



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Gewinnt man Ziegen oder Autos? – Eine stochastische Auseinandersetzung über die Beeinflussbarkeit von Glücksspielen

Verfasserin

Sabina Schottleitner

Angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, Mai 2011

Studienkennzahl laut Studienblatt: A 190 406 299
Studienrichtung laut Studienblatt: Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie/Philosophie
Betreuer: ao. Prof. Dr. Peter Raith

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meiner Familie, meinem Freund Roman und dessen Vater Norbert danken, dass sie mich im Laufe meines Studiums immer unterstützt und ermutigt haben.

Danken möchte ich auch meinen Großeltern, denn auch sie waren während meiner Studienzeit immer für mich da und informierten sich stets über meine Fortschritte.

Besonderer Dank gilt meiner Schwester Marion, meinem Vater und Roman, die immer ein offenes Ohr für meine Sorgen hatten und sich die Zeit nahmen meine Arbeit zu lesen.

Zusätzlich möchte ich mich ebenfalls bei Christian bedanken, dass er Teile meiner Arbeit geduldig durchgelesen und mich auf Fehler hingewiesen hat.

Meinem Betreuer, Prof. Peter Raith, möchte ich für die professionelle Betreuung meiner Diplomarbeit danken. Er nahm sich stets Zeit, um mir bei allen inhaltlichen und technischen Fragen und Problemen zu helfen.

Vorwort

„*Es ist das Spiel und nur das Spiel, das den Menschen vollständig macht.*“
Friedrich Schiller (1759 – 1805)

Wie man diesem Zitat entnehmen kann, erkannte bereits Friedrich Schiller, dass das Spiel für den Menschen von großer Bedeutung ist. Das Spiel bietet dem Menschen Ablenkung, aber auch (vor allem die Glücksspiele) die Möglichkeit Geld oder Sachpreise zu gewinnen. Es gibt schon seit jeher Spiele und Glücksspiele, diese sind aus dem Leben nicht mehr wegzudenken.

Den Anstoß für diese Arbeit gab mir das Ziegenproblem. Das erste Mal hörte ich davon als ich einen Film sah, im ersten Moment kam mir die im Film präsentierte Lösung nicht richtig vor, aber mein Interesse war geweckt. In einem Seminar hörte ich das zweite Mal davon und nun wollte ich mich mehr damit beschäftigen. Die Beeinflussbarkeit dieses Spiels erweckte die Idee auch noch andere Glücksspiele daraufhin zu untersuchen.

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist die Beeinflussbarkeit von verschiedenen Glücksspielen zu untersuchen und diese miteinander zu vergleichen. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Glücksspiele werden analysiert und versucht durch verschiedene Möglichkeiten des Eingreifens zu verbessern.

Diese Arbeit ist in vier größere Kapitel – *Das Ziegenproblem*, *Verwandte des Ziegenproblems*, *Lotto und Roulette* und *Black Jack* – unterteilt.

Im Kapitel *Das Ziegenproblem* wird das Ziegenproblem vorgestellt und auf verschiedene Art und Weise berechnet. In diesem Kapitel werden unter anderem die bedingte Wahrscheinlichkeit und die Bayes-Formel erklärt.

In darauffolgenden Kapitel *Verwandte des Ziegenproblems* werden diese erklärt und die Äquivalenzen zum Ziegenproblem herausgearbeitet.

Im dritten Kapitel *Lotto und Roulette* werden diese beiden Glücksspiele kurz betrachtet. Ich habe sie in die Arbeit einbezogen um einen Vergleich zu dem Ziegenproblem und Black Jack herstellen zu können.

Das letzte große Kapitel dieser Arbeit *Black Jack* beschäftigt sich mit den verschiedenen Möglichkeiten der Einflussnahme in diesem Glücksspiel. Im Zuge dieses Kapitels wird auch das Thema Markoff-Ketten eingebunden, um Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

Ich habe darauf verzichtet, die Geschichte und die einzelnen Teilgebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie zu erklären und zu beschreiben. Somit ist ein Grundwissen der Wahrscheinlichkeitstheorie notwendig, um diese Arbeit verstehen zu können.

Die Glücksspiele, die in dieser Diplomarbeit behandelt werden, sind von ihrem Schwierigkeitsgrad für den Schulunterricht der 7. und 8. Klasse einer allgemein bildenden höheren Schule geeignet. Fast alle Berechnung sind deswegen für den Unterricht geeignet, die einzige Ausnahme bildet das Thema der Markoff-Ketten. Teilweise führe ich zu den Berechnungen in den Kapiteln noch zusätzliche didaktische Anregung an.

Zum Schluss möchte ich darauf hinweisen, dass alle Bezeichnungen in dieser Arbeit geschlechtsneutral zu verstehen sind, auch wenn ich im Text nur die grammatikalisch näher liegende Form verwenden werde.

Inhaltsverzeichnis

1	Das Ziegenproblem	13
1.1	Wie alles begann...	13
1.2	Erste Erklärungen	14
1.2.1	Welche Türen dürfen geöffnet werden?	17
1.2.2	Die neue Wahrscheinlichkeit ist $1/2$?	19
1.3	Lösung mittels Pfadregel	21
1.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	22
1.4.1	Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayes-Formel	26
1.5	Didaktische Anregungen	28
2	Verwandte des Ziegenproblems	33
2.1	Das Problem der drei Gefangenen	33
2.2	Tumor oder nicht?!	35
2.3	Schiffbrüchige Seeleute	36
2.4	Russisches Roulette	38
2.5	Drei Karten	39
2.6	Weiterführende Beispiele zum Ziegenproblem	40
3	Lotto und Roulette	45
3.1	Lotto	45
3.1.1	Geschichte und Spielregeln	45
3.1.2	Gewinnwahrscheinlichkeiten	46
3.2	Roulette	49
3.2.1	Spielregeln	49
3.2.2	Chancengleichheit aller Zahlen	51
3.2.3	Gewinnerwartung	52
3.2.4	Allgemeine Bemerkungen	55

4	Black Jack	57
4.1	Die Spielregeln	57
4.1.1	Wichtige Begriffe	59
4.1.2	Asymmetrien in den Spielregeln	61
4.2	Das Spiel	63
4.2.1	Ziehen einer weiteren Karte	63
4.2.2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Punktesummen der Bank	64
4.2.3	Markoff-Ketten	66
4.2.4	Abwägen von Gewinn- und Verlustchancen für den Spieler ler	73
4.2.5	Wann der Spieler eine weitere Karte ziehen sollte . . .	74
4.2.6	Wann sollte man den Einsatz verdoppeln?	80
4.2.7	Wann sollte man splitten?	81
4.2.8	Wann sollte man den Einsatz versichern?	85
4.3	Kartenzählen	86
4.4	Didaktische Aufbereitung	90
4.4.1	Einführung in das Thema	90
4.4.2	Das Spiel und seine Problematik	90
4.4.3	Berechnung einer optimalen Spielstrategie	92
5	Resümee	97

Abbildungsverzeichnis

1.1	Drei Varianten zum Ziegenproblem	14
1.2	Möglichkeiten, jede beliebige Tür zu öffnen	17
1.3	Möglichkeiten, Türen zu öffnen ausgenommen der Autotür . .	18
1.4	Möglichkeiten, Türen zu öffnen ausgenommen der erstgewähl- ten Tür	18
1.5	Möglichkeiten, Türen zu öffnen ausgenommen der Autotür und der erstgewählten Tür	18
1.6	Pfadregel zum Ziegenproblem	22
1.7	Baumdiagramm zum Ziegenproblem	26
1.8	Karte zur Spielsimulation: Ziege	29
1.9	Karte zur Spielsimulation: Auto	30
2.1	Pfadregel zu Schiffbrüchige Seeleute	37
2.2	Drei Karten	39
2.3	Pfadregel zu Beispiel 2.6.2	41
2.4	Pfadregel zu Beispiel 2.6.3	42
3.1	Roulettekessel und Tableau	51
4.1	Black Jack Tisch	57
4.2	Beweis des Satzes 4.2.6	69
4.3	Drei Fälle für die Berechnung der Gewinnerwartung $ES(J)$. . .	93
4.4	Drei Fälle für die Berechnung der Gewinnerwartung $ES(J)$. . .	95
4.5	Bis zu welcher Punktesumme J abhängig von der Überkauf- wahrscheinlichkeit P_U der Bank gekauft werden soll	96

Tabellenverzeichnis

1.1	Ergebnisse zur Spielsimulation	30
3.1	Dotierung der Gewinnränge beim Lotto	46
3.2	Gewinnklassen und Wahrscheinlichkeiten beim Lotto	49
3.3	Einsatzmöglichkeiten beim Roulette	50
4.1	Wann der Spieler gewinnt, verliert oder ein Unentschieden erreicht.	59
4.2	Wahrscheinlichkeiten für das Spiel der Bank	62
4.3	Unsymmetrien im Gewinnplan	63
4.4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten der Bank für das Erreichen von Punktesummen	65
4.5	Vorzeichen der Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit für den Spieler bei bestimmten erreichten Punktesummen	74
4.6	Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit für den Spieler bei bestimmten erreichten Punktesummen	75
4.7	Bedingte Wahrscheinlichkeiten des Spielers für das Erreichen von Punktesummen (15 Punkte erreicht)	75
4.8	Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit für den Spieler, wenn er eine weitere Karte zieht	77
4.9	Verbesserung oder Verschlechterung für den Spieler, falls er eine zusätzliche Karte zieht	78
4.10	Verbesserung oder Verschlechterung für den Spieler, falls er eine zusätzliche Karte zieht	79
4.11	Differenz zwischen bedingter Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit beim Verdoppeln	81
4.12	Splitten, ohne mehrfachen Split	83
4.13	Einfacher Split und doppelter Split	84
4.14	Gewinn- und Verlustanteil am gesamten Einsatz, nachdem die Bank eine 2. Karte erhalten hat beim Versichern	85

4.15	Änderung der Gewinnerwartung, wenn eine Karte aus den 52er-Blatt entfernt wird	88
4.16	Überkaufwahrscheinlichkeit $P_{\bar{u}}(K)$ der Bank bei erster Karte mit dem Wert K	91
4.17	Entscheidungsmatrix	92

Kapitel 1

Das Ziegenproblem

„Wer das Spiel nicht durchschaut, steckt vielleicht zu tief drin.“

Manfred Hinrich (*1926)

1.1 Wie alles begann...

Die amerikanische Journalistin Marilyn vos Savant galt als der Mensch mit dem höchsten Intelligenzquotienten der Welt. In ihrer Kolumne *Ask Marilyn* des amerikanischen Wochenmagazins *Parade* hatte sie mit der Lösung einer Denksportaufgabe eine Lawine empörter und hämischer Leserbriefe ausgelöst. Im Sommer 1991 kam es zu dem heiß diskutierten Ziegenproblem (Vgl. [17], S. 52 und [24], S. 9).

Ein Leser stellte folgende Aufgabe: *„Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten «Ich zeige Ihnen mal was» öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. Er fragt: «Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen Sie Nummer zwei?»“* (Randow, 2009, S. 9).

Zwei Türen bleiben, hinter einer ist der Gewinn. Folgend ist es egal welche man wählt, oder nicht? Die IQ-Weltmeisterin sagt, dass man bei der Tür Nummer zwei die besseren Chancen hat und im Vergleich zu Tür 1 würden sich die Chancen bei Tür 2 verdoppeln.

Das Ziegenproblem hielt viele Menschen in Atem. Professoren setzten ihre Assistenten an das Ziegenproblem, Mathematik-Lehrer verwirrten ihre Schüler und Zeitungsredakteure erklärten sich gegenseitig für begriffsstutzig. Und unterdessen wurde Marilyn vos Savant mit Spott überschüttet. Die Antwort bescherte der Redaktion der *Parade* eine Flut an Leserbriefen mit gegenteiligen Meinungen. Das Problem wurde in der amerikanischen und deutschen Öffentlichkeit diskutiert (Vgl. [24], S. 9 – 11).

Dabei unterteilten sich die Beteiligten in „Wechsler“ (welche der Empfehlung von Marilyn vos Savant folgen wollten), „Randomisierer“ (die zufällig eine der verbleibenden Türen auswählen wollten) und „Standhafte“ (jene, die bei der ursprünglichen Wahl bleiben wollten). Nichts bekannt ist jedoch über die Proportionen der Aufteilung (Vgl.[11], S. 133).

1.2 Erste Erklärungen

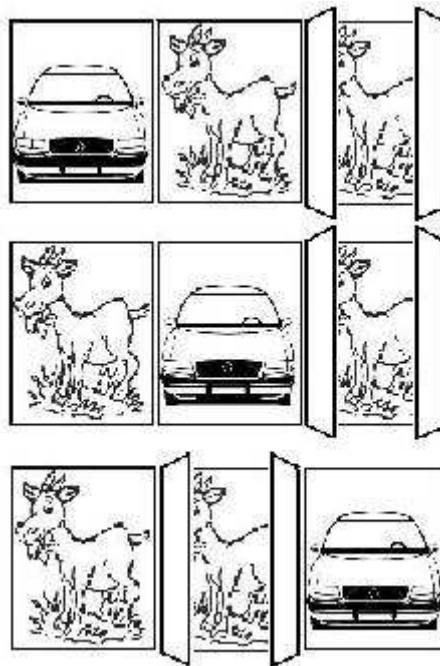


Abbildung 1.1: Diese drei Varianten sind gleich wahrscheinlich. Quelle: [18], S. 93

Wenn wir als Erstes die linke Tür wählen und nicht wechseln, dann gewinnen wir das Auto mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Der Moderator öffnet immer eine

Tür mit Ziege. Wenn man wechselt, gibt es folgende drei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: Man verliert das Auto, dass man zunächst gewonnen hätte.
2. und 3. Möglichkeit: Das Auto wartet hinter der letzten Tür (Vgl. [18], S. 91 – 94).

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ ist das Auto hinter einer der beiden anderen Türen, welche nicht gewählt wurden. Fällt eine davon weg, so muss hinter der anderen mit dieser Wahrscheinlichkeit versteckt sein. So verdoppelt man, durch den Wechsel der Tür, die Wahrscheinlichkeit das Auto zu gewinnen. Ein Gegenargument hierzu war: *„Ganz gleich, was man als erstes selber wählt – der Moderator kann immer eine Tür mit einer Ziege öffnen. Deshalb erfährt man dadurch auch nichts Neues, das hat man vorher schon gewußt. Und deshalb bleiben auch die Wahrscheinlichkeiten dieselben; ob ich die Tür wechsele oder nicht, ich wähle mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ eine Ziege und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ das Auto. Und deshalb kann ich auch genausogut bei meiner ersten Wahl verbleiben.“* (Krämer, 1996, S. 91).

Jedoch wird eines klar: Über die anfangs gewählte Tür erfährt man nichts Neues. Deshalb bleibt die Wahrscheinlichkeit, dass man von Anfang an das Auto hat, die gleiche wie zuvor, und zwar $\frac{1}{3}$. Aber es darf nicht vergessen werden, dass sich die Auto-Wahrscheinlichkeit für die beiden anderen Türen sehr wohl ändert. Die Auto-Wahrscheinlichkeit für die von dem Moderator geöffnete Tür (mit der Ziege dahinter) sinkt auf 0. Das Auto wartet mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 hinter einer der beiden anderen Türen. Nämlich bei unserer ersten Wahl mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$. Nun verbleibt für die letzte Tür nur noch die Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ (Vgl. [18], S. 91 – 94).

Natürlich kann man hierbei auch hereinfallen. Wenn ich das Auto richtig geraten habe und der Moderator überredet mich, stattdessen eine Ziegentür zu nehmen. Wenn sich die Kandidatin oder der Kandidat auf einen Wechsel einlässt wird dies tatsächlich, in etwa einem Drittel aller Fälle, geschehen. Jedoch in zwei Drittel der Fälle, bei denen wir nicht zuvor die richtige Tür gewählt haben, wird der Moderator um ein Auto ärmer.

Besser sieht man das an dem extremeren Beispiel mit 100 Türen, einem Auto und 99 Ziegen. Die Wahrscheinlichkeit ist in diesem Fall nur 1:100 von Anfang an auf das Auto zu tippen. Der Moderator öffnet nun 98 der verbleibenden 99 Türen und hinter jeder ist eine Ziege. Soll man nun wechseln? Die Auto-Wahrscheinlichkeit für die anfangs gewählte Tür ist die gleiche wie zuvor, nämlich ein Prozent. Mit 99-prozentiger Wahrscheinlichkeit steht

nun das Auto hinter der zweiten noch verschlossenen Tür. Dieser Fall zeigt schön, dass der Spielleiter die Nieten aussortiert, da die gewählte Tür nicht teilnimmt (sie wird auf jeden Fall nicht geöffnet) ändert sich nur ihr Wert nicht (Vgl. [18], S. 91 – 94).

Ein weiteres Argument ist Folgendes: Angenommen, es gibt zwei Kandidaten A und B. Kandidat A bleibt immer bei seiner anfangs gewählten Tür und Kandidat B wechselt nach der Intervention des Moderators zur verbleibenden Tür. Das Experiment findet 999-mal statt. Da sich Kandidat A nicht beeinflussen lässt, wird er wahrscheinlich um die 333 Autos gewinnen. Doch was geschieht mit den restlichen 666 Autos? Diese muss Kandidat B gewonnen haben. Also hat B doppelt so viele Autos wie A gewonnen, also ist hinter der verbleibenden Tür tatsächlich das Auto mit doppelter Wahrscheinlichkeit (Vgl. [24], S. 13 – 15).

Eine weitere Überlegung ist, dass es zwei Kandidaten gibt. Aber Kandidat A wählt Tür 1 und Kandidat B wählt Tür 2, danach öffnet der Moderator Tür 3. Sollten nun sowohl Kandidat A und B wechseln, um ihre Chancen zu erhöhen? Diese Variante folgt anderen Spielregeln. Der Moderator sortiert keine Niete aus, sondern kann nur die eine verbliebene, nicht geöffnete Tür wählen. Nach dieser sinnlosen Intervention des Moderators bleibt keine nicht gewählte Tür übrig, über welche er die Mitspieler hätte informieren können (Vgl. [24], S. 13 – 15).

Die Türen werden mit den Ziffern 1, 2 und 3 versehen und angenommen der Gewinn befindet sich hinter Tür 1. Der Kandidat weiß dies jedoch nicht und wird eine der Türen zufällig auswählen, wobei jede mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Also wählt der Kandidat mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ die Autotür und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ eine Ziegentür.

Beim Moderator muss man zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Wählt der Kandidat die Autotür, dann kann der Moderator zwischen den verbleibenden Türen wählen.
2. Fall: Wählt der Kandidat eine der Ziegentüren, muss der Moderator die verbleibende Ziegentür öffnen.

Da der 1. Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ eintritt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der „Standhafte“ gewinnt $\frac{1}{3}$, unabhängig davon, welche Tür der Moderator öffnet. Jedoch wird der „Wechsler“ im 1. Fall verlieren, aber gewinnt im 2. Fall. Der 2. Fall hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ und ist somit ist die Gewinnwahrscheinlichkeit des „Wechslers“ doppelt so hoch wie die des „Standhaften“. *„Die „Randomisierer“ wählt in beiden Fällen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine der noch geschlossenen Türen, so dass die Wahr-*

scheinlichkeit die richtige Tür zu treffen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ ist.“ (Bol, 2007, S. 134) (Vgl. [11], S. 132 – 134).

Durch den Wechsel verdoppelt sich die Chance auf das Auto. Aber der Wechsel bringt keine Garantie auf das Auto. Am 8.2.1994 wechselte in einem ähnlichen Quiz der Kandidat nicht und gewann trotzdem (Vgl. [14], S. 24).

1.2.1 Welche Türen dürfen geöffnet werden?

Die Notation:

A1 heißt Auto hinter Tür 1,
A2 heißt Auto hinter Tür 2,
A3 heißt Auto hinter Tür 3.

M1 heißt Moderator öffnet Tür 1,
M2 heißt Moderator öffnet Tür 2,
M3 heißt Moderator öffnet Tür 3.

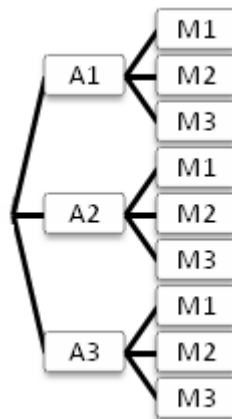


Abbildung 1.2: Folgendes Diagramm zeigt die Möglichkeiten für den Fall, dass der Moderator jede beliebige Tür öffnen darf. Quelle: [24], S. 64.

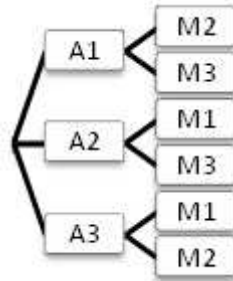


Abbildung 1.3: Dieses Diagramm zeigt den Fall, dass der Moderator jede Tür außer einer Autotür öffnen darf. Quelle: [24], S. 64.

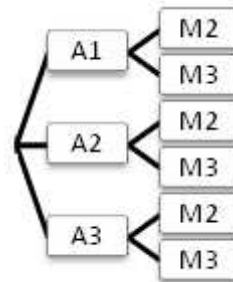


Abbildung 1.4: Das folgende Diagramm zeigt den Fall, dass der Moderator jede Tür außer der erstgewählten Tür 1 öffnen darf. Quelle: [24], S. 65.

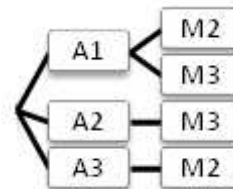


Abbildung 1.5: Schließlich das Diagramm für den Fall, dass der Moderator weder eine Autotür noch die erstgewählte Tür 1 öffnen darf. Quelle: [24], S. 65.

1.2.2 Die neue Wahrscheinlichkeit ist $1/2$?

Jedoch denken manche so: „Nachdem der Moderator eine Tür geöffnet hat, bleiben noch zwei Türen übrig; hinter einer davon das Auto, also ist die neue (die sogenannte »bedingte«) Wahrscheinlichkeit für Auto für jede Tür $\frac{1}{2}$.“ (Krämer, 1996, S. 94) Dies ist ein weit verbreiteter und intuitiv naheliegender Irrtum, dass nach Ausschluss einer Tür mit Ziege durch den Moderator die beiden verbleibenden Türen dieselben Gewinnchancen bieten. Etwa 90% der Zuschriften, die Marilyn vos Savant erhielt, spiegelten die Meinung wider, dass sich durch den Hinweis des Moderators die Chancen auf den Hauptgewinn von $1 : 3$ auf $1 : 2$ erhöht haben, da nun zwei gleichwahrscheinliche Türen übrig blieben. Vertreten wurde diese Meinung auch mehrheitlich von akademisch vorgebildeten Lesern vertreten (Vgl. [17], S. 52). „Hier wird die Aufgabe unzulässig in eine andere Aufgabe umgewandelt, die praktisch nur den Endzustand betrachtet und die Vorgeschichte des Problems nicht angemessen berücksichtigt.“ (Kütting & Sauer, 2008, S. 160).

Denn die beiden verbleibenden Möglichkeiten sind nicht gleich wahrscheinlich. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten „Ziege hinter linker Tür, Moderator öffnet rechte Tür“ und „Ziege hinter mittlerer Tür, Moderator öffnet rechte Tür“ sind nicht gleich. Die erste dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten ist gleich wie die unbedingte Wahrscheinlichkeit, also $\frac{1}{3}$. Deshalb muss die zweite bedingte Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ sein (Vgl. [18], S. 94).

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter der ersten Tür befindet, ist $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich hinter einer der beiden anderen Türen befindet ist $\frac{2}{3}$. Wenn der Moderator (welcher weiß, wo sich das Auto befindet) eine der beiden Türen öffnet, so steht fest, hinter welcher Tür das Auto mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ ist. So verdoppeln sich die Chancen bei einem Wechsel (Vgl. [17], S. 52).

Streng genommen muss man hier zwischen der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass man durch einen Wechsel gewinnt und der Moderator öffnet irgendeine Tür und der bedingten Wahrscheinlichkeit, durch einen Wechsel zu gewinnen und der Moderator öffnet eine ganz bestimmte Tür (z.B.: die rechte) unterscheiden. Bis jetzt wurde nur auf die erste Wahrscheinlichkeit eingegangen, diese ist und bleibt $\frac{2}{3}$. Egal wie der Moderator vorgeht, Hauptsache, er öffnet eine Ziegentür. Die zweite Wahrscheinlichkeit hängt jedoch auch noch von dem Moderator ab. Beispielsweise geht der Moderator so vor, dass er, falls der Kandidat die linke Tür wählt, die rechte Tür öffnet. Dies tut er aber nur dann, wenn das Auto hinter der mittleren Tür versteckt ist. Ansonsten öffnet

er die mittlere Tür. Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist in diesem Fall für „Gewinn durch Wechsel, der Moderator öffnet die rechte Tür“ offensichtlich 1. Denn die rechte Tür wird nur geöffnet, wenn das Auto hinter der mittleren Tür ist. So gewinne ich durch einen Wechsel auf jeden Fall. Dagegen beträgt die bedingte Wahrscheinlichkeit „Gewinn durch Wechseln und der Moderator öffnet die mittlere Tür“ $\frac{1}{2}$. In der Hälfte der Fälle, in denen der Moderator die mittlere Tür öffnet, ist das Auto hinter der rechten Tür und in der anderen Hälfte ist das Auto hinter der linken Tür. Also kann man auch bei seiner ersten Wahl bleiben (Vgl. [18], S. 94 – 96).

Jedoch ist die Gesamt-Wahrscheinlichkeit für „Gewinn durch Wechsel“ weiterhin $\frac{2}{3}$. Berechnet wird sie:

$$\begin{aligned} & W(\text{Gewinn} | \text{Moderator öffnet rechte Tür}) \cdot W(\text{Moderator öffnet rechte Tür}) \\ & + W(\text{Gewinn} | \text{Moderator öffnet mittlere Tür}) \cdot W(\text{Moderator öffnet mittlere Tür}) \\ & = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Bei den bisherigen Überlegungen wurde immer davon ausgegangen, dass der Moderator eine Tür öffnen muss und immer eine Tür mit Ziege. Jedoch, wenn der Moderator die Autotür nicht kennt, oder nur dann eine Ziegentür öffnet, wenn die Autotür gewählt wurde. Dann gelten nochmals andere Gesetze.

Im ersten Fall, wenn der Moderator selbst die Tür nicht kennt, wird er diese mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ öffnen. Dann wäre das Spiel zu Ende. Für „Auto hinter der eigenen Tür“ sinkt die bedingte Wahrscheinlichkeit auf 0. Jedoch wenn der Moderator per Zufall eine Ziegentür öffnet, dann steigt die bedingte Wahrscheinlichkeit für „Auto hinter der eigenen Tür“ auf $\frac{1}{2}$ und die Wahrscheinlichkeit für „Auto hinter der anderen Tür“ ist ebenfalls $\frac{1}{2}$. Hier liefert der Moderator, wie in der Standardsituation, Informationen über unsere eigene Tür, jedoch nützt sie hier nichts.

Im zweiten Fall ist die Lage nochmals anders. Wenn der Moderator nur dann eine Ziegentür öffnet, falls das Auto gewählt wurde und wenn man weiß, dass der Moderator so vorgeht, liefert er damit ebenfalls Informationen über die gewählte Tür, auf äußerst nützliche Weise. Dann weiß man mit Sicherheit: Der Moderator öffnet nur eine Tür, weil das Auto vom Kandidaten schon gewählt wurde und deswegen sollte man nicht wechseln.

Diese Überlegungen kann man beliebig weiterführen. Jedoch die eigene optimale Strategie hängt sehr von der Strategie des Moderators und von dem Wissen darüber ab. Die Regel immer zu wechseln und die daraus resultierende Erhöhung der Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$ gilt nur unter bestimmten Voraussetzungen, dass der Moderator grundsätzlich immer eine Ziegentür öffnet, egal ob die Autotür oder eine Ziegentür gewählt wurde (Vgl. [18], S. 94 – 96).

Ein UFO landet während der Spielshow im Zuschauerraum und ein Außerirdischer kommt auf die Bühne. Er sieht die Ziegentür und zwei geschlossene Türen. Wie stehen die Chancen des Außerirdischen, wenn er Tür 1 oder Tür 2 wählt? 50% zu 50%, oder nicht?

Das kommt auf die verschiedenen Fälle an:

1. Fall: Der Außerirdische kann durch geschlossene Türen sehen.
2. Fall: Der Außerirdische hat bis zu jenem Moment nichts mitbekommen. Dann darf er, weil er keinerlei Zusatzinformationen hat, von gleichen Chancen bei Tür 1 und der Tür 2 ausgehen.
3. Fall: Der Außerirdische hat die Sendung mitverfolgt, dann ist er in keiner anderen Lage als der Kandidat.

„Die UFO-Variante des Ziegenproblems führt zu keinen neuen Lösungen, aber das damit verbundene Argument ist bemerkenswert: Der Argumentierende bildet einen Entscheidungsfall zwischen zwei Türen für einen vorurteilsfreien «objektiven Beobachter», dem er die eigene Denkweise einpflanzt.“ (Randow, S. 15) (Vgl. [24], S. 15).

1.3 Lösung mittels Pfadregel

Angenommen der Spieler wählt die Tür 1 (bezeichnet mit T1). Allgemein kann man sich auf diesen Fall beschränken, denn die anderen beiden Fälle lassen sich durch Umnummerierung der drei Türen auf diesen Fall zurückführen. Ohne Information befindet sich hinter jeder Tür T1, T2, T3 das Auto mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$. Falls das Auto hinter der gewählten Tür T1 ist, öffnet der Moderator jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine der beiden anderen Türen T2 bzw. T3. Befindet sich das Auto hinter Tür T2, öffnet der Moderator die Tür T3, mit Wahrscheinlichkeit 1. Und ist das Auto hinter Tür T3, wird die Tür T2 geöffnet, mit Wahrscheinlichkeit 1 (Vgl. [14], S. 69 – 70).

Der Moderator öffnet die Tür T2. Somit ist klar, dass sich das Auto nicht hinter dieser Tür befindet. Das Auto kann nur noch hinter Tür T1 oder T3 sein. Nach Abbildung 1.6 kann somit nur der oberste oder unterste Pfad eintreten. Bei dem obersten Pfad steht das Auto hinter der vom Spieler gewählten Tür T1 und beim untersten ist es hinter der Tür T3. *„Die Wahrscheinlichkeit des untersten Pfades ist doppelt so groß wie die des obersten Pfades. Bleibt der Spieler bei seiner Entscheidung, so ist seine Chance, das Auto zu gewinnen, nur 1 zu 2¹.“* (Bosch, 1999, S.70) Zum gleichen Ergebnis kommt man über

¹Damit ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gemeint. Die Schreibweise 1 zu 2 ist nicht dem deutschen Sprachraum entsprechend, man würde 1 zu 3 schreiben.

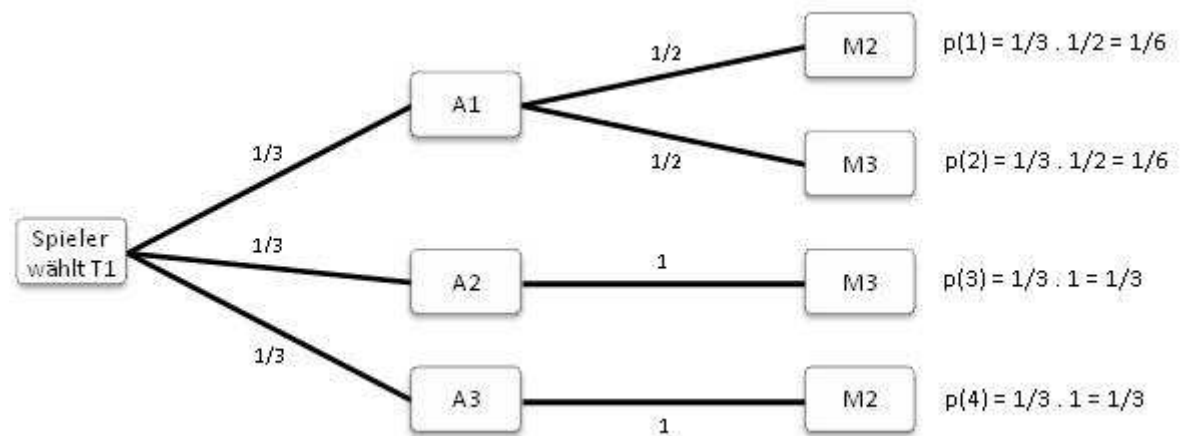


Abbildung 1.6: Abbildung zur Pfadregel. Quelle: [14], S. 69.

die beiden mittleren Pfade, wenn der Moderator die Tür T3 öffnet (Vgl. [14], S. 69 – 70).

1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel 1.4.1. Eine Urne enthält zwei rote, zwei schwarze und zwei blaue Kugeln. Zwei Personen A und B vereinbaren, dass B räumlich von A getrennt zufällig ohne Zurücklegen Kugeln aus der Urne entnimmt und A mitteilt, wann erstmals eine blaue Kugel auftritt. Angenommen B ruft A „im dritten Zug“ zu. Wie würden Sie als Person A die Wahrscheinlichkeit einschätzen, dass die ersten beiden Kugeln rot waren?

Beispiel 1.4.2. In der Situation des Ziegenproblems wurde auf Tür 1 gezeigt und der Moderator hat die Tür 3 als „Ziegentür“ zu erkennen gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler das Auto, wenn er zu der Tür 2 wechselt?

Beide Beispiele haben gemeinsam, dass das (unbekannte) Ergebnis eines stochastischen Vorgangs feststeht. Im ersten Beispiel sind es die Farben der ersten beiden gezogenen Kugeln und im zweiten Beispiel die Nummer der Tür, hinter der das Auto steht. „Hätten wir ohne irgendeine zusätzliche Kenntnis „a priori“-Wahrscheinlichkeiten für die interessierenden Ereignisse angeben müssen, so wären wir wie folgt vorgegangen:“ (Henze, 2008, S.98).

In dem ersten Beispiel ist die „a priori“-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „die ersten beiden gezogenen Kugeln sind rot“ nach der ersten Pfadregel durch $\frac{1}{15}$ ($= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}$) gegeben. Und im zweiten Beispiel ist „a priori“ jede der

drei Türen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ die Autotür. Die Information, durch den Hinweis des Moderators, führt zu einer Verdopplung, somit zu einer „a posteriori“-Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ für die Tür 2 als Autotür.

Man erhält in den obigen Beispielen eine Teilinformation über das Ergebnis eines abgeschlossenen stochastischen Vorgangs. Diese Information muss man in einem Lernprozess verarbeiten. Das Ergebnis dieses Lernprozesses aus gemachter Erfahrung führt eventuell zu einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Neubewertung. Neubewertung in dem Sinn, dass das durch die gemachte Erfahrung das Eintreten gewisser Ereignisse gegenüber dem „a priori“-Wissensstand begünstigt werden können. Wiederum andere Ereignisse können aufgrund des neuen Kenntnisstandes unwahrscheinlicher oder unmöglich werden (Vgl. [17], S. 98 – 100).

Mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeit geschieht die Verarbeitung von Teilinformationen bei stochastischen Vorgängen. Hierzu wird ein wiederholt durchführbares Zufallsexperiment betrachtet, dieses wird durch den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) beschrieben. Bekannt über den Ausgang ω des Experiments sei nur, dass ein Ereignis $B \subset \Omega$ eingetreten ist, also gilt $\omega \in B$. Kurz wird diese Information die Bedingung B genannt.

Es stellt sich nun die Aufgabe, eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses $A \subset \Omega$ unter der Bedingung B wegen der unvollständigen Information über ω festzulegen. In den obigen Beispielen stellt sich das Problem, „den Grad der Gewissheit von A nach Durchführung eines Zufallsexperimentes zu bewerten.“ (Henze, 2008, S.99).

Es stellt sich die Frage, welche sinnvollen Eigenschaften eine geeignete zu definierende bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B (bezeichnet durch $P(A|B)$) besitzen. $P(A|B)$ sollte als Wahrscheinlichkeit die Ungleichungen $0 \leq P(A|B) \leq 1$ erfüllen. Weitere Eigenschaften wären:

$$P(A|B) = 1, \text{ falls } B \subset A, \quad (1.1)$$

$$P(A|B) = 0, \text{ falls } A \cap B = \emptyset. \quad (1.2)$$

Man muss beachten, dass die Inklusion $B \subset A$ unter der Bedingung B notwendigerweise das Eintreten von A nach sich zieht, um (1.1) einzusehen. Und

weil das Eintreten von B im Fall der Disjunktheit von A und B das Eintreten von A ausschließt, sollte (1.2) gelten.

(1.1) und (1.2) stellen extreme Situationen dar. Allgemein muss man mit den Möglichkeiten $P(A|B) > P(A)$, $P(A|B) < P(A)$ und $P(A|B) = P(A)$ rechnen. Bei den ersten Beiden Fällen beeinträchtigt bzw. begünstigt das Eintreten von B die Aussicht auf das Eintreten von A . Im letzten Fall ist das Auftreten von A unabhängig vom Eintreten von B (Vgl. [17], S. 98 – 100).

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sollen im Folgenden anhand relativer Häufigkeiten motiviert werden. *„Um die Aussicht auf das Eintreten von A unter der Bedingung des Eintretens von B zu bewerten, liegt es nahe, (bei positivem Nenner) den Quotienten*

$$r_n(A|B) := \frac{\text{Anzahl aller Versuche, in denen } A \text{ und } B \text{ eintreten}}{\text{Anzahl aller Versuche, in denen } B \text{ eintritt}}$$

als empirischen Gewissheitsgrad von A unter der Bedingung B anzusehen.“ (Henze, 2008, S.99f). Teilt man nun Zähler und Nenner durch n , so ergibt sich

$$r_n(A|B) = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)}.$$

Die folgende Definition ist kaum wunderlich, da nach dem empirischen Gesetz über die Stabilisierung relativer Häufigkeiten sollten sich $r_n(A \cap B)$ und $r_n(B)$ bei wachsendem n den „richtigen Modell-Wahrscheinlichkeiten“ $P(A \cap B)$ und $P(B)$ annähern (Vgl. [17], S. 98 – 100).

Definition 1.4.3. *Es sei (Ω, P) ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$. Dann heißt*

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B .

Ziegenproblem

Es ist für die Modellierung des Ziegenproblems wichtig, auf welche Weise der Moderator eine Tür mit Ziege ausschließt. Die Situation könnte als dreistufiges Experiment mit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$, wobei $\Omega_j = \{1, 2, 3\}$ ($j = 1, 2, 3$) beschrieben werden. a_1 bezeichnet die Nummer der Autotür, a_2 die Nummer der von dem Kandidaten gewählten Tür und a_3 die Nummer der vom Moderator geöffneten Tür für $\omega = (a_1, a_2, a_3)$. Die Wahrscheinlichkeit $p(\omega) = P(\omega)$

wird angesetzt als

$$p(\omega) = p_1(a_1) \cdot p_2(a_2|a_1) \cdot p_3(a_3|a_1, a_2), \quad (1.3)$$

wobei gilt $p_1(j) = \frac{1}{3}$ ($j = 1, 2, 3$ und der Hauptgewinn rein zufällig gewählt) und $p_2(k|j) = \frac{1}{3}$ ($1 \leq j, k \leq 3$ und der Kandidat wählt die Tür blind aus). Zu beachten ist die Übergangswahrscheinlichkeit $p_3(a_3|a_1, a_2)$, dass der Moderator keine Wahl hat, wenn a_1 und a_2 verschieden sind. Jedoch im Fall $a_1 = a_2$ (also das Auto befindet sich hinter der Tür, wie der Kandidat gewählt hat) nimmt man an, dass der Moderator rein zufällig eine der beiden Ziegentüren wählt (Vgl. [17], S. 104 – 105). Diese Annahme liefert

$$p_3(l|j, k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 \leq j \neq k \neq l \leq 3 \\ 1/2, & \text{falls } 1 \leq j = k \neq l \leq 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

so dass (1.3) übergeht in

$$p(j, k, l) = \begin{cases} 1/9, & \text{falls } 1 \leq j \neq k \neq l \leq 3 \\ 1/18, & \text{falls } 1 \leq j = k \neq l \leq 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzt man

$$G_j = \{ (a_1, a_2, a_3) \in \Omega : a_1 = j \} = \{ \text{„Gewinn hinter der Tür Nr. j“} \},$$

$$W_k = \{ (a_1, a_2, a_3) \in \Omega : a_2 = k \} = \{ \text{„Kandidat wählt Tür Nr. k“} \},$$

$$M_l = \{ (a_1, a_2, a_3) \in \Omega : a_3 = l \} = \{ \text{„Moderator öffnet Tür Nr. l“} \},$$

so ergeben sich beispielsweise für $j = 2$, $k = 1$ und $l = 3$ die Wahrscheinlichkeiten

$$P(G_2|W_1 \cap M_3) = \frac{P(G_2 \cap W_1 \cap M_3)}{P(W_1 \cap M_3)} = \frac{p(2,1,3)}{p(2,1,3)+p(1,1,3)} = \frac{1/9}{1/9+1/18} = \frac{2}{3},$$

$$P(G_1|W_1 \cap M_3) = \frac{P(G_1 \cap W_1 \cap M_3)}{P(W_1 \cap M_3)} = \frac{p(1,1,3)}{p(1,1,3)+p(2,1,3)} = \frac{1/18}{1/18+1/9} = \frac{1}{3}.$$

Diese stehen im Einklang mit den oben angeführten Überlegungen, dass ein Wechsel die Chancen auf den Gewinn verdoppelt. Die Betrachtung des Falles $j = 2$, $k = 1$, $l = 3$ geschah dabei o.B.d.A. Zum Beispiel gilt auch $P(G_1|W_3 \cap M_2) = \frac{2}{3}$, $P(G_3|W_3 \cap M_2) = \frac{1}{3}$.

sind die beiden Pfade (1,1,3) ($W' = \frac{1}{18}$) und (2,1,3) ($W' = \frac{1}{9}$) die zum Ereignis $W_1 \cap M_3$ führen herausgehoben (Vgl. [17], S. 104 – 105).

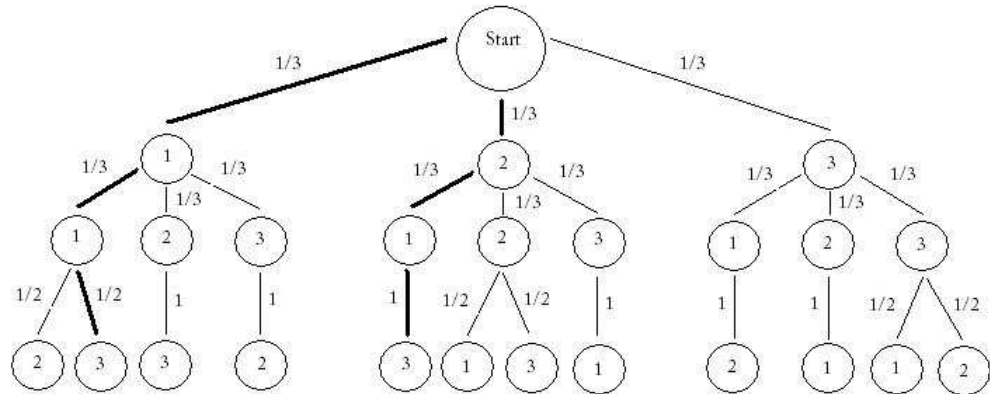


Abbildung 1.7: Baumdiagramm zum Ziegenproblem. Quelle: [17], S. 106.

1.4.1 Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayes-Formel

Die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit ist dann von Nutzen, wenn die Wahrscheinlichkeiten $P(A_j)$ und $P(B|A_j)$ vorgegeben sind. Hierfür ist ein zweistufiges Experiment Hauptanwendungsfall, bei dem $A_1, \dots, A_n$ die sich paarweise ausschließenden Ergebnisse des ersten Teilexperimentes beschreiben und sich B auf ein Ergebnis des zweiten Teilexperimentes bezieht. Die möglichen Ergebnisse des ersten Teilexperimentes bezeichnet mit $e_1, \dots, e_s$, also $\Omega_1 = \{e_1, \dots, e_s\}$, so sind formal $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und $A_j = \{e_j\} \times \Omega_2$. Die Menge B hat die Gestalt $B = \Omega_1 \times \{b\}$ mit $b \in \Omega_2$. P wird über die erste Pfadregel und $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, $A \subset \Omega$ definiert, so sind $P(A_j) = p_1(e_j)$ als Startverteilung und $P(\{b\}|A_j) = p_2(b|e_j)$ als Übergangswahrscheinlichkeit im zweistufigen Experiment gegeben. Somit nimmt die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit die Gestalt

$$P(B) = \sum_{j=1}^s p_1(e_j) \cdot p_2(b|e_j)$$

an. Diese Darstellung ist jedoch nichts anderes als die zweite Pfadregel (Vgl. [17], S. 101-103).

Eine interessante Deutung erfährt die Bayes-Formel, wenn die Ereignisse A_j als Ursachen oder Hypothesen für das Eintreten des Ereignisses B aufgefasst werden. Man nennt $P(A_j)$ die a priori-Wahrscheinlichkeit für A_j , wenn man den A_j vor der Beobachtung eines stochastischen Vorgangs gewisse Wahrscheinlichkeiten $P(A_j)$ zu ordnet. Diese werden oft als gleichwahrscheinlich angenommen bei fehlenden Wissen über die Hypothesen A_j . Das Ereignis B tritt mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(B|A_j)$ ein, falls A_j eintritt (die Hypothese A_j zutrifft). Tritt das Ereignis B ein, so ist die „inverse“ bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A_j|B)$ die a posteriori-Wahrscheinlichkeit dafür, dass A_j Ursache von B ist. *„Da es nahe liegt, daraufhin die a priori-Wahrscheinlichkeiten zu überdenken und den Hypothesen A_j gegebenenfalls andere, den Übergang von der W -Verteilung $P(\cdot)$ zur „bedingten Verteilung“ $P_B(\cdot)$ so vorstellen, dass jedes Elementarereignis $\{\omega\}$ mit $\omega \notin B$ die Wahrscheinlichkeit 0 erhält und dass die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten $p(\omega)$ der in B liegenden Elementarereignisse jeweils um den gleichen Faktor $P(B)^{-1}$ vergrößert werden.“* (Henze, 2008, S. 101).

Satz 1.4.4. *Es seien (Ω, P) ein W -Raum und $A_1, A_2, \dots, A_s$ paarweise disjunkte Ereignisse mit $\bigcup_{j=1}^s A_j = \Omega$, ein solches System von Ereignissen wird Zerlegung von Ω genannt. Wenn $P(A_j) > 0$ ($j = 1, \dots, s$) gilt, so folgt für jedes Ereignis B (Vgl. [17], S. 101 – 103):*

a) $P(B) = \sum_{j=1}^s P(A_j) \cdot P(B|A_j)$
(Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit)

b) Falls $P(B) > 0$, so gilt für jedes $k = 1, \dots, s$:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^s P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

(Formel von Bayes)

- $P(A_k)$ = die Wahrscheinlichkeit von A_k , bevor das Experiment begonnen hat (a priori-Wahrscheinlichkeit).
- $P(B|A_k)$ = die Wahrscheinlichkeit, dass die Richtigkeit der Hypothese A_k das experimentelle Resultat B nach sich zieht.
- $\sum_{j=1}^s P(A_j) \cdot P(B|A_j)$ = die Wahrscheinlichkeit, dass eine der bekannten möglichen Ursachen das experimentelle Resultat hervorgebracht hat (Vgl. [24], S. 138).

Lösung des Ziegenproblems mit der Bayes-Formel

Der Kandidat hat Tür 1 gewählt, der Moderator öffnet Tür 3 (o.B.d.A.). Wie groß ist die Chance, dass Tür 2 die Autotür ist? Der Kandidat hat die Beobachtung M_3 gemacht. Mit der Bayes-Formel rechnet man (Vgl. [24], S. 147 – 148):

$$P(A_2|M_3) = \frac{P(M_3|A_2) \cdot P(A_2)}{P(M_3|A_2) \cdot P(A_2) + P(M_3|A_1) \cdot P(A_1) + P(M_3|A_3) \cdot P(A_3)}$$

Die Werte der einzelnen Ausdrücke:

- $P(M_3|A_2) = 1$ (der Moderator kann jetzt nur Tür 3 öffnen)
- $P(A_2) = P(A_1) = P(A_3) = \frac{1}{3}$ (das Auto wird gleich wahrscheinlich verteilt)
- $P(M_3|A_1) = \frac{1}{2}$ (der Moderator wählt zwischen Tür 2 und 3 zufällig aus)
- $P(M_3|A_3) = 0$ (der Moderator will das Spiel ersichtlich nicht beenden)

Eingesetzt in den Ausdruck:

$$P(A_2|M_3) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

Gegenprobe:

$$\begin{aligned} P(A_1|M_3) &= \frac{P(M_3|A_1) \cdot P(A_1)}{P(M_3|A_1) \cdot P(A_1) + P(M_3|A_2) \cdot P(A_2) + P(M_3|A_3) \cdot P(A_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1.5 Didaktische Anregungen

Das Ziegenproblem eignet sich prinzipiell gut für den Schulunterricht. Jedoch sollte für die Bearbeitung dieses Themas genügend Zeit eingeplant werden, damit die Schüler selbst Ideen entwickeln und diese auch durch Simulationen überprüfen zu können. Deswegen ist möglicherweise zu empfehlen, dies im Wahlpflichtfach durchzugehen.

Zu Beginn sollte das Ziegenproblem durch die Lehrperson vorgestellt und erklärt werden. Danach könnten sich die Schüler in Einzelarbeit oder auch in der Gruppe Gedanken darüber machen, welche Tür die bessere Wahl wäre. Die Schüler sollten dabei ihre Wahl gut formulieren und argumentieren können (Vgl. [21], S. 104 – 106).

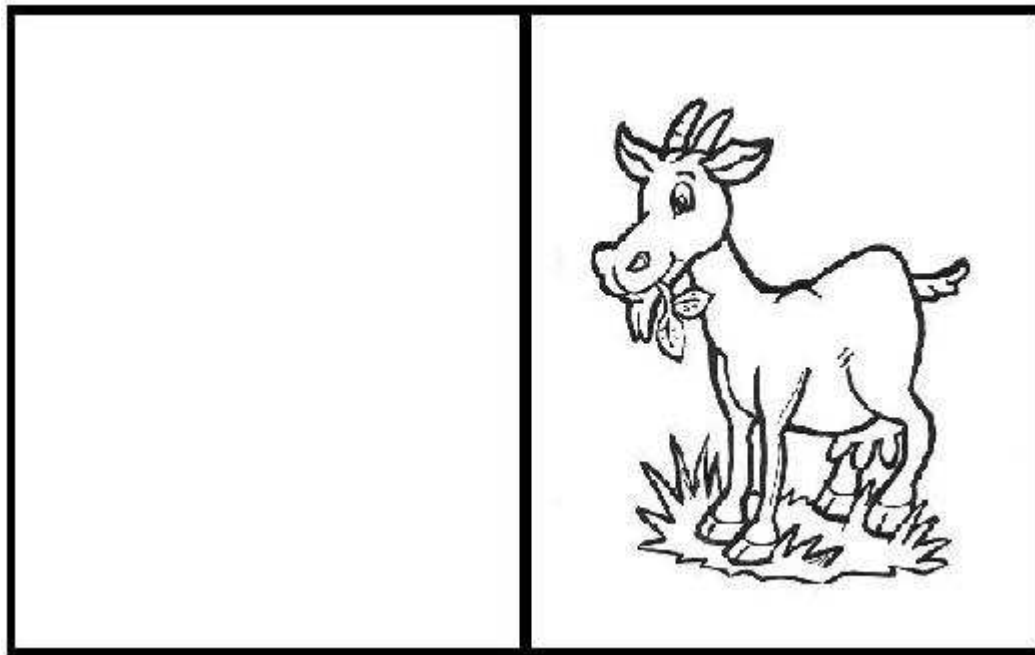


Abbildung 1.8: Karten zur Spielsimulation: Tür hinter der sich eine Ziege befindet.

Danach sollten die Schüler in Partnerarbeit das Spiel simulieren. Ein Schüler übernimmt hierbei die Rolle des Moderators und der andere die Rolle des Kandidaten. Die Schüler bekommen drei der Karten aus den Abbildungen 1.8 und 1.9. Zwei Karten hinter denen sich eine Ziege befindet und eine Karte hinter der sich das Auto befindet. Die Karten entsprechen den Türen, sie können entweder zugeklebt werden, wenn sie laminiert sind oder zugebunden werden, um sie immer wieder öffnen und schließen zu können. Der Moderator entscheidet hinter welcher Tür sich das Auto befindet. Für eine zufällige Aufteilung für das Auto gewährleisten zu können, könnte die Wahl mittels eines Würfels, Münzwurf oder Ähnlichem getroffen werden. Die Schüler sollen das Spiel zunächst 10 Mal durchspielen und dabei ihre Ergebnisse in der Tabelle 1.1 dokumentieren. Danach werden die Rollen getauscht und das Spiel wiederholt. Abschließend könnten sich die Schüler noch eine bestimmte Strategie

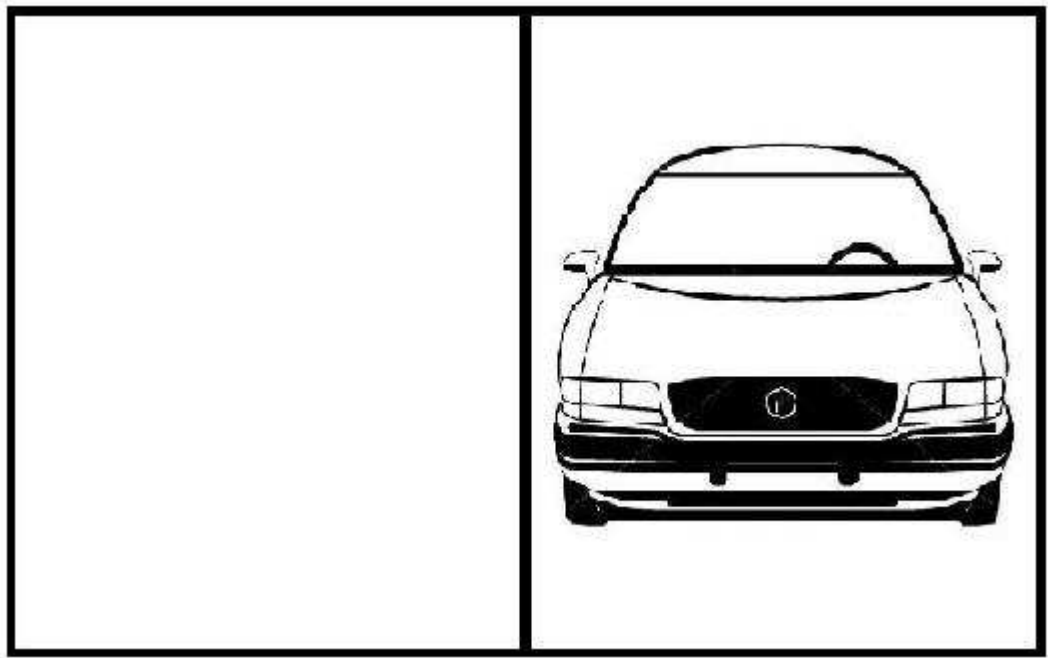


Abbildung 1.9: Karten zur Spielsimulation: Tür hinter der sich das Auto befindet.

beim Spielen überlegen. Beispielsweise das der erste Kandidat bei seinen 10 Versuchen immer wechselt und der zweite Kandidat bei allen 10 Versuchen bei seiner ersten Wahl bleibt (Vgl. [21], S. 104 – 106).

	Spiele	gewonnen	verloren
gewechselt			
nicht gewechselt			
gesamt			

Tabelle 1.1: Tabelle in welcher die Ergebnisse der Spielsimulation eingetragen werden können.

Danach sollen die Schüler ihre Ergebnisse mit ihren anfänglichen Vermutungen vergleichen und ihre Thesen gegebenenfalls überdenken. Die Versuchsausgänge und neuen Thesen können anschließend in größeren Gruppen von etwa 10 Schülern diskutiert werden. Die Schüler können ihre Ergebnisse aus den Partnerarbeiten zusammengetragen werden und ein Gesamtergebnis berechnet werden. In den Großgruppen kann die Spielsimulation so abgeändert werden, dass nun 10 Karten/Türen im Spiel sind, 9 Ziegentüren und eine

Autotür. Die Schüler sollen sich hierbei überlegen, in wie fern die Gewinnchancen dadurch abgeändert werden.

Abschließend sollten alle Gruppen ihre Ergebnisse im Plenum vorstellen und dann die richtige Lösung durch die Lehrperson nochmals erklärt werden (Vgl. [21], S. 104 – 106).

Kapitel 2

Verwandte des Ziegenproblems

2.1 Das Problem der drei Gefangenen

Drei Verurteilte sitzen in der Todeszelle und die Hinrichtung wurde auf den nächsten Tag angesetzt. Am nächsten Morgen flüstert ein Wärter ihnen zu, dass der Gouverneur einen von ihnen begnadigt hat. Jedoch darf er nicht verraten, wer es ist. Der Gefangene A will sich damit nicht zufrieden geben und lässt sich zum Anstaltspfarrer führen. Auf dem Weg dorthin steckt er dem Wärter ein Goldstück zu und bittet ihn um einen Hinweis. Dieser windet sich und sagt ihm, dass er ihm nicht sagen darf, wie es um ihn steht. Aber A lässt nicht locker, es brauche nur ein indirekter Hinweis zu sein. Schließlich sagt der Wärter: „Na gut, wer begnadigt ist, darf ich nicht sagen, aber eins kann ich verraten: B muss sterben.“ A denkt nun, dass seine Chancen anfangs bei $\frac{1}{3}$ lagen und jetzt seine Chancen immerhin auf $\frac{1}{2}$ gestiegen sind. Ist er zu Recht erleichtert?

Vor dem Hinweis des Wärters hatte A vier Möglichkeiten:

- 1.) A begnadigt, B genannt. $P(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- 2.) A begnadigt, C genannt. $P(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- 3.) B begnadigt, C genannt. $P(3) = \frac{1}{3}$
- 4.) C begnadigt, B genannt. $P(4) = \frac{1}{3}$

Es sind also zwei Fälle möglich, in denen der Wärter B als sicheren Todeskandidat nennt, nämlich die Fälle 1.) und 4.). Der 4. Fall ist doppelt so wahrscheinlich wie der 1. Fall. Also haben sich die Chancen des Gefangenen A nicht verbessert (Vgl. [24], S. 58 – 59).

Ein weiterer Lösungsweg ist mittels der Bayes-Formel:

Die Notation:

A_b heißt A begnadigt, B_b heißt B begnadigt, C_b heißt C begnadigt

B_g heißt B genannt

$$P(A_b|B_g) = \frac{P(B_g|A_b) \cdot P(A_b)}{P(B_g|A_b) \cdot P(A_b) + P(B_g|B_b) \cdot P(B_b) + P(B_g|C_b) \cdot P(C_b)}$$

Die Werte der einzelnen Ausdrücke:

- $P(A_b) = P(B_b) = P(C_b) = \frac{1}{3}$ (die Wahrscheinlichkeiten, dass jemand begnadigt wird sind gleichwahrscheinlich)
- $P(B_g|A_b) = P(C_g|A_b) = \frac{1}{2}$
- $P(B_g|B_b) = 0$
- $P(B_g|C_b) = 1$

Eingesetzt in den Ausdruck: $P(A_b|B_g) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{1}{3}$ (Vgl. [26], S. 157 – 158).

Die Äquivalenz zum Ziegenproblem

Bei dem Problem der drei Gefangenen liegt derselbe Sachverhalt wie beim Ziegenproblem vor. Hierbei kann man die Begnadigung mit dem Gewinn hinter einer der Türen vergleichen und die Nennung eines Gefangenen der Sterben muss durch den Wärter, mit dem Öffnen einer Ziegen-Tür durch den Moderator (Vgl. [8]).

Also kann man analog, zum Ziegenproblem, mit 100 Gefangenen argumentieren. In diesem Fall bittet der Gefangene A den Wärter 98 seiner Mitgefangenen zu nennen und schlussendlich bleiben nur noch die Gefangenen A und C übrig. Da jedoch der Häftling A von Beginn an von der Aufzählung ausgeschlossen war, erfährt er über seine Chancen zu Überleben nichts Neues. Dadurch, dass C als einziger nicht genannt wurde, sind seine Überlebenschancen sehr wahrscheinlich. Die Überlebenswahrscheinlichkeit von A ist nun 1% und die von C 99%.

Der Wärter gibt zwar dem Fragenden A neue Informationen, jedoch keine neuen Informationen über die Überlebenswahrscheinlichkeit des Fragenden. Der Wärter nennt jemanden, ausgenommen dem Fragenden und dem Begnadigten. Also könnte man die Gefangenen unterteilen, in den Fragenden und den restlichen Gefangenen und die Informationen des Wärters betreffen nur die restlichen Gefangenen. Mit jedem genannten Gefangenen fällt dessen Chance auf die Begnadigung auf 0 und die Wahrscheinlichkeit für den Rest der ungenannten Gefangenen steigt entsprechend an. Einzig die Wahrscheinlichkeit des Fragenden A bleibt immer gleich (Vgl. [8]).

2.2 Tumor oder nicht?!

Ein Patient besucht einen Arzt, erzählt von anhaltenden Schmerzen und fragt, ob er einen Tumor haben könnte. Nach der Untersuchung diagnostiziert der Arzt, dass es entweder ein Tumor, eine Migräne oder eine Verspannung ist, jeweils mit $\frac{1}{3}$ -Chance. Nach einer weiteren Untersuchung sagt er: „Ich bin mir jetzt sicher. Zum Tumorverdacht will ich nichts sagen. Aber es ist keine Migräne.“ Ist nun der Patient zu Recht erleichtert?

$$P(\text{Migräne}) = P(\text{Verspannung}) = P(\text{Tumor}) = \frac{1}{3}$$

Unter der Voraussetzung, dass der Arzt zum Tumor nichts sagen wird und nur mittelt, welche Diagnose er ausschließen kann:

- 1.) $P(\text{Tumor-Diagnose und „Keine Verspannung“}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- 2.) $P(\text{Tumor-Diagnose und „Keine Migräne“}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- 3.) $P(\text{Verspannungs-Diagnose und „Keine Migräne“}) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$
- 4.) $P(\text{Migräne-Diagnose und „Keine Verspannung“}) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Es gibt zwei Fälle, in denen der Arzt „Keine Migräne“ sagt: Der 2. und 3. Fall, der 3. Fall ist wahrscheinlicher. Also: Der Arzt vermehrt so die Hoffnung des Patienten, keinen Tumor zu haben, da eine Verspannung doppelt so wahrscheinlich ist (Vgl. [24], S. 96).

Die Äquivalenz zum Ziegenproblem

Dieser Aufgabenstellung liegt derselbe Sachverhalt, wie dem Ziegenproblem und dem Gefangenenparadoxon, zugrunde. Man kann den Tumorverdacht mit dem Auto hinter einer der drei Türen und den Ausschluss der Migräne durch den Arzt mit dem Öffnen einer Tür mit einer Ziege durch den Moderator vergleichen.

Man kann also auch hier wieder ähnlich wie bei dem Ziegenproblem argumentieren. Angenommen der Arzt hat anfangs 100 Krankheiten im Verdacht, nach vielen Tests kann er 98 Krankheiten ausschließen. Jedoch hat er dabei immer den Tumorverdacht ausgelassen und schlussendlich gibt es als Ursachen für die Schmerzen nur noch eine Verspannung und einen Tumor. Dadurch dass der Tumorverdacht ausgeschlossen war, hat der Patient keine Informationen über ihn erhalten. Die Informationen nach allen Test liefern nur Informationen über die Verspannung. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für einen Tumor 1% und für die Verspannung 99%.

Dieses Beispiel ist folglich analog zum Ziegenproblem. Es ist ein anwendungsorientiertes Beispiel zum Ziegenproblem.

2.3 Schiffbrüchige Seeleute

In einem Rettungsboot treiben drei schiffbrüchige Seeleute A, B und C wochenlang auf hoher See. Es ist kein Land in Sicht und der Proviant ist seit Tagen erschöpft. Deswegen wollen sie auslosen, wer sich für die anderen als Speise opfern muss. A steckt drei Streichhölzer in seine Hand, zwei lange und ein kurzes. Derjenige, der das kurze Streichholz zieht hat verloren. In Gedanken entscheidet sich C für das Streichholz eins. B darf jedoch als erster wählen, er zieht Streichholz drei und ist erleichtert, es ist lang. Sollte nun C seine ursprüngliche Wahl überdenken?

Kann man hier wie bei dem Ziegenproblem argumentieren und folgende Fälle bilden?

- 1.) Streichholz 1 ist kurz, B wählt Nummer 2
- 2.) Streichholz 1 ist kurz, B wählt Nummer 3
- 3.) Streichholz 2 ist kurz, B wählt Nummer 3
- 4.) Streichholz 3 ist kurz, B wählt Nummer 2

Und daraus kann man dann folgendes Diagramm aus Abbildung 2.1 zeichnen, welches der Abbildung zur Pfadregel zum Ziegenproblem sehr ähnelt.

Wenn B das Streichholz drei zieht und dieses lang ist, dann gilt entweder der Fall 2.) oder 3.) und da der Fall 3.) wahrscheinlicher ist, sollte A bei seiner Wahl bleiben. Also scheint sich dieses Beispiel nur dadurch von Ziegenproblem unterscheiden, dass es nur eine Niete und zwei Gewinne gibt, weshalb vom Wechsel abgeraten werden sollte (Vgl. [24], S. 60 – 63).

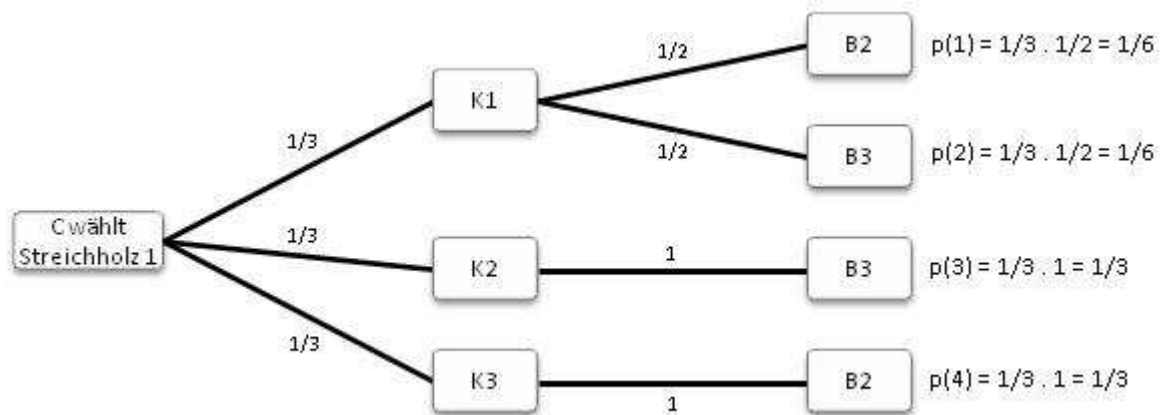


Abbildung 2.1: Abbildung zur Pfadregel. Quelle: [24], S. 61

Jedoch, wenn sich der Schiffbrüchige C anfangs für Streichholz zwei in Gedanken entschieden hätte, dann wäre jetzt Streichholz eins die schlechtere Wahl gewesen. Denn:

- 1.) Streichholz 1 ist kurz, B wählt Nummer 3: $P(1) = \frac{1}{3}$
- 2.) Streichholz 2 ist kurz, B wählt Nummer 1: $P(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- 3.) Streichholz 2 ist kurz, B wählt Nummer 3: $P(3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- 4.) Streichholz 3 ist kurz, B wählt Nummer 1: $P(4) = \frac{1}{3}$

Jetzt wäre also Fall 1.) wahrscheinlicher als Fall 3.). Nur weil C anders herum gedacht hat?! „Je nachdem, für welches Streichholz C sich insgeheim entscheidet, verteilen sich die Chancen zwischen Streichholz eins und zwei?“ (Randow, 2009, S. 62). Dies kann nicht richtig sein (Vgl. [24], S. 60 – 63)!

Noch einmal von vorne:

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass Streichholz eins kurz ist und B das Streichholz drei zieht, also

$$P(K1 \text{ und } B3) = P(K1) \cdot P(B3)$$

B darf jedes Streichholz ziehen, auch jenes das von C gewählte und natürlich auch das kurze. Deshalb gilt:

$$P(K1 \text{ und } B3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

und für $p(K2 \text{ und } B3)$ gilt dasselbe - also ist die Chance doch fifty - fifty! Also waren die vorhergegangenen Überlegungen und das Diagramm falsch, denn die Wahl von B war nie eingeschränkt, weder durch die Verteilung der Streichhölzer noch durch die stumme Wahl von C. Und da die Wahl nie eingeschränkt war, hatte jeder Ausgang des Spiels die gleiche Wahrscheinlichkeit. Einige Fälle sind ausgeschieden und übrig geblieben sind nur noch die Fälle $(K1, B3)$ und $(K2, B3)$ und da beide gleich wahrscheinlich sind gilt (Vgl. [24], S. 60 – 63):

$$P(K1) = P(K2) = \frac{1}{2}$$

Die Äquivalenz zum Ziegenproblem

Eine andere Überlegung wäre: Was, wenn es einen Beobachter gibt, der sich genauso insgeheim wie der Schiffbrüchige C für ein Streichholz entscheidet, und zwar für Streichholz zwei? Oder wenn sich C vorstellt, anfangs nicht das Streichholz eins, sondern Nummer zwei gewählt zu haben?

Beim Ziegenproblem wurde in diesen Fällen argumentiert, dass die Wahl des Beobachters nicht das Handeln des Moderators einschränkt, im Gegensatz zur Wahl des Kandidaten. Und in dem Beispiel der Schiffbrüchigen beschränkt die Wahl von C doch auch nicht B.

Jedoch schlägt bei dem Problem der Schiffbrüchigen das Schicksal zu und beim Ziegenproblem ist der Moderator an zwei Regeln gebunden: Er darf weder eine Autotür noch die vom Kandidaten gewählte Tür öffnen. Bei den Schiffbrüchigen könnte theoretisch schon B anfangs das kurze Streichholz ziehen und somit wäre dieses grauslige Spiel schon beendet (Vgl. [24], S. 60 – 63).

2.4 Russisches Roulette

Sechs Personen sitzen an einem Tisch, eine Kugel steckt im sechsschüssigen Revolver und der geht reihum, bis einer stirbt. Die ersten vier haben Glück gehabt, wie stehen die Chancen für die beiden verbleibenden Personen?

Vereinfacht man den Revolver-Fall: Drei Spieler werden eingesetzt und ein dreischüssiger Revolver, indem eine Kugel steckt. Jeder hat eine $\frac{2}{3}$ -Chance zu überleben. Wie stehen die Chancen, wenn der erste Spieler Glück hatte?

Fifty-Fifty! Denn es handelt sich hier nicht um ein Ziegenproblem. Der erste Spieler informiert sich nicht über die Position der Kugel in den beiden ver-

bleibenden Patronenschächten, denn er kennt sie nicht und wählt auch nicht aus (Vgl. [24], S. 95 – 96).

2.5 Drei Karten

Es sind drei Karten im Spiel: Eine ist beidseitig weiß, die andere beidseitig rot und die dritte Karte ist auf einer Seite rot und auf der anderen Seite weiß. Die Karten liegen unter einem Tuch. Jetzt dürfen Sie eine Karte hervorholen und sie auf den Tisch legen. Sie sehen eine weiße Kartenseite. Wollen Sie darauf wetten, dass die andere Kartenseite ebenfalls weiß ist?

Eine Fifty-fifty-Chance liegt nahe, die Karte wird rot oder weiß sein, oder nicht? In Abbildung 2.2 können die möglichen Fälle, in denen eine Karte mit sichtbar weißer Fläche auf dem Tisch liegt betrachtet werden. Die zwei Seiten der auf dem Tisch liegenden Karte werden als „Seite 1“ und „Seite 2“ bezeichnet (Vgl. [24], S. 59 – 60):

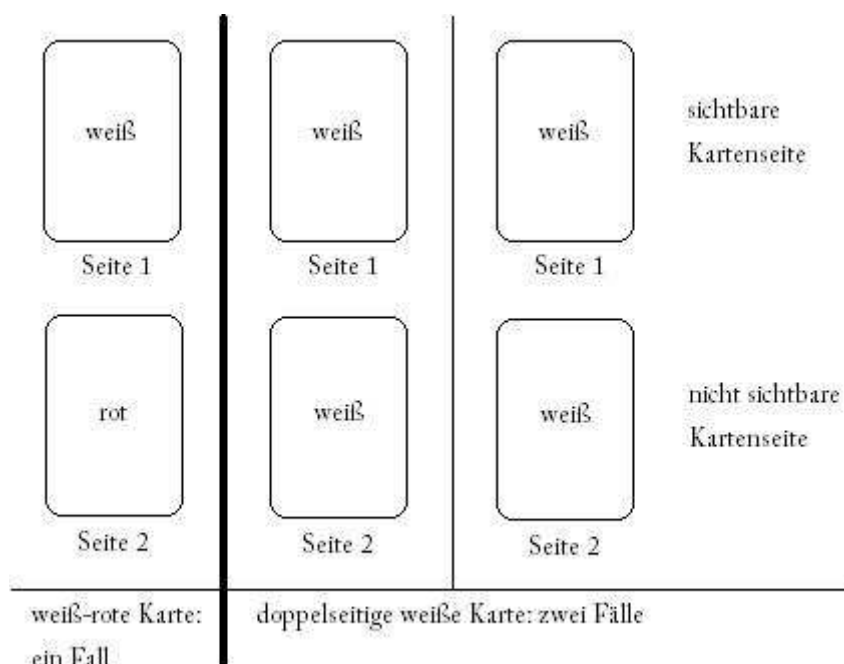


Abbildung 2.2: Die möglichen Fälle, in denen eine Karte mit sichtbar weißer Fläche auf dem Tisch liegt. Quelle: [24], S. 60.

Also ist in zwei von drei Fällen auch die Rückseite weiß. Man hätte wetten können, die Chancen standen besser als fifty-fifty (Vgl. [24], S. 59 – 60).

2.6 Weiterführende Beispiele zum Ziegenproblem

Beispiel 2.6.1. *In der Situation des Ziegenproblems möge der Moderator für den Fall, dass er die Auswahl zwischen zwei Ziegentüren hat, die Tür mit der kleineren (bzw. größeren) Nummer mit Wahrscheinlichkeit q (bzw. $1 - q$) öffnen.*

a.) *Der Kandidat hat Tür 1 gewählt und der Moderator hat Tür 3 geöffnet. Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit befindet sich das Auto hinter Tür 2? Speziell die Fälle $q = 0$ und $q = 1$.*

b.) *Der Kandidat wählt rein zufällig eine Tür und wechselt nach dem Öffnen einer Ziegentür durch den Moderator zur anderen noch verschlossenen Tür. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er das Auto (Vgl. [17], S. 114)?*

ad a.)

$$P(\text{Auto hinter Tür 2} \mid \text{Moderator öffnet Tür 3}) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot (1-q) + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{1}{2-q}$$

$$q = 0 : \frac{1}{2}$$

$$q = 1 : \frac{1}{1} = 1$$

ad b.)

o.B.d.A.: Tür 1 gewählt

$$P(\text{Auto hinter Tür 2} \mid \text{Moderator öffnet Tür 3}) = \frac{1}{2-q}$$

$$P(\text{Auto hinter Tür 3} \mid \text{Moderator öffnet Tür 2}) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot q + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{1}{1+q}$$

Beispiel 2.6.2. *Das Ziegenproblem wird so modifiziert, dass es vier Türen gibt (ein Auto, drei Ziegen). Nachdem der Kandidat gewählt hat, öffnet der Moderator rein zufällig eine Ziegentür, aber die vom Kandidaten gewählte Tür ist tabu. Sollte nun der Kandidat bei seiner Wahl bleiben oder sich z.B. mittels Münzwurfs für eine der beiden anderen verschlossenen Türen entscheiden (Vgl. [17], S. 114)?*

Hier können folgende Fälle gebildet werden, wenn wir annehmen, dass der Kandidat anfangs Tür 1 wählt:

- 1.) A1, M2: Auto hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 2
- 2.) A1, M3: Auto hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 3
- 3.) A1, M4: Auto hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 4
- 4.) A2, M3: Auto hinter Tür 2, Moderator öffnet Tür 3

- 5.) A2, M4: Auto hinter Tür 2, Moderator öffnet Tür 4
- 6.) A3, M2: Auto hinter Tür 3, Moderator öffnet Tür 2
- 7.) A3, M4: Auto hinter Tür 3, Moderator öffnet Tür 4
- 8.) A4, M2: Auto hinter Tür 4, Moderator öffnet Tür 2
- 9.) A4, M3: Auto hinter Tür 4, Moderator öffnet Tür 3

Aufgrund dieser Fälle kann folgende Abbildung gebildet werden:

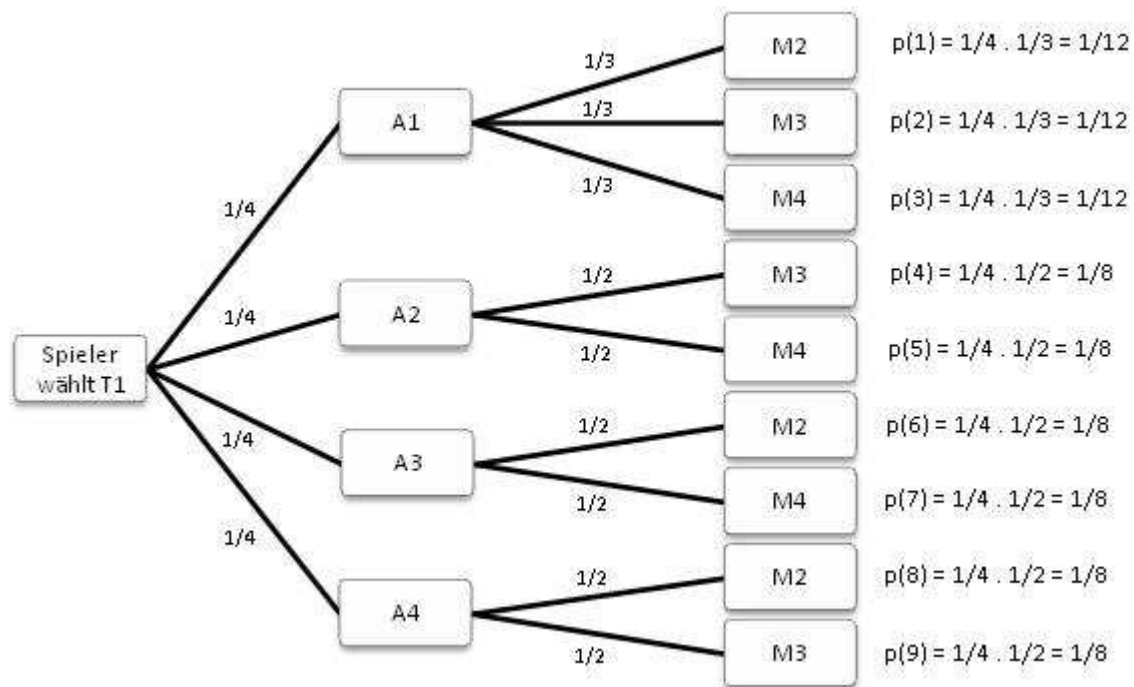


Abbildung 2.3: Abbildung zur Pfadregel

Nehmen wir nun (o.B.d.A.) an, dass der Moderator Tür 2 öffnet, dann sind die Fälle 1.), 6.) und 8.) möglich. Die Fälle 6.) und 8.) sind wahrscheinlicher als der Fall 2.), jedoch sind die Fälle 6.) und 8.) gleichwahrscheinlich. „Bleibt der Kandidat bei seiner Wahl, so gewinnt er mit W' $1/4$. Entscheidet er sich mit gleicher W' $1/2$ für eine der beiden anderen verschlossenen Türen, so gewinnt er mit W' $3/8$.“ (Henze, 2008, S. 335) Also lohnt sich auch in diesem Ziegenproblem ein Wechsel.

Beispiel 2.6.3. Die Ziegenshow wird verändert und nun sind zwei Autos hinter drei Türen. Der Kandidat wählt Tür 1 (o.B.d.A.) und hat nun eine Chance von $\frac{2}{3}$. Dann sagt der Moderator: „Ich zeige Ihnen mal, hinter welcher

der beiden anderen Türen ein Auto steht.“ Wie stehen jetzt die Chancen? Wechseln oder nicht (Vgl. [24], S. 193)?

Diese Variation des Ziegenproblems ist dem ursprünglichen Ziegenproblem sehr ähnlich. Dieses Mal wird jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine Ziege hinter einer der Türen befindet berechnet.

So können folgende Fälle gebildet werden, wenn man (o.B.d.A.) davon ausgeht, dass der Spieler anfangs Tür 1 gewählt hat:

- 1.) Z1, M2: Ziege hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 2
- 2.) Z1, M3: Ziege hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 3
- 3.) Z2, M3: Ziege hinter Tür 2, Moderator öffnet Tür 3
- 4.) Z3, M2: Ziege hinter Tür 3, Moderator öffnet Tür 2

Nun kann aufgrund dieser Fälle, die Abbildung 2.4 gebildet werden:

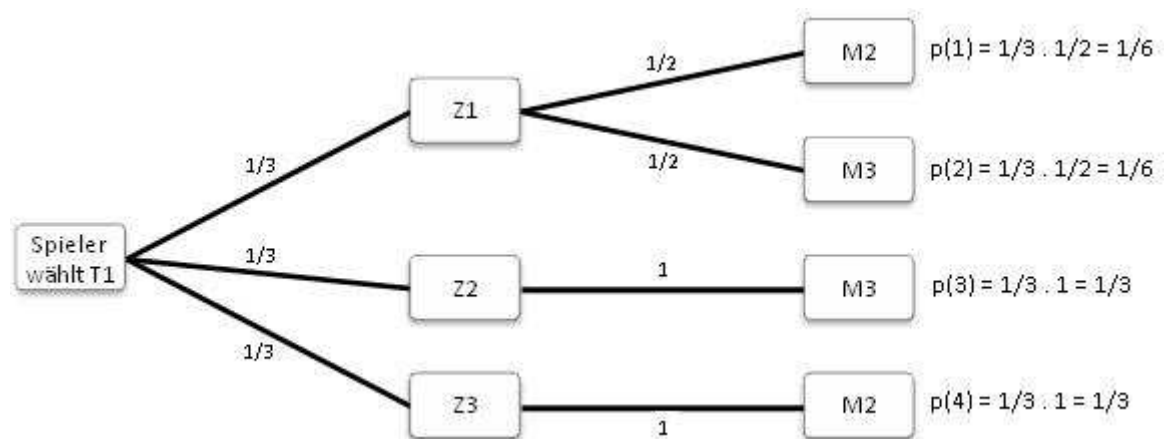


Abbildung 2.4: Abbildung zur Pfadregel

Angenommen der Moderator öffnet (o.B.d.A.) Tür 2, dann sind die Fälle 1.) und 4.) möglich. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Ziege hinter der Tür 1 befindet ist $\frac{1}{3}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Ziege hinter Tür 3 befindet, ist $\frac{2}{3}$. Also kann die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter der Tür 1 ist mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ berechnet werden. Und die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 3 befindet wird mit $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ berechnet. Also ist das Auto mit doppelter Wahrscheinlichkeit hinter Tür 1 verborgen. In diesem Fall sollte der Kandidat also bei seiner ursprünglichen Wahl verbleiben und nicht wechseln.

Beispiel 2.6.4. Die Ziegenshow besteht weiterhin aus drei Türen, hinter denen sich zwei Ziegen und ein Auto befinden. Jedoch sind diesesmal die

Wahrscheinlichkeiten für die Türen hinter denen sich das Auto befindet nicht gleich. Die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten werden jedoch nur dem Kandidaten mitgeteilt und nicht den Moderator. Welche Tür sollte der Kandidat anfangs wählen um die größtmöglichen Gewinnchancen zu haben?

$p_1, p_2, p_3; p_j = P(\text{Auto hinter Tür } j)$
o.B.d.A.: Tür 1 gewählt

$$P(\text{Auto hinter Tür 2} \mid \text{Moderator öffnet Tür 3}) = \frac{p_2 \cdot 1}{p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot 1 + p_3 \cdot 0} = \frac{2p_2}{p_1 + 2p_2}$$

$$P(\text{Auto hinter Tür 3} \mid \text{Moderator öffnet Tür 2}) = \frac{p_3 \cdot 1}{p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot 1} = \frac{2p_3}{p_1 + 2p_3}$$

$$f(x) = \frac{2x}{c+2x} \text{ mit } c \in [0, 1] \text{ für das Intervall } [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (c+2x) - 2x \cdot 2}{(c+2x)^2} = \frac{2c+4x-4x}{(c+2x)^2} = \frac{2c}{(c+2x)^2} \geq 0 \dots f \text{ monoton wachsend}$$

Angenommen $p_1 \leq p_2 \leq p_3$

$$P(\text{Auto hinter Tür 1} \mid \text{Moderator öffnet Tür 3}) = \frac{2p_2}{p_1 + 2p_2}$$

$$P(\text{Auto hinter Tür 2} \mid \text{Moderator öffnet Tür 3}) = \frac{2p_1}{2p_1 + p_2}$$

$$P(\text{Auto hinter Tür 3} \mid \text{Moderator öffnet Tür 2}) = \frac{2p_1}{2p_1 + 2p_3} \leq \frac{2p_1}{2p_1 + p_2}$$

$$p_2 \geq p_1 \Leftrightarrow p_2^2 \geq p_1^2 \Leftrightarrow 2p_1p_2 + p_2^2 \geq p_1^2 + 2p_1p_2 \Leftrightarrow \frac{2p_2}{p_1 + 2p_2} \geq \frac{2p_1}{2p_1 + p_2}$$

Also ist $P(\text{Auto hinter Tür 1} \mid \text{Moderator öffnet Tür 3}) \geq P(\text{Auto hinter Tür 2} \mid \text{Moderator öffnet Tür 3}) \geq P(\text{Auto hinter Tür 3} \mid \text{Moderator öffnet Tür 2})$.

Die optimale Spielstrategie wäre in diesem Fall, obwohl das der eigentlichen menschlichen Intuition widerspricht, dass sich der Spieler anfangs für die Tür mit der geringsten Wahrscheinlichkeit entscheidet. Damit diese nicht durch den Moderator geöffnet werden kann und er deswegen eine der beiden wahrscheinlicheren Türen öffnen muss. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter der ungeöffneten Tür befindet, vergrößert. Dadurch wird ein Wechsel zu wesentlich besseren Gewinnchancen führen.

Was passiert, wenn man sich nicht an diese Empfehlung hält, wird im folgenden Beispiel ersichtlich:

Beispiel 2.6.5. Bei einer Fernsehshow wird folgendes Spiel gespielt: In einer von drei Laden (diese sind mit den Nummern 1 bis 3 versehen), befindet sich ein Gutschein für eine einwöchige Fernreise für zwei Personen (einschließlich des Hotelaufenthalts und Vollpension), die beiden anderen Laden sind leer. Ein Kandidat muss sich für eine der drei Laden entscheiden. Befindet sich der Gutschein in der gewählten Lade, so gewinnt er den Gutschein (und damit die

Reise), ansonsten geht er leer aus. Bevor er sich für eine Lade entscheidet, wird ihm bekanntgegeben (aber nicht dem Leiter der Show!), dass sich der Gutschein mit Wahrscheinlichkeit $\frac{25}{47}$ in der Lade 1, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{47}$ in der Lade 2 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{47}$ in der Lade 3 befindet. Daraufhin entscheidet sich der Kandidat für die Lade 1. Der Leiter sagt dann, dass er zunächst weder bekanntgibt, ob sich der Gutschein in dieser Lade befindet, noch in welcher Lade sich der Gutschein befindet. Aber er öffnet die Lade 3, und diese ist offensichtlich leer. Dann kann der Kandidat bei seiner Lade bleiben, oder die andere Lade wählen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Gutschein in der Lade 1 befindet?

Der falsche Lösungsweg wäre:

$$P(L1|L3 \text{ leer}) = \frac{\frac{25}{47}}{\frac{25}{47} + \frac{18}{47}} = \frac{25}{43}$$

Dann wäre die Wahrscheinlichkeit immer noch größer als $\frac{1}{2}$ und damit sollte man nicht wechseln.

Der richtige Lösungsweg ist:

$$P(L1|\text{Spielleiter öffnet } L3) = \frac{\frac{25}{47} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{25}{47} \cdot \frac{1}{2} + \frac{18}{47} \cdot 1 + \frac{4}{47} \cdot 0} = \frac{25}{61}$$

Gegenprobe:

$$P(L2|\text{Spielleiter öffnet } L3) = \frac{\frac{18}{47} \cdot 1}{\frac{25}{47} \cdot \frac{1}{2} + \frac{18}{47} \cdot 1 + \frac{4}{47} \cdot 0} = \frac{36}{61}$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit für die Lade 1 nicht mehr größer als $\frac{1}{2}$. Also sollte auch hier gewechselt werden, denn die Wahrscheinlichkeit für die Lade 2 ist größer.

Kapitel 3

Lotto und Roulette

3.1 Lotto

„Bei Lotto „6 aus 45“ ist der Traum, mit geringem Einsatz Millionär werden zu können [...]“ ([6])

3.1.1 Geschichte und Spielregeln

Die erste Runde von Lotto „6 aus 45“ fand Anfang September 1986 statt. Um die Attraktivität von Toto nicht zu beeinträchtigen wurden die beiden Produkte von Beginn an getrennt positioniert. Lotto wurde als reines Glücksspiel positioniert, bei diesem der Spieler mit kleinen Einsätzen sehr hohe Gewinne erzielen kann.

Auf das Spielverhalten der Österreicher ist die Formel „6 aus 45“ zugeschnitten und führt zu einer kleinen Anzahl an Höchstgewinnen, zu attraktiven Mittelgewinnen und vielen Kleingewinnen. (Vgl. [6])

Bei Lotto „6 aus 45“ geht es darum sechs Zahlen vorausszusagen, die in einer bestimmten Lotto-Runde aus der Zahlenreihe 1 bis 45 gezogen werden. Die Anzahl der Übereinstimmungen zwischen den von dem Spieler gewählten Zahlen und den Gewinnzahlen entscheidet über den Gewinn. (Vgl. [7])

Folgendermaßen werden die Gewinnzahlen ermittelt:

Die Lottoziehungen finden jeden Mittwoch und Sonntag Abend statt. In einem durchsichtigen Ziehungsgerät befinden sich 45 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 45 beschriftet. Nach dem Mischen wird eine Kugel ausgeworfen. Die übrigen Kugeln werden wieder gemischt und eine weitere Kugel ausgeworfen. Dieser Vorgang wird wiederholt bis die sechs Gewinnzahlen und die Zusatzzahl bestimmt sind.

Seit der Ziehung am 8. September 2010 kann man beim Lotto-Spielen noch mehr gewinnen. Für sechs Richtige wird die Gewinnsumme von einer Million Euro garantiert. Aus fünf Gewinnrängen (Sechser, Fünfer mit Zusatzzahl, Fünfer, Vierer und Dreier) wurden acht Gewinnränge:

1. Rang (Sechser)	40%
2. Rang (Fünfer mit Zusatzzahl)	5,5%
3. Rang (Fünfer)	6%
4. Rang (Vierer mit Zusatzzahl)	2,1%
5. Rang (Vierer)	9,9%
6. Rang (Dreier mit Zusatzzahl)	4,8%
7. Rang (Dreier)	17,6%
8. Rang (Zusatzzahl allein)	12,6%

Tabelle 3.1: Die Dotierung der Gewinnränge. Quelle: [6].

3.1.2 Gewinnwahrscheinlichkeiten

Die Gewinnwahrscheinlichkeiten können mit einigen Formeln der Kombinatorik, einer mathematischen Teildisziplin, die sich mit den Möglichkeiten befasst, Dinge miteinander zu kombinieren oder anzuordnen, berechnet werden. Auf wieviele Arten sich die Kugeln kombinieren lassen können, werden Permutationen genannt. Die Anzahl an Permutationen hat eine solche Bedeutung, dass sie als eigenständige mathematische Operation interpretiert wird. „Diese so genannte Fakultät wird mit einem Ausrufungszeichen „!“ abgekürzt: $n!$, gesprochen „ n Fakultät“, steht für die Anzahl von Permutationen, die mit n unterschiedlichen Dingen gebildet werden können.“ (Bewersdorff, 2010, S. 8). Man berechnet dies allgemein mit der Formel:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Bei Lotto wird aus einer Gesamtzahl an Kugeln eine festgelegte Zahl von Kugeln zufällig ausgewählt. Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge an, in diesen Fällen spricht man von Variationen (Vgl. [10], S. 8f).

Beim Ausfüllen einer Tippreihe kann für die erste Zahl eine von den 45 Zahlen ausgewählt werden. Also gibt es für die erste Auswahl insgesamt 45 Möglichkeiten. Nach der ersten Wahl bleiben für die zweite Zahl noch 44 Möglichkeiten, zu jeder der 45 Möglichkeiten für die erste Zahl gibt es also 44 Möglichkeiten für die zweite Zahl. Daher können die ersten beiden Zahlen

auf $45 \cdot 44 = 1.980$ verschiedene Möglichkeiten ausgewählt werden (Vgl. [13], S. 7 – 10).

Verschiedene Möglichkeiten bei der Auswahl der Zahlen, die zum gleichen Ergebnis führen, werden bei dem benutzten Zählmodell zunächst als verschieden mitgezählt, so wird bei dieser Rechnung eine zu große Anzahl an Möglichkeiten erhalten. Nach der Auswahl aller 6 Zahlen wird die Formel korrigiert.

Unter Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es $45 \cdot 44 \cdot 43 = 85.140$ Möglichkeiten um 3 Zahlen auszuwählen, usw. Schlussendlich gibt es unter Berücksichtigung der Reihenfolge für 6 Zahlen insgesamt $45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 = 5.864.443.200$ Möglichkeiten (Vgl. [13], S. 7 – 10).

Da es aber bei Lotto „6 aus 45“ nicht auf die Reihenfolge ankommt, muss es wesentlich weniger als 5.864.443.200 Möglichkeiten geben. Um eine bestimmte Tippreihe zu erhalten, muss zuerst eine dieser 6 Zahlen gewählt werden, danach eine aus den restlichen 5 Zahlen, usw. Unter Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ verschiedene Möglichkeiten. Für jede andere Reihe erhält man gleich viele Möglichkeiten. Die Anzahl aller Möglichkeiten ist also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8.145.060$$

Dies entspricht dem Binomialkoeffizienten $\binom{45}{6}$. Soviele Reihen müsste man also abgegeben werden um sicher 6 Richtige zu haben (Vgl. [13], S. 7 – 10).

Wahrscheinlichkeit 6 Richtige zu tippen

$$P(6 \text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{5} \binom{39}{0}}{\binom{45}{6}} = \frac{1}{8145060} = 0,000000123 \approx 0,000012\%$$

Wahrscheinlichkeit 5 Richtige mit Zusatzzahl zu tippen

$$P(5 \text{ Richtige mit ZZ}^2) = \frac{\binom{6}{5} \binom{1}{1} \binom{38}{0}}{\binom{45}{6}} = \frac{6}{8145060} \approx 0,000000737 \approx 0,000074\%$$

²ZZ wird verwendet als Abkürzung für Zusatzzahl.

Wahrscheinlichkeit 5 Richtige ohne Zusatzzahl zu tippen

$$P(5 \text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{5} \binom{1}{0} \binom{38}{1}}{\binom{45}{6}} = \frac{228}{8145060} \approx 0,00002799 \approx 0,0028\%$$

Wahrscheinlichkeit 4 Richtige mit Zusatzzahl zu tippen

$$P(4 \text{ Richtige mit ZZ}) = \frac{\binom{6}{4} \binom{1}{1} \binom{38}{1}}{\binom{45}{6}} = \frac{570}{8145060} \approx 0,00006998 \approx 0,007\%$$

Wahrscheinlichkeit 4 Richtige ohne Zusatzzahl zu tippen

$$P(4 \text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{4} \binom{1}{0} \binom{38}{2}}{\binom{45}{6}} = \frac{10545}{8145060} \approx 0,00129 \approx 0,13\%$$

Wahrscheinlichkeit 3 Richtige mit Zusatzzahl zu tippen

$$P(3 \text{ Richtige mit ZZ}) = \frac{\binom{6}{3} \binom{1}{1} \binom{38}{2}}{\binom{45}{6}} = \frac{14060}{8145060} \approx 0,001726 \approx 0,17\%$$

Wahrscheinlichkeit 3 Richtige ohne Zusatzzahl zu tippen

$$P(3 \text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{3} \binom{1}{0} \binom{38}{3}}{\binom{45}{6}} = \frac{168720}{8145060} \approx 0,0207 \approx 2,1\%$$

Wahrscheinlichkeit die Zusatzzahl richtig zu tippen

$$P(\text{Zusatzzahl}) = \frac{\binom{6}{0} \binom{1}{1} \binom{38}{5}}{\binom{45}{6}} = \frac{501942}{8145060} \approx 0,06162 \approx 6,2\%$$

Wahrscheinlichkeit zu verlieren

$$\begin{aligned} P(2 \text{ Richtige}) + P(1 \text{ Richtige}) + P(0 \text{ Richtige ohne ZZ}) &= \frac{\binom{6}{2} \binom{39}{4}}{\binom{45}{6}} + \frac{\binom{6}{1} \binom{39}{5}}{\binom{45}{6}} + \frac{\binom{6}{0} \binom{1}{0} \binom{38}{6}}{\binom{45}{6}} = \\ &= \frac{1233765}{8145060} + \frac{3454542}{8145060} + \frac{2760681}{8145060} = \frac{7448988}{8145060} \approx 0,91454 \approx 91,5\% \end{aligned}$$

(Vgl. [12], S. 23f)

Gewinnklassen	Anzahl der Kombinationen	Wahrscheinlichkeit
6 Richtige	1	1 : 8.145.060
5 Richtige mit ZZ	6	1 : 1.357.510
5 Richtige	234	1 : 35.724
4 Richtige mit ZZ	570	1 : 14.290
4 Richtige	11.115	1 : 773
3 Richtige mit ZZ	14.060	1 : 579
3 Richtige	182.780	1 : 48
Zusatzzahl	501.942	1 : 16
Verlust (Rest)	7.448.988	1 : 1,09

Tabelle 3.2: Übersicht über die einzelnen Gewinnklassen und Wahrscheinlichkeiten. Quelle: [6] und [10], S. 12.

Dass es trotz der geringen Wahrscheinlichkeit von 0,000012% fast jede Woche glückliche Gewinner gibt, liegt einzig an der riesigen Anzahl an abgegebenen Lottotipps, die die Anzahl der Mitspieler aufgrund mehrfacher Tipps sogar noch übersteigt (Vgl. [10], S. 9).

3.2 Roulette

„Roulettespieler sind in zwei Kategorien einzuteilen. Die einen spielen zum Vergnügen, die anderen, weil sie das Geld brauchen. Zwangsläufig geht irgendwann die erste Kategorie in die zweite Kategorie über.“

Alfred Polgar (1873 – 1955)

3.2.1 Spielregeln

Das Spielfeld, auch Tableau genannt, besteht meist aus einem grünen Tisch mit gelben Linien, Nummern, Wörtern und Symbolen. Am Tableau sind die Nummern von 0 – 36 übersichtlich angeordnet. Das Herzstück des Tisches ist der Roulette-Kessel, der in 37 Felder von 0 – 36 unterteilt ist. Die Zahlen sind abwechselnd in einem roten und schwarzen Feld und nicht in arithmetischer Reihenfolge angeordnet (Vgl. [9]).

Mit „Faites vos jeux.“ bzw. „Make your bets, please.“ gibt der Croupier das Spiel frei. Der Spieler kann dann seine Jetons am Tableau auf die gewünschten Einsatzmöglichkeiten platzieren. Nach der Ansage „Rien ne va plus.“ bzw. „No

more bets, please.“ darf nicht mehr gesetzt werden. Der Croupier wirft die Kugel gegen die Drehrichtung in den Kessel.

Die Gewinnzahl, Gewinnfarbe und die beiden anderen einfachen Chancen werden laut aufgesagt, sobald die Kugel in einem Fach liegen bleibt. Alle Chancen die mit dieser Nummer zusammenhängen werden ausbezahlt. Fällt die Kugel auf Zero behalten alle Einsätze auf den einfachen Chancen die Hälfte ihres Wertes und werden für diesen Fall für das nächste Spiel gesperrt oder halbiert. (Vgl. [9])

In den Casinos Austria wird sowohl French Roulette als auch American Roulette angeboten. Die beiden Spielregeln sind in beiden Fällen gleich, der Unterschied liegt im Erscheinungsbild. Beispielsweise wird American Roulette wesentlich rascher als French Roulette gespielt und das Spielfeld ist etwas kleiner.

Einsatzmöglichkeiten

Zahlen	Bezeichnung	Bezeichnung	Beispiel	Auszahlung
1	Plein (A)	eine volle Nummer	1	×35
2	Cheval (B)	2 verbundene Nummern	7, 8	×17
3	Transversale pleine (C)	Querreihe von 3 Nummern	13, 14, 15	×11
4	Quatre Premier (F)	die ersten 4 Nummern	0, 1, 2, 3	×8
4	Carré (E)	4 Nummern im Viereck	16, 17, 19, 20	×8
6	Transversale simple (D)	Querreihe von 6 Nummern	19, 20, ..., 24	×5
12	Kolonne (G)	12 Nummern	3, 6, ..., 33, 36	×2
12	Dutzend (H)	P12, M12, D12	1 – 12, 13 – 24, 25 – 36	×2
18	einfache Chance (I)	gerade und ungerade Nummern, rot oder schwarz, Manque (1 – 18) oder Passe (19 – 36)		×1

Tabelle 3.3: Einsatzmöglichkeiten beim Roulette. Quelle: [13], S. 147 und [9].

Zu den Einsatzmöglichkeiten aus Tabelle 3.3 kommen die Möglichkeiten für Einsätze, die sich auf bestimmte Sektoren im Kessel beziehen.

Große Serie: Mit neun Jeton auf siebzehn Zahlen, die im Kessel nebeneinander liegen setzen (22, 18, 29, 7, 28, 12, 35, 3, 26, 0, 32, 15, 19, 4, 21, 2, 25).

Kleine Serie: Mit sechs Jetons auf zwölf Zahlen, die im Kessel nebeneinander liegen setzen (27, 13, 36, 11, 30, 8, 23, 10, 5, 24, 16, 33).

Orphelins: Mit fünf Jetons auf acht Zahlen, die im Kessel in zwei Segmente aufgeteilt sind setzen (1, 20, 14, 31, 9 und 17, 34, 6) (Vgl. [9]).

Man gewinnt mit dem Einsatz, falls eine der Zahlen, auf welche man gleichzeitig gesetzt hat, ausgespielt wird. Im Gewinnfall beträgt die Auszahlung

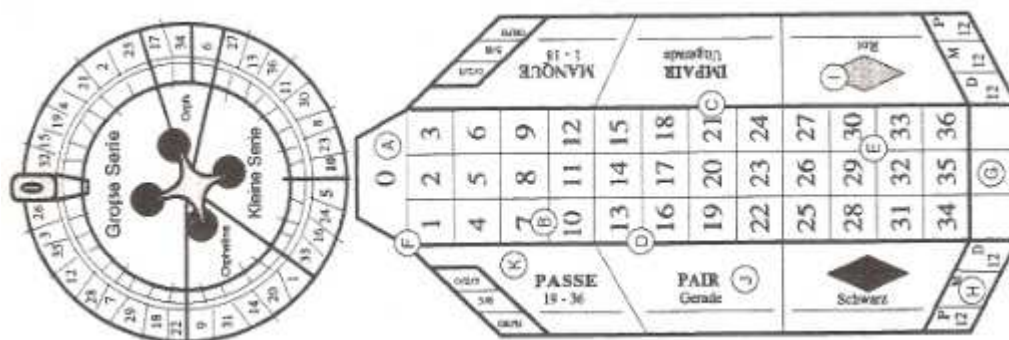


Abbildung 3.1: Anordnung der Nummern im Roulettkessel und Tableau. Legende in Tabelle 3.3. Quelle: [22], S. 166.

(falls man gleichzeitig auf k Zahlen gesetzt hat) das $\frac{36}{k}$ -fache des Einsatzes. Der eingesetzte Einsatz, der stehen bleibt, ist dabei mitgerechnet. Der Reingewinn abzüglich des Einsatzes beträgt das $(\frac{36}{k} - 1)$ -fache des Einsatzes (Vgl. [13], S. 147)

3.2.2 Chancengleichheit aller Zahlen

Bei jeder der 37 Zahlen kann davon ausgegangen werden, dass bei jedem Einzelspiel unabhängig von den Ergebnissen der vorherigen Spiele die gleiche Chance hat. Jede Zahl besitzt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{37} = 0,02703$.

Wegen dem Gesetz der großen Zahlen wird auf Dauer jede der 37 Zahlen in zirka $100 \cdot 0,02703 = 2,703\%$ der Spiele als Gewinnzahl erscheinen. Dabei handelt es sich um einen Durchschnittswert. Der relative Anteil der Gewinnspiele an der Gesamtheit der Spiele liegt in der Nähe von $\frac{1}{37}$, also

$$\frac{\text{Anzahl der Gewinnspiele}}{\text{Anzahl der Spiele}} \approx \frac{1}{37}$$

Diese Chancengleichheit wäre verletzt, wenn man Roulette-Kessel Manipulationen vorgenommen wurden. Das könnte durch Anbringen von Magneten oder dadurch, dass die Drehscheibe nicht horizontal gelagert ist geschehen. Im folgenden wird immer von der Chancengleichheit aller Zahlen ausgegangen.

Statistisch kann man nachweisen, dass immer wieder bestimmte Bereiche bevorzugt ausgespielt werden. In 37 Spielen werden kaum aller 37 Zahlen gezogen. „Leider kann man erst nach der Durchführung der 37 Spiele feststellen, welche Zahlen nicht gezogen wurden. Damit kann sich ein Spieler durch

diese statistisch nachweisbare Eigenschaft kaum einen Vorteil verschaffen.“
(Bosch, 2000, S. 147). (Vgl. [13], S. 146f)

3.2.3 Gewinnerwartung

Definition 3.2.1. *Es sei Ω die (diskrete) Ergebnismenge eines Vorgangs mit zufälligem Ergebnis. Dann heißt jede Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Zufallsgröße** auf Ω (Vgl. [27], S. 76).*

Definition 3.2.2. *Es sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilung*

Wert x_k	x_1	x_2	$\dots$	x_r
Wahrscheinlichkeit q_k	q_1	q_2	$\dots$	q_r

*Die Zahl $E(X) = x_1 \cdot q_1 + x_2 \cdot q_2 + \dots + x_r \cdot q_r$ heißt **Erwartungswert** der Zufallsgröße X (Vgl. [27], S. 80).*

Einsatz auf Plein

Ein Spieler setzt eine Geldeinheit 1E auf eine einzige Zahl (Pleine). Die Gewinnwahrscheinlichkeit für den Spieler ist $\frac{1}{37}$. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{37} = \frac{36}{37}$ ist der Einsatz verloren. Das 36-fache seines Einsatzes erhält der Spieler im Falle eines Gewinns. Der Reingewinn beträgt also 35E. Aufgrund der Chancengleichheit hängt die Gewinnchance nicht von der Zahl ab, auf die ein Spieler setzt (Vgl. [13], S. 149 – 157).

Angenommen der Spieler setzt n -mal (n ist eine große Zahl). Von diesen n Spielen sollen n_1 gewonnen und n_2 verloren werden. Es gilt $n_1 + n_2 = n$. Der Reingewinn beträgt bei diesen n Spielen:

$$x = 35 \cdot n_1 - 1 \cdot n_2.$$

Den durchschnittlichen Gewinn pro Spiel ergibt die Division des Gesamtgewinns x durch die Anzahl n der Spiele:

$$\bar{x} = \frac{x}{n} = \frac{35 \cdot n_1 - 1 \cdot n_2}{n} = 35 \cdot \frac{n_1}{n} - 1 \cdot \frac{n_2}{n}.$$

$\frac{n_1}{n}$ ist der relative Anteil der Gewinnspiele und $\frac{n_2}{n}$ der relative Anteil der Verlustspiele an allen n Spielen. Nach dem Gesetz der großen Zahlen liegen für große n die relativen Häufigkeiten meist in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten. Es gelten die Näherungen

$$\frac{n_1}{n} \approx \frac{1}{37} \text{ und } \frac{n_2}{n} \approx \frac{36}{37}.$$

Damit gilt die Näherung

$$\bar{x} \approx 35 \cdot \frac{1}{37} - 1 \cdot \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}E.$$

Dieser Zahlenwert, um welchen der durchschnittliche Reingewinn pro Spiel schwankt, also der Zahlenwert

$$m = 35 \cdot \frac{1}{37} - 1 \cdot \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}E,$$

ist der sogenannte Erwartungswert (Gewinnerwartung pro Spiel). Es handelt sich hierbei um den mittleren Reingewinn, bei dem im Gewinnfall der Einsatz bereits abgezogen ist. Die Gewinnerwartung ist einfach zu berechnen. Der Reingewinn 35 wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{37}$ erzielt. Diese Werte werden miteinander multipliziert. Der Spieler verliert seinen Einsatz im Falle eines Verlustes. Sein Reingewinn ist dann $-1E$ (negativ), dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{36}{37}$. Auch diese Werte werden multipliziert. Die Addition der beiden Produkte ergibt eine negative Gewinnerwartung oder den mittleren Gewinn pro Spiel. Der Reingewinn bei einem Einzelspiel kann nur entweder $+35$ (Gewinnfall) oder -1 (Verlustfall) sein. Daher weichen die einzelnen Reingewinne vom mittleren Reingewinn stark ab. Wenn ein Spieler oft auf eine Zahl setzt, wird er auf Dauer im Mittel den 37. Teil seines Gesamteinsatzes verlieren (Vgl. [13], S. 149 – 157).

Einsatz auf Cheval

Gewinnwahrscheinlichkeit: $\frac{2}{37}$

Verlustwahrscheinlichkeit: $\frac{35}{37}$

Der Erwartungswert bei dieser Strategie lautet:

$$m = 17 \cdot \frac{2}{37} - 1 \cdot \frac{35}{37} = -\frac{1}{37}E.$$

Zwar ist die Gewinnwahrscheinlichkeit doppelt so groß, wie beim Einsatz auf eine einzige Zahl, trotzdem bleibt der Erwartungswert gleich. Man wird auf Dauer zwar doppelt so oft gewinnen, aber dem entsprechend weniger. Zwar ist das Verlustrisiko kleiner, aber trotzdem bleibt die Gewinnerwartung $-\frac{1}{37}E$. Also wird man auch hier auf Dauer den 37. Teil des Gesamteinsatzes verlieren (Vgl. [13], S. 149 – 157).

Einsatz auf eine Transversale pleine

Gewinnwahrscheinlichkeit: $\frac{3}{37}$

Verlustwahrscheinlichkeit: $\frac{34}{37}$

Der Erwartungswert bei dieser Strategie lautet:

$$m = 11 \cdot \frac{3}{37} - 1 \cdot \frac{34}{37} = -\frac{1}{37}E.$$

Einsatz auf ein Carré

Gewinnwahrscheinlichkeit: $\frac{4}{37}$

Verlustwahrscheinlichkeit: $\frac{33}{37}$

Der Erwartungswert bei dieser Strategie lautet:

$$m = 8 \cdot \frac{4}{37} - 1 \cdot \frac{33}{37} = -\frac{1}{37}E.$$

Einsatz auf eine Transversale simple

Gewinnwahrscheinlichkeit: $\frac{6}{37}$

Verlustwahrscheinlichkeit: $\frac{31}{37}$

Der Erwartungswert bei dieser Strategie lautet:

$$m = 5 \cdot \frac{6}{37} - 1 \cdot \frac{31}{37} = -\frac{1}{37}E.$$

Einsatz auf eine Kolonne oder ein Dutzend

Gewinnwahrscheinlichkeit: $\frac{12}{37}$

Verlustwahrscheinlichkeit: $\frac{25}{37}$

Der Erwartungswert bei dieser Strategie lautet:

$$m = 2 \cdot \frac{12}{37} - 1 \cdot \frac{25}{37} = -\frac{1}{37}E.$$

Einsatz auf einfache Chance

Die Gewinnwahrscheinlichkeit hierfür beträgt $\frac{18}{37}$. Falls Zero ausgespielt wird, kann man seinen Einsatz stehen lassen oder alternativ dazu wird auch der halbe Einsatz ausbezahlt. Falls jemand seinen Einsatz stehen lässt, kann das bereits durchgeführte Spiel als Freispiel betrachtet werden (Vgl. [13], S. 147 – 157).

Nun wird davon ausgegangen, dass bei Zero der halbe Einsatz ausbezahlt wird. Verloren ist der Einsatz, falls nicht die 0 oder eine der 18 Zahlen der einfachen Chance erscheint. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$ und ein Zero besitzt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{37}$. Bei Zero ist die Auszahlung $\frac{1}{2}E$, also ist der Reingewinn $-\frac{1}{2}E$. Dann erhält man den Erwartungswert:

$$m = 1 \cdot \frac{18}{37} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{37} - 1 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{1}{74}E.$$

Der Spieler verliert auf Dauer nur halb soviel wie bei den anderen Strategien, nämlich den 74. Teil seines Gesamteinsatzes. Bei dieser Strategie besteht also das geringste Verlustrisiko.

„Falls alle 37 Zahlen die gleiche Chance haben, ausgespielt zu werden, führt jeder Einsatz bei einem Einzelspiel zum gleichen Ergebnis. Auf Dauer werden die Spieler den 37. Teil des Gesamteinsatzes verlieren. Diesen Betrag gewinnt dann die Spielbank. Dabei spielt es keine Rolle, ob beim Einsatz auf eine einzige Zahl das größte Risiko eingegangen oder gleichzeitig auf 12 Zahlen gesetzt wird. Eine Ausnahme gibt es beim Einsatz auf einfache Chance.“ (Bosch, 2000, S. 157) (Vgl. [13], S. 149 – 157).

3.2.4 Allgemeine Bemerkungen

Falls von der Chancengleichheit aller Zahlen ausgegangen werden kann, ist kein Spiel gegen den Zufall möglich. Die Gewinnerwartung ist wegen der Vorgabe des Höchsteinsatzes immer negativ. Allerdings wird es immer wieder auch Spieler geben, die innerhalb eines Zeitraums (beispielsweise an einem Abend) größere Gewinne erzielen.

Eine Person könnte alle ausgespielten Zahlen aufschreiben, darauf hoffend eine bestimmte Gesetzmäßigkeit zu entdecken. Jedoch führt diese Strategie meistens nicht zum Erfolg. Sollte jemand mit diesem Vorgehen gewinnen ist dies einzig auf den Zufall zurückzuführen. Man könnte aus den ausgespielten Zahlen nur einen Vorteil erzielen, wenn bei der Ausspielung nicht alle Zahlen die gleiche Chance besitzen. *„Ähnlich wie beim Lotto sind viele Personen der Meinung, dass Zahlen, die in den vorangegangenen Spielen sehr selten, also wesentlich unter dem Durchschnitt, ausgespielt wurden, bei den nächsten Ausspielungen einen Nachholbedarf haben und damit eine größere Chance haben müssten.“* (Bosch, 2000, S.182). Jedoch erfolgt jede einzelne Ausspielung unabhängig von den Ergebnissen vergangener Ausspielungen (Vgl. [13], S. 181 – 183).

Beim Lotto wird in den einzelnen Gewinnklassen die Ausschüttungssumme unter allen Gewinnern in dieser Klasse gleichmäßig aufgeteilt. Deswegen ist es sinnvoll beliebte Tippreihen zu vermeiden, also gegen die Mitspieler zu spielen. Aber beim Roulette gibt es feste Quoten, unabhängig von der Anzahl der Gewinnern. Es gibt kein Spiel gegen die Mitspieler und auch kein sicheres Spiel gegen die Bank (Vgl. [13], S. 181 – 183).

Kapitel 4

Black Jack

„Spieler sind Menschen, die dem Glück eine Chance geben.“

Werner Mitsch (1936 – 2009)

4.1 Die Spielregeln

Black Jack, auch „21“ oder „17 + 4“ genannt, hat das Ziel, so nahe wie möglich an 21 Punkte heranzukommen, ohne mehr als 21 Punkte zu erhalten. Es wird mit 6 Kartenpaketen zu 52 Blatt, also mit 312 Karten gespielt, welche sich zu Beginn des Spiels im Schlitten befinden. Der Spieler gewinnt das Spiel, wenn er näher an 21 herankommt als der Croupier. (Vgl. [3])



Abbildung 4.1: Black Jack Tisch. Quelle: [5]

Kartenwerte

2 - 10: Der Wert der Karten, entspricht der Zahl, die oben steht.

Bilder: Bub, Dame und König zählen 10.

Ass: Zählt wahlweise 1 oder 11.

Nachdem man an einer der sieben Boxen am Black Jack Tisch Platz genommen hat und alle Spielgäste den Einsatz getätigt haben, gibt der Croupier jedem Boxeninhaber zwei Karten und sich selbst eine. Vom Croupier aus links beginnend kommen alle Boxeninhaber nacheinander an die Reihe. Jeder Spieler spielt einzeln gegen die Bank und kann so lange weitere Karten verlangen, bis er denkt, nahe genug an 21 zu sein. Der Spieler darf ruhen („Stand“) oder ziehen („Hit“), solange er noch weniger als 21 Punkte hat.

Nachdem alle Spieler ihre Entscheidung getroffen haben, zieht auch der Dealer selbst eine zweite Karte. Wenn er einen Kartenwert von 16 oder weniger hat, muss er eine weitere Karte ziehen und ab einem Kartenwert von 17 darf er keine Karte mehr ziehen (Vgl. [3] und [4]).

Wenn die Bank 21 überschreitet haben alle im Spiel verbleibenden Spieler automatisch gewonnen. Wenn er 21 nicht überschreitet, gewinnen jene Spieler, deren Kartenwert näher zu 21 ist als der des Croupiers. Haben der Croupier und Spielgast Punktegleichstand, so gilt dies als ein Unentschieden („Stand-Off“). Der Spieler kann dann seinen Einsatz für das nächste Spiel stehen lassen, zurückziehen oder ändern.

Wird die Gesamtpunktezah von einundzwanzig Punkten durch den Spieler überschritten, so ist sein Einsatz verloren. Erhält der Croupier danach ebenfalls mehr als einundzwanzig Punkte, ändert dies nichts an dem Verlust des Spielers (Vgl. [3] und [22], S. 60).

Wenn die Karten des Spielers nicht die Punktezah 21 überschreiten und einen höheren Wert als jene des Croupiers haben, gewinnt der Spieler die Höhe seines Einsatzes (1:1). Wenn der Spieler mit einem Black Jack gewinnt, wird der Einsatz im Verhältnis 3:2 ausbezahlt, d.h. das 1,5fache des Einsatzes (Vgl. [3]).

Nachdem alle Gewinne an die Spieler ausgezahlt wurden oder die Bank die von ihr gewonnenen Spiele abkassiert, werden die gespielten Karten weggelegt. Das nächste Spiel wird mit den verbliebenen Karten weitergeführt. Es werden nicht alle 312 Karten verwendet, sondern nur etwa 80%, danach wird neu gemischt. In vielen Casinos wird ein Schlitten verwendet, in den die gespielten Karten eingeworfen werden und automatisch zugemischt werden

(Vgl. [22], S. 61).

Spieler Bank	<17	17	18	19	20	21	>21	Black Jack	7+7+7
17	-1	0	1	1	1	1	-1	1,5	1,5
18	-1	-1	0	1	1	1	-1	1,5	1,5
19	-1	-1	-1	0	1	1	-1	1,5	1,5
20	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	1,5	1,5
21	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	1,5	1,5
>21	1	1	1	1	1	1	-1	1,5	1,5
Black Jack	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1,5

Tabelle 4.1: In dieser Tabelle kann man ablesen, wann der Spieler gewinnt (1 oder 1,5), verliert (-1) oder ein Unentschieden erreicht (0). Quelle: [22], S. 61.

4.1.1 Wichtige Begriffe

Box und Boxeninhaber

Box heißt das Spielfeld, an einem Black Jack Tisch sind 7 Spielboxen in einem Halbkreis angeordnet. Boxeninhaber werden jene Spieler genannt, welche am Tisch sitzen. Mitspieler, die stehen, müssen die Entscheidung der Boxeninhaber akzeptieren (Vgl. [3]).

Black Jack

Ein Black Jack ist die höchste Kartenkombination, welche alle anderen Kombinationen schlägt. Er besteht aus einem Ass und einem Bild oder einem Ass und einer 10 mit den ersten beiden Karten.

Ist an der offenliegenden Karte der Bank zu erkennen, dass sie mit keiner zweiten Karte ein Black Jack erreichen kann, hat der Spieler sofort gewonnen. „Wenn die Bank jedoch ebenfalls mit einer zweiten Karte einen Black Jack erreichen könnte, erhält der Spieler zunächst keine Auszahlung“ (Monka, 1999, S. 59) Zwar kann der Spieler seinen Einsatz nicht mehr verlieren, aber das Spiel kann noch unentschieden enden und somit ohne Gewinn oder Verlust (Vgl. [3] und [22], S. 58f).

Siebener-Drilling

Der Siebener-Drilling besteht aus 3 Siebenern und wird sofort ausbezahlt, unabhängig davon, welche Karte der Dealer hat. Der Spieler erhält das 1,5fache seines Einsatzes. (Vgl. [3])

Versicherung – Insurance

Wenn der Dealer als erste Karte ein Ass hat, kann der Spieler sich gegen einen möglichen Black Jack der Bank versichern, indem ein entsprechender Einsatz auf das Insurance-Feld gesetzt wird. Zieht der Croupier ein Black Jack wird die Versicherung im Verhältnis 2:1 ausbezahlt. Jedoch, wenn die Bank kein Black Jack hat, wird die Versicherung eingezogen. Der Rest des Spiels läuft danach nach den üblichen Regeln (Vgl. [3]).

Teilen – Split

Man kann Teilen, wenn die ersten beiden Karten gleichwertig sind, beispielsweise zwei Achter. Dann wird mit „geteilter Hand“ weiter gespielt, das heißt mit zwei getrennten Einsätzen, wobei mehrmaliges Teilen möglich ist. Für jede geteilte Hand ist ein weiterer Einsatz, in der selben Höhe, wie der erste, notwendig. Danach erhält man beliebig viele weitere Karten für das Spiel. Einzige Ausnahme sind zwei geteilte Asse, auf diese bekommt man nur eine weitere Karte. In diesem Fall gelten Ass und Bild oder Ass und 10 nicht als Black Jack, da die Kombination nicht mit den beiden ersten Karten erzielt wurde (Vgl. [3]).

Splitten eröffnet dem Spieler zwei reizvolle Möglichkeiten. Der Spieler kann zum Einen eine ungünstige Ausgangslage verbessern. Wenn der Spieler zum Beispiel mit zwei Achten die unerwünschte Summe von 16 oder mit zwei Assen die Summe 2 oder 12 erreicht hat, in diesen Fällen führt das Splitten zu besseren Anfangsbedingungen. Der Spieler kann dann zwei Spiele mit je einer Acht bzw. einem Ass beginnen und zum anderen hat er die Möglichkeit, während des laufenden Spiels seinen Einsatz zu erhöhen. Der Einsatz wird vor dem Spiel gestellt und kann durch die Split-Möglichkeit sozusagen während des Spiels verdoppelt werden, verteilt auf zwei Spiele, die er gleichzeitig gegen den Croupier spielt (Vgl. [22], S. 63).

Verdoppeln – Double

Der Einsatz kann verdoppelt werden, nachdem die ersten beiden Karten ausgeteilt wurden. Danach erhält der Spieler von Croupier nur noch genau eine Karte. Als Mitspieler kann man nur verdoppeln, wenn auch der Boxeninhaber seinen Einsatz verdoppelt. Ebenfalls nach dem Teilen ist ein Verdoppeln möglich (Vgl. [3]).

Es ist günstig zu verdoppeln, wenn der Spieler mit den ersten beiden Karten die Summe 9, 10 oder 11 erreicht hat. Hat der Spieler beispielsweise eine 5 und 6, so kann er seinen Einsatz verdoppeln, da er auf eine Endsumme von 21 hoffen kann. Zuvor sollte der Spieler einen Blick auf die Ausgangslage der

Bank werfen. Denn falls die Bank als erste Karte ein Ass hat, wird der Spieler möglicherweise nicht verdoppeln. Jedoch, wenn die Bank eine 6 gezogen hat, kann der Spieler voller Zuversicht verdoppeln (Vgl. [22], S. 64).

Bust

Auf vielen Black Jack Tischen hat man eine weitere Gewinnchance durch das Zusatzspiel „Bust“. Dabei setzt der Spieler darauf, dass der Dealer den Kartenwert 21 überschreitet. Wenn der Croupier mehr als 21 hat, gewinnt der Spieler mit der Quote 5:2, also das 2,5fache. Wenn 21 nicht von Dealer überschritten wird, geht der Einsatz aus dem Zusatzspiel an die Bank. Die Einsätze müssen vor der Ausgabe der Karten platziert werden (Vgl. [3]).

4.1.2 Asymmetrien in den Spielregeln

Für den Spieler und die Bank ist Black Jack ein fast symmetrisches und ausgeglichenes Spiel. Außerdem scheinen die nicht symmetrischen Teile dem Spieler einen Vorteil zu bringen, was der Attraktivität des Spiels zugute kommt:

- Bei einem Black Jack gewinnt der Spieler 1,5fach zu seinem Einsatz hinzu. Gewinnt jedoch der Croupier mit einem Black Jack, so gewinnt er nur im Verhältnis 1:1.
- Die Bank muss nach einer festgelegten Strategie zusätzliche Karten ziehen. *„Der Spieler ist frei in den Entscheidungen, ob er eine Karte verlangen soll oder nicht, wie er ein Ass bewerten soll, und kann diese abhängig vom Wert der ersten Karte der Croupiers treffen. Der Croupier aber ist in seiner Spielweise an eine starre Regel gebunden.“* ([4])
- Beim Ziehen kennt der Spieler die erste Karte der Bank.
- Die Bank darf nicht teilen und verdoppeln. Bei einem aussichtsreichen Blatt kann der Spieler den Einsatz verdoppeln und damit wird der Croupier gezwungen, das Spiel mit dem doppelten Betrag fortzusetzen. Der Spieler hat die Möglichkeit zwei gleichwertige Karten zu teilen und möglicherweise so mit zwei Händen gegen den Croupier gewinnen.

„Der einzige, zunächst recht unscheinbare, letztlich aber umso gewichtigere Vorteil der Bank beruht darauf, dass die Bank auf jeden Fall gewinnt, wenn der Spieler sich verkauft, auch dann, wenn sie selbst die Grenze 21 überschreitet.“ (Bewersdorff, 2010, S. 83). Daher erscheint es plausibel, dass der Spieler

durchschnittlich etwas defensiver spielen sollte als die Bank. Außerdem wird sich eine gute Spielstrategie an der ersten Karte der Bank orientieren, denn diese enthält wesentliche Informationen über das mutmaßliche Abschneiden der Bank (Vgl. [10], S. 83 – 84 und [4]).

Am Besten beginnt eine mathematische Analyse des Spiels mit der Bank, deren Spielresultate in Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt werden. Es kann passieren, dass die Bank 12 Karten ziehen muss (6 Asse, eine 6 und anschließend wieder 5 Asse), meist sind es jedoch viel weniger, selten mehr als 4. Neben dem Sonderfall des Black Jacks müssen ebenfalls die Softhands (Blätter mit einem als 11 gezählten Ass) als separate Zustände berücksichtigt werden. Dann ergibt sich die Endverteilung aus Tabelle 4.2.

Bank-Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
17	14,51
18	13,95
19	13,35
20	18,03
21	7,27
Black Jack	4,73
> 21	28,16

Tabelle 4.2: Die Wahrscheinlichkeiten für das Spiel der Bank in %. Quelle: ([10], S. 83)

Bemerkenswert ist das relativ hohe Risiko der Bank, welche sich durchschnittlich mehr als jedes vierte Mal überkauft. Sollte der Spieler, ohne teilen oder verdoppeln, wie die Bank bis er 17 Punkte erreicht hat eine weitere Karte ziehen, dann folgt sein Kartenergebnis der Tabelle 4.2. Wenn die Gewinnpläne für Bank und Spieler symmetrisch wären, ergäbe sich für den Spieler die Gewinnerwartung mit dem Wert 0. Aber da der Gewinnplan in Teilen unsymmetrisch ist, ergeben sich leichte Korrekturen, die in Tabelle 4.3 zusammengestellt sind. In der Summe ergibt sich im Durchschnitt ein Verlust von 5,68% des Einsatzes (Vgl. [10], S. 83 – 84 und [4]).

Situation	Vor-/Nachteil	Wahrscheinlichkeit	Erwartung
Spieler hat Black Jack, Bank hat keinen	50	4,51	2,25
Spieler und Bank überkaufen sich beide	-100	7,93	-7,93

Tabelle 4.3: Unsymmetrien im Gewinnplan und dessen Auswirkungen, wenn der Spieler die Zieh-Strategie der Bank kopiert in %. Quelle: ([10], S. 84)

4.2 Das Spiel

4.2.1 Ziehen einer weiteren Karte

Der Spieler muss bei der Entscheidung, ob er eine weitere Karte ziehen soll, beachten,

- welche Karten schon vor ihm liegen und
- welche Karte die Bank bekommen hat.

Wenn die Bank zum Beispiel als erste Karte eine 10 hat, ist die Lage für den Spieler eher ungünstig. Denn mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{13}$ kommt als zweite Karte ebenfalls eine mit dem Wert 10, damit erreicht die Bank 20 Punkte. Die Chance das sich der Croupier überkauft ist gering, also sollte der Spieler versuchen möglichst an 20 Punkte heranzukommen, aber mindestens 17 Punkte - denn dann müsste sich die Bank überkaufen um gewinnen zu können. Natürlich wächst mit alternativen, steigenden Vorsummen für den Spieler die Möglichkeit, dass er sich überkauft, wenn er eine weitere Karte nimmt (Vgl. [22], S. 69 – 71).

„Angenommen, jemand würde die Wahrscheinlichkeiten für die Endzustände der Spiele der Bank kennen, könnte also die Chancen angeben, daß die Bank – unter Berücksichtigung der ersten gezogenen Karte – die Summe siebzehn, achtzehn oder die anderen möglichen Spielausgänge erreicht.“ (Monka, 1999, S. 70). Beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Bank ihr Spiel mit der Punktesumme 17 beendet, hängt von der ersten Karte ab. Wenn der Croupier als erste Karte eine 7 erhält, ist die Wahrscheinlichkeit relativ hoch, dass er das Spiel mit 17 beenden wird. Hingegen wenn er als erste Karte eine 10

bekommt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Endsumme bei diesem Spiel ebenfalls 17 sein wird, offenbar kleiner als für die Summe 20.

Wenn nun alle bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Spielausgänge der Bank bekannt sind, kann der Spieler die Chance berechnen, dass Spiel zu gewinnen oder zu verlieren unter Berücksichtigung des eigenen Punktestandes (Vgl. [22], S. 69 – 71).

4.2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Punktesummen der Bank

Für das optimale Spiel der Casinobesuchers ist die Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten für die Punktestände der Bank, mit welcher sie ihr Spiel beenden, ausschlaggebend.

Die Wahrscheinlichkeiten können vor der Durchführung eines Spiels berechnet werden, indem die Anzahl der im Sinne einer Fragestellung günstigen Fälle ins Verhältnis zur Anzahl der gleichmöglichen Fälle gesetzt werden. Es bedarf einer Übersicht, welche die verschiedenen möglichen Spiele der Bank darstellt, um die gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen (Vgl. [22], S. 71 – 78).

Berechnung eines einfachen Falles:

Die Bank bekommt als erste Karte eine 9. Als zweite Karte könnte die Bank ein Ass ziehen und so die Punktesumme 20 erreichen, die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\frac{1}{13}$. Als zweite Karte könnte die Bank eine 10, einen Buben, eine Dame oder einen König ziehen und so die Punktesumme 19 erreichen, dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{13}$. Wenn die Bank als zweite Karte eine 8 oder 9 zieht, ist das Spiel mit den Punktesummen 17 oder 18 ebenfalls beendet, jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{13}$. Erhält die Bank als zweite Karte eine 2, 3, ... oder 7, so ist die Punktesumme kleiner als 17 und die Bank muss noch eine weitere Karte ziehen, dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{13}$. Wenn die Bank beispielsweise als zweite Karte eine 2 zieht (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{13}$) und danach als dritte Karte ein Ass zieht, so dass sie mit drei Karten die Summe $9 + 2 + 1 = 12$ erreicht hat und wiederum eine weitere Karte ziehen muss, beträgt die Wahrscheinlichkeit hierfür $\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13}$. Wenn die Bank als dritte Karte eine 8 erhält, so ist die Summe $9 + 2 + 8 = 19$ und das Spiel beendet, die Wahrscheinlichkeit beträgt nun dafür $\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13}$. Die Bank kann die Punktesumme 19 auch mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{13}$ erzielen. Insgesamt – bis zu diesem Punkt der Berechnungen – kann die Bank 19 Punkte mit der Wahrscheinlichkeit $(4 + \frac{1}{13}) \cdot \frac{1}{13}$ bekommen.

Sämtliche Spielsituationen der Bank müssten auf diese Weise durchgespielt und in geeigneter Weise zusammengefügt werden und so ergeben sich die in der Tabelle 4.4 enthaltenen bedingten Wahrscheinlichkeiten (Vgl. [22], S. 71 – 78).

Bei der Berechnung der a-priori-Wahrscheinlichkeit geht man davon aus, dass im verbleibenden Kartenstoß, aus dem die jeweils nächste Karte gezogen wird, die Karten mit unterschiedlichen Punktwerten in gleicher Häufigkeit enthalten sind – abgesehen von der 10 und den Bildern. Dies stimmt jedoch nicht mit der Realität überein, denn wenn zum Beispiel als erste Karte eine 9 gezogen wird, ist klar, dass die Anzahl der weiteren 9er im Kartenstoß sich verringert hat. Eine vollständige Analyse aller verschiedenen Spiele unter allen verschiedenen Restkartenbeständen wäre weder in einem vernünftigen zeitlichen Rahmen durchführbar, noch von einem praktischen Interesse. Somit wird im folgenden davon ausgegangen, dass unter den Restkarten keine verschiedenen Häufigkeiten für Karten mit unterschiedlichem Punktwert vorliegen (ausgenommen für den Wert 10). Für jedes einzelne Spiel ist diese Annahme sicher unangemessen, jedoch für den Durchschnitt aller Spiele adäquat.

Punktesumme 1. Karte	17	18	19	20	21	>21	Black Jack
Ass	13,08	13,08	13,08	13,08	5,39	11,53	30,77
2	13,98	13,49	12,97	12,40	11,80	35,36	-
3	13,50	13,05	12,56	12,03	11,47	37,39	-
4	13,05	12,59	12,14	11,65	11,12	39,45	-
5	12,23	12,23	11,77	11,31	10,82	41,64	-
6	16,54	10,63	10,63	10,17	9,72	42,32	-
7	36,86	13,78	7,86	7,86	7,41	26,23	-
8	12,86	35,93	12,86	6,94	6,94	24,47	-
9	12,00	12,00	35,08	12,00	6,08	22,84	-
10, B, D, K	11,14	11,14	11,14	34,22	3,45	21,21	7,69

Tabelle 4.4: Bedingte Wahrscheinlichkeiten der Bank für das Erreichen von Punktesummen in %. Quelle: ([22], S. 75)

Neben der a-priori-Wahrscheinlichkeit, kann man auch die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten betrachten, welche sich nicht erheblich von der Tabelle 4.4 unterscheidet. Ein Spieler der darauf setzt wünscht sich erstens, dass die

sich ändernde Zusammensetzung der verbliebenen Kartenstöcke, aus denen eine nächste Karte gezogen wird, keinen gravierenden Einfluss ausübt und zweitens, dass sich das „Gesetz der großen Zahl“ bemerkbar macht. Also der Spieler hofft, dass keine astronomisch große Anzahl an Spielen durchgeführt werden muss, um zu erfahren, dass die Bank in ungefähr 3 von 10 Spielen ein Black Jack erhält, wenn sie als erste Karte ein Ass erhält (Vgl. [22], S. 71 – 78).

Die Berechnungen dieses Abschnitts können auch mittels Markoff-Ketten berechnet werden. Dies wird im Folgenden behandelt:

4.2.3 Markoff-Ketten

Definition 4.2.1. *Eine Markoff-Kette ist ein Zufallsprozess, bei dem ein Ereignis (oder Zustand) nur von unmittelbaren Vorgänger beeinflusst wird und selbst nur auf das unmittelbare Folgeereignis (oder Folgezustand) Einfluss hat.*

*Aus endlich vielen Zuständen $E_1, E_2, \dots, E_n$ besteht eine **endliche Markoff-Kette**. Zu bestimmten Zeitpunkten t sind die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}(t) = P(E_j(t+1)|E_i(t))$ oder einfach $p_{i,j} = P(E_j|E_i)$. Die p_{ij} werden in der Übergangsmatrix S angeordnet. Wenn S von t unabhängig ist, heißt die Markoff-Kette **homogen**.*

Eine Markoff-Kette ist gedächtnislos, das heißt die Übergänge zum Zeitpunkt t hängen nur von den Zuständen zur Zeit $t - 1$ und nicht von denen zur Zeit $t - 2, \dots$ ab (Vgl. [20], S. 662).

Zur mathematischen Beschreibung von Markoff-Ketten dienen bedingte Wahrscheinlichkeiten, sogenannte Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$, in dieser Schreibweise bezeichnet der erste Index stets das Resultat des vorhergehenden Versuchs, der zweite Index gibt an, in welchen Zustand das System im nachfolgenden Zeitpunkt übergeht.

Die aus den Übergangswahrscheinlichkeiten gebildete Matrix, die sogenannte Übergangsmatrix, vermittelt ein vollständiges wahrscheinlichkeitstheoretisches Bild der möglichen Änderungen, die beim Übergang von einem Versuch zu dem unmittelbar folgenden eintreten können (Vgl. [15], S. 102 und [25], S. 233):

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Satz 4.2.2. Für die Zeilensumme der Übergangsmatrix gilt:

$$\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1 \quad (\text{für alle } i)$$

Beweis. Von einem Zustand E_i wird mit einer Sicherheit irgendein Zustand E_j erreicht. Der Formel folgt, da die Zustände einander ausschließen. $\square$

Die Übergangsmatrix beschreibt den Markoff-Prozess folgendermaßen: Die einzelnen Wahrscheinlichkeitsklassen sind durch den Wahrscheinlichkeitsvektor $\vec{w}_0 = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ beschrieben. So lautet dieser Vektor in der ersten Folgewahrscheinlichkeitsklasse: $\vec{w}_1 = \vec{w}_0 \cdot P$, und in der zweiten Folgewahrscheinlichkeitsklasse: $\vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot P = \vec{w}_0 \cdot P^2$, ... und letztlich $\vec{w}_k = \vec{w}_0 \cdot P^k$ (Vgl. [25], S. 232f und [20], S. 663f).

Definition 4.2.3. Eine reelle $s \times s$ -Matrix $P = (p_{i,j})_{i,j=1}^s$ heißt **stochastische Matrix**, falls $p_{i,j} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ und

$$\sum_{j=1}^s p_{i,j} = 1 \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Satz 4.2.4. Die Wahrscheinlichkeit einer Kette von Zuständen $E_a(0) E_b(1) E_c(2) \dots E_e(k-1) E_f(k)$ ist gegeben durch $P(E_a(0)) \cdot p_{ab}(0) \cdot \dots \cdot p_{de}(k-2) \cdot p_{ef}(k-1)$.

Beweis. Es gilt nach dem Multiplikationssatz der Stochastik:

$$\begin{aligned} P(E_a(0) \dots E_j(k)) &= P(E_a(0)) \cdot P(E_b(1)|E_a(0)) \cdot P(E_c(2)|E_a(0), E_b(1)) \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot P(E_j(k)|E_a(0), \dots, E_e(k-1)) \end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich durch die Gedächtnislosigkeit der Markoff-Kette zu:

$$P(E_a(0)) \cdot P(E_b(1)|E_a(0)) \cdot P(E_c(2)|E_b(1)) \cdot \dots \cdot P(E_f(k)|E_e(k-1))$$

Unter Verwendung der Schreibweise aus Definition 4.2.1 folgt die Behauptung (Vgl. [20], S. 664). $\square$

Satz 4.2.5. Bei einer Markoff-Kette möge eine Anfangsverteilung $p_i(0) := P(E_i(0))$ vorliegen und ferner eine Übergangsmatrix P . Dann lässt sich die Verteilung der Zustände E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) für den nächsten Zeitpunkt berechnen durch:

$$(p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)) \cdot \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Beweis. Zum Beispiel um die Wahrscheinlichkeit für $E_1(1)$ zu erhalten, muss gerechnet werden $p_1(0) \cdot p_{1,1}, p_2(0) \cdot p_{2,1}, \dots, p_n(0) \cdot p_{n,1}$. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt, da die verschiedenen Ereignisse disjunkt sind:

$$P(E_1(1)) = \sum_{i=1}^n p_i(0) \cdot p_{i,1}$$

Dasselbe gilt auch für die anderen Zustände (Vgl. [20], S. 664). $\square$

Satz 4.2.6. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}^{(t)}$ in t Zeitschritten mit

$$p_{i,j}^{(t)} := P(E(t+s) = j | E(s) = i) \text{ oder } p_{i,j}^{(t)} := P(E_j(t+s) | E_i(s))$$

gelten die Gleichungen von CHAPMANN-KOLMOGOROFF:

$$p_{i,j}^{(t+s)} = \sum_{k=1}^n p_{i,k}^{(s)} \cdot p_{k,j}^{(t)}$$

Die Übergangsmatrix für t Schritte ist dann P^t .

Beweis. Wie man von einem Zustand E_i in $t + s$ Schritten E_j erreicht, kann man wie in Abbildung 4.2 dargestellt veranschaulichen. Die n Zustände schließen einander aus. Es gilt also nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(E_j) = P(E_i) \cdot p_{i,1}^{(s)} \cdot p_{1,j}^{(t)} + P(E_i) \cdot p_{i,2}^{(s)} \cdot p_{2,j}^{(t)} + \dots + P(E_i) \cdot p_{i,n}^{(s)} \cdot p_{n,j}^{(t)}$$

$$= P(E_i) \cdot \sum_{k=1}^n p_{i,k}^{(s)} \cdot p_{k,j}^{(t)}$$

Diese Summe beinhaltet auch die Rechenvorschrift zur Matrizenmultiplikation. Es folgt also (mit den Voraussetzungen nach Satz 4.2.5), wenn eine Anfangsverteilung für $t = 0$ vorliegt, für die Verteilung nach t Schritten (Vgl. [20], S. 665f):

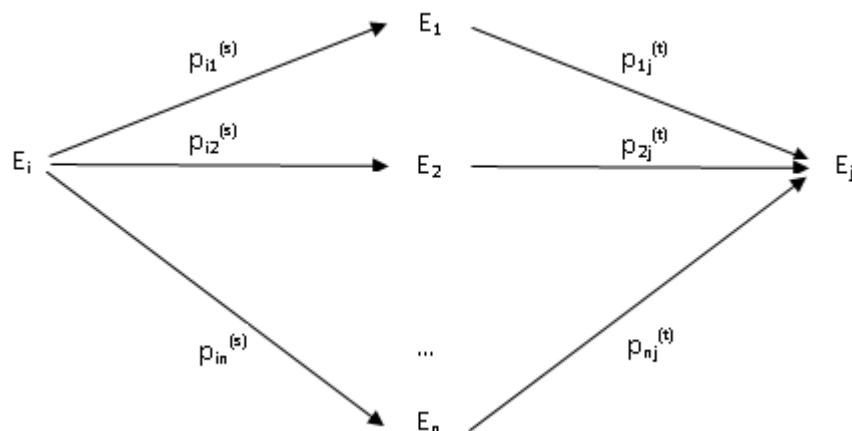


Abbildung 4.2: Wie man von einem Zustand E_i in $t + s$ Schritten E_j erreicht.
Quelle: [20], S. 666.

$$P(E_1(t), \dots, E_n(t)) = (p_1(0), (p_2(0), \dots, p_n(0))) \cdot \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix}^t$$

□

Definition 4.2.7. Der Zustand k einer Markoff-Kette heißt **absorbierend**, genau dann wenn $p_{k,k} = 1$. Absorbierende Zustände werden, falls sie einmal erreicht werden, mit Wahrscheinlichkeit 1 nie mehr verlassen. Besitzt eine Markoff-Kette mindestens einen absorbierenden Zustand, der von jedem nicht absorbierenden Zustand in eventuell mehreren Schritten erreicht werden kann, heißt die gesamte Markoff-Kette absorbierend. Setze $A := \{k : k \text{ ist absorbierend}\}$.

Die Übergangsmatrix erhält die folgende Blockform, wenn man die absorbierenden Zustände als Erste auflistet (I ist die Einheitsmatrix) (Vgl. [10], S. 80f und [16], S. 46):

$$B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

Wenn man die Blockform der Matrix A immer wieder mit sich selbst multipliziert, erhält man Aussagen über das langfristige Verhalten absorbierender Markoff-Ketten:

$$B^n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (I + Q + \dots + Q^{n-1})R & Q^n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ (I - Q)^{-1}R & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Grenzwertes von B^n kann insbesondere bestimmt werden, welche absorbierenden Zustände aus einem gegebenem Startzustand mit welchen Wahrscheinlichkeiten langfristig erreicht werden. Wie lange dies durchschnittlich dauert, kann ebenfalls aus der Matrix $(I - Q)^{-1}$ berechnet werden. Ist d der Spaltenvektor, dessen Koordinaten gleich der (bis zum Erreichen eines absorbierenden Zustandes) zu erwartenden Schrittzahl sind, dann ergibt sich die Gleichung (Vgl. [10], S. 80f und [16], S. 46)

$$d = Qd + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

die umgeformt werden kann zu

$$d = (I - Q)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 4.2.8. Es sei P eine stochastische $s \times s$ -Matrix, $k \in \{1, 2, \dots, s\}$, $k \in A$ und $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Mit $q_{j,k}$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit irgendwann den Zustand k zu erreichen, wenn man in j startet.

$$q_k := \begin{pmatrix} q_{1,k} \\ \vdots \\ q_{s,k} \end{pmatrix}$$

Offensichtlich gilt $q_{k,k} = 1$. In diesem Fall ist man ja bereits zum Zeitpunkt 0 in einem Zustand k . In Satz 4.2.9 wird angegeben, wie der Spaltenvektor q_k bestimmt werden kann (Vgl. [23], S. 132f).

Satz 4.2.9. Betrachte eine Markoff-Kette mit Übergangsmatrix P . Angenommen $A \neq \emptyset$ und $k \in A$. Dann ist q_k gleich dem kleinsten Spaltenvektor $x = (x_j)_{j=1}^s$ mit $x_j \geq 0$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, $x_k = 1$ und $(P \cdot x)_j = x_j$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Beweis. Setze $x = q_k$. Dann ist $q_{j,k} \geq 0$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ und $q_{k,k} = 1$. Für ein $l \in \{1, 2, \dots, s\}$ ist $p_{j,l}$ die Wahrscheinlichkeit in einem Schritt von j nach l zu kommen. Daher muss

$$q_{j,k} = \sum_{l=1}^s p_{j,l} \cdot q_{l,k}$$

gelten. Somit ist $(P \cdot x)_j = x_j$.

Für $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei $p_j(n)$ die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt n das erste Mal den Zustand k zu erreichen, wenn man in j startet. Es ist also stets $p_j(n)$ die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt n im Zustand k zu sein, und zu den Zeitpunkten $0, 1, \dots, n-1$ nicht im Zustand k gewesen zu sein. Offensichtlich ist

$$q_{j,k} = \sum_{n=0}^{\infty} p_j(n) \quad (4.1)$$

für jedes $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. $p_{j,l}$ ist die Wahrscheinlichkeit den Zustand l in einem Schritt von j aus zu erreichen. Vom Zustand l erreicht man mit der Wahrscheinlichkeit $p_l(n-1)$ in $(n-1)$ Schritten den Zustand k . Daher ist

$$p_j(n) = \sum_{l=1}^s p_{j,l} \cdot p_l(n-1) \quad (4.2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Sei $x = (x_j)_{j=1}^s$ ein Spaltenvektor mit $x_j \geq 0$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, $x_k = 1$ und $(P \cdot x)_j = x_j$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Durch Induktion nach n wird gezeigt, dass

$$x_j \geq \sum_{l=0}^n p_j(l) \quad (4.3)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ gilt.

Im Fall $n = 0$ ist $x_k = 1 \geq 1 = p_k(0)$ und $x_j \geq 0 = p_j(0)$ für $j \neq k$. Sei jetzt $n \geq 1$, und sein $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. $\sum_{l=0}^n p_k(l) = 1 \leq x_k$. Im Fall $j \neq k$ ist dann

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{l=1}^s p_{j,l} \cdot \underbrace{x_l}_{\geq \sum_{i=0}^{n-1} p_l(i) \text{ wegen (4.3)}} \geq \\ &\geq \sum_{l=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{i=1}^s p_{j,i} \cdot p_i(l)}_{=p_j(l+1) \text{ wegen (4.2)}} = \underbrace{0}_{=p_j(0)} + \sum_{l=1}^n p_j(l) = \sum_{l=0}^n p_j(l). \end{aligned}$$

Sei $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x_j \geq \sum_{l=0}^n p_j(l)$ wegen (4.3). Deswegen ist $x_j \geq \sum_{l=0}^{\infty} p_j(l)$. Nach (4.1) ist $\sum_{l=0}^{\infty} p_j(l) = q_{j,k}$, und daher $x_j \geq q_{j,k}$ (Vgl. [23], S. 132f). $\square$

Bemerkung 4.2.10. q_k kann man folgendermaßen berechnen. Setze $x = (x_j)_{j=1}^s$ (mit $x_j \geq 0$) $x_k = 1$ und $x_j = 0$ für alle $j \in A \setminus \{k\}$ und $Px = x$. Dieses x ist dann eindeutig bestimmt und erfüllt $x = q_k$.

Zur Verdeutlichung des oben Erklärtem ein einfaches Beispiel (Vgl. [25], S. 233f):

Beispiel 4.2.11. Bei einer Verbraucherbefragung wurde erhoben, wie sich Autobesitzer verhalten würden, wenn sie sich einen Neuwagen anschaffen. (Zur Vereinfachung stehen nur die drei Modelle Rostnix, Saftwenig und Tadellos zur Wahl.) Die nachfolgende Tabelle gibt an, wieviel % der Benutzer einer bestimmten Type welche Marke wählen würden:

vorhandenes Modell	Nachfolgemodell		
	R	S	T
R	60%	20%	20%
S	40%	60%	0%
T	20%	50%	30%

Angenommen, die Verteilung der Automarken ist zur Zeit 40% Rostnix, 40% Saftwenig und 20% Tadellos. Wie wird die Verteilung nach dem ersten Autowechsel aussehen, und wie nach dem zweiten?

Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten ist somit

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Daher ist

$$\vec{w}_1 = \vec{w}_0 \cdot P = (0,4 \quad 0,4 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} = (0,44 \quad 0,42 \quad 0,14)$$

und

$$\vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot P = (0,44 \quad 0,42 \quad 0,14) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} = (0,46 \quad 0,41 \quad 0,13)$$

Letzteres erhält man ebenfalls durch

$$\vec{w}_2 = \vec{w}_0 \cdot P^2 = (0,4 \quad 0,4 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 0,48 & 0,34 & 0,18 \\ 0,48 & 0,44 & 0,08 \\ 0,38 & 0,49 & 0,13 \end{pmatrix} = (0,46 \quad 0,41 \quad 0,13)$$

4.2.4 Abwägen von Gewinn- und Verlustchancen für den Spieler

Die Kenntnis der bedingten Wahrscheinlichkeiten erweist sich für den Spieler als sehr vorteilhaft. „*Er kann berechnen, wie groß seine Chance ist, das Spiel zu gewinnen, zu verlieren oder ein Remis zu erreichen, wenn er eine bestimmte Punktzahl erzielt. Ein Vergleich zwischen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit zeigt, wie die Situation des Spielers insgesamt zu bewerten ist.*“ (Monka, 1999, S. 78). Wenn die Differenz zwischen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit positiv ist, so kann der Spieler erwarten, bei wiederholten Konstellationen dieser Art im Durchschnitt zu gewinnen. Durch die Tabelle 4.4 kann man sämtliche Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten für alle möglichen ersten Karten der Bank und alle möglichen erreichten Punktesummen des Spielers bestimmen und ebenfalls miteinander vergleichen (Vgl. [22], S. 78 – 81).

Betrachtung des Falles, wenn die Bank als erste Karte eine 8 gezogen hat: Die Bank wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 12,86% die Summe von 17 Punkten erreichen usw. und mit einer Wahrscheinlichkeit von 24,47% mehr als 21 Punkte (siehe Tabelle 4.4). Wenn der Spieler weniger als 17 Punkte hat, gewinnt er das Spiel nur, wenn sich die Bank überkauft. Verlieren wird er das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von $100\% - 24,47\% = 75,53\%$. Die Differenz zwischen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit ist mit $24,47\% - 75,53\% = -51,06\%$ negativ und beträchtlich. Also kann der Spieler erwarten, dass er das Spiel verliert, wenn die Bank als erste Karte eine 8 und er weniger als 17 Punkte hat.

Hat der Spieler jedoch 17 Punkte ist die Lage für ihn besser. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Bank ebenfalls 17 Punkte erreicht beträgt 12,86%. In diesem Fall ist die Differenz mit $24,47\% - (75,53\% - 12,86\%) = -35,20\%$ immer noch negativ, aber wesentlich geringer als zuvor.

Es ergibt sich die Tabelle 4.5, wenn wir nur die Vorzeichen der Differenz zwischen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit betrachten.

Aus der Tabelle 4.5 kann man entnehmen, dass wenn die Punktesumme eines

Punktesumme des Spielers 1. Karte der Bank	<17	17	18	19	20	21
Ass	–	–	–	–	+	+
2	–	–	+	+	+	+
3	–	–	+	+	+	+
4	–	–	+	+	+	+
5	–	–	+	+	+	+
6	–	+	+	+	+	+
7	–	–	+	+	+	+
8	–	–	+	+	+	+
9	–	–	–	+	+	+
10, B, D, K	–	–	–	–	+	+

Tabelle 4.5: Die Vorzeichen der Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit für den Spieler bei bestimmten erreichten Punktesummen. Quelle: [22], S. 80.

Spielers 17 unterschreitet, entsteht für ihn immer eine schwierige Ausgangslage. Nur mit einer Punktesumme von 20 oder 21 Punkten ist es ihm möglich ohne Einschränkungen zu gewinnen (Vgl. [22], S. 78 – 81).

Jedoch bringen die Vorzeichen in Tabelle 4.5 natürlich nicht die Unterschiedlichkeiten der absoluten Beträge der Differenzen zum Ausdruck, welche erst die Tabelle 4.6 vor Augen führt.

Hier erkennt man beispielsweise, dass nur drei Differenzen absolut klein sind. Dabei handelt es sich um die Fälle, in welchen der Spieler eine Punktesumme von 17 hat und die Bank als erste Karte eine 5 oder 6 erhalten hat, sowie um die Punktesumme 19 für den Spieler, wenn die Bank als erste Karte eine 10 erhält. Bei diesen Fällen halten sich Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten etwa die Waage. Die absoluten Differenzen sind in den anderen Fällen teilweise beachtlich groß. (Vgl. [22], S. 78 – 81)

4.2.5 Wann der Spieler eine weitere Karte ziehen sollte

Der Spieler sollte sich fragen, ob sich die obigen Gewinn- und Verlustchancen in positiver Richtung verändern, wenn er eine zusätzliche Karte zieht. Zum Beispiel ist klar, dass der Spieler seine Situation nur verbessern kann, wenn er 11 Punkte erreicht hat und noch eine weitere Karte zieht. Hat hingegen der Spieler beispielsweise 15 Punkte erreicht, führt eine weitere Karte, die

Punktesumme des Spielers 1. Karte der Bank	<17	17	18	19	20	21
Ass	-79,95	-63,87	-37,71	-11,55	14,61	33,07
2	-29,28	-15,30	12,17	38,63	64,00	88,20
3	-25,22	-11,72	14,83	40,44	65,03	88,53
4	-21,10	-8,05	17,59	42,32	66,11	88,88
5	-16,72	-4,49	19,97	43,97	67,05	89,18
6	-15,37	1,17	28,34	49,60	70,40	90,28
7	-47,54	-10,68	39,96	61,60	77,32	92,59
8	-51,06	-38,20	10,59	59,38	79,18	93,06
9	-54,32	-42,32	-18,32	28,76	75,84	93,92
10, B, D, K	-57,57	-46,43	-24,15	-1,87	43,49	81,17

Tabelle 4.6: Die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit für den Spieler bei bestimmten erreichten Punktesummen in %. Quelle: [22], S. 81.

den Wert 7 oder größer hat zu einem vorzeitigen Verlust des Spiels, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{7}{13}$ zutrifft. Eine zusätzliche Karte ist in diesem Fall nur günstig, wenn ihr Wert 6 oder kleiner ist (Vgl. [22], S. 81 – 91).

Wie gut die Chancen des Spielers sind das Spiel zu gewinnen hängt von der Ausgangslage der Bank, also deren erster Karte ab. Zum Beispiel hat die Bank als erste Karte eine 3 gezogen. Die Wahrscheinlichkeiten für die späteren Endsummen sind in der Tabelle 4.4 abzulesen.

Endsumme Vorsumme	16	17	18	19	20	21	>21
15	7,69	7,69	7,69	7,69	7,69	7,69	53,84

Tabelle 4.7: Bedingte Wahrscheinlichkeiten des Spielers für das Erreichen von Punktesummen in %, wenn bisher 15 Punkte erreicht wurden. Quelle: [22], S. 83.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler das Spiel gewinnt oder verliert, lässt sich wie folgt bestimmen (Vgl. [22], S. 81 – 91).

Der Spieler verliert, mit einer Wahrscheinlichkeit von

- 53,84%, wenn er sich überkauft.

- $0,0769 \cdot (0,135 + 0,1305 + 0,1256 + 0,1203 + 0,1147) = 0,0482 = 4,82\%$, wenn der Spieler die Endsumme 16 und die Bank 17 – 21 Punkte erreicht.
- $0,0769 \cdot (0,1305 + 0,1256 + 0,1203 + 0,1147) = 0,0378 = 3,78\%$, wenn der Spieler die Endsumme 17 und die Bank 18 – 21 Punkte erreicht.
- $0,0769 \cdot (0,1256 + 0,1203 + 0,1147) = 0,0277 = 2,77\%$, wenn der Spieler die Endsumme 18 und die Bank 19 – 21 Punkte erreicht.
- $0,0769 \cdot (0,1203 + 0,1147) = 0,0181 = 1,81\%$, wenn der Spieler die Endsumme 19 und die Bank 20 oder 21 Punkte erreicht.
- $0,0769 \cdot 0,1147 = 0,0088 = 0,88\%$, wenn der Spieler die Endsumme 20 und die Bank 21 Punkte erreicht.

Insgesamt ist die Verlustwahrscheinlichkeit, wenn der Spieler eine weitere Karte nimmt, in diesem Fall also: $0,5384 + 0,0482 + 0,0378 + 0,0277 + 0,0181 + 0,0088 = 0,679 = 67,9\%$.

Der Spieler gewinnt, mit einer Wahrscheinlichkeit von

- $0,0769 \cdot 0,3739 = 0,0288 = 2,88\%$, wenn der Spieler 16 Punkte erreicht und die Bank sich überkauft.
- $2,88\%$, wenn der Spieler 17 Punkte erreicht und die Bank sich überkauft
- und bei 18 und höheren Punktesummen.

Die Summe der Gewinnwahrscheinlichkeiten für den Spieler beträgt $27,4\%$. Das Spiel kann bei Gleichständen der Punkte zwischen 17 und 21 Punkten unentschieden enden. Hierfür liegt die Wahrscheinlichkeit bei $0,0769 \cdot 0,135 + 0,0769 \cdot 0,1305 + \dots + 0,0769 \cdot 0,1147 = 0,0482 = 4,82\%$.

Die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit beträgt $27,28\% - 67,90\% = -40,62\%$. Dieser Verlust ist höher, als jener, wenn keine weitere Karte gezogen wird. Aus der Tabelle 4.6 geht hervor, dass bei einer 3 als erste Karte der Bank und einer Punktesumme des Spieler, kleiner als 17, die Differenz $-25,22\%$ beträgt (Vgl. [22], S. 81 – 91).

Somit ist für das Weitere eine Zusammenstellung der Differenzen bedingter Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten für den Spieler, welche für den Fall gelten, dass er eine weitere Karte zieht von Interesse.

Vorsumme des Spielers 1. Karte der Bank	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	23,53	-25,34	-30,78	-36,22	-41,67	-47,11	-53,62	-62,25	-72,92	-85,53
3	25,89	-23,37	-29,12	-34,87	-40,63	-46,38	-53,17	-62,00	-72,81	-85,50
4	28,31	-21,35	-27,42	-33,49	-39,57	-45,63	-52,70	-61,75	-72,70	-85,48
5	30,74	-19,33	-25,73	-32,14	-38,55	-44,95	-52,30	-61,52	-72,61	-85,45
6	33,37	-17,06	-23,57	-30,08	-36,60	-43,11	-50,89	-60,76	-72,27	-85,38
7	23,15	-25,34	-29,37	-33,41	-37,45	-41,49	-48,35	-59,12	-71,55	-85,19
8	17,53	-30,79	-34,55	-38,31	-42,09	-45,85	-50,60	-59,11	-71,37	-85,15
9	11,39	-26,88	-40,39	-43,90	-47,42	-50,94	-55,37	-61,65	-71,57	-85,09
10, B, D, K	0,61	-44,46	-47,72	-50,99	-54,26	-57,52	-61,64	-67,47	-75,03	-86,06

Tabelle 4.8: Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit in % für den Spieler, wenn er eine weitere Karte zieht. Jedes As wird als 1 gezählt. Quelle: [22], S. 85.

In manchen Fällen ist es günstig, trotz einer negativen und absolut hohen Differenz zwischen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit eine Karte zu nehmen, weil es das kleinere Übel ist. Das wird durch einen Vergleich der Tabellen 4.8 und 4.6 deutlich (Vgl. [22], S. 81 – 91).

Nocheinmal zum obigen Beispiel: Die Bank erhält als erste Karte eine 3 und der Spieler hat die Punktesumme 15. Laut Tabelle 4.6 beträgt die Differenz -25,22%, wenn der Spieler keine zusätzliche Karte nimmt und laut Tabelle 4.8 ist die Differenz -40,63%, wenn er eine weitere Karte nimmt. „Die Differenz -40,63 Prozent – (-25,22 Prozent) = -15,41 Prozent bringt zum Ausdruck, daß der Spieler auf Dauer einen zusätzlichen Verlust von 15,41 Prozent seines Einsatzes vermeiden kann, indem er sich gegen eine zusätzliche Karte entscheidet.“ (Monka, 1999, S. 86).

Ein weiteres Beispiel: Die Bank erhält als erste Karte eine Dame und der Spieler hat 15 Punkte. Aus Tabelle 4.6 kann man ablesen, dass die Differenz -57,57% beträgt, wenn der Spieler keine weitere Karte mehr nimmt und laut Tabelle 4.8 beträgt die Differenz -54,26%, wenn der Spieler eine weitere Karte mehr verlangt. Die Differenz $-54,26\% - (-57,57\%) = 3,31\%$ besagt, dass der Spieler auf Dauer einen Gewinn von 3,31% seines Einsatzes durchsetzen kann, wenn er eine weitere Karte zieht. Also, wenn der Spieler eine zusätzliche Karte fordert, verbessert er seine schlechte Lage etwas (Vgl. [22], S. 81 – 91).

Die Vorzeichen der Differenzen aus den Werten aus Tabellen 4.6 und 4.8 sind für den Spieler von großer Bedeutung. Wenn das Vorzeichen einer Differenz positiv ist, dass lässt sich die Lage durch das Ziehen eine weiteren Karte verbessern und ein negatives Vorzeichen bedeutet für den Spieler, dass er keine

Karte mehr nehmen sollte.

Vorsumme des Spielers 1. Karte der Bank	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ass	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
2	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
3	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
4	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
8	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
9	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
10, B, D, K	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-

Tabelle 4.9: Verbesserung (+) oder Verschlechterung (-) für den Spieler, falls er eine zusätzliche Karte zieht. Jedes Ass wird als 1 gezählt. Quelle: [22], S. 87.

Für einen Spieler ist die Tabelle 4.9 grundlegend, wenn er optimal spielen möchte. Wenn der Spieler 11 Punkte hat, sollte er auf jeden Fall eine weitere Karte nehmen. Falls der Spieler bei 12 Punkten steht, sollte er eine zusätzliche Karte nehmen, außer die Bank hat die für sie ungünstige Karte 4, 5 oder 6. Bei 13 – 16 Punkten sollte der Spieler nur eine Karte nehmen, wenn die Bank keine 2 – 6 als erste Karte hat. In Tabelle 4.10 wird sich später zeigen, dass ein Verstoß gegen diese Regel verschiedenen schwerwiegende Folgen hat.

Weiters wird durch die Tabelle 4.9 deutlich, dass bei 17 oder mehr Punkten nie eine zusätzliche Karte gezogen werden sollte. Wobei bis jetzt das Ass immer als 1 und nicht als 11 gezählt wurde. Auch kann man ablesen, dass das Ass, die 7, 8, 9 und Karten mit dem Wert 10 für die Bank besonders von Vorteil sind, denn der Spieler sollte sein Glück durch ziehen einer weiteren Karte versuchen, wenn falls er sich mit 16 oder weniger Punkten in einer eher aussichtslosen Lage befindet. Nur wenn die Bank eine relativ schlechte erste Karte hat braucht der Spieler bei einer Punktesumme von 12 – 16 kein Überkaufen riskieren (Vgl. [22], S. 81 – 91).

Die Übersichtlichkeit von Tabelle 4.9 geht verloren, wenn auch die Werte der Differenzen aus den Tabellen 4.6 und 4.8 dargestellt werden. Wie in der Tabelle 4.10:

Vorsumme des Spielers 1. Karte der Bank	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ass	49,97	17,47	15,70	13,93	12,14	10,37	-5,49	-36,44	-69,41	-104,4
2	52,81	3,94	-1,50	-6,94	-12,39	-17,83	-38,32	-74,42	-111,6	-149,5
3	51,11	1,85	-3,90	-9,65	-15,41	-21,16	-41,45	-76,83	-113,3	-150,5
4	49,41	-0,25	-6,32	-12,39	-18,47	-24,53	-44,65	-79,34	-115,0	-151,6
5	47,46	-2,61	-9,01	-15,42	-21,83	-28,23	-47,81	-81,49	-116,6	-152,5
6	48,74	-1,69	-8,20	-14,71	-21,23	-27,74	-52,06	-89,10	-121,9	-155,8
7	70,69	22,20	18,17	14,13	10,09	6,05	-37,67	-99,08	-133,2	-162,5
8	68,59	20,27	16,51	12,75	8,97	5,21	-12,40	-69,70	-130,8	-164,3
9	65,71	17,44	13,93	10,42	6,90	3,38	-13,05	-43,33	-100,3	-160,9
10, B, D, K	58,18	13,11	9,85	6,58	3,31	0,05	-15,21	-43,32	-73,16	-129,6

Tabelle 4.10: Verbesserung oder Verschlechterung für den Spieler, falls er eine zusätzliche Karte zieht. Jedes Ass wird als 1 gezählt. Quelle: [22], S. 89.

Soll man das Ass als 1 oder 11 zählen?

Hat ein Spieler beispielsweise ein Ass und eine 5 ergibt sich die Summe 6 oder 16 Punkte. Er wird selbstverständlich eine zusätzliche Karte fordern. Wenn er dann zum Beispiel eine 2 zieht, hat er die Punktesumme 8 oder 18. Der Spieler muss sich vergewissern, ob es für ihn günstiger ist bei 18 Punkten zu bleiben oder eine weitere Karte zu nehmen. Wenn er eine zusätzliche Karte nimmt und den Wert für ein Ass auf 1 oder 11 setzt, dann erreicht er mit einer Wahrscheinlichkeit von $5 \cdot \frac{1}{13}$ unter 17 Punkte, mit jeweils $\frac{1}{13}$ die Punktesumme 17 – 21 und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{13}$ verändert sich seine Lage von 18 Punkten nicht.

Falls in diesem Fall die Bank als erste Karte eine 9 hat, ergibt sich folgendes: Wenn der Spieler eine zusätzliche Karte nimmt, beträgt die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit für ihn -14,51%. Wenn er keine weitere Karte mehr nimmt und bei den 18 Punkten bleibt, ergibt sich für ihn die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit -18,32% (Tabelle 4.6). Es folgt daraus, dass der Spieler sein Ass vorerst als 11 zählen und eine weitere Karte fordern sollte (Vgl. [22], S. 81 – 91).

Der Spieler sollte ein Ass zunächst als 11 zählen. Wenn er dabei 19 – 21 Punkte erreicht, dann sollte er keine weitere Karte mehr nehmen. Wenn er mit dem Ass (11 Punkte gezählt) 18 Punkte erreicht hat, sollte er auch auf eine weitere Karte verzichten, außer die Bank hat als erste Karte eine 9 oder eine Karte mit dem Wert 10. Bei 17 oder weniger Punkten sollte der Spieler jedenfalls eine Karte fordern. Sollte er das Ass später als 1 zählen, sollte er sich nach den Tabellen 4.9 und 4.10 richten (Vgl. [22], S. 81 – 91).

4.2.6 Wann sollte man den Einsatz verdoppeln?

Falls sie ersten beiden Karten des Spielers den Wert 9, 10 oder 11 ergeben, kann er seinen Einsatz verdoppeln, dann erhält er jedoch nur noch eine weitere Karte. Der Spieler weiß, dass seine Gewinn- und Verlustchancen von der Punktesumme und der ersten Karte der Bank abhängen. Er wird wissen wollen, wie groß die Differenz zwischen seiner Gewinn- und Verlustchance ist, wenn er nur eine weitere Karte bekommt (Vgl. [22], S. 92 – 96).

Angenommen die Differenz hat den Betrag A und ist positiv. Also kann der Spieler erwarten auf Dauer mehr Spiele zu gewinnen als zu verlieren. Er wird aber auch wissen wollen, wie groß die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustchance ist, wenn er nicht verdoppelt und so eventuell mehrere zusätzliche Karten ziehen kann. Diese Differenz sei auch positiv und, möge den Betrag B haben.

„ B ist – bei positiven Werten – stets so groß wie A oder größer, weil der Spieler im normalen Spiel ja nur dann eine oder mehrere zusätzliche Karten nimmt, wenn es für ihn von Vorteil ist.“ (Monka, 1999, S. 92). Wenn nun B größer als A ist, bedeutet dies, dass er auf Dauer öfters gewinnt, wenn er sich für ein normales Spiel entscheidet. Wenn $2 \cdot A > B$ ist, sollte der Spieler seinen Einsatz verdoppeln.

Zum Beispiel: Der Spieler hat mit zwei Karten elf Punkte und die Bank eine 7. Wenn der Spieler seinen Einsatz verdoppelt und nur noch eine weitere Karte nimmt, beträgt laut Tabelle 4.8 die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit 23,15%. Falls der Spieler seinen Einsatz nicht verdoppelt und nach den Tabellen 4.9 und 4.10 spielt, dann beträgt die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit 29,23%. Diesen Wert erhält man, wenn man alle möglichen zusätzlichen Ziehungen des Spielers bei den Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Spielgänge berücksichtigt.

Verdoppelt der Spieler nicht, kann er erwarten auf Dauer im Durchschnitt pro Spiel 29,23% seines Einsatzes zu gewinnen. Entscheidet er sich für die Verdopplung, kann er erwarten pro Spiel 23,15% von dem verdoppelten Einsatz zu gewinnen. Und dies ist mehr Geld, so dass der Spieler verdoppeln wird. Diese Überlegung gilt für die Fälle unterschiedlicher Vorzeichen von A und B , sowie negativer Vorzeichen für A und B analog (Vgl. [22], S. 92 – 96).

Die Differenzen zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten zeigen verschieden deutlich, dass ein Verdoppeln des Einsatzes in einigen Fällen nachdrücklicher empfohlen werden kann als in anderen Fällen.

Tabelle 4.11 zeigt die alternativen Differenzen zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten, dabei betrifft die obere Zahl, den Fall, dass der Spieler verdoppelt und die untere Zahl das normale Spiel. (Vgl. [22], S. 92 – 96)

Vorsumme des Spielers 1. Karte der Bank	9	10	11
Ass	-45,76 -35,32	-31,26 -25,13	-26,98 -20,87
2	3,55 7,44	<i>17,95</i> <i>18,25</i>	<i>23,53</i> <i>23,83</i>
3	<i>6,04</i> <i>10,13</i>	<i>20,47</i> <i>20,61</i>	<i>25,89</i> <i>26,03</i>
4	<i>9,10</i> <i>12,90</i>	<i>23,05</i> <i>23,05</i>	<i>28,31</i> <i>28,31</i>
5	<i>12,16</i> <i>15,81</i>	<i>25,63</i> <i>25,63</i>	<i>30,74</i> <i>30,74</i>
6	<i>15,85</i> <i>19,60</i>	<i>28,78</i> <i>28,78</i>	<i>33,37</i> <i>33,37</i>
7	5,21 17,19	<i>19,62</i> <i>25,69</i>	<i>23,15</i> <i>29,21</i>
8	-1,33 9,83	<i>14,33</i> <i>19,79</i>	<i>17,53</i> <i>23,00</i>
9	-15,05 -5,22	<i>7,22</i> <i>11,65</i>	<i>11,39</i> <i>15,83</i>
10, B, D, K	-29,23 -21,81	-8,09 -5,26	0,61 3,34

Tabelle 4.11: Differenz zwischen bedingter Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit in %. Kursiv geschriebene Zahlen: Verdopplung des Einsatzes sinnvoll. Quelle: [22], S. 96.

4.2.7 Wann sollte man splitten?

Der Spieler weiß, dass seine Gewinn- und Verlustchancen von der Punkte-summe, die er mit zwei Karten erreicht hat und der ersten Karte der Bank abhängen. Zunächst wird er wissen wollen, wie groß die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustchancen B ist, wenn er nicht splittet und sich für ein normales Spiel entscheidet. Dabei richtet er sich nach den Empfehlungen aus

der Tabelle 4.5 und aus dem letzten Absatz aus dem Abschnitt „Wann der Spieler eine weitere Karte ziehen sollte“.

Natürlich will der Spieler auch erfahren, wie groß die Differenz zwischen seinen Gewinn- und Verlustchancen ist, falls er splittet und zwei separate Spiele spielt. Dabei wird er sich bei jedem neuen Einzelspiel an die Empfehlungen aus der Tabelle 4.5 und aus dem letzten Absatz aus dem Abschnitt „Wann der Spieler eine weitere Karte ziehen sollte“ orientieren. Diese Differenz wird mit A bezeichnet (Vgl. [22], S. 96 – 103).

Beim Splitten wird analog zu den bereits beim Verdopplungsproblem entwickelten Gedanken empfohlen zu splitten, wenn

- $A, B > 0$ und $2 \cdot A > B$,
- $A > 0$ und $B < 0$ oder
- $A, B < 0$ und $|2 \cdot A| < |B|$.

Zum Beispiel: Die Bank hat als erste Karte eine 8 und der Spieler ein 9er-Paar. Dann beträgt $A = 9,83\%$, wenn er nicht splittet, spielt er mit 18 Punkten und wird keine zusätzliche Karte nehmen. Und $B = 10,59\%$ (Tabelle 4.6). Also falls der Spieler splittet und seinen Einsatz noch einmal setzt, kann er erwarten, dass er im Durchschnitt $2 \cdot 9,83\% = 19,66\%$ vom Einsatz zu gewinnen und nicht nur $10,59\%$.

Oder angenommen, die Bank habe als erste Karte eine 9 und der Spieler ein 8er-Paar. Wenn der Spieler splittet ergibt sich $A = -21,02\%$ und $B = -50,94\%$. Der Spieler kann die Verlusterwartung auf keinen Fall beseitigen, egal ob der Spieler den Einsatz noch einmal riskiert und mit geteilter Hand spielt oder nicht. Ihm bleibt allerdings die Möglichkeit, dass er nur $2 \cdot 21,02\% = 41,04\%$ seines Einsatzes verliert und nicht $50,94\%$, dafür muss er splitten. In diesem Fall ist der Split eine Art Abwehrmaßnahme (Vgl. [22], S. 96 – 103).

Betrachtet man Tabelle 4.12 fällt folgendes auf:

Kein Paar wird gegen das Ass der Bank gesplittet. Falls die Bank als erste Karte eine 10 hat, sollte nur ein Assenpaar gesplittet werden. Jedoch hat die Bank eine schlechte Karte (eine 4, 5 oder 6), sind alle Splits sinnvoll, jedoch wird dabei kein 4er-, 5er- oder 10er-Paar gesplittet. Es zeigt sich auch, dass 4er-, 5er- oder 10er-Paare nie gesplittet werden, da die Punktesummen 8, 10 und 20 sehr aussichtsreich sind und ein Assenpaar wird immer gesplittet, außer die Bank hat ebenfalls ein Ass. Ein 8er-Paar wird natürlich gesplittet, denn 16 Punkte mit zwei Karten sind eine ungünstige Ausgangslage (Vgl.

Paare des Spielers 1. Karte der Bank	Ass	2	3	4	5	6	7	8	9	10, Bild
Ass										
2	S						S	S	S	
3	S					S	S	S	S	
4	S	S	S			S	S	S	S	
5	S	S	S			S	S	S	S	
6	S	S	S			S	S	S	S	
7	S	S	S				S	S		
8	S							S	S	
9	S							S	S	
10, B, D, K	S									

Tabelle 4.12: Splitten (S), ohne mehrfachen Split. Quelle: [22], S. 99.

[22], S. 96 – 103).

Offensivstrategien werden die Splits mit guten Gewinnchancen genannt. Dies sind Splits mit Assen und 9ern (ausgenommen gegen eine 9 der Bank), sowie jene gegen die schwächsten Karten der Bank (4, 5 und 6). Bei allen anderen Splits handelt es sich um Defensivstrategien.

Die Empfehlungen in der Tabelle 4.12 müssen modifiziert werden, falls die Regeln von Black Jack mehrfache Splits erlauben. Ein mehrfacher Split heißt, dass ein geteiltes Paar erneut geteilt werden kann, wenn der Spieler eine entsprechende zusätzliche Karte erhält. Im folgenden wird nur davon ausgegangen, dass der Spieler mit drei separaten Spielen gegen die Bank spielen kann, der Einsatz ist dabei dreimal zu stellen (Vgl. [22], S. 96 – 103).

Wenn A und B positiv sind und sich der einfache Split lohnt (Offensivstrategie), muss auch ein doppelter Split für den Spieler von Vorteil sein.

Beispielsweise hat die Bank als erste Karte eine 8 und der Spieler zwei Assen. Im normalen Spiel ist $B = 9,51\%$. Werden die Assen einmal gesplittet, ist $A = 17,53\%$. Also wird der Spieler splitten und kann erwarten, in den beiden separaten Spielen, auf Dauer durchschnittlich $17,53\%$ seines Einsatzes zu gewinnen. Also würde der Spieler nochmals splitten, wenn er die Möglichkeit hat. Hierzu braucht er in einem der beiden Spiele als zusätzliche Karte ein Ass. A ist in diesem Beispiel noch größer als B, also ist ein zweifacher Split

angezeigt.

Es mag den Fall geben, das bei positiven Werten A und B , dass zwar nicht $2 \cdot A$, aber $3 \cdot A$ größer als B ist. „Hieraus darf nicht gefolgert werden, daß der einfache Split generell zu empfehlen ist, nur weil er den zweifachen Split in drei Spiele als Möglichkeit beinhaltet. Es ist nicht sicher, ob ein dreifacher Split durchgeführt werden kann, sondern die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt in jedem separaten Spiel $\frac{1}{13}$.“ (Monka, 1999, S. 102). Natürlich lohnt sich jeder Split (auch der zweifache), wenn A positiv und B negativ ist (Vgl. [22], S. 96 – 103).

Defensive Splits sind in der Tabelle 4.12 empfohlen, falls $A, B < 0$ und $|2 \cdot A| < |B|$. Falls in dieser Situation ein zweifacher Split möglich ist, sollte man dieses besser nicht durchführen, denn jeder weitere Split vergrößert den $|A|$ oder die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, in die für den Spieler unerwünschte Richtung.

Ein doppelter Split erhöht somit nicht nach jedem einfachen Split die Gewinnchancen. In Tabelle 4.13 werden die Empfehlungen für ein Spiel, in dem mehrfache Splits erlaubt sind zusammen (Vgl. [22], S. 96 – 103).

Paare des Spielers 1. Karte der Bank	Ass	2	3	4	5	6	7	8	9	10,Bild
Ass										
2	SS						S	SS	SS	
3	SS					S	S	SS	SS	
4	SS	S	S			S	S	SS	SS	
5	SS	SS	SS			S	S	SS	SS	
6	SS	SS	SS			S	S	SS	SS	
7	SS	S	S				S	SS		
8	SS							S	SS	
9	SS							S	S	
10, B, D, K	SS									

Tabelle 4.13: Einfacher Split (S) und doppelter Split (SS). Quelle: [22], S. 103.

4.2.8 Wann sollte man den Einsatz versichern?

Der Gedanke einer Versicherung mag verlockend klingen, bei einem drohenden Black Jack durch die Bank, um seinen Spieleinsatz zu retten. Er wettet also darauf, dass die Bank ein Black Jack erhalten wird, gegen das er nicht gewinnen kann. Jedoch wenn er darauf setzt besteht die Möglichkeit am Ende doch keinen Verlust zu erleiden, denn dagegen hat er sich versichert, indem er also auf das eigene Verlieren gesetzt hat. Soweit zu der Logik einer Versicherung (Vgl. [22], S. 109 – 111).

Wie oben angeführt, wird die Versicherung im Verhältnis 2:1 ausbezahlt. Jedoch wenn die Bank kein Black Jack bekommt verliert der Spieler seinen Versicherungseinsatz.

Die Bank erhält mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{13}$ ein Black Jack und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{9}{13}$ keinen.

Bank erhält Black Jack Spieler versichert	ja Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{13}$	nein Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{13}$
ja Einsatz: 1, Gebühr: 1	0	$-\frac{1}{2}$
nein Einsatz: 1, Gebühr: 0	-1	0

Tabelle 4.14: Gewinn- und Verlustanteil (-) am gesamten Einsatz, nachdem die Bank eine 2. Karte erhalten hat. Quelle: [22], S. 110.

Der Spieler kann das Angebot einer Versicherung annehmen oder ablehnen und die Bank kann später ein Black Jack erhalten oder nicht. Geht der Spieler auf das Angebot ein und die Bank erzielt ein Black Jack, dann erhält er den doppelten Versicherungseinsatz. In diesem Fall erhält er also keine Auszahlung, sondern nur das Geld das er eingesetzt hat.

Nimmt der Spieler eine Versicherung in Anspruch und die Bank erhält kein Black Jack, wird die Versicherungsgebühr eingezogen. Also verliert er die Hälfte seines Gesamteinsatzes.

Der Spieler, der das Versicherungsangebot annimmt, kann erwarten, dass er durchschnittlich $\frac{4}{13} \cdot 0 - \frac{9}{13} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{26}$ seines Einsatzes erhält. Das heißt er wird im Durchschnitt 34,6% seines Einsatzes verlieren (Vgl. [22], S. 109 – 111).

Ein Spieler, der die Versicherung nicht annimmt, verliert seinen Einsatz komplett, falls die Bank ein Black Jack erzielt. Erzielt die Bank keinen Black Jack, verliert der Spieler nichts.

Der Spieler, der das Versicherungsangebot nicht annimmt kann also erwarten, dass er im Durchschnitt aller Fälle $-\frac{4}{13} \cdot 1 + \frac{9}{13} \cdot 0 = -\frac{4}{13}$. Also büßt er im Durchschnitt 30,77%.

Schon auf der ersten Blick ist klar, dass die Versicherung nicht unbedingt günstiger ist. Denn der Verlust beträgt hierbei 34,6% und ohne Versicherung 30,77%. Aber die 34,6% beziehen sich noch dazu auf einen höheren Betrag als die 30,77%. Beispielsweise beträgt der Einsatz 100€ und die Versicherung ebenfalls 100€, also ist der Gesamteinsatz 200€, davon wird er durchschnittlich $-\frac{9}{26} \cdot 200 = -69,23$ € verlieren. Ohne der Versicherung beträgt sein Gesamteinsatz nur 100€, von welchen er im Durchschnitt nur $-\frac{4}{13} \cdot 100 = -30,77$ € verlieren wird.

Somit erweist sich das Versicherungsangebot als eine Verlockung, der der Spieler nicht nachgeben sollte. Mancher Casinobesucher versichert sich vermutlich, weil ihm nicht bewusst ist, dass er in zwei getrennte Wetten hineingezogen wird. Die eine Wette betrifft einen möglichen Black Jack der Bank. In der zweiten Wette geht es um ein normales Spiel, das möglicherweise nicht stattfinden kann. Klar ist, dass das Resultat der ersten Wette nicht von den Karten des Spielers für das normale Spiel abhängt. Kein Grund um sich gegen ein Black Jack der Bank zu versichern, sind schlechte Karten des Spielers für das zweite Spiel. (Vgl. [22], S. 109 - 111)

4.3 Kartenzählen

1956 analysierten die Amerikaner R. Baldwin, W. Cantey, H. Maisel und J. Mc Dermott als Erste Black Jack ausgiebig. Sie untersuchten die damals in den USA übliche Version, die in einigen Details von den hier untersuchten abweicht. Sie berechneten einen durchschnittlichen Verlust von 0,6%, dabei fiel die optimale Spielstrategie defensiver aus, als es bis dahin von den Spielexperten empfohlen wurde (in ihrer Veröffentlichung referieren sie unter anderem die Empfehlungen von Culbertson und anderen, bis 13 bzw. 15 zu ziehen, je nachdem ob die Karte der Bank eine 2 – 6 ist oder nicht).

Baldwin und seine Kollegen gingen auch von konstanten Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Kartenwerte ($\frac{1}{13}$ bzw. $\frac{4}{13}$) aus. Die Information, welche Karten des Kartenstapels aus dem Spiel sind, bleibt unberücksichtigt (Vgl. [10], S. 88 – 91).

Die Idee, ob es durch Mitzählen der ausgespielten Karten möglich ist die Gewinnchancen zu erhöhen, bewegte dem Mathematikprofessor Edward Thorp,

nachdem er Baldwins Veröffentlichung gelesen hat. *„Tatsächlich entdeckte Throp bestimmte Spielsituationen, zum Beispiel wenn alle Fünfen aus dem Spiel sind, die für den Spieler bei einer geeigneten Strategie äußerst vorteilhaft sind – der Spieler kann nach Throp dann ungefähr 3,3% Gewinn erwarten.“* (Bewersdorff, 2010, S. 89). Damals wurde nur mit einem einzigen 52er-Blatt gespielt, deswegen trat diese Situation je nach Anzahl der Mitspieler in ca. 3,5% – 10% der Fälle ein. Wenn in diesen Fällen der Einsatz erhöht wird, reicht das knapp aus, den anderweitigen Vorteil der Bank zu übertreffen. Somit wird die Bank (in der Theorie) geschlagen.

Kaum präsentierte er seine Ergebnisse der mathematische Fachwelt entfachte ein gewaltiger Medienrummel, dessen Echo bis nach Europa reichte. Der mathematische Beweis musste auch im praktischen Test, im Casino, bestätigt werden. Für Throp dürfte sein mehr als 500 000 mal verkauftes Buch nicht weniger lukrativ gewesen sein, welches er für Nacheiferer veröffentlichte. In dem Buch werden Strategien beschrieben, mit welchen man sich mit Übung einen Vorteil gegenüber der Bank verschaffen kann. *„Grundidee, eine in der Praxis tatsächlich auch anwendbare Strategie zu erhalten, ist es, sich mittels eines so genannten Zählsystems einen ungefähren, aber ausreichenden Überblick über die Zusammensetzung des Reststapels zu verschaffen.“* (Bewersdorff, 2010, S. 89). Jedem Kartenwert wird dazu ein „Gewicht“ zugeordnet. Bei Throps High-Low-System ist das

- für die Karten 2 – 6: 1
- für die 10, die Bilder und das Ass: -1
- für den Rest: 0

Wenn die Karten neu gemischt sind, wird begonnen die Gewichte aller ausgespielten Karten zu addieren. Vom erreichten Gesamtgewicht – meist Count genannt – und dem Umfang des Reststapels abhängig kann die Strategie vorteilhaft variiert werden (Vgl. [10], S. 88 – 91).

Black Jack war damit das einzige Glückspiel das geknackt wurde. Heute wird nach wie vor in den Casinos Black Jack gespielt. Es hat vor allem zwei Gründe, dass die Casinobetreiber sich keine Sorgen machen müssen: Black Jack wird heute generell mit mehreren (meist 6) Kartendecks gespielt und von diesen werden etwa 80 Karten gespielt werden, so können starke Ungleichgewichte zwischen verschiedenen Kartenwerten weitgehend vermieden. Weiters erfordert die Zählstrategien ein Höchstmaß an Übung und Konzentration, denn jede im Spielverlauf getroffene falsche Entscheidung geht im Mittel zu

Lasten des Spielers. Nur der Spieler, der ständig richtig zählt und seine Strategie anpasst, kann seinen geringen Vorteil gegenüber der Bank halten, daher dürften erfolgreiche Card-Counter in der Masse der Durchschnittsspieler, die nicht optimal spielen, untergehen.

Hier wird am Beispiel des High-Low-Systems demonstriert, wie sich Zählsysteme mathematisch herleiten lassen. Es wird von einer Black-Jack-Berechnung ausgegangen, die der bisher dargestellten verallgemeinert werden muss. Die bisher angenommene Gleichverteilung der Kartenwerte muss durch eine beliebige andere Wahrscheinlichkeitsverteilung ersetzt werden. Es bleibt aber unberücksichtigt, dass sich die Wahrscheinlichkeiten während des Spiels noch verändern. Eine Sensitivitätsanalyse ist naheliegend, es wird geprüft, wie stark sich die Ergebnisse ändern, wenn man die Kartenwahrscheinlichkeiten als Eingangsdaten leicht vergrößert oder verkleinert. Übersichtlich und schnell geht das, wenn man die Black-Jack-Berechnung mit einer Tabellenkalkulation realisiert. Man erhält die folgenden Korrekturen bei den Gewinnerwartungen (bei nur einmal teilen erlaubt), wenn man entsprechen der Wahrscheinlichkeitsänderung von $\frac{4}{52}$ auf $\frac{3}{51}$ bzw. $\frac{15}{51}$, wie sie sich bei der ersten Karte eines vollständigen 52er-Kartendecks ergibt:

Bank	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Ass
+/- Erwartung	0,36	0,44	0,57	0,73	0,43	0,27	-0,02	-0,18	-0,44	-0,59

Tabelle 4.15: Änderung der Gewinnerwartung, wenn eine Karte aus den 52er-Blatt entfernt wird in %. Quelle: [10], S. 90.

Die angegebenen Änderungen liegen in derselben Größenordnung wie die Verlusterwartung bei der optimalen Fixstrategie. Das heißt, bei dem heute unüblichen Spiel mit einem 52er-Blatt kann der Spieler schnell, allein bei dem Verbrauch von zwei Karten, in eine für ihn vorteilhafte Situation kommen und im weiteren Spielverlauf ändert sich die Gewinnerwartung ebenfalls relativ dynamisch nach oben und unten. Wenn aber mit 6 Kartenspielen gespielt wird, wirken sich die einzelnen Karten geringer aus, zu Spielanfang nur mit einem Sechstel der Werte aus Tabelle 4.15 (Vgl. [10], S. 88 – 91).

Aus der Tabelle 4.15 kann man ablesen, dass der Verbrauch der Kartenwerte 2 – 6 positiv für den Spieler ist, im Gegensatz zu den anderen Karten, insbesondere bei 10 und Ass. Genau das wird bei der Zählweise des High-Low-Systems berücksichtigt, deshalb ist er gut geeignet um die sich ändern-

den Gewinnchancen ungefähr zu charakterisieren. Wird beispielsweise eine einzige Karte mit Count 1 aus dem 52er-Blatt entfernt, dann gibt es für den Kartenwert fünf gleichwahrscheinliche Fälle (die Karten 2 – 6). Werden die Ergebnisse dieser Fälle gemittelt, ergibt sich eine um 0,51% verbesserte Gewinnerwartung.

Man geht analog vor, wenn man seine Strategie anhand des aktuellen Counts optimieren will. „Im Einzelnen wird zunächst die mutmaßliche Zusammensetzung des Reststapels ermittelt, das heißt, bedingt zum aktuellen Count C und der Anzahl n der verbliebenen Karten werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kartenwerte im Reststapel bestimmt.“ (Bewersdorff, 2010, S. 90f). Die bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Karten 7, 8 und 9 ist jeweils $\frac{1}{13}$, da sie den High-Low-Count nicht beeinflussen. Die Wahrscheinlichkeiten p_L und p_H für niedrige (2 – 6) bzw. hohe (10, Bild oder Ass) Karten verändern sich abhängig vom Count. Da der Count eines vollen Kartenblattes immer 0 ist, gilt im Einzelnen die Gleichung:

$$p_L - p_H = -\frac{C}{n}$$

Zusammen mit der Identität

$$p_L + p_H = \frac{10}{13}$$

lassen sich die Wahrscheinlichkeiten p_L und p_H sofort bestimmen. Weiter kann aufgrund der Counts nicht differenziert werden. Die zum relativen Count C/n sind bedingten Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Kartenwerte sind gleich:

$$\begin{aligned} p(2) = \dots = p(6) &= \frac{1}{13} - \frac{C}{10n}, \\ p(10) = \dots = p(Ass) &= \frac{1}{13} + \frac{C}{10n}, \\ p(7) = p(8) = p(9) &= \frac{1}{13}. \end{aligned}$$

Die Strategie kann mit diesen bedingten und während des laufenden Spiels als konstant angenommenen Wahrscheinlichkeiten nun abhängig vom Quotienten $\frac{C}{n}$ optimiert werden. Von verschiedenen Faktoren hängt ab, welche Gewinnerwartung sich aus einer solchermaßen optimierten Strategie ergibt (Vgl. [10], S. 88 – 91):

- Verhältnis zwischen Mindest- und Höchsteinsatz,

- Anzahl der verwendeten Kartenblätter,
- Anteil der beim Mischen mit der Trennkarte getrennten Karten und
- Anzahl von Spielern, denn bei höherer Teilnehmerzahl steigt bei den abgetrennten Karten der Anteil, der noch ausgeteilt wird.

4.4 Didaktische Aufbereitung

Alle vorangegangenen Berechnungen und Ausführung (ausgenommen der Markoff-Ketten) sind prinzipiell auch für den Schulunterricht geeignet, jedoch vielleicht teilweise etwas zu ausführlich. Im folgenden wird ein etwas anderer Zugang zu diesem Thema gegeben, welcher zum Teil anschaulicher ist und auf verschiedene Bereiche der Mathematik Bezug nimmt.

4.4.1 Einführung in das Thema

Zu Beginn des Themas werden den Schülern die Spielregeln des Black Jacks erklärt, wie sie zu Beginn des Kapitels angeführt sind. Weiters kann auch ein historischer Einblick gegeben werden, wie er beim „Kartenzählen“ vorgenommen wird (Vgl. [26], S. 125 – 132).

4.4.2 Das Spiel und seine Problematik

Welche Kriterien können bei einer Erstellung einer guten Spielstrategie wichtig sein?

1. Das häufigere Vorkommen von 10ern gegenüber anderen Kartenwerten (Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{13}$ gegenüber $\frac{1}{13}$).
2. Die Karte (mit Wert K) des Croupiers.
3. Die Überkaufwahrscheinlichkeit $Pü(K)$ des Croupiers abhängig von K .
 - (a) Bei großer $Pü(K)$: Wäre es von Vorteil, bei einer kleineren Punktesumme stehen zu bleiben.
 - (b) Bei kleiner $Pü(K)$: Sollte man riskieren und weiter kaufen.
4. Die wahrscheinlichste Punktesumme des Dealers abhängig von K .
5. Die Möglichkeit, dass der Spieler ein Ass als 1 oder 11 zählen kann (man kann also ohne größeres Risiko weiterkaufen).

Wie hängen die Überkaufwahrscheinlichkeiten des Dealers von seiner ersten Karte ab?

Diese Frage ist für die Erstellung einer günstigen Strategie wichtig. Mit heuristischen Überlegungen kann man der Tabelle 4.16 bereits sehr nahe kommen.

K	Pü(K)
6	0,4232
5	0,4164
4	0,3945
3	0,3739
2	0,3536
7	0,2623
8	0,2447
9	0,2284
10,Bild	0,2121
Ass	0,1153

Tabelle 4.16: Überkaufwahrscheinlichkeit $Pü(K)$ der Bank bei erster Karte mit dem Wert K . Quelle: [26], S. 127.

Um die Überkaufwahrscheinlichkeit $Pü(K)$ zu berechnen wird zunächst die Frage gestellt: Wie groß die Wahrscheinlichkeit $P(J)$ weitere Karten mit einer Punktesumme $J = 1, 2, \dots, 10$ zu kaufen? Die Berechnung erfolgt rekursiv, beispielsweise

$$P(5) = W(5) + P(1) \cdot W(4) + P(2) \cdot W(3) + P(3) \cdot W(2) + P(4) \cdot W(1) = \frac{1}{13} + P(1) \cdot \frac{1}{13} + P(2) \cdot \frac{1}{13} + P(3) \cdot \frac{1}{13} + P(4) \cdot \frac{1}{13}$$

mit $P(1) = W(\text{Ass}) = \frac{1}{13}$ und allgemein

$$P(J) = \sum_{I=0}^{J-1} P(I) \cdot W(J-I) \quad (\text{dabei sei } P(0) := 1)$$

Für den Unterricht ist die Erstellung eines Programms zur Berechnung der $Pü(K)$ – wegen der Fallunterscheidung $\text{Ass} = 1$ oder 11 – zu zeitaufwendig. Die Tabelle 4.16 wird den Schülern zur Verfügung gestellt (Vgl. [26], S. 125 – 132).

Dealer (K) Spieler (J)	2	3	4	5	6	7	8	9	10,Bild	Ass
12	W	W	A	A	A	W	W	W	W	W
13	A	A	A	A	A	W	W	W	W	W
14	A	A	A	A	A	W	W	W	W	W
15	A	A	A	A	A	W	W	W	W	W
16	A	A	A	A	A	W	W	W	W	W
17	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
18	N	N	N	N	N	N	N	A	A	N

Tabelle 4.17: Weiterkaufen (W), Weiterkaufen bei Ass zählt 11 (A) oder nicht weiterkaufen (N). Quelle: [26], S. 127.

Erstellen einer Entscheidungsmatrix

Nun können die Schüler, unter Beachtung der bisher gewonnenen Erkenntnisse, versuchen eine Entscheidungsmatrix aufzustellen.

Die Matrix beginnt erst bei $J = 12$, da es darunter nicht möglich ist sich zu überkaufen. Die von den Schülern entwickelte Strategie ist ein guter Gradmesser für das erworbene Verständnis im Vergleich zu der Tabelle 4.17 (Vgl. [26], S. 125 – 132).

4.4.3 Berechnung einer optimalen Spielstrategie

Soll der Spieler eine weitere Karte nehmen, wenn er angenommen eine Punktesumme J ($12 \leq J \leq 21$) hat?

- $ES(J)$ sei die Gewinnerwartung bei Stehenbleiben.
- $EW(J)$ sei die Gewinnerwartung bei Weiterkaufen.

Antwort: Vergleich der beiden Gewinnerwartungen.

Gewinnerwartung $ES(J)$ berechnen

Angenommen wird der Einsatz 1, dann ist der Gewinn des Spielers +1 bei Gewinn des Spielers (bei Black Jack +1,5), -1 bei Verlust des Spielers und 0 bei einem Unterschieden.

$P(J|K)$... Wahrscheinlichkeit, dass der Croupier bei erster Karte K eine Punktesumme von J erreicht (Vgl. [26], S. 125 – 132).

Unter Vernachlässigung des Black Jacks kann man schreiben:

$$ES(J) = +1 \cdot W(\text{Spieler gewinnt}) - 1 \cdot W(\text{Croupier gewinnt})$$

wobei sich die obigen Wahrscheinlichkeiten nach den Auszahlungsbestimmungen aus den Wahrscheinlichkeiten $P(J|K)$ jener Punktesumme J des Croupiers zusammensetzen, mit denen dieser gewinnt bzw. verliert. Zumal $P\ddot{u}(K)$ (kurz $P\ddot{u}$) die Überkaufwahrscheinlichkeit abhängig von K des Dealers ist, kommt er mit der Gesamtwahrscheinlichkeit $1 - P\ddot{u}$ mit seiner Punktesumme in das Intervall $17 \leq J \leq 21$. „Zur approximativen Berechnung der Gewinnerwartung $ES(J)$ treffen wir nun die – bisweilen mehr oder weniger gut zutreffende – vereinfachte Annahme, daß die einzelnen Wahrscheinlichkeiten $P(J|K)$, $17 \leq J \leq 21$, alle gleich ($= \frac{1-P\ddot{u}}{5}$) seien.“ ([26], S. 128).

Für die Punktesumme der Bank kommen nach den Spielregeln nur die genannten Bereiche in Frage, für den Spieler hingegen auch das Intervall $12 \leq J \leq 16$. Es erscheint daher zweckmäßig, für die Berechnung der Gewinnerwartung $ES(J)$ folgende drei Fälle (mit den genannten approximierenden Wahrscheinlichkeiten für den Dealer) zu unterscheiden:

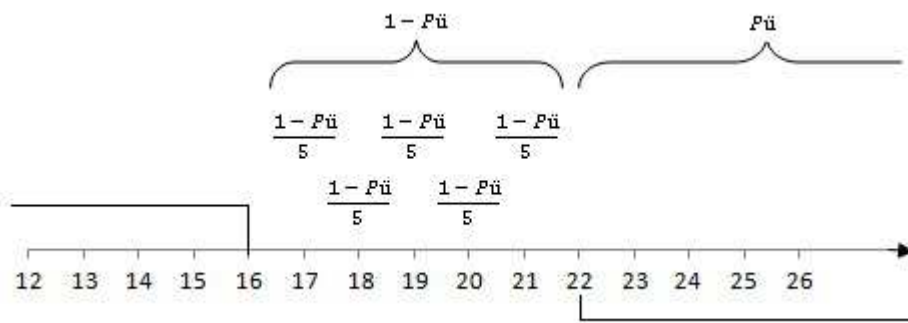


Abbildung 4.3: Unterscheidung der drei Fälle für die Berechnung der Gewinnerwartung $ES(J)$. Quelle: [26], S. 129.

Die Gewinnerwartung ergibt sich zu:

1. $J = 12, \dots, 16$.

$$ES(J) = +1 \cdot P\ddot{u} - 1 \cdot (1 - P\ddot{u}) = 2P\ddot{u} - 1$$

Gewinnen ist in diesem Fall nur möglich, wenn sich die Bank überkauft.

2. $J = 17, \dots, 21$.

$$\begin{aligned} ES(J) &= +1 \cdot (J - 17) \cdot \frac{1-P\ddot{u}}{5} - 1 \cdot (21 - J) \cdot \frac{1-P\ddot{u}}{5} + 1 \cdot P\ddot{u} \\ &= P\ddot{u} + \frac{2(1-P\ddot{u})}{5} \cdot (J - 19) \end{aligned}$$

Es gibt $J - 17$ Fälle, bei denen der Spieler einen Wert näher an 21 als die Bank erreicht. Es gibt hingegen $21 - J$ Möglichkeiten, bei denen die Bank besser abschneidet. Zudem gewinnt der Spieler, wenn die Bank sich überkauft.

3. $J \geq 22$
 $ES(J) = -1$

Bei der Berechnung der Gewinnerwartung $EW(J)$ bei weiterkaufen, müssen zwei Fälle unterschieden werden, ob das Ass den Wert 11 hat oder nicht (Vgl. [26], S. 125 – 132).

Entscheidungskriterium für den Fall keines Ass mit Wert 11

$EW(J)$ ist die Summe der Erwartungen $ES(I)$ mit einer Punktesumme I zu gewinnen, gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit, dieses ausgehend von J mit einer Karte (von Wert $I - J$) zu erreichen, allgemein

$$EW(J) = \sum_{I=J+1}^{J+10} ES(I) \cdot W(I - J).$$

Für die weitere Berechnung nehmen wir, dass Bub, Dame und König die Werte 11, 12 und 13 haben, womit anstelle von

$$EW(J) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{I=J+1}^{J+9} ES(I) + \frac{4}{13} \cdot ES(J + 10)$$

das (für $ES(J) = -1$ für $J \geq 22$) gleichbedeutende, aber einfachere

$$EW(J) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{I=J+1}^{J+13} ES(I)$$

tritt.

Nun lässt sich das Entscheidungskriterium $EW(J) - ES(J) > 0$ auch so formulieren

$$\frac{1}{13} \cdot \sum_{I=J+1}^{J+13} (ES(I) - ES(J)) > 0.$$

Graphische Interpretation: Wir legen fest, dass die Gewinnerwartung $ES(J)$ in jedem der drei Bereiche auf einer Geraden liegen, nämlich für

- $12 \leq J \leq 16$, auf $y = 2P\ddot{u} - 1$
- $17 \leq J \leq 21$, auf $y = P\ddot{u} + \frac{2(1-P\ddot{u})}{5} (x - 19)$
- $J \geq 22$, auf $y = -1$

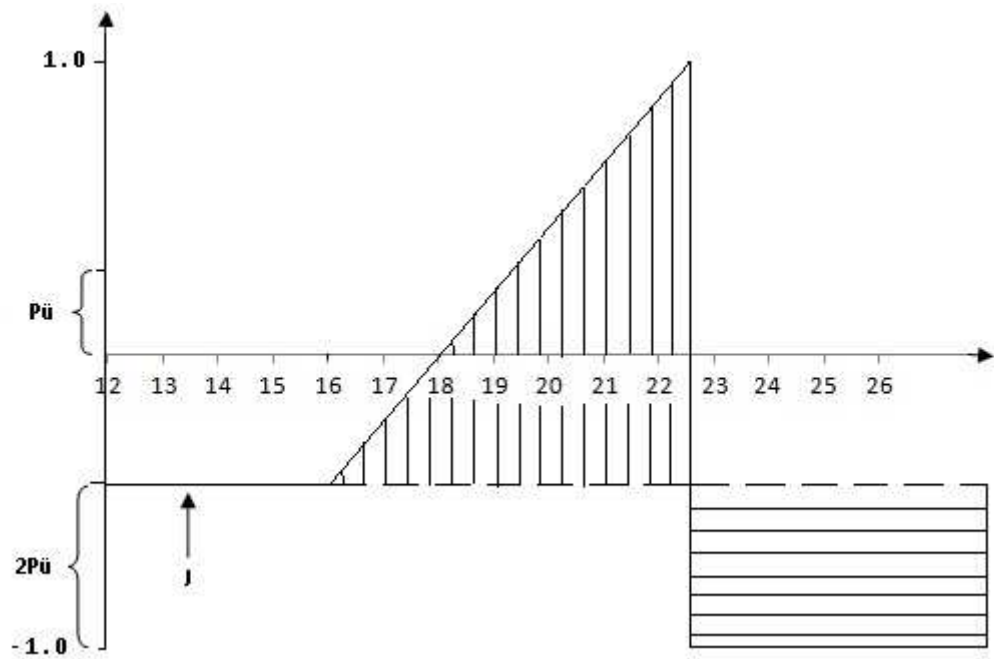


Abbildung 4.4: Unterscheidung der drei Fälle für die Berechnung der Gewinnerwartung $ES(J)$. Quelle: [26], S. 130.

Mit der bereichsweise linearen Fortsetzung von $ES(J)$,

$$ES(x) = \begin{cases} 2P\ddot{u} - 1, & \text{falls } 11,5 \leq x \leq 16,5 \\ P\ddot{u} + \frac{2(1-P\ddot{u})}{5}(x - 19), & \text{falls } 16,5 < x \leq 21,5 \\ -1, & \text{falls } x > 21,5 \end{cases}$$

erhalten wir nach Flächenumwandlungen die folgende „stetige Version“ des obigen Entscheidungskriteriums

$$\int_{J+0,5}^{J+13,5} (ES(x) - ES(J))dx > 0$$

Diese läuft auf einen Vergleich der Fläche des Dreiecks mit dem Rechteck hinaus. Für den Bereich $J = 12, \dots, 16$ liefert dieser mit $ES(J) = 2P\ddot{u} - 1$ (Vgl. [26], S. 125 – 132).

$$\frac{5(2 - 2P\ddot{u})}{2} - (J - 8) \cdot 2P\ddot{u} > 0$$

oder umgeformt

$$J < \frac{11}{2} + \frac{5}{2P\ddot{u}(K)}.$$

Das heißt kaufen soll man bis einschließlich der nächst kleineren ganzen Zahl von $\frac{11}{2} + \frac{5}{2P\ddot{u}(K)}$. Ist diese Zahl < 11 , wird sie durch 11 ersetzt und wenn sie > 16 ist, dann durch 16. Letzteres besagt nur, dass zumindest bis einschließlich 16 gekauft werden soll und nicht, dass noch weiter gekauft werden soll, das muss gesondert untersucht werden.

Die Abbildung 4.5 zeigt, bis zu welcher Punktesumme J in Abhängigkeit von der Überkaufwahrscheinlichkeit $P\ddot{u}$ des Croupiers gekauft werden soll: Die Werte für $P\ddot{u} \geq 0,2174$ gehen aus den obigen Überlegungen hervor. Gesonderte Betrachtung erfordern die Werte $0 \leq P\ddot{u} \leq 0,2174$, die analog läuft (Vgl. [26], S. 125 – 132).

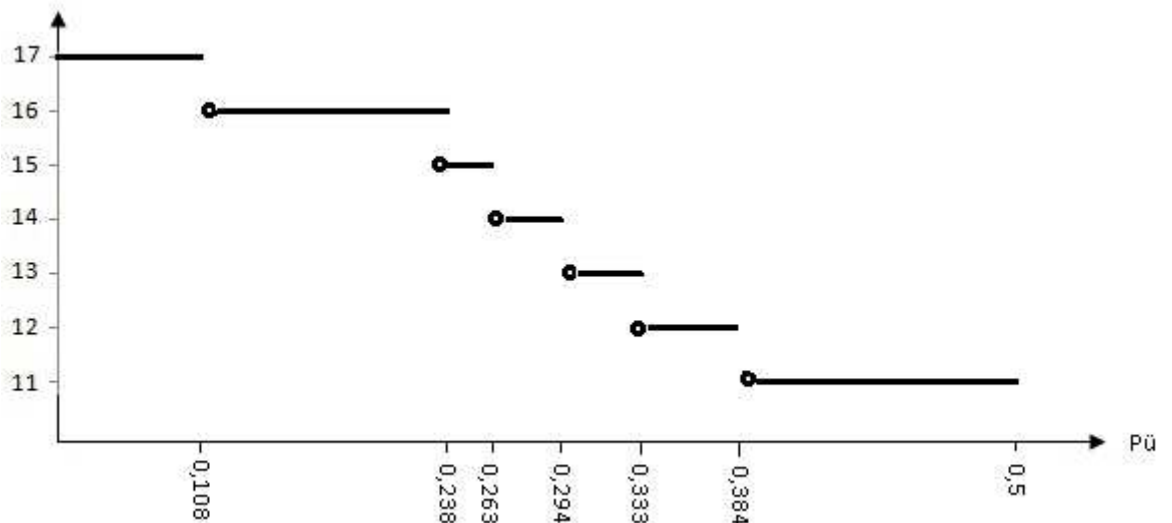


Abbildung 4.5: Bis zu welcher Punktesumme J abhängig von der Überkaufwahrscheinlichkeit $P\ddot{u}$ der Bank gekauft werden soll. Quelle: [26], S. 131.

Kapitel 5

Resümee

„Spielen ist Jonglieren mit der Wirklichkeit.“

Dr. Bernward Thole (*1936)

Ich habe die Arbeit mit dem *Ziegenproblem* begonnen, da es ein sehr interessantes Thema aus den Bereichen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Glücksspiele ist.

Wenn man das Ziegenproblem zum ersten Mal hört, erkennt kaum jemand wie sich ein Wechsel der Türen auf die Gewinnwahrscheinlichkeit auswirkt. Wie man in dem ersten Kapitel herauslesen konnte, gab es viele verschiedene Argumente, die für oder gegen den Wechsel der Türen sprechen.

Auf den ersten Blick sieht dieses Beispiel sehr einfach aus, denn nach dem Öffnen einer Ziegentür verbleiben nur noch zwei Türen, eine mit einer Ziege und eine mit dem Auto. Deswegen liegt die Vermutung auch so nahe, dass sich die Wahrscheinlichkeit bei beiden Türen bei $\frac{1}{2}$ liegt. Alle Personen, denen ich im Zuge meiner Diplomarbeit das Ziegenproblem vorgestellt habe, nannten dies als Lösung. Doch hierbei wird ein entscheidender Fehler gemacht, das Beispiel wird verändert. Es wird vollkommen vernachlässigt, dass es zuvor drei Türen waren und der Moderator auch beim Öffnen der Tür an bestimmte Regeln gebunden ist.

Eines der einleuchtensten Argumente für die meisten Menschen ist, wenn man das Ziegenproblem modifiziert und 100 Türen mit 99 Ziegen und einem Auto annimmt. Wenn die erste Tür durch den Kandidaten gewählt wird und durch den Moderator aus den verbliebenen 99 Türen 98 Ziegentüren aussortiert, ist den meisten Personen klar, dass sich die Wahrscheinlichkeit nicht gleich auf die beiden Türen verteilt. Es wird klar, dass in diesem Beispiel die verbleibende Tür eine höhere Wahrscheinlichkeit besitzt als die anfangs gewählte Tür.

Die Beeinflussbarkeit dieses Glücksspiels ist hoch, denn man kann seine Gewinnwahrscheinlichkeit durch gezieltes Eingreifen (also einen Wechsel der Türen) von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$ erhöhen. Eine um 33,3% höhere Gewinnwahrscheinlichkeit ist beachtlich.

Für den Schulunterricht ist das Ziegenproblem prinzipiell gut geeignet, da es auch für die Schüler sehr interessant sein kann. Die Schüler sollten im Zuge der Aufgabenstellung durch das Ziegenproblem versuchen verschiedene Lösungsansätze zu finden und das Spiel mehrmals durchspielen. Jedoch ist dabei wichtig, den Schülern genügend Zeit zu geben um ihre Ideen zu überprüfen und gegebenenfalls zu überdenken. Aufgrund des Schweregrads des Ziegenproblems und dem nötigen Zeitaufwand ist zu empfehlen dieses Thema im Wahlpflichtfach zu bearbeiten.

In dem darauffolgenden Kapitel *Verwandte des Ziegenproblems* wurden einige weiterführende Beispiele zum Ziegenproblem vorgestellt. Diese sind besonders interessant, nachdem man sich mit dem Ziegenproblem auseinandergesetzt hat. Oft schien es sich bei einem der Beispiele um ein Ziegenproblem zu handeln, jedoch bei genauerer Betrachtung stellte sich dies teilweise als Irrtum heraus.

Die Verwandten des Ziegenproblems sollten auch in dem Schulunterricht im Anschluss an das Ziegenproblem bearbeitet werden. Dadurch können die Schüler sich damit auseinandersetzen, ob es sich bei bestimmten Beispiele, die sehr ähnlich wirken, um den selben Sachverhalt, wie bei dem Ziegenproblem handelt oder nicht. Dieses Thema kann zur Vertiefung des Ziegenproblems genutzt werden.

Im dritten Kapitel *Lotto und Roulette* wurden diese gängigen Glücksspiele bearbeitet. Diese wurden nur kurz erklärt, um einen Vergleich zu dem vorherigen Kapiteln und dem darauffolgenden Kapitel herstellen zu können.

Die Berechnung aus diesem Kapitel entsprechen auch den Berechnungen, die in den Schulen gelehrt werden. Lotto und Roulette werden normalerweise in den Schulunterricht einbezogen. Wichtig ist dabei den Schülern zu verdeutlichen, dass hier keine Einflussmöglichkeit durch den Spieler gegeben ist. Der Spieler trifft zu Beginn des Spieles beim Lotto und Roulette eine Entscheidung und diese muss dann beibehalten werden. Er kann nicht eingreifen und somit seine Gewinnchancen verbessern, der Spieler muss sich einzig und alleine auf sein Glück verlassen.

Somit ist eine Beeinflussbarkeit dieser Glücksspiele nicht vorhanden, denn man darf nach Beginn des Spiels nicht mehr in das Spielgeschehen eingreifen.

Im Gegensatz zu Lotto und Roulette steht das Casinospiel *Black Jack*. Dieses Spiel steckt voller Möglichkeiten das Spiel zu beeinflussen. Es besteht die Option sich für eine weitere Karte zu entscheiden oder nicht, weiters kann der Spieler teilen oder verdoppeln und damit die Bank während des Spielverlaufs zwingen mit doppeltem Einsatz weiter zu spielen. Der Spieler hat ebenfalls die Gelegenheit sich gegen ein drohendes Black Jack der Bank zu versichern.

Diese Möglichkeiten der Einflussnahme wurden in dem vierten Kapitel durchgerechnet. Es wird berechnet, wann der Spieler eine weitere Karte ziehen sollte, wann nicht und bei welcher Wahl die besseren Gewinnchancen vorliegen. Auch die Optionen des Teilens und Verdoppeln wurden genauer betrachtet und unter welchen Voraussetzungen diese Chancen wahrgenommen werden sollten.

Die Berechnungen dieses Kapitels sind für den Schulunterricht geeignet (ausgenommen der Markoff-Ketten). Black Jack kann in den Unterricht einbezogen werden, um anschließend an die Themen Lotto und Roulette einen Vergleich herstellen zu können. Möglicherweise sind jedoch alle einzelnen Berechnungen (Teilen, Verdoppeln, Versichern, ...) zu umfangreich. Deswegen wurden die didaktischen Anregungen (am Ende des Kapitels) zu diesem Thema nur auf den Kern des Themas Black Jack beschränkt.

Die Beeinflussbarkeit dieses Glücksspiels ist sehr hoch, denn der Spieler kann durch gezieltes Eingreifen seine Anfangschancen verbessern. Jedoch ist es dabei wichtig sich an die Empfehlungen aus dem Kapitel Black Jack zu halten, denn wer anfängt sich nur auf sein Gefühl zu verlassen, hat kaum bessere Gewinnchancen als bei den anderen Casinospiele, wie beispielsweise Roulette.

Also wenn ein Spieler sein Glück herausfordern möchte und dennoch mit relativ hoher Wahrscheinlichkeiten gewinnen möchte, sollte sich besser an Black Jack oder eine Spielshow, die nach den Regeln des Ziegenproblems abläuft, halten. Denn dadurch kann er seine Gewinnchancen während des Spiels verbessern. Ein Spieler, der jedoch nur schnell viel Geld gewinnen möchte und sich dabei ganz auf sein Glück verlässt, sollte beim Lotto oder Roulette spielen auf sein Glück vertrauen, denn die Gewinne sind dementsprechend höher.

Literaturverzeichnis

- [1] Abbildung des Autos: <http://www.fotosearch.de/UNC274/u29479654/> [6.5.2010]
- [2] Abbildung der Ziege: <http://www.jetztmalen.de/ziege-2.htm> [6.5.2010]
- [3] Black Jack Regeln: <http://www.casinos.at/uploadNew/e3a36a82-cd5a-428f-9710-02b63f7f86ef.pdf> [14.5.2010]
- [4] Black Jack Regeln: <http://www.casino-prestige.org/Kasinoregeln/blackjackregeln.html> [14.5.2010]
- [5] Black Jack Tisch: <http://www.gamblerstore.de>
- [6] Lotterien: <http://www.lotterien.at>
- [7] Lotto „6 aus 45“ von Prof. Mag. Dr. Maria Koth: <http://www.mathe-online.at/materialien/maria.koth/>
- [8] Gefangeneparadoxon: <http://de.wikipedia.org/wiki/Gefangeneparadoxon>
- [9] Roulette: <http://www.casinos.at/uploadNew/4392d8dd-3241-4510-b2ad-7b0d59278549.pdf>
- [10] Bewersdorff, J.: *Glück, Logik und Bluff – Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2010.
- [11] Bol, G.: *Wahrscheinlichkeitstheorie – Einführung*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2007.
- [12] Bosch, K.: *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1982.
- [13] Bosch, K.: *Glücksspiele – Chancen und Risiken*. R. Oldenbourg Verlag, München, 2000.

- [14] Bosch, K.: *Lotto und andere Zufälle – Wie man die Gewinnquoten erhöht!* R. Oldenbourg Verlag, München, 1999.
- [15] Gnedenko, B. W.: *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1997.
- [16] Heller, W.-D. & Lindenberg H. & Nuske, M. & Schriever, K.-H.: *Stochastische Systeme – Markoffketten, Stochastische Prozesse, Warteschlangen*. Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1978.
- [17] Henze, N.: *Stochastik für Einsteiger – Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [18] Krämer, W.: *Denkste! – Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen*. Campus Verlag, Frankfurt/Main, 1996.
- [19] Kütting, H. & Sauer, M. J.: *Elementare Stochastik – Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [20] Meyer, D.: *Markoff-Ketten*. Mathematik in der Schule 36, Seiten 661 – 670 und 675 – 680, 1998.
- [21] Mayerhofer, M.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung in der AHS Unterstufe – Mathematische und didaktische Reflexionen*. Diplomarbeit. Universität Wien, Wien, 2008.
- [22] Monka, M., Tiede M. & Voß, W.: *Gewinnen mit Wahrscheinlichkeiten – Statistik für Glückssritter*. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbeck bei Hamburg, 1999.
- [23] Pürmayr, G.: *Ist Glück im Spiel berechenbar? – Eine kritische Betrachtung von Glücksspielen mit Anregungen für den Stochastikunterricht*. Diplomarbeit. Universität Wien, Wien, 2008.
- [24] Randow, G.: *Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten*. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbeck bei Hamburg, 2009.
- [25] Reichel, H.-C. & Hanisch, G. & Müller, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Verlag Holder-Pichler-Tempsky, Wien, 1992.
- [26] Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 3. *Stochastik im Schulunterricht – Beiträge zum 3. internationalen Symposium für „Didaktik der Mathematik“ vom 29. 9. bis 3. 10. 1980*. Verlag Holder-Pichler-Tempsky, Wien, 1981.

- [27] Warmuth, E. & Warmuth, W.: *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung*
– *Vom Umgang mit dem Zufall*. B. G. Teubner, Stuttgart/Leipzig, 1998.

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit befasst sich mit der Problematik, wie und ob man Glücksspiele beeinflussen kann. Dazu werden die gängigen Glücksspiele Lotto, Roulette und Black Jack, sowie das Ziegenproblem betrachtet.

Bei den *Ziegenproblem* handelt es sich um folgende Aufgabenstellung: Eine Kandidat ist bei einer Spielshow, in dieser muss er sich für eine von drei Türen entscheiden. Hinter zwei Türen befindet sich eine Ziege und hinter einer Tür der Hauptpreis, ein Auto. Nachdem sich der Kandidat entschieden hat, öffnet der Moderator, aus einer der beiden verbleibenden Türen, eine Tür hinter der sich eine Ziege befindet. Danach kann der Kandidat sich noch einmal zwischen den beiden verbleibenden Türen entscheiden. Soll er nun bei seiner ursprünglichen Wahl bleiben oder wechseln?

Mit dieser Frage beschäftigt sich das erste Kapitel dieser Arbeit. Die korrekte Antwort darauf wird in unterschiedlicher Weise beschrieben. Zum Beispiel wird diese Aufgabe mit Hilfe von Pfadregeln, bedingter Wahrscheinlichkeit, der Bayes-Formel, etc. beantwortet.

Im zweiten Kapitel werden die sogenannten *Verwandten des Ziegenproblems* erklärt und mit dem ursprünglichen Ziegenproblem verglichen. In diesem Kapitel werden unter anderem das Gefangenendilemma, russische Roulette und weiterführende Beispiele zum Ziegenproblem behandelt.

Im dritten Kapitel werden die beiden bekannten und beliebten Glücksspiele *Lotto und Roulette* erläutert. Zu dem Glücksspiel Lotto werden die einzelnen Gewinnwahrscheinlichkeiten (für einen 3er, 4er, usw.) berechnet. Für das Casinospiel Roulette werden ebenfalls die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Einsatzmöglichkeiten (Plein, Cheval, etc.) berechnet.

Im vierten Kapitel wird das beliebte Casinospiel *Black Jack* behandelt. In diesem wird sich vor allem mit der Beeinflussbarkeit dieses Glücksspiels beschäftigt. Denn Black Jack bietet eine Fülle an Möglichkeiten um in das Spielgeschehen eingreifen zu können, durch einfaches Kartenziehen oder den zusätzlichen Möglichkeiten des Verdoppelns, Teilens und Versicherns. Im Zuge der Berechnungen dieses Kapitels werden auch Markoff-Ketten erläutert.

Abstract

This thesis deals with the problem, if and how one can influence gambling. To this end the classical games Lotto, Roulette, Black Jack and Monty Hall Problem are considered.

In the *Monty Hall Problem* a candidate in a game show has to choose between three doors. Behind two of them there is a goat and behind the third one there is a car. After having chosen a door the presenter opens one of the other doors and behind this door is a goat. Now the candidate has the option to change the door. Is it better to remain at the original decision or to change? The first chapter deals with this question. I describe the correct answer in different ways. Answers are given for example using tree diagrams, conditional probabilities and Bayes Formula.

In the next chapter *problems related to the Monty Hall Problem* are investigated and compared with the original problem. Among others the Three Prisoners Problem and Russian roulette are discussed.

The third chapter deals with the two well known and popular games *Lotto and Roulette*. Concerning Lotto the probability of winning for different scores is calculated. Also for Roulette probabilities of winning are computed for different betting options (straight-up, split, etc.).

Finally the popular game *Black Jack* is investigated. Here the main concern is to influence the chances of winning. Black Jack offers a lot of possibilities to influence the game. This can be done by hitting, splitting, doubling or buying an insurance. To calculate the probabilities Markov chains are used. Therefore they are explained briefly.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Sabina Schottleitner
Geburtsdatum	13. Jänner 1987
Geburtsort	Wien
Staatsbürgerschaft	Österreich
Eltern	Maria und Ing. Erich Schottleitner

Schullaufbahn

1993 – 1994	Volksschule Karlsplatz 1040 Wien
1994 – 1997	Volksschule Graf Starhembergasse 1040 Wien
1997 – 1999	BRG 12 Singrienergasse 1120 Wien
1999 – 2005	BRG Draschestraße 1230 Wien
10. Juni 2005	Reifeprüfung bestanden

Studienlaufbahn

seit WS 2005	Studium an der Universität Wien UF Mathematik und UF Psychologie/Philosophie
1. Februar 2008	1. Diplomprüfung