basisvektor $u_i \neq 0$ mit $h(u_i, u_i) = 0$ existiert. Nehmen wir also an, es gäbe doch so ein u_i. Dann wäre $h(u_i, u_j) = 0$ für alle $1 \leq j \leq m$. Da die Vektoren u_j eine Basis bilden, folgt daraus direkt $h(u_i, y) = 0$ für alle $y \in V$, ein Widerspruch zur Tatsache, dass h nicht ausgeartet ist. □

Wir können somit im Folgenden die Matrix einer nicht ausgearteten hermiteschen Form immer als Diagonalmatrix mit nichttrivialen Einträgen auffassen. Wir nennen so eine Matrix auch *Diagonaldarstellung der hermiteschen Form*. Sei also h

eine hermitesche Form und $H := \operatorname{diag}(h_1, \dots h_m)$ eine Diagonaldarstellung, wobei $h_i = h(u_i, u_i)$ gilt. Aus den Eigenschaften von h folgt dann $\tau(h_i) = \tau(h(u_i, u_i)) = h(u_i, u_i) = h_i$. Als Diagonaleinträge kommen demnach nur Elemente von D in Frage, die unter der Involution τ festgehalten werden. Da τ eine k-lineare Abbildung ist, haben die Elemente von k auf jeden Fall diese Eigenschaft. Welche Elemente einer Divisionsalgebra sonst noch als Einträge der Matrix vorkommen können hängt stark von der Wahl der Algebra und der Involution ab.

Nun erwähnen wir noch ein einfaches Lemma, das den Zusammenhang zwischen verschiedenen Diagonaldarstellungen einer hermiteschen Form und den gewählten Basen beschreibt.

Lemma 1.13. *Sei h eine nicht ausgeartete τ-hermitesche Form auf V, die bzgl. der Basis $\{u_1, \dots u_m\}$ von V über D die Diagonaldarstellung* $\operatorname{diag}(h_1, \dots, h_m)$ *hat. Dann hat h bzgl. der Basis $\{u_1\lambda_1, \dots u_m\lambda_m\}$ für $\lambda_i \in D \setminus \{0\}$ die Darstellung* $\operatorname{diag}(\tau(\lambda_1)h_1\lambda_1, \dots, \tau(\lambda_m)h_m\lambda_m)$.

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass $h(u_i\lambda_i, u_j\lambda_j) = \tau(\lambda_i)h(u_i, u_j)\lambda_j$ für alle $1 \leq i, j \leq m$ gilt. □

Beispiel 1.14. Es sei $D = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{R}$ und $\tau : z \mapsto \bar{z}$, die komplexe Konjugation. Dann ist τ eine Involution zweiter Art auf $\mathbb{C}$ und $\tau(z) = z$ impliziert $z \in \mathbb{R}$. Jede nicht ausgeartete τ-hermitesche Form auf $\mathbb{C}^m$ hat also eine Darstellung als Diagonalmatrix mit Einträgen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen Lemma 1.13 und weil $\mathbb{C}$ kommutativ ist, können diese Einträge um beliebige Faktoren der Form $\bar{\lambda}\lambda$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ verändert werden. Nun ist aber $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$, $\lambda \mapsto |\lambda| = \bar{\lambda}\lambda$ eine surjektive Abbildung, d.h. wir können die Einträge der Diagonalmatrix um beliebige positive Faktoren verändern.

Insbesondere gibt es also für jede hermitesche Form h auf $\mathbb{C}^m$ eine Darstellung der Gestalt $I_{p,q}$. Dabei ist p die Anzahl der positiven Eigenwerte und q die Anzahl der negativen Eigenwerte einer beliebigen Matrixdarstellung von h. Das Paar (p, q) heißt dann die *Signatur* von h.

1.4 Die spezielle unitäre Gruppe

Bereits aus der linearen Algebra bekannt ist die spezielle unitäre Gruppe über $\mathbb{C}$.

Beispiel 1.15. Es seien p und q natürliche Zahlen mit $p+q = m \neq 0$. Wir bezeichnen mit $I_{p,q}$ die Matrix $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ und mit g^* die zu einer Matrix g $\in$

$\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ adjungierte Matrix. Wir definieren nun die *spezielle unitäre Gruppe der Signatur* (p, q) als

$$\mathrm{SU}(p, q) := \{g \in \mathrm{SL}_m(\mathbb{C}) : g^* I_{p,q}\, g = I_{p,q}\}.$$

Es gilt $\mathrm{SU}(m, 0) = \mathrm{SU}(0, m)$; diese Gruppe wird mit $\mathrm{SU}(m)$ bezeichnet.

Für $m \geq 2$ ist die Gruppe $\mathrm{SU}(p, q)$ eine zusammenhängende, halbeinfache reelle Lie Gruppe der Dimension $(p + q)^2 - 1$. Diese ist genau dann kompakt, wenn $p = 0$ oder $q = 0$ gilt (siehe [9, Kap. I.17]).

Die obige Definition lässt sich verallgemeinern, so dass man die spezielle unitäre Gruppe über Divisionsalgebren definieren kann.

1.4.1 Die spezielle unitäre Gruppe über einer Divisionsalgebra

Wie im komplexen Fall ist die spezielle unitäre Gruppe über einer beliebigen Divisionsalgebra eine Untergruppe der speziellen linearen Gruppe. Um diese zu definieren benötigen wir die *reduzierte Norm*.

Definition 1.16. Sei A eine zentral einfache Algebra über einem Körper k und sei l ein Zerfällungskörper von A, d.h. es existiert ein Isomorphismus $\varphi : A \otimes_k l \xrightarrow{\cong} M_n(l)$. Für $x \in A$ definieren wir:

$$\mathrm{Nrd}_{A/k}(x) := \det(\varphi(x \otimes 1)).$$

Hierdurch ist eine Abbildung $\mathrm{Nrd}_{A/k} : A \to l$ gegeben, die man die *reduzierte Norm von A über k* nennt.

Satz 1.17. *Die reduzierte Norm hat folgende Eigenschaften:*

(1) Für $x, y \in A$ gilt $\mathrm{Nrd}_{A/k}(xy) = \mathrm{Nrd}_{A/k}(x)\,\mathrm{Nrd}_{A/k}(y)$.

(2) Für $x \in A$ liegt $\mathrm{Nrd}_{A/k}(x)$ in k und ist unabhängig vom gewählten Zerfällungskörper l sowie dem Isomorphismus φ.

(3) Die reduzierte Norm von x ist durch ein homogenes Polynom vom Grad n in den Koordinaten von x bzgl. einer Basis von A über k gegeben. Dieses Polynom hat Koeffizienten in k, die reduzierte Norm ist also über k definiert.

(4) Ein Element $x \in A$ ist genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{Nrd}_{A/k}(x) \neq 0$.

Beweis. **(1)**: folgt aus der Definition. **(2)**: Siehe [4, §22, Lemma 2]. **(3)** und **(4)**: Siehe [2, §12, Prop. 11 u. Prop. 12]. □

Bemerkung. Da die reduzierte Norm in einer definierenden Gleichung einer algebraischen Gruppe auftauchen wird, ist für uns besonders die Eigenschaft (3) interessant. Wir werden die Notation $\mathrm{Nrd}_{A/k}(x_1, \ldots, x_{n^2})$ verwenden, wenn wir die reduzierte Norm als Polynom in $k[x_1, \ldots, x_{n^2}]$ auffassen, während $\mathrm{Nrd}_{A/k}(x)$ für $x \in D$ ein Element aus k bezeichnet.

In der Definition der speziellen linearen Gruppe wird nun die Rolle der Determinante von der reduzierten Norm übernommen:

Definition 1.18. Sei D eine zentrale Divisionsalgebra über einem Körper E. Die *spezielle lineare Gruppe vom Grad m über D* ist definiert als

$$\mathrm{SL}_m(D) := \{g \in M_m(D) : \mathrm{Nrd}_{M_m(D)/E}(g) = 1\}.$$

Nun können wir mit Hilfe der in Abschnitt 1.2 und 1.3 eingeführten Begriffe die spezielle unitäre Gruppe über D definieren:

Definition 1.19. Es sei D eine zentrale Divisionsalgebra über einem Körper E, $\tau : D \to D$ eine Involution auf D und h eine nicht ausgeartete τ-hermitesche Form auf D^m. Die *spezielle unitäre Gruppe* ist dann definiert als

$$\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) := \{g \in \mathrm{SL}_m(D) : h(gx, gy) = h(x, y) \text{ für alle } x, y \in D^m\}.$$

Nachdem wir nun die Definition der $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ gesehen haben, wollen wir noch zwei weitere Darstellungen dieser Gruppe betrachten, die für spätere Rechnungen besser geeignet sind. Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Basis von D^m über D und $H := (h(e_i, e_j))$ die Matrix der hermiteschen Form h. Für $g \in M_m(D)$ sei $g^* := \tau(g)^t$, wobei τ komponentenweise auf die Matrix g angewendet wird. Dies ist nach Satz 1.5 eine Involution auf $M_m(D)$ von derselben Art wie τ. Damit lässt sich die spezielle unitäre Gruppe auch folgendermaßen darstellen:

$$\mathrm{SU}_m(H, D, \tau) := \mathrm{SU}_m(h, D, \tau) = \{g \in \mathrm{SL}_m(D) : g^* H g = H\}.$$

Setzen wir nun $\omega(g) := H^{-1}g^*H$, so ist dies eine weitere Involution auf $M_m(D)$, die auf dem Zentrum mit $g \mapsto g^*$ übereinstimmt. Eine dritte Darstellung der speziellen unitären Gruppe ist dann durch

$$\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) = \{g \in \mathrm{SL}_m(D) : \omega(g)g = I_m\} \tag{1.2}$$

gegeben.

1.4.2 Interpretation der $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ als algebraische Gruppe über einem algebraischen Zahlkörper F

In diesem Abschnitt bezeichne F einen algebraischen Zahlkörper, $E = F(\sqrt{a})$ eine quadratische Erweiterung von F und D eine zentrale Divisionsalgebra über E. Es sei $\tau : D \to D$ eine Involution auf D und h eine hermitesche Form bzgl. τ auf D^m. Außerdem benutzen wir die Notation $r := [F : \mathbb{Q}]$ für den Grad von F über $\mathbb{Q}$ und $d := \mathrm{grad}(D)$ für den Grad von D über E.

Wir werden nun sehen, wie man die $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ als Gruppe der F-rationalen Punkte einer algebraischen Gruppe über F auffassen kann.

Zunächst wählen wir eine Basis $\{b_1 = 1, b_2, \ldots b_{d^2}\}$ von D über E. Dann ist $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_{2d^2}\} = \{b_1, \ldots, b_{d^2}, \sqrt{a}b_1, \ldots, \sqrt{a}b_{d^2}\}$ eine Basis von D über F. Insbesondere ist $\{b_1, b_{d^2+1}\} = \{1, \sqrt{a}\}$ eine Basis von E über F. Die spezielle Wahl von $\mathcal{B}$ wird für unsere späteren Betrachtungen hilfreich sein.

Es sei nun $\varrho : D \to M_{2d^2}(F)$ die reguläre Linksdarstellung von D über F. Das heißt, man betrachtet D als $2d^2$-dimensionalen Vektorraum über F bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ und ordnet einem Element $x \in D$ die Matrix der linearen Abbildung $l_x : D \to D, y \mapsto xy$ zu. Für ein Element $x = x_1 + x_2\sqrt{a} \in E$ mit $x_1, x_2 \in F$ ist $\varrho(x)$ eine Matrix folgender Form: $\begin{pmatrix} X_1 & aX_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}$, wobei $X_i = x_i\, I_{d^2}$ für $i = 1, 2$ bezeichnet. Wir identifizieren diese mit der 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & ax_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in M_2(F)$ und bezeichnen die Abbildung von E nach $M_2(F)$ wieder mit ϱ.

Das Bild $\varrho(D) \subset M_{2d^2}(F)$ ist ein linearer Unterraum und wird daher durch ein System von linearen Gleichungen mit Koeffizienten in F beschrieben:

$$f_k(x_{ij}) = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, 2d^2;\ k = 1, \ldots, l. \tag{1.3}$$

Die Variablen sind hier die Einträge der Matrix $x = (x_{ij})$.

Wir betrachten nun

$$\bar{\varrho} : M_m(D) \to M_m(M_{2d^2}(F)) = M_{m2d^2}(F), \quad \bar{\varrho}(g) = (\varrho(g^{\alpha\beta}))_{1\leq\alpha,\beta\leq m}$$

für $g = (g^{\alpha\beta}) \in M_m(D)$. Das Bild von $\bar{\varrho}$ wird dann durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$f_k(x_{ij}^{\alpha\beta}) = 0, \quad i, j = 1, \ldots, 2d^2;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, l. \tag{1.4}$$

Dabei sind die $x_{ij}^{\alpha\beta}$ als Einträge der Matrix $(x_{ij}^{\alpha\beta}) \in M_{2md^2}(F)$ zu verstehen.

Nach Satz 1.17 (3) lässt sich die reduzierte Norm von $M_m(D)$ über E als Polynom mit Koeffizienten in E in den Koordinaten bzgl. einer Basis von $M_m(D)$ über E schreiben. Zur Konstruktion so einer Basis betrachten wir die Matrix $E_{\alpha\beta} \in M_m(D)$, die an der Stelle (α, β) eine 1 und sonst nur Nullen als Einträge hat. Die Menge $\{E_{\alpha\beta} : 1 \leq \alpha, \beta \leq m\}$ bildet dann eine Basis von $M_m(D)$ als D-Modul. Wir erinnern uns, dass $\{b_1, \ldots, b_{d^2}\}$ eine Basis von D über E bildet. Setzen wir nun

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{b_k E_{\alpha\beta} : 1 \leq \alpha, \beta \leq m, 1 \leq k \leq d^2\},$$

so ist dies die gesuchte Basis von $M_m(D)$ über E.

Sei $(x_1^{1,1}, \ldots, x_{d^2}^{m,m})$ eine Darstellung von $x \in M_m(D)$ bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}$. Wegen der speziellen Wahl dieser Basis gilt dann $x_i^{\alpha\beta} = x_{i,1}^{\alpha\beta} + \sqrt{a} \cdot x_{d^2+i,1}^{\alpha\beta}$ für $i = 1, \ldots, d^2$, wobei die $x_{ij}^{\alpha\beta}$ hier wie oben die Einträge der Matrix $\bar{\varrho}(x)$ bezeichnen. Die reduzierte Norm von x ist also ein Polynom in den Variablen $x_i^{\alpha\beta}$ mit Koeffizienten in E. Um diese nun als Polynom mit Koeffizienten in F auszudrücken, wenden wir die Abbildung $\varrho : E \to M_2(F)$ auf die Koeffizienten an und ersetzen die Koordinate $x_i^{\alpha\beta}$ durch die 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} x_{i,1}^{\alpha\beta} & a \cdot x_{d^2+i,1}^{\alpha\beta} \\ x_{d^2+i,1}^{\alpha\beta} & x_{i,1}^{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Das resultierende Polynom bezeichnen wir mit $\widehat{\mathrm{Nrd}}_{M_m(D)/E} : F^{2m^2d^2} \to M_2(F)$.

Die Bedingung $\mathrm{Nrd}_{M_m(D)/E}(g) = 1$ geht daher durch die Gleichung

$$\widehat{\mathrm{Nrd}}_{M_m(D)/E}(x_{1,1}^{1,1}, \ldots, x_{2d^2,1}^{m,m}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \tag{1.5}$$

ein.

Nun muss noch die definierende Gleichung der $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ in entsprechende Gleichungen in $M_{2md^2}(F)$ mit Koeffizienten in F umgewandelt werden. Dazu verwenden wir die Darstellung (1.2). Es sei $\bar{\omega} : M_{2md^2}(F) \to M_{2md^2}(F)$ eine lineare Fortsetzung der Abbildung $\bar{\varrho}\omega\bar{\varrho}^{-1}$. Dann wird die Bedingung $\omega(g)g = I_m$ durch

$$\bar{\omega}\big((x_{ij}^{\alpha\beta})\big)(x_{ij}^{\alpha\beta}) = I_{2md^2} \tag{1.6}$$

beschrieben.

Die Gleichungen (1.4), (1.5) und (1.6) definieren eine algebraische Gruppe als Untergruppe der $M_{2md^2}(\mathbb{C})$. Diese Gruppe ist über F definiert und wir bezeichnen sie mit $\mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$. Aus den obigen Überlegungen folgt direkt, dass die Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ über $\bar{\varrho}$ mit den F-rationalen Punkten dieser algebraischen Gruppe identifiziert wird.

Bemerkung. Man beachte hier die Notation: Die algebraische Gruppe, die durch die Lösungen der obigen Gleichungen in $\mathbb{C}$ definiert wird, wird mit $\mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$ notiert. Die F-rationalen Punkte dieser Gruppe stimmen mit unserer ursprünglichen speziellen unitären Gruppe überein. Wir notieren diese mit $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ oder gelegentlich auch mit $\mathrm{SU}_m(H, D, \tau)$, wenn wir die Abhängigkeit von der Matrixdarstellung der hermiteschen Form hervorheben wollen.

1.4.3 Die Gruppe der reellen Punkte der $\mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$

Wir haben oben gesehen, wie man die $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ als F-rationale Punkte einer algebraischen Gruppe über F auffassen kann. Ist nun F ein *total reeller* Zahlkörper und τ eine Involution *zweiter Art*, so gibt der folgende Satz die reellen Punkte dieser algebraischen Gruppe an.

Bemerkung. Als Notation für die Gruppe der reellen Punkte der $\mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$ hat sich in diesem Zusammenhang die Notation $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R}$ durchgesetzt, die wir hier verwenden werden.

Satz 1.20. *Sei F ein total reeller Zahlkörper und seien E und D wie oben festgelegt. Außerdem sei τ eine Involution zweiter Art auf D und h eine τ-hermitesche Form. Dann treten die folgenden drei Fälle auf:*

(1) Falls $E \not\subset \mathbb{R}$, so gibt es natürliche Zahlen p, q mit $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SU}(p, q)$.

(2) Ist $E \subset \mathbb{R}$ und D zerfällt über $\mathbb{R}$, so gilt $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SL}_{dm}(\mathbb{R})$.

(3) Ist $E \subset \mathbb{R}$ und D zerfällt nicht über $\mathbb{R}$, so gilt $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SL}_{dm/2}(\mathbb{H})$.

Bevor wir nun diesen Satz beweisen, werden wir einige nützliche Resultate zeigen, auf die wir dann im späteren Beweis zurückgreifen.

Wir setzen $\varsigma(x) := \tau(x)^t$ für $x \in M_m(D)$. Es bezeichne $M_m(D)^{op}$ die zu $M_m(D)$ opponierte Algebra, das ist der Vektorraum $M_m(D)$ versehen mit der Multiplikation $x^{op}y^{op} := (yx)^{op}$. Dann ist $\varsigma : M_m(D) \to M_m(D)^{op}$ ein Isomorphismus von F-Algebren. Dies folgt aus der Tatsache, dass ς F-linear ist und $\varsigma(xy) = \varsigma(y)\varsigma(x)$ erfüllt. Auf $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}$ kann man die Abbildung durch $\varsigma \otimes \mathrm{id}$ zu einem $\mathbb{R}$-linearen Isomorphismus $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_m(D)^{op} \otimes_F \mathbb{R}$ fortsetzen. Man beachte, dass ς nicht E-linear ist, da τ auf E mit ι, dem nichttrivialen Galoisautomorphismus von E über F, übereinstimmt.

Lemma 1.21. *Ist $E \not\subset \mathbb{R}$, so gilt $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \cong M_{md}(\mathbb{C})$. Ist $E \subset \mathbb{R}$ und D zerfällt über $\mathbb{R}$, so gilt $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \cong M_{dm}(\mathbb{R}) \oplus M_{dm}(\mathbb{R})$. Dies sind Isomorphismen von $\mathbb{R}$-Algebren.*

Beweis. Es sei zunächst $E \not\subset \mathbb{R}$, d.h. $E = F(\sqrt{a})$ mit $a < 0$. Wir betrachten $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}$ als Algebra über $\mathbb{R}$. Eine Basis ist dann durch

$$\mathcal{C} := \{(b_i E_{\alpha,\beta} \otimes 1) : 1 \leq i \leq 2d^2, 1 \leq \alpha, \beta \leq m\}$$

mit b_i wie in Abschnitt 1.4.2 gegeben. Die Elemente aus $\mathcal{C}$ bilden auch eine Basis von $M_m(D) \otimes_E \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Algebra: Da nämlich $\{1, \sqrt{a}\}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ ist und $\{(b_i E_{\alpha,\beta} \otimes 1) : 1 \leq i \leq d^2, 1 \leq \alpha, \beta \leq m\}$ eine Basis von $M_m(D) \otimes_E \mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$, erhält man durch Kombination dieser beiden Basen gerade die Menge $\mathcal{C}$, die somit eine Basis von $M_m(D) \otimes_E \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ bildet. Die Abbildung

$$j : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_m(D) \otimes_E \mathbb{C}, \quad (b_i E_{\alpha,\beta} \otimes 1) \mapsto (b_i E_{\alpha,\beta} \otimes 1)$$

ist dann ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren.

Es sei nun $\phi : M_m(D) \otimes_E \mathbb{C} \to M_{md}(\mathbb{C})$ ein $\mathbb{C}$-Algebren-Isomorphismus. Dieser existiert, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Dann ist $\varphi := \phi \circ j : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{C})$ der gesuchte Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren.

Ist $E \subset \mathbb{R}$, so wird alles etwas komplizierter. Wir definieren auch hier eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$j : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_m(D) \otimes_E \mathbb{R}, \quad (b_i E_{\alpha,\beta} \otimes 1) \mapsto (b_i E_{\alpha,\beta} \otimes 1).$$

Diese Abbildung ist aber nicht injektiv, da die Menge $\mathcal{C}$ keine Basis von $M_m(D) \otimes_E \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ ist. Es gilt z.B. $j(I_m \otimes_F \sqrt{a}) = \sqrt{a} j(I_m \otimes_F 1) = \sqrt{a}(I_m \otimes_E 1) = (\sqrt{a} I_m \otimes_E 1) = j(\sqrt{a} I_m \otimes_F 1)$, aber $(I_m \otimes \sqrt{a})$ und $(\sqrt{a} I_m \otimes 1)$ stimmen in $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}$ nicht überein. Wir erhalten jedoch durch

$$(j, j \circ (\varsigma \otimes \mathrm{id})) : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to (M_m(D) \otimes_E \mathbb{R}) \oplus (M_m(D)^{op} \otimes_E \mathbb{R})$$

einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren. Die Menge

$$\{((b_i E_{\alpha,\beta} \otimes 1), (\varsigma(b_i E_{\alpha,\beta}) \otimes 1)) : 1 \leq i \leq 2d^2, 1 \leq \alpha, \beta \leq m\}$$

bildet nämlich eine Basis von $(M_m(D) \otimes_E \mathbb{R}) \oplus (M_m(D)^{op} \otimes_E \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$, was im Wesentlichen daran liegt, dass $\varsigma(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$ gilt.

Da D über $\mathbb{R}$ zerfällt existiert ein Isomorphismus $\phi : M_m(D) \otimes_E \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{R})$. Setzen wir nun $\phi^{op} : M_m(D)^{op} \otimes_E \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{R})$, $(x^{op} \otimes \lambda) \mapsto (\phi(x \otimes \lambda))^t$, so ist

$$\varphi := (\phi \circ j, \phi^{op} \circ j \circ (\varsigma \otimes \mathrm{id})) : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{R}) \oplus M_{md}(\mathbb{R}),$$

der gesuchte Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren. □

Satz 1.22. *Es sei*

$$\tilde{\omega} : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}, \quad \tilde{\omega}(x \otimes \lambda) = \omega(x) \otimes \lambda.$$

Dann ist $\tilde{\omega}$ eine Involution zweiter Art auf $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}$ und es gilt:

(1) Ist $E \not\subset \mathbb{R}$, so gibt es einen Isomorphismus $\psi : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{C})$ von $\mathbb{R}$-Algebren, so dass $\psi \tilde{\omega} \psi^{-1}(g) = I_{p,q} g^* I_{p,q}$ ist.

(2) Ist $E \subset \mathbb{R}$ und D zerfällt über $\mathbb{R}$, so existiert ein $\mathbb{R}$-Algebrenisomorphismus $\psi : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{R}) \oplus M_{md}(\mathbb{R})$, so dass $\psi \tilde{\omega} \psi^{-1}(x, y) = (y^t, x^t)$ ist.

Beweis. Durch leichtes Nachrechnen sieht man, dass $\tilde{\omega}$ eine Involution von derselben Art wie ω ist. Aus Lemma 1.2, Satz 1.6 und der Tatsache, dass τ auf D eine Involution zweiter Art ist, folgt, dass auch ω eine Involution zweiter Art ist.

(1): Die Existenz eines $\mathbb{R}$-Algebrenisomorphismus $\varphi : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{C})$ haben wir bereits in Lemma 1.21 gesehen. Wir wollen nun zeigen, dass dieser Isomorphismus auch so gewählt werden kann, dass $\tilde{\omega}$ in die Involution $x \mapsto I_{p,q} x^* I_{p,q}$ auf $M_{md}(\mathbb{C})$ übergeht.

Dies folgt im Wesentlichen aus Lemma 1.2: Wir betrachten die beiden Involutionen $\nu := \varphi\tilde{\omega}\varphi^{-1}$ und $\mu : x \mapsto x^*$ auf $M_{md}(\mathbb{C})$. Dies sind beides Involutionen zweiter Art, daher stimmen sie auf dem Zentrum $\mathbb{C}I_{md}$ von $M_{md}(\mathbb{C})$ mit der komplexen Konjugation überein.

Aus Lemma 1.2 folgt damit die Existenz eines Elementes $g \in \mathrm{GL}_{md}(\mathbb{C})$ mit $g^* = g$ und $\nu(x) = gx^*g^{-1}$ für alle $x \in M_{md}(\mathbb{C})$. Da g eine hermitesche Matrix ist, gibt es ein Element $u \in \mathrm{GL}_{md}(\mathbb{C})$ und natürliche Zahlen p und q, so dass $g = uI_{p,q}u^*$. Wir setzen nun $\psi(x \otimes \lambda) := u^{-1}(\varphi(x \otimes \lambda))u$ und rechnen nach, dass ψ die geforderte Eigenschaft hat:

$$\begin{aligned}\psi(\tilde{\omega}(\psi^{-1}(x))) &= u^{-1}(\varphi(\tilde{\omega}(\varphi^{-1}(uxu^{-1})))u = u^{-1}(\nu(uxu^{-1}))u \\ &= u^{-1}g(uxu^{-1})^*g^{-1}u = u^{-1}uI_{p,q}u^*(u^{-1})^*x^*u^*(u^*)^{-1}I_{p,q}u^{-1}u \\ &= I_{p,q}x^*I_{p,q}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Hier haben wir im zweiten Schritt die Definition von ν verwendet und im dritten Schritt die Identität $\nu(x) = gx^*g^{-1}$ ausgenutzt.

(2): Der Beweis von (2) ist analog zu (1), wir werden deshalb nicht mehr alle Rechnungen im Detail ausführen.

Sei $\varphi : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{R}) \oplus M_{md}(\mathbb{R})$ der Isomorphismus aus Lemma 1.21. Wir wollen nun zeigen, dass es einen Isomorphismus ψ gibt, unter dem die Involution $\tilde{\omega}$ auf $M_m(D)$ in die Involution $\mu : (x, y) \mapsto (y^t, x^t)$ auf $A := M_{md}(\mathbb{R}) \oplus M_{md}(\mathbb{R})$ übergeht. Dazu setzen wir $\nu := \varphi\tilde{\omega}\varphi^{-1}$ und betrachten wieder die Einschränkungen von ν und μ auf das Zentrum von A. Es ist $Z(A) = \mathbb{R}\, I_{md} \oplus \mathbb{R}\, I_{md}$ und somit stimmen μ und ν als Involutionen zweiter Art auf dem Zentrum mit der Abbildung $(x, y) \mapsto (y, x)$ überein.

Nun liefert uns Lemma 1.2 die Existenz eines Elementes $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{GL}_{md}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{GL}_{md}(\mathbb{R})$ mit $\mu(g) = g$, d.h. $g_2 = g_1^t$ und $\nu(x, y) = g(y^t, x^t)g^{-1}$. Setzen wir nun

$$\psi(x \otimes \lambda) = (g_1^{-1}, I_{md})\, \varphi(x \otimes \lambda)\, (g_1, I_{md}),$$

so lässt sich leicht nachprüfen, dass dies ein Isomorphismus ist, der die geforderte Eigenschaft erfüllt. $\square$

Bemerkung. Wir möchten hier noch kurz festhalten, wie die beiden Komponenten des Isomorphismus ψ im Fall (2) aussehen. Es sei $\varphi = (\phi \circ j, \phi^{op} \circ j \circ (\varsigma \otimes \mathrm{id}))$ wie in Lemma 1.21. Dann ist $\psi(x \otimes \lambda) = (g_1^{-1}\phi(j(x \otimes \lambda))g_1, \phi^{op}(j(\varsigma(x) \otimes \lambda)))$. Setzt man nun $\phi_1 := \operatorname{Int} g_1^{-1} \circ \phi$ [3] und $\phi_2 := \phi^{op}$, so sind dies $\mathbb{R}$-lineare Isomorphismen von $M_m(D) \otimes_E \mathbb{R}$ bzw. $M_m(D)^{op} \otimes_E \mathbb{R}$ nach $M_{md}(\mathbb{R})$ und es gilt $\psi = (\phi_1 \circ j, \phi_2 \circ j \circ (\varsigma \otimes \mathrm{id}))$.

Nun können wir den Satz über die reellen Punkte der $\mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$ beweisen:

Beweis von Satz 1.20. Für diese Arbeit sind nur die Fälle (1) und (2) relevant, der Beweis von (3) geht analog zu (2).

Um die reellen Punkte von $\mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$ zu bestimmen, müssen wir die Gleichungen (1.4)-(1.6) in $\mathbb{R}$ lösen. Wir beginnen mit (1.4) und zeigen folgende Behauptung:

> *Es gibt eine injektive Abbildung* $\overline{\tilde{\varrho}} : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{2md^2}(\mathbb{R})$, *deren Bild* $\overline{\tilde{\varrho}}(M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}) \subset M_{2md^2}(\mathbb{R})$ *durch die Gleichungen* (1.4) *beschrieben wird.*

Es ist nämlich D eine Algebra über F, mit Basis $\mathcal{B}$ wie in Abschnitt 1.4.2. Dann ist $D \otimes_F \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra mit Basis $\{b_i \otimes 1 : b_i \in \mathcal{B}\}$. Es sei $\tilde{\varrho}$ eine reguläre Linksdarstellung von $D \otimes_F \mathbb{R}$ bzgl. dieser Basis. Die Koeffizienten der Gleichungen, die den Unterraum $\tilde{\varrho}(D \otimes_F \mathbb{R})$ beschreiben hängen dann nur von den Produkten der einzelnen Basiselemente miteinander ab. Die gewählt Basis von $D \otimes_F \mathbb{R}$ stimmt aber im Wesentlichen mit der Basis $\mathcal{B}$ von D über F überein, also wird dieser Unterraum auch durch die Gleichungen (1.3) beschrieben, allerdings hier mit Lösungen im Körper $\mathbb{R}$.

Nun geht man zu einer Abbildung $\overline{\tilde{\varrho}} : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} = M_m(D \otimes_F \mathbb{R}) \to M_{2md^2}(\mathbb{R})$ über, indem man $\tilde{\varrho}$ auf jeden Eintrag der Matrix anwendet. Das Bild dieser Abbildung wird dann genau wie in 1.4.2 durch die Gleichungen (1.4) beschrieben. An dieser Stelle sei bemerkt, dass die Abbildung $\overline{\tilde{\varrho}}$ auf $M_m(D) \otimes 1$ mit $\bar{\varrho}$ übereinstimmt, es gilt also $\overline{\tilde{\varrho}}(x \otimes 1) = \bar{\varrho}(x)$ für alle $x \in M_m(D)$. Dies lässt sich leicht nachprüfen, indem man x bzgl. der Basis von $M_m(D)$ über F aufschreibt.

Wir wissen also nun, dass wir einen Lösungsvektor der Gleichung (1.4) auch als Element in $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}$ auffassen können. Nun müssen wir uns noch überlegen, was die Gleichungen (1.5) und (1.6) für dieses Element bedeuten. Beschäftigen wir uns zunächst mit der reduzierten Norm. Hier müssen wir die Fälle $E \subset \mathbb{R}$ und $E \not\subset \mathbb{R}$ unterscheiden. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir:

$$\mathbb{K} := \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } E \subset \mathbb{R} \\ \mathbb{C} & \text{falls } E \not\subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

[3] Die Abbildung $\operatorname{Int} g$ bezeichnet hier die Konjugation mit dem Element g.

Man beachte, dass nun $M_m(D) \otimes_E \mathbb{K} \cong M_{md}(\mathbb{K})$ gilt, da wir uns entweder in Fall (1) oder in Fall (2) des Satzes befinden. Für Matrixalgebren ist die reduzierte Norm aber gerade die Determinante, also können wir leicht sehen, dass die Polynome $\mathrm{Nrd}_{M_m(D)/E}(x_1, \ldots, x_{m^2d^2})$ und $\mathrm{Nrd}_{M_m(D)\otimes_E\mathbb{K}/\mathbb{K}}(x_1, \ldots, x_{m^2d^2})$ übereinstimmen. Eine Lösung in $\mathbb{R}$ der Gleichung (1.5) kann man daher auch als eine Lösung in $\mathbb{K}$ in den Variablen $x_i^{\alpha,\beta} := x_{i,1}^{\alpha,\beta} + \sqrt{a}x_{d^2+i,1}^{\alpha,\beta}$ für $i = 1, \ldots d^2$ der Gleichung

$$\mathrm{Nrd}_{M_m(D)\otimes_E\mathbb{K}/\mathbb{K}}(x_1^{1,1}, \ldots, x_{d^2}^{\alpha,\beta}) = 1$$

auffassen. Dies bedeutet aber gerade, dass für $x := \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} x_i^{\alpha,\beta}(b_iE_{\alpha,\beta} \otimes 1) \in M_m(D) \otimes_E \mathbb{K}$ gilt $\mathrm{Nrd}_{M_m(D)\otimes_E\mathbb{K}/\mathbb{K}}(x) = 1$.

Fassen wir noch einmal zusammen: Einen Lösungsvektor $\tilde{x}$ in $\mathbb{R}^{2md^2}$ der Gleichung (1.4) können wir mit einem Element $x \in M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}$ identifizieren. Dieses Element lässt sich über die Abbildung j aus Lemma 1.21 auch als Element in $M_m(D) \otimes_E \mathbb{K}$ auffassen. Erfüllt nun $\tilde{x}$ zusätzlich Gleichung (1.5), so bedeutet dies, dass $\mathrm{Nrd}_{M_m(D)\otimes_E\mathbb{K}/\mathbb{K}}(j(x)) = 1$ ist. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ müssen wir uns außerdem noch überlegen, dass ein solches Element x auch $\mathrm{Nrd}_{M_m(D)\otimes_E\mathbb{K}/\mathbb{K}}(j((\varsigma \otimes \mathrm{id})(x))) = 1$ erfüllt. Da dieser Schritt weitere Hintergründe über algebraische Gruppen erfordert, haben wir die Details in Anhang B zusammengefasst.

Nun betrachten wir noch die Gleichung (1.6). Es genügt hier, diese Gleichung auf dem Unterraum $U := \overline{\bar{\varrho}}(M_m(D) \otimes_F \mathbb{R})$ zu betrachten, da wir uns ja durch Gleichung (1.4) auf diesen Raum einschränken. Wir zeigen die folgende Behauptung:

Auf U stimmt (1.6) *mit der Gleichung* $\overline{\bar{\varrho}}\tilde{\omega}\overline{\bar{\varrho}}^{-1}((x_{ij}^{\alpha\beta}))(x_{ij}^{\alpha\beta}) = I_{2md^2}$ *überein, wobei $\tilde{\omega}$ wie in Satz 1.22 definiert ist.*

Da (1.6) auf $\bar{\varrho}(M_m(D))$ durch $\bar{\varrho}\omega\bar{\varrho}^{-1}((x_{ij}^{\alpha\beta}))(x_{ij}^{\alpha\beta}) = I_{2md^2}$ gegeben ist, genügt es, die Gleichheit von $\overline{\bar{\varrho}}\tilde{\omega}\overline{\bar{\varrho}}^{-1}$ und $\bar{\varrho}\omega\bar{\varrho}^{-1}$ als Polynome zu zeigen. Dazu müssen wir die Abbildungen ω und $\tilde{\omega}$ genauer untersuchen. Es seien

$$x := \sum_{i=1}^{2d^2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} x_{i,1}^{\alpha\beta} b_i E_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad y := \sum_{i=1}^{2d^2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} y_{i,1}^{\alpha\beta}(b_i E_{\alpha\beta} \otimes 1)$$

mit $x_{i,1}^{\alpha\beta} \in F$ und $y_{i,1}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ Elemente in $M_m(D)$ bzw. $M_m(D) \otimes \mathbb{R}$.

Wir berechnen

$$\omega(x) = H^{-1}x^*H = H^{-1}\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} x_{i,1}^{\alpha\beta}(b_iE_{\alpha\beta})^*H = H^{-1}\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} x_{i,1}^{\alpha\beta}\tau(b_i)E_{\beta\alpha}\,H$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}(y) &= \tilde{\omega}(\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} y_{i,1}^{\alpha\beta}(b_iE_{\alpha\beta}\otimes 1)) = \tilde{\omega}(\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}(b_iE_{\alpha\beta}\otimes y_{i,1}^{\alpha\beta}))\\
&= \sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}(\omega(b_iE_{\alpha\beta})\otimes y_{i,1}^{\alpha\beta}) = (H^{-1}\otimes 1)\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}((b_iE_{\alpha\beta})^*\otimes y_{i,1}^{\alpha\beta})(H\otimes 1)\\
&= (H^{-1}\otimes 1)\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}(\tau(b_i)E_{\beta\alpha}\otimes y_{i,1}^{\alpha\beta})(H\otimes 1)\\
&= (H^{-1}\otimes 1)\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} y_{i,1}^{\alpha\beta}(\tau(b_i)E_{\beta\alpha}\otimes 1)(H\otimes 1).
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die $x_{i,1}^{\alpha\beta}$ und $y_{i,1}^{\alpha\beta}$ als Variablen und nutzen die Linearität von $\bar{\varrho}$ bzw. $\overline{\bar{\varrho}}$ sowie die Eigenschaft $\overline{\bar{\varrho}}(x\otimes 1) = \bar{\varrho}(x)$ aus, so sehen wir:

$$\begin{aligned}
\bar{\varrho}(\omega(x)) &= \bar{\varrho}(H^{-1})\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} x_{i,1}^{\alpha\beta}\bar{\varrho}(\tau(b_i)E_{\beta\alpha})\bar{\varrho}(H)\\
\text{und}\quad \overline{\bar{\varrho}}(\tilde{\omega}(y)) &= \overline{\bar{\varrho}}(H^{-1}\otimes 1)\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} y_{i,1}^{\alpha\beta}\overline{\bar{\varrho}}(\tau(b_i)E_{\beta\alpha}\otimes 1)\overline{\bar{\varrho}}(H)\\
&= \bar{\varrho}(H^{-1})\sum_{i=1}^{2d^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} y_{i,1}^{\alpha\beta}\bar{\varrho}(\tau(b_i)E_{\beta\alpha})\bar{\varrho}(H).
\end{aligned}$$

Bis auf die Identifikation $x_{i,1}^{\alpha\beta} = y_{i,1}^{\alpha,\beta}$, d.h. als Polynome in diesen Variablen, stimmen die beiden Ausdrücke also miteinander überein. Daraus folgt aber schon die obige Behauptung, denn wir haben x und y gerade so gewählt, dass $x = \bar{\varrho}^{-1}((x_{ij}^{\alpha\beta}))$ und $y = \overline{\bar{\varrho}}^{-1}((y_{ij}^{\alpha\beta}))$ gilt.

Wir können also die reellen Punkte der $\mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$ mit der Menge

$$\mathcal{G} := \{x \in M_m(D)\otimes_F \mathbb{R} : \mathrm{Nrd}_{M_m(D)\otimes_E\mathbb{K}/\mathbb{K}}(j(x)) = 1 \text{ und } \tilde{\omega}(x)x = I_m\}$$

identifizieren.

Nun unterscheiden wir noch die Fälle (1) : $E \not\subset \mathbb{R}$ und (2) : $E \subset \mathbb{R}$: Mit Satz 1.22 folgt im Fall (1):

$$\begin{aligned}\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} &\cong \{x \in M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} : \mathrm{Nrd}_{M_m(D)\otimes_E \mathbb{C}/\mathbb{C}}(j(x)) = 1; \tilde{\omega}(x)x = I_m\} \\ &\cong \{g \in M_{md}(\mathbb{C}) : \det(g) = 1 \text{ und } I_{p,q}g^* I_{p,q} g = I_{md}\} \\ &= \{g \in \mathrm{SL}_{md}(\mathbb{C}) : g^* I_{p,q} g = I_{p,q}\} = \mathrm{SU}(p, q).\end{aligned}$$

Für Fall (2) müssen wir noch etwas genauer überlegen. Es sei $\psi : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{R}) \oplus M_{md}(\mathbb{R})$ der Isomorphismus aus Satz 1.22. Aus der Bemerkung nach Satz 1.22 geht hervor, dass es zwei Isomorphismen $\phi_1, \phi_2 : M_m(D) \otimes_E \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{R})$ gibt, so dass $\psi = (\phi_1 \circ j, \phi_2 \circ j \circ (\varsigma \otimes \mathrm{id}))$ gilt. Es sei nun $x \in M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}$ und $\psi(x) = (x_1, x_2)$. Dann folgt aus Anhang B, dass $\det(x_1) = \det(x_2) = 1$ gilt. Wir können also die Menge $\mathcal{G}$ mit der Menge $\{(g, h) \in \mathrm{SL}_{md}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{SL}_{md}(\mathbb{R}) : (\psi\tilde{\omega}\psi^{-1}(g, h))(g, h) = (I_{md}, I_{md}))\}$ identifizieren. Mit Satz 1.22 folgt dann:

$$\begin{aligned}\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} &\cong \{(g, h) \in \mathrm{SL}_{md}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{SL}_{md}(\mathbb{R}) : (h^t, g^t)(g, h) = (I_{md}, I_{md})\} \\ &= \{(g, h) \in \mathrm{SL}_{md}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{SL}_{md}(\mathbb{R}) : h = \left(g^t\right)^{-1}\} \cong \mathrm{SL}_{md}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$ □

1.5 Restriktion der Skalare: Grundlagen

In diesem Abschnitt geht es darum, die k-rationalen Punkte einer algebraischen Gruppe über k als $\mathbb{Q}$-rationale Punkte einer algebraischen Gruppe über $\mathbb{Q}$ aufzufassen. Das Resultat stammt von *André Weil* und ist z.B. in [19] oder [1, §7.16] zu finden.

Sei also k ein algebraischer Zahlkörper vom Grad r und seien $\sigma_i : k \to \mathbb{C}, 1 \leq i \leq r$, die $r = s + 2t$ verschiedenen Einbettungen. Diese seien so nummeriert, dass $\sigma_i(k) \subset \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq s$, $\sigma_{s+i}(k) \not\subset \mathbb{R}$ und $\bar{\sigma}_{s+i} = \sigma_{s+i+t}$ für $1 \leq i \leq t$ gilt. Zu einer algebraischen Gruppe G über k kann man dann für jede Einbettung σ_i eine Gruppe G^{σ_i} über $\sigma_i(k)$ definieren: Ist $I \subset k[x_{11}, \ldots, x_{nn}]$ das definierende Ideal von G, so sei I^{σ_i} das Ideal in $\sigma_i(k)[x_{11}, \ldots x_{nn}]$, das durch Anwendung von σ_i auf die Koeffizienten der Elemente in I entsteht. G^{σ_i} ist dann die algebraische Gruppe über $\sigma_i(k)$, die durch I^{σ_i} definiert wird.

Sei V_∞ die Menge der archimedischen Stellen von k. Diese lässt sich natürlicherweise mit der Menge der ersten $s+t$ Einbettungen $\{\sigma_i : 1 \leq i \leq s+t\}$ identifizieren.

Für eine Stelle v, die der Einbettung σ_i entspricht, setzen wir $G_v = G^{\sigma_i}(k_v)$, wobei $k_v = \mathbb{R}$, falls σ_i reell ist und $k_v = \mathbb{C}$, falls σ_i komplex ist.

Satz 1.23. *Sei G eine algebraische Gruppe über dem Zahlkörper k. Dann existiert eine algebraische Gruppe G' über $\mathbb{Q}$, sodass $G' \cong \prod_{i=1}^{r} G^{\sigma_i}$ gilt. Die Gruppe G' wird auch mit $\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}} G$ bezeichnet und es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$\varphi : G(k) \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q}),$$

der sich zu einem Isomorphismus $G_{O_k} \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}} G)_{\mathbb{Z}}$ einschränken lässt.

Darüberhinaus existiert ein Isomorphismus

$$(\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \prod_{v \in V_\infty} G_v.$$

Beweis. Siehe [21, Prop. 6.1.3] □

Korollar 1.24. *Sei $\Gamma \subset G(k)$ eine arithmetische Untergruppe. Dann ist $\varphi(\Gamma)$ eine arithmetische Untergruppe von $(\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q})$.*

Beweis. Da Γ eine arithmetische Untergruppe ist, sind Γ und G_{O_k} kommensurabel. Sei $\varphi : G(k) \to (\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q})$ der Isomorphismus aus Satz 1.23. Dann sind $\varphi(\Gamma)$ und $\varphi(G_{O_k}) = (\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}})_{\mathbb{Z}}$ kommensurabel, d.h. $\varphi(\Gamma)$ ist eine arithmetische Untergruppe von $(\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q})$. □

Beispiel 1.25. (1) Sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Der Zahlkörper k hat zwei reelle Stellen v_1 und v_2 mit zugehörigen Einbettungen $\sigma_1 = \mathrm{id}$ und $\sigma_2 : k \to \mathbb{R}$, $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$. Die algebraische Gruppe G ist über $\mathbb{Q}$ und damit insbesondere über k durch die Gleichung $\det(x) = 1$ definiert. Es gilt $G(k) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ und $G_{v_1} = G_{v_2} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, da sich die definierende Gleichung von G durch Anwendung von σ_i, $i = 1, 2$ auf die Koeffizienten nicht ändert.

Nach Satz 1.23 gibt es dann eine algebraische Gruppe G', die über $\mathbb{Q}$ definiert ist und $G'(\mathbb{Q}) \cong G(k)$ sowie $G'_{\mathbb{Z}} \cong G_{O_k}$ erfüllt. Außerdem gilt:

$$G'(\mathbb{R}) \cong G_{v_1} \times G_{v_2} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Sei nun $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) = \mathrm{SL}_2(O_k)$. Dies ist eine arithmetische Untergruppe von G. Dann ist Γ nach Korollar 1.24 isomorph zu einer arithmetischen Untergruppe von $G'(\mathbb{Q})$ und damit auch von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

(2) Es sei nun $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und

$$G = \mathrm{SO}(x_1^2 - \sqrt{2}x_2^2; \mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) : g^t \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right) g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)\}.$$

Dann ist $G(k) = G \cap \mathrm{GL}_2(k) = \mathrm{SO}(x_1^2 + \sqrt{2}x_2^2; k)$. Wendet man σ_1 und σ_2 auf die definierende Gleichung von G an, so erhält man $G_{v_1} = G(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(1,1)$ und $G_{v_2} = \mathrm{SO}(x_1^2 + \sqrt{2}x_2^2; \mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(2)$.

Es existiert wie oben eine algebraische Gruppe G' über $\mathbb{Q}$, die $G'(\mathbb{Q}) \cong G(k)$, $G'_{\mathbb{Z}} \cong G_{O_k}$ und

$$G'(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(1,1) \times \mathrm{SO}(2)$$

erfüllt. Die arithmetische Untergruppe $\Gamma := \mathrm{SO}(x_1^2 + \sqrt{2}x_2^2; O_k)$ ist dann zu einer arithmetischen Untergruppe von $\mathrm{SO}(1,1) \times \mathrm{SO}(2)$ isomorph.

1.6 Kompaktheitskriterium von Godement

Definition 1.26. Sei $G \subset \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ eine Lie Gruppe.

(1) Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ heißt *kokompakt*, wenn der Quotient G/H kompakt ist.

(2) Ein Element $u \in G$ heißt *unipotent*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(u - I_m)^n = 0$ existiert.

Wir werden uns nun ein Kriterium für die Kokompaktheit einer abgeschlossenen Untergruppe einer Lie Gruppe anschauen. Dazu zitieren wir zunächst zwei Resultate, die im Zusammenhang mit Kompaktheit von Lie Gruppen stehen.

Lemma 1.27. *Sei G eine halbeinfache Lie Gruppe. Äquivalent sind:*

- *G ist kompakt.*
- *Es gibt keine nichttrivialen unipotenten Elemente in G.*

Beweis. Siehe [20, §7E, Prop. 7.40]. □

Satz 1.28 (Godement)**.** *Sei G eine algebraische Gruppe, die über $\mathbb{Q}$ definiert ist und deren Gruppe der reellen Punkte $G(\mathbb{R})$ als Lie Gruppe halbeinfach ist. Weiter sei $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ eine arithmetisch definierte Untergruppe. Dann gilt: $G(\mathbb{R})/\Gamma$ ist genau dann kompakt, wenn Γ keine nichttrivialen unipotenten Elemente enthält.*

Beweis. Siehe [14, Thm. 10.19]. □

Wir verwenden nun die Notation aus Abschnitt 1.5, d.h. G ist eine algebraische Gruppe über einem algebraischen Zahlkörper k. Es sei

$$\Delta : G(k) \to \prod_{v \in V_\infty} G_v, \quad x \mapsto (\sigma_1(x), \dots, \sigma_{s+t}(x)).$$

Dabei wird die Abbildung σ_i jeweils auf alle Einträge von x angewandt. Die Abbildung Δ ist ein injektiver Homomorphismus, also ein Isomorphismus auf ihr Bild $\Delta(G(k))$. Aus Satz 1.23 wissen wir außerdem, dass $G(k) \cong (\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G))(\mathbb{Q})$ gilt. Also können wir auch $\Delta(G(k))$ mit $(\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G))(\mathbb{Q})$ identifizieren. Ist nun $\Gamma \subset G(k)$ eine arithmetische definierte Untergruppe, so können wir $\Delta(\Gamma)$ auch als Untergruppe von $G'(\mathbb{Q})$ auffassen. Diese ist dann nach Korollar 1.24 auch arithmetisch definiert. Der folgenden Satz sagt uns, unter welchen Bedingungen der Quotient $(\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G))(\mathbb{R})/\Delta(\Gamma)$ kompakt ist.

Satz 1.29. *Sei Γ eine arithmetische Untergruppe von $G(k)$. Ist mindestens einer der Faktoren von $(\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G))(\mathbb{R})$ kompakt, so ist $\Delta(\Gamma)$ kokompakt in $(\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G))(\mathbb{R})$.*

Beweis. Nach Godements Kriterium (Satz 1.28) reicht es zu zeigen, dass $\Delta(\Gamma)$ keine nichttrivialen unipotenten Elemente enthält. Sei G_v kompakt und $\sigma_i : k \to k_v$ die zugehörige Einbettung.

Wir wählen ein nichttriviales Element $\Delta(\gamma) = (\gamma, \sigma_2(\gamma), \dots, \sigma_{s+t}(\gamma)) \in \Delta(\Gamma)$. Dann ist wegen Lemma 1.27 das Element $\sigma_i(\gamma)$ nicht unipotent, also kann auch $\Delta(\gamma)$ nicht unipotent sein. □

Beispiel 1.30. Wir betrachten noch einmal die beiden Beispiele in 1.25. Im ersten Fall ist keiner der Faktoren G_v kompakt, wir können also mit Hilfe von Satz 1.29 keine Aussage über die Kokompaktheit von $\Delta(\Gamma)$ treffen.

Im zweiten Fall ist der Faktor $G_{v_2} = SO(2)$ kompakt. Also folgt aus Satz 1.29, dass $\Delta(SO(x_1^2 + \sqrt{2}x_2^2; O_k))$ eine kokompakte Untergruppe von $SO(1,1) \times SO(2)$ ist.

Kapitel 2

Konstruktion von kokompakten arithmetischen Untergruppen der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit der Konstruktion von kokompakten arithmetischen Untergruppen der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ beschäftigen. Dazu werden wir oft auf die vorbereitenden Resultate aus Kapitel 1 zurückgreifen. Wir erläutern hier zunächst kurz die generelle Vorgehensweise und gehen dann auf die einzelnen Schritte im Detail ein.

Wir beginnen damit, die Notation festzulegen, die für das gesamte Kapitel gelten soll. Es sei F ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grad r, $E := F(\sqrt{a})$ eine reelle quadratische Erweiterung von F und D eine zentrale Divisionsalgebra über E vom Grad d, die über $\mathbb{R}$ zerfällt. Außerdem bezeichne $\tau : D \to D$ eine Involution zweiter Art auf D, d.h. die Einschränkung von τ auf E stimmt mit dem nichttrivialen Galoisautomorphismus von E über F überein.

Wir wählen nun ein $n \in \mathbb{N}$ und möchten eine kokompakte arithmetische Untergruppe der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ konstruieren. Dazu fordern wir, dass der Grad d der Divisionsalgebra ein Teiler von n ist und wählen dann $m \in \mathbb{N}$ so, dass $dm = n$ gilt. Nun betrachten wir eine nicht ausgeartete τ-hermitesche Form auf D^m und die zugehörige spezielle unitäre Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$. Aus Abschnitt 1.4.1 wissen wir, dass man die $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ als Gruppe der F-rationalen Punkte einer über F definierten algebraischen Gruppe $G := \mathrm{SU}_{\mathbf{m}}(h, D, \tau)$ auffassen kann. Nach Abschnitt 1.5 existiert außerdem eine algebraische Gruppe $G' = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G)$, die über $\mathbb{Q}$ definiert ist und für die gilt: $G'(\mathbb{Q}) \cong G(F)$ und $G'(\mathbb{R}) \cong \prod_{v \in V_\infty} G_v$. Dadurch können wir die $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ also auch als Gruppe der $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte von G' auffassen.

Im Abschnitt 2.1 werden wir sehen, dass sich die Faktoren G_v von $G'(\mathbb{R})$ mit Satz 1.20 bestimmen lassen. Bei geeigneter Wahl der Körpererweiterung E und der hermiteschen Form h ergibt sich $G'(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}_{dm}(\mathbb{R}) \times \prod_{i=2}^{r} G_i^c$, für gewisse kompakte Gruppen G_i^c. Es sei nun $F \neq \mathbb{Q}$, d.h. es gibt mindestens zwei archimedische Stellen, und Γ eine arithmetisch definierte, torsionsfreie Untergruppe von $G(F) = \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$. Dann können wir Γ mit Hilfe der Abbildung Δ aus 1.6 in dieses Produkt einbetten, so dass $\Delta(\Gamma)$ kokompakt und arithmetisch definiert ist. Nach Satz 2.14 ist Γ sogar eine kokompakte arithmetische Untergruppe der $\mathrm{SL}_{dm}(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Wir werden uns nun im Detail mit den einzelnen Schritten dieser Konstruktion beschäftigen und uns genau überlegen, wie gewisse Wahlen getroffen werden müssen, um das gewünschte Ergebnis zu erhalten. Zum Abschluss des Kapitels werden wir die Vorgehensweise an zwei konkreten Beispielen veranschaulichen.

2.1 Restriktion der Skalare: $G = \mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$

Betrachten wir also die Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ für geeignet gewählte Parameter m, D, h und τ. Wie in der Einleitung dieses Kapitels beschrieben gibt es dann algebraische Gruppen G über F und G' über $\mathbb{Q}$ mit $G'(\mathbb{Q}) \cong G(F) \cong \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ und $G'(\mathbb{R}) \cong \prod_{v \in V_\infty} G_v$. Wir möchten nun die einzelnen Faktoren G_v für $v \in V_\infty$ bestimmen. Da F total reell ist, gilt $F_v = \mathbb{R}$ für alle $v \in V_\infty$, also $G_v = G^{\sigma_i}(\mathbb{R})$, wenn $\sigma_i : F \to \mathbb{R}$ die der Stelle v entsprechende Einbettung ist.

2.1.1 Bestimmung der Gruppen G^{σ_i} für eine Einbettung $\sigma_i : F \to \mathbb{R}$

Die Gruppe G^{σ_i} ist die algebraische Gruppe über $\sigma_i(F)$, die durch Anwendung von σ_i auf die Koeffizienten der definierenden Gleichungen von G entsteht. Wir werden nun eine Divisionsalgebra D^{σ_i} über $\sigma_i(F)$, eine Involution τ^{σ_i} und eine hermitesche Form h^{σ_i} konstruieren, und zeigen, dass $G^{\sigma_i} = \mathbf{SU_m}(h^{\sigma_i}, D^{\sigma_i}, \tau^{\sigma_i})$ gilt. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $\sigma := \sigma_i$.

Es sei $F^\sigma := \sigma(F)$. Dann ist $\sigma : F \to F^\sigma \subset \mathbb{R}$ ein Isomorphismus und F^σ ist wieder ein total reeller Zahlkörper. Für $E^\sigma := F^\sigma\big(\sqrt{\sigma(a)}\big)$ existiert dann ein Isomorphismus $\tilde{\sigma} : E \to E^\sigma$, der $\sqrt{a}$ auf $\sqrt{\sigma(a)}$ abbildet und auf F mit σ übereinstimmt (vgl. [7, Kapitel V, Satz 3.7]). Man beachte, dass E^σ durchaus eine imaginär-quadratische Erweiterung von F^σ sein kann.

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von D über F wie in Abschnitt 1.4.2. Dann setzen wir $\mathcal{B}^\sigma := \{b_1^\sigma, \ldots, b_{2d^2}^\sigma\} = \{b_1, \ldots, b_{d^2}, \sqrt{\sigma(a)}b_1, \ldots, \sqrt{\sigma(a)}b_{d^2}\}$ und definieren D^σ als den freien Modul, der von dieser Basis über F^σ erzeugt wird. Da $b_1 = b_1^\sigma = 1$ ist, bilden $\{b_1, b_{d^2+1}\}$ bzw. $\{b_1^\sigma, b_{d^2+1}^\sigma\}$ Basen von E über F bzw. E^σ über F^σ. Gilt $b_j b_k =$

$\sum_{l=1}^{2d^2} f_{jkl} b_l$, so setzen wir $b_j^\sigma b_k^\sigma = \sum_{l=1}^{2d^2} \sigma(f_{jkl}) b_l^\sigma$. Mit dieser Multiplikation wird D^σ zu einer Divisionsalgebra über F^σ.

Wir definieren nun eine Abbildung von D nach D^σ, die wir wieder mit $\tilde{\sigma}$ bezeichnen wollen:

$$\tilde{\sigma} : D \to D^\sigma, \quad \sum_{l=1}^{2d^2} \lambda_l b_l \mapsto \sum_{l=1}^{2d^2} \sigma(\lambda_l) b_l^\sigma, \quad \text{für } \lambda_l \in F.$$

Mit oben gegebener Multiplikation sehen wir, dass $\tilde{\sigma}$ ein Ringisomorphismus ist, der außerdem $\tilde{\sigma}(\lambda x) = \sigma(\lambda)\tilde{\sigma}(x)$ für alle $\lambda \in F$ und $x \in D$ erfüllt.

Für spätere Beweise wollen wir uns hier noch kurz überlegen, wie $\tilde{\sigma}$ mit der Darstellung ϱ von D aus Abschnitt 1.4.2 verträglich ist. Betrachten wir dazu folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d, "\tilde{\sigma}"'] & M_{2d^2}(F) \arrow[d, "\bar{\sigma}"] \\ D^\sigma \arrow[r, "\varrho^\sigma"'] & M_{2d^2}(F^\sigma) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Hier bezeichnet $\varrho : D \to M_{2d^2}(F)$ die reguläre Darstellung von D bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ und ϱ^σ die Darstellung von D^σ bzgl. der Basis $\mathcal{B}^\sigma$. Außerdem notieren wir mit $\bar{\sigma} : M_{2d^2}(F) \to M_{2d^2}(F^\sigma)$ die Abbildung, die σ komponentenweise anwendet. Mit Hilfe der Definition der Multiplikation auf D^σ sieht man leicht ein, dass $\varrho^\sigma(\tilde{\sigma}(x)) = \bar{\sigma}(\varrho(x))$ für alle $x \in D$ gilt, d.h. obiges Diagramm kommutiert.

Durch komponentenweise Anwendung der Abbildungen lässt sich leicht ein weiteres kommutatives Diagramm herleiten:

$$\begin{tikzcd} M_m(D) \arrow[r, "\bar{\varrho}"] \arrow[d, "\bar{\tilde{\sigma}}"'] & M_{2md^2}(F) \arrow[d, "\bar{\sigma}"] \\ M_m(D^\sigma) \arrow[r, "\overline{\varrho^\sigma}"'] & M_{2md^2}(F^\sigma) \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Hier bezeichnet $\overline{\tilde{\sigma}} : M_m(D) \to M_m(D)$, die Abbildung, die $\tilde{\sigma}$ komponentenweise anwendet, analog für $\bar{\varrho}$ und $\overline{\varrho^\sigma}$.

Mit Hilfe von $\tilde{\sigma}$ können wir nun eine Involution τ^σ auf D^σ und eine hermitesche Form h^σ auf $(D^\sigma)^m$ definieren, die in gewissem Sinne der Involution und der hermiteschen Form auf D entsprechen. Setzen wir also

$$\tau^\sigma(\tilde{\sigma}(x)) := \tilde{\sigma}(\tau(x)) \quad \text{für } x \in D. \tag{2.3}$$

Man sieht leicht, dass τ^σ eine Involution ist, deren Einschränkung auf E^σ mit dem nichttrivialen Galoisautomorphismus von E^σ über F^σ übereinstimmt.

Ist $H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_m)$ eine Diagonaldarstellung bzgl. $\mathcal{B}$ der hermiteschen Form h auf D^m, so setzen wir $H^\sigma := \mathrm{diag}(\tilde{\sigma}(h_1), \ldots, \tilde{\sigma}(h_m))$. Die hermitesche Form auf $(D^\sigma)^m$, die bzgl. der Basis $\mathcal{B}^\sigma$ durch die Matrix H^σ dargestellt wird, nennen wir dann h^σ.

Satz 2.1. *Sei $\sigma_i : F \to \mathbb{R}$ die einer Stelle $v \in V_\infty$ entsprechende Einbettung. Weiter seien D^{σ_i}, τ^{σ_i} und h^{σ_i} wie oben definiert. Dann gilt*

$$G^{\sigma_i} = \mathbf{SU_m}(h^{\sigma_i}, D^{\sigma_i}, \tau^{\sigma_i}),$$

also insbesondere

$$G_v = G^{\sigma_i}(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}_m(h^{\sigma_i}, D^{\sigma_i}, \tau^{\sigma_i}) \otimes_{F^{\sigma_i}} \mathbb{R}.$$

Beweis. Man erhält die algebraische Gruppe G^{σ_i}, indem man σ_i auf die Koeffizienten der definierenden Gleichungen (1.4)-(1.6) von $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ anwendet und diese neuen Gleichungen dann über $\mathbb{C}$ löst. Wir wollen uns nun überlegen, dass diese neuen Gleichungen gerade die definierenden Gleichungen der $\mathrm{SU}_m(h^{\sigma_i}, D^{\sigma_i}, \tau^{\sigma_i})$ sind. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir wieder $\sigma := \sigma_i$.

Die Gleichungen (1.4)-(1.6) werden durch Anwendung von σ auf die Koeffizienten zu

$$f_k^\sigma(y_{ij}^{\alpha\beta}) = 0 \qquad\qquad k = 1, \ldots, l, \tag{2.4}$$
$$\widehat{\mathrm{Nrd}}^{\sigma}_{M_m(D)/E}(x_{1,1}^{1,1}, \ldots, x_{1,2d^2}^{m,m}) = I_2, \tag{2.5}$$
$$\bar{\omega}^\sigma((x_{ij}^{\alpha\beta}))(x_{ij}^{\alpha\beta}) = I_{2md^2}, \tag{2.6}$$

für $1 \leq i, j \leq 2d^2$ und $1 \leq \alpha, \beta \leq m$.

Sei also $f_k^\sigma(x_{ij}^{\alpha\beta}) = 0$ eine der Gleichungen (2.4). Da σ ein Automorphismus ist, und f_k^σ ein Polynom, ist die Matrix $Y = \left(y_{ij}^{\alpha\beta}\right) \in M_{2md^2}(F^\sigma)$ genau dann eine Lösung von $f_k^\sigma(y_{ij}^{\alpha\beta}) = 0$, wenn $X = \left(x_{ij}^{\alpha\beta}\right) = \left(\sigma^{-1}(y_{ij}^{\alpha\beta})\right) \in M_{2md^2}(F)$ eine Lösung von $f_k(x_{ij}^{\alpha\beta}) = 0$ ist. Fordern wir dies nun für alle k, so liegt die Matrix X im Bild von $\bar{\varrho}$, d.h. es gibt eine Matrix $x \in M_m(D)$ mit $Y = \bar{\sigma}(X) = \bar{\sigma}(\bar{\varrho}(x))$. Nach dem kommutativen Diagramm (2.2) gilt dann aber $Y = \overline{\varrho^\sigma}(\overline{\tilde{\sigma}}(x))$, d.h. Y liegt im Bild von $\overline{\varrho^\sigma}$.

Umgekehrt erfüllt für jedes $x \in M_m(D)$ die Matrix $\overline{\varrho^\sigma}(\overline{\tilde{\sigma}}(x)) = \bar{\sigma}(\bar{\varrho}(x))$ die Gleichungen (2.4). Zusammengefasst bedeutet dies, dass durch (2.4) der lineare Unterraum $\overline{\varrho^\sigma}(\overline{\tilde{\sigma}}(M_m(D))) = \overline{\varrho^\sigma}(M_m(D^\sigma))$ von $M_{2md^2}(F^\sigma)$ beschrieben wird.

Kommen wir nun zur Gleichung (2.5). Wir werden zeigen, dass $\widehat{\mathrm{Nrd}}^\sigma_{M_m(D)/E} = \widehat{\mathrm{Nrd}}_{M_m(D^\sigma)/E^\sigma}$ gilt. Dazu überlegen wir uns zunächst:

$$\widehat{\mathrm{Nrd}}^\sigma_{M_m(D)/E} = \varrho^\sigma(\mathrm{Nrd}^{\tilde{\sigma}}_{M_m(D)/E}), \tag{2.7}$$

wobei $\mathrm{Nrd}^{\tilde{\sigma}}$ das Polynom in $E^\sigma[x_1^{1,1}, \ldots, x_{d^2}^{m,m}]$ bezeichnet, das durch Anwendung von $\tilde{\sigma}$ auf die Koeffizienten von Nrd entsteht und $\varrho^\sigma : E^\sigma \to M_2(F^\sigma)$ die Einschränkung der Darstellung von D^σ bzgl. $\mathcal{B}^\sigma$ auf E^σ. Dies ist aber offensichtlich, da nach Diagramm (2.1) $\bar{\sigma}(\varrho(x)) = \varrho^\sigma(\tilde{\sigma}(x))$ für alle $x \in E$ gilt. Außerdem wird die Variable $x_i^{\alpha\beta} \in E^\sigma$ durch ϱ^σ auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_{i,1}^{\alpha\beta} & \sigma(a) x_{d^2+i,1}^{\alpha\beta} \\ x_{d^2+i,1}^{\alpha\beta} & x_{i,1}^{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

abgebildet.

Weiter zeigen wir nun, dass $\mathrm{Nrd}^{\tilde{\sigma}}_{M_m(D)/E}$ mit dem Polynom der reduzierten Norm $\mathrm{Nrd}_{M_m(D^\sigma)/E^\sigma}$ übereinstimmt. Dazu konstruieren wir zu einer gegebenen Zerfällung φ von $M_m(D)$ eine Zerfällung φ^σ von $M_m(D^\sigma)$ und betrachten die zugehörigen Polynome der reduzierten Normen.

Dafür seien nun L bzw. L^σ algebraische Abschlüssen von E bzw. E^σ. Es existiert dann nach [7, Satz V.3.9] eine Fortsetzung von $\tilde{\sigma}$, die von L nach L^σ geht. Diese werden wir wiederum mit $\tilde{\sigma}$ bezeichnen. Weiter sei $\varphi : M_m(D) \otimes_E L \to M_{md}(L)$ eine Zerfällung von $M_m(D)$. Wir möchten nun einen entsprechenden Algebrenisomorphismus $\varphi^\sigma : M_m(D^\sigma) \otimes_{E^\sigma} L^\sigma \to M_{md}(L^\sigma)$ konstruieren. Da L^σ ein algebraischer

Abschluss von E^σ ist, wissen wir, dass ein solcher Isomorphismus existiert. Betrachten wir also folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} M_m(D) \otimes_E L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\overline{\tilde{\sigma}} \otimes \tilde{\sigma}"'] & M_{md}(L) \arrow[d, "\overline{\tilde{\sigma}}"] \\ M_m(D^\sigma) \otimes_{E^\sigma} L^\sigma \arrow[r, "\varphi^\sigma"'] & M_{md}(L^\sigma) \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Man beachte, dass $\tilde{\sigma}$ immer eine Fortsetzung von σ auf dem entsprechenden Ring bezeichnet; so werden die Fortsetzungen auf E, D und L mit dem selben Symbol notiert. Die komponentenweise Anwendung von $\tilde{\sigma}$ auf den Einträgen einer Matrix wird immer mit $\overline{\tilde{\sigma}}$ bezeichnet.

Die Abbildung φ^σ sei nun so gewählt, dass das Diagramm kommutativ wird, d.h.

$$\varphi^\sigma(x \otimes \lambda) := \overline{\tilde{\sigma}}\left(\varphi((\overline{\tilde{\sigma}} \otimes \tilde{\sigma})^{-1}(x \otimes \lambda))\right) \quad \text{für } x \in M_m(D^\sigma), \lambda \in L.$$

Als Komposition von Ringisomorphismen ist φ^σ selbst wieder ein Ringisomorphismus. So muss nur noch die L^σ-Linearität nachgerechnet werden. Für $\mu \in L^\sigma$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi^\sigma(\mu \cdot (x \otimes \lambda)) = \varphi^\sigma(x \otimes \mu\lambda) &= \overline{\tilde{\sigma}}\left(\varphi(\overline{\tilde{\sigma}^{-1}}(x) \otimes \tilde{\sigma}^{-1}(\mu\lambda))\right) \\ &= \overline{\tilde{\sigma}}\left(\varphi(\tilde{\sigma}^{-1}(\mu) \cdot (\overline{\tilde{\sigma}^{-1}}(x) \otimes \tilde{\sigma}^{-1}(\lambda)))\right) \\ &= \overline{\tilde{\sigma}}\left((\tilde{\sigma}^{-1}(\mu) \cdot \varphi((\overline{\tilde{\sigma}^{-1}}(x) \otimes \tilde{\sigma}^{-1}\lambda))\right) \\ &= \mu \cdot \overline{\tilde{\sigma}}\left(\varphi((\overline{\tilde{\sigma}^{-1}}(x) \otimes \tilde{\sigma}^{-1}(\lambda)))\right) = \mu \cdot \varphi^\sigma(x \otimes \lambda). \end{aligned}$$

Also ist φ^σ eine Zerfällung von $M_m(D^\sigma)$.

Wir erinnern uns, dass $\{b_1, \ldots, b_{d^2}\}$ sowohl eine Basis von D über E, als auch eine Basis von D^σ über E^σ ist. Die Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ von $M_m(D)$ über E aus Abschnitt 1.4.2 ist daher auch Basis von $M_m(D^\sigma)$ über E^σ. Sei $B_{ijk} \in M_{md}(L)$ das Bild unter φ von $(b_k E_{ij} \otimes 1)$. Dann gilt $\varphi^\sigma(b_k E_{ij} \otimes 1) = \overline{\tilde{\sigma}}(\varphi(b_k E_{ij} \otimes 1)) = \overline{\tilde{\sigma}}(B_{ijk})$.

Wir wollen nun die reduzierte Norm eines Elementes $x \in M_m(D^\sigma)$ berechnen. Dazu schreiben wir x bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$x = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=1}^{d^2} x_{ijk}\, b_k E_{ij}.$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathrm{Nrd}_{M_m(D^\sigma)/E^\sigma}(x) &= \det(\varphi^\sigma(x \otimes 1)) = \det(\varphi^\sigma(\sum_{i,j}\sum_k x_{ijk}\, b_k E_{ij} \otimes 1)) \\ &= \det(\sum_{i,j}\sum_k x_{ijk}\, \varphi^\sigma(b_k E_{ij} \otimes 1)) = \det(\sum_{i,j}\sum_k x_{ijk}\, \overline{\tilde{\sigma}}(B_{ijk})).\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die x_{ijk} als Variablen, so erhält man durch eine ähnliche Rechnung:

$$\mathrm{Nrd}_{M_m(D)/E}(x_{ijk}) = \det(\sum_{i,j}\sum_k x_{ijk}\, B_{ijk}).$$

Beide Ausdrücke sind nun nach Satz 1.17 Polynome mit Koeffizienten in E^σ bzw. E und man sieht leicht, dass diese Koeffizienten sich gerade durch die Anwendung von $\tilde{\sigma}$ unterscheiden. Es gilt also $\mathrm{Nrd}_{M_m(D^\sigma/E^\sigma)} = \mathrm{Nrd}^{\tilde{\sigma}}_{M_m(D)/E}$. Insgesamt folgt dann zusammen mit (2.7):

$$\widehat{\mathrm{Nrd}}^{\sigma}_{M_m(D)/E} = \varrho^\sigma(\mathrm{Nrd}^{\tilde{\sigma}}_{M_m(D)/E}) = \varrho^\sigma(\mathrm{Nrd}_{M_m(D^\sigma)/E^\sigma}) = \widehat{\mathrm{Nrd}}_{M_m(D^\sigma)/E^\sigma}.$$

Zuletzt schauen wir uns noch die Gleichung (2.6) an. Wir wollen zeigen:

$$\bar{\omega}^\sigma((x_{ij}^{\alpha\beta}))(x_{ij}^{\alpha\beta}) = \overline{\omega^\sigma}((x_{ij}^{\alpha\beta}))(x_{ij}^{\alpha\beta}). \tag{2.9}$$

Hier bezeichnet $\overline{\omega^\sigma}$ eine lineare Fortsetzung auf $M_{2md^2}(F^\sigma)$ von $\overline{\varrho^\sigma}\omega^\sigma(\overline{\varrho^\sigma})^{-1}$, wobei $\omega^\sigma(g) := (H^\sigma)^{-1}(\tau^\sigma(g))^t H^\sigma$ für $g \in M_m(D^\sigma)$.[1]

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Notation σ als Exponent einer Abbildung zwei unterschiedliche Bedeutungen haben kann. So bezeichnet $\bar{\omega}^\sigma$ das Polynom, dass durch Anwendung von σ auf alle Koeffizienten von $\bar{\omega}$ entsteht, während $\overline{\omega^\sigma}$ für die oben definierte Abbildung auf $M_{2md^2}(F^\sigma)$ steht. Wir sind jedoch dabei zu zeigen, dass diese Abbildungen übereinstimmen und nehmen deshalb die etwas ungünstige Notation in Kauf.

Wir werden nun die Gleichheit (2.9) auf $\overline{\varrho^\sigma}(D^\sigma) \subset M_{2md^2}(F^\sigma)$ zeigen, und dann die lineare Fortsetzung passend definieren. Dazu sei zunächst $g \in M_m(D)$ und $g^\sigma = \overline{\tilde{\sigma}}(g) \in M_m(D^\sigma)$. Dann folgt mit der Definition von H^σ und τ^σ:

$$\begin{aligned}\omega^\sigma(g^\sigma) &= (H^\sigma)^{-1}(\tau^\sigma(g^\sigma))^t H^\sigma = (\overline{\tilde{\sigma}}(H))^{-1}(\tau^\sigma(\overline{\tilde{\sigma}}(g)))^t \overline{\tilde{\sigma}}(H) \\ &= \overline{\tilde{\sigma}}(H^{-1})(\overline{\tilde{\sigma}}(\tau(g)))^t \overline{\tilde{\sigma}}(H) = \overline{\tilde{\sigma}}(H^{-1}(\tau(g))^t H) = \overline{\tilde{\sigma}}(\omega(g)),\end{aligned}$$

[1] τ^σ wird hier komponentenweise auf die Matrix g angewendet.

d.h. $\omega^\sigma \circ \overline{\bar{\sigma}} = \overline{\bar{\sigma}} \circ \omega$.

Nun wählen wir $X = (x_{ij}^{\alpha\beta}) \in \overline{\varrho^\sigma}(D^\sigma)$. Unter Benutzung von Diagramm (2.2) können wir $\overline{\omega^\sigma}(X) = \overline{\varrho^\sigma}\omega^\sigma\overline{\varrho^\sigma}^{-1}(X)$ berechnen:

$$\begin{aligned}(\overline{\varrho^\sigma}\omega^\sigma\overline{\varrho^\sigma}^{-1})(X) &= (\overline{\varrho^\sigma}\omega^\sigma\overline{\bar{\sigma}}\bar{\varrho}^{-1}\bar{\sigma}^{-1})(X) = (\overline{\varrho^\sigma}\,\overline{\bar{\sigma}}\omega\bar{\varrho}^{-1}\bar{\sigma}^{-1})(X)\\ &= \bar{\sigma}\big((\bar{\varrho}\omega\bar{\varrho}^{-1}\bar{\sigma}^{-1})(X)\big) = \bar{\sigma}(\bar{\omega}(\bar{\sigma}^{-1}(X))).\end{aligned}$$

Die Einträge der Matrix $\bar{\omega}(\bar{\sigma}^{-1}(X))$ sind Polynome in den Variablen $\sigma^{-1}(x_{ij}^{\alpha\beta})$. Durch Anwendung von $\bar{\sigma}$ werden diese zu Polynomen in den Variablen $x_{ij}^{\alpha\beta}$, die gerade mit den Einträgen von $\bar{\omega}^\sigma(X)$ übereinstimmen. Setzen wir nun

$$\overline{\omega^\sigma}(X) := \begin{cases} \overline{\varrho^\sigma}\omega^\sigma\overline{\varrho^\sigma}^{-1}(X) & X \in \overline{\varrho^\sigma}(M_m(D^\sigma)) \\ \bar{\omega}^\sigma(X) & X \in M_{2md^2}(F^\sigma) \setminus \overline{\varrho^\sigma}(D^\sigma) \end{cases},$$

so ist dies eine lineare Fortsetzung von $\overline{\varrho^\sigma}\omega^\sigma\overline{\varrho^\sigma}^{-1}$ auf $M_{2md^2}(F)$, welche die Bedingung (2.9) erfüllt.

Wir haben nun gesehen, dass die Gleichungen (2.4)-(2.6), die G^σ als algebraische Gruppe beschreiben, gerade mit den definierenden Gleichungen der algebraischen Gruppe $\mathbf{SU_m}(h^\sigma, D^\sigma, \tau^\sigma)$ übereinstimmen. Also sind auch die zugehörigen Gruppen und insbesondere deren reelle Punkte gleich, womit der Satz bewiesen ist. □

2.1.2 Die Faktoren G_v

Mit Satz 1.20 kann man nun die einzelnen Faktoren G_v genau bestimmen. Deren Gestalt hängt nur noch von der Erweiterung E^{σ_i} und dem Zerfällungsverhalten der Divisionsalgebra D^{σ_i} ab. Wir erinnern uns, dass E eine reelle Erweiterung von F ist und D über $\mathbb{R}$ zerfällt. Für die Stelle $v = 1$, die der Identität entspricht, folgt damit direkt:

$$G^{\mathrm{id}}(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SL}_{dm}(\mathbb{R}).$$

Falls es weitere Stellen $v \neq 1$ gibt, möchten wir erreichen, dass $G_v \cong \mathrm{SU}(p,q)$ für geeignete $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = n$ gilt. Dazu brauchen wir das folgende Lemma:

Lemma 2.2. *Es sei F ein beliebiger algebraischer Zahlkörper und*

$$\Delta : F \to \prod_{v \in V_\infty} F_v, \quad x \mapsto (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_{s+t}(x)).$$

Dann liegt das Bild $\Delta(F)$ *dicht in* $\prod_{v \in V_\infty} F_v$.

Beweis. Es sei $y := (y_1, \dots, y_{s+t}) \in \prod_{v \in V_\infty} F_v$. Um Dichtheit von $\Delta(F)$ zu zeigen, müssen wir für jede offene Umgebung $U(y)$ von y ein $x \in F$ mit $\Delta(x) \in U(y)$ finden. Wir können $U(y) = U_\varepsilon(y) := \{(z_1, \dots, z_{s+t}) \in \prod_{v \in V_\infty} F_v : |y_i - z_i| < \varepsilon, 1 \leq i \leq s+t\}$ annehmen.

Da $\prod_{i=1}^{s+t} \sigma_i(F)$ dicht in $\prod_{v \in V_\infty} F_v$ liegt, finden wir $z := (z_1, \dots, z_{s+t}) \in U_{\varepsilon/2}(y) \cap \prod_{i=1}^{s+t} \sigma_i(F)$. Nach dem schwachen Approximationssatz ([18, Thm. 17]) gibt es dann $x \in F$ mit $\Delta(x) \in U_{\varepsilon/2}(z)$. Es folgt:

$$|y_i - \sigma_i(x)| = |y_i - z_i + z_i - \sigma_i(x)| \leq |y_i - z_i| + |z_i - \sigma_i(x)| < \varepsilon \quad \text{für } 1 \leq i \leq s+t,$$

also liegt $\Delta(x)$ in $U_\varepsilon(y)$. □

Insbesondere sagt uns dieses Lemma, dass wir in unserem Fall eines total reellen Zahlkörpers F ein $a \in F$ mit $a > 0$ und $\sigma_i(a) < 0$ für $i = 2, \dots r$ wählen können. Man beachte, dass a kein Quadrat in F sein kann: Wäre $a = \alpha^2$ für ein $\alpha \in F$ mit $\alpha > 0$, so würde $\sigma_i(\alpha)^2 = \sigma_i(\alpha^2) = \sigma_i(a) < 0$ für $2 \leq i \leq r$ gelten; ein Widerspruch, da $\sigma_i(F) \subset \mathbb{R}$ ist.

Wir nehmen also ab jetzt an, dass $E = F(\sqrt{a})$ für ein $a \in F$ mit $a > 0$ und $\sigma_i(a) < 0$ für $i = 2, \dots r$ gilt. Dann ist E eine reelle quadratische Erweiterung von F, jedoch gilt $E^{\sigma_i} = F^{\sigma_i}(\sqrt{\sigma_i(a)}) \not\subset \mathbb{R}$ für alle $i = 2, \dots, r$. Damit folgt dann aus Satz 1.20: Es gibt natürliche Zahlen p_i und q_i mit $p_i + q_i = n$, so dass gilt

$$\mathrm{SU}_m(h^{\sigma_i}, D^{\sigma_i}, \tau^{\sigma_i}) \otimes_{F^{\sigma_i}} \mathbb{R} \cong \mathrm{SU}(p_i, q_i).$$

Im nächsten Abschnitt werden wir sogar sehen, wie man erreichen kann, dass p_i oder q_i gleich 0 sind, d.h. die Gruppen G_v kompakt, sofern v nicht der Identität entspricht.

2.1.3 Kompaktheit der Faktoren

In diesem Abschnitt werden wir uns überlegen, wie man die hermitesche Form h wählen muss, so dass G_v für $v \neq 1$ kompakt wird. Wir werden uns an dieser Stelle auf den Fall einschränken, dass D eine Quaternionenalgebra über E ist.

Die Parameter p und q

Wir überlegen uns zunächst, wie genau die Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R}$ für eine Quaternionenalgebra D und eine imaginär-quadratische Erweiterung E aussieht.

Es sei F ein total reeller algebraischer Zahlkörper und E eine quadratische Erweiterung von F, so dass $E \not\subset \mathbb{R}$ gilt. Wir werden gelegentlich $E = F(\sqrt{a})$ schreiben, wobei $a \in F$ und $a < 0$ gilt. Den nichttrivialen Galoisautomorphismus von E über F bezeichnen wir mit ι. Wir betrachten nun eine Quaternionenalgebra D über E, die Divisionsalgebra ist, und darauf eine Involution τ zweiter Art. Nach Satz 1.9 existiert dann eine Quaternionenalgebra $D' := Q(\beta, \gamma | F)$ über F, so dass $D = D' \otimes_F E = Q(\beta, \gamma | E)$ und $\tau = \tau_c \otimes \iota$ gilt. Dabei bezeichnet τ_c die Konjugation auf D'.

Wir können also davon ausgehen, dass $\tau : D \to D$ gerade die Abbildung

$$x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto \iota(x_0) - \iota(x_1) i - \iota(x_2) j - \iota(x_3) k$$

ist. Diese Involution werden wir auch *Standard-Involution zweiter Art* nennen. Da die Elemente β und γ aus F stammen, können wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Mindestens einer der beiden Parameter β, γ ist größer als 0.

2. Es gilt $\beta < 0$ und $\gamma < 0$.

Im ersten Fall können wir o.B.d.A annehmen, dass $\gamma > 0$ gilt: Durch $1 \mapsto 1$, $i \mapsto j$ und $j \mapsto i$ wird ein Isomorphismus von Algebren mit Involution definiert, unter dem $(Q(\beta, \gamma | E), \tau) \cong (Q(\gamma, \beta | E), \tau)$ gilt, wobei τ auf der jeweiligen Algebra wie oben beschrieben definiert ist. Wäre also $\gamma < 0$ und $\beta > 0$, so könnten wir einfach die isomorphe Algebra $Q(\gamma, \beta | E)$ betrachten.

Abschließend überlegen wir uns noch, welche Elemente von D in $\mathrm{Fix}_D(\tau)$ liegen, d.h. unter τ festgehalten werden. Dazu sei $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in D$. Die Bedingung

$$\tau(x) = \iota(x_0) - \iota(x_1) i - \iota(x_2) j - \iota(x_3) k = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = x$$

ergibt sofort $\iota(x_0) = x_0$, also $x_0 \in F$. Außerdem folgt $\iota(x_l) = -x_l$ für $l = 1, 2, 3$, das heißt $x_l = \lambda_l \sqrt{a}$ mit $\lambda_l \in F$.

Wir werden nun für beide Fälle konkrete Zerfällungen, d.h. $\mathbb{R}$-lineare Isomorphismen von $D \otimes_F \mathbb{R}$ nach $M_2(\mathbb{C})$ angeben und uns überlegen, mit welcher Involution auf $M_2(\mathbb{C})$ die Abbildung τ dadurch jeweils identifiziert wird. Wir beschäftigen uns detailliert mit dem ersten Fall, da dieser etwas komplizierter ist, der zweite Fall folgt dann größtenteils analog.

Sei also $\gamma > 0$. Betrachten wir D als Algebra über F, so ist $D \otimes_F \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra. Es sei $\phi : D \otimes_F \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{C})$ der $\mathbb{R}$-Algebren Homomorphismus, der auf der Basis von $D \otimes_F \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
1 \otimes 1 &\mapsto I_2 & \sqrt{a} \otimes 1 &\mapsto \sqrt{a} I_2 \\
i \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} & \sqrt{a} i \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ \sqrt{a}\beta & 0 \end{pmatrix} \\
j \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} & \sqrt{a} j \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{a}\sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a}\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} \\
k \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\gamma} \\ \beta\sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix} & \sqrt{a} k \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{a}\sqrt{\gamma} \\ \sqrt{a}\beta\sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Diese acht Matrizen sind, wie man leicht einsieht, linear unabhängig über $\mathbb{R}$ und bilden daher eine Basis von $M_2(\mathbb{C})$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Also ist ϕ sogar ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren.

Lemma 2.3. *Es sei $u := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Für $x \in D$ gilt $\phi(\tau(x) \otimes 1) = u\phi(x \otimes 1)^* u$. Gilt $\tau(x) = x$, so ist $\phi(x \otimes 1)u$ eine hermitesche Matrix bzgl. *. Es bezeichne $\delta_{\beta,\gamma}(x)$ die Anzahl der positiven Eigenwerte dieser Matrix. Dann gilt für $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$:*

$$\delta_{\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } x_0^2 - \beta a \lambda_1^2 + \gamma a \lambda_2^2 + \gamma \lambda_3^2 < 0 \textit{ und } \kappa < 0; \\ 1 & \textit{falls } x_0^2 - \beta a \lambda_1^2 + \gamma a \lambda_2^2 + \gamma \lambda_3^2 > 0; \\ 2 & \textit{falls } x_0^2 - \beta a \lambda_1^2 + \gamma a \lambda_2^2 + \gamma \lambda_3^2 < 0 \textit{ und } \kappa > 0, \end{cases}$$

dabei ist $\kappa := (1 + \beta)(i\sqrt{a}\sqrt{\gamma}\lambda_3) - (1 - \beta)(i\sqrt{a}\lambda_1)$.

Beweis. Die erste Aussage zeigt man leicht durch Nachrechnen auf den Basiselementen. Für $x \in D$ mit $\tau(x) = x$ folgt dann

$$(\phi(x \otimes 1)u)^* = (\phi(\tau(x) \otimes 1)u)^* = (u\phi(x \otimes 1)^* uu)^* = \phi(x \otimes 1)u.$$

Dabei geht ein, dass $u^2 = I_2$ und $u^* = u$ gilt.

Als hermitesche Matrix in $M_2(\mathbb{C})$ hat $\phi(x \otimes 1)u$ zwei reelle Eigenwerte μ_1 und μ_2. Diese berechnen sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Man erhält:

$$\mu_{1,2} = \frac{\kappa}{2} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} + x_0^2 - \beta a \lambda_1^2 + \gamma a \lambda_2^2 + \gamma \lambda_3^2},$$

wobei $\kappa = (1+\beta)(i\sqrt{a}\sqrt{\gamma}\lambda_3) - (1-\beta)(i\sqrt{a}\lambda_1)$ ist. Durch Betrachten der Fälle $\kappa < 0$ und $\kappa > 0$ erhält man obiges Ergebnis für die Anzahl der positiven Eigenwerte $\delta_{\beta,\gamma}$. $\square$

Dies können wir nun auch auf Matrizen $X = (x_{ij}) \in M_m(D)$ übertragen. Dazu setzen wir $\bar{\phi} : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{C})$, $\bar{\phi}(\big(x_{ij}\big) \otimes 1) := \big(\phi(x_{ij} \otimes 1)\big)$, auch dies ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren. Nun erhalten wir ein zu Lemma 2.3 analoges Resultat:

Lemma 2.4. *Es sei $U := \operatorname{diag}(u, \ldots, u) \in M_{2m}(\mathbb{C})$. Dann gilt $\bar{\phi}(\tau(X)^t \otimes 1) = U\bar{\phi}(X \otimes 1)^* U$ für alle $X \in M_m(D)$. Falls $\tau(X)^t = X$ gilt, so ist $\bar{\phi}(X \otimes 1)U$ eine hermitesche Matrix in $M_{2m}(\mathbb{C})$. Ist X außerdem eine Diagonalmatrix mit Einträgen $x_1, \ldots, x_m$, so hat $\bar{\phi}(X \otimes 1)U$ genau $\sum_{l=1}^m \delta_{\beta,\gamma}(x_l)$ positive Eigenwerte, wobei $\delta_{\beta,\gamma}(x)$ wie in Lemma 2.3 definiert ist.*

Beweis. Es sei $X = (x_{ij}) \in M_m(D)$. Wir rechnen direkt nach:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\tau(X)^t \otimes 1) &= \bar{\phi}(\big(\tau(x_{ji})\big) \otimes 1) = \big(\phi(\tau(x_{ji}) \otimes 1)\big) \\ &= \big(u\phi(x_{ji} \otimes 1)^* u\big) = U\bar{\phi}(\big(x_{ij}\big) \otimes 1)^* U. \end{aligned}$$

Beim dritten Gleichheitszeichen haben wir Lemma 2.3 verwendet, der Rest sind einfache Umformungen.

Hiermit folgt nun direkt die zweite Aussage für ein $X \in M_m(D)$ mit $\tau(X)^t = X$:

$$(\bar{\phi}(X \otimes 1)U)^* = (\bar{\phi}(\tau(X)^t \otimes 1)U)^* = (U\bar{\phi}(X \otimes 1)^* UU)^* = \bar{\phi}(X \otimes 1)U.$$

Gilt außerdem $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_m)$, so ist $\bar{\phi}(X \otimes 1)U$ eine Blockdiagonalmatrix. Jeder 2×2-Block hat die Form $\phi(x_l \otimes 1)u$ und nach Lemma 2.3 genau $\delta_{\beta,\gamma}(x_l)$ positive Eigenwerte. Die Anzahl der positiven Eigenwerte der gesamten Matrix ist dann gerade $\sum_{l=1}^m \delta_{\beta,\gamma}(x_l)$. $\square$

Nun schauen wir uns noch den zweiten Fall an: $\beta < 0$ und $\gamma < 0$. Hier ist ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus $\phi : Q(\beta, \gamma|E) \otimes_F \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{C})$ auf den Basiselementen folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned}
1 \otimes 1 &\mapsto I_2 & \sqrt{a} \otimes 1 &\mapsto \sqrt{a} I_2 \\
i \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\beta} \\ -\sqrt{-\beta} & 0 \end{pmatrix} & \sqrt{a} i \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a}\sqrt{-\beta} \\ -\sqrt{a}\sqrt{-\beta} & 0 \end{pmatrix} \\
j \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} & \sqrt{a} j \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{a}\sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a}\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} \\
k \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-\beta}\sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{-\beta}\sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix} & \sqrt{a} k \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{a}\sqrt{-\beta}\sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{a}\sqrt{-\beta}\sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ganz analog zu den obigen Resultaten können wir wieder zwei Lemmata formulieren, die das Verhalten von τ unter ϕ beschreiben. Hier können wir aber auf die Matrix u verzichten:

Lemma 2.5. *Für $x \in D$ gilt $\phi(\tau(x) \otimes 1) = \phi(x \otimes 1)^*$. Für $x \in D$ mit $\tau(x) = x$ ist $\phi(x \otimes 1)$ eine hermitesche Matrix bzgl. *. Es bezeichne $\delta_{\beta,\gamma}(x)$ die Anzahl der positiven Eigenwerte dieser Matrix. Dann gilt für $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$:*

$$\delta_{\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_0^2 > a(\beta\lambda_1^2 + \gamma\lambda_2^2 - \beta\gamma\lambda_3^2) \text{ und } x_0 < 0; \\ 1 & \text{falls } x_0^2 < a(\beta\lambda_1^2 + \gamma\lambda_2^2 - \beta\gamma\lambda_3^2); \\ 2 & \text{falls } x_0^2 > a(\beta\lambda_1^2 + \gamma\lambda_2^2 - \beta\gamma\lambda_3^2) \text{ und } x_0 > 0. \end{cases}$$

Beweis. Analog zu Lemma 2.3 □

Nun sei wieder $\bar{\phi} : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{C})$, $\bar{\phi}(\big(x_{ij}\big) \otimes 1) := \big(\phi(x_{ij} \otimes 1)\big)$ der von ϕ induzierte Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren.

Lemma 2.6. *Es gilt $\bar{\phi}(\tau(X)^t \otimes 1) = \bar{\phi}(X \otimes 1)^*$ für alle $X \in M_m(D)$. Falls $\tau(X)^t = X$ gilt, so ist $\bar{\phi}(X \otimes 1)$ eine hermitesche Matrix in $M_{2m}(\mathbb{C})$. Ist X außerdem eine Diagonalmatrix mit Einträgen $x_1, \ldots, x_m$, so hat $\bar{\phi}(X \otimes 1)$ genau $\sum_{l=1}^m \delta_{\beta,\gamma}(x_l)$ positive Eigenwerte, wobei $\delta_{\beta,\gamma}(x)$ wie in Lemma 2.5 definiert ist.*

Beweis. Analog zu Lemma 2.4 □

Wir können unsere Ergebnisse nun in einem abschließenden Resultat zusammenfassen: Es sei $D := Q(\beta, \gamma|E)$ für $\beta, \gamma \in F$ eine Quaternionenalgebra, die Divisionsalgebra ist, $\tau : D \to D$ die zu Beginn des Abschnitts definierte Involution zweiter

Art der Form $\tau = \tau_c \otimes \iota$ und $h : D^m \times D^m \to D$ eine hermitesche Form bzgl. τ. Die Matrix H sei eine Diagonaldarstellung von h. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass entweder $\gamma > 0$ oder $\gamma < 0$ und $\beta < 0$ gilt. Für $x \in D$ sei $\delta_{\beta,\gamma}(x)$ wie in Lemma 2.3 bzw. Lemma 2.5 definiert. Dann gilt der folgende Satz:

Satz 2.7. *Es sei* $H = \mathrm{diag}(h_1, \dots, h_m)$ *und* $p := \sum_{l=1}^m \delta_{\beta,\gamma}(h_l^{-1})$. *Dann gilt:*

$$\mathrm{SU}_m(H, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SU}(p, 2m - p).$$

Beweis. Ein großer Teil der Aussage dieses Satzes wurde schon in Satz 1.20 gezeigt, wir haben dort gesehen, dass es eine natürliche Zahl p' gibt, so dass $\mathrm{SU}(H, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SU}(p', 2m - p')$ gilt. Neu ist hier nur die genaue Bestimmung dieses Parameters p'. Erinnern wird uns an die Beweise von Satz 1.20 und Satz 1.22: Dort haben wir uns überlegt, dass für jede Zerfällung $\varphi : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{md}(\mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix $g \in M_{md}(\mathbb{C})$ existiert, so dass $(\varphi \tilde{\omega} \varphi^{-1})(x) = g x^* g^{-1}$ ist. Die Anzahl der positiven Eigenwerte dieser Matrix g stimmt dann mit dem Parameter p' überein.

Übertragen wir dies auf unsere konkrete Situation. Um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, setzen wir $A := U$, falls $\gamma > 0$ und $A := I_{2m}$, falls $\gamma < 0$ und $\beta < 0$. Es bezeichne $\bar{\phi}$ die dem jeweiligen Fall entsprechende Zerfällung, wie oben definiert. Weiter sei $x = \bar{\phi}(y \otimes \lambda)$ für ein $y \in M_m(D)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}\tilde{\omega}\bar{\phi}^{-1}(x) &= \bar{\phi}(\tilde{\omega}(y \otimes \lambda)) = \bar{\phi}((H^{-1} \otimes 1)(\tau(y) \otimes \lambda)(H \otimes 1)) \\ &= \bar{\phi}(H^{-1} \otimes 1)\bar{\phi}(\tau(y) \otimes \lambda)\bar{\phi}(H \otimes 1) \\ &= \bar{\phi}(H^{-1} \otimes 1)A\bar{\phi}(y \otimes \lambda)^* A\bar{\phi}(H \otimes 1) \\ &= \bar{\phi}(H^{-1} \otimes 1)Ax^* A\bar{\phi}(H \otimes 1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Da H^{-1} eine Diagonalmatrix in $M_m(D)$ ist, die $\tau((H^{-1})^t) = H^{-1}$ erfüllt, ist nach Lemma 2.4 bzw. 2.6 die Matrix $\bar{\phi}(H^{-1} \otimes 1)A$ hermitesch. Die Anzahl der positiven Eigenwerte dieser Matrix ist gerade $\sum_{l=1}^m \delta_{\beta,\gamma}(h_l^{-1})$. Da aber auch

$$(\bar{\phi}(H^{-1} \otimes 1)A)^{-1} = A^{-1}(\bar{\phi}(H^{-1} \otimes 1))^{-1} = A\bar{\phi}(H \otimes 1)$$

gilt, können wir $g := \bar{\phi}(H^{-1} \otimes 1)A$ setzen und Gleichung (2.10) wird zur oben geforderten Bedingung. Somit folgt dann $p' = \sum_{l=1}^m \delta_{\beta,\gamma}(h_l^{-1}) = p$ und $\mathrm{SU}_m(H, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SU}(p, 2m - p)$. □

Korollar 2.8. *Es sei $D = Q(\beta, \gamma|E)$ mit $\beta < 0$ und $\gamma < 0$. Außerdem seien $h_1, \dots, h_m \in F$ und $h_i > 0$ für alle $1 \leq i \leq m$. Für $H := \operatorname{diag}(h_1, \dots h_m)$ gilt*

$$\mathrm{SU}_m(H, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SU}(2m, 0) = \mathrm{SU}(2m),$$

diese Gruppe ist also kompakt.

Beweis. Dies folgt aus Satz 2.7 und Lemma 2.5. □

Anwendung auf unsere Situation

Nehmen wir nun an, dass wir uns wieder in der zum Schluss von Abschnitt 2.1.2 konstruierten Situation befinden: Der Körper $E = F(\sqrt{a})$ ist eine reelle quadratische Erweiterung des total reellen Zahlkörpers F, so dass $E^{\sigma_i} \not\subset \mathbb{R}$ für $i = 2, \dots r$ gilt. Den nichttrivialen Galoisautomorphismus von E über F bezeichnen wir mit ι. Es sei nun D eine Quaternionen-Divisionsalgebra über E, die über $\mathbb{R}$ zerfällt. Auf D betrachten wir eine Involution τ zweiter Art. Dann können wir wie oben nach dem Satz von Albert annehmen, dass $D = Q(\beta, \gamma|E)$ für $\beta, \gamma \in F$ ist und τ durch $x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto \iota(x_0) - \iota(x_1)i - \iota(x_2)j - \iota(x_3)k$ gegeben ist.

Außerdem sei h eine bzgl. τ hermitesche Form. Aus Satz 2.1 wissen wir dann, dass für $G := \mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$ die Gruppen G^{σ_i} durch $G^{\sigma_i} = \mathbf{SU_m}(h^{\sigma_i}, D^{\sigma_i}, \tau^{\sigma_i})$ gegeben sind. Die Frage ist nun: Wie sehen D^{σ_i}, h^{σ_i} und τ^{σ_i} aus?

Satz 2.9. *Es sei $D = Q(\beta, \gamma|E)$ für $\beta, \gamma \in F$ und $\tau : x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto \iota(x_0) - \iota(x_1)i - \iota(x_2)j - \iota(x_3)k$. Dann gilt:*

$$D^{\sigma_i} = Q(\sigma_i(\beta), \sigma_i(\gamma)|E^{\sigma_i})$$

und

$$\tau^{\sigma_i}(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = \iota^{\sigma_i}(x_0) - \iota^{\sigma_i}(x_1)i - \iota^{\sigma_i}(x_2)j - \iota^{\sigma_i}(x_3)k.$$

Dabei bezeichnet ι^{σ_i} den nichttrivialen Galoisautomorphismus von E^{σ_i} über F^{σ_i}.

Beweis. Nach der Definition in Abschnitt 2.1.1 ist D^{σ_i} eine vierdimensionale Algebra über E^{σ_i} mit Basiselementen $1, i, j, k$, die $i^2 = \sigma_i(\beta), j^2 = \sigma_i(\gamma), k^2 = -\sigma_i(\beta)\sigma_i(\gamma)$ und $ij = -ji = k$ erfüllen. Es ist wohlbekannt, dass diese Algebra dann isomorph zu $Q(\sigma_i(\beta), \sigma_i(\gamma)|E^{\sigma_i})$ ist (siehe z.B. [7, Satz IX.1.2]).

Um τ^{σ_i} zu bestimmen, seien $y_0, \ldots, y_3 \in E^{\sigma_i}$ mit $y_l = \widetilde{\sigma_i}(x_l)$ für ein $x_l \in E$, $l = 0, \ldots, 3$. Mit Gleichung (2.3) sehen wir:

$$\begin{aligned}\tau^{\sigma_i}(y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k) &= \widetilde{\sigma_i}(\tau(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)) \\ &= \widetilde{\sigma_i}(\iota(x_0) - \iota(x_1) i - \iota(x_2) j - \iota(x_3) k) \\ &= \iota^{\sigma_i}(\widetilde{\sigma_i}(x_0)) - \iota^{\sigma_i}(\widetilde{\sigma_i}(x_1)) i - \iota^{\sigma_i}(\widetilde{\sigma_i}(x_2)) j - \iota^{\sigma_i}(\widetilde{\sigma_i}(x_3)) k \\ &= \iota^{\sigma_i}(y_0) - \iota^{\sigma_i}(y_1) i - \iota^{\sigma_i}(y_2) j - \iota^{\sigma_i}(x_3) k. \qquad \square\end{aligned}$$

Damit haben wir D^{σ_i} und τ^{σ_i} bestimmt. Eine Diagonaldarstellung von h^{σ_i} ist wie in Abschnitt 2.1.1 definiert durch $H^{\sigma_i} := \mathrm{diag}(\widetilde{\sigma_i}(h_1), \ldots, \widetilde{\sigma_i}(h_m))$. Nun können wir mit Hilfe des vorigen Abschnitts ein Kriterium angeben, so dass die Gruppen $G_v = \mathrm{SU}(h^{\sigma_i}, D^{\sigma_i}, \tau^{\sigma_i}) \otimes_{F^{\sigma_i}} \mathbb{R}$ für $i = 2, \ldots r$ kompakt sind:

Satz 2.10. *Es sei $D = Q(\beta, \gamma | E)$ für $\beta, \gamma \in F$ eine Quaternionenalgebra, die Divisionsalgebra ist und über $\mathbb{R}$ zerfällt. Weiter sei τ die Standard-Involution zweiter Art auf D und h eine τ-hermitesche Form auf D^m mit Matrixdarstellung $H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_m)$ für Elemente $h_1, \ldots, h_m \in D$. Diese seien so gewählt, dass die $h_l^{\sigma_i} := \widetilde{\sigma_i}(h_l)$ die Bedingung $\delta_{\sigma_i(\beta), \sigma_i(\gamma)}((h_l^{\sigma_i})^{-1}) = 2$ für alle $1 \leq l \leq m$ und $i = 2, \ldots r$ erfüllen. Dann gilt für jede Stelle $v \neq 1$ und die zugehörige Einbettung σ_i:*

$$G_v \cong \mathrm{SU}_m(h^{\sigma_i}, D^{\sigma_i}, \tau^{\sigma_i}) \otimes_{F^{\sigma_i}} \mathbb{R} \cong \mathrm{SU}(2m, 0) = \mathrm{SU}(2m).$$

Insbesondere sind diese Gruppen kompakt. Für die Stelle $v = 1$ gilt $G_1 \cong \mathrm{SL}_{2m}(\mathbb{R})$.

Beweis. Es sei $\sigma := \sigma_i$ für ein $i = 2, \ldots r$. Wir haben uns in Satz 2.9 überlegt, dass D^σ die Quaternionenalgebra $Q(\sigma(\beta), \sigma(\gamma) | E^\sigma)$ über der imaginär-quadratischen Erweiterung E^σ von F^σ ist und das τ^σ hierauf gerade mit der Standard-Involution zweiter Art übereinstimmt. Damit sind wir in der Situation von Satz 2.7. Es sei $p^\sigma := \sum_{l=1}^m \delta_{\sigma(\beta), \sigma(\gamma)}((h_l^\sigma)^{-1})$. Dann folgt:

$$\mathrm{SU}_m(H^\sigma, D^\sigma, \tau^\sigma) \otimes_{F^\sigma} \mathbb{R} \cong \mathrm{SU}(p^\sigma, 2m - p^\sigma).$$

Wegen der speziellen Wahl der h_l^σ gilt aber $p^\sigma = \sum_{l=1}^m \delta_{\sigma(\beta), \sigma(\gamma)}((h_l^\sigma)^{-1}) = 2m$ und daher

$$\mathrm{SU}(p^\sigma, 2m - p^\sigma) = \mathrm{SU}(2m, 0) = \mathrm{SU}(2m),$$

was zu zeigen war.

Die Aussage über G_v für $v = 1$ wurde schon zu Beginn von Abschnitt 2.1.2 gezeigt. $\square$

2.2 Arithmetische Untergruppen

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Gruppe der reellen Punkte von G' unter bestimmten Bedingungen von der Form $G'(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \times \prod_{i=2}^{r} \mathrm{SU}(n)$ ist. Es sei nun $r > 1$, d.h. $F \neq \mathbb{Q}$. Wir haben zu Beginn dieses Kapitels behauptet, dass kokompakte arithmetische Untergruppen der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ in dieser Situation von torsionsfreien arithmetischen Untergruppen der $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ herkommen. Diese Aussage wollen wir in diesem Abschnitt konkretisieren.

Zunächst brauchen wir dazu einige allgemeine Überlegungen.

Definition 2.11. Eine Untergruppe H einer topologischen Gruppe G heißt *diskret*, wenn die von G induzierte Topologie auf H die diskrete Topologie ist.

Proposition 2.12. *Es sei H eine diskrete Untergruppe einer topologischen Gruppe G. Dann gilt:*

- *Jede Untergruppe von H ist diskret.*
- *Für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ ist $K \cap H$ endlich.*

Beweis. Die erste Aussage ist offensichtlich. Für die zweite Aussage betrachten wir die Menge $K \cap H$. Diese ist eine diskrete und kompakte Teilmenge von H und muss daher endlich sein. $\square$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften können wir uns überlegen, dass Diskretheit unter Kommensurabilität erhalten bleibt:

Lemma 2.13. *Es seien H_1 und H_2 zwei Untergruppen einer topologischen Gruppe G, die kommensurabel sind. Es gilt: H_1 ist genau dann diskret, wenn auch H_2 diskret ist.*

Beweis. Da Kommensurabilität eine Äquivalenzrelation ist, reicht es, eine Richtung zu zeigen. Sei also H_1 eine diskrete Untergruppe von G. Da $H_1 \cap H_2$ in H_2 endlichen Index l hat, können wir H_2 als endliche Vereinigung von Äquivalenzklassen schreiben:

$$H_2 = \bigcup_{h \in \mathcal{H}} h(H_1 \cap H_2),$$

wobei $\mathcal{H}$ ein Repräsentantensystem bezeichnet. Die Gruppe $H_1 \cap H_2$ ist als Untergruppe der diskreten Gruppe H_1 wieder diskret, und da die Linkstranslation stetig ist, gilt dies auch für alle Äquivalenzklassen $h(H_1 \cap H_2)$, für $h \in \mathcal{H}$. Als endliche Vereinigung diskreter Mengen ist dann auch H_2 eine diskrete Untergruppe von G. $\square$

Es sei nun Γ eine arithmetisch definierte Untergruppe der $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$, die torsionsfrei ist. Das bedeutet, es gibt keine nichttrivialen Elemente endlicher Ordnung in Γ. Außerdem seien wieder $G = \mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$, $G' = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G)$ und die hermitesche Form so gewählt, dass die Faktoren G_v von $G'(\mathbb{R})$ an allen Stellen $v \neq 1$ kompakt sind (vgl. Abschnitt 2.1.3).

Satz 2.14. *Es sei* $\Gamma \subset \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ *eine torsionsfreie, arithmetisch definierte Untergruppe. Dann ist* $\Delta(\Gamma) \subset G'(\mathbb{R})$ *diskret, torsionsfrei und kokompakt. Insbesondere ist* Γ *isomorph zu einer diskreten, kokompakten Untergruppe der* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Beweis. Zunächst wissen wir durch Satz 1.29, dass $\Delta(\Gamma)$ eine kokompakte, arithmetische Untergruppe von $G'(\mathbb{R})$ ist. Auch die Torsionsfreiheit bleibt erhalten, da Δ ein injektiver Homomorphismus ist. Nach Korollar 1.24 ist $\Delta(\Gamma)$ arithmetische Untergruppe von $G'(\mathbb{Q})$, also sind $G'_{\mathbb{Z}}$ und $\Delta(\Gamma)$ kommensurabel. Da aber $G'_{\mathbb{Z}}$ eine diskrete Untergruppe von $G'(\mathbb{Q})$ ist, folgt aus Lemma 2.13, dass auch $\Delta(\Gamma)$ diskret ist.

Bezeichnen wir mit $\iota_v : G_v \to \prod_{v' \in V_\infty} G_{v'}$ die kanonische Einbettung der Gruppe G_v in das Produkt $G'(\mathbb{R})$. Dann sind nach Proposition 2.12 die Gruppen $\Delta(\Gamma) \cap \iota_v(G_v)$ endlich für alle Stellen v, die nicht der Identität entsprechen, denn an diesen Stellen sind die G_v kompakt. Daraus folgt jedoch direkt, dass $\Delta(\Gamma) \cap \iota_v(G_v) = \{1\}$ gilt, denn $\Delta(\Gamma)$ ist torsionsfrei. Es ist also nur die erste Stelle relevant, und wir können $\Delta(\Gamma)$ mit einer Untergruppe der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ identifizieren, die wir wieder mit Γ bezeichnen. Diese Gruppe ist dann diskret und kokompakt. Wir nennen sie auch arithmetisch definiert in dem Sinne, dass sie von einer arithmetischen Untergruppe einer algebraischen Gruppe herkommt. $\square$

Beispiel 2.15. Es sei F ein total reeller Zahlkörper und E eine reelle quadratische Erweiterung von F. Weiter sei D eine Quaternionen-Divisionsalgebra über E mit Involution τ zweiter Art und τ-hermitescher Form h. Darüber hinaus sei $\mathcal{O}$ eine Ordnung in D, d.h. ein vollständiges $\mathbb{Z}$-Gitter in D, das auch ein Unterring ist und es gelte $\tau(\mathcal{O}) = (O)$. Dann ist $\Gamma := \mathrm{SU}_m(h, \mathcal{O}, \tau)$ eine arithmetische Untergruppe der $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$. Jede torsionsfreie Untergruppe $\Gamma' \subset \Gamma$ wird also unter obigen Bedingungen zu einer arithmetisch definierten Untergruppe der $\mathrm{SL}_{2m}(\mathbb{R})$.

2.3 Beispiele

Wir wollen uns die in diesem Kapitel beschrieben Vorgehensweise nun an zwei Beispielen klarmachen. Es sei wie immer F ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grad $r > 1$ über $\mathbb{Q}$ und es seien $\sigma_1 = \mathrm{id}, \ldots, \sigma_r$ die den Stellen entsprechenden Einbettungen. Wir wählen nun ein $a \in F$ mit $a > 0$ und $\sigma_i(a) < 0$ für $i = 2, \ldots, r$. So ein Element existiert nach Lemma 2.2. Der Körper $E := F(\sqrt{a})$ ist dann eine reelle quadratische Erweiterung von F.

2.3.1 Beispiel: $D = E$, reelle quadratische Erweiterung von F

Wählen wir als Divisionsalgebra $D = E$, so ist $d = [D : E] = 1$. Es gibt dann nur eine Involution zweiter Art auf D, diese stimmt mit dem nichttrivialen Galoisautomorphismus von E über F überein. Wir wollen diese Involution τ nennen. Eine hermitesche Form h auf D^m wird durch eine Diagonalmatrix H repräsentiert, deren Einträge $h_1, \ldots, h_m$ die Eigenschaft $\tau(h_\alpha) = h_\alpha$ für alle $1 \leq \alpha \leq m$ erfüllen. Das heißt aber einfach, dass alle $h_\alpha \in F$ liegen.

Betrachten wir nun die $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$, so wissen wir schon aus Abschnitt 1.4.2, dass sich diese als Gruppe der F-rationalen Punkte der algebraischen Gruppe $G := \mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$ darstellen lässt. Nach Satz 1.23 existiert eine algebraische Gruppe G', die über $\mathbb{Q}$ definiert ist und $G'(\mathbb{Q}) = G(F)$ erfüllt. Die Gruppe der reellen Punkte von G' lässt sich als Produkt $\prod_{v \in V_\infty} G_v$ schreiben. Aus Abschnitt 2.1 und wegen der Wahl von a wissen wir, dass dies ein Produkt der Form $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R}) \times \prod_{i=2}^r \mathrm{SU}(p_i, q_i)$ ist; für geeignete $p_i, q_i \in \mathbb{N}$ mit $p_i + q_i = m$.

Wir wollen nun die Parameter p_i und q_i genauer bestimmen. Dazu betrachten wir die Gruppe G^{σ_i} für ein $i \neq 1$. Satz 2.1 sagt uns, dass $G^{\sigma_i} = \mathbf{SU_m}(D^{\sigma_i}, h^{\sigma_i}, \tau^{\sigma_i})$ gilt. Die Divisionsalgebra D^{σ_i} ist aber in unserem Fall einfach der Körper E^{σ_i} und die Involution τ^{σ_i} stimmt mit dem nichttrivialen Galoisautomorphismus von E^{σ_i} über F^{σ_i} überein. Die Matrix der hermitschen Form hat wie immer die Gestalt $H^{\sigma_i} = \mathrm{diag}(\sigma_i(h_1), \ldots, \sigma_i(h_m))$.

Die Einbettung $E^{\sigma_i} \hookrightarrow \mathbb{C}$ induziert einen $\mathbb{R}$-linearen Isomorphismus

$$\varphi^{\sigma_i} : E^{\sigma_i} \otimes_{F^{\sigma_i}} \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \otimes \lambda \mapsto \lambda x.$$

Dann ist auch

$$\overline{\varphi^{\sigma_i}} : M_m(E^{\sigma_i}) \otimes_{F^{\sigma_i}} \mathbb{R} \to M_m(\mathbb{C}), \quad (x_{\alpha,\beta}) \otimes \lambda \mapsto \left(\varphi^{\sigma_i}(x_{\alpha,\beta} \otimes \lambda)\right)$$

ein $\mathbb{R}$-Algebrenisomorphismus.

Sei $\widetilde{\tau^{\sigma_i}}$ die Involution auf $M_m(D^{\sigma_i}) \otimes_{F^{\sigma_i}} \mathbb{R}$, die $(x \otimes \lambda)$ auf $(\tau^{\sigma_i}(x^t) \otimes \lambda)$ abbildet. Unter der Identifikation von $M_m(D^{\sigma_i}) \otimes_{F^{\sigma_i}} \mathbb{R}$ mit $M_m(\mathbb{C})$ über φ^σ wird $\widetilde{\tau^{\sigma_i}}$ zur Involution $x \mapsto x^*$ auf $M_m(\mathbb{C})$, wobei x^* die zu x adjungierte Matrix bezeichnet. Es gilt also:

$$\varphi^{\sigma_i}(\widetilde{\tau^{\sigma_i}}(x \otimes \lambda)) = (\varphi^{\sigma_i}(x \otimes \lambda))^*.$$

Außerdem folgt aus $\tau^{\sigma_i}(H^{\sigma_i})^t = H^{\sigma_i}$, dass $\varphi^{\sigma_i}(H^{\sigma_i} \otimes 1)$ eine hermitesche Matrix ist:

$$(\varphi^{\sigma_i}(H^{\sigma_i} \otimes 1))^* = \varphi^{\sigma_i}(\widetilde{\tau^{\sigma_i}}(H^{\sigma_i} \otimes 1)) = \varphi^{\sigma_i}(H^{\sigma_i} \otimes 1).$$

Damit sind wir in einer Situation, die ganz analog zu der von Lemma 2.6 ist, nur dass wir statt einer Quaternionenalgebra D hier einen Körper betrachten. Genau wie im Beweis von Satz 2.7 für den Fall $A = I_{2m}$ können wir auch hier nachrechnen, dass

$$\varphi^{\sigma_i}\widetilde{\omega^{\sigma_i}}(\varphi^{\sigma_i})^{-1}(x) = \varphi^{\sigma_i}((H^{\sigma_i})^{-1} \otimes 1)x^*\varphi^{\sigma_i}(H^{\sigma_i} \otimes 1)$$

und

$$\varphi^{\sigma_i}((H^{\sigma_i})^{-1} \otimes 1) = (\varphi^{\sigma_i}(H^{\sigma_i} \otimes 1))^{-1}$$

gilt. Das bedeutet jedoch, dass die Parameter p_i und q_i gerade mit der Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte der Matrix $\varphi^{\sigma_i}(H^{\sigma_i} \otimes 1)$ übereinstimmen.

Man sieht leicht ein, dass in diesem Fall $\varphi^{\sigma_i}(H^{\sigma_i} \otimes 1) = H^{\sigma_i}$ gilt, p_i und q_i hängen also nur von den Vorzeichen der Einträge $\sigma_i(h_\alpha)$ von H^{σ_i} ab. Insbesondere können wir also erreichen, dass $p_i = m$ für alle $i = 2, \dots, r$ gilt: Dazu wählen wir mit Hilfe von Lemma 2.2 Elemente $h_1, \dots, h_m \in F$, die $\sigma_i(h_\alpha) > 0$ für alle $1 \leq \alpha \leq m$ und $2 \leq i \leq r$ erfüllen.

Kokompakte arithmetische Untergruppen der $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ kommen dann mit den Überlegungen aus Abschnitt 2.2 von torsionsfreien arithmetischen Untergruppen $\Gamma \subset \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ her.

2.3.2 Beispiel: $D = Q(-1, \gamma|E)$ Quaternionenalgebra

Es bezeichne nun $D := Q(-1, \gamma|E)$ für $\gamma \in F$ eine Quaternionenalgebra über E, welche Divisionsalgebra ist und über $\mathbb{R}$ zerfällt. Wir stellen die Bedingungen $\gamma > 0$ und $\sigma_i(\gamma) < 0$ für $2 \leq i \leq r$. Die Existenz einer solchen Algebra haben wir in Anhang A gezeigt.

Auf dieser Algebra betrachten wir die Standard-Involution zweiter Art:

$$\tau : D \to D, \quad x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto x_0 - \iota(x_1) i - \iota(x_2) j - \iota(x_3) k,$$

wobei ι den nichttrivialen Galoisautomorphismus von E über F bezeichnet. Um eine nicht ausgeartete τ-hermitesche Form auf D^m zu definieren, genügt es Elemente $h_1, \ldots, h_m \in D \setminus \{0\}$ zu wählen, die $\tau(h_\alpha) = h_\alpha$ für alle $\alpha = 1, \ldots, m$ erfüllen. Die Matrix $H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_m) \in M_m(D)$ beschreibt dann eine nicht ausgeartete hermitesche Form.

Wie in Satz 2.10 fordern wir, dass $\delta_{-1,\sigma_i(\gamma)}(\widetilde{\sigma_i}(h_\alpha)) = 2$ für alle $i = 2, \ldots r$ und $\alpha = 1, \ldots, m$ gilt. Man beachte, dass wir uns wegen der Bedingung $\sigma_i(\gamma) < 0$ an jeder Stelle in dem in Abschnitt 2.1.3 beschriebenen zweiten Fall befinden, d.h. die $\delta_{-1,\sigma_i(\gamma)}(\widetilde{\sigma_i}(h_\alpha))$ werden wie in Lemma 2.5 berechnet. Es würde also in diesem Fall z.B. genügen, alle $h_\alpha \in F$ mit $\sigma_i(h_\alpha) > 0$ für $i = 2, \ldots r$ zu wählen.

Betrachten wir nun die $\mathrm{SU}_m(H, D, \tau)$, so wissen wir, dass dies die Gruppe der F-rationalen Punkte einer algebraischen Gruppe $G := \mathbf{SU_m}(h, D, \tau)$ ist, die über F definiert ist. Es existiert also die Gruppe $G' := \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G)$, die über $\mathbb{Q}$ definiert ist und $G'(\mathbb{Q}) = G(F)$ erfüllt. Für die Gruppe der reellen Punkte von G' sehen wir dann mit Satz 2.1 und Satz 2.10:

$$G'(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_{2m}(\mathbb{R}) \times \prod_{i=2}^{r} \mathrm{SU}(2m).$$

Insbesondere sind alle Faktoren außer dem ersten kompakt.

Nach den Resultaten aus Abschnitt 2.2 liefert dann jede torsionsfreie arithmetisch definierte Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SU}_m(H, D, \tau)$ eine kokompakte arithmetische Untergruppe der $\mathrm{SL}_{2m}(\mathbb{R})$.

Kapitel 3

Geometrische Zykel

In diesem Kapitel werden wir nun die im ersten Teil konstruierten kokompakten arithmetischen Untergruppen auf dem zu $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ gehörigen symmetrischen Raum wirken lassen. Auf dem Bahnenraum betrachten wir zwei Automorphismen, deren Fixpunktmengen wir bestimmen wollen. Wir werden an einigen Stellen Hintergründe aus der Differentialgeometrie und Lie Theorie benötigen. Da diese aber nicht im Mittelpunkt der Arbeit stehen, beschränken wir uns auf die wesentlichen Definitionen und Konzepte und verweisen den Leser für weitere Details auf Helgason [5] und Knapp [9].

3.1 Symmetrische Räume

Wir setzen hier das Konzept von *Riemannschen Mannigfaltigkeiten* und deren Isometrien voraus. Dieses taucht aber nur in der Definition von symmetrischen Räumen auf, und wird später nicht mehr verwendet.

Definition 3.1. Es sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\phi : X \to X$ eine Isometrie. Man nennt ϕ *involutiv*, wenn $\phi^2 = \mathrm{id}$ gilt. Ein Punkt $p \in X$ mit $\phi(p) = p$ heißt *Fixpunkt von ϕ*. Ein solcher Fixpunkt p ist *isoliert*, wenn es eine Umgebung U von p gibt, in der p der einzige Fixpunkt von ϕ ist.

Definition 3.2. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit X heißt *symmetrischer Raum*, wenn X zusammenhängend ist und es für jeden Punkt $x \in X$ eine involutive Isometrie $\phi_x : X \to X$ gibt, so dass x ein isolierter Fixpunkt von ϕ_x ist.

Wir werden nun sehen, dass symmetrische Räume unter gewissen Voraussetzungen als Quotienten von Lie Gruppen auftauchen:

Satz 3.3. *Es sei G eine zusammenhängende, halbeinfache Lie Gruppe mit endlichem Zentrum. Dann hat G eine maximal kompakte Untergruppe K und es existiert ein involutiver Automorphismus $\theta : G \to G$, dessen Fixpunktmenge mit K*

übereinstimmt. Der Raum der Rechtsnebenklassen $K\backslash G$ *ist dann ein symmetrischer Raum der Dimension* $\dim(G) - \dim(K)$.

Beweis. Die Existenz von K und θ findet man in [9, Thm. 6.31]. Die zweite Aussage folgt z.B. aus den Sätzen VI.1.1 und IV.3.4 in [5]. Die Dimensionsaussage gilt im Allgemeinen für den Bahnenraum von Gruppenwirkungen auf Mannigfaltigkeiten, siehe z.B. [11, Thm. 9.16]. □

Bemerkung. Einen involutiven Automorphismus θ, der wie im obigen Satz eine maximal kompakte Untergruppe von G als Fixpunktgruppe hat, nennt man eine *Cartan Involution* auf G. Man beachte, dass hier, im Vergleich zu einer Involution auf einer Algebra, die Reihenfolge der Multiplikation nicht umgedreht wird.

Ist G nicht kompakt, so nennt man den symmetrischen Raum $K\backslash G$ *von nicht-kompaktem Typ.*

Beispiel 3.4. Sei $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Dann ist $\theta : g \mapsto (g^t)^{-1}$ eine Cartan Involution auf G und $K := G(\theta) := \mathrm{Fix}_G(\theta) = \mathrm{SO}(n)$ eine maximal kompakte Untergruppe. Nach Satz 3.3 ist also $K\backslash G$ ein symmetrischer Raum von nicht-kompaktem Typ. Dieser hat die Dimension $n^2 - 1 - (\frac{n(n-1)}{2}) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$. Wir werden nun sehen, dass $K\backslash G$ mit dem Raum der symmetrischen und positiv definiten Matrizen der Determinante 1 übereinstimmt.

Sei also

$$X := \{A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : A \text{ ist symmetrisch und positiv definit } \}.$$

Wir definieren eine Rechtswirkung von G auf X durch $x.g := g^t x g$. Wir möchten nun die Bahn $I_n G$ und die Isotropiegruppe G_{I_n} des Elementes $I_n \in X$ bestimmen. Es ist

$$I_n G = \{g^t g : g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\}.$$

Nach dem Trägheitssatz von Sylvester lässt sich jede reelle, symmetrische und positiv definite Matrix A in der Form $A = S^t S$ für eine geeignete Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ schreiben. Gilt nun zusätzlich $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, so folgt $\det(S)^2 = \det(A) = 1$ und damit $\det(S) = \pm 1$. Also kann man die Matrix S – ggf. durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix der Determinante -1 – auch in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ finden. Daher folgt $I_n G = X$.

Betrachten wir nun noch den Stabilisator G_{I_n} von I_n:

$$G_{I_n} = \{g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : g^t g = I_n\}.$$

Dies ist aber nichts anderes als die spezielle orthogonale Gruppe, also gilt $G_{I_n} = \mathrm{SO}(n) = K$ und mit Hilfe des Bahnensatzes ([7, Satz I.6.4]) folgt dann

$$X = I_n G \cong G_{I_n} \backslash G = K \backslash G.$$

Lokalsymmetrische Räume und geometrische Zykel

Wir betrachten wieder eine zusammenhängende, halbeinfache Lie Gruppe G mit endlichem Zentrum und den zugehörigen symmetrischen Raum $X := K\backslash G$.

Eine Untergruppe $\Gamma \subset G$ wirkt dann durch Rechtsmultiplikation auf X. Ist Γ diskret und torsionsfrei, so folgt z.B. aus Lemma 3.23 in [8], dass Γ strikt diskontinuierlich und daher insbesondere frei auf X wirkt.[1] In diesem Fall ist der Raum der Nebenklassen X/Γ also ein *lokal symmetrischer Raum*. Dieser hat als Riemannsche Mannigfaltigkeit die Dimension $\dim(X/\Gamma) = \dim(X)$ (siehe [11, Thm. 9.16]).

Wir betrachten nun eine reduktive Untergruppe $H \subset G$. Es bezeichne K_H eine maximal kompakte Untergruppe von H und $X_H := K_H\backslash H$ sei der zu H assoziierte symmetrische Raum. Setzen wir nun $\Gamma_H := \Gamma \cap H$, so ist X_H/Γ_H ein lokalsymmetrischer Raum. Lässt sich dieser als Teilmannigfaltigkeit in den Raum X/Γ einbetten, so nennt man diese Teilmannigfaltigkeit einen *geometrischen Zykel* (siehe [17, 6.1, S.26]).

3.2 Eine Cartan Involution auf $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$

Wir haben in den vorherigen Kapiteln gesehen, dass man unter bestimmten Bedingungen die Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R}$ mit der Gruppe $SL_n(\mathbb{R})$ identifizieren kann. Wir wollen uns nun überlegen, dass in dieser Situation die Cartan Involution θ auf $SL_n(\mathbb{R})$ schon von einer Abbildung ϑ auf $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ herkommt. Sei also F ein total reeller algebraischer Zahlkörper und E eine reelle quadratische Erweiterung von F. Wir schränken uns wieder auf den Fall ein, dass die Divisionsalgebra D eine über $\mathbb{R}$ zerfallende Quaternionenalgebra über E ist. Außerdem bezeichne τ die

[1] Die Wirkung von Γ auf X heißt *strikt diskontinuierlich*, wenn für alle $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert, sodass für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt: $(U.\gamma \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \gamma = 1)$.
Sie heißt *frei*, wenn $(x.\gamma = x \Rightarrow \gamma = 1)$ für alle $x \in X$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt.

Standard-Involution zweiter Art auf D und h eine τ-hermitesche Form auf D^m mit Diagonaldarstellung H bzgl. einer gewählten Basis von D^m über D. Es sei nun

$$\xi : M_m(D) \to M_m(D) \quad \xi(x) = H^{-1}\tau_r(x^t)H.$$

Eine Fortsetzung $\tilde{\xi}$ von ξ auf $M_m(D) \otimes \mathbb{R}$ ist dann durch $\xi \otimes \mathrm{id}$ gegeben.

Da τ und τ_r vertauschen, können wir die Abbildung ξ auf $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ einschränken. Hier definieren wir nun einen Gruppenhomomorphismus:

$$\vartheta : \mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \to \mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \quad x \mapsto \xi(x)^{-1}.$$

Auf den reellen Punkten von $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ können wir diese Abbildung durch $\tilde{\vartheta}(x \otimes \lambda) := \vartheta(x) \otimes \lambda^{-1}$ fortsetzen.

Um zu sehen, dass ϑ unter der Identifikation von $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes \mathbb{R}$ mit $SL_{2m}(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R})$ zur Cartan Involution wird, nutzen wir die Tatsache aus, dass die reellen Punkte der Fixpunktgruppe einer Abbildung auf $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ mit den Fixpunkten der auf $SL_n(\mathbb{R})$ induzierten Abbildung übereinstimmen. Es genügt also zu zeigen, dass die reellen Punkte der Fixpunktgruppe von ϑ in $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ eine maximal kompakte Untergruppe der $SL_n(\mathbb{R})$ darstellen. Betrachten wir also die Fixpunktgruppe

$$\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)(\vartheta) := \{x \in \mathrm{SU}_m(h, D, \tau) : \vartheta(x) = x\}.$$

Die Gleichung $\vartheta(x) = x$ ist äquivalent zur Bedingung $\tau_r(x^t)Hx = H$. Wir werden von nun an fordern, dass h auch eine τ_r-hermitesche Form ist, das heißt, dass $\tau_r(H) = H$ gilt. Dann können wir obige Menge in der Form

$$\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)(\vartheta) = \mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \cap \mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r)$$

schreiben. Wir untersuchen nun zunächst die Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r)$.

3.2.1 Die reellen Punkte der $\mathbf{SU_m}(h, D, \tau_r)$

Wie in Abschnitt 1.4.2 erklärt, können wir die Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r)$ als F-rationale Punkte einer algebraischen Gruppe über F auffassen, die wir mit $\mathbf{SU_m}(h, D, \tau_r)$ bezeichnen. Für die reellen Punkte gilt ein zu Satz 1.20 analoges Resultat:

Satz 3.5. *Es sei D eine Quaternionenalgebra über E, die über $\mathbb{R}$ zerfällt, τ_r die Reversion auf D und h eine bzgl. τ_r hermitesche Form. Dann gilt*

$$\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SO}(p_1, q_1) \oplus \mathrm{SO}(p_2, q_2)$$

für geeignete $p_i, q_i \in \mathbb{N}$ mit $p_i + q_i = 2m$ für $i = 1, 2$.

Wir werden den Beweis dieses Satzes nach hinten verschieben und uns zunächst, ähnlich wie in Abschnitt 2.1.3, mit dem Verhalten der Involution τ_r unter einem Isomorphismus $\varphi : D \otimes_F \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$ beschäftigen.

Wie oben gefordert ist $D := Q(\beta, \gamma|E)$ eine Quaternionenalgebra, die Divisionsalgebra ist und über $\mathbb{R}$ zerfällt. Dies bedeutet, dass entweder $\beta > 0$ oder $\gamma > 0$ gilt, denn sonst wäre $Q(\beta, \gamma|E) \otimes_E \mathbb{R} \cong Q(\beta, \gamma|\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$, wobei $\mathbb{H}$ die Hamiltonschen Quaternionen bezeichnet.Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Es ist $\gamma > 0$ und β beliebig.

2. Es ist $\beta > 0$ und $\gamma < 0$.

Wir werden wieder den ersten Fall detailliert behandeln, im zweiten Fall folgen die Resultate dann ganz analog. Man beachte, dass wir wirklich beide Fälle untersuchen müssen, da es keinen Isomorphismus von Algebren mit Involution $(Q(\beta, \gamma|E), \tau_r) \to (Q(\gamma, \beta|E), \tau_r)$ gibt, d.h. der zweite Fall kann nicht durch vertauschen der Parameter in den ersten Fall überführt werden.

Sei also $D = Q(\beta, \gamma|E)$ mit $\gamma > 0$. Wir betrachten nun folgenden Isomorphismus $\phi : Q(\beta, \gamma|E) \otimes_E \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$:

$$(1 \otimes 1) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \ (i \otimes 1) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \ (j \otimes 1) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\gamma} \end{pmatrix}, \ (k \otimes 1) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\gamma} \\ \beta\sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.6. *Es sei $w := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$. Dann gilt $\phi(\tau_r(x) \otimes 1) = w\phi(x \otimes 1)^t w$ für alle $x \in Q(\beta, \gamma|E)$. Gilt $\tau_r(x) = x$, so sind $\phi(x \otimes 1)w$ und $w\phi(x \otimes 1)$ symmetrische Matrizen mit denselben Eigenwerten. Es bezeichne $\varepsilon_{\beta,\gamma}(x)$ die Anzahl der positiven Eigenwerte dieser Matrizen. Dann gilt:*

$$\varepsilon_{\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_0^2 < \beta(x_1^2 - \gamma x_3^2) \text{ und } (\beta+1)x_1 + (\beta-1)x_3\sqrt{\gamma} < 0; \\ 1 & \text{falls } x_0^2 > \beta(x_1^2 - \gamma x_3^2); \\ 2 & \text{falls } x_0^2 < \beta(x_1^2 - \gamma x_3^2) \text{ und } (\beta+1)x_1 + (\beta-1)x_3\sqrt{\gamma} > 0, \end{cases}$$

wobei $x = x_0 + x_1 i + x_3 k$ ist.

Beweis. Die erste Aussage folgt durch Nachrechnen auf den Basiselementen $1, i, j, k$. Sei nun $\tau_r(x) = x$. Dann gilt $\phi(x \otimes 1)w = \phi(\tau_r(x) \otimes 1)w = w\phi(x \otimes 1)^t ww = w\phi(x \otimes 1)^t = (\phi(x \otimes 1)w)^t$. Hier geht ein, dass w eine symmetrische Matrix ist und $w^2 = I_2$ gilt. Analog folgt $w\phi(x \otimes 1) = (w\phi(x \otimes 1))^t$. Bestimmt man nun die charakteristischen Polynome $\chi_{\phi(x\otimes 1)w}$ und $\chi_{w\phi(x\otimes 1)}$ dieser symmetrischen Matrizen, so sieht man leicht ein, dass diese übereinstimmen. Damit folgt für die Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\chi_{\phi(x\otimes 1)w}(\lambda) = 0 \iff \lambda = {}& \frac{1}{2}((\beta+1)x_1 + (\beta-1)x_3\sqrt{\gamma}) \\ & \pm \sqrt{\frac{1}{4}((\beta+1)x_1 + (\beta-1)x_3\sqrt{\gamma})^2 + x_0^2 - \beta(x_1^2 - x_3^2\gamma)}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formel ergeben sich dann obige Kriterien für die Existenz von 0, 1 oder 2 positiven Eigenwerten. □

Wir werden diese Überlegungen nun von $D \otimes_E \mathbb{R}$ auf $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}$ übertragen. Dazu müssen wir zunächst einen $\mathbb{R}$-linearen Isomorphismus $\bar{\varphi} : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{R}) \oplus M_{2m}(\mathbb{R})$ angeben. Es bezeichne $\bar{\phi} : M_m(D) \otimes_E \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{R})$ den Isomorphismus, der durch komponentenweises Anwenden von ϕ auf die Einträge einer Matrix in $M_m(D)$ definiert ist. Dann wissen wir aus Lemma 1.21, dass durch $\bar{\varphi} := (\bar{\phi} \circ j, \bar{\phi}^{op} \circ j \circ (\varsigma \otimes \mathrm{id}))$ die gesuchte Abbildung $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{R}) \oplus M_{2m}(\mathbb{R})$ gegeben ist.

Mit Hilfe des Isomorphismus $\bar{\varphi}$ können wir nun das folgende Lemma formulieren; für eine Matrix $X := (x_{ij}) \in M_m(D)$ schreiben wir dabei $\tau_r(X)$ statt $(\tau_r(x_{ij}))$:

Lemma 3.7. *Es sei $W := \mathrm{diag}(w, \ldots, w) \in M_{2m}(\mathbb{R})$, wobei w die 2×2-Matrix aus Lemma 3.6 bezeichnet. Dann gilt:*

$$\bar{\varphi}(\tau_r(X)^t \otimes 1) = (W, W)(\bar{\varphi}(X \otimes 1))^t (W, W).^2$$

Für $X \in M_m(D)$ mit $\tau_r(X)^t = X$ sind die Komponenten von $\bar{\varphi}(X \otimes 1)(W, W)$ symmetrische Matrizen.

Ist X außerdem eine Diagonalmatrix mit Einträgen $x_1, \ldots x_m$, so hat die erste Komponente $\bar{\phi}(X \otimes 1)W$ von $\bar{\varphi}(X \otimes 1)(W, W)$ genau $\sum_{l=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(x_l)$ positive Eigenwerte und die zweite Komponente $\bar{\phi}^{op}(\varsigma(X) \otimes 1)W$ hat $\sum_{l=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(\tau(x_l))$ positive Eigenwerte; für $\varepsilon_{\beta,\gamma}$ wie in Lemma 3.6.

[2] Hier bedeutet die Notation $(\bar{\varphi}(X \otimes 1))^t$, dass beide Komponenten von $\bar{\varphi}(X \otimes 1)$ einzeln transponiert werden.

Beweis. Dies folgt im Wesentlichen aus Lemma 3.6. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\tau_r(X)^t \otimes 1) &= (\bar{\phi}(\tau_r(X)^t \otimes 1), \bar{\phi}^{op}(\varsigma(\tau_r(X)^t) \otimes 1)) \\ &= (\Big(\phi(\tau_r(x_{ji}) \otimes 1)\Big), \Big(\phi(\tau(\tau_r(x_{ij})) \otimes 1)\Big)^t).\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.6 und einer weiteren leichten Rechnung folgt dann:

$$\begin{aligned}&(\Big(\phi(\tau_r(x_{ji}) \otimes 1)\Big), \Big(\phi(\tau(\tau_r(x_{ij})) \otimes 1)\Big)^t) = (\Big(w\phi(x_{ji} \otimes 1)^t w\Big), \Big(w\phi(\tau(x_{ij}) \otimes 1)^t w\Big)^t) \\ &= (W\Big(\phi(x_{ij} \otimes 1)\Big)^t W, W\Big(\phi(\tau(x_{ji}) \otimes 1)\Big)W) = (W\bar{\phi}(X \otimes 1)^t W, W\bar{\phi}(\varsigma(X) \otimes 1)W) \\ &= (W(\bar{\phi}(X \otimes 1))^t W, W(\bar{\phi}^{op}(\varsigma(X) \otimes 1))^t W) = (W, W)(\bar{\varphi}(X \otimes 1))^t (W, W).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch direkt:

$$\begin{aligned}(\bar{\varphi}(X \otimes 1)(W, W))^t &= (\bar{\varphi}(\tau_r(X)^t \otimes 1)(W, W))^t = ((W, W)(\bar{\varphi}(X \otimes 1))^t (W, W)(W, W))^t \\ &= ((W, W)(\varphi(X \otimes 1))^t)^t = \bar{\varphi}(X \otimes 1)(W, W),\end{aligned}$$

also sind beide Komponenten von $\bar{\varphi}(X \otimes 1)(W, W)$ symmetrisch.

Ist nun $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_m)$ eine Diagonalmatrix mit $\tau_r(X)^t = X$, so sind $\bar{\phi}(X \otimes 1)W$ und $\bar{\phi}^{op}(\varsigma(X) \otimes 1)W$ Blockdiagonalmatrizen mit 2×2-Blöcken auf der Diagonale. Jeder solche Block hat die Form $\phi(x_l \otimes 1)w$ bzw. $(\phi(\tau(x_l) \otimes 1))^t w = (w\phi(\tau(x_l) \otimes 1))^t = w\phi(\tau(x_l) \otimes 1)$ und nach Lemma 3.6 genau $\varepsilon_{\beta,\gamma}(x_l)$ bzw. $\varepsilon_{\beta,\gamma}(\tau(x_l))$ positive Eigenwerte. Die Gesamtanzahl an positiven Eigenwerten ist die Summe der positiven Eigenwerte der einzelnen Blöcke und damit durch $\sum_{l=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(x_l)$ bzw. $\sum_{l=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(\tau(x_l))$ gegeben. □

Betrachten wir nun den zweiten Fall: $\beta > 0$ und $\gamma < 0$. Hier wählen wir einen Isomorphismus $\phi : D \otimes_E \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$, der durch

$$(1 \otimes 1) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (i \otimes 1) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\beta} \end{pmatrix}$$

$$(j \otimes 1) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\gamma} \\ -\sqrt{-\gamma} & 0 \end{pmatrix} \qquad (k \otimes 1) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\beta}\sqrt{-\gamma} \\ \sqrt{\beta}\sqrt{-\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ganz analog zum ersten Fall können wir dann zwei Lemmata formulieren:

Lemma 3.8. *Es gilt* $\phi(\tau_r(x)\otimes 1) = \phi(x\otimes 1)^t$ *für alle* $x \in Q(\beta,\gamma|E)$. *Ist* $\tau_r(x) = x$, *so ist* $\phi(x\otimes 1)$ *eine symmetrische Matrix. Es bezeichne* $\varepsilon_{\beta,\gamma}(x)$ *die Anzahl der positiven Eigenwerte dieser Matrix. Dann gilt:*

$$\varepsilon_{\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_0^2 > \beta(x_1^2 - \gamma x_3^2) \text{ und } x_0 < 0; \\ 1 & \text{falls } x_0^2 < \beta(x_1^2 - \gamma x_3^2); \\ 2 & \text{falls } x_0^2 > \beta(x_1^2 - \gamma x_3^2) \text{ und } x_0 > 0, \end{cases}$$

wobei $x = x_0 + x_1 i + x_3 k$ *ist.*

Beweis. Analog zu Lemma 3.6. $\square$

Es sei nun wieder $\bar\phi : M_m(D) \otimes_E \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{R})$ der Isomorphismus, der durch komponentenweise Anwendung von ϕ entsteht. Setzen wir wie oben

$$\bar\varphi := (\bar\phi \circ j, \bar\phi^{op} \circ j \circ (\varsigma \otimes \mathrm{id})) : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{R}) \oplus M_{2m}(\mathbb{R}),$$

so haben wir außerdem folgendes Lemma:

Lemma 3.9. *Es gilt* $\bar\varphi(\tau_r(X)^t \otimes 1) = (\bar\varphi(X \otimes 1))^t$ *und für* $X \in M_m(D)$ *mit* $\tau_r(X)^t = X$ *sind die Komponenten von* $\bar\varphi(X \otimes 1)$ *symmetrische Matrizen.*

Ist X *außerdem eine Diagonalmatrix mit Einträgen* $x_1, \dots x_m$, *so hat die erste Komponente* $\bar\phi(X \otimes 1)$ *von* $\bar\varphi(X \otimes 1)$ *genau* $\sum_{l=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(x_l)$ *positive Eigenwerte und die zweite Komponente* $\bar\phi^{op}(\varsigma(X) \otimes 1)$ *hat* $\sum_{l=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(\tau(x_l))$ *positive Eigenwerte; für* $\varepsilon_{\beta,\gamma}$ *wie in Lemma 3.8.*

Beweis. Analog zu Lemma 3.7. $\square$

Betrachten wir nun wieder der allgemeinen Fall $D := Q(\beta,\gamma|E)$ und erinnern uns an die Abbildungen $\xi(x) := H^{-1}\tau_r(x^t)H$ für $x \in M_m(D)$ und $\tilde\xi := \xi \otimes \mathrm{id}$ auf $M_m(D) \otimes_F \mathbb{R}$. Außerdem sei $\bar\varphi : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{R}) \oplus M_{2m}(\mathbb{R})$ der oben angegebene Isomorphismus, je nach dem ob die Quaternionenalgebra D die Eigenschaft $\gamma < 0$ oder $\gamma > 0$ hat.

Lemma 3.10. *Es sei* $A := W$ *mit* W *wie in Lemma 3.7, wenn* $\gamma > 0$ *gilt, und* $A := I_m$, *wenn* $\gamma < 0$ *ist. Dann gilt für* $x \in M_m(D)$:

$$\bar\varphi(\tilde\xi(x \otimes \lambda)) = \bar\varphi(H^{-1} \otimes 1)(A, A)(\bar\varphi(x \otimes \lambda))^t(A, A)\bar\varphi(H \otimes 1).$$

Beweis. Dies können wir unter Benutzung von Lemma 3.7 bzw. Lemma 3.9 direkt berechnen:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\tilde{\xi}(x\otimes\lambda)) &= \bar{\varphi}(H^{-1}\tau_r(x^t)H)\otimes\lambda) = \bar{\varphi}(H^{-1}\otimes 1)\bar{\varphi}(\tau_r(x^t)\otimes\lambda)\bar{\varphi}(H\otimes 1)\\ &= \bar{\varphi}(H^{-1}\otimes 1)\lambda\bar{\varphi}(\tau_r(x^t)\otimes 1)\bar{\varphi}(H\otimes 1)\\ &= \bar{\varphi}(H^{-1}\otimes 1)\lambda(A,A)(\bar{\varphi}(x\otimes 1))^t(A,A)\bar{\varphi}(H\otimes 1)\\ &= \bar{\varphi}(H^{-1}\otimes 1)(A,A)(\bar{\varphi}(x\otimes\lambda))^t(A,A)\bar{\varphi}(H^{\otimes}1).\end{aligned}$$ □

Nun haben wir genügend Vorarbeit geleistet, um uns dem Beweis von Satz 3.5 zuzuwenden:

Beweis von Satz 3.5. Der Beweis ist größtenteils analog zu dem von Satz 1.20. Hier betrachten wir jedoch die spezielle unitäre Gruppe bzgl. der Reversion, einer orthogonalen Involution erster Art. Es seien $\tilde{\xi}$ und $\bar{\varphi}$ wie oben definiert. Wir setzen nun $\mathcal{G} := \{(g,h)\in SL_n(\mathbb{R})\oplus SL_n(\mathbb{R}) : (\bar{\varphi}\tilde{\xi}\bar{\varphi}^{-1}(g,h))(g,h) = (I_n, I_n)\}$. Dann kann man wie im Beweis von Satz 1.20 zeigen, dass

$$\mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r)\otimes_F \mathbb{R}\cong\mathcal{G}$$

gilt. Nach Lemma 3.10 ist aber

$$\begin{aligned}&\bar{\varphi}\tilde{\xi}\bar{\varphi}^{-1}(g,h) = \bar{\varphi}(H^{-1}\otimes 1)(A,A)(g^t,h^t)(A,A)\bar{\varphi}(H\otimes 1)\\ =&(\bar{\phi}(H^{-1}\otimes 1)Ag^tA\bar{\phi}(H\otimes 1), \bar{\phi}^{op}(\varsigma(H)^{-1}\otimes 1)Ah^tA(\bar{\phi}^{op}(\varsigma(H)\otimes 1))).\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Definition von $\mathcal{G}$ ergibt sich für die erste Komponente die Gleichung

$$\bar{\phi}(H^{-1}\otimes 1)Ag^tA\bar{\phi}(H\otimes 1)g = I_n$$

und für die zweite Komponente die Gleichung

$$\bar{\phi}^{op}(\varsigma(H)^{-1}\otimes 1)Ah^tA\bar{\phi}^{op}(\varsigma(H)\otimes 1)h = I_n.$$

Genau wie im Beweis von Satz 2.7 sieht man, dass $(\bar{\phi}(H^{-1}\otimes 1)A)^{-1} = A\bar{\phi}(H\otimes 1)$ bzw. $(\bar{\phi}^{op}(\varsigma(H)^{-1}\otimes 1)A)^{-1} = A\bar{\phi}^{op}(\varsigma(H)\otimes 1)$ gilt. Also beschreiben obige Gleichungen jeweils eine Gruppe $\mathrm{SO}(p,q)$, wobei p und q die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte der Matrix $\bar{\phi}(H^{-1}\otimes 1)A$ bzw. $\bar{\phi}^{op}(\varsigma(H)^{-1}\otimes 1)A$ sind. Da aber $\tau_r(H^{-1}) = H^{-1}$ gilt und $H^{-1} = \mathrm{diag}(h_1^{-1},\ldots,h_m^{-1})$ eine Diagonalmatrix ist, kennen wir diese Anzahlen aus Lemma 3.7 bzw. Lemma 3.9. Setzen wir also $p_1 := \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(h_l^{-1})$ und $p_2 := \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(\tau(h_l^{-1}))$, so gilt

$$\mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SO}(p_1, n-p_1) \oplus \mathrm{SO}(p_2, n-p_2). \qquad \square$$

Wir haben somit die reellen Punkte der Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r)$ für eine beliebige τ_r-hermitesche Form h berechnet. In unserer Situation wissen wir aber, dass h auch bzgl. τ hermitesch ist, d.h $\tau(H) = H$. Damit ergibt sich dann folgendes Resultat:

Korollar 3.11. *Es sei D eine Quaternionenalgebra über E, die Divisionsalgebra ist und über $\mathbb{R}$ zerfällt. Wir betrachten die Reversion τ_r und die Standard-Involution zweiter Art τ und wählen eine Form h auf D^m die hermitesch bzgl. beider Involutionen ist und eine Diagonaldarstellung $H := \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_m)$ mit $h_i \in D$ besitzt. Weiter sei $p := \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(h_l^{-1})$, für $\varepsilon_{\beta,\gamma}$ wie in Lemma 3.6 bzw. Lemma 3.8. Dann gilt*

$$\mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r) \otimes_F \mathbb{R} \cong \mathrm{SO}(p, n-p) \oplus \mathrm{SO}(p, n-p).$$

Beweis. Da h auch τ-hermitesch ist, gilt $\tau(h_i) = h_i$ für die Einträge h_i von H. Damit folgt im Beweis des obigen Satzes $p_1 = p_2 = \sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(h_l^{-1})$, was zu zeigen war. $\square$

3.2.2 Bestimmung der Fixpunkte

Mit den Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt können wir nun die Gruppe der reellen Punkte von $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)(\vartheta) = \mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \cap \mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r)$ bestimmen. Unser Ziel ist es, zu sehen, dass diese homöomorph zur speziellen orthogonalen Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ ist. Aus Korollar 3.11 schließen wir, dass die Signatur der speziellen orthogonalen Gruppe von den Einträgen der Matrix H abhängt. Wir fordern also $\sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(h_l^{-1}) = n$, für $\varepsilon_{\beta,\gamma}$ wie in Lemma 3.6 bzw. Lemma 3.8. Eine solche Wahl ist wegen Lemma 2.2 möglich.

Wir benutzen nun den Isomorphismus $\psi : M_m(D) \otimes_F \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{R}) \oplus M_{2m}(\mathbb{R})$ aus Satz 1.22, für $\bar{\phi}$ wie oben. Es gilt also $\psi = (\mathrm{Int}\, g_1^{-1} \circ \bar{\phi} \circ j, \bar{\phi}^{op} \circ (\varsigma \otimes \mathrm{id}) \circ j)$, wobei g_1 wie im Beweis von Satz 1.22 gewählt ist. In unserem Fall sehen wir leicht, dass wir für g_1 die Matrix $B := \bar{\phi}(H^{-1} \otimes 1)$ wählen können:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}\tilde{\omega}\bar{\varphi}^{-1}(g, h) \\
&= \left(\bar{\phi}((H^{-1} \otimes 1)(\varsigma \otimes \mathrm{id})(\bar{\varphi}^{-1}(g, h))(H \otimes 1)), \bar{\phi}^{op}((H^{-1} \otimes 1)(\bar{\varphi}^{-1}(g, h))(H \otimes 1))\right) \\
&= \left(B\bar{\phi}((\varsigma \otimes \mathrm{id})(\bar{\varphi}^{-1}(g, h)))B^{-1}, B^t\bar{\phi}(\bar{\varphi}^{-1}(g, h))(B^{-1})^t\right) = \mathrm{Int}(B, B^t)(h^t, g^t).
\end{aligned}$$

Unter ψ wir die Menge $\mathrm{SU}_m(h,D,\tau)\otimes_F\mathbb{R}\cap\mathrm{SU}_m(h,D,\tau_r)\otimes_F\mathbb{R}$ damit zur Menge

$$\{(g,h)\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\oplus\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}):\quad h=(g^t)^{-1};\ B^{-1}BA(B^{-1})^tg^tB^tAB^{-1}Bg=I_n \\ \text{und } B^tAh^tA(B^{-1})^th=I_n.\}$$

Hier ist A wieder wie in Lemma 3.10 gewählt. Die zweite Gleichung erhält man dabei durch Transponieren und Invertieren der ersten, unter Benutzung der Tatsachen, dass $h=(g^t)^{-1}$, $A^{-1}=A=A^t$ und $AB=B^tA$ gilt. Die Menge ist daher durch die ersten beiden Bedingungen schon vollständig beschrieben. Dies formulieren wir in folgendem Satz:

Satz 3.12. *Es gelte $\sum_{i=1}^m\varepsilon_{\beta,\gamma}(h_l^{-1})=n$ für die Einträge h_i der Matrix H von h. Dann existiert eine Matrix $A'\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ so dass gilt:*

$$\mathrm{SU}_m(h,D,\tau)(\vartheta)(\mathbb{R})\cong A'\,\mathrm{SO}(n)A'^{-1}.$$

Diese Gruppe ist homöomorph zur Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ und damit insbesondere eine maximal kompakte Untergruppe von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Beweis. Aus der obigen Herleitung folgt, dass

$$\mathrm{SU}_m(h,D,\tau)(\vartheta)(\mathbb{R})\cong\{g\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}):A(B^{-1})^tg^tB^tAg=I_n\} \tag{3.1}$$

gilt. Die Matrix $A(B^{-1})^t$ ist nach Lemma 3.7 bzw. Lemma 3.9 symmetrisch und hat wegen der Wahl der Einträge von H nur positive Eigenwerte. Es existiert daher ein $A'\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $A(B^{-1})^t=A'A'^t$. Wir können die Matrix A' sogar als Blockdiagonalmatrix wählen, diese Eigenschaft wird später noch eine wichtige Rolle spielen. Nun lässt sich die Menge (3.1) auch als

$$\{g\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}):(A'^{-1}gA')^t(A'^{-1}gA')=I_n\}=A'\,\mathrm{SO}(n)A'^{-1}$$

beschreiben. Diese Gruppe ist zur $\mathrm{SO}(n)$ homöomorph und daher maximal kompakt in der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. □

Korollar 3.13. *Die Abbildung $\psi\vartheta\psi^{-1}$ ist eine Cartan-Involution auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.12, da die Fixpunkte von $\psi\vartheta\psi^{-1}$ eine maximal kompakte Untergruppe von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sind. □

Bemerkung. Die Cartan-Involution $\psi\vartheta\psi^{-1}$ ist durch $x \mapsto \mathrm{Int}(A'A''^t)((x^t)^{-1})$ gegeben.

Wir werden nun noch eine weitere Abbildung auf $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ definieren, die unter ψ zu einer interessanten Abbildung auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ wird. Dazu seien p und q gerade natürliche Zahlen mit $p + q = n = 2m$. Wir setzen $\mathfrak{I}_{p,q} := \begin{pmatrix} I_{p/2} & 0 \\ 0 & -I_{q/2} \end{pmatrix} \in M_m(D)$.

Lemma 3.14. *Die Matrix $\mathfrak{I}_{p,q}$ ist ein Element von* $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$.

Beweis. Es gilt $\tau(\mathfrak{I}_{p,q}^t) = \mathfrak{I}_{p,q}$. Außerdem sehen wir, dass H und $\mathfrak{I}_{p,q}$ kommutieren, da beides Diagonalmatrizen sind und $\mathfrak{I}_{p,q}$ nur Einträge aus dem Zentrum von D hat. Es folgt

$$H^{-1}\tau(\mathfrak{I}_{p,q}^t)H\mathfrak{I}_{p,q} = H^{-1}\mathfrak{I}_{p,q}H\mathfrak{I}_{p,q} = I_m,$$

also $\mathfrak{I}_{p,q} \in U_m(h, D, \tau)$.

Das Bild von $(\mathfrak{I}_{p,q} \otimes 1)$ unter dem Isomorphismus $\bar{\phi} : M_m(D) \otimes_E \mathbb{R} \to M_{2m}(\mathbb{R})$ ist die Matrix $I_{p,q}$, die Determinante 1 hat. Daher gilt $\mathrm{Nrd}_{M_m(D)/E}(\mathfrak{I}_{p,q}) = 1$ und $\mathfrak{I}_{p,q} \in \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$. □

Es sei nun $\mathrm{Int}\,\mathfrak{I}_{p,q} : \mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \to \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ die Abbildung $x \mapsto \mathfrak{I}_{p,q}x\mathfrak{I}_{p,q}^{-1}$. Da $(\mathrm{Int}\,B^{-1} \circ \bar{\phi})(\mathfrak{I}_{p,q} \otimes 1) = I_{p,q}$ gilt, wird $\mathrm{Int}\,\mathfrak{I}_{p,q} \otimes \mathrm{id}$ unter Identifikation von $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \otimes \mathbb{R}$ mit $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ zur Abbildung $\mathrm{Int}\,I_{p,q} : x \mapsto I_{p,q}xI_{p,q}^{-1}$.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{H}_1$ die Fixpunktgruppe von $\mathrm{Int}\,\mathfrak{I}_{p,q}$ in $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$. Weiter setzen wir $\mathfrak{t} = \mathrm{Int}\,\mathfrak{I}_{p,q} \circ \vartheta : \mathrm{SU}_m(h, D, \tau) \to \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$. Die Fixpunktgruppe von $\mathfrak{t}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_2$. Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit den von diesen Gruppen induzierten Untergruppen der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ beschäftigen.

Bemerkung. Die Einschränkung auf gerade Parameter p und q ist hier notwendig. Der Grund dafür liegt im Übergang von $M_m(D)$ zur $M_{2m}(\mathbb{R})$. Für ungerade p und q gibt es im Allgemeinen keine offensichtliche Wahl eines Elements $\mathfrak{I}_{p,q}$, das auf der $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ durch Konjugation wirkt und beim Übergang zur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ zur Matrix $I_{p,q}$ wird.

3.3 Konstruktion von geometrischen Zykeln

In diesem Abschnitt berechnen wir die Fixpunkte zweier Abbildungen in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und dem symmetrischen Raum X und konstruieren damit geometrische Zykel. Es sei wie immer $\theta : \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), x \mapsto (x^t)^{-1}$ die zur $\mathrm{SO}(n)$ gehörende Cartan-Involution auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Außerdem bezeichnen wir mit $\operatorname{Int} I_{p,q}$ den inneren Automorphismus, der durch die Matrix $I_{p,q} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ definiert wird. Wir setzen nun $\tau_1 := \operatorname{Int} I_{p,q}$ und $\tilde{\tau}_2 := \operatorname{Int} I_{p,q} \circ \theta$. Für gerade p und q haben wir oben gesehen, dass τ_1 von der Abbildung $\operatorname{Int} \mathfrak{I}_{p,q}$ auf $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ herkommt. Wir erinnern uns außerdem, dass für $A' \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ wie in Satz 3.12 die Abbildung $\operatorname{Int}(A'A'^t) \circ \theta$ von der Abbildung ϑ auf $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ herkommt. Daher kommt auch $\tau_2 := \tilde{\tau}_2 \circ \operatorname{Int}(A'A'^t)^{-1}$ von $\mathfrak{t} = \operatorname{Int} \mathfrak{I}_{p,q} \circ \vartheta$. Wir bemerken an dieser Stelle, dass A' und $I_{p,q}$ wegen der Wahl von A' als Blockdiagonalmatrix vertauschen. Mit dieser Tatsache können wir auch das folgende Lemma zeigen:

Lemma 3.15. *Die Abbildungen τ_1 und τ_2 vertauschen miteinander.*

Beweis. Dies lässt sich leicht nachrechnen. Dabei geht ein, dass $I_{p,q} = I_{p,q}^t = I_{p,q}^{-1}$ gilt, und dass I_{pq} mit A' und A'^{-1} vertauscht. □

Wir möchten nun die Fixpunkte von τ_1 und τ_2 in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ berechnen. Dafür definieren wir

$$\mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})) := \{A = (A_1, A_2) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}) : \det(A_1)\det(A_2) = 1\}.$$

Dann können wir folgendes Resultat fomulieren:

Satz 3.16. *Es gilt*

$$\begin{aligned} & \operatorname{Fix}(\tau_1, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \cong \mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})) \\ \textit{und} \quad & \operatorname{Fix}(\tau_2, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = A' \,\mathrm{SO}(p,q) A'^{-1}. \end{aligned}$$

Beweis. Betrachten wir die Menge

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : A = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right),\ A_1 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}),\ A_2 \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})\}.$$

Diese kann durch die Abbildung $A \mapsto (A_1, A_2)$ mit $\mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}))$ identifiziert werden. Wir werden nun zeigen, dass $\operatorname{Fix}(\tau_1, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}$ gilt. Da die Matrizen in $\mathcal{M}$ Blockdiagonalmatrizen sind, sieht man für $A \in \mathcal{M}$:

$$\tau_1(A) = I_{p,q} A I_{p,q} = \left(\begin{smallmatrix} I_p A_1 I_p & 0 \\ 0 & -I_q A_2 (-I_q) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right) = A,$$

das heißt $\mathcal{M} \subseteq \operatorname{Fix}(\tau_1, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$.

Für die andere Inklusion nehmen wir an, es gäbe ein Element $A \in \mathrm{Fix}(\tau_1, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$, welches nicht in der Menge $\mathcal{M}$ liegt. Dann hat diese Matrix einen nichttrivialen Eintrag außerhalb der beiden Diagonalblöcke der Größe $p \times p$ und $q \times q$. Nehmen wir o.B.d.A. an, es wäre $a_{ij} \neq 0$ für $i > p$ und $j < p$. Aus $I_{p,q}A = AI_{p,q}$ folgt dann aber durch leichte Rechnung $-a_{ij} = a_{ij}$, ein Widerspruch zur Annahme, dass $a_{ij} \neq 0$ ist. Also kann so eine Matrix A nicht existieren, womit die Inklusion $\mathrm{Fix}(\tau_1, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{M}$ gezeigt ist.

Die Fixpunktmenge von τ_2 lässt sich direkt berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fix}(\tau_2, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) &= \{x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : I_{p,q}(A'A'^t)\theta(x)(A'A'^t)^{-1}I_{p,q} = x\} \\
&= \{x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : I_{p,q}(A'A'^t)x^t(A'^t)^{-1}A'^{-1}I_{p,q}x = I_n\} \\
&= \{x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : A'^t x^t (A'^t)^{-1} I_{p,q} A'^{-1} x A' = I_{p,q}\} \\
&= \{x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : (A'^{-1}xA')^t I_{p,q}(A'^{-1}xA') = I_{p,q}\} \\
&= \{x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : A'^{-1}xA' \in \mathrm{SO}(p,q)\} = A'\,\mathrm{SO}(p,q)A'^{-1}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir mehrfach verwendet, dass A' bzw. A'^{-1} mit $I_{p,q}$ vertauschen. □

Als nächsten Schritt interessieren wir uns für die Fixpunktmengen von τ_1 und τ_2 im der maximal kompakten Untergruppe $A'\,\mathrm{SO}(n)A'^{-1}$ von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Dazu müssen wir uns zunächst überlegen, dass die Abbildungen sich auf diese Gruppe einschränken lassen.

Lemma 3.17. *Es sei $K := A'\,\mathrm{SO}(n)A'^{-1}$. Dann gilt $\tau_1(K) = K = \tau_2(K)$.*

Beweis. Es sei $x \in K$, d.h. $(A'^{-1}xA')^t = A'^{-1}x^{-1}A'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(A'^{-1}\tau_1(x)A')^t &= (A'^{-1}I_{p,q}xI_{p,q}A')^t = I_{p,q}(A'^{-1}xA')^t I_{p,q} \\
&= I_{p,q}A'^{-1}x^{-1}A'I_{p,q} = A'^{-1}\tau_1(x)^{-1}A',
\end{aligned}$$

also ist auch $\tau_1(x) \in K$. Daraus folgt direkt, dass auch $\tau_2(x) \in K$ ist, denn es gilt $\tau_2(x) = \tau_1(\mathrm{Int}(A'A'^t)(\theta(x))) = \tau_1(x) \in K$, da $\mathrm{Int}(A'A'^t) \circ \theta$ auf K die identische Abbildung ist. □

Es sei nun

$$\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) := \{M = (M_1, M_2) \in \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) : \det(M_1)\det(M_2) = 1\}.$$

Damit können wir die Fixpunkte von τ_1 und τ_2 in K angeben:

Proposition 3.18. *Es ist*

$$\mathrm{Fix}(\tau_1, K) \cong A' \,\mathrm{SO}(n) A'^{-1} \cap A' \,\mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})) A'^{-1} \cong A' \,\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) A'^{-1}$$

und

$$\mathrm{Fix}(\tau_2, K) \cong A' \,\mathrm{SO}(n) A'^{-1} \cap A' \,\mathrm{SO}(p,q) A'^{-1} \cong A' \,\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) A'^{-1}.$$

Beweis. Wir halten zunächst fest, dass

$$A' \,\mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})) A'^{-1} = S(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}))$$

gilt. Nun folgt die Aussage der Proposition direkt aus der Tatsache, dass $\mathrm{Fix}(\tau_i, K) = \mathrm{Fix}(\tau_i, G) \cap K$ ist, und aus der Berechnung der Fixpunkte in Satz 3.16. □

Wir betrachten nun wieder unsere in den ersten Kapiteln konstruierte, kokompakte arithmetische Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Diese Gruppe ist torsionsfrei und diskret in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, daher ist X/Γ ein lokalsymmetrischer Raum. Da Γ kokompakt ist, ist X/Γ sogar kompakt.

Für die beiden oben betrachteten Abbildungen sind $H_i := \mathrm{Fix}(\tau_i, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$ für $i = 1,2$ reduktive Untergruppen der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Diese Untergruppen kommen nach den Überlegungen im vorigen Abschnitt von den Untergruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ der algebraischen Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$. Wir konstruieren nun die zu diesen Untergruppen gehörenden geometrischen Zykel. Maximal kompakte Untergruppen K_{H_i} von H_i sind in diesem Fall die in Proposition 3.18 berechneten Gruppen. Damit ergibt sich dann für die symmetrischen Räume $X_{H_i} = K_{H_i} \backslash H_i$:

Satz 3.19. *Es gilt*

$$X_{H_1} \cong \mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) \backslash \mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}))$$

und

$$X_{H_2} \cong \mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) \backslash \mathrm{SO}(p,q).$$

Dabei ist X_{H_1} eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n^2+n-2(pq+1)}{2}$ und X_{H_2} hat die Dimension pq.

Beweis. Die Darstellungen der symmetrischen Räume folgen direkt aus Satz 3.16 und Proposition 3.18. Die Dimensionen berechnen wir mit der Formel aus Satz 3.3.

Dabei benutzen wir, dass $\dim \mathrm{S}(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q)) = \frac{p^2-p}{2}+\frac{q^2-q}{2}$ und $\dim \mathrm{SO}(p,q) = \frac{n^2-n}{2}$ gilt. □

Bemerkung. Da die oben gewählte maximal kompakte Untergruppe K von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ invariant unter τ_1 und τ_2 ist, sind diese Abbildungen auch auf dem symmetrischen Raum X wohldefiniert. Die Fixpunktmengen $\mathrm{Fix}(X,\tau_1)$ und $\mathrm{Fix}(X,\tau_2)$ stimmen dann mit den symmetrischen Räumen X_{H_1} und X_{H_2} überein (siehe z.B. [15, Lemma 1.4] und [8, Lemma 3.20]).

Nun können wir alles in einem abschließenden Resultat zusammenfassen:

Theorem 3.20. *Sei $D := Q(\beta,\gamma|E)$ für $\beta,\gamma \in F$ eine Quaternionenalgebra über E, die Divisionsalgebra ist und über $\mathbb{R}$ zerfällt. Auf D betrachten wir die Standard-Involution zweiter Art τ und die Reversion τ_r. Es sei h eine nicht-ausgeartete Form auf D^m, die bzgl. τ und τ_r hermitesch ist und $H = \mathrm{diag}(h_1,\ldots,h_m)$ sei eine Diagonaldarstellung von h.*

Gilt nun $\sum_{i=1}^m \varepsilon_{\beta,\gamma}(h_l^{-1}) = n$ und $\sum_{i=1}^m \delta_{\sigma_i(\beta),\sigma_i(\gamma)}((h_l^{\sigma_i})^{-1}) = n$ für $1 \leq l \leq m$ und $i = 2,\ldots r$, so wird jede torsionsfreie arithmetische Untergruppe von $\mathrm{SU}_m(h,D,\tau)$ zu einer diskreten, kokompakten arithmetisch definierten Untergruppe von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Darüber hinaus gibt es zwei Familien von kompakten geometrischen Zykeln

$$C_{p,q} := \mathrm{S}(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q))\backslash \mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})\times\mathrm{GL}_q(\mathbb{R}))/(\Gamma\cap \mathrm{S}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})\times\mathrm{GL}_q(\mathbb{R})))$$

und

$$C'_{p,q} := \mathrm{S}(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q))\backslash \mathrm{SO}(p,q)/(\Gamma\cap\mathrm{SO}(p,q))$$

für gerade $p,q\in\mathbb{N}$ mit $p+q=n$. Diese kann man als Teilmannigfaltigkeiten des lokalsymmetrischen Raumes $(A'\,\mathrm{SO}(n)A'^{-1})\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\Gamma$ auffassen.

Es gilt $\dim(C_{p,q}) = \frac{n^2+n-2(pq+1)}{2}$ und $\dim(C'_{p,q}) = pq$, die geometrischen Zykel sind also Teilmannigfaltigkeiten komplementärer Dimension.

Beweis. Wir haben alle Aussagen bis auf die letzten beiden bereits gezeigt. Dass man die hier konstruierten lokalsymmetrischen Räume als Teilmannigfaltigkeiten von X/Γ auffassen kann, folgt aus [17, 6.4, S.29].

Berechnen wir also $\dim(C'_{p,q}) + \dim(C_{p,q})$:

$$pq + \frac{n^2+n-2(pq+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - pq - 1 + pq = \frac{n(n+1)}{2} - 1,$$

was nach Beispiel 3.4 gerade mit der Dimension von X/Γ übereinstimmt. □

Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit gesehen, wie man, ausgehend von einer gewissen algebraischen Gruppe G, kokompakte arithmetisch definierte Untergruppen $\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ konstruieren kann. Bezeichnet X den zur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ gehörigen symmetrischen Raum, so haben wir außerdem zwei Familien von kompakten Teilmannigfaltigkeiten des lokalsymmetrischen Raumes X/Γ konstruiert, die von Abbildungen auf G induziert werden. Es ist nun zu untersuchen, inwieweit diese sogenannten geometrischen Zykel mit Hilfe der Methoden aus [17, 9.3] einen nichttrivialen Beitrag zur (Ko-)homologie von X/Γ liefern.

Wir gehen hier noch kurz darauf ein, an welchen Stellen sich diese Arbeit verallgemeinern lässt. Zunächst ist anzumerken, dass wir uns an mehreren wichtigen Stellen auf den Fall von Quaternionenalgebren eingeschränkt haben. Dies war notwendig, da wir mit konkreten Zerfällungen und für diese Algebren spezifischen Abbildungen, wie der Reversion τ_r, gearbeitet haben. Es stellt sich nun die Frage, inwieweit sich die Vorgehensweise von Abschnitt 2.1.3 und Kapitel 3 für beliebige Divisionsalgebren D, die über $\mathbb{R}$ zerfallen, verallgemeinern lässt. Eine Bedingung, die man dafür sicherlich an D stellen muss, ist die Existenz einer Involution erster Art von orthogonalem Typ, die dann an Stelle von τ_r verwendet werden kann.

Algebraische Gruppen werden in dieser Arbeit als Varietäten mit Gruppenstruktur verstanden. Dadurch werden einige Beweise und Konstruktionen sehr mühsam und technisch. Dies könnte durch die Interpretation von algebraischen Gruppen als Funktoren oder durch Verwendung von Gruppenschemata vereinfacht und abstrahiert werden. Dabei geht es sowohl um die Berechnung der reellen Punkte in Abschnitt 1.20 als auch um die Restriktion der Skalare und die Bestimmung der in diesem Zusammenhang auftretenden Faktoren in Abschnitt 2.1.1. Wir haben uns entschlossen, hier den klassischen Ansatz zu verwenden, um nicht tiefer in die Theorie algebraischer Gruppen einsteigen zu müssen. Um die Ergebnisse jedoch leicht auf andere, ähnliche Fälle zu übertragen, ist es sicher sinnvoll einen abstrakteren Zugang mittels Gruppenschemata zu wählen.

Anhang A

Existenz einer Quaternionenalgebra

Wir sind in Abschnitt 2.3.2 von einer Quaternionenalgebra $Q(-1, b|E)$ ausgegangen, die Divisionsalgebra ist und über $\mathbb{R}$ zerfällt. Zusätzlich haben wir dort noch die Bedingung $\sigma_i(b) < 0$ für alle $i = 2, \ldots, d$ gefordert. Wir wollen uns hier überlegen, dass es so eine Quaternionenalgebra, zumindest für gewisse Körper E, überhaupt gibt. Dafür betrachten wir den speziellen Fall $F := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $E := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$. Den nichttrivialen Galoisautomorphismus von F über $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir mit σ.

Wir wollen hier zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Quaternionenalgebren anführen.

Lemma A.1. *Für $a, b, \lambda, \mu \in k^\times$ gilt $Q(a, b, |k) \cong Q(\lambda^2 a, \mu^2 b|k)$.*

Beweis. Siehe [12, Lemma 2.1.2]. □

Um festzustellen, ob eine Quaternionenalgebra zerfällt oder Divisionsalgebra ist, gibt es ein nützliches Kriterium, das man z.B. in [12, Thm. 2.3.1] findet:

Satz A.2. *Es sei $Q := Q(a, b|k)$ eine Quaternionenalgebra über einem Körper k mit $a, b \in k^\times$. Dann sind äquivalent:*

- *Q ist keine Divisionsalgebra*
- *$Q \cong M_2(k)$, d.h. Q zerfällt über k*
- *Die Gleichung $ax^2 + by^2 = 1$ hat eine Lösung in k.*

Nun können wir uns schon überlegen, dass die Quaternionenalgebra $Q(-1, b|\mathbb{R})$ für $b > 0$ keine Divisionsalgebra ist: Es ist $b = (\sqrt{b})^2$ ein Quadrat in $\mathbb{R}$ und somit gilt nach obigem Lemma $Q(-1, b|\mathbb{R}) \cong Q(-1, 1|\mathbb{R})$. Letzteres ist aber nach Satz A.2 keine Divisionsalgebra, da $(x, y) = (0, 1)$ eine Lösung für $-x^2 + y^2 = 1$ darstellt. In anderen Worten: Die Quaternionenalgebra $Q(-1, b|E)$ zerfällt über $\mathbb{R}$, sofern $b > 0$ gewählt wurde.

Wir müssen also nur noch untersuchen, wie b gewählt werden muss, damit die Algebra $Q(-1, b|E)$ nicht schon über E selbst zerfällt. Dazu benutzen wir wieder Satz A.2. Es ist zu zeigen, dass es ein $b > 0$ in E gibt, so dass $-x^2 + by^2 = 1$ keine Lösung in E hat. Nach Lemma A.1 und da $E = \mathrm{Quot}(O_E)$ gilt, reicht es sogar, b im Ring der ganzen Zahlen O_E zu wählen.

Die Gleichung $-x^2+by^2 = 1$ hat genau dann eine Lösung in E, wenn die Gleichung

$$-x^2 + by^2 = z^2 \tag{A.1}$$

eine nichttriviale Lösung in O_E hat. Dies ist leicht einzusehen, denn jede solche Lösung $(x, y, z) \in O_E^3$ von (A.1) liefert eine Lösung $(x/z, y/z) \in E^2$ der ursprünglichen Gleichung und umgekehrt. Wir können uns also darauf beschränken, zu zeigen, dass (A.1) keine nichttriviale Lösung in O_E hat. Dafür genügt es aber ein Hauptideal $I \subset O_E$ zu finden, so dass $-x^2 + by^2 = z^2$ keine nichttriviale Lösung in O_E/I hat. Dies liegt daran, dass jede nichttriviale Lösung von (A.1) - notfalls durch Kürzen des Erzeugers von I - eine nichttriviale Lösung in O_E/I dieser Gleichung liefert. Umgekehrt kann es also so eine Lösung in O_E nicht geben, wenn bereits in O_E/I keine existiert.

Um so ein Ideal zu konstruieren wählen wir zunächst eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $p \equiv 3 \mod 4$ und setzen $b := (1 + \sqrt{3})p$. Außerdem gehen wir davon aus, dass es in der Primidealzerlegung von pO_E ein Primideal $\mathfrak{p}$ gibt, welches Trägheitsindex 1 hat, d.h. $O_E/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_p$. Nun setzen wir $I = \mathfrak{p}$. Da b in pO_E und daher auch in $\mathfrak{p}$ liegt, vereinfacht sich die Gleichung (A.1) modulo dem Ideal I zur Gleichung $-x^2 = z^2$, was über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ gleichbedeutend mit $x^2 \equiv -1 \mod p$ ist. Es ist aber wohlbekannt, dass diese Gleichung unter der Voraussetzung $p \equiv 3 \mod 4$ keine Lösung hat (siehe z.B. [3, Cor. 9.2, S.177]). Also hat auch die Gleichung (A.1) keine Lösung in O_E und $Q(-1, b)|E$ ist Divisionsalgebra. Wegen der speziellen Wahl von b gilt außerdem $\sigma(b) = (1 - \sqrt{3})p < 0$.

Wir können diese Beobachtungen in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz A.3. *Es sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, die $p \equiv 3 \mod 4$ erfüllt. Darüber hinaus existiere in der Primidealzerlegung von pO_E ein Primideal mit Trägheitsindex 1. Es sei $b := (1 + \sqrt{3})p$. Dann ist die Quaternionenalgebra $Q(-1, b|E)$ Divisionsalgebra und zerfällt über $\mathbb{R}$. Außerdem hat b die Eigenschaft $\sigma(b) < 0$.*

Es bleibt nun die Existenz einer Primzahl p mit obigen Eigenschaften zu zeigen. Ein allgemeines Kriterium anzugeben würde zu tief in die Zahlentheorie führen. Man sieht aber leicht, dass für unsere Wahl von F und E die Zahl $p = 3$ die geforderten Eigenschaften hat. In O_E gilt $3 = (\sqrt[4]{3})^4$ und daher auch $3O_E = (\sqrt[4]{3}O_E)^4$. Setzt man $\mathfrak{p} = \sqrt[4]{3}O_E$ so ist dies ein Primideal mit Verzweigungsindex 4 und Trägheitsindex 1, da $[E : \mathbb{Q}] = 4$ gilt.

Bemerkung. Die Überlegungen in diesem Abschnitt lassen sich verallgemeinern: Ist $q \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit $q \equiv 3 \mod 4$, so können wir die Körpererweiterungen $F' := \mathbb{Q}(\sqrt{q})$ und $E' := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{q})$ betrachten. Dann gilt die Aussage von Satz A.3 für F', E' und $p = q$.

Anhang B

$\mathrm{SL}_m(D)$ als algebraische Gruppe

Wir skizzieren hier den noch fehlenden Schritt im Beweis von Satz 1.20. Dafür sei wieder F ein total reeller algebraischer Zahlkörper, E eine reelle quadratische Erweiterung von F und D eine Divisionsalgebra über E, die über $\mathbb{R}$ zerfällt. Wir bezeichnen mit $\iota : E \to E$ den nichttrivialen Galoisautomorphismus von E über F und mit $\tau : D \to D$ eine Involution zweiter Art auf D.

Betrachten wir die Gruppe $\mathrm{SL}_m(D)$, die durch die Gleichung $\mathrm{Nrd}_{M_m(D)/E}(x) = 1$ definiert ist. Aus Satz 1.17 (3) und Überlegungen wie in Abschnitt 1.4.2 folgt, dass es eine über E definierte algebraische Gruppe $G = \mathbf{SL_m}(D)$ gibt, deren Gruppe der E-rationale Punkte mit der $\mathrm{SL}_m(D)$ identifiziert werden kann. Mit Hilfe einer allgemeinen Version der Restriktion der Skalare ([16, S. 30], vgl. Satz 1.23) finden wir dann eine über F definierte Gruppe $G' := \mathrm{Res}_{E/F}\, G$, für die $G'(F) \cong G(E)$ gilt. Außerdem wissen wir, dass die Gruppe der reellen Punkte von G' von der Form $G'(\mathbb{R}) \cong G(\mathbb{R}) \times G^\iota(\mathbb{R})$ ist.

Satz B.1. *Ist d der Grad von D über E und G' die soeben konstruierte Gruppe, so gilt für die Gruppe der reellen Punkte von G':*

$$G'(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}_{dm}(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_{dm}(\mathbb{R}).$$

Beweis. Betrachten wir zunächst den ersten Faktor von $G'(\mathbb{R})$. Mit einer ähnlichen Argumentation wie im Beweis von Satz 1.20 sieht man, dass sich $G(\mathbb{R})$ mit der Menge $\{x \in M_m(D) \otimes_E \mathbb{R} : \mathrm{Nrd}_{M_m(D)\otimes_E\mathbb{R}/\mathbb{R}}(x) = 1\}$ identifizieren lässt. Da D über $\mathbb{R}$ zerfällt, gilt $M_m(D) \otimes_E \mathbb{R} \cong M_{dm}(\mathbb{R})$ und obige Menge wird zu

$$\{A \in M_{dm}(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} = \mathrm{SL}_{dm}(\mathbb{R}).$$

Für den zweiten Faktor betrachten wir D als Ring mit der Skalarmultiplikation

$$E \times D \to D, \quad (\lambda, x) \mapsto \iota(\lambda)x.$$

Die dadurch festgelegte E-Algebra bezeichnen wir mit D^ι.

Genau wie in Abschnitt 2.1.1 sieht man leicht ein, dass G^ι mit der Gruppe $\mathbf{SL_m}(D^\iota)$ übereinstimmt. Die reellen Punkte dieser Gruppe hängen nur noch vom Zerfällungsverhalten von D^ι ab. Die Involution τ zweiter Art auf D liefert einen E-linearen Automorphismus von D nach $D^{\iota op}$, also zerfällt $D^{\iota op}$ über $\mathbb{R}$, d.h. $[D^{\iota op}]$ liegt im Kern der Restriktionsabbildung der Brauergruppen $r_{\mathbb{R}/E} : \mathrm{Br}(E) \to \mathrm{Br}(\mathbb{R})$. Damit liegt aber auch $[D^{\iota op}]^{-1} = [D^\iota]$ im Kern von $r_{\mathbb{R}/E}$, D^ι zerfällt also über $\mathbb{R}$. Wie oben folgt daraus

$$G^\iota(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}_{dm}(\mathbb{R}). \qquad \square$$

Wir haben nun gesehen, auf welche Weise man die Gruppe $\mathrm{SL}_m(D)$ als algebraische Gruppe G' über F auffassen kann und wie deren reelle Punkte aussehen. Dabei folgt aus der Gleichung $\mathrm{Nrd}_{M_m(D)/E} = 1$ die Tatsache, dass für beiden Faktoren von $G'(\mathbb{R})$ die Bedingung $\det(A) = 1$ gilt.

Nach [16, Lemma 4.4.2] stimmt aber die hier konstruierte Gruppe G' gerade mit der durch die Gleichungen (1.4) und (1.5) aus Abschnitt 1.4.2 über F definierten algebraischen Gruppe überein. In Abschnitt 1.4.2 betrachten wir diese Gruppe mit der zusätzlichen Gleichung (1.6). Also müssen auch in diesem Fall beide Faktoren der Gruppe der reellen Punkte Untergruppen der $\mathrm{SL}_{dm}(\mathbb{R})$ sein.

Anhang C

Zusammenfassung

Diese Arbeit lässt sich in zwei Teile unterteilen. Im ersten Teil, der aus den Kapiteln 1 und 2 besteht, geht es um die Konstruktion kokompakter, diskreter Untergruppen $\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, die in gewissem Sinne arithmetisch definiert sind. Im zweiten Teil werden in dem zu einer solchen Gruppe Γ assoziierten lokalsymmetrischen Raum $K \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\Gamma$ [1] spezielle Teilmannigfaltigkeiten konstruiert, die man *geometrische Zykel* nennt.

In Kapitel 1 werden die nötigen Grundlagen über Involutionen, hermitesche Formen und algebraische Gruppen zusammengefasst. Dabei beschäftigen wir uns überwiegend mit der Gruppe $G := \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ für eine zentrale Divisionsalgebra D über einer quadratischen Erweiterung E eines total reellen Zahlkörpers F. Außerdem bezeichnet τ eine Involution zweiter Art auf D und h eine τ-hermitesche Form auf D^m. Auf dieser Gruppe basieren alle unsere weiteren Konstruktionen. In Abschnitt 1.4 zeigen wir, dass G als Gruppe der F-rationalen Punkte einer algebraischen Gruppe über F aufgefasst werden kann und bestimmen die Gruppe der reellen Punkten von G (Satz 1.20). Im letzten Teil des Kapitels wiederholen wir die *Restriktion der Skalare* für algebraische Gruppen über Zahlkörpern (Satz 1.23) und beschäftigen uns mit einem Kompaktheitskriterium für Quotienten von Lie Gruppen (Abschnitt 1.6).

Kapitel 2 behandelt die Konstruktion von kokompakten arithmetisch definierten Untergruppen der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ im Detail. Dabei gehen wir von der in Kapitel 1 beschriebenen Situation aus, nehmen aber an, dass E eine reelle quadratische Erweiterung ist und D über $\mathbb{R}$ zerfällt. Durch Anwenden der Restriktion der Skalare erhalten wir eine Gruppe $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\, G$, die über $\mathbb{Q}$ definiert ist und deren reelle Punkte von der Form $(\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\, G)(\mathbb{R}) \cong \prod_{v \in V_\infty} G_v$ sind. Dabei bezeichnet V_∞ die Menge der archi-

[1] hier bezeichnet K eine maximal kompakte Untergruppe der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

medischen Stellen von F, jeder solchen Stelle kann man eine reelle Lie Gruppe G_v zuordnen.

In Kapitel 2 geht es hauptsächlich darum, diese einzelnen Faktoren G_v zu bestimmen und zu verstehen, unter welchen Bedingungen alle Faktoren bis auf einen kompakt sind. Dabei spielt die Wahl der Körpererweiterung E und der hermiteschen Form h eine Rolle. Um ein genaues Kriterium für die Kompaktheit angeben zu können, schränken wir uns hier auf den Fall einer Quaternionen-Divisionsalgebra über E ein, die über $\mathbb{R}$ zerfällt.

Den entscheidenden Schritt in der Konstruktion liefert dann Satz 2.14. Dieser sagt aus, dass unter den im vorangegangenen Abschnitt gefundenen Bedingungen und der Annahme, dass $F \neq \mathbb{Q}$ ist, jede torsionsfreie arithmetische Untergruppe $\Gamma \subset G$, als Untergruppe der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ aufgefasst, diskret und kokompakt ist. Eine solche Untergruppe nennen wir auch *arithmetisch definiert* in der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Das Kapitel schließt mit zwei konkreten Beispielen für die beschriebene Konstruktion.

Im dritten Kapitel wiederholen wir zunächst das Konzept symmetrischer und lokalsymmetrischer Räume. Danach betrachten wir wieder die im ersten Teil eingeführte Gruppe $G = \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ für den Fall einer Quaternionenalgebra D und definieren zwei Gruppenhomomorphismen auf G. Wir interessieren uns für die dadurch auf der $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ induzierten Abbildungen und deren Fixpunktuntergruppen. Da einer der Homomorphismen mit der Reversion τ_r auf D in Zusammenhang steht, ist es hilfreich, die Gruppe $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r)$ und deren reelle Punkte zu studieren.

Abschließend wird gezeigt, dass die auf G definierten Abbildungen unter bestimmten Bedingungen zwei Familien von geometrischen Zykeln im lokalsymmetrischen Raum $K \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\Gamma$ induzieren. Diese sind kompakt und haben komplementäre Dimension (Theorem 3.20).

Anhang D

Abstract

This thesis comprises two parts. The first part, consisting of chapters 1 and 2, deals with the construction of discrete cocompact subgroups $\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ that are, in a sense, arithmetically defined. To such a group one can associate a locally symmetric space $K\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\Gamma$[1]. In the second part, certain submanifolds of this space – so-called *geometric cycles* – are constructed.

In chapter 1 some basic facts on involutions, hermitian forms and algebraic groups are recalled. We focus on the group $G := \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$, where D denotes a central division algebra over a quadratic field extension E of a totally real algebraic number field F. Furthermore, τ denotes an involution of the second kind of D and h is a τ-hermitian form on D^m. All further considerations will be based on this group. In section 1.4, we show that G can be interpreted as group of F-rational points of an algbraic group defined over F and determine the group of real points of G (theorem 1.20). Then we recall the *restriction of scalars* for algebraic groups defined over number fields (theorem 1.23) and discuss a compactness criterion for quotients of Lie groups (section 1.6).

Chapter 2 deals with the construction of cocompact arithmetically defined subgroups of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ in detail. We use the group G described in chapter 1 but assume that E is a real quadratic extension and D splits over $\mathbb{R}$. By restriction of scalars we obtain a group $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\, G$ which is defined over $\mathbb{Q}$ and whose real points are of the form $(\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\, G)(\mathbb{R}) \cong \prod_{v \in V_\infty} G_v$. Here, V_∞ denotes the set of archimedian places of F and G_v the real Lie group coming from G associated to the place v.

The main focus of chapter 2 is to determine the factors G_v and to understand under what conditions all but one are compact. Here, the choice of the extension E and of the hermitian form h are important. To be able to give an exact criterion for

[1] where K denotes a maximal compact subgroup of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

compactness we have to restrict ourselves to a quaternion division algebra over E that splits over $\mathbb{R}$.

The key point of the construction is given by theorem 2.14. This theorem states that under those conditions and the assumption that $F \neq \mathbb{Q}$ any torsion free arithmetic subgroup $\Gamma \subset G$ can be considered as a cocompact and discrete subgroup of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Such a subgroup is called *arithmetically defined* in $SL_n(\mathbb{R})$. The chapter concludes by illustrating the construction with two examples.

In the third chapter, we first recall the concept of symmetric and locally symmetric spaces. Then we reconsider the group $G = \mathrm{SU}_m(h, D, \tau)$ for a quaternion algebra D and define two group homomorphisms on G. We are interested in the induced maps on $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ and their fixed subgroups. Since one of the homomorphisms is related to the reversion τ_r on D, it is helpful to study the group $\mathrm{SU}_m(h, D, \tau_r)$ and its real points.

Finally, it is shown that under certain conditions the maps on G induce two families of geometric cycles in the locally symmetric space $K\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\Gamma$. These submanifolds are compact and of complementary dimension (Theorem 3.20).

Literaturverzeichnis

[1] Borel, Armand: *Introduction aux groupes arithmétiques.* Paris: Hermann, 1969.

[2] Bourbaki, Nicolas: *Eléments de Mathematique, Algèbre, Chapitre 8.* Actualités scientifiques et industrielles. 1261. Paris: Hermann, 1958.

[3] Burton, David M.: *Elementary number theory. 6th Ed. International Edition.* International Series in Pure and Applied Mathematics. New York, NY: McGraw-Hill, 2007.

[4] Draxl, Peter K.: *Skew fields.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 81. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1983.

[5] Helgason, Sigurdur: *Differential geometry and symmetric spaces.* Pure and Applied Mathematics, 12. New York-London: Academic Press, 1962.

[6] Jacobson, Nathan: *Lectures in abstract algebra. II: Linear algebra. 2nd ed.* Graduate Texts in Mathematics. 31. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag, 1975.

[7] Jantzen, Jens C. ; Schwermer, Joachim: *Algebra.* Berlin: Springer, 2006.

[8] Kionke, Steffen: *Zur Arithmetik und Geometrie der SL_2 über Quaternionenalgebren.* Universität Wien, Masterarbeit, 2010.

[9] Knapp, Anthony W.: *Lie groups beyond an introduction. 2nd ed.* Progress in Mathematics (Boston, Mass.) 140. Boston, MA: Birkhäuser, 2002.

[10] Knus, Max-Albert ; Merkurjev, Alexander ; Rost, Markus ; Tignol, Jean-Pierre: *The book of involutions.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1998.

[11] Lee, John M.: *Introduction to smooth manifolds.* Graduate Texts in Mathematics. 218. New York, NY: Springer, 2003.

[12] Maclachlan, Colin ; Reid, Alan W.: *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds.* Graduate Texts in Mathematics. 219. New York, NY: Springer, 2003.

[13] Platonov, Vladimir ; Rapinchuk, Andrei: *Algebraic groups and number theory.* Pure and Applied Mathematics, 139. Boston, MA: Academic Press, 1994.

[14] Raghunathan, Madabusi S.: *Discrete subgroups of Lie groups.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 68. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972.

[15] Rohlfs, Jürgen: The Lefschetz number of an involution on the space of classes of positive definite quadratic forms. In: *Comment. Math. Helv.* 56 (1981), S. 272–296.

[16] Scheiderer, Claus: *Real and étale cohomology.* Lecture Notes in Mathematics. 1588. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[17] Schwermer, Joachim: Geometric cycles, arithmetic groups and their cohomology. In: *Bulletin of the AMS* **47**(2) (2010), S. 187–279.

[18] Swinnerton-Dyer, Henry P. F.: *A brief guide to algebraic number theory.* London Mathematical Society Student Texts. 50. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[19] Weil, André: *Adeles and algebraic groups.* Progress in Mathematics, Vol. 23. Boston - Basel - Stuttgart: Birkhäuser, 1982.

[20] Witte-Morris, Dave: *Introduction to Arithmetic Groups*. `http://people.uleth.ca/~dave.morris/`. Version: 2008.

[21] Zimmer, Robert J.: *Ergodic theory and semisimple groups.* Monographs in Mathematics, Vol. 81. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 1984.

Lebenslauf des Autors

Susanne Schimpf B.Sc.

Geburtsdatum:	31.03.1986
Geburtsort:	Göttingen
Staatsbürgerschaft:	deutsch
eMail-Adresse:	`sus.schimpf@gmx.de`

Bildungsweg

seit 10/2008	**Universität Wien**
	Masterstudium der Mathematik mit Vertiefung in Algebra und Zahlentheorie
08/2006 – 9/2007	**Nanyang Technological University, Singapur**
	Auslandsaufenthalt und Studium in Singapur
10/2004 – 7/2008	**Technische Universität Darmstadt**
	Bachelorstudium im Studiengang *Mathematics with Computer Science*
	Bachelorarbeit: *Homology of the complex of non-degenerate subspaces of unitary space*
	Betreuer: PD. dr. Ralf Gramlich
9/1998 – 6/2004	**Theodor-Heuss-Gymnasium, Göttingen**
	Abitur mit den Leistungskursen Mathematik und Chemie