universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Spezifische Methoden für historische Aspekte im Mathematikunterricht
Mögliche Ziele und Beispiele

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin / Verfasser:	Florian Mayer
Matrikel-Nummer:	0009630
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	190 406 412
Betreuerin / Betreuer:	Dr. Johann Humenberger

Wien, am

Vorwort

Wer nicht von dreitausend Jahren
Sich weiß Rechenschaft zu geben,
Bleib im Dunkeln unerfahren,
Mag von Tag zu Tage leben.

Johann Wolfgang Goethe

Die vorliegende Diplomarbeit „Spezifische Aspekte für historische Methoden im Mathematikunterricht“ ist im Zeitraum vom Herbst 2008 bis zum Frühjahr 2011 entstanden. Wie so oft, macht ein Werk, das über so viele Wochen und Monate manchmal in größeren Schüben, manchmal in ganz kleinen Schritten verfasst wird, zahlreiche Änderungen, Umstrukturierungen und Neufassungen an unterschiedlichen Stellen durch. Umso mehr freut es mich, dass die nun fertige Fassung ihre Intention behalten hat und insgesamt die Anforderungen, die ich an mich selbst zu Beginn gestellt hatte, erfüllt.
Durch den Besuch der Vorlesung „Geschichte der Mathematik“ von Gerhard Kowol, die ich an der Universität Wien in den Wintersemestern 2005 und 2008 besuchte, wurde ich zum ersten Mal auf die Dimension des Themenkreises der Geschichte der Mathematik aufmerksam. Besonders fasziniert hat mich, dass in der Betrachtung der Genese der mathematischen Disziplinen auch eine Sichtweise von außen enthalten war. Durch das Zurücktreten und Beschreiben der Leistungen von Mathematikern von damals bis zum heutigen Zeitpunkt traten auch die Leistungen selbst stärker in den Vordergrund; jedoch nicht unbedingt als Formulierung eines Satzes mit anschließendem Beweis, sondern als Bericht mit der Einbettung in ein größeres Bild, das Denkweisen der handelnden Personen und ihre Absichten besser erkennen ließ. Außerdem entdeckte ich einige faszinierende Errungenschaften aus längst vergangener Zeit, die die Fähigkeiten des menschlichen Geistes auf beeindruckende Weise demonstrierten.
Durch die Lektüre von mehreren Büchern zu historischen Themen innerhalb der Mathematik, aber insbesondere durch das Buch *Mathematics In Western Culture* von Morris Kline, begann ich zu verstehen, wie eng die Entwicklungen in der Mathematik auch mit den Entwicklungen unseres Weltbilds, unseres Lebensstandards und unseren allgemeinen Überzeugungen und Anschauungen zusammenhing. Kline berichtet von der „Anstrengung das Fach Mathematik zu vermenschlichen“, die er zeit seines Lebens durch Publikationen zu historischen Themen unternommen habe, und ich wollte ihm ein wenig folgen.
Wenn man an den Mathematikunterricht in den österreichischen Schulen als Gesamtes denkt, muss

man dennoch betonen, dass der historische Aspekt nur einer von mehreren Aspekten ist, die alle auf Augenhöhe nebeneinander stehen. So sind für die Wissenschaft Mathematik etwa die Exaktheit ihrer Formulierungen, die Strenge ihrer Argumentationen, ihre Abstraktionsfähigkeit, aber auch die Vielseitigkeit in der Anwendung auf andere Wissenschaften (und die Technik), die Ästhetik ihrer inneren Struktur und ihre kreative Leistungsfähigkeit ebenso zentrale Merkmale, die der Schulunterricht transportieren sollte. Der historische Aspekt kann nun zeigen, dass die Mathematik von Menschen gemacht ist, durch Menschen vorangetrieben wurde und auf Menschen gewirkt hat. Letzteres zeigt sich in ihrem Einfluss auf die Philosophie, die Literatur, die bildnerischen Künste, die Architektur, die Technik und sogar die Religionen, sodass sofort Verbindungen zu fast allen anderen Schulfächern aufgebaut werden können. Ein Ziel von Bildung im Rahmen einer höheren Schulform ist es ja, den jungen Menschen die Möglichkeit zu geben, ihren Weltaufschluss zu vergrößern, dass sie ihre Wahrnehmungsfähigkeit steigern, ihren Blick schärfen und die Zusammenhänge zwischen sich selbst und der Welt um sie herum auf einer tieferen Ebene begreifen. Weil mir die generelle Bildung der Jugendlichen ein Anliegen ist, halte ich es also als Mathematiklehrer auch für durchaus wichtig, dass sie z. B. ein solides Wissen in den Sprachen, der Wirtschaft, Politik sowie anderen Naturwissenschaften einschließlich der Philosophie erwerben. Von dieser Haltung ausgehend geht es mir also in dieser Arbeit nicht darum, Mathematik als einzig wichtiges Fach zu präsentieren und mit meinem Thema Argumente zu liefern, die es darin unterstützen, sich gegenüber den anderen Fächern zu behaupten. Der Geist, in dem diese Arbeit geschrieben wurde, charakterisiert sich vielmehr in dem Ansinnen mit dem Mathematikunterricht und innerhalb dessen mit historischen Betrachtungen etwas zu dem Gesamtbild eines umfangreichen Weltverständnisses beitragen zu können. Da es ab dem eigentlichen Beginn dieser Abhandlung auf Seite 8 jedoch nur mehr um die Geschichte der Mathematik im Mathematikunterricht gehen wird und dieses Thema natürlich mit einem entsprechenden Detailgrad und einem angemessenen Fokus behandelt werden muss, hoffe ich, dass sich der Leser nach diesem Vorwort doch hin und wieder daran erinnern wird, dass ich den Inhalt der Arbeit zwar als entscheidenden Bestandteil des Unterrichts ansehe, jedoch seine Rolle im Rahmen einer umfassenden Gesamtausbildung mathematischer und allgemeiner Natur zu keinem Zeitpunkt vergessen habe.
Im ersten Teil dieser Schrift gebe ich einen Überblick über den Mathematikunterricht des letzten Jahrtausends, gefolgt von einer Untersuchung des aktuellen Lehrplans zum Thema „Geschichte der Mathematik“. Der zweite Abschnitt ist gewissermaßen das Hauptstück, in dem ich fünf Thesen formuliere, in welcher Weise historische Aspekte den Mathematikunterricht positiv beeinflussen können. Dabei spielen sowohl Merkmale, die die Wissenschaft Mathematik in einem authentischen Bild zeigen, als auch emotionale Überlegungen eine Rolle. Im dritten Teil untersuche ich, in

welcher konkreten Form die historischen Inhalte in den Unterricht integriert werden können und ob sich dadurch Änderungen für den bisherigen Unterricht ergeben. Der vierte und letzte Abschnitt schließlich ist eine Zusammenstellung von insgesamt sieben Arbeitsblättern, in denen die Thesen aus dem zweiten Teil in die Praxis umgesetzt werden. Diese Arbeitsblätter sind dazu gedacht, direkt im Unterricht zur Anwendung zu kommen und werden von mir auch sicherlich einem praktischen Test unterzogen werden.

Mein Dank gilt meinem Diplomarbeitsbeteuer Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger, meinen Eltern, die mein Studium immer bedingungslos unterstützt haben und den Schülerinnen und Schülern der *Schülerhilfe*, einem Nachhilfeinstitut, in dem ich in den letzten neun Jahren tätig war und wo ich viel Erfahrung sammeln und viele neue Erkenntnisse im Bereich des Lehrens und Lernens erwerben durfte.

Florian Mayer, im März 2011

Inhaltsverzeichnis

1. Die Geschichte der Mathematik im Unterricht – von damals bis heute

1.1 Einleitung

Das Bewusstsein für ihre Geschichte war in der Mathematik schon im Altertum praktisch von dem Zeitpunkt, als sich die Mathematik als eigene Disziplin entwickelte, an vorhanden (Phili 2002, S. 229). Es manifestiert sich in den ersten Werken, die versuchen, einen historischen Abriss der bis dahin gewonnenen Erkenntnisse zu geben. So schrieb Eudemos von Rhodos (ca. 370 – ca. 300 v. Chr.) bereits eine *Geschichte der Mathematik* und eine *Geschichte der Geometrie*, die jedoch bis zum heutigen Tage nur in Fragmenten und Zitaten überlebt haben. Andere griechische Autoren der späteren Antike fügten ihren Zusammenfassungen ebenfalls oft historische Kommentare hinzu (Phili 2002, S. 222).

Als man die Zeit des Mittelalters, in der allgemein vergleichsweise wenig Mathematik betrieben worden war, hinter sich gelassen hatte und sich in der Renaissance wieder mit der Kultur des alten Griechenland zu beschäftigen begann, lag ein Ausdruck der historiografischen Aktivität in der (Wieder-)Entdeckung und Übersetzung der alten Schriften. So fand Regiomontanus (1436 – 1476) etwa sechs Bücher von Diophants *Arithmetica* und wollte sie auch selbst übersetzen (Binder 2002, S. 214).

Das erste Buch, das sich ganz allein mit der Geschichte der Mathematik in reichhaltiger und ausführlicher Form befasste, war die *Histoire des mathématiques* von Montucla (Peiffer 2002, S. 3), die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts in mehreren Editionen erschien (Peiffer 2002, S. 9). Von da an nahmen immer mehr Mathematiker in vielen Ländern Studien über die Geschichte ihrer Wissenschaft auf. Eine der bedeutendsten Mathematikhistoriker des 19. Jahrhunderts waren etwa Moritz Cantor (1829 – 1920) oder auch Felix Klein (1849 – 1925), um nur zwei Beispiele aus dem deutschsprachigen Raum zu nennen.

Ab dem frühen 20. Jahrhundert wurden schließlich Forschungen zur Geschichte der Mathematik auch in Lateinamerika, Mexiko, den USA, Japan und China aufgenommen und mit der Entstehung internationaler Organisationen nach dem zweiten Weltkrieg (z. B. der International Commission on the History of Mathematics) und zugehöriger Zeitschriften fand das Thema breite Unterstützung für ein großes Spektrum an Aktivitäten (Dauben et al. 2002, S. 26, 27).

Eine der Besonderheiten der Geschichte der Mathematik im Vergleich zur Geschichte anderer Wissenschaften ist, dass Erkenntnisse, die vor Hunderten von Jahren gewonnen wurden, heute meist noch genauso gültig sind, wie damals. Im 17. Jahrhundert genoss die Mathematik aufgrund dieser Eigenschaft als „Wissenschaft der ewigen Wahrheit“ (Pahl 1913, S. 112) großes Ansehen in allen gebildeten Schichten. Zwar erfahren Begriffe die unterschiedlichsten Wandlungen, Definitionen werden verfeinert oder präzisiert, neue Zusammenhänge gefunden, aber die Richtigkeit eines Beweises etwa ändert sich über die Jahrhunderte nicht. Ein Student, der die *Elemente* des Euklid liest, findet darin auch aus heutiger Sicht einwandfreie mathematische Information, obwohl dieses Werk bereits vor ca. 2300 Jahren verfasst wurde.
Neben unvermeidlichen Irrwegen, Stolpersteinen und Zeiten des langsameren Fortschreitens haben wir es bei der Geschichte der Mathematik also mit einer Entwicklung zu tun, bei der frühere Ergebnisse nicht (unbedingt) korrigiert, sondern ausgebaut, neu gruppiert und weitergeführt werden. Der heutige Wissensstand ist demnach die zur Zeit aktuelle Ebene eines Gerüstes, dessen Fundamente (eben nicht nur aus historischer Sicht) gleichermaßen richtig und wichtig sind, wie dessen Spitze.

Trotz des hohen Bewusstseinsgrades der Mathematiker für die Geschichte ihrer Wissenschaft und ihrer offensichtlichen Bedeutung für die Gegenwart, finden Betrachtungen, wie man die Geschichte der Mathematik in den Unterricht integrieren könnte, erst relativ spät statt. Dies hat natürlich auch mit der verhältnismäßig späten Durchsetzung des Unterrichtsfachs Mathematik im Allgemeinen zu tun.
Im folgenden Abschnitt möchte ich diesen Umstand genauer beleuchten, um am Ende zum heutigen Lehrplan der Mathematik für die AHS zu kommen und die Bedeutung der Geschichte der Mathematik darin zu untersuchen.

1.2 Der Mathematikunterricht des letzten Jahrtausends

Im Mittelalter wurde die Ausbildung der Jugend noch überwiegend von der Familie übernommen. Arbeitsort und Lebensort waren großteils ident und das Lernen erfolgte durch das Zusammensein mit anderen Familienmitgliedern (Ettl 1981, S. 99). Das Lehren von mathematischen Inhalten beschränkte sich auf die Klosterschulen, in denen jedoch auch nur die Ermittlung der beweglichen Kirchentage und einfache Berechnungen zur Organisation und Verwaltung weitergegeben wurden

(Neander 1974, S. 8). Bis zum Ende des 15. Jahrhunderts gab es für die Mehrzahl der Bevölkerung keine brauchbare Verwertung für mathematische Kenntnisse, weshalb solche auch kaum unterrichtet wurden (Peschek 1979, S. 15).
Mit dem Beginn der Neuzeit weitete sich der Handel immer mehr aus, sodass sich mit der Zunahme an Komplexität in der Geldwirtschaft auch die Notwendigkeit steigerte, elementare Rechenfertigkeiten wie Zählen, das Einmaleins, Addition, Subtraktion sowie dort und da Zinsen- und Provisionsrechnung zu beherrschen und damit auch systematisch zu unterrichten (Peschek 1979, S. 15). In einigen Lateinschulen wurde auch die „sphaera“, eine Verbindung von Geometrie und Astronomie, gelehrt. Die allermeisten Schulen kamen aber über Inhalte der Arithmetik nicht hinaus (Pahl 1913, S. 98). Die Vermittlung erfolgte durch so genannte Rechenmeister, wobei Begründungen oder gar wissenschaftliche Überlegungen keine Rolle spielten (Tanzberger 1990, S. 5).

> „Erst wurde eine Erklärung gegeben, was gerechnet werden sollte, dann die spezielle Aufgabe gestellt, darauf folgte die Regel, dann die Ausführung dieser Vorschrift, und endlich wurde das Ergebnis durch die Probe geprüft. Das ganze Lehrverfahren jener Zeit liegt also gleichsam in den Worten Adam Rieses: „Thu ihm also, und kumpt recht.““
> (Pahl 1913, S. 99)

Den letzteren Ausspruch von Adam Ries könnte man in heutiger Formulierung mit „Wende nur die Regeln an, dann wird es schon stimmen“ übersetzen, womit die Verhältnisse der damaligen Zeit sehr gut zusammengefasst werden.
Nachdem Schulbildung zu dieser Zeit von Standes- bzw. Berufsbildung nicht zu trennen war, konnte man die Fähigkeiten und Fertigkeiten, die die Schüler für ihre künftigen Berufe brauchen würden, leicht bestimmen. Deshalb ließen sich die vermittelten Kenntnisse auch gut auf die wirtschaftlichen Bedürfnisse abstimmen (Wonka 1980, S. 36).
In den folgenden 200 Jahren stieg die Bedeutung der Mathematik, die sich von jeher einen Kampf mit den alten Sprachen lieferte und sich oft auch deren Dominanz unterordnen musste, in den Lehrplänen stetig. Neben dem Ziel der Nützlichkeit für den alltäglichen Gebrauch findet sich in den zeitgenössischen Schriften nun auch oft die „Schärfung des Verstandes“ als anzustrebende Entwicklung bei den Lernenden – so etwa bei Murhardt im 17. oder bei Francke im 18. Jahrhundert (nach Kaiser 2006, S. 293, 294). Begründungen und Beweise werden jetzt von den Schülern ausdrücklich verlangt, „damit sie diese im gemeinen Leben so nötige Wissenschaft mit Verstand begreifen, nicht aber, wie vielfältig zu geschehen pflegt, nur ohne Verstand memorieren.“ (aus:

Francke 1721, Die verbesserte Methode des Paedagogii regii zu Gaucha vor Halle, zitiert nach Pahl 1913, S. 179). Was die Themen des Unterrichts betrifft, so gibt es im Vergleich zum 16. Jahrhundert jedoch kaum Änderungen, die Nützlichkeit für den täglichen Gebrauch steht weiterhin im Vordergrund. Auch die Methodik verharrt in den bis dahin üblichen Formen, sodass ein großer Teil des Mathematikunterrichts aus dem Lösen von Aufgaben besteht (Pahl 1913, S. 140 und 142). Dies ist insofern erstaunlich, als die wissenschaftlichen Fortschritte auf dem Gebiet der Mathematik besonders im 17. und 18. Jahrhundert enorm waren. Durch Kriege (allen voran den 30jährigen Krieg) und den damit verbundenen politischen und wirtschaftlichen Problemen gelang der Transfer von mathematischem Wissen in die Schulen aber höchstens lokal und auch dann nur in ganz geringem Ausmaß (Pahl 1913, S. 137/138).

In diesem Zusammenhang darf auch nicht vergessen werden, dass Schulbildung generell nur einem kleinen Anteil der Bevölkerung zugänglich war und es keine übergreifenden Gesetze zur Regelung des Inhalts und der Organisation des Schulbetriebs gab (Tanzberger 1990, S. 5). Gegen Ende des 18. Jahrhunderts erfolgte nach und nach eine Verstaatlichung des Schulsystems, wodurch sich diese Situation langsam besserte (Kaiser 2006, S. 295). In Österreich wurde etwa 1774 eine sechsjährige Schulpflicht vorgeschrieben, die jedoch in der Praxis noch lange nicht eingehalten werden konnte (Tanzberger 1990, S. 31).

Das 19. Jahrhundert erlebte eine Stärkung der Mathematik in den Schulen, die sich anfangs durch die großen Erfolge der militärischen Führung in den napoleonischen Kriegen, deren Offizieren auch eine besonders gute mathematische Ausbildung nachgesagt wurde, begründete. In Preußen erfolgte langsam eine Angleichung der zu dieser Zeit vorherrschenden Schultypen der Gymnasien (ehemals Lateinschulen), die ihre Betonung auf „Allgemeinbildung" legten, und der Realschulen, die sich großteils auf direkt im Alltag anwendbare Kenntnisse beschränkten (Tanzberger 1990, S. 10 und 11). Bezeichnend für diese Gleichstellung ist 1870 die Umbenennung der Realschulen in „Realgymnasien" (Peschek 1979, S. 18). In diesen Schulen wurde der Spagat zwischen allgemeiner, wissenschaftlicher Bildung und der Vermittlung von anwendungsorientierten Kenntnissen versucht, wodurch zahlreiche Probleme, die auf eine „Überbürdung des Unterrichts" zurückzuführen waren, resultierten (Tanzberger 1990, S. 10). Dennoch wurde in Österreich das Gymnasium nach preußischem Vorbild im Jahr 1849 eingeführt und damit das im Wesentlichen bis heute bestehende System der höheren Schulbildung etabliert (Kaiser 2006, S. 297).

Durch die schnellen Weiterentwicklungen in Wissenschaft und Technik wurde um die Jahrhundertwende zum 20. Jahrhundert der Ruf nach Reformen laut. Besonders in den Sparten der Chemie und Elektrotechnik wurden Kenntnisse höherer Mathematik für die angehenden Ingenieure wichtig. Das „Primat der Allgemeinbildung" sollte zurückgedrängt und ein verstärkter Anteil an

Anwendungsorientierung in den Unterricht eingebracht werden (Tanzberger 1990, S. 13). Eine Reformkommission unter der Leitung von Felix Klein arbeitete daraufhin ein Programm aus, das 1905 erschien und als *Meraner Lehrpläne* in die Literatur einging. Dieses Programm fußte auf zwei Säulen, die auf die Fachstruktur der Mathematik zielten: Die geometrischen Themen sollten unter dem Prinzip der Abbildung, die arithmetisch-algebraischen Themen unter dem Prinzip der Funktionen behandelt werden. Nachdem für ersteres Stoffgebiet mit der analytischen Geometrie schon eine Art Abschluss gefunden war, sollte für das zweite Gebiet die Differential- und Integralrechnung in den Schulunterricht eingeführt werden – nicht zuletzt sicherlich auch, um der Nachfrage aus der Ingenieursausbildung zu begegnen (Peschek 1979, S. 18).
Bei Felix Klein begegnet man nun zum ersten Mal auch konkreten Forderungen einer stärkeren Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklungen der Mathematik im Unterricht. In seiner *Vorlesung über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* argumentiert Klein, es müsse

> „ … die historische Entwicklung in den Vordergrund gestellt werden. Denn durch das natürliche Interesse am Werden einer Sache wird der Leser unwillkürlich mitgezogen; daß er dabei den Dingen näher zu kommen glaubt, obwohl er nur ihre äußere Form erfaßt, darin liegt eben jene „pia fraus“*, ohne welche eine populäre Darstellung dieses streng abgeschlossenen Gebietes kaum wird auskommen können.“
> (Klein 1979 (Nachdruck), zitiert nach Behr 1996, S. 31)

Obwohl auf die Pflege der Geschichte allgemein schon in Resolutionen zur Zeit Maria Theresias geachtet wurde (siehe Hochleitner 1986), ist dies eine der ersten Bemerkungen speziell zur Geschichte der Mathematik im *Unterricht*. Klein beschreibt hier die Rolle von historischen Darstellungen als eine Art Hilfe, um den Lernenden die exakte Mathematik leichter näher bringen zu können; als Mittel zum Zweck, um den vermeintlich trockenen Stoff, der aber das eigentliche Ziel des Unterrichts ist, mit mehr Abwechslung zu versehen. Dabei handelt es sich, wie wir später sehen werden, nur um eine von mehreren Möglichkeiten, historische Bezüge im Unterricht zu verwenden.
Auch Lindemann meint etwa zur gleichen Zeit:

---

* pia fraus (lat.): frommer Betrug; Täuschung oder Verheimlichung der Wahrheit in vermeintlich guter Absicht
Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Pia_fraus

> „Die Mathematik ist stets ein großer Faktor im Kulturleben der Menschheit gewesen; als solcher ist sie dem Schüler in historischem Zusammenhange vorzuführen.“
> (Lindemann 1904, zitiert nach Toepell 1996, S. 337)

Die Auswirkungen der Reform, die durch das Meraner Programm eingeläutet wurden, waren weit geringer als man sich erhofft hatte. Bis auf die Einführung der Differential- und Integralrechnung gab es inhaltlich keine Änderungen zu den traditionellen Lehrplänen. Lediglich die Präsentation dieser Inhalte wurde verändert. Die Betonung der Anwendungen konnte in der Praxis ebenfalls kaum umgesetzt werden, da es anfangs an entsprechender Literatur fehlte, auf die sich die Lehrer und Lehrerinnen hätten stützen können, und später (etwa in der Zwischenkriegszeit) bereits wieder vermehrtes reines Rechnen in den Lehrplänen verlangt wurde (Tanzberger 1990, S. 14 und 15). Außerdem hatte der Anwendungsschwerpunkt zur Folge, dass die Anschauung stärker in den Vordergrund trat, wodurch weniger Raum für formal exakte Mathematik blieb. So heißt es etwa in einem österreichischen Gymnasiallehrplan des Jahres 1909:

> „Formgerechte Definitionen mathematischer Begriffe sind auf der Unterstufe durchwegs entbehrlich und auch auf der Mittel- und Oberstufe mit umso größerer Vorsicht einzuführen, je allgemeiner und primitiver die Begriffe sind, […]. Viel sicherer als bloßes Nachsagen fertiger Definitionen läßt der sachgemäße Gebrauch der Kunstausdrücke in mannigfaltigen Anwendungen und Abänderungen erkennen, ob der Schüler Inhalt und Umfang der Begriffe richtig erfasst hat …“
> (nach Kaiser 2006, S. 298)

Das Weglassen von vielen exakten Definitionen und Begriffen kann zu einer Nichtbeachtung oder gar Unkenntnis der Struktur des Faches aus Schülersicht führen und wird von Peschek in Anlehnung an Lenné als „fachstrukturelle Abstinenz“ bezeichnet (Peschek 1979, S. 18). Diese war in späteren Jahren Anlass zu umfassender Kritik. Trotzdem blieben die Meraner Prinzipien die Grundlage der Mathematik-Lehrpläne bis in die 50er und 60er Jahre des vorigen Jahrhunderts, als sich eine neuerliche große Reform ankündigte.
Der Ausgangspunkt war diesmal nicht in wissenschaftlich-technischen, sondern in wirtschaftlich-politischen Entwicklungen zu suchen. Durch den Start des ersten Satelliten in die Erdumlaufbahn (*Sputnik*), der der Sowjetunion 1957 gelang, wurde in den USA das Gewicht der naturwissenschaftlichen Ausbildung in kurzer Zeit stark vergrößert (Kaiser 2006, S. 300). In der Literatur ist dabei oft vom *Sputnik-Schock* die Rede, was zum Ausdruck bringt, dass es sich bei der

Weltraumforschung um ein Prestigegebiet handelte, das man den Russen nicht kampflos überlassen konnte. Zusätzlich kam es allgemein zu einer vermehrten Verwissenschaftlichung des Lebens, mit der gesellschaftliche Veränderungen – insbesondere Wandlungen in den (Produktions-)Bedürfnissen – einher gingen (Peschek 1979, S. 20). Über die OECD (Organisation for Economic Cooperation and Development) kamen die Reformen in den USA auch nach Europa. In einer von dieser Organisation 1964 herausgegebenen Schrift mit dem Titel *Synopsis der Schulmathematik* werden im Vorwort allgemeine Ziele für den Unterricht beschrieben:

> „Bildung wird nicht mehr so sehr begriffen als die Erziehung des Menschen zur Persönlichkeit, sondern Bildung wird neben den herkömmlichen Aufwendungen an Arbeit und Kapital als ein wesentlicher, wenn nicht sogar als der entscheidende Produktionsfaktor (third factor) angesehen, […]. Der Versuch einer neuen Grundlegung des Mathematikunterrichts ist aus der zwingenden Notwendigkeit geboren worden, mehr junge Menschen als bisher – anstatt sie auf der Schule oder Hochschule scheitern zu lassen – an dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften zu interessieren. Die wirtschaftlichen und sozialen Verhältnisse verlangen heute von der Schule weniger die Heranbildung einer geistigen Elite – die gibt es immer – , sondern vielmehr eine Hebung des Bildungsniveaus der breiten Massen, ohne deren Einsicht in das technische, wirtschaftliche und soziale Gefüge der modernen Arbeitswelt eine Steigerung des Sozialprodukts nicht möglich ist.“
> (Synopsis der Schulmathematik 1964, zitiert nach Kaiser 2006)

In der konkreten Umsetzung dieser Ideen stand im Mittelpunkt, den Übertritt von der Schule zur Universität reibungsloser zu gestalten, was dazu führte, dass eine formal strengere Mathematik mit starken strukturellen Komponenten im Schulunterricht Einzug hielt. Inhaltlich bedeutete dies, dass die Mengenlehre von Anfang an eingeführt und dann fortlaufend verfeinert wurde. Ebenso sollten grundlegende Strukturen, also etwa Axiomensysteme, behandelt werden (Peschek 1979, S. 20). Dass allgemeinen, über die Mathematik hinausgehenden Zielsetzungen eine Absage erteilt wurde, erscheint angesichts des symbolischen Ausgangspunkts der Reform (des Sputnikschocks) schon fast grotesk. Man darf allerdings nicht vergessen, dass in den 50er und 60er Jahren der Einfluss des Bourbaki[*]-Kreises noch sehr groß war und gerade von dort viele Anregungen zur strukturellen

---

* Unter dem Pseudonym *Nikolas Bourbaki* schlossen sich in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts zahlreiche vornehmlich französische Mathematiker zusammen, die es sich zur Aufgabe machten, den gesamten Wissensstand der Mathematik in exakt logischem, deduktivem Aufbau zusammen zu schreiben. Die Mitglieder dieser Gruppe variierten über die Jahrzehnte, sodass die Veröffentlichungen der über 40 Bände bis in die 90er Jahre reichten.

Präsentation der Mathematik kamen. Die Form des Mathematikunterrichts änderte sich trotz der großen Bemühungen kaum. „Im Zentrum standen so wie bisher das Lösen von Aufgaben und Rechenbeispielen; der theoretische Aufbau in Gestalt von Definitionen, Sätzen und Beweisen blieb nach wie vor sekundär, und die Beispiele wurden nun eben den neuen Stoffgebieten angepasst." (Kaiser 2006, S. 301).
Umfangreiche Kritik an der Reform ließ nicht lange auf sich warten und kam sowohl von Mathematikdidaktikern als auch von Schüler- und Elternseite. Das Problem der allgemeinen Richtlinien der OECD bestand darin, dass sich daraus für die konkreten Inhalte des Unterrichts praktisch nichts ablesen ließ. Deshalb wurden aus „den neuen Entwicklungen der Fachwissenschaft Reformziele für die Schulmathematik hergeleitet und mit dem Hinweis auf die allgemeine Bedeutung der Mathematik für den Prozeß der gesellschaftlichen Reproduktion [wurde] pauschal bildungspolitisch argumentiert." (Damerow 1977, zitiert nach Tanzberger 1990, S. 27). Im Fokus weiterer Kritik stand die unreflektierte Hinnahme einer gesellschaftlichen Leistungsforderung, die als unveränderbar gegeben anstatt als von Menschen gemacht und damit auch durch sie kontrollierbar dargestellt wurde. Es müssten „die Schüler zu verantwortungsbewußten Mitgestaltern einer Gesellschaft erzogen werden, in der das Wachstum der Wirtschaft zum Wohle aller durch alle gefördert und auch durch alle kontrolliert wird", heißt es 1969 in einer Stellungnahme des Pädagogischen Instituts der Universität Erlangen-Nürnberg. Durch das Gewicht einer internationalen Organisation wie der OECD kam es dennoch auch in Österreich ab 1967 zur Umstellung des Lehrplans im Sinne der oben dargestellten Empfehlungen in Richtung Strukturmathematik. Davon betroffen war zunächst nur die AHS-Oberstufe, in der ersten Hälfte der 70er Jahre jedoch auch die AHS-Unterstufe und die Hauptschulen (Tanzberger 1990, S. 33). Historische Betrachtungen spielten in diesen Lehrplänen kaum eine Rolle – ein Umstand, der sich erst mit den nächsten Reformen, die Mitte der 80er und dann Mitte der 90er Jahre begannen, änderte und schließlich zu dem Lehrplan führten, der heute gültig ist und mit dem ich mich im nächsten Abschnitt genauer beschäftigen werde.

Was frühere Jahrhunderte betrifft, so kann man natürlich nicht mit letzter Gewissheit beschreiben, wie der Mathematikunterricht in der Praxis tatsächlich ausgesehen hat. Man stützt sich hauptsächlich auf die Lehrpläne, die oft starken regionalen Unterschieden ausgesetzt waren, und auf Schulbücher, von denen sich nachweisen lässt, dass sie an bestimmten Schulen Verwendung fanden. Zuweilen haben sich Berichte oder Mitschriften von Schülern erhalten, aus denen man weitere Erkenntnisse gewinnen kann. Erst seit dem vorigen Jahrhundert gibt es verlässliche Untersuchungen, die ein authentisches Bild des Mathematikunterrichts zu jener Zeit erkennen

lassen. Oft können wir zudem auch noch auf Zeitzeugenberichte zurückgreifen.
Für den Wechsel von Inhalt und Form des Mathematikunterrichts über die Jahrzehnte und Jahrhunderte streicht Kaiser fünf Kräfte heraus, die merklichen Einfluss auf die Entwicklung hatten und haben (Kaiser 2006, S. 298):

- die Tradition
- den Zeitgeist
- den technischen Fortschritt
- die Weiterentwicklung der Mathematik als Wissenschaft
- die Fachdidaktik

Von diesen Kräften ist die Tradition wohl die stärkste. Dies sieht man beispielsweise daran, dass sich das prinzipielle Schulsystem der Volksschulen, Hauptschulen und der Gymnasien in Mitteleuropa schon um 1850 entwickelt hat und seither im Wesentlichen gleich geblieben ist. Reformen des Mathematikunterrichts auf inhaltlicher Ebene am Anfang und in der Mitte des vorigen Jahrhunderts demonstrieren den Einfluss des technischen Fortschritts und der Weiterentwicklung der Mathematik als Wissenschaft. Die Fachdidaktik, die als Wissenschaft erst nach dem zweiten Weltkrieg entstanden ist, bestimmt nun in zunehmendem Maße die Lehrpläne, aber auch die Realität an den Schulen.
So dürfen wir auch auf zukünftige Anpassungen der Lehrpläne gespannt sein, denn diese beziehen ihre Notwendigkeit ja nicht nur aus aktuellen Forschungsergebnissen, sondern erwachsen in hohem Ausmaß aus gesellschaftlichen und sozialen Veränderungen, die auch ein Spiegelbild der Weiterentwicklung der Menschheit als Gesamtes sind.

1.3 Die Geschichte der Mathematik im aktuellen Lehrplan der AHS

Der Lehrplan bildet die Grundlage des fachlichen und didaktischen Handelns der Lehrerinnen und Lehrer in der Schule. Er legt fest, auf welche Weise und mit welchen Inhalten die Schülerinnen und Schüler konfrontiert werden sollen und gibt zudem allgemeine Bildungsziele und didaktische Richtlinien an. Die Tätigkeit der Lehrerinnen und Lehrer muss also stets durch den Lehrplan legitimiert sein, weshalb eine Untersuchung, in welcher Weise historische Inhalte im

Mathematikunterricht vom Lehrplan akzeptiert oder vielleicht sogar durch ihn ermutigt werden, die Grundlage für alle weiteren Ausführungen darstellt.
Da der Themenbereich der historischen Betrachtungen im Mathematikunterricht im Sinne des österreichischen Schulsystems eher einem allgemeinbildenden und weniger einem berufsbildenden Zweck dient, beschränke ich mich in diesem Abschnitt auf den Lehrplan der Allgemeinbildenden Höheren Schulen. Dies soll nicht bedeuten, dass die Integration von geschichtlichen Inhalten nicht auch den Unterricht in Berufsbildenden Höheren Schulen bereichern könnte, sondern ist eine nach Erfahrungs-, Umfangs- und persönlichen Interessenskriterien getroffene Auswahl. Nachdem die Vermittlung der Geschichte der Mathematik auch viel mit der Vermittlung von mathematischer Kultur zu tun hat, werde ich auch auf solche Ziele eingehen.

Der österreichische Lehrplan für die AHS besteht aus einem allgemeinen Teil, in dem das Allgemeine Bildungsziel und die Allgemeinen Didaktischen Grundsätze festgelegt sowie Aussagen zur Schul- und Unterrichtsplanung gemacht werden. Die Fachlehrpläne für Mathematik teilen sich in Unter- und Oberstufe, wobei jeder dieser beiden Teile von kurzen fachbezogenen Richtlinien eingeleitet wird. Daran anschließend folgen dann die konkreten Unterrichtsinhalte nach Klassen geordnet.
Der Lehrplan für die Unterstufe stammt aus dem Jahr 2000 und ist das Endprodukt einer etwa fünfjährigen Konzeptions- und Evaluationsphase, die ab 1995 durch Pilotprojekte an über 50 österreichischen Hauptschulen und AHS sowie entsprechenden Rückmeldungen zur Entwicklung eines modernen Lehrplans beitragen sollte. Mit einer Übergangszeit von 2000 bis 2004 wurde der neue Lehrplan dann mit gleitendem Einstieg 2000 verordnet und sukzessive an den Schulen eingeführt (Steiner 2000, S. 37).
Sucht man nach eindeutigen Bezügen zu historischen Inhalten im Mathematikunterricht, so fällt im Abschnitt der *Didaktischen Grundsätze* die Überschrift „Historische Betrachtungen“ auf, wo es heißt:

> „Den Schülerinnen und Schülern ist an geeigneten Themen Einblicke in die Entwicklung und Begriffe mathematischer Methoden zu geben. Sie sollen einige Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte kennen lernen. Die Mathematik soll als dynamische Wissenschaft dargestellt und ihre Bedeutung bei der Entwicklung der abendländischen Kultur gezeigt werden. Die Bedeutung der Mathematik in der Gegenwart soll in den Unterricht einfließen.“

Durch diesen Absatz wird die Integration historischer Inhalte in den Mathematikunterricht verpflichtend. Neben den Entwicklungen der Begriffe und Methoden und den bedeutenden

Persönlichkeiten soll vor allem der Beitrag der Mathematik zur Entstehung unserer Kultur im Mittelpunkt des Interesses stehen. Mit dem Schlagwort *Dynamische Wissenschaft* könnten Darstellungen der Interaktion mit anderen Wissenschaften, aber auch das gegenseitige Aufeinanderwirken von Mathematik, Wirtschaft, Gesellschaft und sozialen Verhältnissen im Lauf der Jahrhunderte gemeint sein.
Grenzt man das Themengebiet nicht so stark ein, so ist zu bemerken, dass es im Lehrplan viele Formulierungen gibt, die die Integration von historischen Inhalten in den Unterricht offen lassen, d. h. die Ziele angeben, welche man *auch* durch historische Betrachtungen erreichen kann, diese aber nicht zwingend vorschreiben. Dazu gehören beispielsweise:

- Durch Reflektieren mathematischen Handelns und Wissens Einblicke in Zusammenhänge gewinnen und Begriffe bilden (im Abschnitt *Bildungs- und Lehraufgabe*)
- Überlegen von Bedeutungen mathematischer Methoden und Denkweisen; Überlegen der Bedeutung des Mathematikunterrichts für die eigene Person (bei den *mathematischen Grundtätigkeiten*)
- Gebrauch und Bedeutung von Definitionen, Vorgänge des Klassifizierens (im *Bildungsbereich Sprache und Kommunikation*)
- Aufarbeiten gesellschaftlicher Themen mit mathematischen Methoden (im Bildungsbereich *Mensch und Gesellschaft*)

Nicht zuletzt spricht der Lehrplan von der *Motivierung der Schülerinnen und Schüler*, die im Mathematikunterricht manchmal besonders schwierig erscheinen kann und für die man auch historische Inhalte gut gebrauchen (oder zuweilen auch *miss*brauchen) kann (siehe Abschnitt 2.3).
Alle oben genannten Punkte erfordern natürlich eine genauere Untersuchung, in welcher Weise geschichtliche Aspekte dafür eine Rolle spielen könnten und welche konkreten Inhalte sich eignen würden. Nachdem ich jedoch im weiteren Verlauf dieser Arbeit die möglichen Erscheinungsformen von historischen Aspekten im Mathematikunterricht noch detailliert darlegen werde, möchte ich hier nicht näher darauf eingehen, sondern an geeigneter Stelle darauf zurückkommen.

Der fachliche Lehrplan für die Oberstufe der AHS stammt aus dem Jahr 2004 und ist seit dem Schuljahr 2007/2008 flächendeckend an Österreichs Schulen eingeführt. Er knüpft an den Lehrplan für die Unterstufe an, es heißt etwa bei den *Bildungsbereichen* ausdrücklich, „die bereits im Lehrplan der Unterstufe definierten Beiträge [seien] altersadäquat weiter zu entwickeln und zu vertiefen“. Ein konkreter geschichtlicher Bezug findet sich in diesem Lehrplan bei der Beschreibung von Aspekten der Mathematik, die für den Unterricht bedeutsam sind:

> *Kulturell-historischer Aspekt*
> Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung.

Hier werden also keine genaueren Angaben über Inhalte gemacht, sondern mit dem Verweis auf die Allgemeinbildung wird lediglich die Bedeutung erwähnt, womit das Thema auch schon erledigt ist. Wie im Lehrplan für die Unterstufe entdeckt man darüber hinausgehend auch einige Absätze, die eine Integration historischer Inhalte indirekt ermutigen. Allen voran der Absatz im Bereich der *Didaktischen Grundsätze*, der vom *Lernen unter vielfältigen Aspekten* spricht und den ich exemplarisch anführe:

> Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten. Vielfältige Sichtweisen sichern eine große Flexibilität bei der Anwendung des Gelernten. Die minimale Realisierung besteht in der gelegentlichen Verdeutlichung verschiedener Sichtweisen bei der Behandlung neuer Inhalte, die maximale Realisierung im konsequenten Herausarbeiten der Vor- und Nachteile verschiedener Zugänge. Damit wird ein vielschichtiges und ausgewogenes Bild der Mathematik gewonnen.

Zwar hat man den Eindruck, dass hier eher unterschiedliche Zugänge gemeint sind, die heutzutage an das Thema heranführen und weniger eine historische Dimension angesprochen wird, der Gewinn eines „vielschichtigen und ausgewogenen Bilds der Mathematik“ durch ein Beachten verschiedener Blickwickel allgemein, von denen der historische sicherlich einer ist, kann aber wohl nicht in Frage gestellt werden.
Zum Abschluss sei noch erwähnt, dass sich bei dem nach Klassen geordneten Lehrstoff weder im Lehrplan der Unterstufe noch der Oberstufe konkrete Hinweise zu historischen Inhalten finden. Der Stoff ist allerdings auch sehr allgemein formuliert und lässt den Lehrerinnen und Lehrern genügend Freiheit, die Themen abwechslungsreich zu unterrichten.

2. Chancen einer erweiterten Auffassung von Mathematik durch historische Inhalte im Unterricht

Der Lehrplan spricht von Lehr- und Lernzielen und bezieht sich dabei auf Wissen und Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler in den bestimmten Jahrgangsstufen erwerben sollen. Nachdem die Art und Weise, wie die vorgeschriebenen Inhalte vermittelt werden sollen, nur durch grobe Richtlinien festgelegt ist, können bei den Lernenden Eindrücke von Mathematik entstehen, die weit von der tatsächlichen Wissenschaft entfernt sind – nämlich dann, wenn es der Lehrperson nicht gelingt, im Unterricht ein *authentisches* Bild von Mathematik zu zeichnen.
Über die mathematischen Weltbilder, die im Unterricht vermittelt werden, wissen wir ganz gut Bescheid. Durch Studien von Törner und Grigutsch, die Mitte der 1990er Jahre durchgeführt wurden, lassen sich folgende Punkte angeben (Vollrath 2001, S. 32):

- Mathematik ist die Lehre von den Zahlen und Figuren.
- Eigenschaften von Zahlen werden in Regeln, Eigenschaften von Figuren werden in Sätzen formuliert.
- Regeln und Sätze werden bewiesen.
- Auf der Grundlage von Regeln und Sätzen werden Lösungsverfahren für bestimmte Aufgaben gewonnen.
- Für jede Aufgabe gibt es ein Lösungsschema.
- Mathematik gibt es schon immer.
- In der Mathematik gibt es nichts Neues.
- Für Mathematik braucht man eine besondere Begabung.
- Mathematik ist eher etwas für Männer als für Frauen.

Hinzu kommen noch zahlreiche Fehlvorstellungen und Vorurteile. Es lässt sich zusammenfassend sagen, dass der Unterricht vielen Menschen ein mathematisches Weltbild vermittelt, „das bei Mathematikern Unbehagen auslöst“ (Vollrath 2001, S. 32).
Wenn sich Schülerinnen und Schüler zu einen Mathematikstudium entschließen, ändert sich mit der Zeit dieses Weltbild. Es bleibt aber trotzdem relativ einseitig und wird nun eher durch axiomatisches und strukturelles Denken bestimmt.

In diesem Kapitel möchte ich untersuchen, wie die Integration von historischen Inhalten in den Unterricht dabei helfen kann, ein authentisches Bild von Mathematik zu präsentieren und den Unterricht spannender und abwechslungsreicher zu gestalten. Dabei ergeben sich Chancen sowohl für die Lernenden als auch für die Lehrenden.

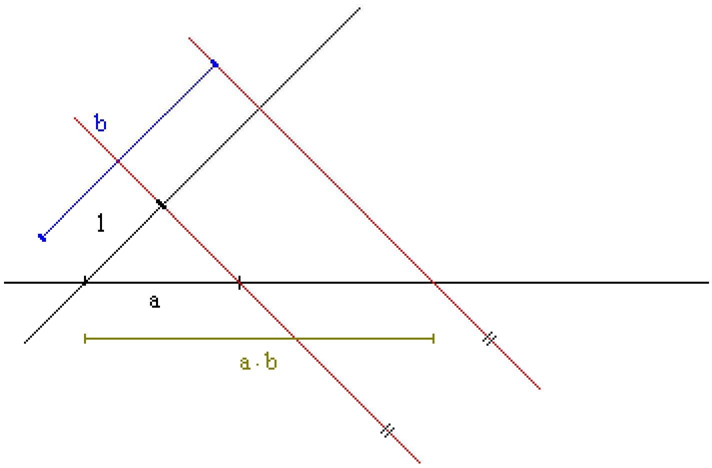
2.1 Eine andere Seite von Mathematik

Mathematik ist eine Wissenschaft mit vielen Gegensätzen, die in unterschiedlicher Weise aufeinander einwirken und sie so unaufhörlich vorantreiben. Diese Gegensätze werden manchmal durch Paare zusammengefasst und einander gegenübergestellt (z.B. Bussi, Pergola 1996, S. 40):

Strenge ↔ Intuition
Wissenschaft ↔ Technik
symbolisch ↔ visuell
rein ↔ angewandt
Deduktion ↔ Induktion
Verallgemeinerung ↔ Spezialisierung
kontinuierlich ↔ diskret
global ↔ lokal

In der Schule zeigt sich oftmals, dass nur eine Seite der obigen Paare im Unterricht repräsentiert wird. In der Unterstufe betreibt man Geometrie beispielsweise hauptsächlich visuell und intuitiv, während in der Oberstufe mit der Analytischen Geometrie die symbolische Darstellung unter Behandlung von Gleichungen und algebraischen Regeln überwiegt. Dabei erfolgt der Wechsel des Blickpunktes zumeist ohne Begründung oder wird überhaupt nicht thematisiert.
Blickt man in die Geschichte der Mathematik, so erkennt man, dass die oben angeführten gegensätzlichen Trends auf unterschiedlichen Ebenen immer präsent waren. Manchmal wechseln Sichtweisen über die Jahrhunderte, zuweilen finden sich komplementäre Ansichten aber auch innerhalb einer zeitlichen Epoche.
Im angesprochenen Beispiel der Analytischen Geometrie trifft ersteres zu. Die Behandlung von geometrischen Fragestellungen durch Gleichungen hat sehr viel mit dem allgemeinen Siegeszug der Algebra ausgehend vom 16. Jahrhundert zu tun. Pierre Fermat und René Descartes beschäftigten

sich beide mit der Verbindung von Geometrie und Algebra, wobei letzterer durch sein 1637 erschienenes Werk *La Géometrie* (als Anhang seiner *Discours de la Méthode)* die erste Veröffentlichung zu diesem Thema hatte und damit zu Recht als Begründer der Analytischen Geometrie gilt. (Eine genauere Darstellung dieses Themas sowie ein konkreter Vorschlag, wie man es im Unterricht behandeln könnte, findet sich in dieser Arbeit ab Seite 106.)
Descartes hatte auch philosophische Probleme zu bewältigen. Die Interpretation des Produkts zweier Größen als Fläche stand der heute üblichen Schreibweise von etwa $ax^2+bx+c=0$ im Wege, da sie andeutete, dass die Summe von Flächen und Längen (welche an sich schon bedenklich schien) auch noch Null sein konnte – von dem Problem der notwendigerweise vorkommenden negativen Größen einmal ganz abgesehen. Descartes zeigt jedoch, dass das Produkt zweier Größen, die als Längen interpretiert wurden, ebenfalls wieder als Länge interpretiert werden konnte. Die folgende Abbildung soll dies verdeutlichen (nach Descartes 1637).



a und b sind Strecken, es gilt nach dem Strahlensatz, dass a : 1 = x : b, woraus x = a·b folgt. Wenn man bedenkt, dass Descartes in erster Linie Philosoph war, überrascht eine derartige Überlegung vielleicht weniger. Sie zeigt jedoch exemplarisch, dass sich Mathematiker Gedanken über die Bedeutung der Symbole und die Zusammenhänge, die sich durch sie erschließen lassen, gemacht haben. Fragen wie „Was bedeutet dieses theoretische Ergebnis inhaltlich?“ oder auch schlicht „Was tun wir hier eigentlich?“ sprechen die Reflexion über das mathematische Handeln an, die jedem Menschen – und insbesondere Schülerinnen und Schülern – ein tieferes Eindringen in die mathematische Gedankenwelt eröffnen kann. Historische Betrachtungen eignen sich hierzu besonders gut, da sich beim Entstehen von neuen Begriffen und Herangehensweisen oft diese Fragen als erstes stellen. Später wurden für philosophische Probleme schon oft Lösungen gefunden (siehe Descartes) oder die anfänglichen Schwierigkeiten legten sich durch die fortschreitende

Verwendung und Praktikabilität einer Methode. (Niemand versucht etwa heute jeden Schritt der Umformung einer Gleichung geometrisch zu interpretieren. Wir wissen, dass die Methode funktioniert und konzentrieren uns auf die Interpretation der Angabe und des Ergebnisses, auch wenn der Weg dorthin ein „bloßes“ Umbauen von Symbolen nach gewissen abstrakten Regeln ist.) Andere Beispiele für große, Jahrhunderte andauernde mathematisch-philosophische Probleme wären etwa die Einführung der negativen oder der komplexen Zahlen (siehe S. 79 und das Arbeitsblatt ab S. 99).

Als Zusammenfassung und zur leichteren Bezugnahme im späteren Verlauf der Arbeit nenne ich die eben dargestellte Herangehensweise

Reflektiver Aspekt (A1): Historische Inhalte ermöglichen das Nachdenken über mathematisches Handeln und über die Bedeutung mathematischer Inhalte und Symbole auf einer Metaebene.

Ein zweites Gegensatzpaar, das besondere Betrachtung verdient, ist jenes der Strenge und Intuition. Mathematik ist eine Wissenschaft, der ein starker struktureller Aufbau innewohnt. Als Grundlage aller Schlussfolgerungen fungieren Axiome, bei denen es sich um Aussagen handelt, die festgelegt und anschließend nicht mehr hinterfragt werden. Die Bedeutung von Begriffen legt man in wohl formulierten Definitionen dar und die eigentlichen Erkenntnisse bestehen in den Sätzen, die Verbindungen zwischen den Axiomen, den Begriffen und eventuell schon vorher aus diesen nachgewiesenen Sätzen herstellen. Jeder Satz und jede Behauptung benötigt einen Beweis, um von der mathematischen Gemeinschaft anerkannt zu werden.
Obwohl die Schülerinnen und Schüler diese strenge Reihenfolge des mathematischen Aufbaus in der Schule sicherlich nicht von ganz unten bis oben durchlaufen, bekommen sie aber doch mit, dass Mathematik aus vielen Regeln und Aussagen besteht, die unverrückbar erscheinen und sich keiner Diskussion mehr zu stellen brauchen. Dass der Findungsprozess der mathematischen Zusammenhänge ganz anders abläuft als der Präsentationsprozess, ist dabei eine fundamentale Diskrepanz, die nicht nur auf die Schulmathematik zutrifft, sondern ein generelles Kennzeichen der Weitergabe von mathematischen Erkenntnissen ist und zu dem trockenen, starren Image der Mathematik beiträgt, dem sie zuweilen ausgesetzt ist.

> „Texte und Vorträge begrenzen sich in den meisten Fällen darauf die „Ergebnisse“ festzuhalten; in einer Form, die sie dem gewöhnlich Sterblichen wie strenge und

> unveränderbare Gesetze erscheinen lassen, die für alle Ewigkeit in Granittafeln einer gigantischen Bibliothek eingraviert sind, und die den angepassten, eingeweihten Schriftgelehrten von einem allwissenden Gott diktiert wurden, …“
> (Grothendieck 1984, S. 129, übersetzt von Florian Mayer)

Der wahre Prozess mathematischer Erkenntnis verläuft im Gegensatz dazu über viele Irrwege, über Probieren und Abschätzen, über Darstellungen mit verschiedensten Medien und Aufdecken von Analogien – kurz: über die Intuition und nicht zuletzt Vision des forschenden Mathematikers, die „unsere Hand leitet und uns über unsere Arbeit gebeugt hält, ohne das Vergehen der Stunden, vielleicht Jahre zu bemerken.“ (Grothendieck 1984, S. 134). Um Verbindungen zu finden und schließlich zu einem logischen Gerüst zusammenzusetzen bedarf es eines hohen Maßes an Originalität und Kreativität, das die Mathematik näher an die Musik, die Malerei oder andere schaffende Künste rückt. Scholz bezieht sich auf Novalis und nennt diesen Aspekt mathematischer Forschung die *poetische Seite der Mathematik* (Scholz 1996, S. 280).
Dieser Blickpunkt kommt in der Schule zweifelsohne nur selten zum Vorschein, da ja die Probleme, von denen man unter Umständen berichtet bekommt, zumeist schon gelöst sind und aktuelle Forschungen oft weit über dem Schulniveau liegen. Auch aus historischer Sicht ist es natürlich schwierig, den Hergang von Lösungen *konkreter* Probleme zu beleuchten, da ja die fertigen Abhandlungen immer schon in logischer, abfolgerichtiger Form vorliegen und der Prozess, wie der Autor zu seinen Ergebnissen gekommen ist, meist nicht dokumentiert ist. Wenn man jedoch von großen mathematischen Problemen und den oft Jahrhunderte dauernden Versuchen diese zu lösen berichtet, kann man ein Bewusstsein für die Schwierigkeit der Probleme, aber auch für die Leistung der an ihrer Lösung beteiligten Personen schaffen. Das kreative Element, das für mathematische Leistungen nötig ist, wird dadurch insofern herausgestrichen, als selbst große Mathematiker über viele Jahre an Problemen gescheitert sind, die dann, als die Zeit reif war, durch Herstellen der richtigen Verbindungen in richtiger Weise von einem bestimmten Wissenschaftler gelöst werden konnten. Gute Beispiele für einen solchen Hergang wären etwa Fermats letzter Satz oder auch die drei klassischen Probleme der Griechen.

Es mag schwierig sein, den Schülerinnen und Schülern die poetische Seite der Mathematik tatsächlich vor Augen zu führen, da man, um sie wirklich zu begreifen, letzten Endes selbst kreative Erfahrungen mathematischer Natur gemacht haben muss. Den Gegensatz zwischen Strenge und Intuition und den Unterschied zwischen Erkenntnisgewinn und Präsentation bewusst zu machen, ist aber in jedem Fall ein gewinnbringendes Unterfangen, da es zumindest andeutet, dass sich hinter den strengen Regeln ein historischer Entstehungsprozess verbirgt und es sich lohnen kann, diesen aufzudecken.

Die poetische Seite der Mathematik ist also im weitesten Sinne ein

Kreativer Aspekt (A2): Historische Betrachtungen können dazu beitragen, sich das Ausmaß der unglaublichen kreativen Leistungen, die zum Betreiben von Mathematik nötig sind und die aus der Mathematik eine Form der Kunst machen, zu vergegenwärtigen.

2.2 Mathematik als dynamische Wissenschaft

Nachdem wir im letzten Abschnitt die vermeintliche Starrheit schon beleuchtet haben, möchte ich gleich anschließen und die Dynamik der Mathematik behandeln. Unter Dynamik verstehe ich zum einen die Interaktion von Mathematikern untereinander (man könnte von einer *inneren Dynamik* sprechen) und zum anderen die Interaktion der Mathematik mit dem Rest der Welt, also mit anderen Wissenschaften, der Gesellschaft oder der Politik, die man als *äußere Dynamik* bezeichnen könnte. Mathematische Erkenntnisse wurden und werden seit jeder vorangetrieben, indem die beteiligten Personen sich untereinander austauschen, Ergebnisse vergleichen und sich so fortlaufend inspirieren. Dabei finden sich in der Geschichte der Mathematik sowohl direkte Kontakte wie etwa Briefwechsel, aber auch einfache Bezugnahmen von Autoren auf Schriften anderer Mathematiker. Als Illustration für beide dieser Formen der inneren Interaktion gebe ich ein kurzes, repräsentatives Beispiel aus den Anfängen der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie, wobei ich mich auf Czuber, 1898 und Struve, 1996 stütze.
Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit von Ereignissen entstanden bereits im Mittelalter. Grundlage waren meist Fragen, die mit verschiedensten Spielen und deren möglichen Ausgängen zu tun hatten. Vom Chevalier de Meré wird etwa berichtet, dass er sich an Pascal wandte, um von de Meré ausgetragene Glücksspiele besser zu verstehen (Czuber 1898, S. 17). Ein besonders interessantes Problem, mit dem sich viele Mathematiker beschäftigten, war folgendes:

> Zwei Spieler A und B einigen sich auf eine Anzahl von Spielen, wobei jedes einzelne nur durch den Gewinn des einen oder des anderen beendet werden kann. Ein Unentschieden ist nicht möglich. Der Spieler, der als erster k Spiele gewinnt, bekommt den Einsatz E, der von beiden Spielern zu gleichen Anteilen gestellt wurde. Aufgrund äußerer Umstände müssen die beiden das Spiel abbrechen, als es x : y für den Spieler A steht (d.h. Spieler A hat x Spiele gewonnen, Spieler B y). Wie kann man den Einsatz E gerecht aufteilen?

Lösungsvorschläge waren etwa

x : y	Luca Pacioli (1494)
[1 + 2 + … + (k-y)] : [1 + 2 + … + (k-x)]	Geronimo Cardano (1539)
[k + x – y] : [k + y – x]	Niccola Tartaglia (1556)

Im Jahr 1654 diskutierten Fermat und Pascal über das Problem und kamen zum selben Ergebnis, wenn auch durch unterschiedliche Methoden. Nach Fermat gibt es, wenn das Spiel abgebrochen wird, noch höchstens $n = (k - x) + (k - y) - 1$ Spiele. Betrachtet man alle möglichen Spielgänge, so soll der Einsatz im Verhältnis der Anzahl der gewinnbringenden Spielgänge für die jeweiligen Spieler aufgeteilt werden. Ist also etwa $k = 5$ und das Spiel steht beim Abbruch 4 : 3 für Spieler A, so gibt es noch maximal drei Spielverläufe, bei denen zweimal A und einmal B gewinnen könnte. Der Einsatz müsste also im Verhältnis 2 : 1 für A aufgeteilt werden.
In den nächsten 150 Jahren wurde nun versucht, eine geschlossene Theorie aus den einzelnen Erkenntnissen der verschiedenen Fragestellungen zu bauen:

> „Aus der Behandlung zahlreicher, mitunter sehr verwickelter Probleme entwickelten sich allmählich Regeln, dazu bestimmt, gewisse häufig wiederkehrende Schlüsse […] in correcter schematischer Weise darzustellen. Diese Regeln, anfangs zahlreich, reducirten sich schließlich auf einige wenige Sätze, welchen Laplace in Form von Principien strenge Fassung gab.“ (Czuber, 1898, S. 14)

Bei den „verwickelten“ Problemen handelte es sich auch um solche, die heute im Schulunterricht eine Rolle spielen, z.B. das Werfen von Würfeln oder das Ziehen von Kugeln aus einer Urne in den verschiedensten Varianten. Im 18. Jahrhundert kamen aber dann auch Probleme dazu, die sich nicht mehr so leicht durch diese Regeln in den Griff kriegen ließen. Buffon stellte etwa sein Nadelproblem (Buffon, 1777), bei dem er nach den Gewinnchancen zweier Spieler fragte, die eine Nadel auf einen mit parallelen Brettern gelegten Parkettboden werfen und darauf wetten, ob die Nadel über einem Spalt zwischen den Brettern zu liegen kommt oder nicht. Um die Frage zu beantworten führte Buffon einen geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff ein, der in der Folge weiter ausgebaut wurde. Nebenbei beschäftigte sich Buffon als einer der ersten auch mit der Frage der Rechtfertigung von Ausdrücken wie „fair“ oder „gleiche Chancen“. Ist „Fairness“ etwas übergeordnet Existentes, oder doch einfach von der (mathematischen) Definition abhängig und erlaubt es daher, schlicht auch anderer Meinung zu sein? Buffon brachte es auf den Punkt, wenn er von der Entwicklung einer *arithmetique morale* sprach, was einen deutlichen Unterschied zu Pascal und Fermat darstellte, die nur wohlwollend festhielten, dass sie beide zur selben Lösung gekommen waren, aber die Angemessenheit dieser nicht diskutierten (mit den Worten von Pascal: *Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris* – Es freut mich, dass die Wahrheit in Toulouse dieselbe ist wie in Paris).

Derartige Überlegungen motivierten wiederum Condorcet dazu, die Theorie der Fairness von Glücksspielen mit Hilfe eines Satzes von Bernoulli zu rechtfertigen, der laut Condorcet besagte, dass die relative Häufigkeit *h(A)* eines Ereignisses A für eine unendliche Folge von Experimenten gegen die Wahrscheinlichkeit von A konvergiert, symbolisch: $\lim_{n\to\infty} h_n(A) = p(A)$. Tatsächlich gilt die schwächere Formulierung: $\forall \epsilon > 0\colon \lim_{n\to\infty} P(|h_n(A) - p(A)| \le \epsilon) = 1$. Das Problem dieses Satzes ist jedoch auch, dass es sich dabei weder um eine Definition von Wahrscheinlichkeit, noch um ein empirisch nachweisbares Gesetz handelt, weshalb die Rechtfertigung umstritten bleibt (Struve 1996, S. 332).

Man sieht, dass schon in den Anfängen der Theorie, als die ersten Überlegungen gemacht wurden, ein bemerkenswerter Austausch zwischen Mathematikern stattgefunden hat. Dabei stehen die mathematischen Gedankengänge wiederum in engem Zusammenhang mit philosophischen Erwägungen. Nicht zuletzt ist die dargestellte Entwicklung ein Beispiel dafür, dass oft alltägliche Probleme über die Jahrzehnte zu Theorien führen, die weit mehr erklären können, als die ursprünglichen Fragestellungen.

Auch bei den äußeren Interaktionen finden sich in der Geschichte viele Beispiele, durch die die Mathematik Impulse bekam, oder wo die Mathematik das Leben der Menschen beeinflusst und zumeist auch verbessert hat. Einige der größeren Strömungen hat Kronfellner zusammengestellt (Kronfellner 1998, S. 40/41), ich habe sie durch weitere ergänzt:

- Die ersten mathematischen Aktivitäten (im weitesten Sinne) entstanden in der Menschheitsgeschichte in der Phase des Übergehens vom Jäger/Sammler zum Regenfeldbau. Die Sesshaftwerdung und später der Übergang zu größeren sozialen Einheiten (Stadtstaaten, Großreiche) machten verschiedene organisatorische Maßnahmen notwendig, bei denen (Anfänge der) Mathematik eine Rolle spielten: Bewässerung, Nahrungsmittelbedarfberechnung bei größeren Vorhaben (Pyramidenbau), Ausbau des Verkehrs, (Ansätze einer) Vereinheitlichung der Maße u. a. m.

- Im Gesellschaftssystem der Griechen wurde (aufgrund des materiellen Wohlstands einer gehobenen Schicht) Wissenschaft im heutigen Sinne salonfähig und möglich.

- Im Zuge der Ausbreitung des Islam kam es auch zu einer Verbreitung (und Weiterentwicklung) des antiken Wissens.

- Die zunehmende Bedrohung Konstantinopels durch das Osmanische Reich im 14./15. Jahrhundert veranlasste viele byzantinische Gelehrte nach Westen, insbesondere nach Italien, abzuwandern, was nicht zuletzt auch Einfluss auf das Gedankengut der Renaissance sowie auf die Ausbildung des naturwissenschaftlichen Weltbildes und der Mathematik ausübte.

- Die Entdeckungsreisen zu Beginn der Neuzeit und der dabei erhoffte materielle Gewinn motivierten zu Entwicklungen und Verbesserungen auf den Gebieten der Kartografie und der Navigation, in der Folge dann auch zur Konstruktion genauer Uhren und weiter – über die theoretische Mechanik – zu einem Motivationsschub für die Mathematik.

- Durch Anforderungen aus der Malerei, in der ab dem 15. Jahrhundert versucht wurde, die Welt realistischer wiederzugeben, ergab sich die Notwendigkeit Methoden zur perspektivisch korrekten Darstellung des Menschen und seiner Umwelt zu entwickeln. Dies führte zur Kreation ganz neuer Geometrien, die in den folgenden Jahrhunderten die vielfältigsten Anwendungen fanden.

- Nachdem die Methode des axiomatischen Aufbaus und der deduktiven Schlussfolgerungen zur Beschreibung von Gegebenheiten und Entdeckung neuer Gesetze in den Naturwissenschaften so gut funktioniert hatte (Newton, Galilei), versuchte man diese Methode auch in anderen Gebieten wie der Philosophie, der Wirtschaft, aber auch der Soziologie und der Religion anzuwenden. Dies führte in den letzteren beiden Fällen teils zu grotesken Theorien über das menschliche Zusammenleben (siehe z. B. Kline 1953, S. 322 ff.)

- In der Gegenwart sind neben den Universitäten auch die Industrie – nicht zuletzt die Rüstungsindustrie – für die Weiterentwicklung von Mathematik von (teilweise entscheidender) Bedeutung (z.B. Computer, Informatik, künstliche Intelligenz, Codierungstheorie, Kryptografie, Optimierung, …).

Diese Aufzählung ließe sich selbstverständlich noch erweitern. Sie erfüllt jedoch ihren Zweck, indem sie Beispiele für den Austausch der Mathematik mit der Gesellschaft, der Religion, der Politik und Kriegswirtschaft sowie der Technik liefert, die in verschiedenen Jahrhunderten zum Tragen kamen. Es ist dies ein

Interaktiver Aspekt (A3): Historische Betrachtungen im Mathematikunterricht können die Verbindungen der Mathematik mit anderen Disziplinen menschlicher Aktivität aufzeigen und damit zum Verständnis der Entstehung der heutigen, westlichen Kultur beitragen.

Gelänge es uns, einige der hier vorgestellten Aspekte in den Unterricht einfließen zu lassen, so könnten wir dem Bild von der strengen, unbeweglichen Mathematik eine Alternative anbieten. Vergessen dürfen wir dabei nur nicht, dass die Mathematik aus ihrer Strenge auch einen Teil ihrer Kraft schöpft. Dass sich überhaupt Regeln bilden lassen, die durch schon bekannte Annahmen oder Schlüsse gesichert sind; dass jede Behauptung einen Beweis benötigt, durch den sich jeder Mensch selbst von ihrer Richtigkeit überzeugen kann und dass diese Überzeugung durch keinerlei Mangel an (materiellen) Mitteln beschränkt ist, weil sie durch rein geistige Arbeit erzielt werden kann, das ist eine mächtige Eigenschaft der Beschäftigung mit Mathematik, der aber ebenso mächtige alternative Aspekte zur Seite gestellt werden sollten.

2.3 Die emotionale Ebene

Neben den kognitiven Leistungen, die die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht erbringen müssen spielen, wie bei allen Formen des Lernens, auch emotionale Komponenten eine bedeutende Rolle. Mit der Aussage „Emotion ist die Basis für Kognition“* bringt es Wegricht auf den Punkt und betont damit, dass für geistige Leistungen zunächst positive, gefühlsmäßige Voraussetzungen geschaffen werden müssen.
Episoden aus der Geschichte der Mathematik scheinen sich tatsächlich anzubieten, eine positivere

* Aus einem Vortrag von Elfriede Wegricht im Rahmen des Seminars „Theorie und Praxis des Erziehens und Beratens“, gehalten im Frühjahr 2008.

Einstellung der Schülerinnen und Schüler gegenüber dem Fach Mathematik zu erzeugen. Immerhin wird das menschliche Element stärker betont und kleine Geschichten zwischendurch sorgen für Abwechslung im sonst oftmals abstrakten Unterricht. Konkret erwarten sich viele Autorinnen und Autoren folgende Effekte (nach Kronfellner 1998, S. 43):

- **Methodische Auflockerung:** Wenn der Unterricht durch viele theoretische Abhandlungen, durch das Herleiten von Regeln und Einüben der Anwendung dieser gekennzeichnet ist, kann eine kurze Geschichte oder eine Anekdote nicht nur für Abwechslung sorgen, sondern auch wieder etwas Lebendiges in den Lernvorgang einfließen lassen.
  Es muss allerdings betont werden, dass eine derartige Auflockerung nicht *nur* durch die Integration historischer Inhalte erreicht werden kann. Eine Stunde im Computersaal oder das Ausschneiden und Zusammenkleben geometrischer Figuren hätte vermutlich denselben Effekt. Mit anderen Worten: Ist der Unterricht generell für die Schülerinnen und Schüler nicht spannend gestaltet, wird sich dies auch durch das Einbringen von noch so vielen Anekdoten nicht ändern. Bestenfalls werden die Kinder kurz aus ihrem Schlaf gerüttelt, um nach der Pointe wieder in selbigen zurückzufallen.

- **Abbau psychischer Barrieren:** Auch hierbei geht es darum, das menschliche Element in der Mathematik hervorzuheben, indem man sie als von Menschen gemacht präsentiert, was insbesondere durch Berücksichtigung historischer Aspekte gut gelingen kann. Viele Kinder sind durch das Elternhaus und ihren Bekanntenkreis schon schwer vorbelastet, weil ihnen von dort der Mathematikunterricht als abstrakt, unnötig formal und damit für das Leben sinnlos beschrieben wird. Dieser Meinung etwas entgegenzuhalten, indem man vermittelt, warum mathematische Forschungen überhaupt vorangetrieben wurden und in welcher Weise sie für die Menschheit wichtig waren und sind, ist ein bedeutsames Ziel des Mathematikunterrichts und der tägliche Auftrag an die Mathematiklehrerinnen und -lehrer.

- **Motivationale Aspekte:** Durch Einbringung historischer Elemente in den Unterricht soll die Motivation, sich mit mathematischen Inhalten zu beschäftigen bei den Lernenden gesteigert werden. Wie bei der methodischen Auflockerung gilt hier, dass die Motivation nur zunehmen wird, wenn der Unterricht generell für die Kinder spannend und interessant ist. Bringt man hin und wieder einige kurze historische Fakten in den Unterricht ein, so mag sich die Aufmerksamkeit kurz erhöhen, von einer insgesamten, dauerhaften Steigerung der Motivation kann man aber sicherlich nicht sprechen.

- **Akzeptanz durch „Patriotismus“:** Es ist immer wieder zu beobachten, dass z. B. in sportlichen Disziplinen das Interesse an einer Sportart steigt, wenn Angehörige des eigenen Landes besondere Leistungen in dieser Sportart erbringen. Diesen „Identifikationseffekt“ könnte man sich im Unterricht zu Nutze machen, indem man die Leistungen österreichischer Mathematiker besonders hervorhebt. Kronfellner berichtet, dass in multikulturellen Schulen die Erwähnung von Errungenschaften islamischer Mathematiker Kinder aus diesem Kulturkreis besonders motivierte. Von einem College in Brooklyn wurde von Studenten, die von russischen Emigranten abstammten, berichtet, dass sie sich durch die Nennung der Namen Kolmogorow und Markow besonders angesprochen fühlten.

Wie in einigen der obigen Aspekte bereits angeführt, besteht die Gefahr, die Integration von historischen Inhalten in den Unterricht auf ihre affektive Wirkung zu beschränken. Manche Autoren (etwa Kronfellner) unterstellen den Lehrerinnen und Lehrern zuweilen sogar durch „Geschichte(n)“ ihren ansonsten schlechten Unterricht rechtfertigen bzw. kaschieren zu wollen. Die inhaltliche oder auch methodische Auflockerung ist dabei vermutlich gar nicht der Anstoß zur Kritik, da Abwechslung in in jedem Unterricht immer willkommen sein sollte. Vielmehr geht es m. E. um die Befürchtung, dass mit dem bloßen Erwähnen eines Namens oder der Erzählung einer kurzen Anekdote die Geschichte der Mathematik nicht in dem Maße gewürdigt wird, wie sie es verdient hätte.

Insgesamt gesehen darf der positive Einfluss auf die Motivation der Schülerinnen und Schüler, der durch die Integration geschichtlicher Inhalte erreicht werden kann, in seiner Bedeutsamkeit nicht unterschätzt werden. Wir können die genannten Punkte unter dem Stichwort der affektiven Aspekte zusammenfassen:

Affektiver Aspekt (A4): Mit Hilfe historischer Inhalte kann man die Lernenden darin unterstützen, eine emotional positive Verbindung zum Themenkreis der Mathematik aufzubauen.

2.4 Beiträge aus der Genderperspektive

Der Themenbereich „Gender“ spielt seit mehreren Jahrzehnten sowohl in der wissenschaftlichen Diskussion als auch im Alltag eine Rolle. In diesem Abschnitt soll ein kurzer Überblick über die gesamte Problematik gegeben und anschließend die Möglichkeiten historischer Elemente im Unterricht untersucht werden.

Der Begriff *Gender* kommt aus dem Englischen und wird meist mit „soziales Geschlecht“ im Unterschied zum biologischen Geschlecht (*sex*) übersetzt. Mit dem „sozialen Geschlecht“ sind dabei nicht die körperlichen Unterscheidungsmerkmale von Männern und Frauen, sondern sozial geprägte Merkmale der Männlichkeit und Weiblichkeit gemeint. Das bedeutet, dass sich das soziale Geschlecht stark in den Handlungen der Personen manifestiert (z.B. welche Kleidung jemand trägt, welchen Beruf er/sie ausübt). Das Geschlechterverhältnis wird also in sozialen Situationen produziert und reproduziert, weil sich die Individuen so verhalten, dass ihr Geschlecht ausgedrückt wird. Die Unterscheidung der Geschlechter in Frau und Mann bildet somit ein grundlegendes Merkmal der Sozialstruktur (Gönke 2008, S. 11).
Ernsthafte Forschungen, in welcher Weise Frauen und Männer ihre spezifische kulturelle und soziale Identität annehmen, begannen nach dem Zweiten Weltkrieg. Eine erste kritisch-feministische Auseinandersetzung mit dem Thema der Naturwissenschaften und der Technik fand aber im deutschsprachigen Raum erst in der zweiten Hälfte der Siebziger Jahre des 20. Jahrhunderts statt. Ausgangspunkt der Untersuchungen war etwa die Frage, warum heute in unserer Kultur Naturwissenschaft und Technik als Männersache angesehen werden und wie ein spezifisch weiblicher Umgang in früheren Kulturen ausgesehen haben könnte. Im Bereich der Mathematik gingen einige Autorinnen in den Achtzigerjahren (etwa Maria Mies oder Regina Boest) soweit zu kritisieren, dass der Mensch in mathematischen Disziplinen nur als Störfaktor gesehen werde und seine Gefühle in der Mathematik nichts zu suchen hätten. Boest forderte, in Definitionen die Verschiedenheit des Gleichen anzuerkennen, Widersprüche und Ambivalenzen zuzulassen und auf eine einzig mögliche Wahrheit zu verzichten (Götschel 2001, S. 40 und 41).
Diese Kritik erscheint aus heutiger Sicht mitunter etwas übertrieben, sie zeigt jedoch zum einen, dass der bis dahin übliche Zugang womöglich ein einseitig männlicher war und zum anderen, dass dadurch wesentliche menschliche Auffassungsstandpunkte übersehen worden sein könnten. In jedem Fall markiert sie auch die Forderung der Frauen, auf weibliche Zugänge zu den Naturwissenschaften in gleicher Weise Rücksicht zu nehmen wie auf männliche.

Die auf Seite 20 zitierte Studie von Törner und Grigutsch ist nun ein Indiz dafür, dass die Umsetzung der Forderungen aus den Siebziger- und Achtzigerjahren auch in diesem Jahrtausend noch nicht erreicht ist. Mathematik wird von den meisten Schülerinnen und Schülern als eher etwas für Männer als für Frauen angesehen.
Insbesondere für den Unterricht ist natürlich deshalb die Berücksichtigung der unterschiedlichen sozialen und emotionalen Zugänge von Mädchen und Buben bedeutsam. Dabei gibt es bereits seit geraumer Zeit umfangreiche Kritik am Mathematikunterricht, was die Genderperspektive betrifft.

Gegenstand der Kritik sind einerseits die Unterrichtsmethoden und Interaktionen, andererseits aber auch die Inhalte des Unterrichts.

Kritik an den Unterrichtsmethoden und Interaktionen

Aus zahlreichen Untersuchungen und Studien zum Mathematikunterricht, durch Gespräche mit Lehrern und Kollegen sowie durch Hospitationen und Dokumentationen von Unterrichtsstunden kommt man zu dem Ergebnis, dass der fragend-entwickelnde Unterricht, in dem die Lehrerinnen und Lehrer den Stoff gemeinsam mit der Klasse durch eine Art Gespräch im Klassenverbund entwickeln, noch immer die am häufigsten anzutreffende Unterrichtsform ist.
Mehan beschreibt die Struktur des fragend-entwickelnden Unterrichts aus einer sprachlichen Sicht in drei Schritten (Mehan 1979, zitiert nach Maier 1999, S. 108):

1. Am Beginn steht die *Instruktion*, eine Lehreraufforderung an die Schülerinnen und Schüler, die sie zur Behandlung eines Sachverhalts durch sprachliche oder auch nicht-sprachliche Mittel bringen soll.
2. Anschließend folgen dann, falls verlangt, sprachliche *Reaktionen* der Schülerinnen und Schüler, die sich fast ausschließlich auf die Aufforderungen der Lehrperson beziehen. Der weitere Fortgang des Unterrichts im weiteren Sinn wird dadurch selten bestimmt.
3. Nun gibt es Sprechbeiträge der Lehrer, die wieder als Reaktionen auf die Kommentare der Schülerinnen und Schüler zu verstehen sind. Es handelt sich um Bewertungen, Korrektur oder Zurückweisung.

Aus einer Fallstudie von Helga Jungwirth lässt sich nun schließen, dass sich Burschen leichter auf dieses Frage-Antwort-Spiel einlassen als Mädchen. Sie beherrschen die dafür angemessenen Handlungsweisen besser, weshalb die Interaktion für sie auch flüssiger verläuft (Jungwirth 1990).

Gründe, weshalb Burschen besser an den fragend-entwickelnden Unterricht angepasst zu sein scheinen, versucht Jungwirth in einer späteren Publikation anhand eines Erklärungsmodells zu geben, das sich auf die „sozialen Welten“ der Lernenden bezieht. Darin geht es auch um die spezifischen Gewohnheiten, Gesprächssituationen zu gestalten. Mädchen lernen in ihrer sozialen Welt auf Gleichheit basierende Beziehungen aufzubauen, wozu es notwendig ist, sich intensiv mit den Gedanken anderer auseinanderzusetzen. Umgekehrt ist es für die Mädchen nötig, sich selbst genau zu überlegen, was sie ihrem Gegenüber sagen und was nicht. Buben lernen hingegen, sich

selbst gut darzustellen, neuen Situationen schnell zu begegnen, spontan Einwürfe zu machen und Randbemerkungen anzubringen, mit denen sie die Aufmerksamkeit anderer auf sich ziehen können (Jungwirth 1994).
Der fragend-entwickelnde Unterricht unterstützt nun nicht nur diese Verhaltensweisen, sondern hilft auch noch, sie weiter auszuformen. Das oben dargestellte Erklärungsmuster wird auch von anderen Autorinnen in neueren Studien unterstützt (vgl. Jahnke-Klein 2001, S. 182). Es hat den Vorteil, dass es nicht Gegebenheiten beschreibt, die akzeptiert werden müssen und unveränderlich sind, sondern dass vielmehr die Aufmerksamkeit auf den Unterrichtsstil gelenkt und die Frage nach möglichen Anpassungen gestellt wird, um beiden Geschlechtern gleiche Chancen zu geben im Mathematikunterricht zu bestehen.

Kritik an den Inhalten

Die Inhalte des Mathematikunterrichts haben sich im Laufe der Jahre immer wieder leicht verändert. Die Kritik ist dabei in vielerlei Hinsicht gleich geblieben. Vogel et al. haben einige Punkte zusammengefasst (Vogel et al. 2006, S. 29):

- Die Inhalte stehen oftmals unverbunden nebeneinander.
- Vieles wird auf Vorrat gelernt: Als Begründung für einen Inhalt wird ein späterer Nutzen angegeben.
- Relevanz und Sinnhaftigkeit der Mathematik werden nur selten deutlich.
- Anwendungen werden häufig aus dem technischen und naturwissenschaftlichen Bereich gewählt.
- Die Schlüsselfunktion zur Erschließung der Welt wird höchstens ansatzweise vermittelt. […]

Jeder einzelne dieser Punkte führt letztlich dazu, dass sowohl bei Mädchen als auch bei Burschen mathematische Kenntnisse nicht nachhaltig zur Verfügung stehen und dass das Erlernen von Mathematik oft als besonders schwierig erlebt wird.

> „Überlagert man diese ungünstige Lern-Situation noch zusätzlich mit der Besetzung von Mathematik als der männlichen Lebenswelt zugeordnet, […] als Fach, in dem Versagen insbesondere der Mädchen von der Umwelt nicht nur akzeptiert, sondern vielleicht sogar erwartet wird, so kann die reservierte Haltung der Mädchen gegenüber der Mathematik

eigentlich nicht mehr verwundern.“ (Vogel et al. 2006, S. 29 und 30)

Wie man sieht, bezieht sich diese Kritik an den Inhalten weniger auf die Auswahl der Inhalte, sondern mehr auf die Art, wie diese vermittelt werden. Zu einem aus Gender-Sicht angemesseneren Unterricht lässt sich jedoch auch durch die Auswahl der Inhalte beitragen. Versucht man eine Formulierung von Zielen, die für einen solchen Unterricht anzustreben wären, so könnten diese etwa so lauten (nach Blunck 2006, S. 42):

- Sensibilisierung für das Thema Mathematik und Geschlecht
- Sichtbarmachen des Anteils von Frauen in der Mathematik
- Präsentation von Vorbildern
- Motivation von Schülerinnen für die Mathematik

Die *Sensibilisierung für das Thema Mathematik und Geschlecht* kann sicherlich dadurch erreicht werden, dass man mit den Kindern über das Thema spricht. Dabei geht es nicht nur um die unterschiedliche Stellung von Frauen und Männern in der Mathematik, sondern in den Naturwissenschaften allgemein. Nach einem Bericht der OECD ist der Anteil der Frauen, die einen naturwissenschaftlichen Hochschulabschluss erwerben, nur 30%, während ihr Anteil an Hochschulabschlüssen allgemein durchaus die Hälfte ausmacht. Weiters sind in den meisten OECD Staaten nur 25 – 35% der in der Forschung tätigen Wissenschaftler Frauen, und die Beteiligung der Frauen an wissenschaftlichen Karrieren wird besonders in leitenden Positionen als gering eingeschätzt (OECD 2006, S. 11).

Derartige Ungleichheiten können in vielen Fällen durch Regelungen und Gebräuche erklärt werden, die ihren Ursprung in historischen Gegebenheiten haben. Dass der Zugang zu höherer Bildung dabei für Frauen in früheren Zeiten zumeist noch viel schwieriger war als heute, zeigen die Lebensgeschichten zahlreicher Mathematikerinnen (siehe die Beispiele ab Seite 37). Die historische Sichtweise führt jedoch auch vor Augen, dass im Laufe der Jahrhunderte bereits große Erfolge bei der Herstellung von gleichen Chancen für Männer und Frauen erzielt wurden. Bei den Ungleichheiten handelt es sich also nicht um unumstößliche Gesetze, es sind vielmehr historisch gewachsene Umstände, die geändert und angepasst werden können.

Im Unterricht können nun genau diese Ausführungen zum Thema gemacht werden, indem man den Schülerinnen und Schülern Zahlen wie die oben angeführten nennt, diese erläutert und erläutern lässt, oder indem man mit ihnen die Lebensgeschichten von Mathematikern und Mathematikerinnen vergleicht. Stellt man die dadurch erhaltenen Erkenntnisse der Gegenwart gegenüber, gelangt man zurück zum eigentlichen Ausgangspunkt der Überlegungen, nämlich, was historische Inhalte im heutigen Mathematikunterricht zum Thema *Gender* beitragen können.

Das *Sichtbarmachen des Anteils von Frauen in der Mathematik* beginnt sinnvollerweise bereits in der Geschichte der Mathematik. Hier gilt es zu zeigen, dass es auch in vergangenen Jahrzehnten und Jahrhunderten viele Frauen gab, die sich mit Mathematik beschäftigten und wertvolle Beiträge zu dieser Wissenschaft leisteten. In den meisten Fällen werden Namen im Unterricht ja generell nur selten genannt und wenn, dann sind es jene von männlichen Mathematikern (Pythagoras, Euler, Gauß, …). Dies trägt sicherlich dazu bei, dass Mathematik als eine Männerdomäne wahrgenommen wird. Hingegen könnten sich Mädchen bei einer Thematisierung von Mathematikerinnen in der Geschichte mehr angesprochen fühlen und vielleicht auch eine positivere Einstellung zum Fach entwickeln.

Die *Präsentation von Vorbildern* ist mit dem letztgenannten Aspekt besonders für Heranwachsende wichtig, die sich ja in der Schule durch den Unterricht ihr erstes Bild von der Mathematik (auch als Wissenschaft) machen. Blunck berichtet von einer Umfrage unter Studentinnen, die sich durch die bloße Erwähnung von Mathematikerinnen in der Geschichte bereits viel stärker angesprochen fühlten und von einer gesteigerten Motivation berichteten (Blunck 2006, S. 42). Für Mädchen in der Schule erscheint da eine entsprechende Behandlung von Beiträgen von Frauen mindestens genauso gewinnbringend. Nicht zuletzt kann die Integration der Arbeit von Frauen das Fach auch für Burschen und Männer attraktiver machen, wenn es gelingt, Mathematik als Errungenschaft der gesamten Menschheit zu erfahren.

Auch dass es dabei zweifelsohne deutlich mehr Männer als Frauen in der Geschichte der Mathematik gibt, ist kein Umstand, vor dem man sich als Lehrer oder Lehrerin fürchten muss. Es ist vielmehr Ausdruck historischer Gesellschaftsstrukturen, hat damit zu tun, dass den Frauen in vergangenen Jahrhunderten generell nicht dieselben Rechte zugestanden wurden wie den Männern (Wahlrecht, Recht auf Bildung, …) und kann eigens thematisiert werden.

Warum gab es so wenige Mathematikerinnen? Was waren die Barrieren, mit denen sie konfrontiert wurden; Barrieren, die Männer mit teilweise geringerer Begabung nicht überwinden mussten? Warum mussten manche Frauen ihre Herkunftsländer verlassen, um Mathematik studieren zu können (so etwa Sofia Kovalevskaia)? Warum wurde es ihnen mitunter sogar verwehrt, ein Mathematikbuch zu kaufen (Mary Somerville)? Wieso dauerte es 42 Jahre, bis Christine Ladd-Franklin ihr Doktorat zugesprochen bekam, obwohl die dafür nötige Arbeit seit vier Jahrzehnten beendet war?

Um den Anteil der Frauen an der Mathematik in angemessener Weise zu vermitteln, reichen natürlich historische Betrachtungen nicht aus. Gerade in der Frage der Vorbildwirkung ist es unumgänglich, dass die Schülerinnen und Schüler auch zeitgenössische Mathematikerinnen kennen lernen. Historische Persönlichkeiten spielen aber auch eine ganz besondere Rolle, weil sie alleine aufgrund der Tatsache, dass wir uns heute noch an sie erinnern, für die Chance stehen, Erfolg und Ansehen im Bereich der Mathematik zu erwerben.

Gender Aspekt (A5): Durch historische Betrachtungen kann gezeigt werden, dass Frauen in der Mathematik eine Rolle spielen.

Auch dieser Aspekt stellt wiederum viele Verbindungen zwischen der Mathematik und dem Rest der Welt her, weil er zeigt, wie entscheidend gesellschaftliche, soziale und politische Einflüsse für die Entwicklung der Mathematik und der Wissenschaften allgemein waren.
Zur Illustration folgt eine kleine Auswahl an Mathematikerinnen, die über die Geschichte hinweg aktiv waren mit einigen Besonderheiten ihres Lebens und/oder ihrer Arbeit (nach Grinstein, Campbell 1987).

Hypatia (ca. 370 – 415): Hypatia lebte in Alexandria und hatte einen angesehenen Vater (Theon), der nicht nur liberal eingestellt, sondern auch Mathematiker war. Durch ihn wurde sie bereits in jungen Jahren unterstützt, was dazu beitrug, dass sie sich im Laufe ihres Lebens einen hervorragenden Ruf erarbeiten konnte. Sokrates behauptet von Hypatia, dass sie, was das mathematische Wissen betraf, sowohl ihren Vater als auch spätere Intellektuelle übertraf. Obwohl nicht restlos geklärt ist, ob sie eine offizielle Lehrposition inne hatte, wissen wir von zahlreichen Schülern der Hypatia, von denen Synesius von Kyrene der berühmteste ist. Im Jahr 415 wurde sie das Mordopfer einer politischen Fehde, die auch mit den religiösen Ansichten der damaligen Machthaber in Alexandria zu tun hatte.
Nach dem Suidas Lexikon schrieb Hypatia Kommentare zu den Werken des Diophantus und des Apollonius sowie eine „Astronomische Tabelle“, deren Inhalt nicht bekannt ist. Ihre Schriften scheinen in der Absicht verfasst worden zu sein, Studenten das Verständnis der schwierigen, klassischen Werke zu erleichtern. In jedem Fall kann man sie als erste Autorin mathematischer Texte in der Geschichte bezeichnen.

Maria Agnesi (1718 – 1799): Maria Agnesi stammte aus einer wohlhabenden Mailänder Familie. Der Vater entdeckte früh das Talent der Tochter und unterstützte ihre Studien, indem er „akademische Abende“ hielt, zu denen er Gelehrte der damaligen Zeit einlud, die dann über

wissenschaftliche und philosophische Themen diskutierten. Maria beteiligte sich schon früh an diesen Veranstaltungen und konnte mit der Hilfe zahlreicher Lehrer schon bald profunde mathematische Kenntnisse vorweisen. Im Jahr 1748 veröffentlichte sie das Werk, auf das sich ihr Ruhm als Mathematikerin begründet, die *Instituzioni Analitiche*. In diesem über 1000 Seiten starken Buch, das von vielen Zeitgenossen im In- und Ausland gelobt wurde (etwa von Lagrange), schaffte sie eine systematische Präsentation der damaligen Kenntnisse zur Algebra, der Analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung sowie zu Differentialgleichungen. Sie widmete es Kaiserin Maria Theresia von Österreich, die ihr als Dank Schmuck und Juwelen sandte. In dem Buch enthalten ist auch die nach ihr benannte *Kurve von Agnesi*, für die sich schon Fermat und Newton interessiert hatten.
In ihren späteren Lebensjahren verschrieb sich Maria Agnesi dann der Theologie und gab Zeit, Mühe und Geld, um den armen Menschen der Gesellschaft zu helfen.

Sophie Germain (1776 – 1831): Marie-Sophie Germain fand ihr Interesse an der Mathematik als sie in Montuclas *L'Histoire des Mathématiques* von Archimedes und seinem Schicksal las. Obwohl ihre Familie (Pariser Kaufleute) ihre Ambitionen anfangs nicht gut hieß, ließ sie sich nicht davon abbringen, sich Mitschriften des Unterrichts in der neugegründeten Pariser École Polythechnique zu organisieren, einer Schule, in die sie als Frau nicht eingelassen wurde. Sie studierte außerdem die Bücher von Legendre, Lagrange und Gauß und unterhielt auch Briefkorrespondenzen mit diesen Mathematikern. Aus Sorge als Frau nicht ernst genommen zu werden, verwendete sie dabei oft das Pseudonym *M. LeBlanc*.
Neben Leistungen in der Zahlentheorie bewies sie auch Fermats letzten Satz für den Fall $2 < n < 100$. Ihre größten Errungenschaften waren aber Beiträge zur Elastizitätstheorie, für die sie auch einen Preis des Institut de France bekam, und Beiträge zur Krümmung von Oberflächen. Obwohl ihrer Arbeit oft die mathematische Strenge fehlte, hatten ihre zeitgenössischen Mathematiker eher die Tendenz ihre Leistungen zu loben als zu kritisieren. Dieses Verhalten und die Tatsache, dass ihr die Aufnahme in höhere wissenschaftliche Kreise, in denen neue Ideen frei diskutiert wurden, verwehrt blieb, bremste ihre mathematische Entwicklung erheblich. Dennoch blieb sie bis zu ihrem Tod an Brustkrebs im Jahr 1831 eine aktive Mathematikerin, die mit den zeitgenössischen Mathematikern auf Augenhöhe diskutierte.

Sofia Kovalevskaia (1850 – 1891): Sofia Korvin-Krukovskaia (die meist Kovalevskaia genannt wird) hatte ebenso wie andere Mathematikerinnen in ihrer Jugend Unterstützung von ihrem Vater.

Da die Universitäten in Russland zu dieser Zeit für Frauen noch geschlossen waren, beschloss sie nach Deutschland auszuwandern, um dort zu höherer Bildung zu gelangen. Hierzu benutzte sie eine fiktive Ehe, die es ihr ermöglichte, sich von der gesetzlichen Obhut des Vaters zu lösen.
In Deutschland studierte sie (mit der ausdrücklichen Erlaubnis ihrer Professoren) Mathematik und wurde bald eine Vertraute von Karl Weierstraß, der ihr seine Funktionentheorie beibrachte, welche sie später für viele ihrer mathematischen Arbeiten brillant einsetzte.
Im Jahr 1874 erhielt sie als erste Frau das Doktorat in Mathematik. Obwohl sie zu diesem Zeitpunkt bereits drei Arbeiten verfasst hatte, die nach der Meinung von Weierstraß den Titel wert gewesen wären, brauchte es die besondere Anstrengung mehrerer einflussreicher Kollegen, um die Universität Göttingen von der Verleihung zu überzeugen. Der Einlass in die Universitäten ihres Heimatlandes Russland blieb ihr dennoch bis an ihr Lebensende verwehrt.
Die Werke, die für Sofia Kovalevskaias nachhaltige Berühmtheit sorgten, waren Arbeiten zu partiellen Differentialgleichungen (Satz von Cauchy-Kovalevskaia) und zur Drehung eines festen Körpers um einen fixen Punkt. Neben ihren mathematischen Errungenschaften baute sie aber auch Brücken zwischen der westeuropäischen und der russischen Wissenschaft. Ihr früher Tod im Jahr 1891 war die Folge einer Lungenentzündung.

Emmy Noether (1882 – 1935): Amalie Emmy Noether ist wohl eine der bekanntesten Frauen in der Geschichte der Mathematik. Sie begann ihr Mathematikstudium mit 18 Jahren und schaffte ihren Doktoratsabschluss im Jahr 1907. In den folgenden Jahren vertrat sie des öfteren ihren Vater, der ein angesehener Mathematiker an der Universität Erlangen war, indem sie seine Vorlesungen hielt. Sie trat der deutschen Mathematiker-Vereinigung bei und kam in Kontakt mit David Hilbert, Felix Klein und anderen großen Mathematikern ihrer Zeit. Insbesondere Hilbert unterstützte sie zunehmend, was jedoch nichts daran änderte, dass ihr gut bezahlte und prestigeträchtige Positionen, wie etwa ein Lehrstuhl an der Universität Göttingen, verwehrt blieben.
Das Noether Theorem, für das sie heute bekannt ist, war ein Beitrag zum Verständnis von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie und von elementarer Teilchenphysik. Emmy Noether beschäftigte sich auch mit nicht-kommutativen Systemen, wobei sie ihren neuen konzeptionellen Ansatz verwendete, um das Studium so genannter nicht-kommutativer Algebren zu vereinheitlichen.

Dieser kleine Auszug zeigt in detaillierterer Weise, mit welchen Problemen Frauen in vergangenen Jahrhunderten zu kämpfen hatten, wenn sie nach Anerkennung innerhalb der mathematischen Gemeinde strebten. Fast alle brauchten die Unterstützung der Eltern (d.h. des Vaters), um sich

überhaupt mathematischen Studien widmen zu können, und fast alle benötigten in ihrer weiteren akademischen Laufbahn die Befürwortung der männlichen Kapazitäten ihrer Zeit, um breite Akzeptanz zu erreichen.
Ein konkretes Beispiel, wie die Aufmerksamkeit im Unterricht auf eine Mathematikerin gerichtet werden kann, findet man im Rahmen des Arbeitsblatts „Die Vereinigung zweier Gedankenwelten" ab Seite 106.
Weitere Mathematikerinnen der Geschichte wären Mary Somerville, Gabrielle de Breteuil, Mary Cox, Christine Ladd-Franklin, Hanna Neumann und viele andere (siehe Grinstein, Campbell 1987).

2.5 Was Lehrerinnen und Lehrer lernen können

Dass im Mathematikunterricht richtige historische Bezüge nur ein Schattendasein fristen, bedeutet in jedem Fall, dass den Schülerinnen und Schülern die geschichtliche Dimension entgeht. Es ist aber auch ein Hinweis darauf, dass viele Lehrerinnen und Lehrer mit der Thematik wenig anfangen können. Dabei ergeben sich bei genauerer Betrachtung auch für die Lehrpersonen zahlreiche Möglichkeiten, aus der Geschichte der Mathematik zu lernen.
Bereits in den 1980er Jahren wurden in manchen Lehrerfortbildungsveranstaltungen historische Inhalte zum Thema gemacht. Bruckheimer und Arcavi berichten von Seminaren, in denen Lehrerinnen und Lehrer aufgefordert wurden, Schätzungen zu mathematischen Zusammenhängen aus historischer Sicht zu machen, originale Quellentexte zu lesen oder auch allgemein zu geschichtlichen Themen zu arbeiten (Bruckheimer, Arcavi 2000).
Konkrete Aspekte der Wissenserweiterung für Lehrerinnen und Lehrer ließen sich etwa folgendermaßen klassifizieren:

Geschichte: Natürlich kann man bei der Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik auch einiges über die Geschichte der Menschheit allgemein lernen. Insbesondere Verknüpfungen von mathematischen Entdeckungen mit den gesellschaftlichen oder politischen Bedingungen einer Epoche können viel zum Verständnis der Entwicklung beider Disziplinen beitragen. Auswirkungen von mathematischen Errungenschaften auf den Handel, das allgemeine Weltbild, aber auch die Kriegsindustrie mögen einem die Zeit vergangener Jahrhunderte besser vor Augen führen. Gedanklich in eine andere Zeit zu schlüpfen und sich die Bedingungen, unter denen die Menschen damals gelebt haben, bewusst zu machen; sich wirklich in das Leben jener Personen

„hineinzufühlen“ – das ist eine geistige Erfahrung, die kein gebildeter Mensch missen sollte – und schon gar nicht solche Menschen, die Wissen und Werte an die heranwachsende Generation weitergeben.

Mathematik: Die Geschichte der Mathematik lehrt nicht nur, wie Mathematik entsteht, sondern gibt oftmals auch „aktuelle“ Mathematik wieder – nämlich in dem Sinne, dass Erkenntnisse, die vor Hunderten von Jahren gemacht wurden, heute noch genauso richtig sind, wie damals (siehe etwa Euklid). Wenn man sich mit Originalwerken, die bahnbrechend für jeweils weitere Entwicklungen waren, auseinandersetzt, erhält man zusätzlich noch Information darüber, in welchem inhaltlichen Zusammenhang die Autoren ihre oftmals neu geschaffenen Objekte sehen, wie sie deren Einführung rechtfertigen oder mit welchen Problemen sie bei ihrer Erschaffung zu kämpfen hatten. In vielen Fällen kann man dabei beobachten, wie auch große Mathematiker mit der Erklärung von mathematischen Strukturen und Vorgängen hadern, was zu einem größeren Problembewusstsein bei Lehrenden und Lernenden führen kann und zudem zeigt, dass Inhalte der Mathematik nicht immer so klar und durchdacht waren, wie sie es heute sind.
Die trockenste, abstrakteste Mathematik kann dadurch zuweilen mit Leben gefüllt werden und es mögen sich Sichtweisen offenbaren, die Lehrerinnen und Lehrern auch selbst die Mathematik in vielseitigerem Licht darstellen können.

Zur Illustration seien einige kurze Ausschnitte aus dem Werk *Institutiones calculi differentialis* von Leonhard Euler erwähnt. Euler veröffentlichte dieses Buch im Jahr 1755 und versucht darin die Grundlagen der Differentialrechnung zu erklären. Obwohl die Rechenmethoden scheinbar funktionierten und richtige Ergebnisse lieferten (siehe auch Seite 52/53), waren diese Grundlagen zum damaligen Zeitpunkt alles andere als klar. Das Problem bestand darin, dass weder Newton noch Leibniz in der Lage gewesen waren, die Natur ihrer „augenblicklichen Änderungsraten“ zu erklären. Größen, die man sich sehr klein vorstellen musste, kamen zunächst in den Rechnungen vor, verschwanden aber zu einem für den Autor günstigen Zeitpunkt einfach wieder. Kritik an der Differentialrechnung kam daher auch aus der philosophischen Ecke, so etwa von Bischof George Berkeley, der die augenblicklichen Änderungsraten als „ghosts of departed quantities“ bezeichnete, die „neither finite quantities, nor infinitely small, nor yet nothing“ wären (aus: George Berkeley: The Analyst (1734), zitiert nach Kline 1953, S. 247).
Euler versucht nun 1755 dieser Kritik zu begegnen, indem er in seinem Buch nicht nur die technische Ausführung der Differentialrechnung erklärt, sondern auch Platz für eine leichte philosophische Diskussion bereithält. Die folgenden Textpassagen sind deutsche Übersetzungen

einer englischen Ausgabe von *Institutiones calculi differentialis*, die im Jahr 2000 von John Blanton herausgegeben wurde (Blanton 2000). Die Anmerkungen und Interpretationen des Werks stammen dabei aus dem Artikel „Foundations of Calculus“ von Ed Sandifer (Sandifer 2006).

In seinem Vorwort schreibt Euler (Blanton 2000, S. vii):

> „Die Differentialrechnung […] ist eine Methode zur Bestimmung des Verhältnisses von verschwindenden Zunahmen, die eine beliebige Funktion annimmt, wenn die Variable, von der sie eine Funktion ist, eine verschwindende Zunahme ist.“

Die „verschwindenden Zunahmen“ (*incrementorum evanescentium* im lateinischen Original) sind dabei jene Objekte, die Berkeley und andere zu ihrer berechtigten Kritik veranlassten. Deshalb schreibt Euler bereits im nächsten Absatz

> „Die Differentialrechnung beschäftigt sich nicht so sehr mit den verschwindenden Zunahmen, die in der Tat nichts sind, sondern mit ihrem Verhältnis und ihrer gegenseitigen Proportion. Da diese Verhältnisse als endliche Größen ausgedrückt werden, müssen wir uns die Differentialrechnung als mit endlichen Größen befasst denken.“

Später schreibt Euler jedoch (Blanton 2000, S. viii):

> „Für viele, die sich mit den Regeln der Differentialrechnung beschäftigt haben, scheint es, dass es einen Unterschied zwischen absolut nichts und einer besonderen Art von unendlich kleinen Größen gibt, welche nicht komplett verschwinden, sondern eine bestimmte Größe behalten, die aber tatsächlich kleiner als jede vorgegebene Größe ist.“

Euler möchte also scheinbar zwei Dinge gleichzeitig. Er will sowohl mit unendlichen Zahlen als auch mit infinitesimalen Größen, die er „unendlich klein“ nennt, arbeiten. Von den unendlichen Zahlen bildet er Verhältnisse, addiert und multipliziert sie und wirft sie weg, wenn er sie nicht mehr braucht. Damit spielt er also genau in die Hände der Kritiker und es wird klar, dass es auch Euler nicht gelingt, das Problem der Natur der augenblicklichen Änderungsraten zufriedenstellend zu lösen. Dies war erst knapp hundert Jahre später Cauchy und Weierstraß vorbehalten (Sandifer 2006).

Dieser kurze Auszug aus einem Originaltext von Leonhard Euler gibt ganz gut die Schwierigkeiten wieder, die bei der Entwicklung der Differentialrechnung über Jahrhunderte diskutiert wurden. Man sieht auch, wie sehr über die Bedeutung der zu Grunde liegenden Objekte gesprochen wird, noch bevor irgendeine Regel hergeleitet wird.
(Ein weiteres konkretes Beispiel, bei dem ein Originaltext verwendet wird und das bereits für den Unterricht ausgearbeitet ist, findet man in dieser Arbeit ab Seite 72.)

Didaktik: Was didaktische Überlegungen angeht, scheint uns die Geschichte des öfteren zur Geduld zu mahnen. Wir können nur staunen, wie lang es manchmal gedauert hat, bis für uns heute selbstverständliche Vorgehensweisen (etwa in der Algebra) allgemein anerkannt waren. Die alten Griechen haben Brüche zwar als Verhältnisse von Zahlen betrachtet, um die Welt zu erklären, jedoch diese nicht als „Zahlen" selbst begriffen – über Jahrhunderte hinweg. Da erscheint es geradezu unerhört, dass unsere heutigen Schülerinnen und Schüler der zweiten Klasse diesen Schritt in wenigen Wochen vollführen sollen.
In den Originalwerken der Araber findet man wiederum viele algebraische Formeln und Vorgehensweisen geometrisch erklärt. Eine solche Betrachtung kann ebenfalls die Einsicht in mathematische Zusammenhänge erleichtern (siehe das Arbeitsblatt „Die Gleichungen des Al Khwarizmi ab Seite 66).
Nicht zuletzt waren viele große Mathematiker auch ausgezeichnete Didaktiker, die mit ihren Werken versucht haben, Studenten die Welt der Mathematik zu eröffnen. So sind etwa manche Beweise in den Werken von Euler von bemerkenswerter Klarheit und Einfachheit, die sich in der Oberstufe durchaus auch für den Schulunterricht eignen würden.

Die Beobachtungen von Bruckheimer und Arcavi zeigen, dass viele Lehrerinnen und Lehrer nur wenig über die geschichtlichen Entwicklungen der Themen wissen, die sie tagtäglich unterrichten. Die Autoren arbeiten vor allem zwei Missverständnisse heraus, die ihnen bei der Arbeit mit Lehrenden aufgefallen sind (Bruckheimer, Arcavi 2000, S. 138).

- „Inhalte der Unterstufe treten bereits in der frühen Geschichte auf, Inhalte der Oberstufe und des Universitätsstudiums viel später."
- „Zuerst werden Konzepte definiert, anschließend werden sie ausgeführt."

Zu beiden Ansichten lassen sich schnell Gegenbeispiele angeben. Die negativen Zahlen werden bereits in der Unterstufe unterrichtet, setzen sich jedoch erst viel später (in der fortgeschrittenen Neuzeit) allgemein durch, während etwa quadratische Gleichungen, die erst in der Oberstufe behandelt werden, schon (mit Einschränkungen) bei Diophantos im 2. Jahrhundert n. Chr. vorkommen. Die reellen Zahlen und ihre Vollständigkeit wurden Jahrhunderte lang intuitiv mit dem Bild der durchgehenden Zahlengeraden verwendet, ein Konzept, das sehr stark von der Anschauung abhängig war und den strengen Kriterien einer mathematischen Begriffsbildung letztlich nicht genügte. Erst Ende des 19. Jahrhunderts wurden sie im Zusammenhang mit der Ausarbeitung der formalen Grundlagen der Mathematik durch Dedekind'sche Schnitte (und später durch äquivalente Formulierungen) auf eine solide Basis gestellt.

Viele Teilnehmer berichteten von hilfreichen und interessanten Erkenntnissen, die sie im Rahmen der Seminare machen konnten. Letztendlich bleibt es aber natürlich jeder Lehrperson selbst überlassen, ob sie tiefer in die Geschichte der Mathematik einsteigt und sie für ihren Unterricht nutzen möchte. Positive Auswirkungen sind jedoch sowohl für die Schülerinnen und Schüler als auch für die Lehrerinnen und Lehrer zu erwarten und vielleicht können die Aussagen von Pädagogen, die die Geschichte der Mathematik bereits entdeckt haben, das Interesse all jener wecken, für die es noch etwas zu entdecken gibt.

> „The study of history of mathematics, though it does not make me a better mathematician, does make me a happier man who is ready to appreciate the multi-dimensional splendour of the discipline and its relationship to other cultural endeavours. It does enhance the joy derived from my job as a mathematics teacher when I try to share this kind of feeling with my class. I attempt to sow the seeds of appreciation of mathematics as a cultural endeavour in them. It is difficult to tell when these seeds will blossom forth, or whether they ever will. But the seeds are there, and I am content.“
> (Man-Keung 2000, S. 8)

3. Methoden zur Vermittlung historischer Inhalte im Mathematikunterricht

In diesem Abschnitt soll nun genauer untersucht werden, in welcher Form historische Inhalte im Mathematikunterricht vorkommen können. Neben der Beschreibung der verschiedenen Arten möchte ich vor allem herausarbeiten, welche Erkenntnisse die Schülerinnen und Schüler durch sie gewinnen können und wie schwierig es ist, sie in einen bestehenden Unterricht zu integrieren.

3.1 Anekdoten (M1)

Anekdoten sind vermutlich die am häufigsten vorkommende Art der geschichtlichen Bezüge in der Schule. Aufgrund ihrer Prägnanz und Kürze können sie sehr leicht in einen bestehenden Unterricht eingebaut werden und trotzdem eine Reihe von positiven Auswirkungen auf selbigen haben.

Unter einer Anekdote (griech.: ανεκδοτα, was noch nicht veröffentlicht ist) versteht man dabei eine bezeichnende, kleine Geschichte (Mackensen 1991), die eine bemerkenswerte oder charakteristische Begebenheit, meist im Leben einer Person, zur Grundlage hat.
Howard Eves sieht in dieser Form der historischen Präsentation gleich eine Reihe von positiven Eigenschaften für den Mathematikunterricht:

> „These stories and anecdotes have proved very useful in the classroom – as little interest-arousing atoms, to add spice and a touch of entertainment, to introduce a human element, to inspire the student, to instill respect and admiration for the great creators, to yank back flagging interest, to forge some links of cultural history, or to underline some concept or idea."
> (Eves 1969, zitiert nach Man-Keung 2000, S. 4)

Dass kulturhistorische Zusammenhänge durch ein paar bloße Anekdoten vermittelt werden können, darf zwar im Allgemeinen bezweifelt werden, die meisten anderen Punkte erscheinen jedoch durchaus viel versprechend.
In jedem Fall brauchen Anekdoten eine gute Präsentation. Viele Kurzgeschichten enthalten einen gewissen Esprit oder haben eine Pointe, die es zu transportieren gilt. Hier muss wohl jede

Lehrperson selbst herausfinden, ob die dargebrachten Anekdoten bei einer Klasse ankommen oder nicht bzw. ob die Art der Erzählung der Geschichte gerecht wird. Die Anekdoten bestehen oft aus Dialogen zwischen berühmten Mathematikern untereinander oder zwischen ihnen und ihren Schülern. In so einem Fall können die Lernenden mit ein wenig Fantasie unter Umständen wirklich kurz in die dargestellte Situation schlüpfen und einen Schnappschuss aus der Geschichte der Mathematik und der Gedankenwelt der beteiligten Mathematiker bekommen.
Gelingt es, die jeweilige Geschichte spannend oder humorvoll zu erzählen, so darf ihr Unterhaltungswert in keinem Fall unterschätzt werden. In einer Zeit, wo die Freizeit der Schülerinnen und Schüler mitunter von immer pompöser gestalteten Fernsehshows, Computerspielen und Liveveranstaltungen bestimmt wird, kann dieser unterhaltende Aspekt durchaus auch im Mathematikunterricht hin und wieder in den Vordergrund treten. Zwar sollte man sich als Mathematiklehrer oder -lehrerin nicht in direkter Konkurrenz mit besagten Freizeit-angeboten sehen, es kann jedoch helfen, sich zu vergegenwärtigen, welche Art der Präsentation von Inhalten die Kinder gewöhnt sind. Um also ein wenig Entertainment und damit auch positive Emotion ins Klassenzimmer zu bringen, können Anekdoten eine wertvolle Hilfestellung sein. Diese Überlegungen zusammenfassend soll Mark Twain über Anekdoten einmal gesagt haben, dass man für sie drei Dinge bräuchte: eine Pointe, einen Erzähler und Menschlichkeit (Nöllke 2002, S. 21).

Aus historischer Sicht hat man bei Anekdoten oft mit dem Problem der Authentizität zu kämpfen. Nur in seltenen Fällen kann nachgewiesen werden, ob sich die Geschichte wirklich wie überliefert zugetragen hat oder ob die handelnden Personen ihre Aussagen wirklich nach der angeblichen Darstellung getätigt haben. Wenn es Quellen gibt, so sind dies bestenfalls Berichte von Augenzeugen, die aber natürlich auch bereits verändert, übertrieben oder auf den bestimmten Punkt, den man betonen will, zugeschnitten worden sein können. In den meisten Fällen wird diese Frage von den Vortragenden (zuweilen bewusst) ignoriert, geht es doch bei der Darbietung einer Anekdote oft um mehr, als nur den oberflächlichen Inhalt. Die Einstellung einer historischen Persönlichkeit, die Haltung einer ganzen Personengruppe in Bezug zum jeweiligen Thema sollen unterschwellig mit vermittelt werden.
So soll etwa Marie-Antoinette in den Monaten vor dem Ausbruch der französischen Revolution, als das Volk durch mehrere Ernteausfälle im ganzen Land an schwerem Hunger litt, gesagt haben, wenn das Volk kein Brot habe, solle es doch Kuchen essen. Obwohl Historiker bezweifeln, dass die Königin diesen Ausspruch jemals in dieser Form getätigt hat, steht er doch einerseits für die Naivität der Gemahlin Ludwig XVI., die am französischen Hof immer eine Fremde blieb, und andererseits für die Distanz, die das Königshaus zu dieser Zeit seinem Volk gegenüber hatte

(Andresen 2010, S. 79). Auch in der Mathematik gibt es solche Aussprüche, wie etwa jenen von Pascal auf Seite 27, in welchem er sich bei der Behandlung eines Problems aus dem Glücksspiel nur darüber freute, dass Fermat auf dieselbe Lösung gekommen war wie er. Damit drückte er aber auch aus, dass allgemeine Gedanken zur Fairness und der Rolle der Mathematik darin nicht in seinen Überlegungen vorkamen. Da eine derartige Behandlung erst über 100 Jahre später begann, legt er mit seinem Ausspruch auch die Haltung einer ganzen Generation von Mathematikern dar, die an den Anfängen der Wahrscheinlichkeitstheorie arbeiteten.
Benützt man also Anekdoten bewusst dazu, um die Einstellung von Personen oder allgemeine Ansichten einer Zeitepoche zu vermitteln, so lässt sich der Authentizitätsaspekt ganz gut vernachlässigen.

> „... if we pay more attention to their [the anecdote's] value as a catalyst, then it presents no more problem than when we make use of a heuristic argument to explain a theorem."
> (Man-Keung 2000, S. 4)

Einer der Mathematiker, über den es eine Menge Anekdoten gibt, ist Carl Friedrich Gauß. Die vermutlich bekannteste erzählt die Geschichte des zehnjährigen Carl, der von seinem Lehrer in einer gemischten Grundschulklasse von 100 Schülern die Aufgabe bekommt, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Er meistert diese Aufgabe innerhalb einer Minute, da er erkennt, dass sie durch eine geeignete Reihenfolge das Addierens (100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101, 98 + 3 = 101, usw.) auf die einfachere Rechnung $101 \cdot 50$ hinausläuft. Gauß bekommt daraufhin eine eigenes Mathematikbuch, das eigens aus Hamburg bestellt wird, und der Lehrer erklärt schon bald, dass der Kleine von ihm überhaupt nichts mehr lernen könne.[*]
In dieser Anekdote geht es also nicht um einen bestimmten Ausspruch, sondern sie steht für die Genialität, die Gauß schon in jungen Jahren auszeichnete und die ihn in weiterer Folge zu einem der größten Mathematiker aller Zeiten werden ließ.
Obwohl man als Lehrperson durch die Integration von Anekdoten nicht dem Irrtum verfallen sollte, allein damit schon historische Inhalte im Unterricht vermittelt zu haben, so sind die Kurzgeschichten doch nützlich, um dort und da ein (im Wortsinn) „lebendiges" Bild von der Mathematik zu präsentieren. In jedem Fall kommen so die Namen einiger großer Mathematiker und hoffentlich auch Mathematikerinnen im Unterricht einmal vor, sodass die Kinder zumindest erahnen können, dass sich hinter dem Stoff, den sie für die nächste Schularbeit lernen, Menschen und ihre

* Eine detaillierte Erzählung dieser Geschichte, die auch Gauß selbst in späteren Jahren immer wieder gern Freunden erzählt hat, findet man in Ahrens 1916, S. 2 ff.

Geschichten verbergen.

3.2 Die historische Kurzinformation (M2)

Hierbei geht es darum, immer wieder kleine historische Fakten fließend in den Unterricht einzubringen.

Am Beginn eines neuen Kapitels lässt sich etwa ein kurzer Abriss darüber geben, wie die folgenden Überlegungen historisch einzuordnen sind. Je nach dem Stellenwert, den die Lehrperson diesen Informationen einräumt, kann eine solche Einführung nur verbal erfolgen oder schriftlich festgehalten werden. In jedem Fall lässt sich den Schülerinnen und Schülern klar machen, warum jemand dazu kam, diesen Bereich genauer zu untersuchen, welche Vorteile man sich davon versprach oder aus welchem Problemkreis sich die Disziplin entwickelte. Die Lernenden können so idealerweise besser einordnen, was sie bereits wissen, wo der weitere Weg hinführt und wie der kommende Stoff mit dem schon gelernten in Verbindung steht.

Diese Vorgehensweise ist in anderen Fächern schon länger üblich. In Physik werden bei der Behandlung des Magnetismus normalerweise auch Oersted und sein Versuch erwähnt. Die Einstein'sche Relativitätstheorie wird mit Kommentaren zur Physik der damaligen Zeit (teilweise ziemlich umfangreich) historisch eingebettet. In Mathematik wird jedoch etwa am Beginn der Analytischen Geometrie kaum René Descartes und sein 1637 veröffentlichtes Buch *La Géométrie* erwähnt, das sich mit der Algebraisierung von Geometrie beschäftigte. Durch die Behandlung des damaligen Aufschwungs der Algebra, an dem noch andere hochrangige Vertreter beteiligt waren (z.B. Fermat) erscheint es leichter verständlich, dass auch die Geometrie von der Integration in die „Buchstabenrechnung“ nicht verschont blieb. Die Vorteile auf der einen und die philosophischen Probleme auf der anderen Seite lassen sich freilich erst erkennen, wenn man in die analytische Geometrie eingetaucht ist.

Neben der historischen Einführung in ein Gebiet könnten aber auch schon einzeln eingestreute Sätze, wie „Euklid wusste schon 300 v. Chr., dass die Winkelsumme im Dreieck immer 180° ist.“ oder „Pascal nannte die negativen Zahlen '*vollkommenen Unsinn*'“ (zitiert nach Kaiser 2006, S. 110) für eine historische Dimension sorgen und zum Nachdenken und Diskutieren über Mathematik, Mathematiker sowie über die Wissenschaftsgeschichte anregen.

Auch die Angabe einzelner Jahreszahlen kann bereits interessante Fragen aufwerfen. Die alten Griechen versuchten die Dreiteilung des Winkels mit Zirkel und Lineal in den Jahrhunderten vor Christus und es gelang ihnen nicht. Erst 1799 bewies Gauß, dass die Dreiteilung des Winkels mit

diesen Einschränkungen nicht möglich ist. Die lange Zeitspanne, die zwischen diesen Ereignissen liegt, erscheint verblüffend. Warum war dieses Problem so schwierig zu lösen? Wurde eine Lösung in den 2000 Jahren dazwischen überhaupt versucht? Wieso war dieses Problem überhaupt so interessant?
Auch wenn es sonst keinerlei historische Inhalte im Unterricht gibt, so kann die Erwähnung solcher Kurzinformationen doch ein Gefühl dafür schaffen, dass Mathematik etwas geschichtlich Gewachsenes ist, das seit Jahrtausenden einen festen Bestandteil der Menschheit bildet. Auch durch das immer wieder Betonen von groben Jahreszahlen und großen Namen lässt sich dieser Eindruck verstärken.

3.3 Historische Rechenaufgaben (M3)

Der Mathematikunterricht läuft heute nach wie vor sehr aufgabenzentriert ab. Sowohl in der Schule als auch bei den Hausübungen und Schularbeiten sollen die Schülerinnen und Schüler ihre mathematischen Kenntnisse häufig dadurch unter Beweis stellen, dass sie Aufgaben mit Hilfe der mathematischen Werkzeuge, die sie im Vorfeld gelernt haben, in angemessener Weise lösen.
Obwohl es immer wieder einige Kritik an dieser so genannten „Aufgabendidaktik" gibt, kann das Lösen von Aufgaben auch viele positive Auswirkungen haben. Die Lernenden werden dazu angeregt, sich selbstständig mit mathematischen Inhalten zu beschäftigen, und die Anwendung von theoretischen Überlegungen kann an guten Aufgaben demonstriert werden. Selbstverständlich hängt der Erfolg solcher Ziele aber von der jeweiligen Aufgabe ab; nämlich konkret davon, ob ihr Inhalt authentisch oder nur dahingehend konstruiert ist, einen bestimmten mathematischen Inhalt abzufragen.
An dieser Stelle kann man nun historische Rechenaufgaben ins Spiel bringen. Diese sind insofern authentisch, als es sich dabei um tatsächliche Angabetexte aus vergangenen Jahrhunderten oder sogar Jahrtausenden handelt. Sie spiegeln damit die Probleme wider, mit denen sich die Menschen dieser geschichtlichen Epochen beschäftigten. Oft wurden die Aufgaben ja auch damals zu Lehrzwecken eingesetzt und der Inhalt der Aufgaben lässt teilweise Schlüsse zu, welche mathematischen Kenntnisse die damaligen Lehrer für ihre Schüler als wichtig empfanden. In vielen Fällen stammen die Inhalte aus dem Bauwesen, der Landwirtschaft oder dem Geldwesen, wie etwa auch die folgende 2300 Jahre alte Aufgabe:

> Der Ertrag von 3 Bünden Getreide bester Qualität, 2 Bünden von mittlerer Qualität und eines Bundes minderer Qualität beträgt 39 Körbe. Der Ertrag (eines anderen Feldes) von 2 Bünden bester Qualität, 3 Bünden mittlerer Qualität und eines Bundes minderer Qualität beträgt 34 Körbe. Von einem dritten Feld ist der Ertrag von einem Bund bester Qualität, 2 Bünden mittlerer Qualität und 3 Bünden minderer Qualität 26 Körbe. Wie hoch ist der Ertrag von Getreide bester, mittlerer und minderer Qualität?
>
> (China, 300 v.Chr., zitiert nach Swetz 2000, S. 62)

Es darf in diesem Zusammenhang jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass man auch bei historischen Rechenaufgaben nicht vor Angaben gefeit ist, die so konstruiert wirken, dass man ihren Realitätsbezug selbst für damalige Verhältnisse stark in Zweifel ziehen muss. So stellt Cardano das Problem der Lösung von kubischen Gleichungen durch einen ziemlich gekünstelten wirtschaftlichen Hintergrund dar:

> Zwei Männer steigen mit einem unbekannten Kapital in ein Geschäft ein. Ihr Gewinn ist dabei gleich der dritten Potenz von einem Zehntel des Kapitals. Mit drei Dukaten weniger hätten sie genau so viel wie ihr Kapital verdient. Wie groß sind das Kapital und der Gewinn?
>
> (Cardano 1545, zitiert nach Pesic 2005, S. 30)

Derartige Aufgabenstellungen mögen zwar in einem historischen Kontext authentisch sein, sie sind jedoch nicht geeigneter als viele Aufgaben in den aktuellen Schulbüchern, deren Inhalt wie an der Haaren herbeigezogen wirkt. Man tut daher gut daran, solche Angaben aus einer Aufgabensammlung auszusortieren und sich auf tatsächlich lebensnahe Problemstellungen zu konzentrieren:

- Umfangreiches geometrisches Wissen erlaubte es den alten Griechen, Probleme der Landvermessung bis zum Umfang der Erde und des Abstands Erde-Mond zu lösen.
- Das komplizierte Erbrecht des Islam, das im Koran genau festgelegt ist, führt auf quadratische Gleichungen, die es zu lösen galt.
- Die Vergabe von Krediten und die damit einhergehende Verzinsung über längere Zeiträume bedingte eine Beschäftigung mit Zahlenfolgen und Reihen.
- Die Erforschung der Natur, insbesondere der Grundgesetze der Mechanik, löste die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung aus.
- …

Durch die Integration von Aufgaben, die sich mit derartigen Fragen beschäftigen, kann man in heutigen Schulklassen selbst beim Bearbeiten von Problemstellungen, die hauptsächlich der Übung dienen sollen, ein Gefühl vermitteln, wofür Mathematik in all den vielen Jahrhunderten verwendet wurde.
Dafür bedarf es sicherlich einer entsprechenden Betonung von der Lehrerseite, d. h. man wird sich im Unterricht Zeit nehmen müssen, den Hintergrund einer Aufgabe zu erläutern oder die Kinder mit sonstigen Zusatzinformationen zu versorgen, wenn man die historischen Komponenten einer Aufgabe auch als Lernziel versteht. Auch dedizierte Fragen zu geschichtlichen Themen oder Aufforderungen zur Recherche sind denkbar. Die Geschichte der Mathematik lediglich als Aufgabensammlung zu sehen, wird für sich genommen nämlich noch keinen Unterschied machen, denn die Kinder werden mit der Zeit die historischen Informationen im Angabetext überlesen und sich auf die eigentliche Rechenaufgabe konzentrieren, wenn sie nicht entsprechend aufgefordert werden, Überlegungen zu den geschichtlichen Themen anzustellen.

Allgemein lassen sich zwei Formen von historischen Rechenaufgaben unterscheiden.
Bei der ersten Art handelt sich um eine Problemstellung, die aus einer historischen Quelle stammt, für deren Lösung jedoch moderne Methoden verwendet werden sollen. Solche Aufgaben können den oben dargestellten Zweck der Illustration von mathematischem Einsatz durch die Jahrhunderte erfüllen. Sie enthalten zuweilen auch unterhaltsame Aspekte (etwa die Bezeichnung der Unbekannte als „Haufen“ in der ägyptischen Mathematik). Ein Beispiel wäre:

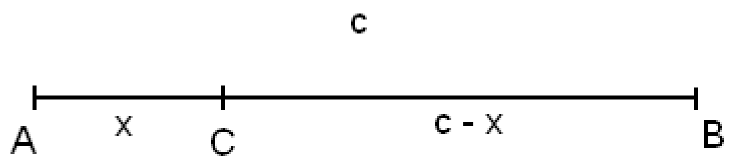
> „Ein Schilfrohr steht an einer Wand. Bewegt sich das obere Ende 9 cm nach unten, so rutscht das untere Ende 27 cm von der Wand weg. Wie lang ist das Schilfrohr, wie hoch ist die Wand?
>
> (Babylonien, 1800-1600 v. Chr., zitiert nach Swetz 2000, S. 60)

Bei der zweiten Art von historischen Rechenaufgaben handelt es sich um solche, bei denen die Methode, die zur Lösung angewandt wird, historischen Charakter hat. Die Art und Weise, wie die Aufgabe gelöst wird, ist entweder nicht mehr in Verwendung oder nicht mehr üblich, weil sie etwa durch höher entwickelte Methoden abgelöst wurde, oder überhaupt aus heutiger Sicht nicht (mehr) korrekt ist.
Betrachten wir dazu die Angabe einer Aufgabe aus dem alten Ägypten:

> „Ein Haufen und sein Viertel hinzugefügt ergeben zusammen 15. Wie groß ist der Haufen?“
> (Ägypten, Papyrus Rhind, 2000-1800 v. Chr., zitiert nach Chace 1927)

Nach einer heute üblichen Methode führt die Problemstellung auf die Gleichung $x+\frac{x}{4}=15$ und kann durch algebraisches Umformen von jeder Schülerin und jedem Schüler ab der 3. Klasse der Unterstufe leicht gelöst werden. Die Ägypter verwendeten zur Lösung jedoch eine Methode des falschen Ansatzes. Sie versuchten als Haufen die Zahl 4 und bekamen nach Hinzufügen eines Viertels davon (das ist 1) die Zahl 5. Es sollte jedoch 15, das Dreifache, herauskommen, also musste die gesuchte Zahl 12, das Dreifache der ursprünglich probierten Zahl, sein ($4 \cdot 3 = 12$).
Natürlich funktioniert diese Methode nur für lineare Gleichungen, und wie leicht man auf die richtige Lösung kommt, hängt stark davon ab, wie gut der falsche Ansatz war. Es ist aber trotzdem eine gültige Methode, die jedoch heute nur selten verwendet werden wird, weil das Umformen von Gleichungen im Allgemeinen schneller und sicherer zum Ziel führt. Man kann von ihr aber etwas über die Struktur von linearen Gleichungen lernen und sie als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen verwenden.
Ein Beispiel für einen Lösungsweg, der aus heutiger Sicht nicht mehr korrekt ist, wären schließlich die Extremwertaufgaben nach Fermat. Um die Maximumstelle a einer Funktion f(x) zu bestimmen, betrachtete Fermat f(x) und f(x+h), wobei x und x+h „annähernd gleich“ sein sollten. Er setzte diese beiden Werte gleich, dividierte dann durch h, setzte anschließend $h = 0$ und bestimmte aus der erhaltenen Gleichung die Maximumstelle a (Cantor 1894, S. 858 und 859). Fermat löste nach dieser Methode auch konkrete Aufgaben, z. B.:

> „Gesucht ist **x**, sodass $|AC|^2 \cdot |BC|$ maximal wird!“



Es ist also $f(x) = x^2 \cdot (c - x)$.

Nach Fermat folgt dann:

$$f(x) = f(x+h)$$

$$x^2 \cdot (c - x) = (x + h)^2 \cdot (c - (x + h))$$

$$x^2c - x^3 = cx^2 + 2cxh + ch^2 - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 \qquad | - x^2c, + x^3$$

$$0 = 2cxh + ch^2 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 \qquad | : h$$

$$0 = 2cx + ch - 3x^2 - 3xh - h^2$$

Jetzt setze $h = 0$, dann folgt: $\quad 0 = 2cx - 3x^2$

und damit $\quad x = 0$ oder $x = \dfrac{2c}{3}$

Obwohl das Ergebnis korrekt ist, besteht die offensichtliche Schwäche dieser Methode darin, dass zunächst durch h dividiert, jedoch anschließend h = 0 gesetzt wird. Mit dieser Ungereimtheit schlugen sich schon zeitgenössische, aber auch spätere Mathematiker herum (etwa Euler, siehe Seite 41/42), jedoch war eine Exaktifizierung der Methode bis zur Einführung und exakten Definition des Grenzwerts im 19. Jahrhundert kaum denkbar.
Eine Aufgabe wie die obige kann man Schülerinnen und Schülern vorführen, um sie für die Schwierigkeiten bei der Entstehung der modernen Differentialrechnung zu sensibilisieren. Sie fördert zudem das Nachdenken über mathematische Methoden allgemein. Fragen wie „Was mache ich hier eigentlich?“, „Darf ich das?“ oder „Ist mein Vorgehen durch geltende Gesetze gedeckt?“, mit anderen Worten das Reflektieren des eigenen mathematischen Handels, stehen dabei im Vordergrund. Eine Aufgabe wie die oben dargestellte kann man den Schülerinnen und Schülern in der Klasse mitsamt der Lösung vorführen. Ich hielte es jedoch nicht für sinnvoll, ihnen dann eine ähnliche Aufgabe als Hausübung zu geben, die sie nach der Methode von Fermat lösen sollten. Immerhin ist die Methode in der oben dargestellten Form nicht korrekt.

Ein häufig anzutreffender Kritikpunkt der Integration von historischen Rechenaufgaben in den üblichen Unterricht besteht darin, dass die Aufgaben in den Quellen oft sehr isoliert auftreten. In vielen Fällen finden sich keine weiteren, ähnlichen Aufgaben, die man den Schülerinnen und Schülern als Hausübung zum Einüben der jeweiligen Methode geben könnte.
Stellt man den historischen Gesichtspunkt in den Vordergrund, so ist es aber gar nicht unbedingt nötig, eine große Anzahl desselben Aufgabentyps zur Verfügung zu haben. Wenn die Aufgabenstellung nur in dem konkreten Zusammenhang, in dem sie präsentiert wird, Sinn ergibt, so behandelt man sie eben nur in der Schule oder nur als Hausübung und bezieht sich stärker auf den geschichtlichen Aspekt. Dahinter steht die Haltung, für Veränderungen des Unterrichts, die sich in natürlicher Weise aus der Integration von historischen Aspekten ergeben, offen zu sein und nicht

von vornherein alles abzulehnen, was nicht zum bisher üblichen Unterrichtsstil passt.
Wer allerdings die Geschichte der Mathematik als Aufgabensammlung gebrauchen will, findet auch hierfür genügend Stoff. Der Papyrus Rhind enthält beispielsweise eine ganze Reihe von Aufgaben, die alle auf lineare Gleichungen führen und mit heute üblichen Methoden leicht gelöst werden können. In vielen Rechenbüchern aus dem Mittelalter finden sich ebenfalls ausreichend Aufgaben, weil diese auch schon damals zur Lehre verwendet wurden.
Letzten Endes wird es von der Lehrperson abhängen, ob die Schülerinnen und Schüler historische Bezüge in den Angabetexten der Aufgaben überlesen oder sie als aktiven Teil des Lernstoffes in Mathematik begreifen.

3.4 Weitere Möglichkeiten der Vermittlung

Neben den beschriebenen Möglichkeiten gibt es noch einige andere vorstellbare Arten der Vermittlung historisch relevanter Themen im Mathematikunterricht.

Um die ständige Weiterentwicklung von mathematischen Begriffen, Symbolen und Methoden zu verdeutlichen, könnte man historische Originaltexte oder zumindest wortwörtliche Übersetzungen heranziehen **(M4)**. Dadurch würden die Kinder sehen, wie z. B. Euklid oder Euler ihre Ergebnisse tatsächlich formuliert haben. Die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler würde jedoch wohl zunächst einmal darin bestehen, den vorhandenen Text in heutige Sprache und/oder Symbolik zu übersetzen. Anschließend kann man Erklärungen aus dem Text mit Erklärungen aus dem heutigen Schulbuch vergleichen. Viele Originaltexte sind mit Kommentaren des jeweiligen Autors versehen, sodass man direkt etwas über die damalige Anschauung der mathematischen Inhalte erfahren kann. Wie viel man durch einen Originaltext profitieren kann, hängt letztendlich sicher sehr stark vom Text selbst ab. Nachdem er nicht zu schwierig sein darf, bieten sich vor allem Einführungen und Zusammenfassungen zu bestimmten mathematischen Fachgebieten an. Als Beispiel seien einmal mehr die einführenden Werke von Leonhard Euler erwähnt, die zu sehr vielen Themen auf einem elementaren Niveau Stellung beziehen, und sich doch von unseren heutigen Anschauungen unterscheiden (so etwa bezüglich des Funktionsbegriffs, siehe *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*, Leonhard Euler, 1748).

Von den Originaltexten abgesehen können mathematisch historische Themen von Schülerinnen und

Schülern natürlich auch in Form von Referaten und Ausarbeitungen behandelt werden. Auch eine Zusammenfassung des Lebens eines Mathematikers oder der Entwicklung eines mathematischen Teilgebietes als Hausübung aufzugeben, wäre denkbar. Allerdings müssten solche Aufgaben vorher in der Schule besprochen werden, um den Kindern ein Basiswissen als Grundlage für etwaige eigene Recherchen zu geben. Die selbstständige Bearbeitung von historischen Fragestellungen und allem, was damit zusammenhängt, scheint mir jedoch ein wesentlicher Faktor zu sein, wenn man den Lernenden eine geschichtliche Dimension der Mathematik mitgeben möchte.

Besonders interessant wäre auch ein fächerübergreifender Unterricht mit Geschichte oder Physik, um in noch vielfältigerer Weise zeigen zu können, wie Mathematik dazu beigetragen hat, das Leben der Menschen im Lauf der Zeit zu verändern bzw. wie sich äußere Einflüsse auf die Mathematik ausgewirkt haben.

4. Unterrichtsmaterialien zu historischen Themenstellungen an einem ausgewählten Beispiel

Themenauswahl und Struktur

In den vorangegangenen Abschnitten habe ich Aspekte der mathematischen Tätigkeit beschrieben, die durch die Integration historischer Inhalte im Mathematikunterricht stärker in den Vordergrund gerückt werden könnten sowie die Methodik untersucht, wie man diese Aspekte in einen existierenden Unterricht einbetten kann. Obwohl ich versucht habe, alle genannten Punkte durch Beispiele zu illustrieren, fehlen konkrete Ausformulierungen, die einer Lehrperson das Material in die Hand geben, um sofort los zu legen.
In diesem Abschnitt sollen nun anhand des ausgesuchten Themas „Gleichungen“ einige konkrete Vorschläge ausgearbeitet werden. Die Präsentation geschieht in Form von sieben Arbeitsblättern, die für einen Einsatz quer durch (fast) alle Klassen der Allgemeinbildenden Höheren Schulen konzipiert wurden.

Gleichungen – Konstanten im Wandel der Zeit

Es handelt sich um eine Art Übungszettel, mit fünf ausgewählten historischen Aufgaben aus 5000 Jahren Mathematikgeschichte.

Die Gleichungen des Al-Khwarizmi

Eine Erläuterung des Lebens und Wirkens des vermutlich größten arabischen Mathematikers und die Beschreibung einer geometrischen Methode zur Lösung quadratischer Gleichungen.

Von der Geheimschrift zur Mathematik

Eine Demonstration, wie die mathematische Formelsprache die exakte Formulierung von Ergebnissen erleichtert.

Kampf um die Gleichungen

Ein Lesetext mit Zwischenfragen, der die bemerkenswerten Ereignisse rund um die Auflösung von Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades beschreibt.

Berühmt berüchtigt – die Cardanoformel

Eine Anleitung zur Herleitung der Cardanoformel und eine Diskussion, warum sie oftmals nicht praktikabel ist.

Zwischen Sein und Nichtsein

Eine Darstellung der Geschichte der komplexen Zahlen, wie sie von ihrem Ausgangspunkt als scheinbar unmögliche Lösungen von Gleichungen zunächst abgelehnt und schließlich doch auf breiter Front akzeptiert wurden.

Die Verbindung zweier Gedankenwelten

Eine Analyse, wie René Descartes und Pierre Fermat die Geometrie und die Algebra – zwei über Jahrhunderte getrennte Disziplinen – miteinander verbanden.

Zu jedem der Arbeitsblätter gibt es einen didaktischen Kommentar, der das Arbeitsblatt kurz vorstellt und die Lehrerin oder den Lehrer darüber informiert, für welche Jahrgangsstufe die Aufgaben geeignet sind, welches Vorwissen die Lernenden benötigen und wie viel Zeit für die Bearbeitung zu veranschlagen ist. Außerdem gebe ich an, welche der im vorigen Abschnitt vorgestellten Aspekte historischer Integration (A1 bis A5) und welche Methodik (M1 bis M4) im jeweiligen Arbeitsblatt Verwendung finden. In einigen Fällen habe ich Hintergrundinformationen hinzugefügt, die es der Lehrperson ermöglichen sollen, das Thema im Unterricht einzuleiten und den Kindern etwas zu erzählen, was über den Inhalt des eigentlichen Arbeitsblatts hinausgeht. Es finden sich auch Anekdoten oder kurze Beschreibungen der Lebensgeschichten von auftretenden Mathematikern, die dafür sorgen sollen, dass die Arbeitsblätter nicht isoliert im Unterricht auftreten. Es bleibt jeder Lehrperson selbst überlassen, wie sehr sie dieses Material benutzt.
Darüber hinaus habe ich zu allen Arbeitsblättern vollständige Lösungsblätter angefertigt. Auf diesen befinden sich nicht nur die Endergebnisse, sondern komplett durchgerechnete Aufgaben und ausführliche Kommentare zur Lösung. Die Lösungsblätter können den Lehrerinnen und Lehrern helfen, einen noch genaueren Überblick über die verlangten Kompetenzen ihrer Schülerinnen und Schüler zu erhalten, man kann sie aber natürlich auch den Lernenden zur Verfügung stellen, um ihnen die Selbstkontrolle zu ermöglichen.
Alle Arbeitsblätter haben primär historischen Inhalt und zielen darauf ab, den Schülerinnen und Schülern Teile der Entwicklung der Mathematik, mathematische Denkweisen in früheren

Jahrhunderten sowie den Zusammenhang zwischen der Mathematik und anderen Wissenschaften zu vermitteln. Daneben verlangen die Aufgaben neben rein rechnerischen Feritgkeiten und der Anwendung zuvor erlernter Regeln auch Kompetenzen wie sinnerfassendes Lesen, Nachvollziehen mathematischer Argumentation und ein gewisses Einfühlungsvermögen, um die Errungenschaften, aber auch die Bedeutung der mathematischen Entwicklungen, für sich selbst einschätzen zu lernen.

Arbeitsblätter der vorliegenden Art eignen sich natürlich in erster Linie für das Selbststudium, dadurch ergeben sich aber für den täglichen Unterricht zahlreiche Möglichkeiten der Anwendung.

- Bearbeiten innerhalb einer oder mehrerer Unterrichtseinheiten:
  Die Kinder bekommen nach einer kurzen Einleitung das jeweilige Arbeitsblatt und sollen die Aufgaben darauf bis zum Ende dieser oder der nächsten Stunde durchführen. Dann wird das Blatt durch die Lehrerin oder den Lehrer abgesammelt, kontrolliert und bewertet.

- Als Hausaufgabe:
  Die Schülerinnen und Schüler bekommen das Arbeitsblatt am Ende der Stunde und sollen die Aufgaben bis zu einer der folgenden Unterrichtseinheiten selbstständig zu Hause bearbeiten.

- Im Rahmen eines Projekts kann das eine oder andere Arbeitsblatt als theoretische Erläuterung dienen und Ausgangspunkt für weitere Recherchen sein.

- Bearbeiten innerhalb offener Lernformen:
  Im Bereich des offenen Lernens, bei der sich die Schülerinnen und Schüler oftmals Kenntnisse im Stationenbetrieb aneignen, kann ein Arbeitsblatt eine Station bilden. Da die Lernenden in solchen Lernumgebungen sich häufig selbst kontrollieren sollen, erweist sich auch das Lösungsblatt als Vorteil.

Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben innerhalb der Arbeitsblätter reicht von einfach bis anspruchsvoll. In vielen Fällen dienen die Fragestellungen dazu, die Schülerinnen und Schüler zum Mitdenken anzuregen und sollen daher keine unmöglich zu überwindenden Hindernisse darstellen. Die Schwierigkeit der Aufgaben steigt aber unter Umständen dadurch, dass es sich oftmals um keine im durchschnittlichen Unterricht üblichen Arbeitsaufforderungen handelt.

Im Folgenden werden die Arbeitsblätter vorgestellt.

1. Gleichungen: Konstanten im Wandel der Zeit

- **Geeignet für:** (3.), 4. und 5. Klasse der AHS
- **Geschätzter Zeitaufwand:** 1 – 2 Unterrichtseinheiten
- **Erforderliche Vorkenntnisse:**
  - elementares Lösen von linearen Gleichungen und Rechnen mit Termen
  - Erfahrung beim Übersetzen eines Textes in eine Gleichung
  - Kenntnisse über Gleichungssysteme mit nicht-eindeutiger Lösung
  - Bruchrechnen
  - Umgang mit Verhältnissen
- **Historische Aspekte und Methoden:** A3, M2, M3
- **Umfang:** 1 Seite Arbeitsblatt, 2 Seiten Lösungen

Didaktischer Kommentar

Das Arbeitsblatt „Gleichungen: Konstanten im Wandel der Zeit" besteht aus insgesamt 6 Aufgaben, die alle auf lineare Gleichungen führen. In einem Fall (Aufgabe 5) ergibt sich auch ein lineares Gleichungssystem, für dessen Lösung jedoch kein Standardlösungsverfahren nötig ist. Die Aufgaben stammen alle aus historischen Schriften, zum Teil auch aus historischen Schulbüchern, waren also bereits vor langer Zeit zur Lehre im Einsatz. Sie erstrecken sich von der Zeit der alten Ägypter (2. Jahrtausend vor Christus) bis ins 19. Jahrhundert und sind im Unterschied zu den meisten anderen Aufgaben, die man auf Übungszetteln findet, kommentiert. Jede Aufgabe wird mit einem kurzen Kommentar eingeleitet, um die Aufmerksamkeit der Kinder auf die historische Komponente zu lenken. Die ersten beiden Aufgaben sind dabei eher theoretischer Natur und zeigen, dass die Menschen schon vor 3500 Jahren Gleichungen lösten. Die folgenden Aufgaben sprechen dann die Problematik der Entlohnung von Arbeit und der Aufteilung von Nahrungsmittel an. Nachdem die Angabetexte aus Lehrbüchern stammen, kann man die Aufgaben nicht nur als Illustration für Einsatzzwecke der Mathematik in früherer Zeit sehen, sondern sie auch vor dem Hintergrund betrachten, welche Lernziele frühere Lehrer für ihre damaligen Schüler als bedeutsam erachteten.

Nach dem österreichischen Lehrplan der AHS ist das Arbeitsblatt ab der 3. Klasse einsetzbar.

Aufgabe 4 ist dabei nicht eindeutig lösbar, die Informationen im Text führen auf zwei Gleichungen mit jeweils drei Unbekannten. Von den Kindern wird verlangt zu begründen, warum es keine eindeutige Lösung gibt, anschließend sollen sie eine mögliche Lösung angeben. Während die Begründung des Auftretens von mehreren Lösungen rein verbal und ohne mathematischen Formalismus auskommen kann, wird zum Auffinden einer möglichen Lösung schon allein aus Übersichtlichkeitsgründen das Anschreiben der beiden Gleichungen sinnvoll sein. Die nötige gedankliche Übersetzungsarbeit vom Text in eine Gleichung muss also dafür vollzogen werden.
Aufgabe 5 lässt sich eindeutig lösen, allerdings müssen die Kinder drei verschiedene inhaltliche Informationen in drei Gleichungen umwandeln. Anschließend kann durch Einsetzen die Lösung ermittelt werden. In der dritten Klasse mag diese Aufgabe dem Einen oder Anderen noch zu schwer sein. Hier kann man als Lehrerin oder Lehrer etwas helfen. Das Potential der Aufgabe liegt zusammen mit Aufgabe 4 darin, dass man eine intuitive Vorstellung davon entwickeln kann, wie viel Information im Zusammenhang mit wie vielen unbekannten Größen benötigt wird, um eine eindeutige Lösung zu ermöglichen. Aufgabe 4 zeigt, dass zwei inhaltliche Informationen (zwei Gleichungen) dafür nicht reichen. In Aufgabe 5 hingegen steht mehr Information zur Verfügung, was zunächst die Möglichkeiten von Schwankungen der Zahlenwerte für die gesuchten Größen viel stärker einschränkt und letztendlich zu einer eindeutigen Lösung führt.
Weiters können die Lernenden mit dieser Aufgabe vielleicht zum ersten Mal auf besondere Vorteile der Übersetzung von sprachlichen Ausdrücken in mathematische Formelschreibweise hingewiesen werden. Die mathematische Schreibweise ist kürzer und prägnanter, die Information tritt klarer hervor. Mehrere mathematische „Sätze“ (Gleichungen) lassen sich leicht miteinander kombinieren, was mit sprachlichen Sätzen in dieser Form meist gar nicht möglich ist. Die Kombination (das gegenseitige Einsetzen der Gleichungen) jedoch ermöglicht erst die Lösung des zugrunde liegenden Problems.

In der 4. Klasse, wo die Schülerinnen und Schüler mit Gleichungssystemen schon vertraut sind, eignet sich das Blatt zur Wiederholung und Vertiefung, in der 5. Klasse etwa als Zusammenfassung der bisherigen Erkenntnisse bevor man zu quadratischen Gleichungen übergeht.
Unter den genannten historischen Aspekten und Methoden, die das Blatt anspricht, ist vor allem der interaktive Aspekt, der verschiedene Einsatzzwecke der Mathematik in den letzten Jahrhunderten beschreibt, bedeutsam. Zwar handelt es sich um keine Aufgaben aus der Praxis, die aus einer realen Situation heraus in genau dieser Form zu lösen waren, die bloße Anwesenheit derartiger Aufgabenstellungen in den historischen Lehrbüchern zeigt jedoch bereits den Stellenwert, der der Kompetenz um die Lösung solcher Problemstellungen beigemessen wurde. Aufgabe 4, die nicht

eindeutig lösbar ist, steht beispielhaft für viele Probleme des Alltags, die mehrere Lösungen oder gar keine Lösung besitzen. In der realen Welt schaut eben niemand darauf, dass ein schönes Ergebnis herauskommt und alle benötigten Angaben vorhanden sind.

Das Arbeitsblatt „Gleichungen: Konstanten im Wandel der Zeit“ eignet sich somit vielleicht weniger als typisches Übungsblatt vor einer Schularbeit, gibt aber Einblicke in die Verwendung mathematischer Kompetenzen in den letzten 3500 Jahren und spricht Verbindungen zu sozialen und gesellschaftlichen Verhältnissen an.

Quellen

Die ägyptischen Aufgaben aus dem Papyrus Rhind stammen aus der Übersetzung von Chace (1927) mit Kommentaren und Empfehlungen von Kline (1972).
Alle anderen Aufgaben wurden einer Zusammenstellung von Swetz (2000) entnommen.

Gleichungen: Konstanten im Wandel der Zeit

Von alten ägyptischen Papyri* bis zu den modernen Schulbüchern, von den entfernten Palästen Chinas bis zu den Burgen Europas: Über die ganze Welt verteilt verwendeten die Menschen quer durch die Geschichte immer wieder Gleichungen, um Probleme ihres Lebens zu lösen. In vielen Fällen waren dies Probleme ihres Alltags, wenn es etwa darum ging zu ermitteln, wie die zur Verfügung stehende Nahrung verteilt werden sollte.
Dieses Arbeits- und Übungsblatt ist eine Zusammenstellung von Aufgaben, die durch die Jahrhunderte verwendet wurden, um Lernenden den Umgang mit Gleichungen näher zu bringen.

Die ersten beiden Aufgaben stammen aus dem ägyptischen Papyrus Rhind, der um 1650 v. Chr. verfasst wurde und viele der so genannten „hau-Rechnungen“ enthält. Mit „hau“, das so viel wie „Haufen“ bedeutet, bezeichneten die Ägypter die Unbekannte.

1.) Ein Haufen und sein Viertel hinzugefügt ergibt zusammen 15. Wie groß ist der Haufen?

2.) Ein Haufen, sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$ und sein $\frac{1}{7}$ ergeben 33. Wie groß ist der Haufen?

Problemstellungen, die Lohn für erbrachte Arbeit betreffen, finden sich in vielen Kulturen. Hier eine Angabe aus den USA von 1873:

3.) Warner bekommt $2.50 pro Tag für seine Arbeit und bezahlt $0.50 pro Tag für seine Pension. Am Ende von 40 Tagen hat er 50$ gespart. Wie viele Tage hat er gearbeitet und wie viele Tage war er untätig?

Die folgenden beiden Aufgaben enthalten Hinweise auf Ungerechtigkeiten und ungleiche Behandlung der Geschlechter. Beide stammen aus England, die erste aus dem Jahr 800, die zweite aus dem Jahr 1800!

4.) Wenn 100 Büschel Korn unter 100 Leuten so aufgeteilt werden, dass jeder Mann 3 Büschel, jede Frau 2 Büschel und jedes Kind ein halbes Büschel bekommt, wie viele Männer, Frauen und Kinder gab es dann?
Begründe, warum diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar ist. Versuche, eine mögliche Lösung zu finden!

5.) 20 Männer, 40 Frauen und 50 Kinder bekommen 350$ für sieben Tage Arbeit. Wenn zwei Männer so viel bekommen wie 3 Frauen oder 5 Kinder, welche Summe bekommt eine Frau für eine Woche Arbeit?

Die Verteilung von Nahrungsmittel ist auch das Thema der letzten Aufgabe aus Ägypten um das Jahr 1600 v. Chr. Antike Völker nutzten Korn auch als Bezahlungsmittel und entrichteten damit Löhne und Steuern.

6.) Wenn der Schreiber sagt: Vier Aufseher bekamen insgesamt 120 große Körbe Korn. Die Gruppe des ersten Aufsehers bestand aus 12, die des zweiten aus 8, die des dritten aus 6 und die des vierten aus 4 Arbeitern. Wie viel erhält jeder der Aufseher?
(Welche Voraussetzung müssen wir machen, um diese Aufgabe eindeutig lösen zu können?)

---

*Mehrzahl von „Papyrus“: antikes Schreibmaterial, wurde zum Schreiben wie heute Papier verwendet

Lösungsblatt „Gleichungen: Konstanten im Wandel der Zeit“

1.) Benennen wir den unbekannten Haufen mit x, so lautet das in eine Gleichung übersetzte Problem in heutiger Schreibweise:

$$x + \frac{x}{4} = 15$$

$$\frac{4x}{4} + \frac{x}{4} = 15$$

$$\frac{5x}{4} = 15 \qquad | \cdot 4$$

$$5x = 60 \qquad | : 5$$

$$x = 12$$

Der Haufen ist 12.

2.) Nennen wir den Haufen x, so ist die zugehörige Gleichung

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$$

Wir bringen auf den gemeinsamen Nenner 42 und erhalten

$$\frac{42}{42}x + \frac{28}{42}x + \frac{21}{42}x + \frac{6}{42}x = 33 \qquad | \cdot 42$$

$$42x + 28x + 21x + 6x = 1386$$

$$97x = 1386 \qquad | : 97$$

$$x = \frac{1386}{97}$$

Der Haufen ist in moderner Dezimalschreibweise ungefähr 14,3.

3.) Wenn wir t die Anzahl der Tage nennen, an denen Warner arbeitet, lässt sich sagen: Am Ende von 40 Tagen hat Warner t mal \$2.50 erhalten und musste 40 mal \$0.50 für seine Pension bezahlen. Er hatte dann 50 \$, was auf die Gleichung

$$2.50 \cdot t - 0.50 \cdot 40 = 50$$ führt.

Also:

$$2.50t - 20 = 50 \qquad | + 20$$

$$2.50t = 70 \qquad | : 2.50$$

$$t = 28$$

Warner hat 28 Tage gearbeitet und war 12 Tage untätig.

4.) Die Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar, weil wir nicht genug Informationen haben. Wir wissen, dass wir es insgesamt mit 100 Leuten zu tun haben, aber wir wissen nicht, in welchem Verhältnis die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder zueinander stehen. Nur das Verhältnis der Aufteilung der Büschel ist bekannt. Bezeichnen wir die Anzahl der Männer mit x, die Anzahl der Frauen mit y und die Anzahl der Kinder mit z, so lautet die Angabe übersetzt in mathematische Schreibweise:

$$x + y + z = 100$$

$$3x + 2y + \tfrac{1}{2} z = 100$$

Um diese beiden Gleichungen zu erfüllen, gibt es nun mehrere Möglichkeiten. Eine davon wäre $x = 11$, $y = 15$ und $z = 74$. Eine andere ist $x = 8$, $y = 20$ und $z = 72$.

5.) Diese Aufgabe ist nun eindeutig lösbar, da sowohl etwas über die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder als auch über das Verhältnis der Verteilung ihrer Löhne bekannt ist.
Wenn x der Lohn eines Mannes, y der Lohn einer Frau und z der Lohn eines Kindes (jeweils für sieben Tage Arbeit) ist, können wir sagen:

$$20x + 40y + 50z = 350, \text{ wobei } 2x = 3y \text{ und } 2x = 5z.$$

Aus $2x = 3y$ folgt $y = \frac{2}{3}x$ und aus $2x = 5z$ ergibt sich $z = \frac{2}{5}x$.
Einsetzen in die Gleichung liefert

$$20x + 40 \cdot \frac{2}{3}x + 50 \cdot \frac{2}{5}x = 350$$

$$20x + \frac{80}{3}x + 20x = 350 \quad | \cdot 3$$

$$60x + 80x + 60x = 1050$$

$$200x = 1050$$

$$x = 5{,}25$$

Dann ist $y = \frac{2}{3} \cdot 5{,}25 = 3{,}5$. Eine Frau verdient somit für sieben Tage Arbeit \$3.50, also pro Tag \$0.50.

6.) Um die Aufgabe eindeutig lösen zu können, müssen wir annehmen, dass das Korn gemäß der Anzahl der Arbeiter aufgeteilt wird.

Wenn a die Anzahl der Körbe für den ersten Aufseher
b die Anzahl der Körbe für den zweiten Aufseher
c die Anzahl der Körbe für den dritten Aufseher und
d die Anzahl der Körbe für den vierten Aufseher bezeichnet, dann gilt

$$a + b + c + d = 120$$

Weiters können wir entsprechend der Verteilung der Arbeiter auf die Gruppen sagen:
$a = 12 \cdot t$, $b = 8 \cdot t$, $c = 6 \cdot t$ und $d = 4 \cdot t$, wobei t die Anzahl der Körbe pro Arbeiter ist. Es folgt

$$12t + 8t + 6t + 4t = 120$$
$$30t = 120$$
$$t = 4$$

$a = 12 \cdot 4 = 48$, $b = 32$, $c = 24$ und $d = 16$

Der erste Aufseher erhält 48 Körbe, der zweite 32 Körbe, der dritte 24 Körbe und der vierte 16 Körbe Korn.

2. Die Gleichungen des Al Khwarizmi

- **Geeignet für:** 4., 5. Klasse der AHS
- **Geschätzter Zeitaufwand:** 1 – 2 Unterrichtseinheiten
- **Erforderliche Vorkenntnisse:**
  - elementares Lösen von linearen Gleichungen und Rechnen mit Termen
  - Erfahrung beim Übersetzen eines Textes in eine Gleichung
  - Kenntnis der allgemeinen Form einer quadratischen Gleichung und der Lösungsformeln
  - Erfahrung mit der geometrischen Darstellung von Termen
- **Historische Aspekte und Methoden:** A1, A3, A4, M2, M3
- **Umfang:** 2 Seiten Arbeitsblatt, 1 Seite Lösungen

Didaktischer Kommentar

Das Arbeitsblatt „Die Gleichungen des Al Khwarizmi" stellt einen der größten arabischen Mathematiker aller Zeiten vor und beschreibt eine seiner Methoden, quadratische Gleichungen zu lösen. Es beinhaltet vier Aufgaben, die von den Schülerinnen und Schülern selbstständig alleine oder in Partnerarbeit gelöst werden sollen.

Die erste Aufgabe ist dabei nur eine Wiederholung der linearen Gleichungen, stammt allerdings direkt von Al Khwarizmi. Sie behandelt das Vererbungsrecht im Islam, eine Domäne, in der man von vornherein die Mathematik nicht unbedingt vermuten würde.

Im anschließenden Absatz wird die Existenz einer Lösungsformel für allgemeine quadratische Gleichungen erwähnt und es wird die Frage gestellt, wie sie lautet. Für Lernende aus der Oberstufe ist diese Frage als Wiederholung, für jene aus der Unterstufe als Auftrag zur Recherche gemeint. Man kann sie aber auch ignorieren.

Generell spricht nichts dagegen, die nun folgende geometrische Methode von Al Khwarizmi bereits in der Unterstufe zu behandeln. Bei den Aufgaben zu Gleichungen in der 4. Klasse fallen die quadratischen Terme immer weg und so könnte man eine Idee vermitteln, wie Gleichungen gelöst werden können, wenn sich die quadratischen Ausdrücke nicht „neutralisieren".

In Aufgabe 2 sollen die Schülerinnen und Schüler alle Fälle quadratischer Gleichungen aufschreiben, die sich ergeben, wenn die Koeffizienten nur positiv sein dürfen. Dies verlangt ein Verständnis für mathematische Fallunterscheidungen und eine Auseinandersetzung mit der damaligen Herangehensweise an mathematische Probleme. Daran anschließend wird an einem Beispiel die Lösung einer der Fälle demonstriert, wonach eine Übungsaufgabe folgt, in der die Lernenden selbst die Lösung einer quadratischen Gleichung ermitteln sollen. Es wird dabei in der Aufgabenstellung konkret darauf hingewiesen, dass eine Skizze und eine verbale Beschreibung verlangt sind. Die letzte Aufgabe dient der Reflexion der Methode, indem die Kinder Vor- und Nachteile gegenüber stellen sollen.
In dieser Form lässt sich das Arbeitsblatt an unterschiedlichen Stellen der mathematischen Ausbildung einsetzen:

- in der 4. Klasse als Ausblick nachdem man lineare Gleichungen mit quadratischen Ausdrücken behandelt hat
- in der 5. Klasse als Einstieg in das Thema der quadratischen Gleichungen
- in der 5. Klasse als Ergänzung und um die Errungenschaft einer Lösungsformel und der Algebra an sich herauszuarbeiten
- in der 7. Klasse als Wiederholung und Einleitung zu den Gleichungen höheren Grades und ihren Lösungsmethoden

Mit seinen Aufgaben deckt das Blatt sowohl mathematische Inhalte als auch historische und gesellschaftliche Belange ab.

Hintergrundinformationen

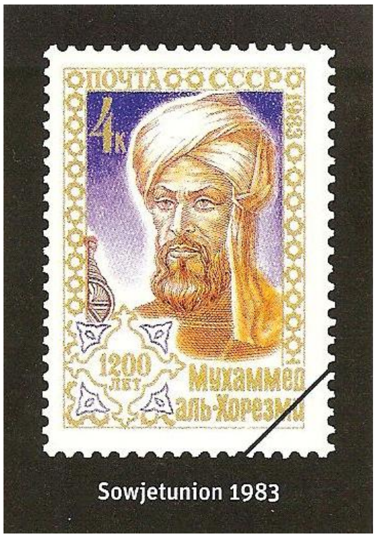
Von Abu Jafar Mohammed Ibn Musa Al Khwarizmi kennt man weder seine genauen Lebensdaten noch seinen Geburtsort. Erstere werden aber üblicherweise mit etwa 780 – 850 n. Chr. geschätzt. Sein Wirken fällt in eine Zeit, als der Kalif Al-Mamun von Bagdad aus ein Weltreich regierte, das sich von Spanien bis zu den Ausläufern des Himalaja erstreckte.
Der Herrscher gründete in Bagdad das „Haus der Weisheit“ als Zentrum der Wissenschaft. Dort wurden bedeutende Werke aus anderen Kulturkreisen ins Arabische übersetzt und es wurde eine umfangreiche Bibliothek angelegt. Zu den bedeutendsten Wissenschaftlern des „Hauses der Weisheit“ gehörte nun auch Al-Khwarizmi.
Sein **Werk** *Al Kitab al-muhtasar fi hisab <u>al-gabr</u> w-<u>al-muqalaba</u>* („Ein kurz gefasstes Buch über die

Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen“) ist die erste systematische Auseinandersetzung mit den Lösungsverfahren von Gleichungen seit Diophants *Arithmetica*. Al-Khwarizmi interpretiert die Gleichungen darin als geometrische Probleme. Deshalb sind als Lösungen nur positive Zahlen zugelassen, und auch die Koeffizienten dürfen nur positiv sein. Sind sie es nicht, so müssen die Ausdrücke mit negativem Vorzeichen erst durch die Operation *al-jabr* („Vervollständigen“, „Wiederherstellen“, „Ganzmachen“) auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden. Aus $3x^2 = 24 - 5x^2$ wird so etwa $8x^2 = 24$. *Al-muqalaba* bedeutet hingegen so viel wie „Ausgleich“, womit die Reduktion von positiven Ausdrücken derselben Potenz auf beiden Seiten der Gleichung gemeint ist. Aus $62 + x^2 = 14 + 12x$ wird so $48 + x^2 = 12x$. Durch diese beiden Operationen lassen sich alle Gleichungen auf die im Arbeitsblatt behandelten sechs Grundformen zurückführen, deren Lösung Al-Khwarizmi einzeln erklärt und geometrisch beweist.
Das Buch wurde im 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzt und bekam dort den Titel *Liber algebrae et almucalaba*. Aus dieser Verballhornung des arabischen Originaltitels entstand in Europa der Begriff *Algebra*. Auch der Name des Mathematikers stand Pate für eine moderne Wortkreation. Die lateinische Übersetzung von Al-Khwarizmis Buch über die indischen Ziffern trug den Titel *Algoritmi de numero Indorum*, wurde in der Folge oft mit *Algoritmi dixit* zitiert und führte so zu der Bezeichnung „Algorithmus“ für ein Rechenverfahren.
Al-Khwarizmi übernahm die indischen Ziffern, die wir seither arabisch-indische Ziffern nennen und erkannte die Vorteile der Dezimalschreibweise. Die Null verwendete er als Platzhalter und bezeichnete sie mit *as-sifr* („die Leere“), woraus sich in europäischen Sprachen die Wörter *zefiro* oder *zero* (italienisch), *chiffre* (französisch) und *Ziffer* (deutsch) entwickelten.
Neben der Mathematik führte Al-Khwarizmi auch umfangreiche Studien zur Astronomie. Er beschäftigte sich mit den Bewegungen der Himmelskörper und erfand auch genauere Sonnenuhren, damit die Muslime die korrekten Zeiten für ihre Gebete besser bestimmen konnten. Im Bereich der Geographie stellte er die Längen- und Breitenkoordinaten von 2402 markanten Punkten der damals bekannten Welt zusammen und korrigierte beispielsweise die Angaben des Ptolemäus hinsichtlich der Ausdehnung des Mittelmeeres in Ost-West-Richtung.

Quellen

Einige Fakten zu Al Khwarizmis Leben, die Fallunterscheidung und Zitate stammen aus Kaiser 2006. Die konkret vorgestellte Methode sowie das Bild auf der Briefmarke und die Skizze zur Lösung der quadratischen Gleichung wurden Strick 2009 entnommen.

Die Gleichungen des Al Khwarizmi



Schon in den Jahrhunderten vor Christus verwendeten die Menschen Gleichungen, um Probleme ihres täglichen Lebens zu lösen.

Die Probleme wurden dabei bis in die Neuzeit fast ausschließlich **verbal** behandelt und es gab lange Zeit kein allgemeines Schema (im Sinne einer Formel) für die Lösung der vorkommenden Gleichungen.
Einen wichtigen Schritt machte der arabische Mathematiker, Astronom und Geograph Abu Jafar Mohammed Ibn Musa **Al-Khwarizmi**, als er im 8. Jahrhundert sein Hauptwerk *Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr w-al-muqalaba* („Ein kurz gefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen") verfasste. Dieses Buch gilt als die Geburtsstunde der klassischen Algebra, wurde im 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzt und bildete die Grundlage für die weitere Behandlung von Gleichungen.

Laut Al-Khwarizmi enthält *al-gabr w-al-muqalaba* alles, „was Menschen bei Vererbungsangelegenheiten brauchen, bei Teilungsproblemen, bei Rechtsstreitigkeiten, im Handel und überhaupt bei allen gegenseitigen Beziehungen; oder auch bei der Landvermessung, beim Graben von Kanälen, bei geometrischen Berechnungen und vielen anderen Dingen."

Al Khwarizmi führt ein Beispiel zum Vererbungsrecht an:
Eine Frau stirbt und hinterlässt ihrem Ehemann, ihrem Sohn und ihren drei Töchtern ihr Erbe; ein Siebentel und ein Achtel des Vermögens stehen einer anderen Person zu. Nach islamischem Recht erbt der Ehemann ein Viertel des Rests, die männlichen Nachkommen doppelt so viel wie die Töchter.

Aufgabe 1: Wie viel erhält jeder der oben genannten Personen, wenn das Gesamterbe 112.000 Denare beträgt?

Die eigentliche Leistung des Al Khwarizmi ist der systematische Aufbau von Lösungsmethoden für quadratische Gleichungen.
Heute gibt es eine Lösungsformel, die eine schnelle und vergleichsweise einfache Methode darstellt, die Lösungen für eine gegebene quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zu finden. (Wie lautet sie?) a, b und c sind dabei reelle Zahlen.

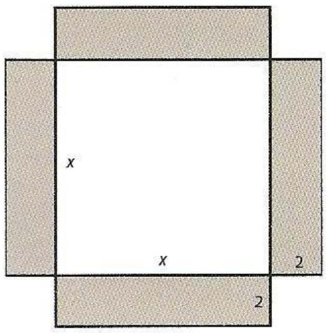
Al Khwarizmi verwendet keine Formel im heutigen Sinne, sondern betrachtet die Koeffizienten als Strecken und stellt sich alle Lösungswege geometrisch vor.

a, b und c dürfen daher bei ihm nur positive reelle Zahlen sein. Negative Zahlen und 0 werden nicht als Koeffizienten zugelassen und Gleichungen mit negativen Lösungen werden nicht behandelt.
Dies führt dazu, dass er sechs verschiedene Typen von quadratischen Gleichungen unterscheidet, für die er jeweils unterschiedliche Lösungsverfahren angibt. Dabei wird alles verbal ausgedrückt:

1) $ax^2 = bx$ („Quadrat ist gleich Wurzel")
2) $ax^2 = b$ („Quadrat ist gleich Zahl")
3) $ax = b$ („Wurzel ist gleich Zahl")
4)
5)
6)

Aufgabe 2: Vervollständige die Auflistung aller möglichen quadratischen Gleichungen, wenn die Koeffizienten nur positive Zahlen sein dürfen!
(Al Khwarizmi bezeichnet die Lösungen der quadratischen Gleichungen mit dem Ausdruck „Wurzel". Dies kommt vermutlich daher, dass die Lösung der einfachsten quadratischen Gleichung $x^2 = k$ mit $k \geq 0$ einfach die Wurzel von k ist und er das Wort „Wurzel" in der Folge für alle quadratischen Gleichungen verallgemeinert.)

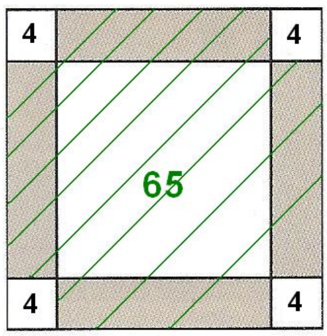
Zur Illustration zeigen wir die Lösung der Gleichung von einem der sechs Typen, wie sie Al Khwarizmi beschreibt, nämlich $x^2 + 8x = 65$ („Quadrat und Wurzel ist gleich Zahl").



$x^2 + 8x$, geometrisch dargestellt;

Wir betrachten zunächst ein Quadrat der unbekannten Seitenlänge x. Dieses ergänzen wir um vier Rechtecke mit den Seitenlängen x und dem vierten Teil von 8, das ist 2. Die entstandene Figur hat also den Flächeninhalt $x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x = x^2 + 8x$. Dies soll nach der Aufgabenstellung 65 sein.
Ergänzen wir die Figur zu einem Quadrat, so setzt sich dieses aus dem inneren Quadrat, den grau unterlegten Rechtecken und vier kleinen Quadraten mit der Seitenlänge 2 (also mit dem Flächeninhalt 4) zusammen. Der Flächeninhalt des ergänzten Quadrats ist also $65 + 4 \cdot 4 = 81$. Damit ist die Seitenlänge des großen Quadrats gleich 9 und nach Abzug von 4 ergibt sich, dass das ursprüngliche innere Quadrat die Seitenlänge 5 haben muss.

Aufgabe 3: Löse die Gleichung $x^2 + 10x = 39$ nach der Methode des Al Khwarizmi! (Diese Aufgabe kommt tatsächlich in seinem Buch vor.)
Beschreibe dabei deine Vorgehensweise nach dem obigen Muster verbal und mache eine Skizze!



dazu die quadratische Ergänzung

Aufgabe 4: Zeige, dass -13 ebenfalls eine Lösung von $x^2 + 10x = 39$ ist und erläutere anhand dieser Erkenntnis die Vor- und Nachteile der Methode von Al Khwarizmi!

Lösungsblatt „Die Gleichungen des Al Khwarizmi“

Aufgabe 1:

Die Frau hinterlässt 112.000 Denare, wobei ein Siebentel und ein Achtel nicht an die Familie gehen. Für den Ehemann, die Töchter und den Sohn bleiben also

$$112000-\frac{1}{7}\cdot 112000-\frac{1}{8}\cdot 112000 \;=\; 82000$$

Der Ehemann erbt ein Viertel des Rests, also $\frac{1}{4}\cdot 82000 \;=\; 20500$

Was übrig bleibt, teilen sich die drei Töchter und der Sohn so, dass der Sohn doppelt so viel erhält wie jede der Töchter:

$$\begin{aligned} x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2} &= 82000-20500 \\ \frac{5x}{2} &= 61500 \\ x &= 24600 \end{aligned}$$

Der Sohn erhält somit 24600 Denare, jede der Töchter 12300 Denare.

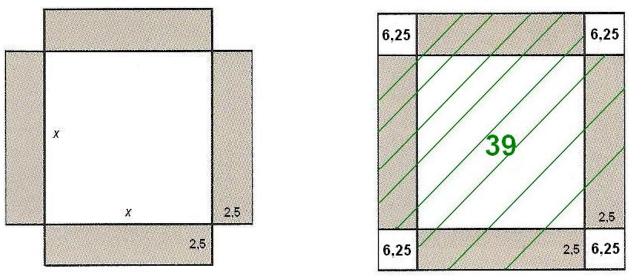
Aufgabe 2:

Die vollständige Auflistung aller quadratischen Gleichungen mit ausschließlich positiven Koeffizienten a, b und c ist:

1)	$ax^2 = bx$	(„Quadrat ist gleich Wurzel“)
2)	$ax^2 = b$	(„Quadrat ist gleich Zahl“)
3)	$ax = b$	(„Wurzel ist gleich Zahl“)
4)	$ax^2 + bx = c$	(„Quadrat und Wurzel ist gleich Zahl“)
5)	$ax^2 + c = bx$	(„Quadrat und Zahl ist gleich Wurzel“)
6)	$ax^2 = bx + c$	(„Quadrat ist gleich Wurzel und Zahl“)

Aufgabe 3:

Das Quadrat der unbekannten Seitenlänge x wird um vier Rechtecke mit der Länge x und der Breite 2,5 (dem viertel Teil von 10) ergänzt. Die entstandene Figur hat den Flächeninhalt $x^2 + 10x$, der laut Angabe 39 sein soll. Durch Ergänzung der Figur mit vier kleinen Quadraten der Seitenlänge 2,5 erhält man ein großes Quadrat mit dem Flächeninhalt $39 + 4\cdot 6{,}25 = 64$. Die Seitenlänge des großen Quadrats beträgt demnach 8 und nach Abzug von 5 erhält man die gesuchte Größe $x = 3$.



Aufgabe 4:

-13 ist Lösung von $x^2 + 10x = 39$, da $(-13)^2 + 10\cdot(-13) = 169 - 130 = 39$.

Al Khwarizmi betrachtete keine negativen Koeffizienten oder Lösungen. Aus heutiger Sicht kann man daher sagen, dass man durch die Anwendung seines Verfahrens nicht alle möglichen Lösungen erhält, sondern nur positive. Obwohl dies mathematisch sicher unbefriedigend ist, erhält man durch sein Verfahren ein Bild zu der gegebenen Gleichung und kann ihre Lösung auch auf einer anschaulichen Ebene verstehen. Man sieht, was passiert, und muss sich nicht mit dem abstrakten Umformen oder Einsetzen in eine Formel zufrieden geben.

3. Von der Geheimschrift zur Mathematik

- **Geeignet für:** Oberstufe (5. Klasse im Rahmen des Themenschwerpunkts „Sprache der Mathematik“)
- **Geschätzter Zeitaufwand:** 1 – 2 Unterrichtseinheiten
- **Erforderliche Vorkenntnisse:**
  - Grundkenntnisse der mathematischen Zeichensprache
  - Fähigkeit zur verbalen und inhaltlichen Interpretation der Symbole +, –, <, >, |...|
  - Kenntnisse des Assoziativ- und Distributivgesetzes
  - Erfahrung bei der geometrischen Darstellung von mathematischen Zusammenhängen
- **Historische Aspekte und Methoden:** A1, A2, M2, M4
- **Umfang:** 1 Seite Arbeitsblatt, 1 Seite Lösungen

Didaktischer Kommentar

Das Arbeitsblatt „Von der Geheimschrift zur Mathematik“ befasst sich weniger mit dem direkten Lösen von Gleichungen oder der Geschichte des Einsatzes von Gleichungen. Es legt die Betonung auf die Errungenschaft, mathematische Zusammenhänge nicht mehr ausschließlich verbal oder geometrisch darzustellen, sondern mit Hilfe einer symbolischen Kurzschrift. Aus der Möglichkeit, Ergebnisse durch Buchstaben und Formeln darzustellen schöpft die Mathematik bis heute einen großen Teil ihrer Kraft; sie ist aber auch dafür verantwortlich, dass mathematische Texte für Laien meist nicht zu durchschauen sind.

Die Grundlage des Arbeitsblatts ist die deutsche Übersetzung eines Originaltextes von François Viète. Der Franzose gibt zwar seine Erklärungen noch verbal an, beschreibt aber bereits entsprechende Zeichen, die für eine kurze Formulierung verwendet werden können. Die erste Aufgabe der Lernenden ist es, alle verbalen Angaben in heutige Formelsprache zu übersetzen. Es wurde bewusst ein Text gewählt, der inhaltlich relativ einfache Regeln beschreibt, sodass die eigentliche Mathematik den Schülerinnen und Schülern keine Schwierigkeiten bereiten sollte. Die Erkenntnis, dass solch einfache Inhalte aber sehr schwierig zu verstehen sind, wenn sie nur verbal beschrieben werden, und dass die mathematische Formelsprache das Verständnis wesentlich

erleichtert, ist ein bedeutsames Ziel dieses Arbeitsblatts.
In der Folge werden die Lernenden dazu aufgefordert, sich Viètes Erklärung durch grafische Darstellungen zu veranschaulichen und seine Erklärungen mit heute üblichen (etwa aus dem Schulbuch) zu vergleichen. Dadurch soll auch der Evolutionsaspekt herausgearbeitet werden. Schließlich spricht Aufgabe 4 noch ein Detail zum Text an, nämlich die Behandlung von negativen Zahlen. Es soll zeigen, dass die negativen Zahlen vor 400 Jahren noch weit davon entfernt waren selbst von Mathematikern anerkannt und in ihre Überlegungen mit einbezogen zu werden. Als Lehrer oder Lehrerin kann man hierzu vielleicht den Kindern noch weitere Informationen zukommen lassen (siehe Hintergrundinformation).
Das Arbeitsblatt eignet sich besonders zum Einsatz in der 5. Klasse, wo das „Reflektieren über das Erweitern von Zahlenmengen“ und das „Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln“ auf dem Programm steht. In vielen Fällen wird zusammen mit diesem Thema auch die Sprache der Mathematik behandelt, bei deren Erläuterung auch eine historische Perspektive nicht fehlen darf. Selbstverständlich lässt sich dieses Arbeitsblatt aber auch in allen anderen Klassen der Oberstufe gebrauchen, wenn es um mathematische Zeichensprache und eine Wertschätzung ihrer Entwicklung geht.

Hintergrundinformation

Das Arbeitsblatt „Von der Geheimschrift zur Mathematik“ spricht mehrere Aspekte an, die historisch für die Mathematik bedeutsam sind. Zur besseren Übersicht habe ich die Hintergrundinformationen deshalb in drei Teile gegliedert:

- eine historische Beschreibung des Lebens und Schaffens von François Viète einschließlich einer bemerkenswerten Anekdote,
- Informationen zur Entwicklung der symbolischen Kurzschrift mittels Variablen sowie
- eine Darstellung der Geschichte des Umgangs mit negativen Zahlen.

a) Das Leben und Schaffen von François Viète

François Viète war neben seiner Tätigkeit als Rechtsanwalt auch Berater des Königs, für den er Geheimschriften entschlüsselte. Derartige Regeln, Abstraktionen aus dem Rechtswesen und bereits bestehende Mathematik mischte er zu einer algebraischen Zeichensprache zusammen, die wir im

Wesentlichen noch heute verwenden.
Viète sah sich allerdings als Wiederentdecker einer verloren gegangenen Kunst, denn er konnte sich nicht vorstellen, dass die Alten Griechen ihre mathematischen Ergebnisse nur durch die vorgeblichen geometrischen Methoden erhalten hatten. Er studierte intensiv die Schriften des Apollonius, in denen es einige faszinierende Hinweise auf eine Vorgangsweise gibt, die den Erfolg der Griechen bei der Auffindung ihrer Beweise erklären konnte. Von der Aussage des zu zeigenden Satzes arbeitet man rückwärts, bis man auf eine Aussage stößt, von der man weiß, dass sie wahr ist. Anschließend dreht man die Schlusskette um und folgert aus der wahren Aussage den zu beweisenden Satz. Die in diesen Folgerungsschritten vorzufindenden Details lassen dann oftmals Verwunderung darüber aufkommen, wie der Autor des Beweises auf genau die dargestellten Schritte gekommen ist, denn die ursprünglichen Gedanken, die zur Entdeckung des Beweises führten, werden bei einer Veröffentlichung gewöhnlich weggelassen. Viète glaubte, dass die Alten Griechen die Spuren ihrer Arbeitsmethode in den veröffentlichten Werken vertuschten, um einerseits eine größere Bewunderung hervorzurufen, andererseits aber auch, um die Aufmerksamkeit auf die Schönheit des Beweises zu lenken.
Obwohl Viète diese Methode der Auffindung eines Beweises möglicherweise wiederentdeckte, gingen seine Betrachtungen weiter. Er erkannte die Stärke einer ausgefeilten Symbolik in der Formulierung mathematischer Ergebnisse. Viète ersetzte nicht nur die Unbekannte in einer Gleichung durch ein Symbol (etwa „x“), sondern begriff die Möglichkeiten, dieses Symbol selbst wie eine Zahl zu behandeln. Dadurch gewinnt die Darstellung gegenüber der rein verbalen Beschreibung nicht nur an Prägnanz und Eindeutigkeit, man kann zwei Gleichungen etwa auch addieren, was mit zwei Sätzen nicht möglich ist. Die Kombination von mathematischen Aussagen vereinfacht sich also und eröffnet den Zugang zu Schlussfolgerungen, die vorher nicht denkbar waren. Dies kann freilich so weit führen, dass die Symbole quasi das Denken übernehmen, d. h. es muss nicht mehr jede Umformung geometrisch nachvollzogen werden, solange man nach den festgelegten Regeln arbeitet.
Die Einführung von Koeffizienten stellt einen weiteren Schritt der Abstraktion dar, die Viète unternahm. Er erlaubte es nicht nur unbekannten, sondern auch bekannten Größen durch Symbole repräsentiert zu werden. Durch die allgemeinere Darstellung ließen sich auch schnellere allgemeinere Aussagen gewinnen. Man denke etwa an $x^2 - 5x + 9 = 0$ im Vergleich zu $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, wo die letztere Form die erste als Spezialfall enthält. Die Koeffizienten a_2, a_1, a_0 können dabei beliebige Zahlen annehmen und so gelang auch recht schnell eine einfachere Darstellung von Lösungsverfahren für Gleichungen.

An der Spitze seiner Kräfte nahm François Viète eine Herausforderung an, die auch aus heutiger Sicht noch staunen lässt. Der belgische Mathematiker Adriaan van Roomen forderte 1593 „die Mathematiker der ganzen Welt“ heraus, eine von ihm vorgegebene Monstergleichung fünfundvierzigsten Grades zu lösen (siehe unten). Zuvor hatte er eine Studie herausgegeben, in der er die wichtigsten Mathematiker seiner Zeit aufgeführt hatte. Als der holländische Botschafter ein wenig später den König von Frankreich Henri IV. besuchte, sprach er ihm ironisch sein Mitgefühl aus, dass Frankreich keine Mathematiker hätte, die in der Studie vorkämen und damit van Roomens Herausforderung annehmen könnten. Angestachelt ließ der König Viète, der in seinen Diensten stand, kommen und legte ihm die Gleichung vor. Viète sah sich das Problem an und konnte innerhalb von Minuten die positiven Lösungen nennen. Er hatte eine Verwandtschaft der Gleichung mit gewissen Gleichungen, denen er in der Trigonometrie begegnet war, erkannt und war dadurch in der Lage, die Lösungen so schnell zu bestimmen. Hätte van Roomen nur einen Koeffizienten geändert, hätte auch die Methode Viètes nicht mehr funktioniert. Dennoch war van Roomen von Viètes erstaunlicher Leistung so beeindruckt, dass er extra nach Frankreich reiste, um ihn zu treffen. Das Ereignis festigte Viètes Ruf als außerordentlicher Mathematiker und machte ihn weit über die Grenzen Frankreichs hinaus bekannt.

Van Roomens „Monstergleichung“:

$$\begin{gathered}
x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12300x^{39}+111150x^{37}-740259x^{35}+3764565x^{33}\\
-14945040x^{31}+46955700x^{29}-117679100x^{27}+236030652x^{25}-378658800x^{23}\\
+483841800x^{21}-488494125x^{19}+384942375x^{17}-232676280x^{15}\\
+105306075x^{13}-34512075x^{11}+7811375x^{9}-1138500x^{7}\\
+95634x^{5}-3795x^{3}+45x=A
\end{gathered}$$

wobei $A=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}$

Um zu zeigen, dass er die Koeffizienten nicht willkürlich gewählt hatte, sondern ein tieferes Verständnis für die Gleichung besaß, stellte van Roomen zusätzlich fest:

a) Falls $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, dann ist $x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$

b) Falls $A=\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$, dann ist $x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$

c) Falls $A=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, dann ist $x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{3}{16}}+\sqrt{\frac{15}{16}}+\sqrt{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}}}}$

Viètes Lösung:

Zunächst lassen sich die von van Roomen angegebenen Wurzelausdrücke vereinfachen. Hierzu braucht man einige Zusammenhänge zwischen Winkelfunktionen, die heute vielleicht nicht mehr zur Basisausbildung von Mathematikerinnen und Mathematikern gehören. Wir führen einige Schritte zur Vereinfachung exemplarisch an $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ vor.

(1) $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Man beginnt mit den Grundbeziehungen

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und

$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.

Durch Umformen erhält man aus der ersten Beziehung:

$-\sin^2(x) = \cos^2(x) - 1$.

Dies wird in die zweite Beziehung eingesetzt:

$\cos(2x) = \cos^2(x) + \cos^2(x) - 1 = 2\cos^2(x) - 1$ ■

(2) $\mathbf{2\cos(\alpha/2)=\pm\sqrt{2+2\cos(\alpha)}}$

Wir setzen $x = \alpha/2$ in (1) und formen um:

$2\cos^2(\alpha/2) = \cos(\alpha) + 1 \quad | \cdot 2$

$4\cos^2(\alpha/2) = 2\cos(\alpha) + 2 \quad | \sqrt{}$

$2\cos(\alpha/2)=\pm\sqrt{2+2\cos(\alpha)}$ ■

(3) Beziehung (2) ist eine interessante Rekursionsformel, die nun die folgende Kette an Überlegungen ermöglicht:

$$2\cos(\pi/4)=\pm\sqrt{2+2\cos(\pi/2)}=\pm\sqrt{2}$$

$$2\cos(\pi/8)=\sqrt{2+2\cos(\pi/4)}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$2\cos(\pi/16)=\sqrt{2+2\cos(\pi/8)}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$2\cos(\pi/32)=\sqrt{2+2\cos(\pi/16)}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Nun lässt sich die linke Seite der letzten Formel noch weiter vereinfachen:

$$2\cos(\pi/32)=2\sin(\pi/2-\pi/32)=2\sin(15\pi/32)=2\sin(15\pi/2^5)$$

Damit haben wir insgesamt: $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \;=\; 2\sin(15\pi/2^5)$

Auf eine ähnliche, aber noch deutlich aufwendigere Weise lässt sich zeigen, dass für das A in van Roomens Gleichung gilt:

$$A=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}} = 2\sin(\pi/15)$$

Wir müssen davon ausgehen, dass Viète sich mit diesen Zusammenhängen zwischen Wurzeln und trigonometrischen Funktionen sehr gut auskannte, weil er sich selbst schon eingehend damit beschäftigt hatte. Seine bemerkenswerteste Leistung ist jedoch wahrscheinlich, das Muster der Koeffizienten der Gleichung zu erkennen, um dann das gesamte Polynom wiederum auf trigonometrische Funktionen zurückzuführen.
In heutiger Schreibweise können wir definieren:

$$F_n(x):=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^i\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}x^{n-2i}$$

Es zeigt sich, dass $F_{45}(x)$ genau auf das Polynom führt, dass auf der linken Seite von van Roomens Gleichung steht. Viète kannte diesen Ausdruck bereits und wusste außerdem, dass für alle ungeraden natürlichen Zahlen n

$$2\sin(n\alpha)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot F_n(2\sin\alpha) \quad \text{gilt.}$$

Für n = 45 erhalten wir $2\sin(45\alpha) = (-1)^{22}\cdot F_{45}(2\sin\alpha) = F_{45}(2\sin\alpha)$

Setzen wir also in van Roomens Gleichung für x den Ausdruck 2sin(α) ein, so wissen wir, dass 2sin(45α) herauskommen muss, was bei van Roomen jedoch 2sin(π/15) ist.
Also folgt: 2sin(45α) = 2sin(π/15)
Durch einfaches Auflösen nach α und anschließendes Einsetzen erhält man eine mögliche Lösung für x:

$$\alpha=\frac{\pi}{45\cdot 15} \quad => \quad x=2\sin(\alpha)=2\sin\left(\frac{\pi}{45\cdot 15}\right)$$

Obwohl das Auffinden einer einzigen Lösung schon eine beeindruckende Leistung war, ging Viète noch weiter und bewies, dass es insgesamt 45 Lösungen gibt, davon 23 positiv und 22 negativ. Diese Erkenntnis wurde im späteren Verlauf der Geschichte noch bedeutsam, als es um die Formulierung und den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ging.

b) Bemerkungen zur Entwicklung der symbolischen Schreibweise bei Variablen

Obwohl François Viète ein sehr bedeutender Wissenschaftler war, wenn es um die Einführung der mathematischen Symbolsprache geht, stellt sein Beitrag doch nur einen Schritt in der Entwicklung zu der Formelsprache, die wir heute verwenden, dar. Es folgt ein kurzer Auszug aus 250 Jahren Geschichte, der die Evolution der mathematischen Symbolschrift illustrieren soll:

- Regiomontanus (um 1460) schrieb

  16 census et 2000 aequales 680 rebus

  für $16x^2 + 2000 = 680x$,
- Cardano (1545) schrieb

  Cubus p 6. rebus aequalis 20

  für $x^3 + 6x = 20$
- Viète (1540 – 1603) schrieb

  1 C – 8 Q + 16 N aequal. 40

  für $x^3 - 8\,x^2 + 16x = 40$
- Reymers († 1599) schrieb

  XXVIII XII X VI III I 0

  1 g 65532 + 18 ÷ 30 ÷ 18 + 12 ÷ 8

  für $x^{28} = 65532\,x^{12} + 18\,x^{10} - 30\,x^6 - 18\,x^3 + 12\,x - 8$
- Descartes (1596 – 1650) schrieb

  $z^3 \infty$ az – bb

  für $z^3 = az - b^2$
- Hudde (1633 – 1704) schrieb

  $x^3 \infty$ 9x + r

  für $x^3 = 9x + r$

Man sieht, dass wir erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts in den Schriften von Descartes und Hudde zum ersten Mal Notationen vorfinden, die sich von den heutigen kaum noch unterscheiden.

c) Geschichte des Umgangs mit negativen Zahlen

Die Aufgabe 4 des Arbeitsblatts fragt nach Viètes Umgang mit negativen Zahlen. Die Bearbeitung dieser Aufgabe soll den Schülerinnen und Schülern einen Hinweis dafür liefern, dass negative Zahlen im ausgehenden 16. Jahrhundert noch nicht von allen Mathematikern akzeptiert wurden. Tatsächlich dauerte es von ihrem ersten Auftreten an Jahrhunderte, bis mit den negativen Zahlen in der Mathematik so selbstverständlich umgegangen wurde wie heute.
Die ersten Anzeichen für negative Zahlen finden sich bereits bei den frühen Völkern, die Mathematik betrieben. Die Babylonier hatten in ihrer Zahlschrift ein Zeichen für „weniger als“, aber es ist unklar, ob in einem Ausdruck wie , der „20 – 1“ bedeutet, das letzte Zeichen wirklich als Zahl aufgefasst, oder ob nur damit gerechnet wurde. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei den Griechen, die praktisch gänzlich ohne negative Zahlen operierten. Lediglich bei Diophant von Alexandria (3. bis 4. Jahrhundert n. Chr.) findet sich eine Unterscheidung zwischen „hinzufügenden“ und „abzüglichen“ Zahlen, wobei er für letztere sogar ein eigenes Zeichen, nämlich  verwendet. Er gibt auch die Rechenregeln für negative Größen an, wenn er schreibt:

> „Minus mal minus ergibt plus, minus mal plus gibt minus.“

Dennoch vermutet man auch bei Diophant, dass ihm ein abstrakter Begriff von negativen Zahlen fremd ist. Er rechnet nur mit Differenzen, die einen positiven Wert haben, nie mit solchen, wo der Subtrahend größer als der Minuend ist. Bei Gleichungen achtet er durch entsprechende Wahl der Koeffizienten darauf, dass keine negativen Lösungen vorkommen können, weil er diese als „unstatthaft“ sieht. Die oben angegebene Regel verwendet er hauptsächlich dazu, um Ausdrücke der Form $(a - b)(c - d)$ zu vereinfachen.
Im chinesischen Rechenbuch „Chiu Chang Suan Shu“ treten negative Zahlen bei der Behandlung von Systemen von linearen Gleichungen auf, wobei Regeln für Addition und Subtraktion positiver und negativer Größen ausdrücklich formuliert werden.
Die Inder akzeptieren um 1100 negative Größen bereits als vollwertige Zahlen, wobei sie diese in den Rechnungen durch ein Pünktchen über dem Symbol kennzeichnen. Sie haben auch Worte für diese Größen, die sich mit „Vermögen“ bzw. „Schulden“ decken. Auch bei Gleichungen lassen sie negative Zahlen als Lösungen zu, vernachlässigen sie aber meist mit der Begründung: „Absolute negative Zahlen werden von den Leuten nicht gebilligt.“ Den Stand der Inder erreicht die europäische Mathematik erst 500 bis 600 Jahre später.
Hier ist es Leonardo von Pisa (genannt „Fibonacci“), der in einer mit „Flos“ betitelten Abhandlung um 1225 eine Aufgabe stellt, bei deren Lösung negative Geldbeträge vorkommen. Leonardo schreibt, die Aufgabe wäre nicht lösbar, wenn man nicht zuließe, dass einer der Akteure „Schulden“

hätte. Bereits einen Schritt weiter kommt der Franzose Chuquet, wenn er 1484 Aufgaben der folgenden Art betrachtet:

> „Gesucht sind fünf Zahlen von der Art, dass sie zusammen ohne die erste 120 ergeben, ohne die zweite 180, ohne die dritte 240, ohne die vierte 300 und ohne die fünfte 360."

Chuquet löst die Aufgabe und erhält für die erste Zahl 180, für die zweite 120, für die dritte 60, für die vierte 0 und für die fünfte – 60. Letztere beschreibt er mit „moins 60" und erklärt in der Folge die Richtigkeit seines Ergebnisses, „mögen auch andere Autoren solche Zahlen für unmöglich halten".

Michael Stifel lässt zwar 1544 wieder nur positive Zahlen als Lösungen von Gleichungen zu, bemerkt aber, dass die „absurden" oder „fingierten" Zahlen kleiner als 0 sind und dass die Null sich in der Zahlenreihe mitten zwischen beiden Zahlenarten befinde:

> „Wie man über die Einheit die ganzen Zahlen setzt und unter die Einheit die Brüche, so setzt man über die Null die Einheit mit den Zahlen und unter die Null die fingierte Einheit mit den fingierten Zahlen."

Der große Geronimo Cardano lässt negative Lösungen von Gleichungen zu und nennt diese „numeri ficti" (im Gegensatz zu „numeri veri"). Es ist ihm wichtig zu bemerken, dass man aus den negativen Lösungen einer Gleichung die „wahren" Lösungen einer anderen Gleichung herleiten kann. So ist – 4 etwa Lösung der Gleichung $x^2 = 4x + 32$. Cardano zeigt nun, dass $x^2 + 4x = 32$ die Lösung $x = +4$ hat. Die inhaltliche Bedeutung der negativen Lösungen erklärt Cardano wie Leonardo von Pisa mit Schulden.

Obwohl man bei der Auffassung von Chuquet, Stifel und Cardano von Fortschritten sprechen muss, waren die negativen Zahlen noch weit davon entfernt, als gleichwertig mit den positiven Zahlen anerkannt zu werden. Wie aus dem Arbeitsblatt ersichtlich ist, lässt François Viète am Ende des 16. Jahrhunderts wiederum keine negativen Zahlen zu und der Engländer Harriot glaubte etwa zur selben Zeit noch beweisen zu können, dass Gleichungen nur positive Lösungen besitzen dürfen!

Im Laufe des 17. Jahrhunderts bahnte sich langsam ein Umschwung an, der jedoch immer wieder ins Stocken kam. René Descartes verlieh dem Rechnen mit negativen Zahlen die gleiche Bedeutung wie jenem mit den positiven Zahlen, indem er ein und demselben Buchstaben positive wie auch negative Werte zuwies. Außerdem konnte innerhalb seiner analytischen Geometrie die negativen Größen geometrisch genauso schlüssig darstellen wie die positiven.

Rückschläge für Anerkennung der Lehre von den negativen Größen kamen etwa von John Wallis, Professor für Geometrie an der Universität Oxford. Er betrachtete 1695 die Ungleichungskette

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} \quad \ldots, \text{ wobei } \frac{1}{0} = \infty$$

und folgerte daraus, dass die negativen Zahlen größer als unendlich und nicht kleiner als Null wären. Er meinte:

> „Wie die Zahlen 1, 2, 3 von Null aus stetig wachsen, so nehmen die negativen Zahlen von ∞ aus stetig ab."

Antoine Arnauld fragte sich, wie die Gleichung 1 : (–1) = (– 1) : 1 richtig sein könne, wenn nach ihr ein fallendes Verhältnis gleich einem steigenden sein müsste. Noch 1759 liest man in einem Buch des damaligen Lektors von Cambridge Masares, die negativen Zahlen

> „ … dienen nur, soweit ich dies beurteilen kann, der Verwirrung der ganzen Lehre von den Gleichungen, … Man sollte sich daher wünschen, dass negative Wurzeln in der Algebra niemals zugelassen werden."

Leonhard Euler machte als Erster darauf aufmerksam, dass zwischen den positiven und negativen Größen ein zweifacher Zusammenhang, sowohl durch 0 als auch durch ∞, besteht. Damit schaffte er es, die Ansicht von Stifel und Wallis zu vereinigen. Überhaupt geht Euler mit den negativen Zahlen sehr praxisorientiert um. In seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra" (1770) erklärt er zunächst, dass es auf das Zeichen ankommt, welches vor der Zahl steht; handelt es sich um ein +, so spricht man von bejahenden oder positiven Größen, handelt es sich um ein –, so nennt man die Zahlen verneinend oder negativ. Nachdem Euler die negativen Größen als Schulden an konkreten Beispielen erläutert hat, hält er fest:

> „Da nun die negativen Zahlen als Schulden betrachtet werden können, … so kann man sagen, dass die negativen Zahlen weniger sind als Nichts … . Wie nun die positiven Zahlen unstreitig größer als Nichts, so sind die negativen Zahlen kleiner als Nichts … .Wird die Reihe der so genannten natürlichen Zahlen 0, +1, +2, +3 und so fort ins Unendliche, rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entsteht folgende Reihe der negativen Zahlen 0, –1, –2, –3 und so fort ohne Ende."

Diese Darstellung verzichtet auf eine philosophische Auseinandersetzung mit der Natur der negativen Zahlen. Dennoch beginnen sie sich im Lauf der folgenden Jahrzehnte vor allem im Bereich der praktischen Anwendung immer stärker durchzusetzen. Durch die Popularität und Verbreitung der Bücher Eulers gibt es nach und nach immer weniger Zweifler. Einer von ihnen ist De Morgan, der 1831 in einem Aufsatz den Ausdruck –b noch eine „Absurdität" anzeigen lässt. Die letzten Unsicherheiten vergehen endlich, als sich Carl Friedrich Gauß des Problems annimmt. Der „princeps mathematicorum" spricht von den negativen Zahlen als relative Zahlen und befreit sie auch von dem Zwang der allgemeinen Deutbarkeit, wenn er schreibt:

> „Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist.

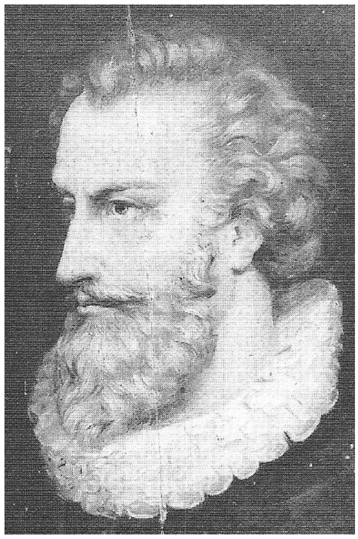
> Genau besehen findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind.“

Mit der Axiomatisierung der Zahlen allgemein kommt es dann am Ende des 19. Jahrhunderts auch zu einem anderen Verständnis der negativen Zahlen, sodass ihre Daseinsberechtigung heute von keiner Mathematikerin und keinem Mathematiker mehr bezweifelt wird.

Quellen

Die Idee für das Arbeitsbatt „Von der Geheimschrift zur Mathematik“ einschließlich des Originaltextes stammt von Bruckheimer und Arcavi (Bruckheimer 2000), die im Rahmen eines anderen Themenbereichs (Entwicklung der negativen Zahlen) Unterrichtsmaterialien zu historischen Themen anfertigten. Es wurde allerdings eine Auswahl in Bezug auf den Originaltext getroffen und der Ausschnitt wurde vom Autor ins Deutsche übersetzt.
Für die Hintergrundinformationen zu Viète war Pesic 2007 sehr hilfreich. Auch das Bild von Viète stammt aus dieser Quelle. Die Zusammenstellung der Entwicklung der Symbolsprache verdanke ich Pahl 1913.
Eine genauere Erläuterung der Gleichung van Roomens sowie detaillierte Hinweise zu Viètes Lösungsmethode findet der interessierte Leser auf http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2007/02/van-roomens-problem-solution-explained.html.
Für die Darstellung der Entwicklung im Umgang mit den negativen Zahlen wurden hauptsächlich Tropfke 1903 und Kaiser 2006 verwendet.

Von der Geheimschrift zur Mathematik



François Viète, ein französischer Rechtsanwalt und königlicher Berater, lebte von 1540 bis 1603. Langlebigen Ruhm erreichte er nicht durch seine Tätigkeit als Entschlüssler von Geheimschriften für den König, sondern aufgrund seiner mathematischen Leistungen, die den Großteil seiner Freizeit bestimmten.
Viète gilt heute als der Begründer der mathematischen Zeichensprache. Er schuf die Grundlagen, die eine knappere und exaktere Formulierung von mathematischen Ergebnissen ermöglichte, aber auch eine einfachere Kombination mathematischer Aussagen gestattete. Eine seiner wichtigsten Errungenschaften ist die Einführung von Variablen, die nicht nur mehr für Unbekannte standen, sondern auch für bekannte Größen, wie etwa die Koeffizienten einer Gleichung.
Der folgende Text stammt aus Viètes Werk *In Artem Analyticem Isagoge* („Einführung in die analytische Kunst") von 1591.

Regel II

Eine Größe von einer anderen Größe subtrahieren

Es seien zwei Größen A und B gegeben und die erstere sei größer als die letztere. Die kleinere soll von der größeren subtrahiert werden. … die Subtraktion kann durch das Trennungs- oder Entfernungszeichen des kleineren vom größeren angemessen ausgeführt werden; und getrennt werden sie zu A „minus" B, …

Die Vorgangsweise ist auch keine andere, wenn die Größe, die subtrahiert werden soll, mit einer weiteren Größe verbunden ist, denn das Ganze und die Teile werden nicht durch verschiedene Gesetze behandelt; so ist, wenn „B 'plus' D" von A subtrahiert werden soll, der Rest gleich „A 'minus' B, 'minus' D", die Größen B und D wurden also eine nach der anderen subtrahiert.
Wenn aber D bereits von B subtrahiert ist und „B 'minus' D" von A subtrahiert werden soll, so wird das Ergebnis „A 'minus' B 'plus' D" sein, denn bei der Subtraktion der ganzen Größe B übersteigt das, was subtrahiert wird, um die Größe D jenes, was subtrahiert werden sollte. Deshalb muss es durch die Addition dieser Größe D ausgeglichen werden.
Die Analysten sind es jedoch gewohnt, die Durchführung der Entfernung mit dem Symbol – zu kennzeichnen …

Wenn es nicht gesagt ist, welche Größe größer oder kleiner ist und die Subtraktion trotzdem durchgeführt werden muss, ist das Zeichen der Differenz =, z. B. wenn „A quadrat" und „B eben" die gegebenen Größen sind, wird die Differenz „A quadrat = B eben" oder „B eben = A quadrat" sein.

Aufgaben:

1. Übersetze alle mathematischen Aussagen der Regel II in moderne Schreibweise!
2. Viète erklärt seine Regeln auch. Mache dir Skizzen, um seine Erklärungen nachvollziehen zu können!
3. Vergleiche seine Erklärungen mit den heute üblichen!
4. Wie geht Viète mit negativen Zahlen um?

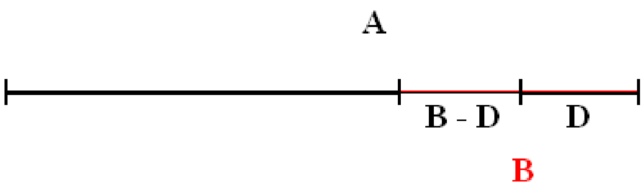
Lösungsblatt „Von der Geheimschrift zur Mathematik“

Aufgabe 1:

„Es seien zwei Größen A und B gegeben und die erstere sei größer als die letztere.“	A, B $A > B$
„ … und getrennt werden sie zu A „minus“ B …“	$A - B$
„ … so ist, wenn „B 'plus' D“ von A subtrahiert werden soll, der Rest gleich „A 'minus' B, 'minus' D“, … “	$A - (B + D) = A - B - D$
„Wenn aber D bereits von B subtrahiert ist und „B 'minus' D“ von A subtrahiert werden soll, so wird das Ergebnis „A 'minus' B 'plus' D“ sein, …“	$A - (B - D) = A - B + D$
„A quadrat = B eben“ oder „B eben = A quadrat“	$\lvert A^2 - B \rvert$

Aufgabe 2:

Manche Erklärungen, die Viète präsentiert, sind auf den ersten Blick nur schwer nachzuvollziehen. Leichter fällt es, wenn man die Aussagen durch Skizzen illustriert. Man könnte etwa die Größen A, B und D als Strecken darstellen. Die Erklärung für die Regel $A - (B - D) = A - B + D$ würde dann so aussehen:



In dieser Skizze erkennt man:
Wenn man von A die Größe $(B - D)$ abzieht („jenes, was subtrahiert werden sollte“) und den Rest, der übrig bleibt, betrachtet, ist dieser genau so groß, wie wenn man von A ganz B abzieht („das, was subtrahiert wird“) und anschließend D dazu gibt.

Aufgabe 3:

Heutzutage übliche Erklärungen für die Regeln, die Viète beschreibt, könnten so aussehen, wie in der Lösung zu Aufgabe 2 beschrieben. In einer Abwandlung wäre auch eine Darstellung auf dem Zahlenstrahl möglich. Außerdem könnte man das Minuszeichen vor der Klammer als Multiplikation mit (-1) interpretieren und das Distributivgesetz anwenden.

Aufgabe 4:

Viète lässt negative Zahlen bei seinen Überlegungen in keiner Weise zu. Dies kann man vor allem aus zwei Punkten herauslesen:

- Um die Subtraktion ausführen zu können, muss die erste Zahl größer als die zweite sein.
- Wenn man nicht weiß, welche Zahl größer ist, führt Viète das spezielle Zeichen = ein, um anzudeuten, dass die kleinere Zahl von der größeren abgezogen werden muss. Dadurch verhindert er ein negatives Ergebnis.

Von den ersten Überlegungen im Mittelalter dauerte es Jahrhunderte, bis negative Zahlen in der Mathematik allgemein akzeptiert waren. Noch im 18. Jahrhundert bestritten einige Lehrbücher die Regel, das Produkt zweier negativer Zahlen ergebe eine positive Zahl, und selbst Pierre Simon Laplace sagte 1795, diese Regel „weise einige Schwierigkeiten auf“.

4. Kampf um die Gleichungen

- **Geeignet für:** 7., 8. Klasse der AHS
- **Geschätzter Zeitaufwand:** 1 Unterrichtseinheit
- **Erforderliche Vorkenntnisse:**
  - Kenntnisse der Methoden zur Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen
  - Einsicht der Schwierigkeiten, die bei der Lösung von Gleichungen dritten und höheren Grades entstehen
  - allgemeine Fähigkeit zur Recherche von Daten und Fakten
- **Historische Aspekte und Methoden:** A2, A4, M1, M2
- **Umfang:** 3 Seiten Arbeitsblatt, 1 Seite Lösungen

Didaktischer Kommentar

Das Arbeitsblatt „Kampf um die Gleichungen" ist ein Lesetext, in dem eine besonders schillernde Episode aus der Geschichte der Mathematik dargestellt wird.

Nachdem der österreichische Lehrplan das Thema der Gleichungen höheren Grades erst in der 7. Klasse vorsieht, ist der Text auch erst ab dieser Stufe sinnvoll einsetzbar. Prinzipiell könnte man ihn auch schon davor verwenden (ab der 5. Klasse), da für die Bearbeitung der Aufgaben keine mathematischen Kenntnisse erforderlich sind, die nicht auch schon früher zur Verfügung stehen würden. Lediglich ein gewisses Verständnis für die Schwierigkeit einer allgemeinen Lösungsmethode für Gleichungen höheren Grades ist wünschenswert, um die Errungenschaften der vorgestellten Mathematiker in höherem Maße wertschätzen zu können. Inhaltlich passt der Text somit wohl am besten in die 7. Klasse.

Die eingestreuten Aufgaben sind keine klassischen Rechenaufgaben, sondern sollen die Lernenden zum Mitdenken anregen und sie dazu bringen, sich auch über den Text hinaus mit dem Thema zu beschäftigen. Konkret sollen die Schülerinnen und Schüler einen mathematischen Inhalt recherchieren (Aufgabe 2), die Bedeutung der Wortwahl innerhalb eines historischen Texts vermuten (Aufgabe 3) und vorhandenes Wissen wiederholen (Aufgabe 1). Alle Antworten sollen dabei natürlich schriftlich zu Papier gebracht und gegebenenfalls durch Quellenangaben untermauert werden.

Das Ziel des Textes besteht insgesamt natürlich darin, anhand dieses konkreten Beispiels die

Interaktion zwischen Mathematikern zu zeigen und klar zu machen, dass mathematische Ergebnisse durch das (zum Teil auch rüpelhafte) Zusammenwirken mehrerer Wissenschaftler zu Stande kommen. Im Besonderen geht es dabei natürlich auch darum, einige Personen vorzustellen, die auf ganz und gar menschliche Weise mit ihren Problemen umgingen, um damit dem Bild von der entmenschlichten und emotional kalten Mathematik etwas entgegenzustellen.
Die dargestellte Episode könnte natürlich auch leicht im Unterricht als Anekdote erzählt werden. Der Text ist aber ein Versuch, diesem Aspekt mehr Bedeutung zukommen zu lassen, indem die Lernenden durch das selbstständige Lesen und Bearbeiten mehr Zeit damit verbringen und somit das Thema durch die Erzählung der Lehrers nicht nach fünf Minuten schon wieder erledigt ist.

Quellen

Die Geschichte von der Auflösbarkeit der Gleichungen dritten und höheren Grades stammt großteils aus Pesic 2007. Die Begründung für das Interesse an Gleichungen dritten und vierten Grades sowie einige Originalzitate finden sich in Kaiser 2006.
Die Bilder stammen aus Pesic 2007.

Kampf um die Gleichungen

Das Zurückführen von Problemen der Wissenschaft und des Alltags auf Gleichungen und die Lösung derselben war schon lange vor Christus in verschiedenen Kulturen verbreitet. Eine systematische Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen gelang dann zum ersten Mal dem arabischen Mathematiker Al-Khwarizmi im 8. Jahrhundert nach Christus. 700 Jahre später sollte die Auseinandersetzung über die Lösung der Gleichungen dritten Grades zum ersten Prioritätenstreit in der Geschichte der Naturwissenschaften führen.

Padua, 1545. Girolamo Cardano ist ein Mann mit vielen Talenten. Als Abgänger der Universität von Padua und Pavia interessiert er sich für Medizin, Astrologie, Glücksspiele und Mathematik. In diesem Jahr erscheint sein wahrscheinlich bedeutendstes Werk, die *Ars magna* (die „Große Kunst“).
Darin stellt Cardano die systematischen Lösungsmethoden für Gleichungen dritten und vierten Grades vor. Es ist nicht ausschließlich seine eigene Arbeit, sondern die Zusammenfassung der gemeinsamen Anstrengungen mehrerer Mathematiker der letzten 500 Jahre.

Aufgabe 1: Erkläre, was man unter linearen und quadratischen Gleichungen, kubischen Gleichungen und Gleichungen vierten Grades versteht!

Der erste, der sich systematisch mit der Lösung von Gleichungen dritten Grades beschäftigte, war um 1100 der Araber Omar Al-Khayyam.
Zur damaligen Zeit gab es eine Reihe von offenen Fragen, die auf die Lösung derartiger Gleichungen zurückzuführen waren. Das griechische Problem der Würfelverdoppelung führte auf eine Gleichung dritten Grades, ebenso wie die Bestimmung der Seite eines regelmäßigen Neunecks, die von dem Araber Al-Biruni untersucht wurde. Ibn Al-Haitham stieß zudem bei seiner Beschäftigung mit der Optik sogar auf das Problem, eine Gleichung vierten Grades lösen zu müssen.

Aufgabe 2: Recherchiere, was mit dem Problem der Würfelverdoppelung gemeint ist!

Obwohl jedem der genannten Personen die Lösung ihrer speziellen Gleichungen mittels besonderer Tricks gelang, wurde durch das Auftauchen von Problemen dieser Art der Ruf nach einer systematischen Lösungsmethode laut. Omar Al-Khayyam machte nun den ersten Schritt, indem er die kubischen Gleichungen kategorisierte und für jeden der Typen ein Lösungsverfahren angab, das er ausführlich geometrisch bewies. Er bedauerte, dass er nicht in der Lage war, die Lösungen durch „algebraische Methoden“ zu bestimmen und hoffte, es würde „jemandem von denen, die nach uns kommen“ gelingen.

Aufgabe 3: Was könnte Omar Al-Khayyam mit „algebraischen Methoden" meinen?

In Folge versuchten sich immer wieder Leute daran, eine Lösung zu finden – zunächst mit mäßigem Erfolg. Fibonacci meinte, diese Gleichungen wären nicht durch ganze Zahlen und Quadratwurzeln aufzulösen; Pacioli dachte sogar, sie wären überhaupt nicht durch Algebra zu lösen; auch Pierro della Francesca, ein großer Mathematiker und Maler, versuchte erfolglos die Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades zu knacken.
Den Durchbruch schaffte schließlich ein buntes Häufchen italienischer Mathematiker zu Beginn des 16. Jahrhunderts, in deren Mittelpunkt Girolamo Cardano stand. Der Ablauf der Ereignisse ist nicht vollkommen klar, dürfte sich aber ungefähr wie folgt abgespielt haben.

Niccolò Fontana, genannt Tartaglia („der Stotterer"), behauptete als erster, das Problem der Gleichungen dritten Grades gelöst zu haben. Tatsächlich begann er wohl seine Arbeit, nachdem er gehört hatte, dass Scipione del Ferro die Lösung gefunden, sie aber nicht veröffentlicht, sondern vor seinem Tod einem seiner Studenten anvertraut hatte. Tartaglia war, wie viele seiner Zeitgenossen, mit den Urheberrechten nicht so genau – er hatte schon versucht eine fremde Archimedes-Übersetzung als seine eigene darzustellen und als Entdecker der Gesetze der schiefen Ebene durchzugehen. Sein Leben war sicherlich nicht einfach gewesen, seitdem er als Kind bei der französischen Invasion in Italien 1512 eine Säbelverletzung in der Nähe des Mundes erhalten hatte und dadurch sprechbehindert geworden war.

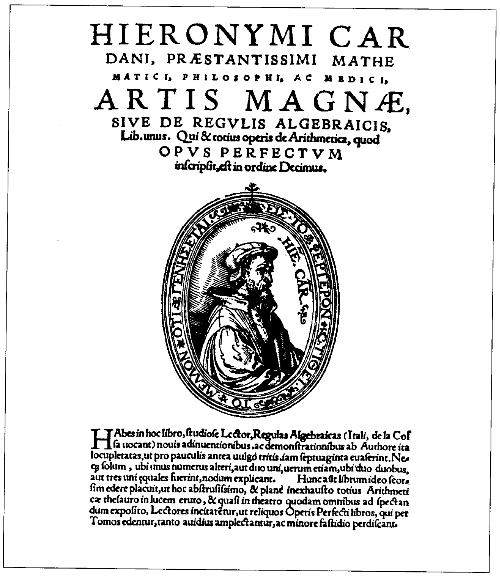
Ob Tartaglia einen Hinweis von del Ferros Studenten erhalten hat, ist nicht gesichert. Klar ist nur, dass er einen Durchbruch erzielte, der es ihm ermöglichte einen Wettbewerb gegen einen Studenten del Ferros zu gewinnen. Dies war möglich, da keiner der Beteiligten eine allgemeine Lösung für die allgemeine Gleichung dritten Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ besaß, sondern nur Lösungen für bestimmte Umformungen (wie etwa $bx^2 + d = x^3 + cx$), die alle unterschiedlich behandelt wurden.

Aufgabe 4: Zähle weitere mögliche Fälle für die Gleichungen dritten Grades auf!

Mathematische Wettbewerbe waren in dieser Zeit sehr beliebt. Sie bestanden darin, dass sich Mathematiker gegenseitig Aufgaben stellten, die der jeweils andere lösen musste, um das ansehnliche Preisgeld zu erhalten. Sie fanden öffentlich statt und wurden durch ihre populäre Anziehungskraft auch zur Prestigesache. Die Dienste von Mathematikern wurden zu dieser Zeit für die Verwaltung, das Bauwesen und viele andere Bereiche des öffentlichen Lebens in Anspruch genommen, sodass der Ausgang eines solchen Wettbewerbs schon mal über zukünftige Aufträge entscheiden konnte.

Die Nachricht von Tartaglias Sieg erreichte nun auch Girolamo Cardano, der Tartaglia bedrängte, ihm Details seiner Methode zu verraten. Als Gegenleistung wollte Cardano ein Treffen mit einem reichen Mäzen organisieren. Tartaglia war zwar argwöhnisch, brauchte aber das Geld. Er ließ Cardano schwören, nichts zu verraten und weihte ihn im Jahr 1539 in

das Geheimnis ein. Die Lösung nannte Tartaglia Cardano in Form eines schwerfälligen Gedichtes, das selbst so rätselhaft war, dass man es fast lösen musste. Dann passierte einige Jahre lang nichts, keiner der beiden veröffentlichte die Lösung.
Als Cardano jedoch 1543 Einsicht in del Ferros Papiere erhielt, erkannte er, dass dieser die Lösung der kubischen Gleichungen tatsächlich vor Tartaglia entdeckt hatte. Er fühlte sich deshalb berechtigt, die Lösung in seinem Werk *Ars Magna* zu veröffentlichen, wobei er sie del Ferro und Tartaglia zuschrieb. Seinen Schwur erwähnte er allerdings nicht, sondern setzte durch die Nennung von del Ferro die Urheberrechtsansprüche von Tartaglia herab. Obwohl im Nachhinein klar wurde, dass weder del Ferro noch Tartaglia die vollständige Lösung mit allen Unterfällen, die Cardano in seinem Buch präsentierte, besessen hatten, reagierte Tartaglia wütend auf die Veröffentlichung und bezichtigte Cardano des Plagiats. Dessen Schüler Ludovico Ferrari sah die Ehre seines Lehrers in Gefahr und forderte Tartaglia zu einem mathematischen Duell, welches Ferrari für sich entscheiden konnte. Tartaglia verließ den Wettbewerb frühzeitig und musste die Überlegenheit Cardanos hinnehmen.



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſsimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Ferrari hingegen machte sich – inspiriert durch Cardano – daran, eine Lösungsformel für die Gleichungen vierten Grades zu finden. Er verwendete einen etwas anderen Trick und hatte damit auch schnell Erfolg. Diesmal gab es keinen Streit: Ferrari schaffte es ganz alleine und seine Lösungsmethode erschien ebenfalls in der *Ars Magna*.

Durch die zeitlich so knapp beieinander liegenden Lösungen für den dritten und vierten Grad schien es, als hätte man die Gleichungen allgemein schließlich in den Griff bekommen und es wäre nur eine Frage von wenigen Jahren, bis auch höhergradige Gleichungen gelöst würden. In den nächsten Jahrzehnten scheiterten jedoch viele Mathematiker an der Gleichung fünften Grades und als selbst im gesamten darauf folgenden 17. Jahrhundert niemandem der Durchbruch gelang, begannen einige zu mutmaßen, es gäbe keine allgemeine Lösung mittels Wurzeln. Erst im Jahr 1824 schaffte ein 22-jähriger Norweger namens Niels Henrik Abel den Beweis, dass es tatsächlich nicht möglich ist, allgemeine Gleichungen fünften Grades durch Wurzeln aufzulösen. In den darauf folgenden Jahren konnte man dann zeigen, dass auch sämtliche Gleichungen höheren Grades nicht durch eine Formel gelöst werden können. Lösungen zu finden, ist somit nur noch durch Näherungsverfahren möglich.

Die Geschichte der Auflösbarkeit von Gleichungen überspannt, wie wir gesehen haben, mehrere Jahrhunderte. Auf dem Weg zur endgültigen Klärung der Frage liegen viele Ergebnisse, die gar nichts mit der ursprünglichen Frage zu tun hatten, die aber wesentliche Impulse für die Entwicklung neuer mathematischer Disziplinen gaben.

Lösungsblatt „Kampf um die Gleichungen“

Aufgabe 1:
In heutiger Schreibweise versteht man unter den genannten Gleichungstypen allgemein das Folgende:

lineare Gleichungen: $ax + b = 0$
quadratische Gleichungen: $ax^2 + bx + c = 0$
kubische Gleichungen: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $\qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Gleichungen n-ten Grades: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots n$

Aufgabe 2:
Das Problem der Würfelverdoppelung ist eines der drei klassischen Probleme der griechischen Mathematik. Es geht darum, einen Würfel mit der gegebenen Seitenlänge a zu verdoppeln, d. h. die Seitenlänge x eines Würfels zu finden, der das doppelte Volumen des Ausgangswürfels besitzt.
Für die beiden Volumina gilt also $x^3 = 2 \cdot a^3 \iff x^3 - 2a^3 = 0$, was tatsächlich eine Gleichung dritten Grades ergibt.

Ursprünglich wollte man das Problem der Würfelverdoppelung jedoch nicht algebraisch lösen, sondern rein geometrisch durch eine Konstruktion, die nur mittels Geraden und Kreisen („Zirkel und Lineal“) bewerkstelligt werden sollte. Dass dies jedoch nicht möglich ist, wurde erst im 19. Jahrhundert indirekt durch Galois bewiesen.

Aufgabe 3:
Da zur Zeit Omar Al-Khayyams noch keine Formelschreibweise üblich war, meint der Autor mit „algebraischen Methoden“ wohl eine Art numerische Rechenregel, mit deren Hilfe man die Lösung jeder beliebigen kubischen Gleichung bestimmen konnte.

Aufgabe 4:
Cardano unterscheidet insgesamt 14 Typen von Gleichungen dritten Grades. Ein Auszug davon ist:

- $\mathbf{x^3 + bx^2 = cx}$
- $\mathbf{x^3 = bx^2 + cx + d}$
- $\mathbf{x^3 + d = bx^2 + cx}$
- $\mathbf{x^3 = bx + c}$
- **…**

Die Koeffizienten beschränkt Cardano allgemein auf positive, rationale Zahlen. In seinen Bespielen kommen jedoch auch teilweise negative Koeffizienten vor.

5. Berühmt berüchtigt – Die Cardanoformel

- **Geeignet für:** 7., 8. Klasse der AHS
- **Geschätzter Zeitaufwand:** 1 – 2 Unterrichtseinheiten
- **Erforderliche Vorkenntnisse:**
  - Grundlegende Kenntnisse der Algebra, Arbeiten mit Gleichungen
  - Erfahrung im Lesen mathematischer Texte und algebraischer Umformungen
  - Schriftliches Erläutern mathematischer Gedankengänge
  - Kenntnis des Zusammenhangs der Lösungen einer Gleichung und der Nullstellen der zugehörigen Polynomfunktion
- **Historische Aspekte und Methoden:** A2, M3
- **Umfang:** 3 Seiten Arbeitsblatt, 2 Seiten Lösungen

Didaktischer Kommentar

Das Arbeitsblatt „Berühmt berüchtigt – Die Cardanoformel" knüpft an „Kampf um die Gleichungen" an, indem die im Text des zweiten Arbeitsblatts erwähnte Formel zur Lösung von algebraischen Gleichungen dritten Grades hergeleitet wird. Die Herleitung hält sich allerdings nicht an die historische Vorgabe von Cardano, sondern verfolgt einen modernen Weg, der zu einem allgemeinen Ergebnis führt und ohne die von Cardano noch durchgeführte Fallunterscheidung auskommt.

Der Auftrag an die Schülerinnen und Schüler besteht dabei in erster Linie darin, den mathematischen Ausführungen zu folgen, sie zu kommentieren und auf konkrete Aufgaben anzuwenden. Die Herleitung selbst müssen sie nicht durchführen.

Zunächst wird gezeigt, dass man durch geeignete Substitution den quadratischen Ausdruck in der allgemeinen Gleichung dritten Grades $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ wegfallen lassen kann. Die Lernenden sollen in Aufgabe 1 dann gleich die vorgeführte Methode an einem Zahlenbeispiel anwenden. Anschließend werden die nötigen Umformungen durchgeführt, die am Ende zur Formel von Cardano führen. Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei jeden Schritt schriftlich kommentieren. Es handelt sich hauptsächlich um die Anwendung algebraischer Regeln und

kleinerer Tricks, die die Lernenden durchschauen und festhalten sollen. Durch wiederholtes Durchführen derartiger Übungen könnte man die Fähigkeit steigern, sich im Selbststudium mathematisches Wissen anzueignen oder mathematische Fakten in unterschiedlichen Quellen zu recherchieren.
Aufgabe 3 verlangt die Bestimmung einer Lösung der am Beginn bearbeiteten Gleichung. In Aufgabe 4 werden schließlich die Probleme behandelt, die sich bei der Anwendung der Formel von Cardano ergeben können. Es treten oftmals negative Quadratwurzeln auf, obwohl die Lösungen reell sind. Mit dieser Aufgabe soll auch klar werden, warum die Formel von Cardano in der Praxis kaum Verwendung findet: Sie führt nicht immer direkt zum Ziel, sondern erfordert weiteres Wissen. Den Schülerinnen und Schülern wird eine Gleichung präsentiert, deren zugehörige Polynomfunktion drei reelle Nullstellen besitzt (der Graph der Funktion ist dargestellt) und sie werden aufgefordert, die Lösung mit der Formel von Cardano zu bestimmen. Auftretende Probleme sollen sie wieder beschreiben.
Aufgrund des Themas „Gleichungen dritten Grades“ eignet sich das Arbeitsblatt für Lernende ab der 7. Klasse der AHS. Es hat primär historischen Charakter und kann als Ergänzung zu möglichen Lösungsmethoden für Gleichungen höheren Grades verwendet werden. Dass die Schülerinnen und Schüler hier aufgefordert werden, Überlegungen nachzuvollziehen und zu kommentieren, kann zusätzlich eine Abwechslung zum Durchschnittsunterricht darstellen. Der Schwierigkeitsgrad des Arbeitsblatts hängt somit auch davon ab, wie viel Erfahrung die Jugendlichen mit dem Lesen mathematischer Texte haben.

Hintergrundinformationen

Das Arbeitsblatt zeigt detailliert die Herleitung der Formel von Cardano.
Obwohl es im allgemeinen drei Lösungen einer Gleichung dritten Grades geben kann, liefert die Formel augenscheinlich nur eine davon.
Bei der Bestimmung der anderen beiden Lösungen erweisen sich die so genannten dritten Einheitswurzeln als bedeutsam, also die Lösungen der Gleichung $x^3 - 1 = 0$. Einer der ersten, dem die Bedeutung der Einheitswurzeln im Zusammenhang mit der Lösung von algebraischen Gleichungen auffiel, war Joseph-Louis Lagrange. Sein Artikel von 1771 *Refléxions sur la resolution algebébrique des équations* („Überlegungen zur algebraischen Auflösung von Gleichungen“) wurde von seinen Nachfolgern als grundlegendes Dokument betrachtet.

Es gilt $0 = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Daraus folgen $x_1 = 1$ und $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Setzt man $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, dann ist

$\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ und es lässt sich schreiben $x^3 - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)$.

Für den allgemeinen Fall $x^3 - a = 0$ erhält man zunächst eine Lösung mit $x_1 = \sqrt[3]{a} =: \alpha$.

Dann gilt $0 = x^3 - \alpha^3 = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$.

Aus $x^2 + \alpha x + \alpha^2 = 0$ ergeben sich $x_{2,3} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2} = \alpha \cdot \left(\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \right) = \alpha \cdot \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \right)$

Die zweite und dritte Lösung lässt sich also mit Hilfe der dritten Einheitswurzeln jeweils in Abhängigkeit von der ersten schreiben: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha \cdot \omega$, $x_3 = \alpha \cdot \omega^2$

Beziehen wir diese Überlegungen in die Herleitung der Formel von Cardano mit ein, so müssen wir also berücksichtigen, dass es für jede der dritten Wurzeln im allgemeinen drei verschiedene Werte (u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3) gibt und damit für die Lösung $x = u_i + v_j$ ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) rein kombinatorisch neun verschiedene Möglichkeiten in Frage kommen.

Aus $v = -\frac{a}{3u}$ wissen wir aber, dass $u \cdot v = -\frac{a}{3}$, dass also das Produkt von u und v insbesondere reell sein muss. Diese Bedingung erfüllen nur die Kombinationen u_1, v_1 sowie u_2, v_3 und u_3, v_2.

Setzen wir $u_1 =: u$ und $v_1 =: v$ so lässt sich zusammenfassend für die drei Lösungen der Gleichung dritten Grades schreiben:

$$x_1 = u + v$$

$$x_2 = u\omega + v\omega^2$$

$$x_3 = u\omega^2 + v\omega \qquad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Quellen

Die dargestellte Herleitung für die Formel von Cardano findet man in allen Standardwerken zur Algebra.

Die zusätzlichen historischen Informationen stammen aus Pesic 2007.

Berühmt Berüchtigt – Die Cardanoformel

Im Jahr 1545 präsentierte Girolamo Cardano in seinem Werk „Ars Magna" (Die Große Kunst) eine Methode zur systematischen Auflösung von Gleichungen dritten Grades. Diese Methode, die mehrere Unterfälle beinhaltete, ist heute unter dem Stichwort „Cardanoformel" in der Literatur zu finden.
Ähnlich wie die Formeln zur Lösung von quadratischen Gleichungen lässt diese Formel die Bestimmung der Lösungen kubischer Gleichungen zu. Warum plagt man sich mit dem Abspalten von Lösungen, Polynomdivisionen, dem Hornerschema oder Näherungsverfahren, wenn es eine einfache Formel gibt?
Dieser Frage gehen wir im Folgenden nach …

Wir betrachten die allgemeine Gleichung dritten Grades $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, wobei a_0, a_1, a_2, a_3 reelle Zahlen sein sollen. Als Beispiel wählen wir $2x^3-12x^2+30x-56=0$.

Aufgabe 1: Führe die folgenden Schritte, die hier allgemein vorgeführt werden, an dem angegebenen Beispiel durch und erläutere!

Zunächst wird die Gleichung normiert.

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \quad | : a_3$$

$$x^3+\frac{a_2}{a_3}x^2+\frac{a_1}{a_3}x+\frac{a_0}{a_3}=0$$

Nun definieren wir neue Namen für die Koeffizienten:

$$x^3+b_2x^2+b_1x+b_0=0$$

Um den quadratischen Term verschwinden zu lassen, führt man eine neue Variable y ein. Man setzt

$$x := y-\frac{b_2}{3}$$

Nachdem man eingesetzt und ausmultipliziert hat, ergibt sich eine Gleichung der Form

$$y^3+c_1y+c_0=0$$

Die beschriebene Umformung ist mit jeder Gleichung möglich. Deshalb muss man zur Lösung nur die obige reduzierte Form betrachten.

Sei also die Gleichung $x^3+ax+b=0$ gegeben. Die folgenden Schritte zeigen in moderner Schreibweise, wie man sie nach der Methode von Cardano lösen kann. Wir werden dabei aber nicht bis ins letzte Detail gehen.

Aufgabe 2: Kommentiere jeden der gekennzeichneten Schritte in der folgenden Herleitung, indem du erklärst, was passiert und gegebenenfalls, warum der jeweilige Schritt zulässig ist!

$$x^3+ax+b=0$$

Wir setzen x := u + v. Eine dieser beiden neuen Variablen kann dabei frei gewählt werden. (Kommentar 1 ...)

$$(u+v)^3+a(u+v)+b=0$$

$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+au+av+b=0 \quad \text{(Kommentar 2 ...)}$$

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+a(u+v)+b=0 \quad \text{(Kommentar 3 ...)}$$

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+a)+b=0 \quad \text{(Kommentar 4 ...)}$$

Jetzt wählen wir v so, dass 3uv + a = 0, also $v=-\frac{a}{3u}$ (Kommentar 5 ...)

$$u^3+\left(-\frac{a}{3u}\right)^3+b=0 \qquad | \cdot u^3$$

$$u^6+bu^3-\frac{a^3}{27}=0$$

Ersetze u^3 durch z: (Kommentar 6 ...)

$$z^2+bz-\frac{a^3}{27}=0$$

$$z_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}} \quad \text{(Kommentar7 ...)}$$

Also erhalten wir für $u=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$

Um v zu bestimmen könnten wir versuchen, u in $v=-\frac{a}{3u}$ einzusetzen, was jedoch nicht zum Ziel führt. Stattdessen wenden wir einen Trick an:

Wir betrachten zunächst u^3 mit der Addition unter der dritten Wurzel und definieren $\alpha:=-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$. Dann gilt

$$u^3 \cdot \alpha = \left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}\right)\cdot\left(-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}\right) = \frac{b^2}{4}-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right) = -\frac{a^3}{27} \quad \text{und somit}$$

$$\alpha=-\frac{a^3}{27u^3}, \quad \text{woraus folgt} \quad \sqrt[3]{\alpha}=-\frac{a}{3u}, \quad \text{also} \quad \sqrt[3]{\alpha}=v.$$

v hat also dieselbe Struktur wie u, nur befindet sich unter der dritten Wurzel ein Minuszeichen.

Aufgabe 3: Zeige analog, dass falls $u=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$, ist $v=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$!

Da die Lösung x = u + v ist, erhält man so nur **eine** mögliche Lösung (Warum genau?).

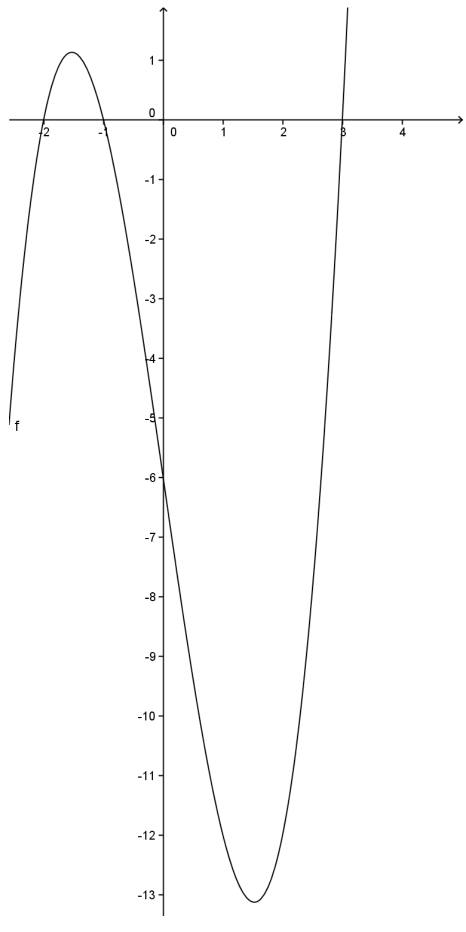
Diese Lösung ergibt sich insgesamt zu:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$$

Formel von Cardano

Aufgabe 4: Finde eine Lösung von $2x^3-12x^2+30x-56=0$ mit Hilfe der Formel von Cardano!

Unglücklicherweise stellte sich heraus, dass diese Formel nicht in allen Fällen so ohne Weiteres zum Ziel führt.



Wir betrachten etwa die Gleichung $x^3 - 7x - 6 = 0$.
Wie man durch Einsetzen leicht überprüfen kann, gibt es drei reelle Lösungen, nämlich –2, –1 und 3.

Der Graph der zugehörigen Funktion $f(x) = x^3 - 7x - 6$ ist rechts abgebildet. Die Lösungen erscheinen als Nullstellen der Funktion.

Aufgabe 5: Versuche diese Gleichung mit der Formel von Cardano zu lösen!
Gib alle Zwischenergebnisse an und beschreibe, mit welchem Problem sich die Mathematiker des 16. Jahrhunderts wohl konfrontiert sahen!

Lösungsblatt „Berühmt Berüchtigt – die Cardanoformel“

Aufgabe 1:

$$2x^3 - 12x^2 + 30x - 56 = 0 \quad | :2$$

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 28 = 0$$

Setze $x = y - \frac{-6}{3}$, also $x = y + 2$

Durch das Einführen der neuen Variable y erreichen wir, dass der quadratische Ausdruck wegfällt. Die Lösungen der ursprünglichen und der nach dem Ersetzen erhaltenen Gleichungen sind natürlich nicht dieselben. Haben wir y bestimmt, brauchen wir anschließend aber nur für x einzusetzen.

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 15(y+2) - 28 = 0$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 15y + 30 - 28 = 0$$

$$y^3 + 3y - 14 = 0$$

Aufgabe 2:

Kommentar 1: Wir setzen $x = u + v$. Wenn wir eine Zahl x durch die Summe zweier Zahlen u und v ausdrücken, lässt sich immer eine der beiden frei wählen. Die Größe der anderen Zahl hängt von dieser Wahl ab.
z. B.: Es soll $x = 12$ durch die Summe zweier Zahlen $u + v$ dargestellt werden. Man kann etwa v beliebig wählen, sagen wir $v = -8$. Dann muss aber $u = 20$ sein, damit $u + v = 20 + (-8) = 12$.
Der Trick in der Herleitung besteht darin, die Wahl auf einen späteren Zeitpunkt zu verschieben.

Kommentar 2: Ausmultiplizieren unter anderem durch Anwenden der binomischen Formel
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Kommentar 3: Herausheben von 3uv und u+v

Kommentar 4: Herausheben von u+v

Kommentar 5: Jetzt wird der Wert von v in Abhängigkeit von u gewählt. Die Wahl fällt so, dass das mittlere Produkt in der Gleichung wegfällt, was eine wesentlich einfachere Form zurücklässt.

Kommentar 6: Die Substitution $z = u^3$ macht aus der Gleichung sechsten Grades eine quadratische Gleichung.

Kommentar 7: Die quadratische Gleichung lässt sich mit Hilfe der kleinen Lösungsformel lösen.

Aufgabe 3:

Wir betrachten u^3 mit der Subtraktion unter der dritten Wurzel und definieren

$\beta := -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$. Nun folgt

$$u^3 \cdot \beta = \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right) \cdot \left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right) = \frac{b^2}{4} - \left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right) = -\frac{a^3}{27}$$ und somit

$\beta = -\frac{a^3}{27u^3}$, woraus man $\sqrt[3]{\beta} = -\frac{a}{3u}$ und damit $\sqrt[3]{\beta} = v$ erhält.
Auch in diesem Fall hat v dieselbe Struktur wie u, nur befindet sich unter der dritten Wurzel ein Pluszeichen.

Aufgabe 4:

In Aufgabe 1 haben wir aus $2x^3 - 12x^2 + 30x - 56 = 0$ die Gleichung $y^3 + 3y - 14 = 0$ gewonnen. Es ist a = 3 und b = –14. Einsetzen in die Formel von Cardano liefert

$$y = \sqrt[3]{\frac{14}{2} + \sqrt{\frac{14^2}{4} + \frac{3^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{14}{2} - \sqrt{\frac{14^2}{4} + \frac{3^3}{27}}} = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = 2$$

Um die Lösung der ursprünglichen Gleichung zu erhalten, müssen wir nur noch für y einsetzen.

$$x = y + 2 = 2 + 2 = 4$$

Eine Lösung von $2x^3 - 12x^2 + 30x - 56 = 0$ ist also $x = 4$.

Aufgabe 5:

Bei der gegebenen Gleichung ist a = –9 und b = –6. Mit der Formel von Cardano bekommt man

$$x = \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} + \frac{(-7)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} + \frac{(-7)^3}{27}}} = \sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

Es treten also negative Quadratwurzeln auf, für die es keine reelle Lösung gibt. Damals muss das Auftreten solcher nicht-reellen Zwischenergebnisse nicht nur irritierend, sondern auch sinnlos erschienen sein. Man weiß, dass es reelle Lösungen gibt, aber die Formel scheint diese nicht zu liefern.

(Die Auflösung dieser Diskrepanz gelang es später durch die Einbeziehung von komplexen Zahlen und die Formel von Moivre. Mit diesen Hilfsmitteln erhält man mit der Formel von Cardano die korrekten Lösungen. Man kann also sagen, dass die Formel ganz allgemein stimmt, ihre Anwendung aber oft zusätzliches Wissen und umfangreichere Berechnungen erfordert, was für die Praxis in vielen Fällen zu mühsam ist.)

6. Zwischen Sein und Nichtsein

- **Geeignet für:** 7. Klasse der AHS
- **Geschätzter Zeitaufwand:** 1 – 2 Unterrichtseinheiten
- **Erforderliche Vorkenntnisse:**
  - Grundlegende Kenntnisse der komplexen Zahlen als Lösungen von Gleichungen
  - Algebraisches Zusammenfassen von Termen beliebiger Ausdrücke (hier Terme, die $\sqrt{-1}$ beinhalten)
  - Kenntnis des binomischen Lehrsatzes, insbesondere der binomischen Formel für die dritte Potenz
  - Erfahrung im Umgang mit Winkel- und Exponential-funktionen
- **Historische Aspekte und Methoden:** A1, A3, M1, M2, M3
- **Umfang:** 3 Seiten Arbeitsblatt, 2 Seiten Lösungen

Didaktischer Kommentar

Das Hauptziel des Arbeitsblatts „Zwischen Sein und Nichtsein" ist, den Schülerinnen und Schülern zu zeigen, wie die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sind. Im Laufe dieser Geschichte wird demonstriert, wie schwer es selbst für große Mathematiker der Vergangenheit war, sich mit diesen Gebilden zu beschäftigen bzw. sie überhaupt als mathematische Symbole anzuerkennen. Die Schwierigkeiten waren dabei nicht, dass man nicht mit ihnen rechnen konnte, sondern bezogen sich fast ausschließlich auf ihre Deutung, d. h. auf den Versuch, sie für die „Realität" zu interpretieren. Erst im 19. Jahrhundert, als eine gute geometrische Veranschaulichung vorlag und auch algebraisch die Widerspruchsfreiheit der komplexen Zahlen erwiesen war, wurden sie zur mathematischen Realität und man fand auch schnell Anwendungen in den Naturwissen-schaften.

Das Arbeitsblatt folgt dem Verlauf der Geschichte der komplexen Zahlen in mehreren Stationen, die meist durch berühmte Mathematiker gekennzeichnet sind. Es beginnt im griechischen Altertum und setzt sich über Cardano, Bombelli und Euler bis zu Gauß fort, wobei die wesentlichen Beiträge dieser Mathematiker herausgearbeitet werden. Die Betrachtung der komplexen Zahlen erfährt dabei zahlreiche Wandlungen: Heron ignoriert das Problem scheinbar noch; Bombelli versucht das Reelle in Ausdrücken mit negativen Zahlen unter der Wurzel sichtbar zu machen und Gauß akzeptiert ihre Existenz (einschließlich der negativen Wurzeln) schließlich vollständig, sowohl auf geometrischer als auch auf algebraischer Ebene.

Neben dem eigentlichen Text, den die Lernenden lesen und verstehen sollen, gibt es insgesamt vier Aufgaben, die der Erzählung untergemischt sind und den Inhalt vertiefen sollen. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben kann als moderat bezeichnet werden, meist müssen die Schülerinnen und Schüler nur eine kurze Umformung oder eine kleine Rechnung machen. Die Aufgaben sollen die Jugendlichen nicht vor unlösbare Probleme stellen, sondern sie zum aktiven Mitdenken anregen und ihnen die Möglichkeit geben, sich in die Gedankenwelt der damaligen Zeit hineinzuversetzen.

Der Inhalt des Arbeitsblatts ist so gestaltet, dass man Basiskenntnisse über die komplexen Zahlen schon mitbringen sollte. Es eignet sich daher weniger als direkter Einstieg in das Thema, kann jedoch nach einer kurzen Einführung und einigen Rechenaufgaben bereits von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden. Da die komplexen Zahlen fast ausschließlich in der siebenten Klasse durchgenommen werden, ist das Arbeitsblatt im Wesentlichen auch auf diesen Zeitraum der mathematischen Ausbildung beschränkt.

Quellen

Die historischen Informationen stammen aus Kaiser 2006 und Tropfke 1902. Der Abschnitt über Bombelli wurde mit Hilfe von Humenberger 2010 gestaltet.

Die Bilder von Euler und Gauß stammen aus den jeweiligen Wikipedia Artikeln:

http://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gau%C3%9F

http://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

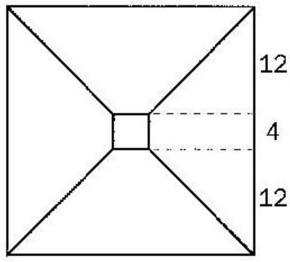
Zwischen Sein und Nichtsein

Ähnlich wie die negativen Zahlen hatten auch die komplexen Zahlen einen langen Weg hinter sich, als sie schließlich im 19. Jahrhundert langsam von allen Mathematikern anerkannt wurden. Einige Stationen ihrer Geschichte sollen uns im Rahmen dieses Arbeitsblatts beschäftigen.

Das Auftreten von Ausdrücken, die wir heute „komplexe Zahlen" nennen, hat historisch viel mit dem Auflösen von zunächst quadratischen Gleichungen zu tun, bei deren Lösung negative Zahlen unter einer Wurzel auftreten können (Erläutere!).

- ## Das Griechische Altertum

Einen ersten Hinweis auf negative Zahlen unter der Wurzel findet sich bei Heron (um 62 n. Chr.). Er versucht die Höhe eines quadratischen Pyramidenstumpfes zu bestimmen, dessen Grundfläche die Seite 28 Fuß, dessen Deckfläche die Seite 4 Fuß und dessen Kanten je 15 Fuß lang sind.



Aufgabe 1: Zeige, dass man beim Lösen dieser Aufgabe auf den Ausdruck $\sqrt{-63}$ stößt!

Heron rechnet in der Folge einfach mit $\sqrt{63}$ weiter; wir wissen nicht, ob er dies aus Versehen tut oder ob er die Unmöglichkeit des Ausdrucks nicht erkennt.
Auch Diophant (3. bis 4. Jahrhundert n. Chr.) erhält Gleichungen, deren Lösungen negative Zahlen unter der Wurzel beinhalten würden. Er geht jedoch auf die Lösungen dieser Gleichungen nicht ein.

Erst in der indischen Mathematik tritt ein Problembewusstsein für negative Zahlen unter der Wurzel auf. So schreibt Bhaskara im 12. Jahrhundert ausdrücklich: „Es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Größe, denn diese ist kein Quadrat."

- ## Geronimo Cardano

Der erste Ansatz, negative Größen unter der Wurzel zuzulassen, findet sich bei Geronimo Cardano. Im 37. Kapitel seines 1545 erschienen Hauptwerks *Ars Magna* versucht er, die Zahl 10 so in zwei Teile zu zerlegen, dass deren Produkt 40 ergibt.

**Aufgabe 2: Finde Lösungen für die Aufgabe Cardanos und schreibe diese unter Verwendung von Wurzeln aus negativen Zahlen.
Mache anschließend die Probe, indem du diese Ausdrücke in die ursprüngliche Gleichung einsetzt!**

Cardano rechnet ebenfalls mit diesen „radices minus" („negativen Wurzeln"), fügt jedoch hinzu, dass sie nur rein formale Größen seien, die nicht unter den Gesetzen der Rechenoperationen stehen und auch keine Deutung zuließen.

• Raphael Bombelli

Weitere Motivation, sich mit negativen Zahlen unter einer Wurzel zu beschäftigen, lag in einer Formel von Cardano, die das Auflösen von Gleichungen dritten Grades gestatten sollte. Raphael Bombelli betrachtete 1572 dabei die Gleichung $x^3 = 15x + 4$, von der sich durch Einsetzen schnell zeigen lässt, dass 4 eine Lösung ist.

Die Formel von Cardano liefert für die Lösung jedoch den Ausdruck $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, in dem die Wurzel aus –121 vorkommt und für den man daher vermutlich früher gesagt hätte, es gäbe keine Lösung. Konnte sich die 4 irgendwie in diesem Ausdruck verstecken?

Aufgabe 3: Berechne $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ und $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$ und zeige mit den Ergebnissen, dass tatsächlich gilt: $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4$

Bombelli verrät uns nicht, wie er auf $2\pm\sqrt{-1}$ gekommen ist, es öffnete sich aber eine Chance, die „imaginären" Ausdrücke, wie sie **Descartes** später nannte, doch noch auf etwas Reelles zurückzuführen.

Gottfried Wilhelm **Leibniz** entdeckt im Anschluss an Bombelli die Formel $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$ und bereichert uns durch eine mystische Schilderung der imaginären Größen. Er nennt sie 1702 eine „feine und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein."

• Leonhard Euler

Im Zuge des 18. Jahrhunderts begann man, das Imaginäre auch auf höhere Gebiete der Mathematik auszudehnen. 1748 zeigte Leonhard Euler in seiner *Introductio in analysin infinitorum* einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion e^x und den Winkelfunktionen sin(x) und cos(x), die Euler'sche Formel:

$$e^{ix}=\cos(x)+i\cdot\sin(x)$$

Das Symbol i für die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$) wird dabei erstmals von Euler verwendet. Mit Hilfe dieser Formel war es nicht nur möglich Funktionen, die ursprünglich nichts miteinander zu tun zu haben schienen, zu verbinden, man konnte über die Euler'sche Formel auch rein reelle Ergebnisse z. B. über Winkelfunktionen erhalten.

Es gelten etwa die folgenden Summensätze:

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) \qquad \cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

Mit der Euler'schen Formel lassen sich diese schnell beweisen:

$$\cos(x+y)+i\cdot\sin(x+y) = e^{i\cdot(x+y)} = e^{ix}\cdot e^{iy} = (\cos x+i\cdot\sin x)\cdot(\cos y+i\cdot\sin y) =$$
$$\cos(x)\cdot\cos(y)+i\cdot\sin(x)\cdot\cos(y)+i\cdot\cos(x)\cdot\sin(y)+i^2\cdot\sin(x)\cdot\sin(y) =$$
$$\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)+i\cdot(\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y))$$

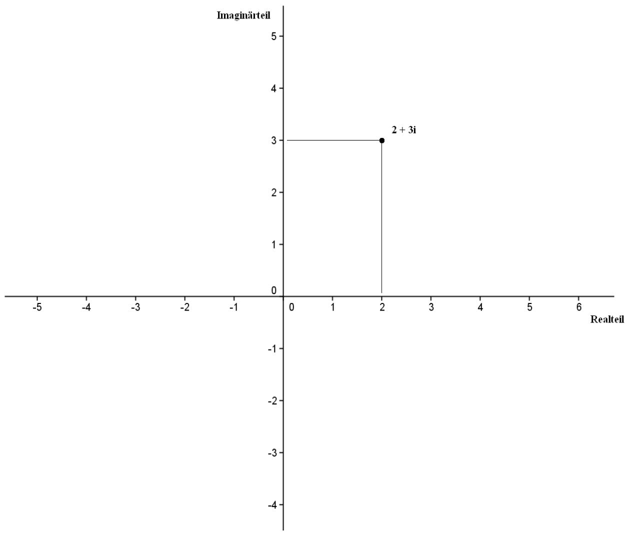
Vergleicht man nun die Real- und Imaginärteile des ersten Ausdrucks der Rechnung mit denen des letzten, so ergeben sich tatsächlich die oben dargestellten Formeln.

Aufgabe 4: Stelle analog zu den gerade behandelten Beziehungen Formeln für sin(x–y) und cos(x–y) auf!

Neben den dargestellten Zusammenhängen wurden in dieser Zeit auch Beziehungen zwischen dem Logarithmus und den Winkelfunktionen gefunden. Jedoch gelangen diese Verbindungen immer nur unter Zuhilfenahme von imaginären Größen, was diese zwar immer bemerkenswerter erscheinen ließ, zu ihrer Bedeutung im Sinne einer Interpretation aber wenig beitrug. Man rechnete am Ende des 18. Jahrhunderts unbefangen mit ihnen, konnte aber über ihr Wesen genauso wenig aussagen wie die Mathematiker 250 Jahre zuvor.

- ## Carl Friedrich Gauß

Erst mit Beginn des 19. Jahrhunderts trat langsam eine Besserung ein, indem versucht wurde, die imaginären Größen geometrisch zu deuten und sich somit ein Bild von ihnen zu machen.
Nachdem bereits mehrere andere Mathematiker Vorarbeiten geleistet hatten, gelang es Carl Friedrich Gauß, seiner geometrischen Interpretation nachhaltige Durchsetzungsfähigkeit zu verleihen.



Gauß führte die nach ihm benannte Zahlenebene ein und erklärte die komplexen Zahlen als Punkte in dieser Ebene. Er stellte aber auch einen streng algebraischen Begriff der komplexen Zahlen auf und zeigte, nach welchen Regeln man mit ihnen zu rechnen hatte und wie sich diese Regeln in der geometrischen Darstellung widerspiegelten.
Das Wort „komplexe Zahl" wurde dabei durch Gauß ein verbreiteter Ausdruck.

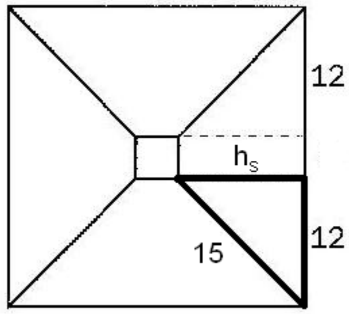
Durch die geometrische Deutung und die Vereinbarkeit mit den Rechenregeln wurden die komplexen Zahlen schließlich vollständig akzeptiert. Hermann Hankel, der die Theorie der komplexen Zahlen später weiterentwickelte, meinte zu ihrer Unmöglichkeit einmal (nach Kaiser 2006, S. 128):

> **„Als unmöglich gilt dem Mathematiker streng genommen nur das, was logisch unmöglich ist, d. h. sich selbst widerspricht … . Nachdem aber die Zahlen** $a+b\sqrt{-1}$ **eine geometrische Darstellung gefunden haben, und ihre Operationen geometrisch gedeutet worden sind, kann man dieselben in keiner Weise als unmöglich bezeichnen."**

Tatsächlich konnten in den Naturwissenschaften zahlreiche Anwendungen für die komplexen Zahlen gefunden werden. In der Elektrotechnik erleichterten sie bald die Berechnung von Schaltkreisen. In der Quantenmechanik wurden sie zu einem Mittel, die Natur überhaupt erklären zu können.
Nicht zuletzt eröffnete sich innerhalb der Mathematik die neue Disziplin der Funktionentheorie (oder komplexe Analysis), innerhalb derer man Zusammenhänge fand, die mit rein reellen Betrachtungen nicht entdeckt werden hätten können.

Lösungsblatt „Zwischen Sein und Nichtsein“

Aufgabe 1:



In dem fetteingezeichneten Dreieck berechnen wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zunächst die Höhe h_s:

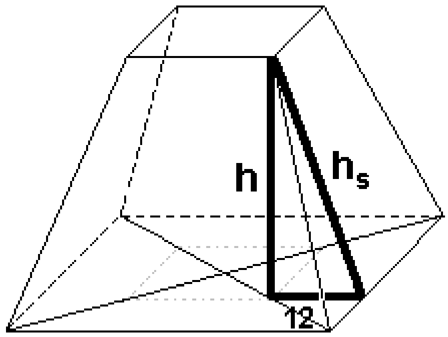
$$15^2 = 12^2 + h_s^2$$

also $\quad h_s = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$

Nun können wir in einem weiteren rechtwinkeligen Dreieck die Höhe h bestimmen. Erneute Anwendung des Satzes von Pythagoras liefert:

$$h_s^2 = 12^2 + h^2$$

somit $\quad h = \sqrt{h_s^2 - 12^2} = \sqrt{9^2 - 12^2} = \sqrt{-63}$



Die geometrische Interpretation dieses Ergebnisses ist, dass ein Pyramidenstumpf mit den angegebenen Maßen nicht existiert.

Aufgabe 2:

Die Zahl 10 soll so in zwei Teile zerlegt werden, dass ihr Produkt 40 ergibt. In heutiger Schreibweise führt das auf die Gleichung

$$x \cdot (10 - x) = 40$$
$$10x - x^2 = 40$$
$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 40} = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Einsetzen der ersten Lösung in die ursprüngliche Gleichung und naives Rechnen ergibt

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(10-\left(5+\sqrt{-15}\right)\right) = \left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-15}\right) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - \left(\sqrt{-15}\right)^2 = 25 - (-15) = 40$$

Es scheint also $5+\sqrt{-15}$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung zu sein.

Aufgabe 3:

Wir verwenden die binomischen Formeln: $\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + b^3$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3a b^2 - b^3$$

Damit erhalten wir:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=8+3\cdot 4\cdot\sqrt{-1}+3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2+\left(\sqrt{-1}\right)^3=8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1}$$

Wir haben verwendet, dass $\left(\sqrt{-1}\right)^3=\left(\sqrt{-1}\right)^2\cdot\sqrt{-1}=(-1)\cdot\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$ gilt.

Analog erhält man $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3=2-11\sqrt{-1}$

Wir wissen also nun umgekehrt, dass $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}$ und $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}$.

Also ergibt sich

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$$

Aufgabe 4:

Wir führen die analoge Rechnung für sin(x–y) und cos(x–y):

$$\cos(x-y)+i\cdot\sin(x-y) \;=\; e^{i\cdot(x-y)} \;=\; e^{ix}\cdot e^{i(-y)} \;=\; (\cos(x)+i\cdot\sin(x))\cdot(\cos(y)+i\cdot\sin(-y))$$

Da sin(–y) = – sin(y), folgt

$$\begin{aligned}&(\cos(x)+i\cdot\sin(x))\cdot(\cos(y)-i\cdot\sin(y)) \;=\\&\cos(x)\cdot\cos(y)+i\cdot\sin(x)\cdot\cos(y)-i\cdot\cos(x)\cdot\sin(y)-i^2\cdot\sin(x)\cdot\sin(y) \;=\\&\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)+i\cdot(\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y))\end{aligned}$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile des ersten und letzten Terms erhält man

cos(x–y) = cos(x) cos(y) + sin(x) sin(y)   und
sin(x–y) = sin(x) cos(y) – cos(x) sin(y).

7. Die Vereinigung zweier Gedankenwelten

- **Geeignet für:** ab der 5. Klasse AHS
- **Geschätzter Zeitaufwand:** 1 – 2 Unterrichtseinheiten
- **Erforderliche Vorkenntnisse:**
  - Basiskenntnisse im Umgang mit rechtwinkeligen Koordinatensystemen
  - Grundkenntnisse der Verwendung von Gleichung zur Beschreibung mathematischer Zusammenhänge
  - Kenntnis des Satzes von Pythagoras
  - Erfahrung im Lesen mathematischer Erläuterungen
  - Fähigkeit zur inhaltlichen Recherche von Themen mit Hilfe von Büchern und dem Internet
- **Historische Aspekte und Methoden:** A1, A3, A5, M2
- **Umfang:** 3 Seiten Arbeitsblatt, 2 Seiten Lösungen

Didaktischer Kommentar

Das Arbeitsblatt „Die Vereinigung zweier Gedankenwelten" lenkt die Aufmerksamkeit auf die Frage, wie es möglich ist, geometrische Objekte durch Gleichungen zu beschreiben.
In der Schule arbeiten wir bereits in der Unterstufe mit Geraden, Strecken, Kreisen und ihren zwei- bzw. dreidimensionalen Zusammensetzungen wie Dreiecken, Prismen, Kegeln usw. In der vierten Klasse taucht bei der Einführung von Funktionen zum ersten Mal die Gleichung einer Geraden auf. In der fünften Klasse werden Funktionsterme und deren zugehörige Graphen untersucht und spätestens in der siebenten Klasse haben es die Schülerinnen und Schüler mit den Gleichungen von Kreisen, Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln zu tun. Hier werden dann meist die üblichen Schnittaufgaben sowie Abstands- und Winkelberechnungen durchgeführt. Der gedanklich kritische Punkt bei der Durchführung dieser Aufgaben ist die Verbindung der geometrischen Figuren mit den Gleichungen. Was haben diese beiden Objekte miteinander zu tun; wie soll man sich etwa die Gleichung einer Ellipse vorstellen?
An dieser Stelle setzt das Arbeitsblatt an, indem es erläutert, wie René Descartes und Pierre de Fermat im 17. Jahrhundert genau diese Fragestellungen behandelten und zu Ergebnissen kamen, die

sich für die weitere Entwicklung der Mathematik als auch ihrer Anwendungen als enorm wertvoll erwiesen. Zunächst ist es wichtig zu betonen, dass die Zusammenführung von Geometrie und Algebra eine bedeutsame Leistung war, die man keineswegs als selbstverständlich ansehen kann. Auf der ersten Seite des Arbeitsblatts wird daher zunächst erläutert, warum das Studium von Kurven zur damaligen Zeit so aktuell war und wie Descartes und Fermat auf die Idee kamen, die Geometrie und die Algebra miteinander zu vereinen. Anschließend folgt allgemein das Prinzip, wie es Descartes gelang, geometrische Objekte durch Gleichungen zu beschreiben, welches durch das Beispiel einer Geraden illustriert wird. Dieser ganze Abschnitt ist zum Lesen und Verstehen konzipiert. Die Lernenden sollen insbesondere die mathematischen Überlegungen gedanklich nachvollziehen und anhand des Beispiels selbstständig erläutern können.

Im Anschluss folgen zwei Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler die Gleichung einer Geraden und die eines Kreises finden sollen. Die mathematischen Anforderungen sind dabei eher gering, es geht mehr um die schriftliche Erläuterung des Prinzips. Entsprechende Aufforderungen sind daher auch in den Aufgabenstellungen enthalten.

Der Rest des Arbeitsblatts widmet sich dem umgekehrten Gedanken, nämlich, dass jede Gleichung in x und y theoretisch als Kurve dargestellt werden kann. Nach einem Beispiel mit entsprechender Erläuterung werden die Lernenden aufgefordert, selbst eine Kurve zu zeichnen. Es handelt sich dabei um die versiera di Agnesi, eine Kurve, die nach der italienischen Mathematikerin Maria Agnesi benannt ist. Zum Abschluss werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, einige historische Gegebenheiten zu Maria Agnesi und dieser Kurve zu recherchieren.

Da fast in der gesamten Oberstufe geometrische Objekte durch Gleichungen behandelt werden, kann das Arbeitsblatt auch bereits ab der fünften Klasse an einer passenden Stelle in den Unterricht integriert werden. Es empfiehlt sich, den Aspekt der Verbindung zwischen Gleichungen und geometrischen Figuren immer wieder zu betonen und zu verdeutlichen, da er ja auch eine wesentliche Rolle bei Schnittaufgaben, Tangenten und fast allen anderen Bereichen der analytischen Geometrie spielt. Nicht zuletzt ist es dank der Behandlung geometrischen Fragestellungen mit Hilfe von Gleichungen möglich, in höherdimensionale Räume vorzudringen, die sich unserer Anschauung entziehen.

Hintergrundinformation

In diesem Abschnitt werden einige biografische Daten und Informationen zur Philosophie Descartes' gegeben.

René Descartes wird 1596 in der französischen Provinz geboren. Sein Vater ist Jurist, die Mutter stirbt, als René zwei Jahre alt ist. Bis zu seinem achten Lebensjahr lebt er bei seiner Großmutter, dann tritt in das Internat des Jesuitenkollegs La Flèche ein, in dem der junge Adelige seine erste umfangreiche Ausbildung erhält. Wegen seines schlechten Gesundheitszustands darf er dort bis 11 Uhr im Bett bleiben, eine Gewohnheit, die er zeit seines Lebens nicht mehr ändert. Schon in La Flèche liebt er die Mathematik „wegen der Sicherheit und Evidenz ihrer Beweisegründe“. Einer seiner Lehrer ist Marin Mersenne, der ihm auch für sein weiteres Leben ein guter Freund bleibt. Der Unterricht in der damals noch aktuellen scholastischen Philosophie und der Physik hinterlässt bei Descartes allerdings einen unbefriedigenden Eindruck. Nach der Schulzeit sieht er sich „verstrickt in Zweifel und Irrtümer“.

Descartes studiert zunächst Jura und tritt dann 1618 in den Militärdienst in den Niederlanden ein. Die Republik hat eine moderne Armee zusammengestellt, um sich gegen die Herrschaft der Spanier zur Wehr zu setzen. In der Garnison Breda nimmt Descartes, wie viele andere junge Adelige, an den ersten Feldzügen des Dreißigjährigen Krieges teil. Er verbringt auch viel Zeit damit nachzudenken und glaubt sogar zwischenzeitlich, die „Grundlagen der wunderbaren Wissenschaften“ entdeckt zu haben. Später schließt er sich dem Herzog von Bayern an, der gegen die protestantischen Aufständischen in Böhmen kämpft, quittiert dann aber 1620 den Dienst und beginnt eine längere Reisezeit durch Ungarn, Deutschland, Holland und Italien, an deren Ende er zurück nach Frankreich kehrt. Dort wagt er 1625 zum ersten Mal, seine Ideen einem gelehrten Publikum zu präsentieren. Beim Vortrag eines bekannten Wissenschaftlers bringt sich Descartes in die anschließende Diskussion ein und spricht davon, eine neue von der Methode des Vernunftgebrauchs geleitete Philosophie entwickeln zu wollen, mit der man zu sicheren Erkenntnissen gelangen könne. Das Publikum ist von Descartes' Argumentation begeistert und fiebert schon bald der ersten Veröffentlichung des Neulings entgegen.

Der jedoch verlässt Frankreich und geht 1628 in die Niederlande. In dem mittlerweile republikanischen Land hofft er wohl mehr Ruhe und Zeit für seine Studien zu finden. Aufgrund eines Erbes ist er finanziell unabhängig und kann es sich leisten, oft ganze Tage im Bett mit Nachdenken zu verbringen. Sein in Paris begonnenes Werk *Traité du monde* (*Abhandlung über die Welt*) bricht er jedoch ab und widmet sich mehr praktischen Studien wie Anatomie, Physik und Mathematik. Er entwirft eine Präzisionsschleifmaschine für optische Linsen und plant den Bau einer bemannten Flugmaschine. 1633 zieht er sein naturphilosophisches Werk *Le monde* (*Die Welt*) vom Druck wieder zurück, als er erfährt, dass Galilei wegen ähnlicher Thesen Probleme mit der Inquisition bekam und eingesperrt wurde. Descartes' Freunde können ihn aber schließlich 1637 doch überreden, seine Ideen (zunächst anonym) schriftlich zu veröffentlichen. Seine *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* (*Abhandlung über die*

Methode seine Vernunft richtig zu gebrauchen und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen) enthält neben dem philosophischen Teil drei Anhänge (*La Dioptrique, Les Météors, La Géometrie*), in denen Descartes die praktische Anwendung seiner allgemeinen Methode auf verschiedene Wissenschaften zeigt. *Discours de la méthode* erregt einige Aufmerksamkeit, und obwohl sich schnell herumspricht, wer der Autor ist, wird er von der Inquisition nicht zensiert.
Dennoch erfährt Descartes bald, dass die Jesuiten in Frankreich seine Schrift heftig bekämpfen. Vielleicht veröffentlicht er deshalb 1641 die *Meditationes de prima philosophia*, in denen er einen Gottesbeweis ins Zentrum stellt. Mit diesem Werk wird Descartes zu einem gefeierten Philosophen, über dessen Gedanken auf den Höfen der Fürsten diskutiert wird. Neben seinen Ideen zeigt er auch, wozu die französische Sprache im präzisen Ausdruck und in der klaren Beschreibung von Gedanken fähig ist.
Später setzt sich Descartes immer wieder mit Kritikpunkten zu seiner Lehre, die von anderen Philosophen kommen, auseinander. Als ihn 1648 ein Student besucht und ihn um Klarstellungen zu einigen Details seiner Schriften befragt, gibt er bereitwillig Auskunft. Im Jahr 1649 nimmt Descartes schließlich eine Stelle als persönlicher Lehrer der Königin Christine von Schweden an und reist nach Stockholm. Dort muss er mit seiner Gewohnheit des späten Aufstehens brechen, da die Königin es bevorzugt schon beim Frühstück um 5 Uhr in einer kalten Bibliothek mit ihm über philosophische Probleme zu diskutieren. Auf den Spaziergängen zu diesen frühen Treffen zieht er sich schon im ersten Winter eine Lungenentzündung zu und stirbt am 11. Februar 1650 daran.

Descartes' Philosophie

René Descartes' Philosophie beginnt vermutlich mit dem Zweifel. Nach seiner Ausbildung in La Flèche erkannte er, dass die angeblichen Wahrheiten, die man ihm präsentiert hatte, auf wackeligen Beinen standen. Die Tradition, die Gewohnheit und nicht zuletzt die Autoritäten, die nicht nur in den Religionen, sondern auch in den Wissenschaften den Ton angaben (etwa Aristoteles), schienen ihm keine Garantien für Wahrheiten zu geben. Er distanzierte sich auch von damals verbreiteten Lehren des Okkulten, die die Welt durch Eigenschaften und Kräfte zu beschreiben suchten, die hinter den offensichtlichen Eigenschaften versteckt waren. Man müsse, so Descartes, allein durch die Vernunft geleitet eine Methode entwickeln, die es einem erlaubt, unwiderlegbare Wahrheiten zu finden. Seine ganze Philosophie ist durchzogen von dieser Forderung einer radikalen, wissenschaftlichen Erneuerung.
Auf seinen Reisen durch Europa beschäftigte sich Descartes in hohem Ausmaß damit, eine

Methode zu ersinnen, die das von ihm Verlangte leisten konnte. Inspiriert wurde er dabei von der Arbeit der Mathematiker, die von einfachen, unmittelbar einsehbaren Axiomen ausgingen und alle weiteren Erkenntnisse auf diesen Axiomen durch streng deduktives Schließen aufbauten. Im zweiten Teil seiner *Discours de la méthode* formuliert er vier Regeln, die den Kern seiner Methode darstellen. (1) Er wollte zunächst niemals eine Sache als wahr annehmen, „die ich nicht als solche sicher und einleuchtend erkennen würde, […] und in meinen Urteilen nur so viel […] begreifen, wie sich meinem Geist so klar und deutlich darstellen würde, dass ich gar keine Möglichkeit hätte, daran zu zweifeln“. (2) Das zweite Prinzip war, größere Probleme in kleinere zu unterteilen, (3) das dritte war, allmählich vom Einfachen zum Komplexen aufzusteigen und am Ende (4) müsse man die gesamte Argumentation so genau überprüfen, „dass ich sicher wäre, nichts auszulassen“.

Nun musste Descartes aber jene einfachsten Wahrheiten finden, die ohne Zweifel und für jedermann unmittelbar einsehbar waren. Er stützte sich dabei auf die einzige Quelle, die seine Zweifel unangetastet gelassen hatte, das Bewusstsein seiner selbst, und gab vier Axiome an, die er zur Grundlage seiner Philosophie machte und die berühmt wurden: (a) Ich denke, also bin ich (*je pense, donc je suis; cogito ergo sum*), (b) jede Wirkung muss eine Ursache haben, (c) ein Effekt kann nicht größer sein, als seine Ursache und (d) die Ideen der Vollkommenheit, des Raums, der Zeit und der Bewegung sind dem Geist eigen.

Nun konnte Descartes beispielsweise folgendermaßen argumentieren (Kline 1953, S. 162): Da der Mensch so wenig weiß und so viel zweifelt, ist er kein vollkommenes Wesen. Sein Geist besitzt jedoch nach (d) die Idee von Vollkommenheit und damit auch die Idee eines vollkommenen Wesens. Wegen (c) kann die Idee des vollkommenen Wesens aber nicht aus dem Geist des Menschen stammen, sondern muss von eben so einem vollkommenen Wesen herrühren, das Gott ist. Daher existiert Gott. Nachdem ein vollkommener Gott uns nicht täuschen würde, können wir darauf vertrauen, dass unsere Intuition ein paar Wahrheiten liefern wird. Deshalb müssen die Axiome der Mathematik, die unsere klarsten Intuitionen darstellen, Wahrheiten sein. Die Sätze und Folgerungen aus diesen Axiomen sind teilweise nicht mehr intuitiv einsehbar. Descartes argumentiert jedoch auch hier mit einem Gott, der uns nicht täuschen würde. Daher sind auch die mathematischen Sätze Wahrheiten, die Angaben über die reale Welt machen.

Intuition und Deduktion sind zwei Denkweisen, auf die Descartes hier aufbaut und die immer wieder in seinem Werk vorkommen. Bedeutsame Theorien stellt er auch noch im Bereich der Naturphilosophie und der Metaphysik auf, von denen jedoch einige bereits von Zeitgenossen heftig kritisiert wurden. Er spricht sich etwa für eine radikale Trennung von Körper und Geist aus, kann aber nie zufriedenstellend erklären, wie die Beziehung zwischen diesen beiden Entitäten beispielsweise beim Menschen aussieht.

In vielen Bereichen ist René Descartes ein Wegbereiter und stößt Diskussionen an, die die Wissenschaftler im 17. und 18. Jahrhundert noch beschäftigen sollten. Neben seiner Tätigkeit als Denker darf man nicht vergessen, dass Descartes auch praktizierender Wissenschaftler war. Seine Erkenntnisse im Bereich der Optik, der Anatomie und der Astronomie waren bedeutend. In der Mathematik führt er die Analytische Geometrie ein, löst damit das Problem von Pappus und des Vier-Kreise-Satzes über Apollonische Kreise. Außerdem findet er eine Vorzeichenregel für Polynome, die eine Beziehung herstellt zwischen der Anzahl der Nullstellen eines Polynoms und seinen Koeffizienten: Die Anzahl der positiven Nullstellen ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Zahlenfolge der Koeffizienten oder um eine gerade Anzahl geringer. Sind die Nullstellen reell, gilt die Gleichheit. Der Beweis dieser Regel erfolgt erst später durch Carl Friedrich Gauß.

Mit seinen mathematischen Leistungen schuf sich René Descartes in jedem Fall ein bleibendes Andenken – im Gegensatz zu seiner Philosophie, die, wie die meisten Philosophien, irgendwie auf ihre Zeit beschränkt bleibt.

Pierre de Fermat und seine Rolle bei der Entwicklung der Analytischen Geometrie

Im Gegensatz zu Descartes nähert sich Pierre Fermat der Mathematik nicht von der philosophischen Richtung, sondern betreibt sie als privaten Zeitvertreib. Beruflich bekleidet er im Laufe seines Lebens verschiedene hohe Ämter als Jurist am obersten Gerichtshof in Toulouse. Eines dieser Ämter erlaubt es ihm sogar, sich fortan „de Fermat“ zu nennen.

Fermat unterhält Kontakte zu einigen Mathematikern seiner Zeit und stellt diesen immer wieder Probleme, die er selbst schon gelöst hat. Er liefert wesentliche Beiträge zur Differentialrechnung, begründet mit Blaise Pascal in Briefwechseln die Wahrscheinlichkeitstheorie und entwickelt das nach ihm benannte Prinzip in der Optik, nach dem ein Lichtstrahl beim Übergang zwischen zwei Medien den „schnellsten“, nicht den kürzesten, Weg nimmt.

Was die analytische Geometrie betrifft, so entwickelt Fermat im Vergleich zu Descartes schon einen höheren Grad in der Klarheit der Darstellung, der systematischen Zusammenfassung des Stoffs und der Aufstellung einer festen Symbolik. Tatsächlich findet man im Werk von Descartes etwa keine allgemeinen Gleichungen von Geraden oder anderen Kurven. Er verwendet zwar die Algebra in Form von Gleichungen zur Lösung seiner geometrischen Probleme, gibt aber keine generalisierte Aufstellung über den Zusammenhang zwischen Gleichungen und Kurven.

Fermat verwendet bereits durchgehend ein rechtwinkeliges Koordinatensystem und verwendet für die Unbekannten Größen die Vokale A und E und die bekannten Größen die Konsonanten B, D, G usw. Die allgemeine Gleichung einer Geraden sieht daher bei Fermat so aus:

$$D\cdot(R - A) = B\cdot E \qquad [\text{heute: } a\cdot(c - x) = b\cdot y]$$

Für die Kreisgleichung mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung schreibt er

$$B^2 - A^2 = E^2 \quad [\text{heute: } r^2 - x^2 = y^2]$$

Gleichungen für die anderen Kegelschnitte sowie die Asymptoten der Hyperbel folgen in ähnlicher Art und Weise, wodurch man sieht, wie weit Fermat in der Darstellung schon fortgeschritten war. In manchen Quellen wird behauptet, dass Fermat seine Arbeiten (insbesondere die Abhandlung *Isagoge ad locos planos et solidos*) auf diesem Gebiet schon vor Descartes abgeschlossen hatte. Einige Kommentare Fermats lassen darauf schließen, dass seine Kenntnisse zur Analytischen Geometrie bis ins Jahr 1629 zurückgehen. Falls dies stimmt, so hat er sie jedoch zu diesem Zeitpunkt nicht veröffentlicht, was Descartes mit seinem 1637 erschienen *La Géometrie* doch rechtmäßig zum Vater der analytischen Geometrie macht.

Quellen

Die Darstellung der Idee von Descartes und Fermat auf dem Arbeitsblatt verdanke ich großteils Kline 1953, S. 159 – 171. Die Informationen zu Maria Agnesi stammen aus Grinstein, Campbell 1987.

Für die Beschreibung der biografischen Fakten zu Descartes und Fermat wurden Mischer 2008 sowie Strick 2009, S. 34 – 37 verwendet. Zur Philosophie Descartes' standen mir wiederum Kline 1953 sowie Perler 2010 zur Verfügung.

Die Darstellung der mathematischen Ausführungen Fermats entnahm ich Tropfke 1903, S. 418 – 420.

Das Bild von Descartes stammt aus dem Wikipedia Artikel:
http://de.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

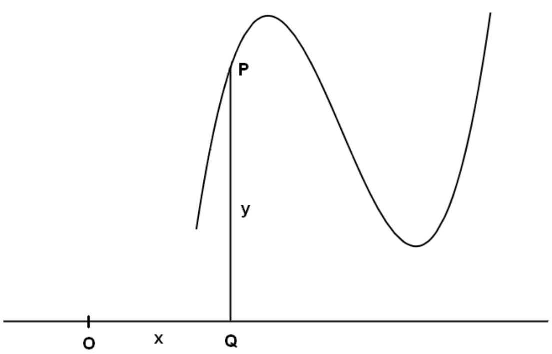
Die Vereinigung zweier Gedankenwelten

Zu Beginn des 17. Jahrhunderts gab es in der Mathematik im Wesentlichen zwei Bereiche, innerhalb derer sich die Mathematiker bewegten: die Geometrie mit ihrer großen Tradition, welche sich mit Geraden, Kreisen und ihren Eigenschaften befasste; und die noch vergleichsweise junge Disziplin der Algebra, die in Form von Gleichungen mittels einer Buchstabensprache ihre Probleme behandelte.
Es waren René Descartes und Pierre de Fermat, die auszogen, diese beiden scheinbar gegensätzlichen Denkmuster zu vereinen.

Der Ausgangspunkt für die Beschäftigung mit der Zusammenführung der Geometrie und Algebra war das Studium von Kurven. Am Anfang des 17. Jahrhunderts wurden beispielsweise die **Bahnen der Planeten** als Ellipsen erkannt, die der **Kometen** als Parabeln. Die Kurve, die ein Objekt beschreibt, das geworfen oder geschossen wird, wie etwa eine Kanonenkugel, ist ebenfalls eine Parabel. Die Linien, die Lichtstrahlen durch die Atmosphäre beschreiben, waren für Künstler und Astronomen interessant, während die **Krümmung von Linsen** für die Herstellung von Brillen, Teleskopen und Mikroskopen studiert wurde.

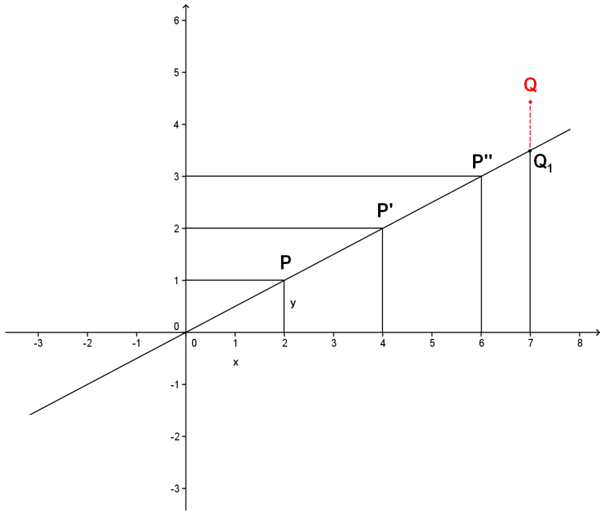
An dieser Stelle betraten René Descartes und sein Landsmann Pierre de Fermat das Bild. Sie erkannten, dass die geometrischen Ausführungen der alten Griechen weder die benötigten Informationen bereitstellen konnten, noch eine allgemeine Methode, wie man zu neuen Erkenntnissen gelangen kann, lieferten. Die Algebra wurde ebenfalls kritisiert, weil sie aus so vielen abstrakten Formeln und Regeln bestand, die nicht dazu geeignet schienen, „den Geist zu fördern“. Descartes wusste jedoch auch, dass die Geometrie Wissen und Wahrheiten über die reale Welt beinhaltete und dass es die Algebra erlaubte, mit unbekannten Größen in systematischer Weise umzugehen, um dann allgemeine Methoden herzuleiten.
Descartes und Fermat schlugen also vor, das jeweils Beste aus der Geometrie und der Algebra zu nehmen und die Unzulänglichkeiten der einen Disziplin mit den Stärken der anderen zu kompensieren.

Die nachfolgende Darstellung gibt die Idee der beiden Mathematiker wieder, folgt aber nicht streng den Ausführungen des einen oder des anderen.
Denken wir uns eine beliebige Kurve gegeben, wie etwa die im unteren Bild. Man kann sich vorstellen, dass eine solche Kurve durch einen Punkt P entsteht, der an der Spitze einer vertikalen Strecke PQ liegt. Bewegt sich die Linie nach rechts, so bewegt sich der Punkt P je nach Form der Kurve nach oben oder unten. Also kann jede Kurve dadurch beschrieben werden, dass man die Bewegung eines Punktes angibt, der sich auf einer Strecke auf und ab bewegt, während sich die Strecke selbst nach rechts bewegt.



Soweit die geometrische Sichtweise. Wie kann man aber nun die Kurve durch das Verhalten von P beschreiben? Hierzu verwendete Descartes die Algebra: Während sich die Strecke PQ nach rechts bewegt, kann ihre Position durch den Abstand von einem fixen Punkt O angegeben werden. Diesen Abstand nennen wir x. Die Position des Punktes P kann durch den Abstand von der horizontalen Geraden OQ beschrieben werden. Diesen Abstand nennen wir y. Nun können wir für jede Position des Punktes P einen x- und einen y-Wert angeben. Zwei verschiedene Kurven werden sich bei gleichem x-Wert im Allgemeinen durch den y-Wert unterscheiden. Deshalb wird man die Kurve durch irgendeine Beziehung zwischen den x- und y-Werten charakterisieren können, die für die Punkte P dieser Kurve zutrifft, für eine andere Kurve aber im Allgemeinen nicht.

Sehen wir uns diese Idee anhand einer Geraden an. Um unsere Vorgangsweise zu systematisieren, führen wir eine horizontale Gerade, die wir die x-Achse (oder 1. Achse), und eine vertikale Gerade, die wir die y-Achse (oder 2. Achse) nennen, ein. Ihr Schnittpunkt ist der sogenannte Koordinatenursprung O. Damit haben wir das klassische, **kartesische Koordinatensystem** erhalten.



Im Bild rechts sehen wir eine Gerade mit mehreren Punkten P, P' und P" eingezeichnet. Man erkennt, dass für den Punkt P der Abstand x auf der 1. Achse doppelt so groß ist wie der Abstand y auf der 2. Achse. Für alle weiteren Punkte der Geraden gilt aufgrund des Strahlensatzes ebenfalls:

$$x = 2y \text{ oder } y = \tfrac{1}{2}x$$

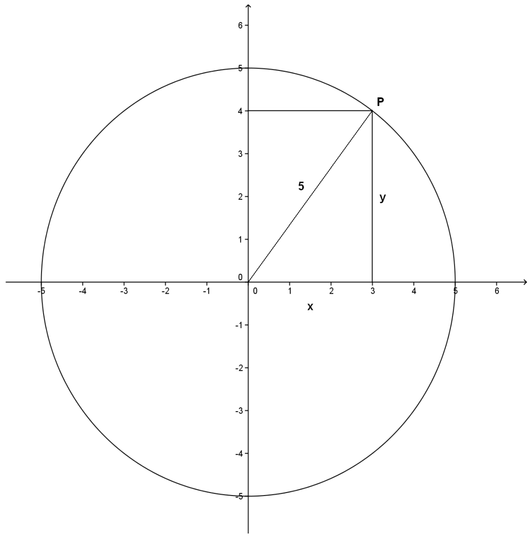
Wenn ein Punkt auf der Geraden liegt, so gilt für ihn die Gleichung y = ½ x.

Umgekehrt muss ein Punkt Q, für den die Gleichung gilt, auf der Geraden liegen, denn wäre dies nicht der Fall, müsste sich der Punkt über oder unter der Geraden befinden (siehe rechts). Dann gäbe es aber einen weiteren Punkt Q_1 mit gleichem x-Wert wie Q, der auf der Geraden liegt. Da aber y = ½ x den y-Wert **eindeutig** festlegt, muss Q_1 = Q sein, also Q auf der Geraden liegen.

Wenn ein Punkt die Gleichung y = ½ x erfüllt, so liegt er auf der obigen Geraden.

Die Gleichung y = ½ x repräsentiert damit alle Punkte, die auf der Geraden liegen, indem sie eine Eigenschaft zwischen x und y angibt, den beiden Abständen, die jeweils auf der x- und der y-Achse für jeden beliebigen Punkt auf der Geraden gemessen werden können. Die beiden Abstände x und y heißen die **Koordinaten** eines Punktes P und werden oft (x / y) geschrieben.

Aufgabe 1: **Finde eine Gleichung für die Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht und mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschließt. Erläutere in eigenen Worten, warum diese Gleichung die Punkte auf der Gerade repräsentiert!**



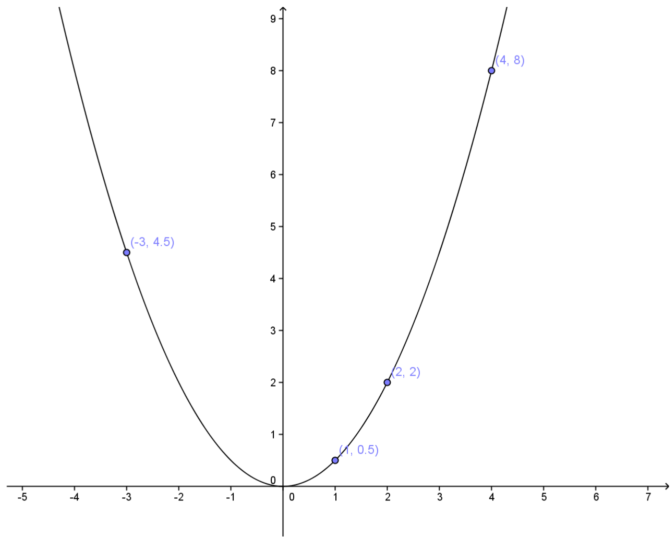
Dasselbe Prinzip lässt sich nun auch auf gekrümmte Kurven erweitern. Wir betrachten etwa einen Kreis mit dem Radius r = 3, wählen einen beliebigen Punkt auf dem Kreis und zeichnen die Koordinaten dieses Punktes ein.

Aufgabe 2: **Zeichne weitere Punkte auf dem Kreis ein und finde wie oben eine Gleichung, die ihre x- und y-Abstände miteinander in Beziehung setzt!**
Erkläre, wie die Gleichung die Kreislinie beschreibt!

Fermat und seine Nachfolger fanden auch Gleichungen zu vielen weiteren, komplexeren Kurven. Der große Fortschritt bestand darin, dass man alles, was man bereits über Gleichungen wusste, jetzt auf geometrische Problemstellungen anwenden konnte. Die schwierigsten geometrischen Herausforderungen reduzierten sich bald auf das Lösen einer oder mehrerer Gleichungen. Descartes selbst fand Lösungen zu einigen Problemen, die bis dahin niemand entdeckt hatte.

Die umgekehrte Idee, dass jede Gleichung als Kurve dargestellt werden konnte, folgte unmittelbar anschließend an die obigen Überlegungen.
Wenn wir eine Gleichung zwischen zwei Größen x und y zu Grunde legen, so können wir nun durch die Einführung des Koordinatensystems und die Interpretation der x- und y-Werte als Abstände vom Koordinatenursprung Punkte finden, deren x- und y-Koordinaten die Gleichung erfüllen.

Betrachten wir etwa die Gleichung $y = \frac{1}{2} x^2$.
Das Koordinatenpaar (2 / 2) erfüllt die Gleichung, da $\frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ und wir können den Punkt (2 / 2) in ein Koordinatensystem eintragen. Dasselbe gilt z. B. auch für (1 / 0,5), (–3 / 4,5) oder (4 / 8).
Zu einem beliebig vorgegebenen x-Wert ergibt sich durch die Gleichung $y = \frac{1}{2} x^2$ sofort der zugehörige y-Wert. Hat man genügend Punkte eingezeichnet, lassen sie sich zu einer durchgehenden Kurve verbinden.
Von dieser Kurve lässt sich zeigen, dass es sich um eine Parabel handelt. Allgemein sind alle Kurven mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ Parabeln.



Im Folgenden wurden von verschiedensten Leuten unterschiedliche Gleichungen betrachtet und untersucht, auf welche Kurven sie führen. Ein etwas komplexeres Beispiel ist dabei die Gleichung

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

Aufgabe 3: **Stelle die Kurve, die diese Gleichung für a = 3 beschreibt, in einem Koordinatensystem im Intervall [–6; 6] dar und beschreibe sie!**

Diese Kurve wurde von der italienischen Mathematikerin Maria Agnesi im 18. Jahrhundert untersucht und heißt nach ihr **la versiera di Agnesi** (im Deutschen auch manchmal die „Hexe der Agnesi").

Aufgabe 4: **Recherchiere in Büchern oder im Internet zu Maria Agnesi und schreibe 5 – 10 Sätze über ihr Leben und die nach ihr benannte Kurve! Gib die verwendeten Quellen an!**

Zusammenfassend formulieren wir die Idee von Descartes und Fermat noch einmal bündig:

Zu jeder (hinreichend vernünftigen) Kurve existiert eine Gleichung, die die Punkte der Kurve und damit sie selbst in eindeutiger Weise beschreibt. Umgekehrt kann jede Gleichung in x und y als Kurve dargestellt werden, indem man x und y als Koordinaten ihrer Punkte interpretiert.

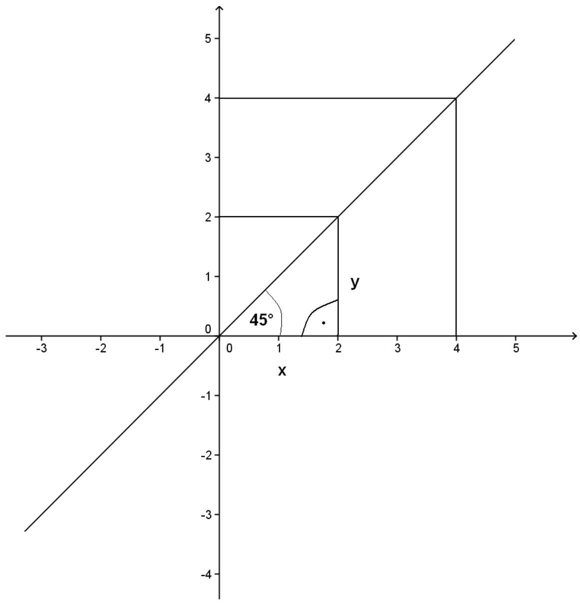
Dieses Prinzip war der neue Gedanke und kombiniert das Beste aus der Geometrie und der Algebra.

Lösungsblatt „Die Vereinigung zweier Gedankenwelten“

Aufgabe 1:

Die Gerade, die mit der 1. Achse einen Winkel von 45° einschließt, ist rechts abgebildet.
Das Dreieck zwischen der Geraden und der 1. Achse ist ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem ein Winkel 45° hat. Nachdem die Winkelsumme im Dreieck immer 180° ergibt, muss auch der zweite, obere Winkel 45° sein. Daraus folgt, dass das eingezeichnete Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck ist und damit ist x genauso groß ist wie y.
Dieser Gedankengang lässt sich für beliebige Punkte auf der Geraden und beliebige Dreiecke, die man von diesen Punkten aus einzeichnen kann, führen.
Die Gleichung, die die Punkte auf der Geraden beschreibt, lautet damit

$$y = x.$$



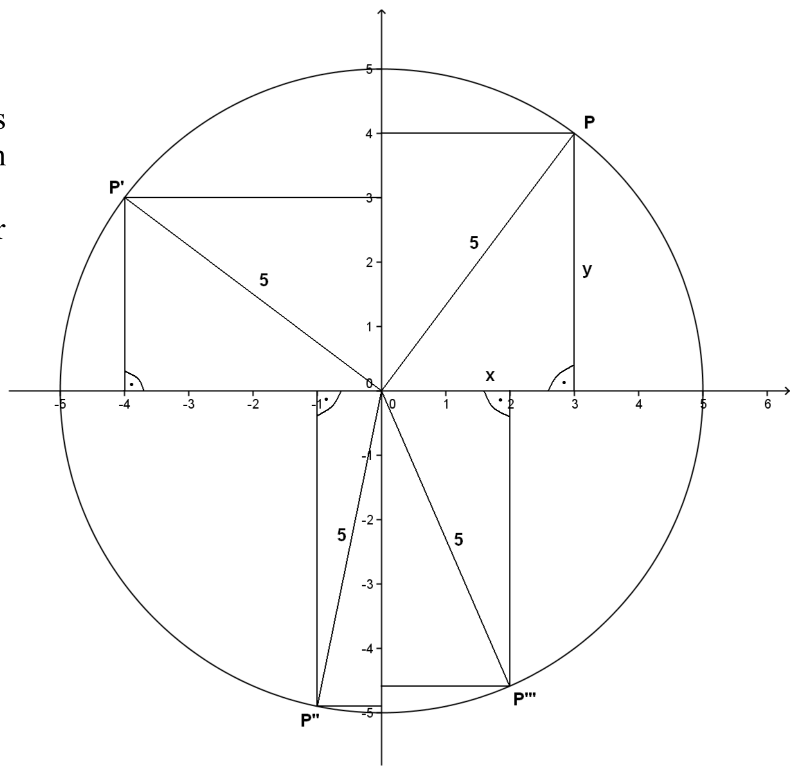
Mit dieser Gleichung werden aufgrund obiger Argumentation alle Punkte auf der Geraden repräsentiert.

Aufgabe 2:

Für jeden Punkt auf dem Kreis lässt sich ein rechtwinkeliges Dreieck finden, das als Hypotenuse den Radius 5 und als Katheten die Koordinaten des Punktes (x / y) hat. Nach dem Satz des Pythagoras gilt also für jeden Punkt des Kreises

$x^2 + y^2 = 5^2$ bzw. $x^2 + y^2 = 25$.

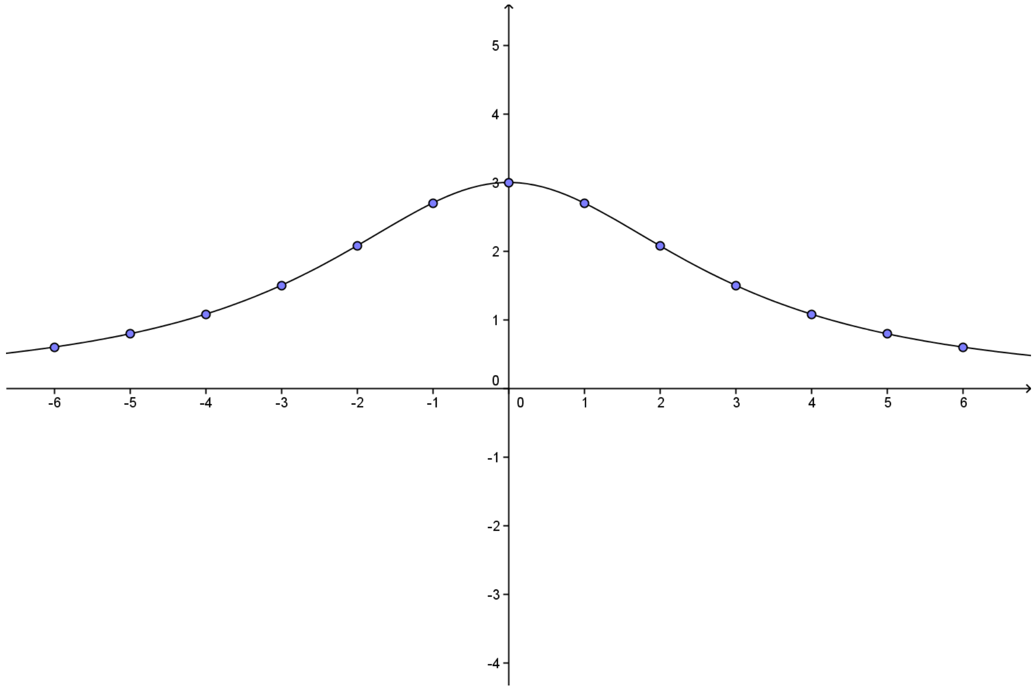
Es gilt auch:
Alle Punkte mit der Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate ihrer x- und y-Koordinaten 25 ergibt, liegen auf einem Kreis.
Das heißt, die Kreislinie ist genau die Menge aller Punkte (x / y), die die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ erfüllen.



Aufgabe 3:

Um die Kurve in einem Koordinatensystem darzustellen, fertigen wir eine Wertetabelle an, zeichnen die Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinden sie zu einer Kurve:

x	y
–6	0,6
–5	0,79
–4	1,08
–3	1,5
–2	2,08
–1	2,7
0	3
1	2,7
2	2,08
3	1,5
4	1,08
5	0,79
6	0,6



Die versiera di Agnesi ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, besitzt ein (globales) Maximum bei x = 0 mit dem y-Wert 3 und ist streng monoton wachsend in $]-\infty; 0]$ sowie streng monoton fallend in $[0; \infty[$.

Aufgabe 4:

Maria Agnesi (1718 – 1799): Maria Agnesi stammte aus einer wohlhabenden Mailänder Familie. Der Vater entdeckte früh das Talent der Tochter und unterstützte ihre Studien, indem er „akademische Abende“ hielt, zu denen er Gelehrte der damaligen Zeit einlud, die dann über wissenschaftliche und philosophische Themen diskutierten. Maria beteiligte sich schon früh an diesen Veranstaltungen und konnte mit der Hilfe zahlreicher Lehrer schon bald profunde mathematische Kenntnisse vorweisen. Im Jahr 1748 veröffentlichte sie das Werk, auf das sich ihr Ruhm als Mathematikerin begründet, die *Instituzioni Analitiche*. In diesem über 1000 Seiten starken Buch, das von vielen Zeitgenossen im In- und Ausland gelobt wurde (etwa von Lagrange), schaffte sie eine systematische Präsentation der damaligen Kenntnisse zur Algebra, der Analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung sowie zu Differentialgleichungen. Sie widmete es Kaiserin Maria Theresia von Österreich, die ihr als Dank Schmuck und Juwelen sandte. In dem Buch enthalten ist auch die nach ihr benannte *Kurve von Agnesi*, für die sich schon Fermat und Newton interessiert hatten. Durch einen Übersetzungsfehler wird die Kurve im Deutschen und Englischen manchmal die „Hexe der Agnesi“ genannt. Das intalienische *la versiera,* das „Kurve“ bedeutet, wurde nämlich als *l'awersiera* („Frau, die gegen Gott gerichtet ist“; in weiterer Folge „Hexe“) gelesen.
In ihren späteren Lebensjahren verschrieb sich Maria Agnesi dann der Theologie und gab Zeit, Mühe und Geld, um den armen Menschen der Gesellschaft zu helfen.

Quellen:

Grinstein Louise, Campbell Paul [Hrsg.], Women of Mathematics, New York, 1987
Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Versiera_der_Agnesi

Literaturverzeichnis

AHRENS Wilhelm, Mathematiker-Anekdoten, Teubner Verlag, Leipzig, 1916

ANDRESEN Karen, Im Bett mit dem Feind, in: Der Spiegel Geschichte: Die Französische Revolution, Ausgabe 01/2010, Seite 78-81, Spiegel Verlag, Hamburg, 2010

BEHR Helmut, Teaching Mathematics with Historical Components – some Experiences and Ideas, in: Jahnke Hans-Niels, History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences, Seite 27 – 37, Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1996

BINDER Christa, Austria, in: Dauben, Scriba (Editors), Writing the History of Mathematics: Its historical Development, Seite 213 – 219, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

BLANTON John D., Foundations of Differential Calculus, Translation from the Latin *Institutiones calculi differentialis* von Leonhard Euler, 1755, Springer Verlag, New York, 2000

BLUNCK Andrea, Mathematik und Gender Studies – Erfahrungen und Perspektiven, in: Martignon Laura, Niederdrenk-Felgner Cornelia und Vogel Rose (Hrsg.), Mathematik und Gender, Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2006

BRUCKHEIMER Maxim, ARCAVI Abraham, Mathematics and its History: An Educational Partnership, in: Katz Victor [Hrsg.], Using History To Teach Mathematics, Seite 135 – 145, Mathematical Association of America, Washington DC, 2000

BUSSI Maria G. Bartolini, History in the Mathematics Classroom, in: Jahnke Hans-Niels, History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences, Seite 39 – 66, Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1996

CANTOR Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Teubner Verlag, Leipzig, 1894 – 1908

CHACE Arnold Buffum, The Rhind Mathematical Papyrus, Mathematical Association of America, Ohio, 1927

CZUBER Emanuel, Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen, Teubner Verlag, Leipzig, 1898

DAUBEN Joseph W. et al., Praescriptum, in: Dauben, Scriba (Editors), Writing the History of Mathematics: Its historical Development, Seite 26 – 27, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

DESCARTES René, La Géometrie, The Project Gutenberg, www.gutenberg.org, 2008

ETTL Hubert, Schule in der bürgerlichen Gesellschaft: Kritik des Elends Schulischen Lernens und, den Perspektiven der Befreiung, Campus Forschung, Frankfurt/New York, 1981

GÖTSCHEL Helene, Vom „(un)heimlichen Inhalt der Naturwissenschaften“ und dem „Geschlecht der Natur“, in: Götschel, Daduna et al., Perspektivenwechsel, Talheimer Verlag, Mössingen-Talheim, 2001

GRINSTEIN Louise, Campbell Paul [Hrsg.], Women of Mathematics, Greenwood Press, New York, 1987

GROTHENDIECK Alexandre, Récoltes et semailles, Languedoc, 1984
zu beziehen z.B. über http://people.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/

HOCHLEITNER Bernhard, Eine vergleichende Untersuchung des Mathematikunterrichtes in Österreich anhand von Lehrplänen und Büchern von 1780, 1820 und der letzten Jahrzehnte, Hochschulschrift, Wien, 1986

HUMENBERGER Hans, Wie können die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sein?, ISTRON Schriftenreihe, Band 17, Seite 31 – 45, Verlag Franzbecker, Hildesheim/Berlin, 2011

JACOBSEN Gönke Christin, Sozialstruktur und Gender, Verlag für Sozialwissenschaften, Wiesbaden, 2008

JAHNKE-KLEIN Sylvia, Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen, Schneider Verlag, Hohengehren, 2001

JUNGWIRTH Helga, Mädchen und Buben im Mathematikunterrricht – Eine Studie über geschlechtsspezifische Modifikationen der Interaktionsstrukturen, Österreichisches Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Sport (Hrsg.), *Reihe Frauenforschung* Band 1, Wien, 1990

JUNGWIRTH Helga, Mädchen und Buben im Computerunterrricht – Beobachtungen und Erklärungen, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (26), Heft 2, Linz, 1994

KAISER Hans, Geschichte der Mathematik für Schule und Unterricht, öbv & hpt Verlag, Wien, 2006

KLINE Morris, Mathematical Thought From Ancient To Modern Times, Volume 1, Oxford University Press, New York, 1972

KLINE Morris, Mathematics In Western Culture, Oxford University Press, New York, 1953

KRONFELLNER Manfred, Historische Aspekte im Mathematikunterricht, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1998

MACKENSEN Lutz, Deutsches Wörterbuch, Gondrom Verlag, Bindlach, 1991

MAIER, Hermann & SCHWEIGER, Fritz: Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht, öbv & hpt Verlag, Wien, 1999

MAN-KEUNG Siu, The ABCD of Using History of Mathematics in the (Undergraduate) Classroom, in: Katz Victor [Hrsg.], Using History To Teach Mathematics, Seite 3 – 9, Mathematical Association of America, Washington DC, 2000

MISCHER Olaf, Die Geburt des Zweifels, in: GEO Epoche Nr. 29: Der Dreißigjährige Krieg, Seite 140 – 141, Verlag Gruner + Jahr, Hamburg, 2008

NEANDER Joachim, Mathematik und Ideologie, Verlag Starnberg : Raith, 1974

NÖLLKE Matthias, Anekdoten Geschichten Metaphern, Verlag Haufe-Lexware, Planegg b. München, 2002

OECD, Women in Scientific Careers, OECD Publishing, 2006

PAHL Franz, Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts, Verlag Quelle & Meyer, Leipzig, 1913

PEIFFER Jeanne, France, in: Dauben, Scriba (Editors), Writing the History of Mathematics: Its historical Development, Seite 3 – 9, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

PERLER Dominik, René Descartes: Das Projekt einer radikalen Neubegründung des Wissens, in: Blum Paul Richard und Kreimendahl Lothar, Philosophen der frühen Neuzeit, Seite 84 – 105, WBG (Wissenschaftliche Buchgesellschaft), Darmstadt, 2010

PESCHEK Werner, Der Mathematikunterricht an den höheren Schulen Österreichs – Eine theoretisch-empirische Situationsanalyse, Hochschulschrift, Klagenfurt, 1979

PESIC Peter, Abels Beweis, Springer Verlag, Heidelberg, 2005

PHILI Christine, Greece, in: Dauben, Scriba (Editors), Writing the History of Mathematics: Its historical Development, Seite 221 – 229, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

SANDIFER Ed, Foundations of Calculus, How Euler Did It, Mathematical Association of America, 2006, zu beziehen unter http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html

SCHOLZ Erhard, The Doublesided Nature of Mathematics, in: Jahnke Hans-Niels, History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences, Seite 275 – 287, Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1996

STEINER Ulrike, Lehrplan '99 und seine Auswirkungen unter besonderer Berücksichtigung des Fachlehrplans für Mathematik, Hochschulschrift, Wien, 2000

STRICK Heinz Klaus, Geschichten aus der Mathematik, Spektrum der Wissenschaft Spezial, Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, Heidelberg, 2009

STRUVE Horst, On the Epistemology of Mathematics in History and in School, in: Jahnke Hans-Niels, History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences, Seite 319 – 334, Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1996

SWETZ Frank, Problem Solving from the History of Mathematics, in: Katz Victor [Hrsg.], Using History To Teach Mathematics, Seite 59 – 65, Mathematical Association of America, Washington DC, 2000

TANZBERGER Renate, Betrachtungen zum Mathematikunterricht, Hochschulschrift, Wien, 1990

TOEPELL Michael, Aspects to History of Mathematics in the Junior High School – 5th to 7th Grade, in: Jahnke Hans-Niels, History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences, Seite 335 – 345, Verlag Vandenhoeck & Ruprecht,Göttingen, 1996

TROPFKE Johannes, Geschichte der Elementarmathematik (in systematischer Darstellung), Erster Band, Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1902

TROPFKE Johannes, Geschichte der Elementarmathematik (in systematischer Darstellung), Zweiter Band, Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1903

VOGEL Rose et al., Computereinsatz im Mathematikunterricht – eine Analyse aus der Geschlechterperspektive, in: Martignon Laura, Niederdrenk-Felgner Cornelia und Vogel Rose (Hrsg.), Mathematik und Gender, Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2006

VOLLRATH Hans-Joachim, Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001

WONKA Charlotte, Mathematik und Wirtschaft, Hochschulschrift, Wien, 1980

Bilder und Grafiken:
Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Kurzbeschreibung

In dieser Arbeit wird untersucht, wie die Integration von historischen Inhalten in den Mathematikunterricht diesen bereichern und zu einem authentischen Bild der Wissenschaft Mathematik bei den Schülerinnen und Schülern beitragen kann.
Hierzu wirft der Autor zunächst einen Blick auf die Geschichte des Mathematikunterrichts, um im Anschluss zu zeigen, wie der derzeitige österreichische Lehrplan der Allgemeinbildenden Höheren Schulen die Behandlung historischer Inhalte ermutigt oder sogar vorschreibt. In weiterer Folge werden fünf konkrete Aspekte entwickelt und ausführlich erläutert. Diese Aspekte („Reflektiver Aspekt“, „Kreativer Aspekt“, „Interaktiver Aspekt“, „Affektiver Aspekt“, „Gender Aspekt“) betreffen sowohl historische, mathematische und philosophische, als auch gesellschaftliche und affektive Bereiche, sodass eine ganze Reihe von möglichen positiven Auswirkungen auf den Mathematikunterricht sichtbar wird.
Daran anschließend werden verschiedene Methoden diskutiert, in welcher Weise geschichtliche Inhalte im Unterricht vorkommen können. Das Spektrum reicht hier von einfachen historischen Kurzinformationen über Anekdoten und historische Rechenaufgaben bis hin zu Originaltexten, die die Entwicklung mathematischer Teildisziplinen mitunter hautnah erleben lassen.
Im letzten Teil der Arbeit stellt der Autor schließlich sieben Arbeitsblätter zu dem ausgesuchten Themenbereich „Gleichungen“ zusammen und zeigt, wie man die zuvor entwickelten Prinzipien und Möglichkeiten konkret für den Unterricht umsetzen kann. Es wurde darauf geachtet, alle genannten historischen Aspekte in die Arbeitsblätter zu integrieren und so eine abwechslungsreiche Grundlage für all jene zu schaffen, die mehr von der langen Geschichte der Mathematik in ihrem Unterricht erzählen wollen. Zu allen Aufgaben werden auf einem eigenständigen Blatt Lösungen angegeben. Außerdem findet sich jeweils ein didaktischer Kommentar für die Lehrerinnen und Lehrer sowie umfangreiche historische Hintergrundinformation, wo dies sinnvoll oder spannend erschien.

Abstract

This paper examines the benefits one can expect from integrating historical content into the education of mathematics. It argues that such an integration will result in a more authentic picture of the science mathematics and that it will enrich and enliven an otherwise often abstract and dull mathematics course.

At the beginning the author takes a look at the history of mathematical education and discusses the way the current Austrian curriculum encourages or even dictates the use of historical content in the *Allgemeinbildenden Höheren Schule* (High School for General Education). Subsequently, five concrete aspects are developed ("Reflective Aspect", "Creative Aspect", "Interactive Aspect", "Affective Aspect", "Gender Aspect"), which include areas of history, mathematics and philosophy as well as society and motivation. Thus, a wide variety of possible applications is shown.

Afterwards the author discusses methods how historical subjects can be incorporated in an existing mathematics course. The possibilities range from simple short notes, anecdotes and historical problems to original texts written by actual mathematicians which can make students experience the development of certain mathematical disciplines at first hand.

In the last part of the paper the author assembles seven work sheets which display possible realisations of the aspects that were discussed beforehand. This is done by means of the selected subject "equations". Special care was put in assuring that all aspects are included so that anyone who wants to tell more of the long history of mathematics receives a sound base of great variety. Every work sheet is accompanied by an independent sheet of solutions. In addition, a didactical commentary and extensive background information for teachers are provided where it seemed reasonable and interesting.

Lebenslauf

Angaben zu meiner Person

Name:	Florian Mayer
Geburtsdatum:	23.07.1981
Geburtsort:	Wien
Name und Beruf der Eltern:	Rudolf Mayer, Handelsangestellter Helga Mayer, Handelsangestellte
Staatsangehörigkeit:	Österreich
Anschrift:	Blumberggasse 7/4 1160 Wien

Schulausbildung

1987 – 1991	Volksschule in Wien
1991 – 1999	AHS in Wien
Juni 1999	Matura
2000 – 2011	Studium an der Universität Wien Lehramt Mathematik und Physik
Juni 2011	Abschluss Mag. rer. nat.

Berufliche Erfahrung

Ferialpraxis bei AUVA Landesstelle Wien
Neunjährige Tätigkeit im Nachhilfeinstitut *Schülerhilfe*

Besondere Fähigkeiten / Kenntnisse

Englisch (fließend)
Französisch (Schulkenntnisse)

Klavier, Gitarre, Gesang
Audioproduktion, Tontechnik