



universität  
wien

# MASTERARBEIT

Titel der Masterarbeit

## Das Drei-Trojaner-Problem

Verfasser

Simon DAUTH Bakk.rer.nat.

angestrebter akademischer Grad

Master of Science (MSc)

Wien, 21. Mai 2013

Studienkennzahl: A 066 861

Studienrichtung: Astronomie

Betreuer: Ao. Univ.-Prof. tit. Univ.-Prof. Dr. Rudolf DVORAK



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Grundlagen und Definitionen . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Analytische Betrachtung</b>	<b>5</b>
2.1	Vereinfachte Bewegungsgleichungen . . . . .	5
2.1.1	Integrale der Bewegung . . . . .	8
2.2	Gleichgewichtspunkte . . . . .	9
2.2.1	Stabilität der Gleichgewichtspunkte . . . . .	13
2.3	Planetenbahnen . . . . .	14
2.3.1	Normalschwingungen . . . . .	14
2.3.1.1	Schwingungsperioden . . . . .	15
2.3.2	Beschränktheit der Bewegung . . . . .	16
2.3.2.1	Symmetrische Oszillation . . . . .	18
2.3.2.2	Maximalgeschwindigkeitskurven . . . . .	19
2.3.2.3	Radiale Auslenkung bei symmetrischer Oszillation . . . . .	22
2.3.3	Schwingungsperioden bei größeren Amplituden . . . . .	25
2.3.4	Größe des stabilen Bereichs . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Numerische Untersuchung</b>	<b>29</b>
3.1	Numerische Bestimmung der Gleichgewichtspunkte . . . . .	29
3.2	Numerische Integration der vereinfachten Gleichungen . . . . .	30
3.2.1	Symmetrische Anfangsbedingungen . . . . .	33
3.2.1.1	Grenzen der Stabilität . . . . .	33
3.2.2	Stabilitätskarte . . . . .	34
3.3	Numerische Integration der exakten Bewegungsgleichungen . . . . .	38
3.3.1	Drei gleiche Massen, symmetrische Anfangsbedingungen . . . . .	38
3.3.1.1	Grenzen der Stabilität . . . . .	40
3.3.1.2	Vergleich mit analytischen Ergebnissen . . . . .	42
3.3.1.3	Verhalten bei größeren Planetenmassen . . . . .	44
3.3.2	Asymmetrische Anfangsbedingungen . . . . .	48
3.3.3	Zwei gleiche Massen . . . . .	51
3.3.3.1	$m_1 = m_3$ . . . . .	51
3.3.3.2	$m_1 = m_2$ . . . . .	54
3.3.4	Drei unterschiedliche Massen . . . . .	56
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>58</b>
	<b>Abstract</b>	<b>59</b>
	<b>Quellenangabe</b>	<b>60</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>61</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>62</b>



# 1 Einleitung

Als koorbitale Objekte werden zwei oder mehrere Himmelskörper bezeichnet, die sich auf einer gemeinsamen Umlaufbahn um einen zentralen Körper bewegen. Das erste bekannte koorbitale Objekt war der Asteroid 1906 TG, der heute als 588 Achilles bezeichnet wird. Er wurde 1906 von Max Wolf entdeckt und befindet sich in einer gemeinsamen Umlaufbahn mit dem Planeten Jupiter. In den Jahren darauf wurden weitere koorbitale Begleiter von Jupiter entdeckt, die alle nach Figuren aus Homers Ilias benannt, und deswegen als Trojaner bezeichnet wurden. Heutzutage wird der Begriff Trojaner allgemein für einen koorbitalen Begleiter eines Planeten verwendet. Derzeit (Stand 17. Mai 2013) sind 5.854 Jupiter-, neun Neptun-, fünf Mars- und ein Erd-Trojaner bekannt (IAU Minor Planet Center). Sie alle haben gemeinsam, dass ihre Massen im Verhältnis zur Masse des Planeten mit dem sie die Umlaufbahn teilen, vernachlässigbar gering sind. Daher kann für eine ungefähre Beschreibung ihrer Dynamik das sogenannte eingeschränkte Dreikörperproblem verwendet werden, bei dem die Bewegung eines als masselos angenommenen Körpers unter dem gravitativen Einfluss von zwei weiteren Himmelskörpern betrachtet wird. Bereits gegen Ende des 18. Jahrhunderts konnte Joseph Louis Lagrange zeigen, dass in diesem Fall fünf bestimmte Konfigurationen existieren, bei denen sich das System im Gleichgewicht befindet. Die Punkte, an denen sich der Asteroid in einem Bezugssystem, das mit dem Planeten um die Sonne rotiert befinden muss, damit ein Gleichgewicht eintritt, werden Lagrange-Punkte, bzw. Librationspunkte genannt. Drei davon,  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$ , sind gegen Störungen instabil und daher nur von mathematischer Bedeutung. Die anderen beiden,  $L_4$  und  $L_5$ , bei denen die drei Körper ein gleichschenkeliges Dreieck bilden, sich im rotierenden Koordinatensystem also in einer Winkeldistanz von  $60^\circ$  vom Planeten entfernt befinden, sind jedoch stabil. Das bedeutet, dass sich ein Asteroid trotz einer gewissen Entfernung vom Lagrange-Punkt in einer stabilen Umlaufbahn befinden kann.

Im rotierenden Bezugssystem bewegen sich die Trojaner auf kaulquappenförmigen Umlaufbahnen um die Lagrange-Punkte. Im Englischen werden ihre Umlaufbahnen daher auch als tadpole orbits bezeichnet. Daneben existieren jedoch auch koorbitale Objekte, die sich im rotierenden Koordinatensystem auf einer hufeisenförmigen Bahn bewegen, das heißt, nicht nur um einen Lagrange-Punkt oszillieren sondern von  $L_4$  über  $L_3$  zu  $L_5$  und wieder zurück wandern. Solche Umlaufbahnen bezeichnet man als horseshoe orbits.

Im Sonnensystem existieren jedoch nicht nur Asteroiden, die sich auf einer gemeinsamen Umlaufbahn mit einem Planeten befinden, sondern auch Monde, die kleine koorbitale Begleiter haben. Bei Monden die sich auf einer gemeinsamen Umlaufbahn mit einem anderen, jedoch deutlich größeren Mond befinden, spricht man von Trojaner-Monden. Im Sonnensystem sind derzeit zwei Monde mit Trojaner-Monden bekannt, nämlich die Saturnmonde Tethys und Dione, die jeweils einen koorbitalen Begleiter in  $L_4$  und  $L_5$  haben.

Eine kürzlich erschienene Arbeit bestätigt außerdem die Existenz von koorbitalen Objekten im Asteroidengürtel. Christou & Wiegert (2012) konnten 51 koorbitale Begleiter des Zwergplaneten Ceres und 44 des Asteroiden Vesta identifizieren.

Eine stabile koorbitale Konfiguration kann auch dann existieren, wenn die Himmelskörper ähnliche Massen haben. Eine Betrachtung im eingeschränkten Dreikörperproblem ist dann jedoch nicht mehr möglich, da beide Himmelskörper einander gravitativ beeinflussen. Für zwei koorbitale Objekte ist in diesem Fall die Dreieckslösung von Lagrange dennoch eine stabile Konfiguration. Das derzeit einzige bekannte Beispiel für zwei koorbitale Objekte mit ähnlichen Massen sind die beiden Saturnmonde Janus und Epimetheus mit einem Massenverhältnis von etwa 3,6. Beide Monde befinden sich in Hufeisenbahnen auf einem gemeinsamen mittleren Orbit um den Planeten Saturn. Eine analytische Beschreibung der Dynamik des Systems wird von Yoder et al. (1983) gegeben.

Eine solche Konfiguration wird auch im Zusammenhang mit der Entstehung des Erdmondes diskutiert. Die derzeit favorisierte Theorie besagt, dass der Mond durch den Zusammenstoß zwischen der Proto-Erde und einem etwa marsgroßen Objekt, das als Theia bezeichnet wird, entstanden ist. Belbruno & Gott (2005) zeigten mit Hilfe von numerischen Simulationen, dass es wahrscheinlich ist, dass sich Proto-Erde und Theia vor der Kollision in einer koorbitalen Konfiguration befunden haben. Theia hat sich demnach im Lagrange-Punkt  $L_4$  oder  $L_5$  der Erde gebildet und aufgrund der stabilen Konfiguration zunächst ungehindert wachsen können. Die gravitative Interaktion mit anderen Planetesimalen bewirkte jedoch, dass der Orbit chaotisch wurde und führte schließlich zur Kollision der beiden Himmelskörper. Eine weiterführende Theorie, welche die unterschiedlichen Hemisphären des Mondes erklären könnte, wurde von Jutzi & Asphaug (2011) vorgestellt. Danach könnten sich nach der Kollision zwischen Proto-Erde und Theia aus der Trümmerwolke zunächst zwei koorbitale Monde gebildet haben, welche in der Folge ihrerseits miteinander kollidierten.

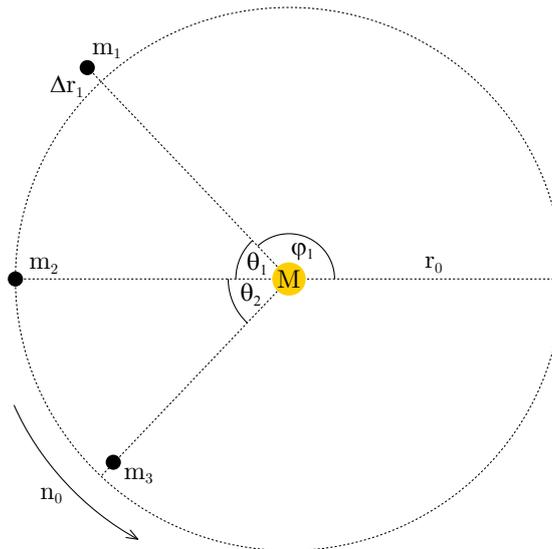
Aufgrund der Entdeckung von zahlreichen extrasolaren Planeten in den letzten Jahren ist auch die Möglichkeit von koorbitalen Exoplaneten ins Blickfeld der Aufmerksamkeit gerückt. Schwarz et al. (2009) konnten beispielsweise mittels numerischen Simulationen zeigen, dass aus dynamischer Sicht die Möglichkeit besteht, dass erdähnliche Planeten als koorbitale Begleiter von Gasriesen in extrasolaren Planetensystemen existieren. Giuppone et al. (2012) diskutierten Möglichkeiten zur Detektion koorbitaler Exoplaneten und mögliche Mechanismen, die zur Entstehung von koorbitalen Planetenpaaren führen können.

Als Zusammenfassung der bisherigen Forschungsergebnisse zum Thema „Koorbitale Objekte“ kann gesagt werden, dass die Trojaner-Konfiguration mit einem dominanten Planeten oder Mond und ein oder mehreren im Vergleich dazu massearmen Himmelskörpern auf einer gemeinsamen Umlaufbahn sehr stabil und in unserem Sonnensystem allgegenwärtig ist. Es ist daher naheliegend, dass vergleichbare Konfigurationen auch in anderen Planetensystemen zahlreich existieren. Koorbitale Konfigurationen, bestehend aus zwei Objekten vergleichbarer Größe hingegen, erwiesen sich in realistischen numerischen Simulationen oft als nur kurzfristig stabil. Dennoch existiert im Sonnensystem eine solche Konfiguration. Die Existenz von

extrasolaren koorbitalen Planetenpaaren kann daher nicht ausgeschlossen werden. Koorbitale Konfigurationen bestehend aus drei oder mehr Objekten vergleichbarer Größe wurden aufgrund der Unwahrscheinlichkeit ihrer Entstehung bisher nur wenig beachtet. Aus mathematischer Sicht ist ihre Existenz jedoch möglich und die Entstehung eines zumindest kurzfristig stabilen Systems, bestehend aus drei koorbitalen Objekten vergleichbarer Größe, kann nicht definitiv ausgeschlossen werden. Deswegen beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit diesem Fall, der im Folgenden als das Drei-Trojaner-Problem bezeichnet wird.

Die Arbeit ist in zwei Kapitel unterteilt. Im ersten Teil wird das Problem auf der Grundlage der Arbeit von Salo & Yoder (1988) analytisch betrachtet, im zweiten Teil werden anschließend Ergebnisse numerischer Simulationen präsentiert. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem Spezialfall eines Systems bestehend aus drei koorbitalen Objekten gleicher Masse und der Analyse hinsichtlich dessen Stabilität.

## 1.1 Grundlagen und Definitionen



**Abbildung 1:** Schematische Darstellung des Drei-Trojaner-Problems

Abbildung 1 zeigt die schematische Darstellung der Konfiguration. Drei Himmelskörper mit den Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  bewegen sich auf einer gemeinsamen mittleren Umlaufbahn um einen zentralen Körper mit der Masse  $M$ , wobei gilt:  $m_i \ll M$ . Wie in der Einleitung beschrieben, kann es sich dabei sowohl um einen Stern und koorbitale Planeten als auch um einen Planeten und koorbitale Monde handeln. In dieser Arbeit werden die kleinen Massen als Planeten, die zentrale Masse als Stern bezeichnet.

Für die analytische Betrachtung im folgenden Kapitel wird die mittlere Umlaufbahn als kreisförmig angenommen. Die drei Planeten haben dann die gleiche durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit (mean motion)  $n_0$  und den gleichen mittleren Bahnra-

dius  $r_0$ . Die radiale Abweichung vom mittleren Bahnradius wird mit  $\Delta r_i$  angegeben. Diese kann auf den mittleren Radius normiert werden:

$$\xi_i = \Delta r_i / r_0 \quad (1)$$

Die aktuelle Position eines Planeten wird durch die Polarkoordinaten  $(r_i, \varphi_i)$  angegeben. Des Weiteren vereinfacht die Einführung der Differenzwinkel

$$\theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (2)$$

$$\theta_2 = \varphi_3 - \varphi_2 \quad (3)$$

die mathematische Beschreibung. Im späteren Verlauf der analytischen Betrachtung wird außerdem  $r_0 = 1$  und  $n_0 = 1$  gesetzt. Die mittlere Umlaufperiode der Planeten beträgt dann  $2\pi$  Zeiteinheiten. Der Einfachheit halber werden alle Zeitangaben in Einheiten der Umlaufperiode, die im Folgenden als Jahr bezeichnet wird, gemacht. Für die Winkelangaben in allen Grafiken wird das Winkelmaß verwendet, die Masse der Planeten wird immer in Erdmassen  $m_\oplus$  angegeben. Da die Masse des Zentralkörpers auf  $M = 1$  normiert wird, entspricht dies einem Massenverhältnis  $m_\oplus / M_\odot = 3,002614 \times 10^{-6}$ , welches sich aus

$$M_\odot = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg} \quad m_\oplus = 5,9722 \times 10^{24} \text{ kg}$$

ergibt (solarsystem.nasa.gov). Die Anfangspositionen der Planeten in den numerischen Simulationen werden stets so gewählt, wie es in Abbildung 1 dargestellt ist:  $\varphi_1(0) < \varphi_2(0) = 180^\circ < \varphi_3(0)$ .

## 2 Analytische Betrachtung

### 2.1 Vereinfachte Bewegungsgleichungen

Um einen ersten Einblick in die Dynamik des Systems und dessen grundlegende Eigenschaften zu erhalten, ist es zweckmäßig, die Bewegungsgleichungen in eine vereinfachte Form zu bringen. Dies wurde von Yoder et al. (1983) für den Spezialfall von zwei koorbitalen Objekten, bzw. von Salo & Yoder (1988) für den allgemeinen Fall durchgeführt und wird hier im Folgenden beschrieben.

Ausgangspunkt sind die Gleichungen für die Bewegung von  $N$  Planeten mit den Massen  $m_i$  auf koplanaren Orbits um einen zentralen Stern mit der Masse  $M$ . Die Planeten stehen dabei unter gegenseitigem Gravitations-Einfluss.

$$\frac{d}{dt} \left( r_i^2 \frac{d\varphi_i}{dt} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial F_{ij}}{\partial \varphi_i} \quad (4)$$

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} - r_i \left( \frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r_i^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial F_{ij}}{\partial r_i} \quad (5)$$

mit

$$F_{ij} = Gm_j \left( (r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\varphi_i - \varphi_j))^{-\frac{1}{2}} - \frac{r_i}{r_j^2} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right) \quad (6)$$

Der Koordinatenursprung der Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  liegt dabei im Schwerpunkt von  $M$ .

Im Fall, dass die Störfunktion  $F_{ij}$  verschwindet, reduzieren sich die Gleichungen zu den Bewegungsgleichungen des klassischen Zweikörperproblems in Polarkoordinaten. Nimmt man außerdem eine Kreisbahn an, so gilt  $r = \text{const} := r_0$  sowie  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ , und es folgt unmittelbar  $\dot{\varphi} = \text{const} := n_0$  und

$$r_0^3 n_0^2 = GM \quad (7)$$

Gleichung (7) ist als drittes Keplersches Gesetz bekannt, und gilt auch für exzentrische Umlaufbahnen, wenn  $r_0$  durch die große Halbachse und  $n_0$  durch die mittlere Bewegung ersetzt wird.

Die Vereinfachung der Bewegungsgleichungen besteht nun darin, dass die Wechselwirkungen der kleinen Massen  $m_i$  untereinander als Störung der Kreisbahn-Lösung betrachtet werden. Dabei ist  $n_0$  die durchschnittliche mittlere Bewegung und  $r_0$  der mittlere Bahnradius der Planeten. Die Abweichungen davon werden als  $\delta n_i$  und  $\delta r_i$  bezeichnet. Die tatsächliche Winkelgeschwindigkeit ergibt sich somit durch  $\dot{\varphi}_i = n_0 + \delta n_i$ . Der tatsächliche Bahnradius  $r_i$  wird einerseits durch den direkten Einfluss  $\delta r_i$ , andererseits durch die Abweichung der Winkelgeschwindigkeit  $\delta n_i$  aufgrund der differentiellen Rotation bestimmt. Für den Einfluss gemäß dem 3. Keplerschen Gesetz gilt:

$$r_0^3 n_0^2 = r_i^3 (n_0 + \delta n_i)^2 \quad (8)$$

$$r_i = \frac{r_0 n_0^{2/3}}{(n_0 + \delta n_i)^{2/3}} \quad (9)$$

Eine Taylor-Entwicklung um den Punkt  $\delta n_i = 0$  bis zur ersten Ordnung liefert:

$$r_i = r_0 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{n_0} \delta n_i + \mathcal{O}(\delta n_i^2) \quad (10)$$

Somit ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den gestörten und den ungestörten Größen:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = n_0 + \delta n_i \quad (11)$$

$$r_i = r_0 \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\delta n_i}{n_0} \right) + \delta r_i \quad (12)$$

Die Bewegungsgleichungen für die Abweichung von der Kreisbahn erhält man durch Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in Gleichung (4) und (5). Zur weiteren Vereinfachung werden die Gleichungen anschließend linearisiert. Das heißt, es werden nur Terme erster Ordnung in  $\delta n_i$  und  $\delta r_i$  behalten. Da  $n_0$  und  $r_0$  konstant sind, verschwinden die zeitlichen Ableitungen nach diesen Ausdrücken. Die auf diese Weise vereinfachten Gleichungen lauten schließlich:

$$-\frac{1}{3} r_0^2 \frac{d}{dt}(\delta n_i) + 2n_0 r_0 \frac{d}{dt}(\delta r_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial F_{ij}}{\partial \varphi_i} \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta r_i) - \frac{2}{3} \frac{r_0}{n_0} \frac{d^2}{dt^2}(\delta n_i) - 3n_0^2 \delta r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial F_{ij}}{\partial r_i} \quad (14)$$

Nach Yoder et al. (1983) sind die Abweichungen  $\delta r_i/r_0$  um den Faktor  $\sqrt{m/M}$  kleiner als  $\delta n_i/n_0$  und können daher in Gleichung (13) weggelassen werden. Anders ausgedrückt sind die radialen Abweichungen aufgrund der gegenseitigen Störungen der Planeten klein gegenüber den durch die differentielle Rotation im Kepler-Potential verursachten radialen Abweichungen. Mit der gleichen Genauigkeit kann  $F(r_i, r_j, \varphi_i - \varphi_j)$  durch  $F(r_0, r_0, \varphi_i - \varphi_j)$  ersetzt werden. Gleichung (6) wird damit zu:

$$F(r_0, r_0, \phi) = Gm_j \left( \frac{1}{\sqrt{2r_0^2(1 - \cos(\phi))}} - \frac{\cos(\phi)}{r_0} \right) \quad (15)$$

Zur Vereinfachung der Darstellung wurde hierbei  $\phi = \varphi_i - \varphi_j$  gesetzt. Mit Hilfe der Halbwinkelformel

$$\left| \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}} \quad (16)$$

kann der erste Term in der Klammer von Gleichung (15) umgeschrieben werden. Außerdem kann  $r_0^2$  aus der Wurzel gezogen werden, da  $r_0$  positiv ist. Somit ergibt sich:

$$F(r_0, r_0, \phi) = \frac{Gm_j}{r_0} \left( \frac{1}{2 \left| \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \right|} - \cos(\phi) \right) \quad (17)$$

Die Ableitung dieser Funktion nach  $\phi$  lautet:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{Gm_j}{r_0} \sin(\phi) \left( 1 - \frac{1}{8 |\sin(\frac{\phi}{2})|^3} \right) \quad (18)$$

In Gleichung (13) eingesetzt ergibt sich somit:

$$-\frac{1}{3} r_0^2 \frac{d}{dt} (\delta n_i) = \frac{G}{r_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \sin(\varphi_i - \varphi_j) \left( 1 - \frac{1}{8 |\sin(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2})|^3} \right) \quad (19)$$

Durch Multiplikation mit  $r_0 n_0^2 / GM$  können mit Hilfe des 3. Keplerschen Gesetzes (Gleichung 7) die Gravitationskonstante  $G$  und der mittlere Radius  $r_0$  aus der Gleichung eliminiert werden. Mit der Einführung des Massenverhältnisses  $\mu_j = m_j / M$  lautet die vereinfachte Bewegungsgleichung mit einer Genauigkeit von  $\mathcal{O}(m/M)$  schließlich:

$$-\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\delta n_i) = -n_0^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mu_j \sin(\varphi_i - \varphi_j) \left( \frac{1}{8 |\sin(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2})|^3} - 1 \right) \quad (20)$$

Nach Renner & Sicardy (2004) kann diese Gleichung noch weiter vereinfacht werden. Betrachtet man die Bewegung in einem Koordinatensystem, das mit  $n_0$  rotiert, so kann in Gleichung (20)  $\delta n_i$  durch  $\dot{\varphi}_i$  ersetzt werden. In Gleichung (12) wird aufgrund obiger Überlegungen  $\delta r_i$  weggelassen. Gemäß Abbildung 1 soll nun  $\Delta r_i$  die radiale Abweichung von  $r_0$  bezeichnen:  $r_i = r_0 + \Delta r_i$ . Gleichung (12) wird somit zu:

$$r_0 + \Delta r_i = r_0 \left( 1 - \frac{2 \dot{\varphi}_i}{3 n_0} \right) \quad (21)$$

Nach Division durch  $r_0$  und der Einführung der neuen Variable  $\xi_i = \Delta r_i / r_0$  erhält man:

$$\xi_i = -\frac{2 \dot{\varphi}_i}{3 n_0} \quad (22)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $n_0 = 1$  und  $r_0 = 1$  gesetzt werden. Somit erhält man eine direkte Beziehung zwischen der radialen Abweichung und der Winkelgeschwindigkeit im rotierenden Koordinatensystem:

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{3}{2} \xi_i \quad (23)$$

Diese Gleichung nach der Zeit abgeleitet und in Gleichung (20) eingesetzt liefert schlussendlich folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{3}{2} \xi_i \quad (24)$$

$$\dot{\xi}_i = -2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mu_j f'(\varphi_i - \varphi_j) \quad (25)$$

mit

$$f'(\phi) = \sin(\phi) \left( \frac{1}{8 |\sin(\frac{\phi}{2})|^3} - 1 \right) \quad (26)$$

Gleichung (24) beschreibt die differentielle Kepler-Rotation der Planeten in Abhängigkeit vom Bahnradius, Gleichung (25) beinhaltet alle Terme, die sich durch die gegenseitigen Wechselwirkungen der Planeten untereinander ergeben.

### 2.1.1 Integrale der Bewegung

Es lassen sich zwei Integrale der Bewegung finden, welche aus der Drehimpulserhaltung folgen. Gemäß Gleichung (25) gilt:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \dot{\xi}_i = -2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mu_i \mu_j f'(\varphi_i - \varphi_j) \quad (27)$$

Da  $f'$  eine ungerade Funktion ist, das heißt  $-f'(\phi) = f'(-\phi)$ , folgt daraus

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \dot{\xi}_i = 0 \quad (28)$$

woraus sich durch Integration

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i = \text{const} \quad (29)$$

ergibt. Da der Referenzradius keinen Einschränkungen unterliegt, ist es möglich,  $r_0$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit so zu wählen, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i = 0 \quad (30)$$

Aufgrund von Gleichung (24) folgt daraus direkt:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \dot{\varphi}_i = 0 \quad (31)$$

woraus sich wiederum durch Integration

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \varphi_i = \text{const} \quad (32)$$

ergibt.

Eine weitere Erhaltungsgröße ergibt sich, wenn Gleichung (25) auf beiden Seiten mit  $\frac{1}{2}\dot{\varphi}_i\mu_i$  multipliziert, über  $i$  summiert und zuletzt nach der Zeit integriert wird:

$$E = -\frac{3}{8} \sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mu_i \mu_j f(\varphi_i - \varphi_j) \quad (33)$$

mit

$$f(\phi) = \cos(\phi) - \frac{1}{2 \left| \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right|} \quad (34)$$

Dieser Ausdruck beschreibt die Energieerhaltung und ist vergleichbar mit dem Jacobi Integral des eingeschränkten Dreikörperproblems. Salo & Yoder (1988) bezeichnen den ersten Term als kinetische Energie  $T$ , den zweiten Term als potentielle Energie  $V$  und definieren  $E = T + V$ . Dies ist in diesem Zusammenhang eine unübliche Notation, da die Konsequenz daraus ist, dass  $T \leq 0$  gilt, die kinetische Energie also einen negativen Wert annimmt. Um mit Salo & Yoder (1988) konsistent zu bleiben, wird diese Notation im Folgenden dennoch beibehalten.

Mit Hilfe von Gleichung (33) können die Gleichgewichtskonfigurationen des Systems berechnet werden, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird. Sie erlaubt aber auch eine Aussage über die möglichen Orte, welche die Planeten im mitrotierenden Koordinatensystem einnehmen können.

## 2.2 Gleichgewichtspunkte

Wenn die Planeten im mitrotierenden Koordinatensystem ruhen, das heißt weder radiale, noch azimutale Abweichungen auftreten, befindet sich das System im Gleichgewicht und es gilt:  $\dot{\xi}_i = 0$ ,  $\dot{\varphi}_i = 0$ . Daraus folgt aufgrund von Gleichung (24) unmittelbar  $\xi_i = 0$ . Aus Gleichung (25) ergeben sich für den hier betrachteten Fall  $N = 3$  folgende drei Gleichungen:

$$\mu_2 f'(\varphi_1 - \varphi_2) = -\mu_3 f'(\varphi_1 - \varphi_3) \quad (35)$$

$$\mu_1 f'(\varphi_2 - \varphi_1) = -\mu_3 f'(\varphi_2 - \varphi_3) \quad (36)$$

$$\mu_1 f'(\varphi_3 - \varphi_1) = -\mu_2 f'(\varphi_3 - \varphi_2) \quad (37)$$

Mit Hilfe der Differenzwinkel  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  und der Tatsache, dass  $f'$  eine ungerade Funktion ist, folgen daraus direkt die für ein Gleichgewicht erforderlichen Massenverhältnisse der Planeten für eine gegebene Winkelkonfiguration, wobei zwei der drei Gleichungen für eine vollständige Beschreibung ausreichen.

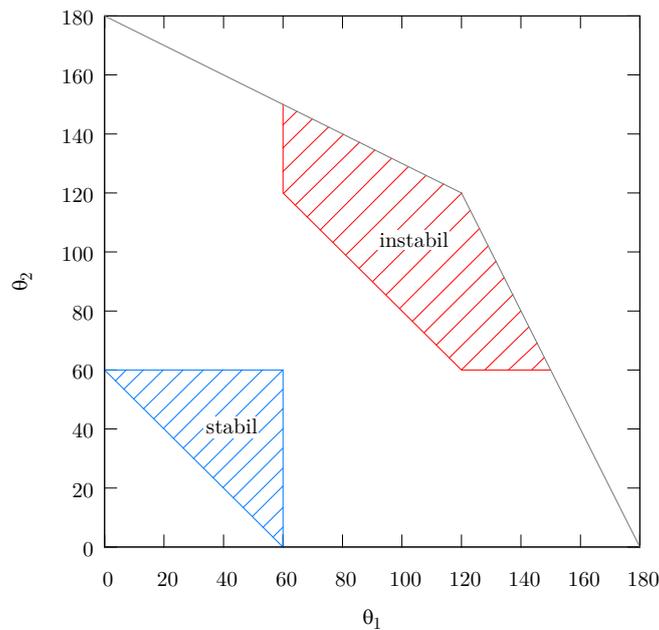
$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{f'(\theta_1 + \theta_2)}{f'(\theta_2)} \quad (38)$$

$$\frac{\mu_3}{\mu_1} = \frac{f'(\theta_1)}{f'(\theta_2)} \quad (39)$$

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = -\frac{f'(\theta_1)}{f'(\theta_1 + \theta_2)} \quad (40)$$

Mit diesen Gleichungen können für eine gegebene Winkelkonfiguration  $(\theta_1, \theta_2)$  die zugehörigen Massenverhältnisse analytisch berechnet werden. Es ist jedoch nicht möglich, analytisch die Umkehrfunktion zu bilden.

Zur weiteren Betrachtung wird nun zunächst untersucht, in welchem Winkelbereich stationäre Lösungen existieren können. Bei einer gegebenen Konfiguration kann jeder der drei Planeten als der mittlere definiert werden, unabhängig davon, wie groß die Differenzwinkel tatsächlich sind. Daher gibt es drei gleichwertige Winkelpaare, um eine Konfiguration zu beschreiben. Es ist also möglich und sinnvoll, die Reihenfolge der Planeten so zu definieren, dass  $\theta_1$  und  $\theta_2$  die beiden kleinsten Winkel sind, das heißt:  $\theta_i \leq 360^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$ , wobei  $\theta_1$  und  $\theta_2$  nur positive Werte annehmen dürfen. Somit ist es ausreichend, in diesem Bereich nach möglichen Lösungen zu suchen. Da in diesem Fall sowohl  $\theta_1$ , als auch  $\theta_2$  kleiner als  $180^\circ$  sind, und  $\theta_1 + \theta_2$  kleiner als  $240^\circ$  ist, können die Betragsstriche in Gleichung (26) weggelassen werden, da  $\sin(\frac{\phi}{2}) > 0$  für  $0 < \phi < 360^\circ$  gilt. Darüber hinaus ergibt sich durch die Einschränkung des Winkelbereichs keine Vereinfachung. Abbildung 2 zeigt den beschriebenen Bereich mit der grauen Linie als Grenze, sowie die Bereiche, in denen stationäre Lösungen existieren. Dies sind alle Winkelpaare  $(\theta_1, \theta_2)$  für welche die Gleichungen (38), (39) und (40) positive Massenverhältnisse ergeben. Zu jedem Punkt in diesen Bereichen existiert genau eine Konfiguration von Massenverhältnissen. Für die Punkte außerhalb dieser Bereiche liefert das Gleichungssystem ebenfalls eine Lösung, diese ist jedoch für mindestens ein Massenverhältnis negativ, und somit ohne physikalische Bedeutung. Die Grenzen der eingezeichneten Bereiche sind die Extremfälle, bei denen ein Massenverhältnis Null oder unendlich ist, oder sich zwei Planeten an derselben Position befinden. Die Unterteilung in stabile und instabile Gleichgewichtspunkte wird in Abschnitt 2.2.1 erläutert.



**Abbildung 2:** Bereiche, in denen stationäre Lösungen existieren

Da die analytische Umkehrung der Gleichungen (38), (39) und (40) auch mit der Einschränkung des Winkelbereichs nicht möglich ist, muss man zur Berechnung der für ein Gleichgewicht erforderlichen Differenzwinkel bei gegebenem Massenverhältnis auf numerische Methoden zurückgreifen. Zur numerischen Lösung des Gleichungssystems nach  $\theta_i$  kann beispielsweise die Funktion `NSolve` des Computeralgebrasystems *Wolfram Mathematica 8* verwendet werden. Mit dieser Methode erhält man alle stationären Punkte für die gegebenen Massenverhältnisse, die Berechnung ist jedoch sehr rechenintensiv.

Eine andere Möglichkeit, die Gleichgewichtspunkte zu bestimmen, ist die Betrachtung des Gravitationspotentials. Für drei Körper lautet die potentielle Energie als Funktion der Differenzwinkel  $\theta_1, \theta_2$  gemäß Gleichung (33):

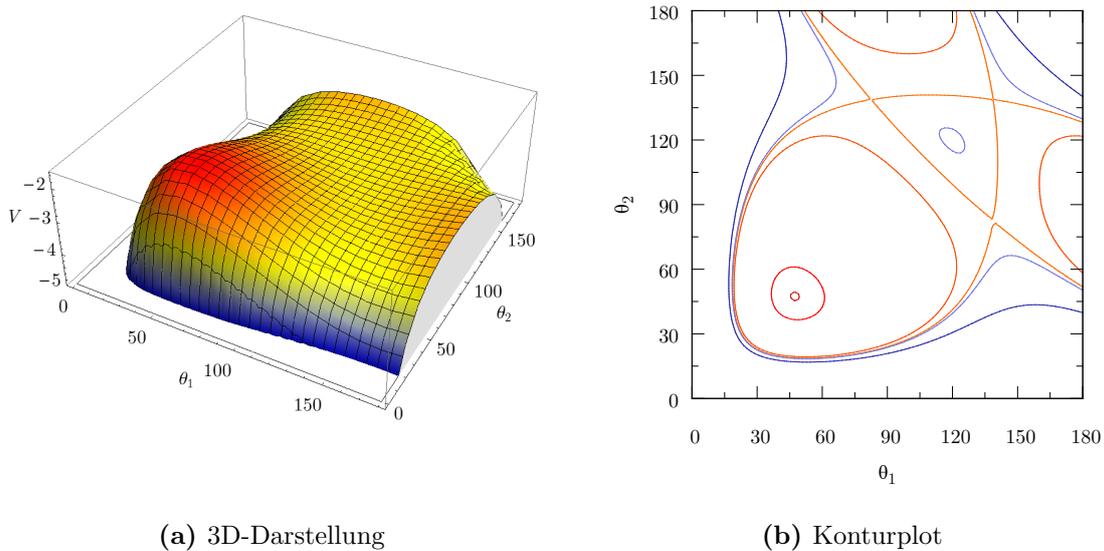
$$V = \mu_1\mu_2f(\theta_1) + \mu_1\mu_3f(\theta_1 + \theta_2) + \mu_2\mu_3f(\theta_2) \quad (41)$$

Hierbei wurde die Tatsache ausgenutzt, dass  $f$  eine gerade Funktion ist, das heißt  $f(\phi) = f(-\phi)$ . Die kritischen Punkte des Potentials entsprechen den Gleichgewichtspositionen, daher muss gelten:

$$\frac{dV}{d\theta_i} = 0 \quad (42)$$

Bildet man diese Ableitung, so erhält man die bereits hergeleiteten Gleichungen (38), (39) und (40).

Mit Hilfe des Potentials ist es jedoch auch möglich, die Gleichgewichtspunkte graphisch zu bestimmen. Dazu genügt es wieder, sich auf den in Abbildung 2 gezeigten Bereich zu beschränken. Als Beispiel ist in Abbildung 3 das Potential für drei gleiche Massen links als 3D-Plot, rechts als Konturplot dargestellt. Der angegebene Wert für  $V$  ist auf  $\mu_i = 1, n_0 = 1, r_0 = 1$  normiert.



**Abbildung 3:** Potential für  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

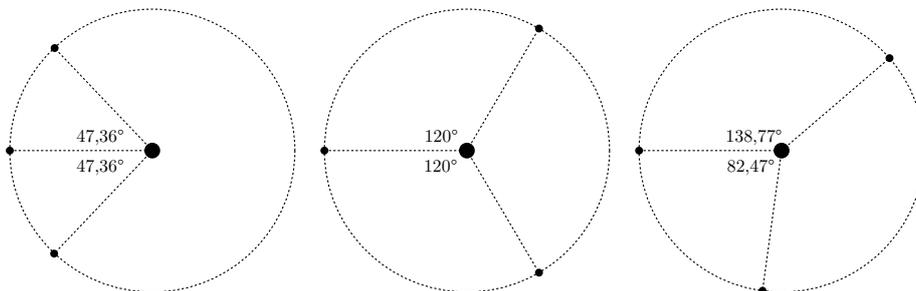
Klar erkennbar ist das Maximum bei  $\theta_1 = \theta_2 \approx 47^\circ$ , welches der stabilen Gleichgewichtskonfiguration entspricht. Im Konturplot sind vier weitere kritische Punkte zu erkennen, welche den instabilen Gleichgewichtskonfigurationen entsprechen. Einerseits das Minimum bei  $\theta_1 = \theta_2 = 120^\circ$ , andererseits der Sattelpunkt bei  $\theta_1 \approx 139^\circ$ ,  $\theta_2 \approx 82^\circ$  sowie dessen zwei Permutationen bei  $\theta_1 \approx 82^\circ$ ,  $\theta_2 \approx 139^\circ$  und  $\theta_1 \approx 139^\circ$ ,  $\theta_2 \approx 139^\circ$ . Die Berechnung der exakten Werte ist jedoch auch mit dieser Methode nur numerisch möglich.

Die numerische Suche nach den Extremwerten des Potentials, das heißt numerische Maximierung bzw. Minimierung von Gleichung (41) kann ebenfalls mit *Mathematica* durchgeführt werden. Für das Maximum und damit die stabile Gleichgewichtskonfiguration bieten sich dazu die Funktionen `FindMaximum` oder `NMaximize` an. Für die Suche nach dem Potentialminimum gibt es die Funktionen `FindMinimum` und `NMinimize`, wobei man hier den Suchbereich geeignet einschränken muss, da das Potential zum Rand hin stark abfällt und das Verfahren dadurch divergieren kann. Die Suche nach den Sattelpunkten ist mit dieser Methode nicht möglich.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sind in Tabelle 1 die numerischen Werte der Gleichgewichtspositionen für drei gleiche Planetenmassen, gerundet auf fünf Nachkommastellen, aufgelistet. Die grafische Veranschaulichung ist in Abbildung 4 zu sehen.

$\theta_1$	$\theta_2$	Stabilität
47,36086°	47,36086°	stabil
120°	120°	instabil
138,76548°	82,46904°	instabil

**Tabelle 1:** Gleichgewichtspunkte für  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$



**Abbildung 4:** Gleichgewichtspunkte für  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

### 2.2.1 Stabilität der Gleichgewichtspunkte

Wie bereits im vorigen Abschnitt vorweggenommen wurde, existieren sowohl stabile, als auch instabile Gleichgewichtskonfigurationen. Wird einer der Planeten durch eine Störung aus seiner stabilen Gleichgewichtsposition gebracht, gelangen alle drei Planeten im mitrotierenden Bezugssystem in stabile Umlaufbahnen um die Gleichgewichtspunkte. Im Gegensatz dazu führt jede Störung einer instabilen Gleichgewichtskonfiguration unweigerlich dazu, dass die Planeten von ihren Gleichgewichtspositionen wegdriften und das Verhalten des Systems in einen chaotischen Zustand übergeht. Mit der im Folgenden beschriebenen Methode nach Salo & Yoder (1988) bzw. Renner & Sicardy (2004), kann die Stabilität der Gleichgewichtskonfigurationen untersucht werden:

Für die Bestimmung der Stabilität der Gleichgewichtskonfigurationen wird eine kleine Störung in die stationäre Lösung eingebracht und eine Taylorentwicklung der Bewegungsgleichung (Gleichung 20) um den stationären Punkt  $\varphi_{i_0}$  bis zur ersten Ordnung durchgeführt.

$$\delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i_0} \quad (43)$$

Da die Gleichgewichtslösung verschwindet, bleibt von der entwickelten Bewegungsgleichung nur die erste Ordnung übrig:

$$-\frac{d^2}{dt^2}\delta\varphi_i = -3n_0^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N f''_{ij} \mu_j (\delta\varphi_i - \delta\varphi_j) \quad (44)$$

mit

$$f''_{ij} = f''(\varphi_{i_0} - \varphi_{j_0}) \quad (45)$$

und

$$f''(\phi) = -\cos(\phi) - \frac{3 + \cos\phi}{16 |\sin(\frac{\phi}{2})|^3} \quad (46)$$

Bezeichnet man mit  $\Delta\varphi$  den Vektor mit den Komponenten  $\delta\varphi_i$ , so kann mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{A}$  Gleichung (44) in Vektorschreibweise dargestellt werden, wobei hier wiederum  $n_0 = 1$  angenommen wurde.

$$\Delta\ddot{\varphi} + \mathbf{A}\Delta\varphi = 0 \quad (47)$$

$$\Delta\varphi = \begin{pmatrix} \delta\varphi_1 \\ \delta\varphi_2 \\ \delta\varphi_3 \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{A} = -3 \begin{pmatrix} \mu_2 f''_{12} + \mu_3 f''_{13} & -\mu_2 f''_{12} & -\mu_3 f''_{13} \\ -\mu_1 f''_{21} & \mu_1 f''_{21} + \mu_3 f''_{23} & -\mu_3 f''_{23} \\ -\mu_1 f''_{31} & -\mu_2 f''_{32} & \mu_1 f''_{31} + \mu_2 f''_{32} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Da  $f''$  symmetrisch ist, gilt  $f''_{ij} = f''_{ji}$ . Des Weiteren können, analog zu Abschnitt 2.2, statt der Positionswinkel  $\varphi_i$  auch die Differenzwinkel  $\theta_1, \theta_2$  in die Funktion  $f''(\phi)$  eingesetzt werden.

Sind alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  positiv, so liegt eine stabile Lösung vor, die Wurzeln der Eigenwerte sind dann die Eigenfrequenzen der möglichen Normalschwingungen. Wenn ein oder mehrere Eigenwerte negativ sind, ist die Lösung instabil. Führt man die Berechnung für alle im vorigen Abschnitt gefundenen Gleichgewichtspunkte durch, so erhält man das bereits in Abbildung 2 vorweggenommene Ergebnis. Bei den stabilen Gleichgewichtskonfigurationen befinden sich alle drei Planeten auf derselben Seite der Umlaufbahn, mit Differenzwinkeln kleiner als  $60^\circ$ , während die Planeten bei den instabilen Gleichgewichtskonfigurationen mehr oder weniger gleichmäßig über die gesamte Umlaufbahn verteilt sind. Für den hier betrachteten Fall von drei Planeten existieren für die stabile Konfiguration zwei positive Eigenwerte und damit zwei mögliche Schwingungsmoden. Der dritte Eigenwert entspricht der Rotation des Systems als Ganzes und ist immer Null.

## 2.3 Planetenbahnen

Da die vereinfachten Bewegungsgleichungen nicht analytisch lösbar sind, kann die exakte Bewegung der Planeten nur durch numerische Integration bestimmt werden. Die vorangegangenen Überlegungen bieten jedoch die Möglichkeit, qualitative Aussagen über das Verhalten des Systems zu treffen. Einerseits geht aus der Eigenwertanalyse hervor, dass eine stabile Oszillation um die Gleichgewichtspunkte auftritt, andererseits wird diese Oszillation durch die Beschaffenheit des Gravitationspotentials eingeschränkt.

### 2.3.1 Normalschwingungen

Die Eigenwertanalyse im vorigen Abschnitt hat ergeben, dass für die stabile Konfiguration zwei mögliche Normalschwingungen existieren, welche nach Salo & Yoder (1988) eine einfache geometrische Bedeutung haben. Die zum kleineren Eigenwert zugehörige Normalschwingung entspricht einer symmetrischen Oszillation der beiden äußeren Planeten um den mittleren Planeten, welcher selbst stationär bleibt:

$$\mu_2 \dot{\varphi}_2 - \mu_1 \dot{\varphi}_1 = \mu_3 \dot{\varphi}_3 - \mu_2 \dot{\varphi}_2 \quad (50)$$

Gemäß Gleichung (24) ist dies gleichbedeutend mit:

$$\mu_2 \xi_2 - \mu_1 \xi_1 = \mu_3 \xi_3 - \mu_2 \xi_2 \quad (51)$$

Mit Hilfe von Gleichung (30) ergibt sich:

$$\mu_1 \xi_1 = -\mu_3 \xi_3 \quad (52)$$

$$\mu_2 \xi_2 = 0 \quad (53)$$

Die zweite Normalschwingung entspricht einer antisymmetrischen Oszillation:

$$\mu_2 \dot{\varphi}_2 - \mu_1 \dot{\varphi}_1 = \mu_2 \dot{\varphi}_2 - \mu_3 \dot{\varphi}_3 \quad (54)$$

bzw.:

$$\mu_2 \xi_2 - \mu_1 \xi_1 = \mu_2 \xi_2 - \mu_3 \xi_3 \quad (55)$$

woraus sich

$$\mu_1 \xi_1 = \mu_3 \xi_3 \quad (56)$$

$$\mu_2 \xi_2 = -2\mu_1 \xi_1 \quad (57)$$

ergibt.

Zur Untersuchung des Verhaltens des Systems bei Anregung einer der beiden Schwingungsmoden können zwei neue Variable eingeführt werden:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi_1) \quad (58)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = \varphi_2 - \frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_1) \quad (59)$$

Dabei entspricht  $\alpha$  dem mittleren Abstand zwischen den Planeten, während  $\beta$  die Abweichung des mittleren Planeten von der äquidistanten Position angibt. Bei einer rein symmetrischen Oszillation ist  $\beta = 0$ , bei einer rein antisymmetrischen Oszillation ist  $\alpha$  konstant. Gleichung (20) kann mit Hilfe von  $\alpha$  und  $\beta$  folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\ddot{\alpha} = \frac{3n_0^2}{2} \left( (\mu_1 + \mu_3) f'(2\alpha) + \mu_2 (f'(\alpha - \beta) + f'(\alpha + \beta)) \right) \quad (60)$$

$$\ddot{\beta} = 3n_0^2 \left( (\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2) f'(\alpha + \beta) - (\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_2) f'(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_3) f'(2\alpha) \right) \quad (61)$$

Daran erkennt man, dass im allgemeinen Fall verschiedener Planetenmassen, unabhängig von den Anfangsbedingungen, immer beide Schwingungsmoden angeregt werden, die tatsächliche Oszillation um den Gleichgewichtspunkt also eine Überlagerung der beiden Normalschwingungen ist. Ist allerdings  $\mu_1 = \mu_3$  und  $\beta = 0$ , so fällt die rechte Seite von Gleichung (61), unabhängig von  $\alpha$  weg. Das heißt, bei einer rein symmetrischen Anfangsstörung bleibt die Oszillation stets symmetrisch. Im Gegensatz dazu ist  $\ddot{\alpha} \neq 0$  für  $\beta \neq 0$ . Bei einer rein antisymmetrischen Anfangsstörung wird also immer die symmetrische Schwingungsmode mitangeregt, eine stabile rein antisymmetrische Oszillation ist auch bei drei gleichen Planetenmassen nicht möglich.

### 2.3.1.1 Schwingungsperioden

Die Perioden der beiden Schwingungsmoden können mit Hilfe der Eigenwerte  $\lambda$  der Matrix  $\mathbf{A}$  berechnet werden und sind in Einheiten der Umlaufperiode durch

$$P = \lambda^{-1/2} \quad (62)$$

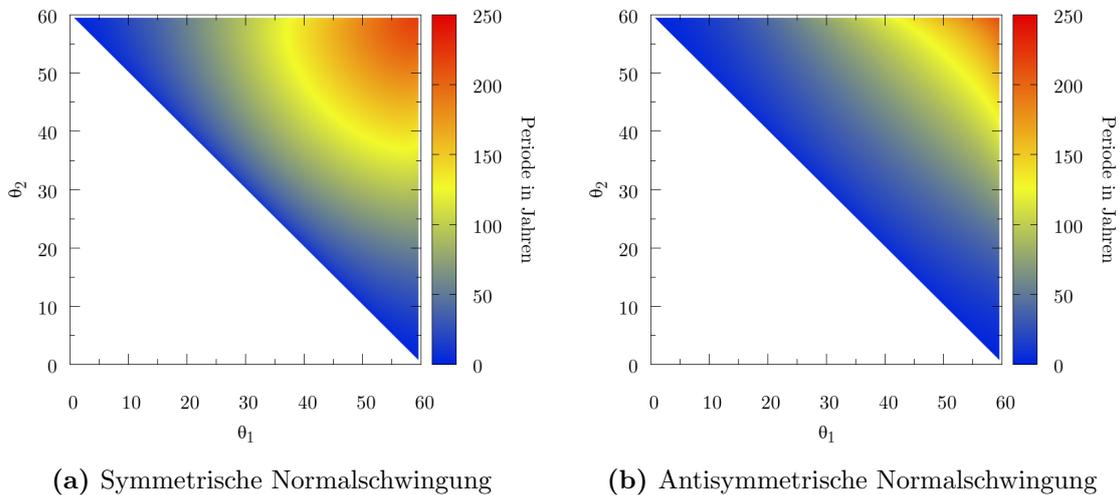
gegeben. Da die Eigenwerte für eine gegebene Konfiguration, das heißt ein konstantes Verhältnis der  $\mu_i$  zueinander, direkt proportional zu  $\mu_i$  sind, ist die Schwingungsperiode indirekt proportional zur Wurzel aus der Planetenmasse. Durch Einsetzen

von  $\mu_i$  in die Matrix  $\mathbf{A}$  können die Eigenwerte auf eine beliebige Planetenmasse normiert werden. Setzt man beispielsweise  $\mu_i = 1$ , erhält man als Eigenwerte  $\lambda_1 \approx 38,0240$  und  $\lambda_2 \approx 14,9292$ . Die Schwingungsperioden der beiden Normalschwingungen erhält man dann durch Multiplikation mit dem Massenverhältnis der Planeten zum Primärkörper:

$$P = (\lambda\mu_i)^{-1/2} \quad (63)$$

Für drei Planeten mit je einer Erdmasse und einer Umlaufperiode von einem Jahr ergibt sich beispielsweise eine Periode von 149,36 Jahren für die symmetrische und 93,59 Jahren für die antisymmetrische Normalschwingung, während bei drei Planeten mit je zehn Erdmassen die Perioden 47,23 und 29,60 Jahre sind.

In Abbildung 5 sind die Perioden der Normalschwingungen für alle möglichen stabilen Konfigurationen dargestellt, normiert auf eine Umlaufperiode von einem Jahr und eine Masse des mittleren Planeten von einer Erdmasse.

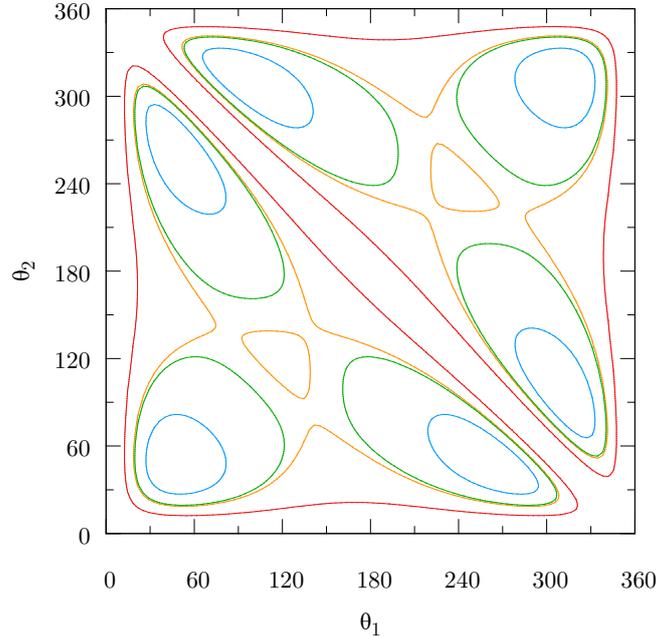


**Abbildung 5:** Perioden der Normalschwingungen, normiert auf  $m_2 = 1m_\oplus$

### 2.3.2 Beschränktheit der Bewegung

Wie bereits erwähnt, erlaubt Gleichung (33) die Angabe der möglichen Orte, an denen sich die Planeten befinden können. Aus Gleichung (33) und der damit verbundenen Definition von  $T$  folgt, dass  $T \leq 0$  für alle  $\xi_i$  und damit zu jedem Zeitpunkt gilt. Da die Gesamtenergie konstant ist, das heißt  $E = E(t = 0)$  und  $V = E - T$ , muss daher zu jedem Zeitpunkt  $V \geq E$  erfüllt sein. Ein gegebener Wert von  $E$  für  $T = 0$  stellt also die Grenze der Bewegung als Funktion von  $\theta_1$  und  $\theta_2$  dar, vergleichbar mit den Nullgeschwindigkeitskurven des eingeschränkten Dreikörperproblems.

Zur Veranschaulichung dessen sind in Abbildung 6 noch einmal einige Isolinien des Gravitationspotentials für drei gleiche Massen, diesmal jedoch über den gesamten Winkelbereich geplottet.



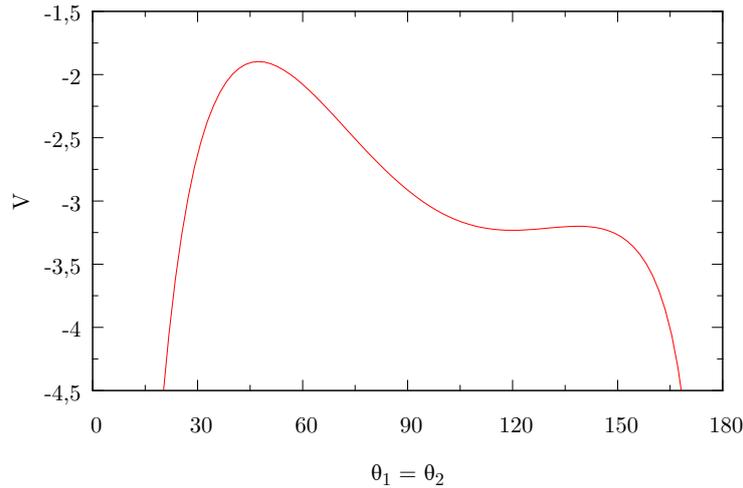
**Abbildung 6:** Potential für  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ , die eingezeichneten Konturlinien entsprechen folgenden Störungsenergien  $E/V_I$ : 1,25 (blau), 1,63 (grün), 1,69 (orange), 2,5 (rot)

Ist die Störung, das heißt die ursprüngliche Abweichung von der Gleichgewichtskonfiguration gering, so sind die möglichen  $\theta_i$ -Werte auf sechs voneinander getrennte Bereiche beschränkt (blaue Konturlinie). Es kommt also stets zu einer stabilen Oszillation um die Gleichgewichtspunkte. Die sechs Bereiche entsprechen dabei allen möglichen Permutationen der Planeten. Mit zunehmender Stärke der Störung werden die Bereiche größer (grüne Konturlinie), bis schließlich beim Überschreiten eines kritischen Wertes die Potentialbarriere verschwindet (orange Konturlinie), wodurch sich die Planeten weit von ihren ursprünglichen Positionen im mitrotierenden Koordinatensystem entfernen können. Es ist zu erwarten, dass hier keine stabile Oszillation mehr möglich ist. Dennoch gibt es noch ausgeschlossene Bereiche. Bei einer noch größeren Energie der Störung (rote Konturlinie) werden die  $\theta_i$ -Werte nur noch durch den Abfall des Potentials an den Rändern beschränkt, dessen anschauliche Bedeutung darin liegt, dass sich die Planeten nicht gegenseitig überholen können.

Die Stärke der Störung wird nach Salo & Yoder (1988) mit  $E/V_I = 1 + T/V_I$  angegeben, wobei  $V_I$  die potentielle Energie der stabilen Konfiguration, das heißt das Potentialmaximum, und  $T$  die mit der Störung assoziierte kinetische Energie ist. Der Bereich, in dem im Rahmen der vereinfachten Gleichungen eine stabile Oszillation um die Gleichgewichtspunkte garantiert ist, im Folgenden als stabiler Bereich bezeichnet, wird durch die Isolinie jener Gesamtenergie begrenzt, die einem Sattelpunkt des Potentials, das heißt einer instabilen Gleichgewichtskonfiguration entspricht, da bei höherer Energie der Sattelpunkt überschritten werden kann. Bei drei gleichen Planetenmassen liegt dieser Übergang bei  $E/V_I \approx 1,6868$ .

### 2.3.2.1 Symmetrische Oszillation

Wie bereits erwähnt, ist die Konturlinie  $V = E$  mit  $T = 0$  die Grenze der Bewegung. Da alle Terme, die in  $T$  in der Summe vorkommen, ein positives Vorzeichen haben, kann  $T$  nur dann Null sein, wenn alle  $\xi_i$  Null sind. Das heißt, alle  $(\theta_1, \theta_2)$ -Paare auf der Konturlinie entsprechen rein azimuthalen Anfangsauslenkungen mit  $\xi_i(0) = 0$ . Die Gesamtenergie ist dann durch  $V(t = 0)$  gegeben und erlaubt bei einer rein sym-



**Abbildung 7:** Schnitt durch die Diagonale des Potentials für drei gleiche Planetenmassen, normiert auf  $\mu_i = 1$

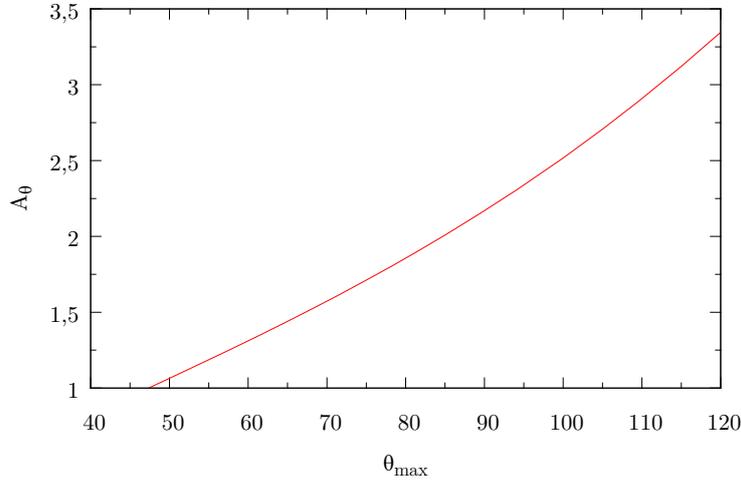
metrischen Oszillation auf einfache Weise die Angabe des minimalen und maximalen Wertes von  $\theta_1 = \theta_2$ , wie aus Abbildung 7 ersichtlich wird. Diese zeigt die Diagonale des in Abbildung 6 dargestellten Potentials und entspricht den symmetrischen Differenzwinkeln  $\theta_1 = \theta_2 := \theta$  bei drei gleichen Planetenmassen  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 := \mu$ . Die Funktionsgleichung von  $V$  mit diesen Einschränkungen lautet:

$$V(\theta) = \mu^2(2f(\theta) + f(2\theta)) \quad (64)$$

Jene zwei Werte für  $\theta$ , bei denen  $V$  jeweils denselben Wert annimmt, entsprechen den minimalen und maximalen  $\theta$ -Werten für eine bestimmte Störungsenergie. Wie aus der Grafik deutlich wird, ist der Abfall des Potentials auf der linken Seite stärker als auf der rechten, das heißt eine azimuthale Auslenkung aus der Gleichgewichtslage in Richtung des mittleren Planeten stellt bei gleichem Auslenkungswinkel eine stärkere Störung dar als eine Auslenkung vom mittleren Planeten weg. Die Oszillation ist also asymmetrisch um den Gleichgewichtspunkt, wobei die Asymmetrie mit zunehmender Amplitude größer wird. Als Maß für diese Asymmetrie kann der Asymmetrie-Parameter  $A_\theta$  verwendet werden, welcher bereits von Thüring (1931) für die Angabe der Asymmetrie der Trojaner-Bahnen herangezogen wurde:

$$A_\theta = \frac{\theta_{\max} - \theta_0}{\theta_0 - \theta_{\min}} \quad (65)$$

In Abbildung 8 ist  $A_\theta$  in Abhängigkeit von  $\theta_{\max}$  aufgetragen. Die dazu benötigten Werte für  $\theta_{\min}$  und  $\theta_{\max}$  wurden durch numerische Lösung von Gleichung 64 nach  $\theta$  berechnet.



**Abbildung 8:** Asymmetrie der Orbits im rotierenden Koordinatensystem

### 2.3.2.2 Maximalgeschwindigkeitskurven

Eine weitere Einschränkung der Planetenbewegung ergibt sich durch die sogenannten Maximalgeschwindigkeitskurven nach Salo & Yoder (1988), welche die Grenzen der möglichen Trajektorien im Phasenraum  $(\theta_i, \dot{\theta}_i)$  festlegen.

Dabei wird unter Verwendung der Gleichungen (31) und (66) nach dem maximalen  $\dot{\theta}_k$  gesucht, wobei sich Gleichung (66) aus den Gleichungen (33) und (24) ergibt:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \dot{\varphi}_i^2 = -6T \quad (66)$$

Zur praktischen Durchführung dessen wird mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren  $l_1$  und  $l_2$  der Extremwert von

$$g = (\dot{\varphi}_{k+1} - \dot{\varphi}_k)^2 + l_1 \sum_{i=1}^N \mu_i \dot{\varphi}_i + l_2 \left( \sum_{i=1}^N \mu_i \dot{\varphi}_i^2 + 6T \right) \quad (67)$$

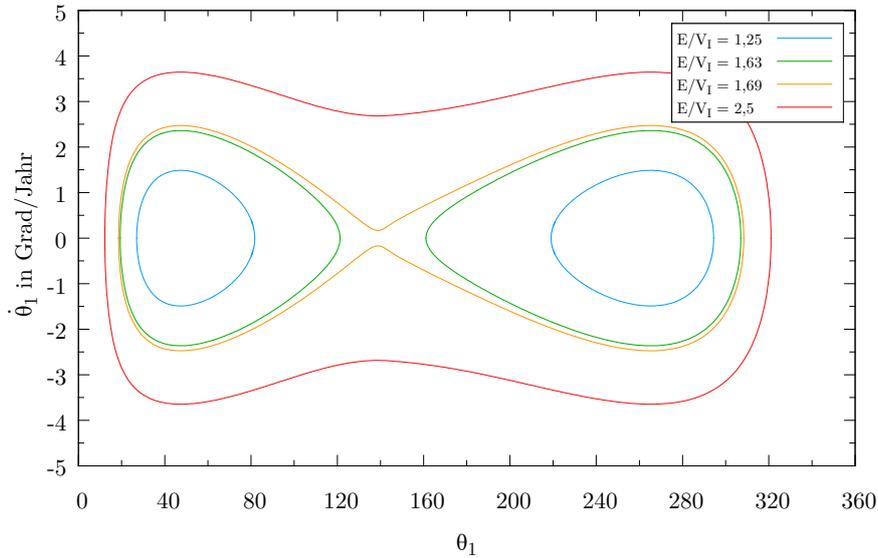
bestimmt, indem die partiellen Ableitungen  $\partial g / \partial \dot{\varphi}_k = 0$  gesetzt werden und anschließend diese  $N$  Gleichungen zusammen mit den Bedingungen (31) und (66) für die  $N + 2$  Unbekannten  $\dot{\varphi}_k$ ,  $l_1$  und  $l_2$  gelöst werden. Das Maximum von  $\dot{\theta}_k^2$  für eine gegebene kinetische Energie erhält man, wenn  $\dot{\varphi}_{k+1} = -\dot{\varphi}_k \mu_k / \mu_{k+1}$ , während die anderen  $\dot{\varphi}_i = 0$  sind:

$$\dot{\theta}_k^2 = -6T \left( \frac{\mu_k + \mu_{k+1}}{\mu_k \mu_{k+1}} \right) \quad (68)$$

Um nun den maximal möglichen Wert von  $\dot{\theta}_k^2$  für das dazugehörige  $\theta_k$  zu bestimmen, muss der größte negative Wert von  $T$  gefunden werden. Dies ist nur möglich, indem numerisch nach dem Maximum von  $V$  bei konstantem  $\theta_k$  gesucht wird, da gilt:  $T_{\max}(\theta_k) = E - V_{\max}(\theta_k)$ . Die konstante Gesamtenergie  $E$  wird hierbei mittels Gleichung (33) aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Somit ergibt sich:

$$\max(\dot{\theta}_k^2) = \frac{6(\mu_k + \mu_{k+1})}{\mu_k \mu_{k+1}} (V_{\max}(\theta_k) - E) \quad (69)$$

Um eine vollständige Maximalgeschwindigkeitskurve zu erhalten, wird  $\max(\dot{\theta}_k^2)$  für möglichst viele  $\theta_k$  berechnet. Im allgemeinen Fall ergibt sich für jeden Differenzwinkel eine eigene Kurve, im Spezialfall  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  fallen jedoch alle Maximalgeschwindigkeitskurven zusammen. In Abbildung 9 sind als Beispiel die Maximalgeschwindigkeitskurven von  $\theta_1$  bei drei Planeten mit je einer Erdmasse und den in Abbildung 6 eingezeichneten Störungsenergien dargestellt.

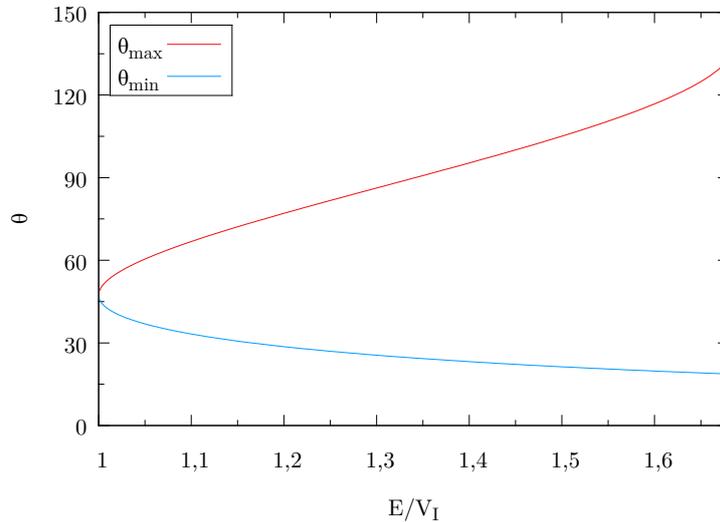


**Abbildung 9:** Maximalgeschwindigkeitskurven für  $m_1 = m_2 = m_3 = 1m_{\oplus}$

Wie aus Abbildung 9 ersichtlich wird, kann mit Hilfe der Maximalgeschwindigkeitskurven der minimal und maximal mögliche Abstand der Planeten voneinander berechnet werden. Dies sind jene beiden  $\theta_k$ -Werte, bei denen  $\max(\dot{\theta}_k^2) = 0$  ist. Die konkrete Berechnung ist jedoch numerisch aufwendig, da die Maximalgeschwindigkeitskurve aus diskreten Werten besteht, welche, wie beschrieben, mit einem numerischen Verfahren ermittelt werden müssen. Ein einfaches Bisektionsverfahren, mit welchem die minimalen und maximalen  $\theta_k$ -Werte direkt aus Gleichung (41) bestimmt werden können, erwies sich für diesen Zweck als deutlich effizienter. Um  $\theta_{i_{\min}}$  zu finden, wird, beginnend bei  $\theta_i = 0$ , ein konstanter  $\theta_i$ -Wert in Gleichung (41) eingesetzt und in diskreten  $\theta_j$ -Schritten überprüft, ob  $V$  den gewählten Wert (entsprechend der Gesamtenergie  $E$ ) überschreitet. Ist dies nicht der Fall, wird  $\theta_i$  um einen konstanten

Wert erhöht, und das Verfahren wiederholt. Wird ein  $V(\theta_i, \theta_j)$ , das größer als  $E$  ist gefunden, wird die  $\theta_i$ -Schrittweite halbiert und ein Schritt zurück gemacht. Anschließend wird erneut überprüft, ob  $V > E$ . Ist dies der Fall, wird die  $\theta_i$ -Schrittweite wieder halbiert und ein weiterer Schritt zurück gemacht. Ist dies nicht der Fall, wird die  $\theta_i$ -Schrittweite ebenfalls halbiert, aber ein Schritt nach vor gemacht. Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Um die Genauigkeit zu erhöhen, kann nach einigen Schritten die  $\theta_j$ -Schrittweite ebenfalls verkleinert werden. Die Bestimmung von  $\theta_{i_{\max}}$  erfolgt auf dieselbe Weise, mit dem einzigen Unterschied, dass die Berechnung in die umgekehrte Richtung erfolgt.

Abbildung 10 zeigt die Abhängigkeit des minimalen und maximalen Differenzwinkels von der Störungsenergie für drei gleiche Planetenmassen im Bereich der stabilen Oszillation. Bei einer Störungsenergie von  $E/V_I \approx 1,6868$  springt  $\theta_{\max}$  auf etwa  $308^\circ$ , während  $\theta_{\min}$  bei größeren Störungsenergien indirekt proportional zu  $E/V_I$  abfällt. Vergleiche dazu auch Abbildung 6.



**Abbildung 10:**  $\theta_{\min}$  und  $\theta_{\max}$  für drei gleiche Planetenmassen

Da im späteren Verlauf der Arbeit unter anderem die maximal mögliche Abweichung von der Gleichgewichtsdistanz als Stabilitätsindikator verwendet wird, ist diese in Abbildung 11 auf den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Bereich beschränkt dargestellt und wie folgt definiert:

$$\Delta\theta_{i_{\max}} = \theta_{i_{\max}} - \theta_{i_0} \quad (70)$$

$$\Delta\theta_{\max} = \max(\Delta\theta_{i_{\max}}) \quad (71)$$

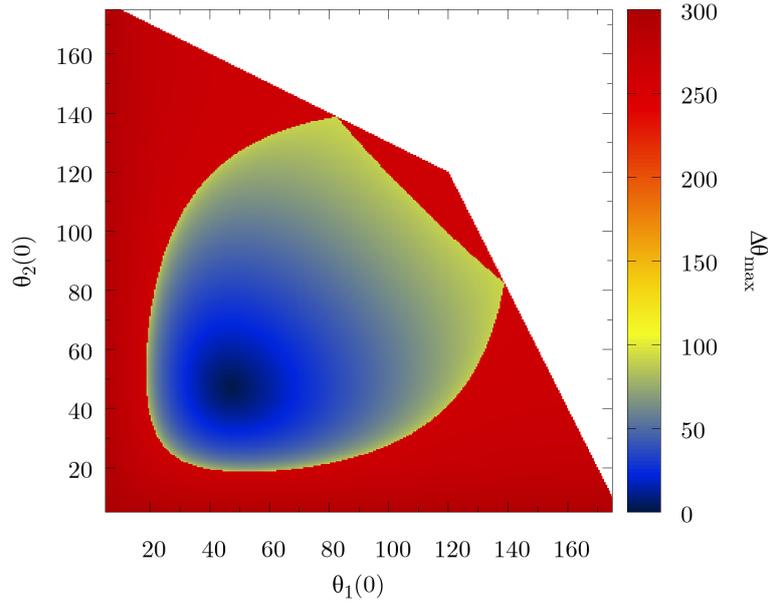


Abbildung 11:  $\Delta\theta_{\max}$  in Abhängigkeit von  $\theta_1(0)$  und  $\theta_2(0)$  gemäß Gleichung (41)

### 2.3.2.3 Radiale Auslenkung bei symmetrischer Oszillation

Unter der Annahme einer rein symmetrischen Oszillation und drei gleichen Planetenmassen ist es möglich, die radiale Auslenkung in Abhängigkeit vom Differenzwinkel und damit auch eine vollständige Bahnkurve im mitrotierenden Koordinatensystem anzugeben. Für die folgende Herleitung gilt daher:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 := \mu$ ,  $\theta_1 = \theta_2 := \theta$  sowie  $\xi_1 = -\xi_3 := \pm\xi$  und  $\xi_2 = 0$ . Mit diesen Einschränkungen vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (Gleichungen (24) und (25)) zu:

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{3}{2}\xi \quad (72)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm 2\mu \left( f'(\theta) + f'(2\theta) \right) \quad (73)$$

Formt man Gleichung (72) nach  $dt$  um, und setzt dies in Gleichung (73) ein, so erhält man:

$$\xi d\xi = \frac{4}{3}\mu \left( f'(\theta) + f'(2\theta) \right) d\theta \quad (74)$$

Diese Gleichung kann integriert werden und liefert  $\xi$  als Funktion des Differenzwinkels  $\theta$ :

$$\xi(\theta) = \pm \sqrt{\frac{4}{3}\mu \left( 2f(\theta) + f(2\theta) \right) + c} \quad (75)$$

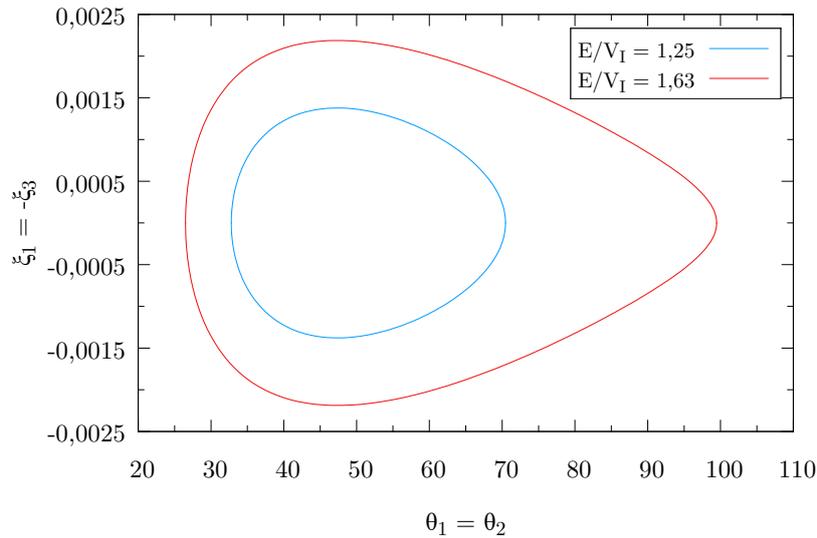
Die Integrationskonstante  $c$  ergibt sich durch das Einsetzen der Anfangsbedingung  $\xi(\theta_a) = 0$  mit  $\theta_a := \theta(0)$  in Gleichung (75). Daraus folgt:

$$\xi(\theta) = \pm \sqrt{\frac{4}{3}\mu h(\theta)} \quad (76)$$

mit

$$h(\theta) = \sqrt{2f(\theta) + f(2\theta) - (2f(\theta_a) + f(2\theta_a))} \quad (77)$$

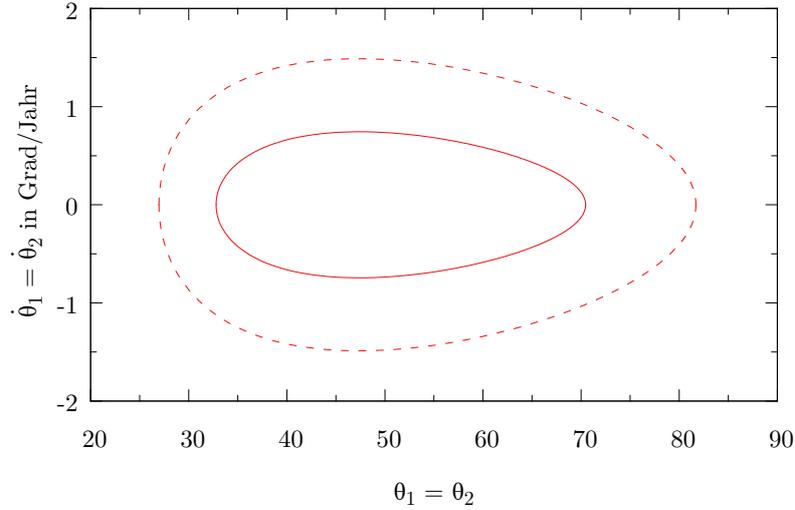
In Abbildung 12 ist Gleichung (76) für zwei verschiedene Störungsenergien dargestellt.



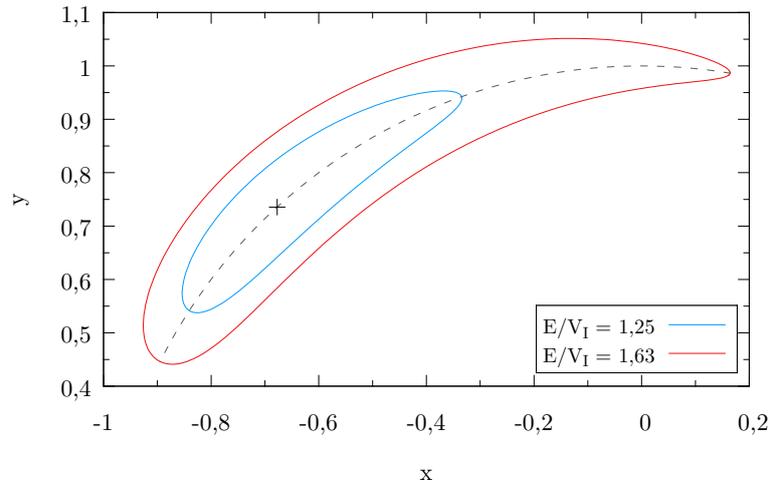
**Abbildung 12:**  $\xi_1 = -\xi_3$  als Funktion von  $\theta_1 = \theta_2$ ,  $m_i = 1m_\oplus$

Die Ähnlichkeit zu den Maximalgeschwindigkeitskurven ist kein Zufall, da  $\dot{\theta}$  und  $\xi$  über Gleichung (72) miteinander verbunden sind. Rechnet man  $\xi$  in  $\dot{\theta}$  um, so zeigt sich, dass die Bewegung bei symmetrischer Oszillation auf einen kleineren Bereich als den durch die Maximalgeschwindigkeitskurve derselben Störungsenergie festgelegten beschränkt ist (siehe Abbildung 13).

Unter Verwendung des Referenzradius  $r_0 = 1$  kann mit Hilfe der Koordinatentransformation  $x = r \cos(\phi)$ ,  $y = r \sin(\phi)$  Gleichung (76) in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden. Da bei einer rein symmetrischen Oszillation  $\varphi_2$  konstant ist, beschreibt  $\xi(\theta)$  damit die Bahnkurven der beiden äußeren Planeten im rotierenden Koordinatensystem. Dies ist in Abbildung 14 am Beispiel von  $\theta_1$  zu sehen, wobei  $\varphi_2 = 180^\circ$  gesetzt wurde. Die strichlierte Linie ist der mittlere Radius  $r_0$ , das Kreuz markiert den Gleichgewichtspunkt. Zur besseren Veranschaulichung ist die radiale Abweichung um den Faktor 50 überzeichnet. Deutlich erkennbar ist die in Abschnitt 2.3.2.1 besprochene zunehmende Asymmetrie der Oszillation um den Gleichgewichtspunkt mit zunehmender Störungsenergie.



**Abbildung 13:**  $\dot{\theta}$  als Funktion von  $\theta$  bei symmetrischer Oszillation und  $m_i = 1m_{\oplus}$  bei einer Störungsenergie von  $E/V_I = 1.25$ . Die strichlierte Linie stellt die Maximalgeschwindigkeitskurve für diese Störungsenergie dar.



**Abbildung 14:** Bewegung von  $m_1$  in der  $xy$ -Ebene. Die strichlierte Linie ist der mittlere Radius  $r_0$ , das Kreuz markiert den Gleichgewichtspunkt. Die radiale Abweichung ist um den Faktor 50 überzeichnet.

Betrachtet man noch einmal Abbildung 12, so erkennt man, dass die maximale radiale Auslenkung beim Überschreiten des Gleichgewichtspunkts erreicht wird. Setzt man daher in Gleichung (76)  $\theta = \theta_0$ , so erhält man die maximale radiale Auslenkung für ein gegebenes  $\mu$  und  $\theta_a$ .

$$|\xi_{\max}| = \sqrt{\frac{4}{3}\mu h(\theta_a)} \quad (78)$$

mit

$$h(\theta_a) = \sqrt{2f(\theta_0) + f(2\theta_0) - (2f(\theta_a) + f(2\theta_a))} \quad (79)$$

In Abbildung 15 ist Gleichung (78) für  $E/V_I \leq 1,6868$  grafisch dargestellt.

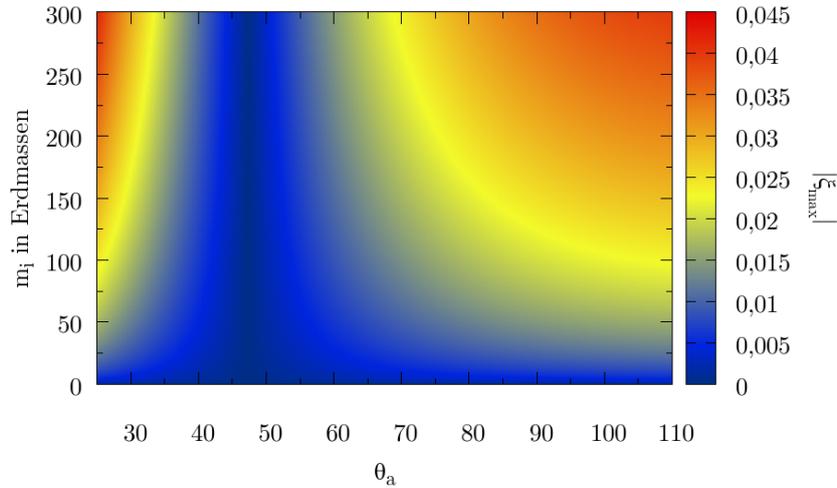


Abbildung 15:  $|\xi_{\max}|$  als Funktion von  $m_i$  und  $\theta_a$

Da die analytische Umkehrung dieser Funktion nicht möglich ist, kann keine Funktion zur Berechnung der maximalen azimuthalen Auslenkung für eine radiale Anfangsstörung angegeben werden, die Umkehrfunktion kann jedoch numerisch berechnet werden.

### 2.3.3 Schwingungsperioden bei größeren Amplituden

Die in Abschnitt 2.3.1.1 berechneten Perioden der Normalschwingungen sind nur in unmittelbarer Umgebung der Gleichgewichtspunkte gültig. Für drei Planeten mit gleicher Masse und einer rein symmetrischen Oszillation ist es jedoch möglich, die Schwingungsperiode in Abhängigkeit von der Amplitude zu bestimmen.

Da  $\xi$  gemäß Gleichung (72) direkt proportional zu  $d\theta/dt$  ist, lässt sich Gleichung (76) auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{3\mu} h(\theta) \quad (80)$$

und gibt somit die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}$  als Funktion des Differenzwinkels  $\theta$  an. Gleichung (80) kann nach  $dt$  umgeformt und integriert werden:

$$t - t_0 = \int \frac{1}{\sqrt{3\mu} h(\theta)} d\theta \quad (81)$$

Da  $\dot{\theta}(\theta)$  symmetrisch zur  $\dot{\theta} = 0$ -Achse ist, ergibt sich eine komplette Schwingungsperiode durch:

$$P = \frac{2}{\sqrt{3\mu}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{1}{h(\theta)} d\theta \quad (82)$$

Zur Normierung auf eine Umlaufperiode wird  $P$  durch  $2\pi$  dividiert und man erhält:

$$P = \frac{1}{\sqrt{3\mu}\pi} I \quad (83)$$

mit

$$I = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{1}{h(\theta)} d\theta \quad (84)$$

Da das Integral  $I$  nicht analytisch lösbar ist, muss die Integration numerisch durchgeführt werden. Zu derer praktischen Durchführung müssen zunächst, wie in Abschnitt 2.3.2.1,  $\theta_{\min}$  und  $\theta_{\max}$  durch numerische Lösung von Gleichung (64) berechnet werden. Anschließend wird das Integral mit Hilfe der Funktion `NIntegrate` von *Mathematica* numerisch berechnet, wobei für  $\theta_a$  entweder  $\theta_{\min}$  oder  $\theta_{\max}$  eingesetzt wird. Erstellt man eine Tabelle für  $I$  in Abhängigkeit von  $\theta_a$  kann damit mittels Division durch  $\sqrt{3\mu}\pi$  die Periode  $P$  der symmetrischen Oszillation in Einheiten der Umlaufperiode für jedes beliebige Massenverhältnis  $\mu$  berechnet werden. Der grafische Verlauf von  $I(\theta_a)$  im stabilen Bereich ist in Abbildung 16 dargestellt.

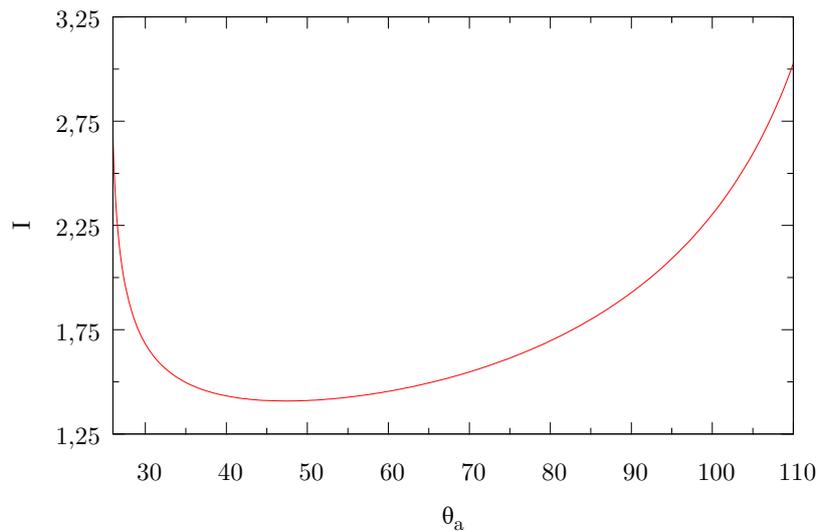
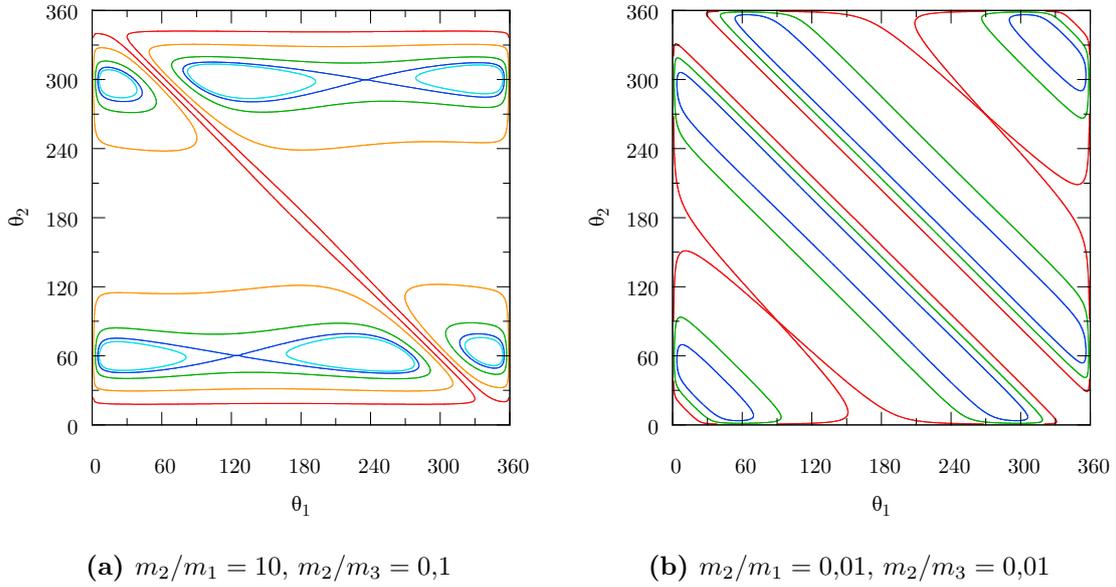


Abbildung 16:  $I$  als Funktion von  $\theta_a$

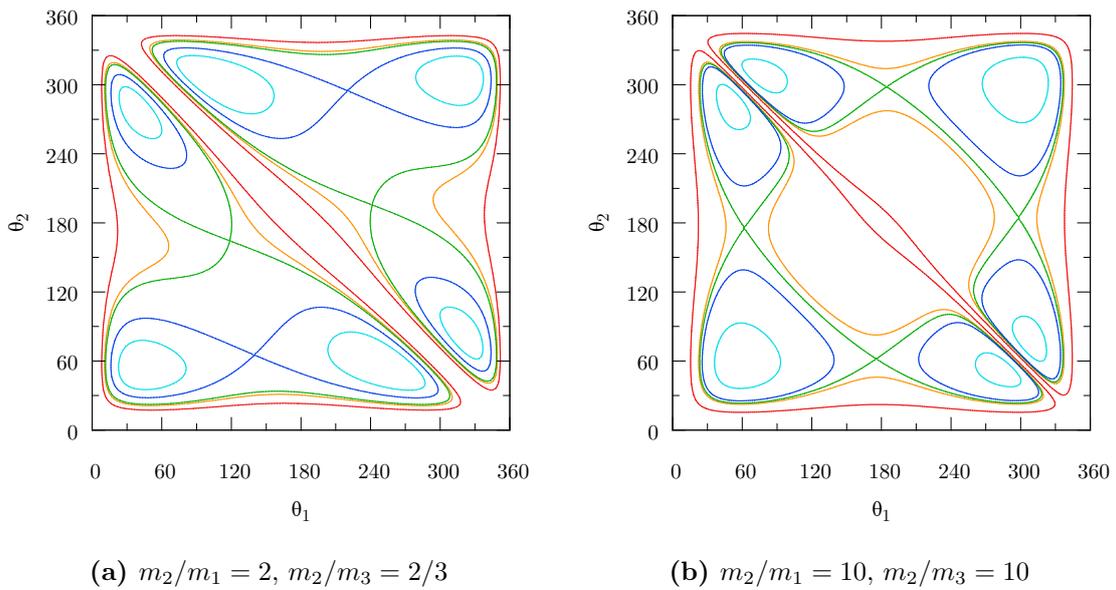
### 2.3.4 Größe des stabilen Bereichs

Wie bereits erwähnt wurde, werden als stabiler Bereich jene Anfangsbedingungen bezeichnet, bei denen im vereinfachten System eine stabile Libration um die Gleichgewichtspunkte garantiert ist, das heißt, die Sattelpunkte des Potentials nicht überschritten werden können. Die Form und Größe dieses Bereichs hängt von der Beschaffenheit des Potentials, also dem Verhältnis der Planetenmassen zueinander ab. Vier Beispiele dafür sind in den Abbildungen 17 und 18 gegeben.



**Abbildung 17:** Potential für drei Planeten mit sehr unterschiedlichen Massenverhältnissen

Abbildung 17a und 17b machen die eingeschränkte Gültigkeit der vereinfachten Bewegungsgleichungen deutlich. In diesen Fällen mit sehr unterschiedlichen Planetenmassen kann  $\theta_{\min}$  bereits im stabilen Bereich so klein werden, dass sich die Hill-Sphären der Planeten überschneiden. Dies führt im Rahmen der exakten Gleichungen im Allgemeinen zu einem Kollaps der koorbitalen Konfiguration. Die Größe des stabilen Bereichs hat daher für diese Konfigurationen keine Aussagekraft.



**Abbildung 18:** Potential für drei Planeten mit unterschiedlichen Massenverhältnissen

Für alle anderen Konfigurationen wie sie zum Beispiel in Abbildung 18a und 18b zu sehen sind, ist jedoch zu erwarten, dass der stabile Bereich des vereinfachten Potentials mit dem tatsächlichen stabilen Bereich gut übereinstimmt, solange die Planetenmassen nicht zu groß sind. Deswegen wurde im Folgenden die Größe des stabilen Bereichs für einige ausgewählte Konfigurationen numerisch bestimmt, indem die Fläche innerhalb der Konturlinie, welche der kritischen Störungsenergie entspricht, berechnet wurde. Dazu wurde ein Gitter aus  $(\theta_1, \theta_2)$ -Werten gebildet, welche in Gleichung (41) eingesetzt wurden. Für jeden Gitterpunkt wurde überprüft, ob der Wert von  $V$  über oder unter dem durch die Gesamtenergie festgelegten Schwellwert liegt. Danach wurde die Anzahl der Punkte über dem Schwellwert durch die Gesamt-Gitterpunktzahl dividiert und mit der tatsächlichen Fläche multipliziert, woraus sich die Größe des stabilen Bereichs in Quadratgrad ergab.

Für die Konfiguration mit drei gleichen Massen ergibt sich eine Größe von 10.332 Quadratgrad bei der bereits erwähnten Übergangsenergie von  $E/V_I \approx 1,6868$ . Für alle Konfigurationen, bei denen  $\mu_1 = \mu_3$  und  $\mu_2 > \mu_1$  ist, wird die stabile Zone mit zunehmendem  $\mu_2$  größer. So ist beispielsweise die Grenze für die in Abbildung 18b gezeigte Konfiguration ( $\mu_2/\mu_1 = 10$ ) bei  $E/V_I \approx 1,9080$ , die Größe des stabilen Bereichs beträgt 12.712 Quadratgrad. Weitere Ergebnisse sind in Tabelle 2 aufgelistet.

$\mu_2/\mu_1$	$\mu_2/\mu_3$	$E/V_I$	Größe
1	1	1,6868	10.332
2	2	1,7303	11.467
5	5	1,8409	12.360
10	10	1,9080	12.712
100	100	1,9894	13.058
2	2/3	1,4753	5.902
3/2	3	1,5338	7.157
1/2	1/3	1,7898	8.327
3	1/2	1,3595	4.536
4	4/11	1,2868	3.741
1	5	1,3265	4.543
1	1/5	1,6384	6.303

**Tabelle 2:** Größe des stabilen Bereichs in Quadratgrad für unterschiedliche Massenverhältnisse.  $E/V_I$  gibt die kritische Störungsenergie an, die den stabilen Bereich begrenzt.

### 3 Numerische Untersuchung

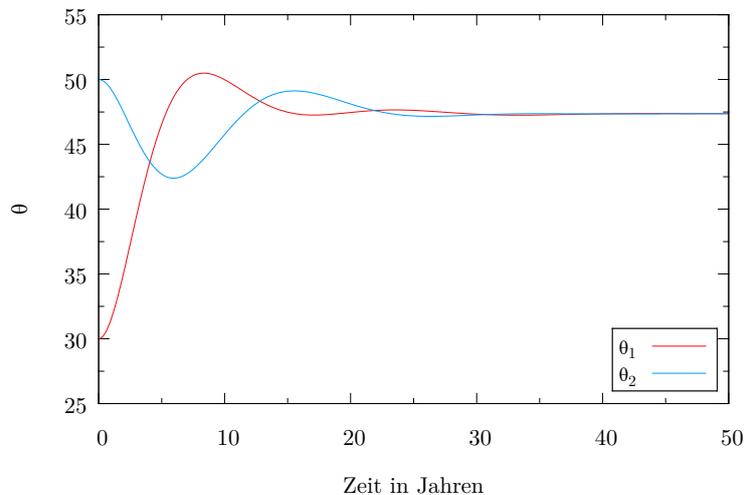
#### 3.1 Numerische Bestimmung der Gleichgewichtspunkte

In Kapitel 2.2 wurden einige Möglichkeiten vorgestellt, mit denen die Gleichgewichtspunkte analytisch sowie mit Hilfe numerischer Methoden bestimmt werden können. Eine weitere Methode zur Bestimmung der stabilen Gleichgewichtskonfigurationen beruht auf der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen und wurde von Renner & Sicardy (2004) beschrieben. Dabei werden die vereinfachten Bewegungsgleichungen um den Störterm  $-\nu\xi_i$  erweitert, wobei  $\nu$  eine positive reelle Zahl ist:

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{3}{2}\xi_i \quad (85)$$

$$\dot{\xi}_i = -2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j f'(\varphi_i - \varphi_j) - \nu\xi_i \quad (86)$$

Dieser Störterm in Gleichung (86) führt dazu, dass die Planeten stets zu den stabilen Gleichgewichtspunkten konvergieren.



**Abbildung 19:** Konvergenz zu  $\theta_1 = \theta_2 \approx 47,36086^\circ$

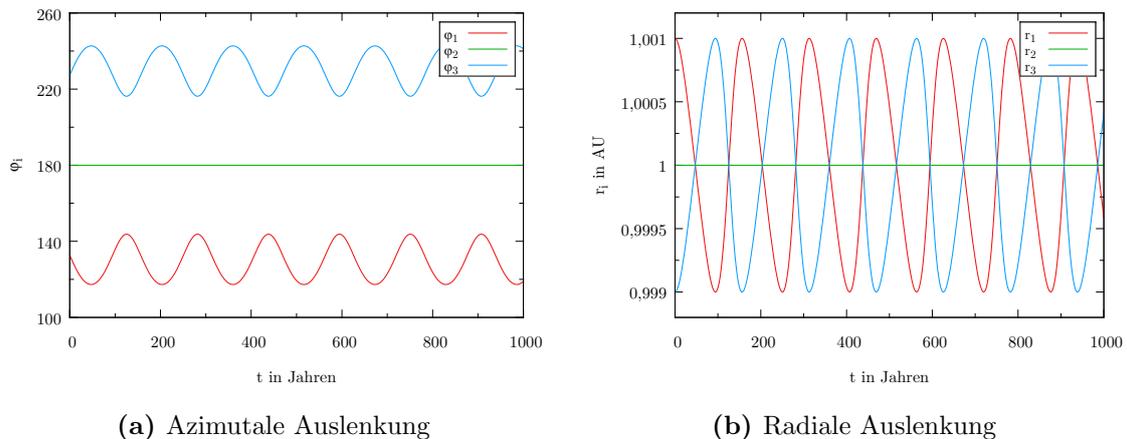
Mit drei beliebigen Planetenmassen und beliebigen Positionswinkeln als Anfangsbedingung führt die numerische Integration dieser Gleichungen zu einer der drei möglichen stabilen Konfigurationen, welche den zyklischen Permutationen der gegebenen Planetenmassen entsprechen. Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt dabei stark von  $\nu$  und den Planetenmassen, aber auch von den Anfangsauslenkungen ab. Durch Ausprobieren wurden  $\nu = 0,05$  und  $\mu_i > 10^{-4}$  als günstige Werte bestimmt. Wird das Verfahren mit verschiedenen, zufällig gewählten Anfangspositionen wiederholt, können alle Gleichgewichtskonfigurationen für einen gegebenen Satz von Planetenmassen bestimmt werden. In Abbildung 19 ist als Beispiel die Konvergenz

zur Gleichgewichtsposition für drei gleiche Massen mit  $\nu = 0,05$  und  $\mu_i = 10^{-4}$  dargestellt. In diesem Fall existiert nur eine stabile Konfiguration, nämlich die bereits in Kapitel 2.2 ermittelte:  $\theta_1 = \theta_2 \approx 47,36086^\circ$ .

### 3.2 Numerische Integration der vereinfachten Gleichungen

Die in Kapitel 2 durchgeführte Analyse gab einen ersten Einblick in die grundlegenden Eigenschaften des Systems. Zur Erweiterung und Überprüfung der Ergebnisse wurden anschließend die in Kapitel 2.1 hergeleiteten vereinfachten Bewegungsgleichungen für den Fall von drei identischen Massen  $m_i$  numerisch gelöst. Dazu wurde die Funktion `NDSolve` von *Mathematica* benützt. In der automatischen Einstellung, welche für die Berechnungen verwendet wurde, entscheidet der Algorithmus selbstständig, welches die geeignetste Integrationsmethode ist, und wählt einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Geschwindigkeit. Für eine kurze Integrationsdauer und die folgenden überblicksmäßigen Betrachtungen ist diese Vorgehensweise gerechtfertigt. Über längere Zeiträume kommt es jedoch bei allen in *Mathematica* implementierten Integrationsalgorithmen zu einer signifikanten Energiedrift, sodass sich diese Methode nicht für Langzeitintegration oder präzise Analysen eignet.

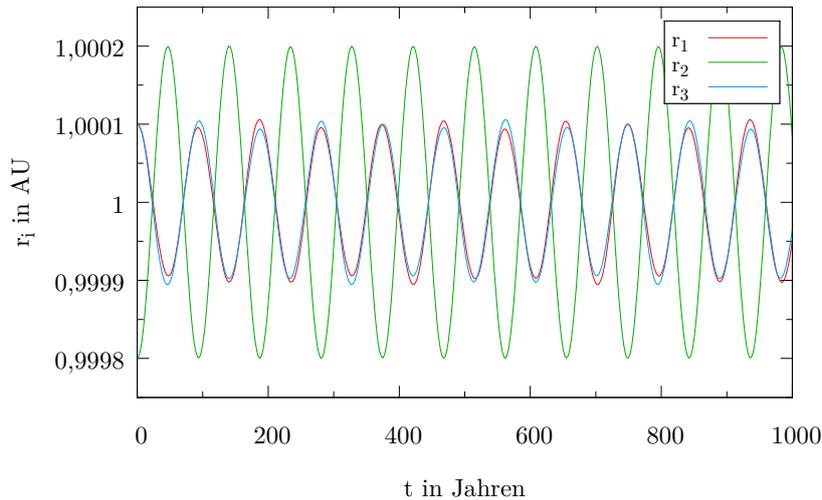
Es gibt zwei Möglichkeiten, in die Anfangsbedingungen eine Störung einfließen zu lassen, entweder durch eine azimutale oder durch eine radiale Auslenkung aus der Gleichgewichtsposition. Abbildung 20 zeigt das zeitabhängige Verhalten des Systems für den in Abschnitt 2.3.1 beschriebenen symmetrischen Zustand bei radialer Anfangsauslenkung mit den Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 47,36086^\circ$ ,  $\xi_1(0) = 0,001$ ,  $\xi_2(0) = 0$ ,  $\xi_3(0) = -0,001$ ,  $m_i = 1m_\oplus$ ,  $E/V_I \approx 1,13$ . Wie erwartet bleibt der mittlere Planet innerhalb der Rechengenauigkeit im rotierenden Koordinatensystem stationär, während die beiden äußeren Planeten eine symmetrische Libration um den Gleichgewichtspunkt ausführen.



**Abbildung 20:** Symmetrische Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 47,36086^\circ$ ,  $\xi_1(0) = 0,001$ ,  $\xi_2(0) = 0$ ,  $\xi_3(0) = -0,001$ ,  $m_i = 1m_\oplus$ ,  $E/V_I \approx 1,13$

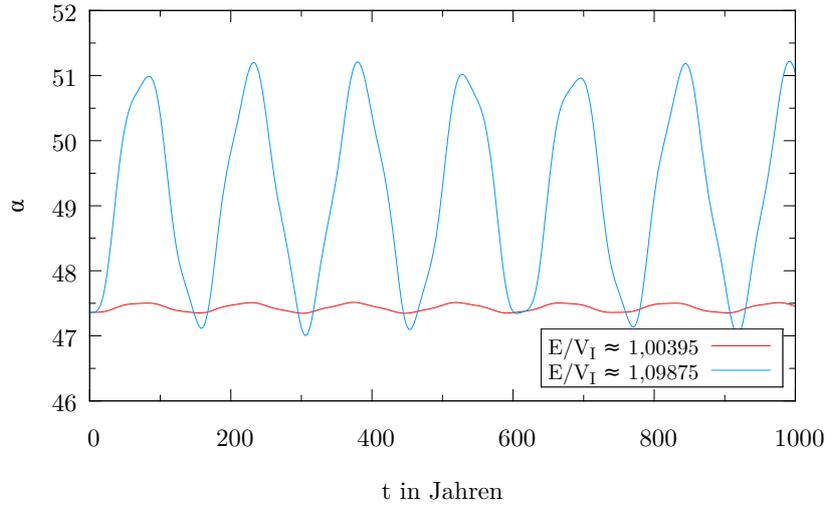
Da die azimutale Amplitude bei  $\xi_i = 0$  erreicht wird, gibt es zwei mögliche Anfangskonfigurationen mit  $\xi_i(0) = 0$ , die zur annähernd selben Bewegung führen und somit gleichwertig als Anfangsbedingungen verwendet werden können. Die aus den Simulationsdaten entnommenen Werte dafür sind  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 62,7036^\circ$  und  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 36,2428^\circ$  und sind in guter Übereinstimmung mit der numerischen Lösung von Gleichung 64, wobei für  $V$  der zur Störung zugehörige numerische Wert eingesetzt wurde.

Im Gegensatz zum symmetrischen Zustand ist vom antisymmetrischen Zustand zu erwarten, dass er für nicht infinitesimale Anfangs-Auslenkungen nicht stabil bleibt, das heißt für drei gleiche Planetenmassen die Bedingung  $\xi_1 = \xi_3$ ,  $\xi_2 = -2\xi_1$  nicht erfüllt bleibt. Abbildung 21 zeigt die radialen Abweichungen der Planeten für die Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 47,36086^\circ$ ,  $\xi_1(0) = \xi_3(0) = 0,0001$ ,  $\xi_2(0) = -0,0002$ ,  $E/V_I \approx 1,00395$ . Darin ist zu erkennen, dass bereits bei dieser geringen Störungsenergie  $r_1$  und  $r_3$  sichtbar voneinander abweichen, der antisymmetrische Zustand also nicht exakt erhalten bleibt.



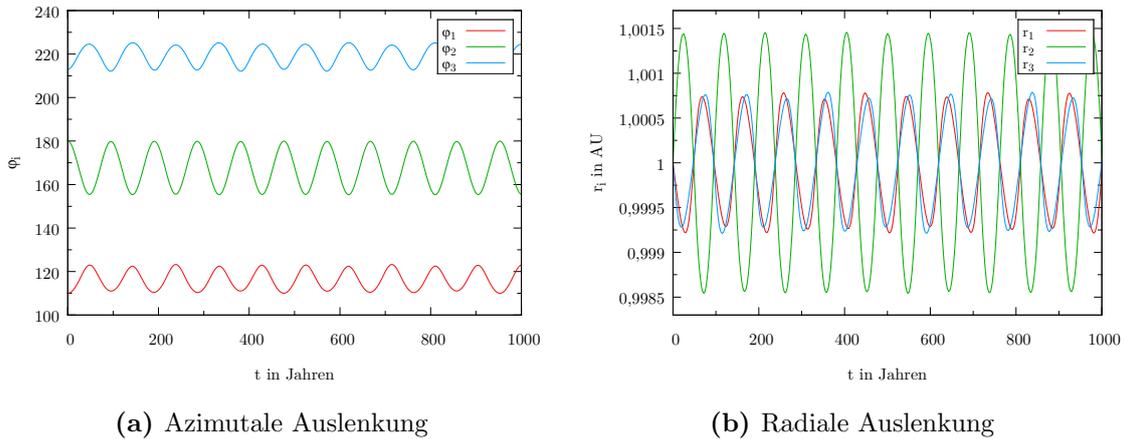
**Abbildung 21:** Antisymmetrische Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 47,36086^\circ$ ,  $\xi_1(0) = \xi_3(0) = 0,0001$ ,  $\xi_2(0) = -0,0002$ ,  $E/V_I \approx 1,00395$

Die Abweichung vom antisymmetrischen Zustand nimmt mit der Störungsenergie zu, wie in Abbildung 22 zu sehen ist. Hier ist der zeitliche Verlauf von  $\alpha$ , das gemäß Gleichung (58) die Abweichung von der Antisymmetrie angibt, für die oben genannten Anfangsbedingungen sowie für die Anfangsbedingung  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 47,36086^\circ$ ,  $\xi_1(0) = \xi_3(0) = 0,0005$ ,  $\xi_2(0) = -0,001$ ,  $E/V_I \approx 1,09875$  dargestellt.



**Abbildung 22:** Der zeitliche Verlauf von  $\alpha$  gibt die Abweichung vom antisymmetrischen Zustand an.

Es lassen sich jedoch Anfangsbedingungen finden, bei denen das System trotz vergleichsweise großer radialer Auslenkung stets in der Nähe des antisymmetrischen Zustands bleibt, wie in Abbildung 23 zu sehen ist. Die Anfangsbedingungen sind in diesem Fall  $\theta_1(0) = 70^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 32,97^\circ$ ,  $\xi_i(0) = 0$ ,  $E/V_I \approx 1,221$ . Die azimutalen Anfangsauslenkungen entsprechen dabei dem maximalen und minimalen Differenzwinkel für die symmetrischen Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 70^\circ$ ,  $\xi_i(0) = 0$ ,  $E/V_I \approx 1,24$ .

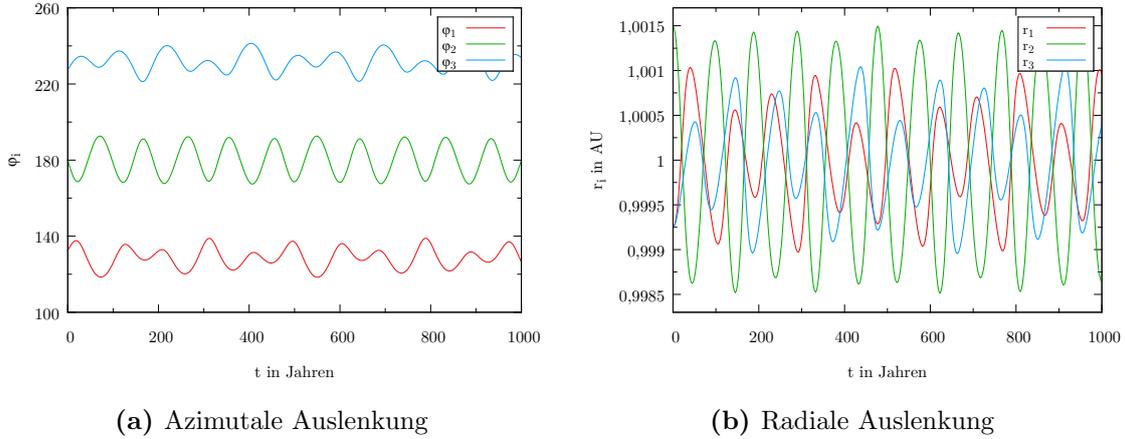


(a) Azimutale Auslenkung

(b) Radiale Auslenkung

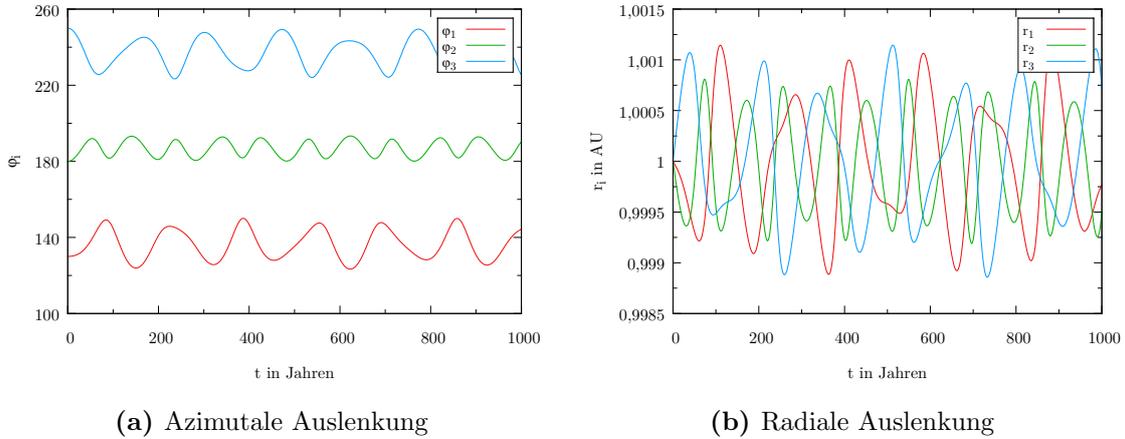
**Abbildung 23:** Annähernd antisymmetrische Anfangsbedingungen,  $\theta_1(0) = 70^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 32,97^\circ$ ,  $\xi_i(0) = 0$ ,  $E/V_I \approx 1,221$

Zum Vergleich ist in Abbildung 24 das Verhalten der tatsächlichen antisymmetrischen Anfangsbedingungen mit derselben Störungsenergie dargestellt, bei denen der antisymmetrische Zustand deutlich schlechter erfüllt bleibt.



**Abbildung 24:** Antisymmetrische Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 47,36086^\circ$ ,  $\xi_1(0) = \xi_3(0) = -0,000748$ ,  $\xi_2(0) = 0,001496$ ,  $E/V_I \approx 1,221$

Der allgemeine Fall einer asymmetrischen Anfangsauslenkung ist in Abbildung 25 dargestellt ( $E/V_I \approx 1,13$ ). Die resultierende Bewegung ergibt sich durch Überlagerung von symmetrischer und antisymmetrischer Schwingungsmode.



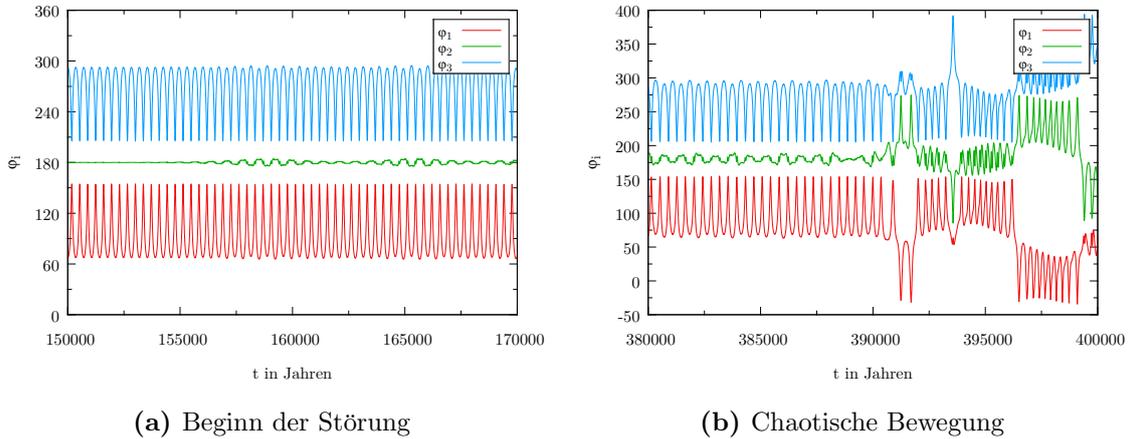
**Abbildung 25:** Asymmetrische Anfangsbedingungen,  $\theta_1(0) = 50^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 70^\circ$ ,  $\xi_i(0) = 0$ ,  $E/V_I \approx 1,24$

### 3.2.1 Symmetrische Anfangsbedingungen

#### 3.2.1.1 Grenzen der Stabilität

Wie in Abschnitt 2.3 erwähnt, existiert eine maximale Energie der Störung, bis zu der für die vereinfachten Bewegungsgleichungen eine reguläre Oszillation garantiert ist. Überschreitet die Energie der Störung diesen Wert, kann das System theoretisch in einen chaotischen Zustand übergehen. Der anhand des Potentials numerisch bestimmte Wert für diesen Übergang liegt bei  $E/V_I \approx 1,6868$ , was bei symmetrischen

Anfangsbedingungen und drei gleich großen Massen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 109,54^\circ$  entspricht. Die numerische Integration der vereinfachten Bewegungsgleichungen zeigt, dass mit diesen Anfangsbedingungen und drei Planeten mit je einer Erdmasse die azimutale Abweichung des mittleren Planeten von der äquidistanten Position bei einer Integrationsdauer von 10 Millionen Jahren stets im Bereich um  $10^{-7}$  Grad liegt, das System somit stabil bleibt. Ab einer Störungsenergie von  $E/V_I \approx 1,6942$ , das entspricht  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 112^\circ$ , bzw.  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 25,755^\circ$ , beginnt jedoch der mittlere Planet aufgrund von unvermeidbaren Rundungsfehlern ab einem gewissen Zeitpunkt eine unregelmäßige Oszillation um die äquidistante Position auszuführen, was einer Anregung der antisymmetrischen Mode entspricht (Abbildung 26a). Diese Oszillation schaukelt sich mit fortschreitender Integrationsdauer so lange auf, bis alle drei Planeten ihre ursprünglichen Positionen verlassen und das System in den erwarteten chaotischen Zustand übergeht (Abbildung 26b). Bei größeren Planetenmassen findet der Übergang bei einer geringfügig niedrigeren Störungsenergie statt.



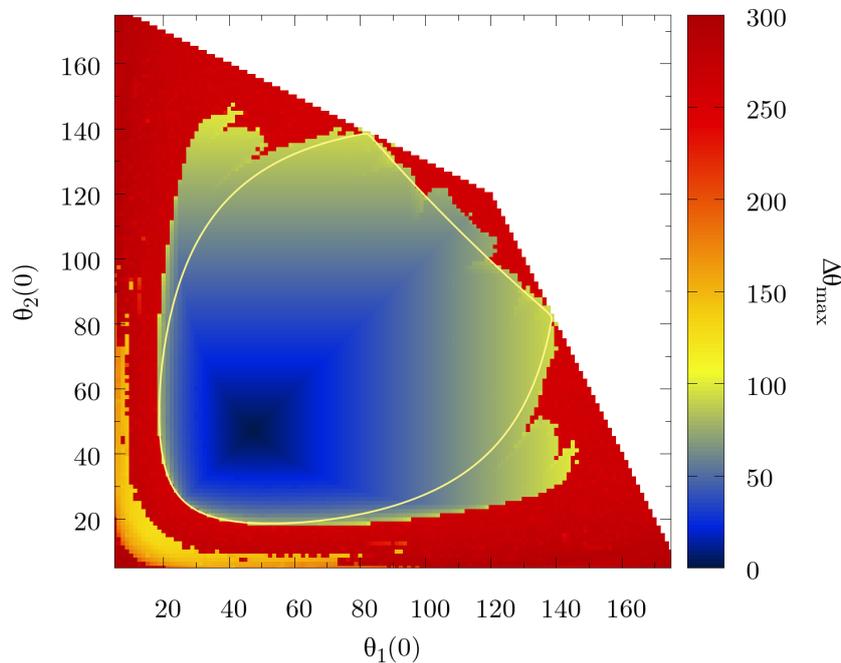
**Abbildung 26:** Symmetrische Anfangsbedingungen,  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 112^\circ$ ,  $\xi_i(0) = 0$ ,  $E/V_I \approx 1,6942$

### 3.2.2 Stabilitätskarte

Zur weiteren Analyse wurde ein Gitter aus möglichen Anfangsbedingungen gebildet, welche anschließend gemeinsam auf ihre Stabilität hin untersucht wurden. Dafür wurden drei Planeten mit je einer Erdmasse und einer rein azimutalen Anfangsauslenkung gewählt. Das Gitter aus ursprünglichen Differenzwinkeln reichte bei einem Gitterabstand von  $1,25^\circ$  von  $\theta_1(0) = 5^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 5^\circ$  bis  $\theta_1(0) = 175^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 175^\circ$ . Der Bereich wurde außerdem auf den in Abschnitt 2.2 beschriebenen beschränkt. Dies ist bei drei gleich großen Massen  $m_i$  gerechtfertigt, da in diesem Fall die Reihenfolge der Planeten keine Rolle spielt. So entspricht beispielsweise die Anfangsbedingung  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 100^\circ$  exakt der Anfangsbedingung  $\theta_1(0) = 100^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 160^\circ$ . Jede Anfangsbedingung wurde über einen Zeitraum von 10.000 Jahren integriert.

Zur Darstellung der Stabilität der einzelnen Anfangsbedingungen eignet sich eine sogenannte Stabilitätskarte, bei der auf den x- und y-Achsen die Anfangsbedingungen

$\theta_1(0)$  und  $\theta_2(0)$  aufgetragen werden und als z-Wert ein Indikator für die Stabilität farblich kodiert ist. Als Indikator für die Stabilität eignen sich zum Beispiel  $\theta_{i_{\min}}$ ,  $\theta_{i_{\max}}$  oder die maximalen Abweichungen von den Gleichgewichtspositionen innerhalb des Integrationszeitraums. Für Abbildung 27 wurde die maximale Abweichung der beiden Differenzwinkel  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  von der Gleichgewichtsdistanz ( $\theta_{i_0} = 47,36086^\circ$ ) verwendet, wie sie in den Gleichungen (70) und (71) definiert wurde. Im Unterschied zur dortigen Verwendung stellt  $\theta_{i_{\max}}$  hier jedoch den numerisch ermittelten Maximalwert von  $\theta_i$  dar. Durch diese Art der Darstellung kann auf den ersten Blick eine klare Unterscheidung zwischen stabiler Oszillation aller Planeten und chaotischem Verhalten getroffen werden. Nicht sichtbar sind jedoch jene Anfangsbedingungen, bei denen nur ein Planet eine stabile Oszillation ausführt.

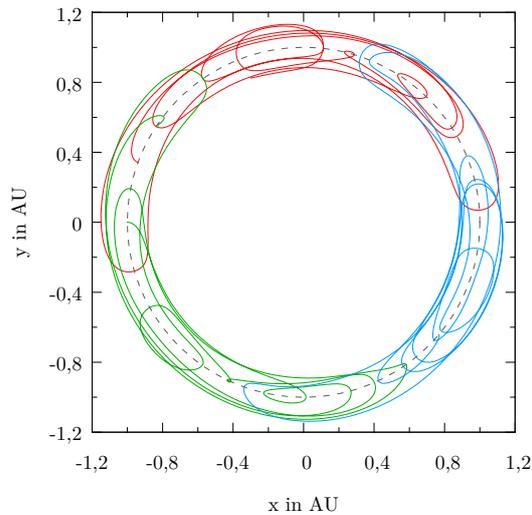


**Abbildung 27:** Maximale Abweichung der Differenzwinkel von der Gleichgewichtsdistanz. Die zusätzlich eingezeichnete Konturlinie entspricht der kritischen Störungsenergie von  $E/V_I \approx 1,6868$

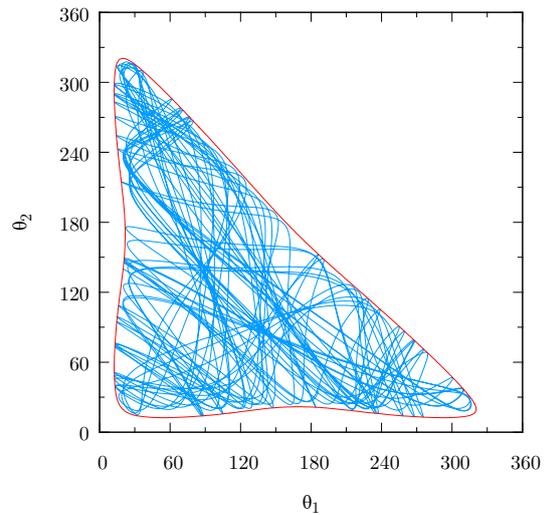
Man erkennt, dass der Bereich der stabilen Oszillation gut mit dem durch das Potential festgelegten Bereich übereinstimmt. Die maximal mögliche Abweichung vom Gleichgewichtspunkt in diesem Bereich wird durch die eingezeichnete Konturlinie ( $E/V_I = 1,6868$ ) festgelegt und ergibt sich daher durch  $138,8^\circ - 47,4^\circ = 91,4^\circ$ . Der Übergang zum instabilen Bereich ist erwartungsgemäß relativ scharf, es existieren jedoch Bereiche, in denen es trotz der theoretischen Möglichkeit innerhalb der Integrationsdauer von 10.000 Jahren nicht zu chaotischer Bewegung kommt. Dies ist beispielsweise der bereits diskutierte Bereich der symmetrischen Anfangsauslenkung mit  $109,54^\circ < \theta_1(0) = \theta_2(0) < 112^\circ$  und einer kleinen Umgebung mit asymmetrischen Anfangsauslenkungen. Aber auch stark asymmetrische Anfangsbedingungen können bis zu einer Energie von  $E/V_I \approx 2,05$  für einen kurzen Zeitraum stabil bleiben. Eine längere Integration für einige ausgewählte Anfangsbedingungen zeigt

jedoch, dass auch diese Anfangsbedingungen früher oder später in den chaotischen Zustand übergehen.

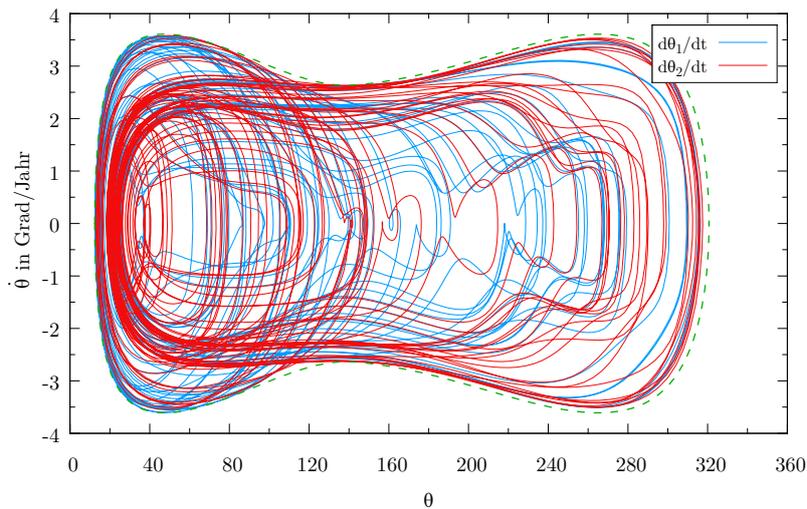
Erwähnenswert ist außerdem, dass im chaotischen Bereich Anfangsbedingungen existieren, die scheinbar stabiler sind als andere mit gleicher oder geringerer Störungsenergie. So ist beispielsweise die Bewegung der Planeten mit den Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = 20^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 140^\circ$ ,  $E/V_I \approx 2,47$  vollkommen chaotisch, wie in Abbildung 28 zu erkennen ist. Sowohl der gesamte Bereich an erlaubten  $\theta_1, \theta_2$ -Werten als auch die Maximalgeschwindigkeitskurve sind gleichmäßig ausgefüllt.



(a) xy-Ebene, radiale Abweichungen um Faktor 40 überzeichnet, Integrationszeit 1.000 Jahre



(b)  $\theta_1, \theta_2$ , Integrationszeit 10.000 Jahre

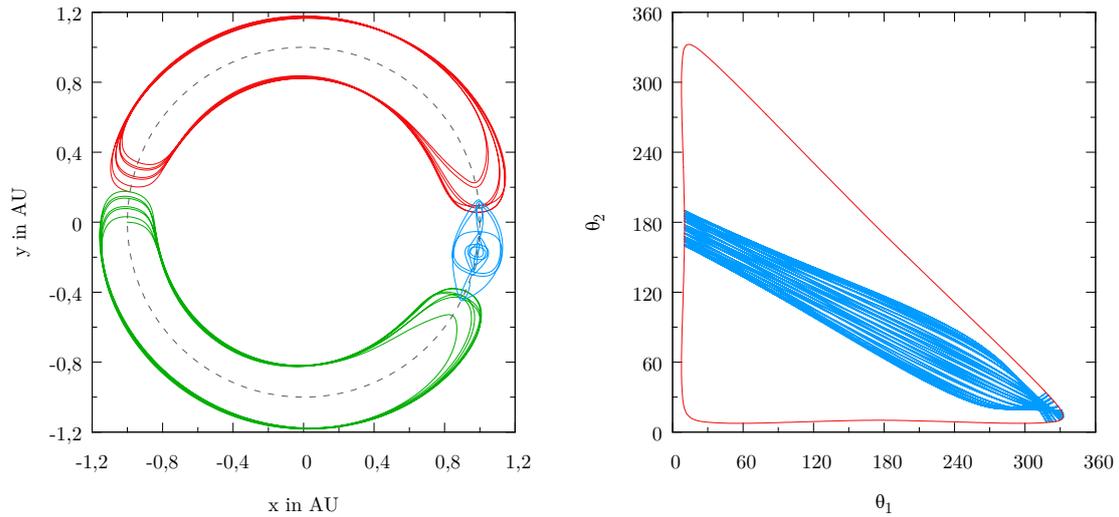


(c)  $\theta_i, \dot{\theta}_i$ , Integrationszeit 10.000 Jahre. Die strichlierte Linie ist die Maximalgeschwindigkeitskurve.

**Abbildung 28:**  $\theta_1(0) = 20^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 140^\circ$ ,  $\xi_i(0) = 0$ ,  $E/V_I \approx 2,47$

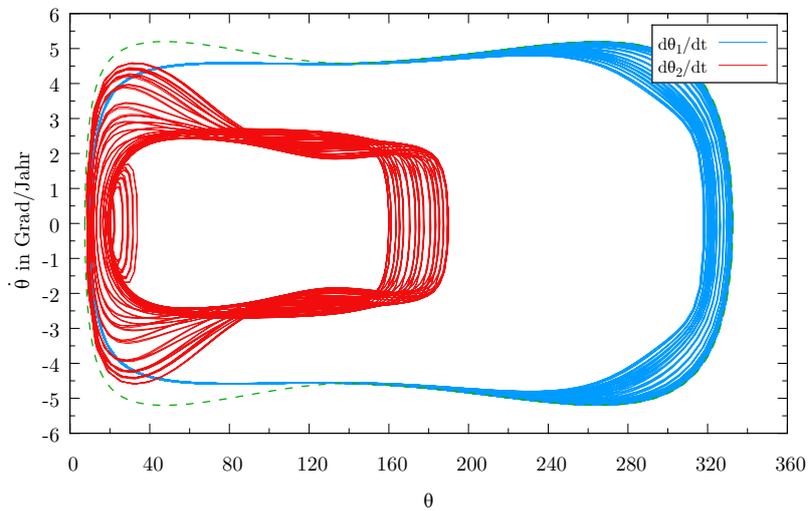
### 3.2 Numerische Integration der vereinfachten Gleichungen

Die Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = 10^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 160^\circ$ ,  $E/V_I \approx 4,05$  hingegen erscheinen im Vergleich dazu stabiler. In diesem Fall führen Planet 1 und 2 Hufeisenbahnen mit einer maximalen Amplitude von etwa  $180^\circ$  aus, während Planet 3 eine Oszillation mit geringer Amplitude um seine ursprüngliche Position im mitbewegten Koordinatensystem ausführt (Abbildung 29).



(a) xy-Ebene, radiale Abweichungen um Faktor 40 überzeichnet, Integrationszeit 1.000 Jahre

(b)  $\theta_1, \theta_2$ , Integrationszeit 10.000 Jahre



(c)  $\theta_i, \dot{\theta}_i$ , Integrationszeit 10.000 Jahre. Die strichlierte Linie ist die Maximalgeschwindigkeitskurve.

**Abbildung 29:**  $\theta_1(0) = 10^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 160^\circ$ ,  $\xi_i(0) = 0$ ,  $E/V_I \approx 4,05$

### 3.3 Numerische Integration der exakten Bewegungsgleichungen

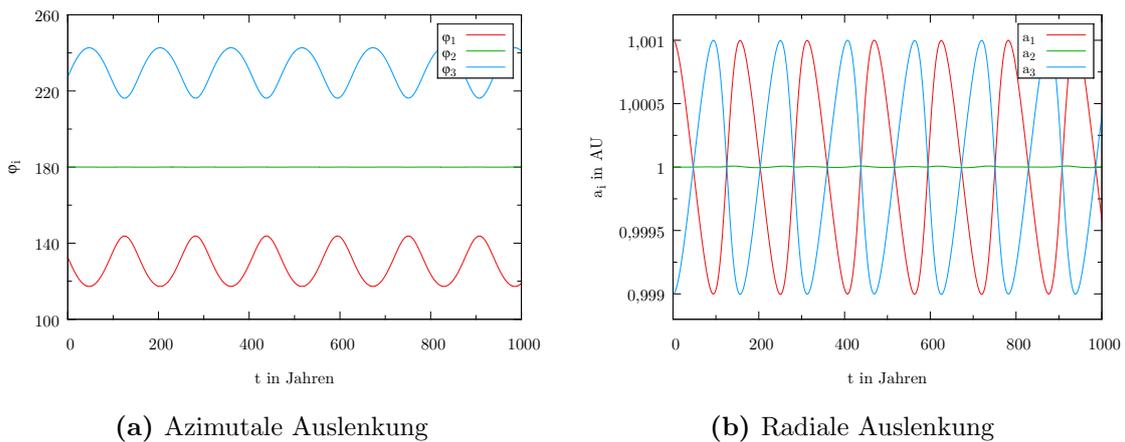
Da die vereinfachten Bewegungsgleichungen nach Salo & Yoder (1988) nur eingeschränkt gültig sind, kann eine vollständige Analyse des Problems nur mittels numerischer Integration der exakten Gleichungen durchgeführt werden. Dazu wurde die Methode der Lie-Integration nach Hanslmeier & Dvorak (1984) für ein allgemeines N-Körper Problem verwendet.

Der wesentliche Unterschied zu den vereinfachten Gleichungen ist, dass die Planetenbahnen nicht mehr auf Kreisbahnen beschränkt sind, sondern durch die gegenseitigen Störungen exzentrisch werden können. Außerdem ist es im Rahmen der exakten Gleichungen im Gegensatz zu den vereinfachten Gleichungen möglich, dass die Planeten einander überholen, oder aus dem System geworfen werden können.

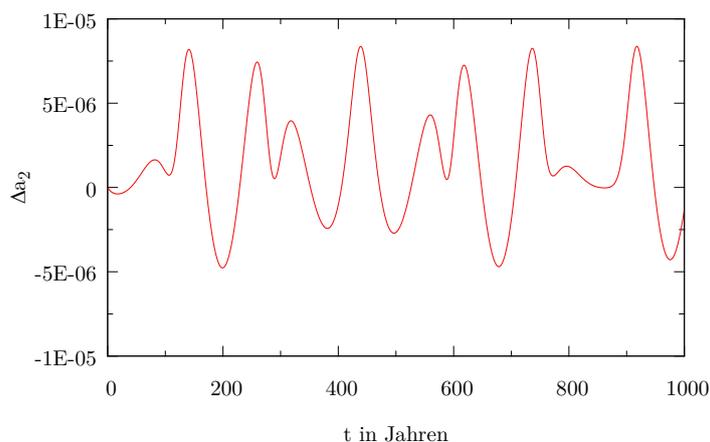
In allen folgenden Simulationen beziehen sich die azimuthalen und radialen Abstände auf den System-Mittelpunkt, das heißt die Sonne, welche sich im Brennpunkt der nunmehr elliptischen Planetenbahnen befindet. Für die Angabe der radialen Distanzen werden entweder die großen Halbachsen oder die tatsächlichen radialen Abstände vom Zentrum herangezogen, für alle Winkelangaben wird die wahre Anomalie verwendet.

#### 3.3.1 Drei gleiche Massen, symmetrische Anfangsbedingungen

Zum Vergleich mit den vereinfachten Bewegungsgleichungen wurden zunächst dieselben Anfangsbedingungen wie am Beginn von Abschnitt 3.2 herangezogen:  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 47,36086^\circ$ ,  $\xi_1(0) = 0,001$ ,  $\xi_2(0) = 0$ ,  $\xi_3(0) = -0,001$ ,  $m_i = 1m_\oplus$ ,  $E/V_I \approx 1,13$ . Auf den ersten Blick zeigt Abbildung 30 die erwartete symmetrische Oszillation der äußeren Planeten.

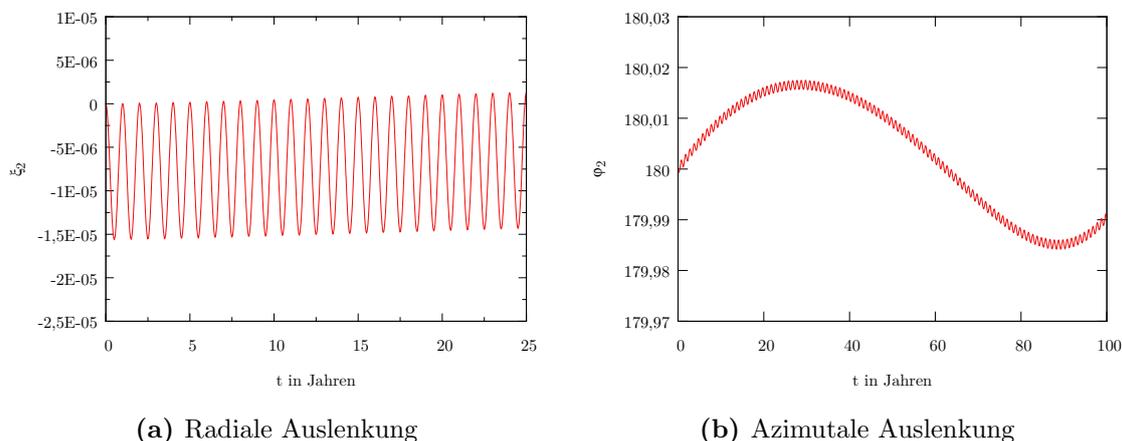


**Abbildung 30:** Symmetrische Anfangsbedingungen,  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 47,36086^\circ$ ,  $\xi_1(0) = 0,001$ ,  $\xi_2(0) = 0$ ,  $\xi_3(0) = -0,001$ ,  $m_i = 1m_\oplus$ ,  $E/V_I \approx 1,13$



**Abbildung 31:** Abweichung des mittleren Planeten von der äquidistanten Position

Betrachtet man das Verhalten des mittleren Planeten jedoch genauer, ist zu erkennen, dass dieser nicht stationär bleibt sondern ebenfalls eine Oszillation ausführt (Abbildung 31). Dadurch erfolgt auch die Libration der beiden äußeren Planeten um den Gleichgewichtspunkt nicht mehr exakt symmetrisch, was sich in einer schwankenden Amplitude bemerkbar macht. Die Ursache dafür ist, dass die Planetenbahnen durch die gegenseitigen Bahnstörungen nicht kreisförmig bleiben, sondern leicht exzentrisch werden. Die Exzentrizität schwankt bei den gewählten Anfangsbedingungen zwischen  $e = 10^{-5}$  und  $e = 10^{-6}$ . Dies führt zu einer zusätzlichen radialen Oszillation mit einer Periode von einem Jahr, wie in Abbildung 32a zu erkennen ist.



**(a)** Radiale Auslenkung

**(b)** Azimutale Auslenkung

**Abbildung 32:** Abweichung des mittleren Planeten von der äquidistanten Position

Der mittlere Planet weicht also zwangsläufig von der äquidistanten Position ab, wodurch die antisymmetrische Mode angeregt wird (Abbildung 32b). Zur Bestätigung dieser Erklärung wurde zusätzlich zu einer dominanten symmetrischen Anfangsstörung eine radiale, antisymmetrische Anfangsstörung der Größenordnung  $\xi_2 = 10^{-5}$  in die vereinfachten Bewegungsgleichungen eingebracht. Dies führte zu einem vergleichbaren Verhalten.

### 3.3.1.1 Grenzen der Stabilität

Wie bei den vereinfachten Bewegungsgleichungen ist ab einer gewissen Störungsenergie eine stabile Oszillation um die Gleichgewichtspunkte nicht mehr möglich, und die azimutalen Abstände zwischen den Planeten variieren unregelmäßig in einem großen Winkelbereich. Dennoch kann die koorbitale Konfiguration über lange Zeiträume erhalten bleiben. Für geringe Planetenmassen liegt dieser Übergang im selben Bereich wie bei der Integration der vereinfachten Bewegungsgleichungen. Für drei Planeten mit je einer Erdmasse liegt er bei einer Integrationsdauer von einer Million Jahren beispielsweise bei  $E/V_I \approx 1,6954$ , das entspricht  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 112,5^\circ$  bzw.  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 25,741^\circ$ . Genau betrachtet ist die Störungsenergie ab der Instabilität auftritt hier sogar geringfügig höher als bei den vereinfachten Bewegungsgleichungen, was jedoch auf die höhere Genauigkeit der Integrationsmethode zurückzuführen ist.

Überschreitet die Störungsenergie einen weiteren kritischen Wert, können die Planeten einander so nahe kommen, dass sich ihre Hill-Sphären überlappen. Bei einer solchen nahen Begegnung dominieren die gravitativen Kräfte, die beide Planeten aufeinander ausüben. Dies führt dazu, dass sich die Bahnelemente der Planeten in kurzer Zeit so stark ändern, dass die koorbitale Konfiguration nicht bestehen bleiben kann. In den numerischen Simulationen führt eine solche nahe Begegnung in den meisten Fällen zum Auswurf mindestens eines Planeten aus dem System.

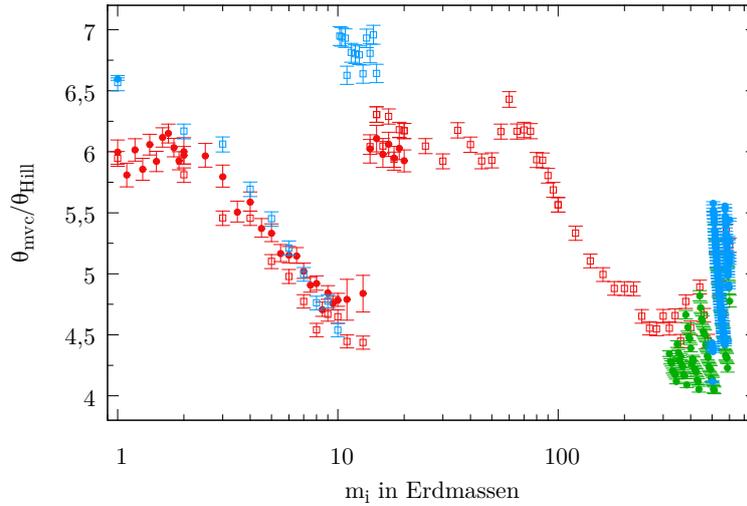
Salo & Yoder (1988) ziehen für die kritische Entfernung den sogenannten gemeinsamen Hill-Radius heran:

$$r_{\text{Hill}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\mu_i + \mu_{i+1})} \quad (87)$$

Da  $r_{\text{Hill}}$  in den hier betrachteten Fällen gegenüber dem Abstand zum Zentralkörper klein ist, und  $\Delta r_i$  ebenfalls klein ist, kann der Hill-Radius aufgrund trigonometrischer Überlegungen mit  $r_{\text{Hill}} \approx \theta_{\text{Hill}}$  als kritischer Winkel angegeben werden. Salo & Yoder (1988) kommen in ihren Berechnungen zu dem Ergebnis, dass die koorbitale Konfiguration bestehen bleibt, solange  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}} \gtrsim 6$ , wobei  $\theta_{\text{mvc}}$  der anhand der Maximalgeschwindigkeitskurven berechnete minimale Differenzwinkel ist (siehe Abschnitt 2.3.2.2, bzw. Abbildung 10).

Eine erste stichprobenhafte Betrachtung zeigte, dass der Kollaps der koorbitalen Konfiguration in etwa zwischen  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}} = 4,5$  und  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}} = 6,5$  stattfindet und bestätigt somit das Ergebnis von Salo & Yoder (1988). In einer weiteren Analyse wurde nach einer möglichen Massenabhängigkeit des Übergangs gesucht. Dazu wurde ein Gitter aus Anfangsbedingungen erstellt, bei dem der Bereich der ursprünglichen Auslenkung für jedes Massenverhältnis eigens angepasst wurde, sodass  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}}$  immer zwischen 4 und 7 lag. Die Integrationsdauer wurde auf 10.000 Jahre festgelegt. Die so gewonnenen Daten wurden mit einigen bereits zuvor durchgeführten Simulationen kombiniert und sind in Abbildung 33 zusammengefasst.

Jeder Datenpunkt markiert die niedrigste Störungsenergie, ab der für die gegebenen Planetenmassen ein Zerfall der koorbitalen Konfiguration beobachtet wurde. Je größer  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}}$  ist, desto geringer ist die Störungsenergie, ab welcher der



**Abbildung 33:**  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}}$  in Abhängigkeit von  $m_i$ , zur Erklärung der Symbole siehe Text.

Kollaps eintritt. Die Fehlerbalken spiegeln das gewählte Winkel-Intervall der Anfangsbedingungen wider. Die gefüllten Punkte bezeichnen Anfangsbedingungen mit  $\theta_i(0) > 47,36^\circ$ , die offenen Quadrate  $\theta_i(0) < 47,36^\circ$ . In beiden Fällen wurden stets symmetrische, azimutale Anfangsauslenkungen gewählt. Die Farbe der Datenpunkte zeigt die Integrationsdauer an. Grün steht für 1.000 Jahre, rot für 10.000 Jahre und blau für 100.000 Jahre. Die Grafik zeigt, dass bei einer Integrationsdauer zwischen 1.000 und 100.000 Jahren  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}}$  für alle untersuchten Planetenmassen zwischen 4 und 7 liegt, wobei der Wert erwartungsgemäß mit längerer Integrationsdauer zunimmt. Auffällig ist, dass der Unterschied zwischen 10.000 und 100.000 Jahren Integrationszeit zwischen zwei und zehn Erdmassen nicht besonders groß ist und in derselben Größenordnung liegt wie der durch die unterschiedlichen Anfangsbedingungen verursachte Unterschied. Zwischen 10 und 11 Erdmassen tritt jedoch plötzlich eine große Diskrepanz bei den unterschiedlichen Integrationszeiten auf. Eine genauere Betrachtung dieser Simulationen zeigte, dass es in diesem Massenbereich bestimmte Anfangsbedingungen gibt, die bei einer Integrationsdauer von 100.000 Jahren zu einem Kollaps des Systems führen, während Anfangsbedingungen mit höherer Störungsenergie, aber gleicher Integrationsdauer stabil bleiben. Im konkreten Fall befinden sich zwischen der blauen Punktwolke bei  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}} \approx 7$  und den entsprechenden Werten für 10.000 Jahre Integrationsdauer fast ausschließlich Anfangsbedingungen die bei 100.000 Jahren Integrationsdauer nicht kollabieren. Erst ab  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}} \gtrsim 4.5$  kollabieren sowohl bei 10.000, als auch bei 100.000 Jahren Integrationsdauer alle Anfangsbedingungen mit noch größerer Störungsenergie. Dieses Verhalten zeigt sich besonders ausgeprägt bei Planetenmassen über 300 Erdmassen, wo es aufgrund der Größe des Hill-Radius der Planeten außerdem zu einem direkten Übergang von regulärer Oszillation zum Kollaps der koorbitalen Konfiguration kommt. Die Ergebnisse für diesen Bereich werden in Abschnitt 3.3.1.3 ausführlich dargestellt.

### 3.3.1.2 Vergleich mit analytischen Ergebnissen

In Abschnitt 2.3 wurden für den Spezialfall von drei gleichen Planetenmassen und rein symmetrischer Oszillation unter anderem folgende Zusammenhänge gefunden: Der minimale und maximale Differenzwinkel ergibt sich aus Gleichung (64) und ist eine Funktion der Anfangsauslenkung. Gleichung (78) beschreibt die maximale radiale Auslenkung in Abhängigkeit von den Planetenmassen und der Anfangsauslenkung. Die Periode der symmetrischen Oszillation um den Gleichgewichtspunkt wird von Gleichung (83) beschrieben und ist ebenfalls eine Funktion der Planetenmassen und der Anfangsauslenkung.

Um diese funktionalen Zusammenhänge zu überprüfen und um den Unterschied zwischen vereinfachten und exakten Gleichungen zu ermitteln, wurde ein Gitter aus Anfangsbedingungen erstellt, welche jeweils über einen Zeitraum von 1.000 Jahren integriert wurden. Die ursprünglichen Differenzwinkel lagen zwischen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 26^\circ$  und  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 112^\circ$  bei einem Gitterabstand von  $1^\circ$ . Für die Massen der Planeten wurde das Intervall 0,1 bis 15 Erdmassen bei einem Gitterabstand von etwa 0,17 Erdmassen gewählt, wodurch sich ein quadratisches Gitter mit  $87 \times 87$  Gitterpunkten ergab.

Der Unterschied zwischen numerischen und analytischen Ergebnissen kann entweder als absoluter oder als relativer Fehler angegeben werden:

$$F_a(x) = x_{\text{numerisch}} - x_{\text{analytisch}} \quad (88)$$

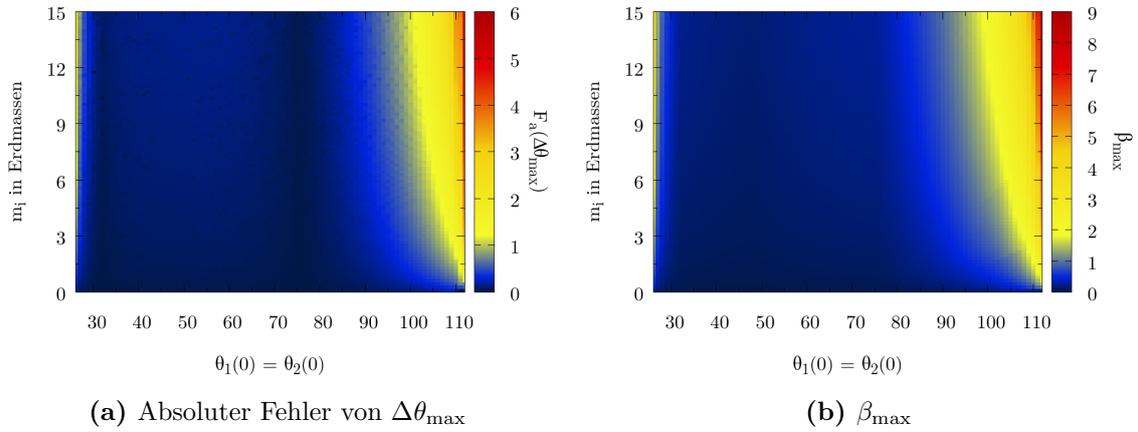
$$F_r(x) = \frac{x_{\text{numerisch}}}{x_{\text{analytisch}}} - 1 \quad (89)$$

Zunächst wurde die maximale azimuthale Abweichung vom Gleichgewichtspunkt gemäß Gleichung (64) mit der maximalen Abweichung  $\Delta\theta_{\text{max}}$  innerhalb des Integrationszeitraums verglichen. Abbildung 34a zeigt den Unterschied als absoluten Fehler. Eine andere Möglichkeit, die Abweichung von den vereinfachten Gleichungen anzugeben, ist der Maximalwert von  $\beta$ , da  $\beta$  die Abweichung der Planeten von der äquidistanten Position angibt und diese bei symmetrischer Anfangsauslenkung bei den vereinfachten Gleichungen immer Null ist. Der Maximalwert von  $\beta$  ist in Abbildung 34b dargestellt.

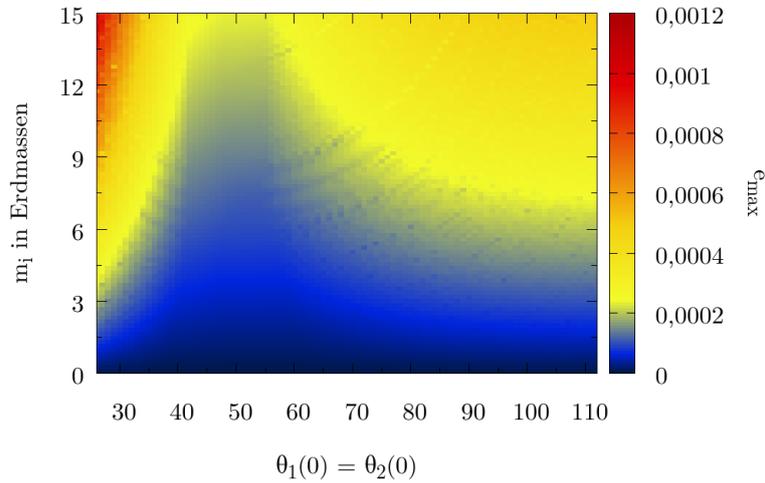
Sowohl  $F_a(\Delta\theta_{\text{max}})$ , als auch  $\beta_{\text{max}}$  liegen zwischen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) \approx 30^\circ$  und  $\theta_1(0) = \theta_2(0) \approx 90^\circ$  für alle betrachteten Planetenmassen unter  $1^\circ$ . In den Randbereichen, das heißt bei größerer Störungsenergie, nehmen die Abweichungen jedoch deutlich zu, wobei eine Massenabhängigkeit erkennbar ist. Dies ist dadurch erklärbar, dass mit zunehmender Anfangsauslenkung und Masse die gegenseitigen Bahnstörungen der Planeten stärker werden, und somit die Exzentrizität der Planetenbahnen größer wird, wie in Abbildung 35 zu erkennen ist. Je größer die Exzentrizität der Planetenbahnen ist, umso stärker ist die Anregung der antisymmetrischen Normalschwingung und damit die Abweichung von der rein symmetrischen Oszillation.

Die Abweichung der maximalen radialen Auslenkung von Gleichung (78) ist in Abbildung 36 sowohl als absoluter als auch als relativer Fehler angegeben.

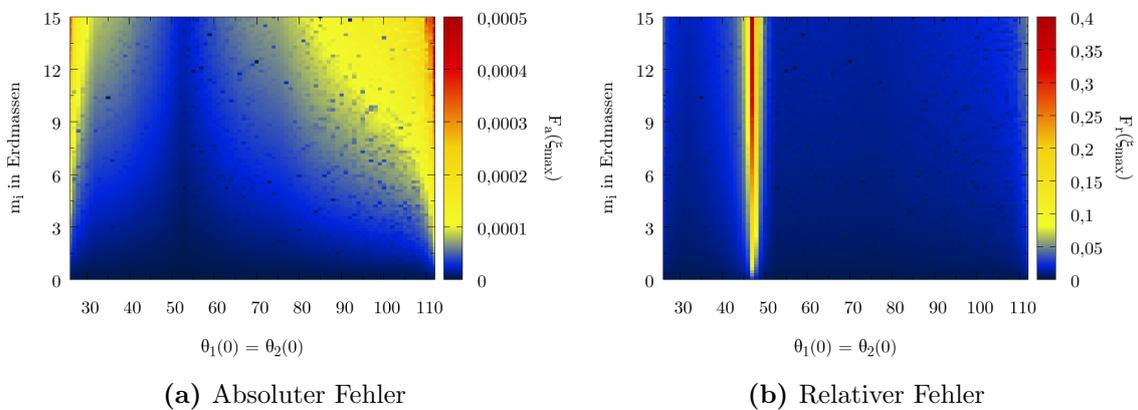
### 3.3 Numerische Integration der exakten Bewegungsgleichungen



**Abbildung 34:** Unterschied zwischen exakten und vereinfachten Gleichungen



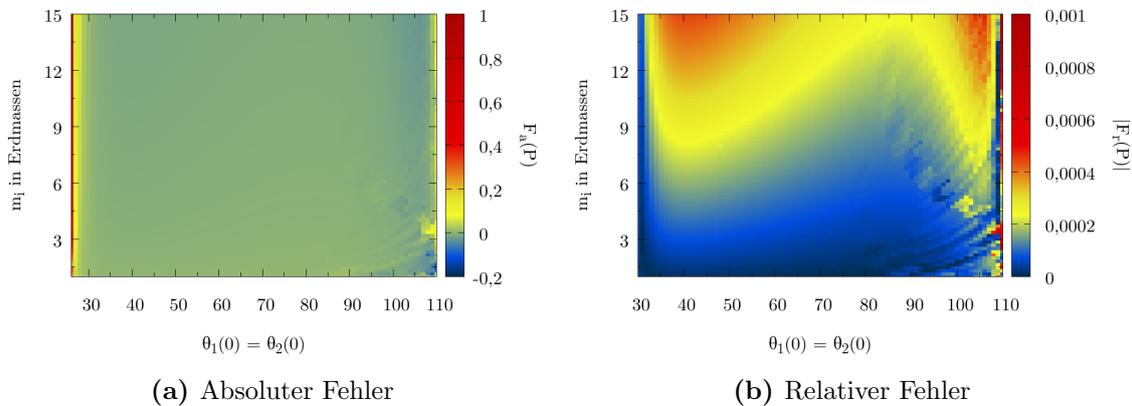
**Abbildung 35:** Maximale Exzentrizität



**Abbildung 36:** Absoluter und relativer Fehler der radialen Abweichung

Es ist zu erkennen, dass die absolute Abweichung, wie zu erwarten, mit größerer Anfangsauslenkung und mit größeren Massen zunimmt. Der relative Fehler hingegen liegt annähernd konstant im einstelligen Prozentbereich, nimmt jedoch in unmittelbarer Umgebung des Gleichgewichtspunkts stark zu. Dies ist dadurch erklärbar, dass in diesem Bereich die radiale Abweichung vom mittleren Bahnradius aufgrund der Exzentrizität der Planetenbahnen in einer ähnlichen Größenordnung liegt, wie die radiale Auslenkung gemäß Gleichung (78).

Abbildung 37 zeigt die Abweichung von der mittels Gleichung (83) bestimmten Schwingungsperiode. Die Schwingungsperioden der numerisch integrierten Gleichungen wurden dabei mit dem Frequenzanalyse-Tool SigSpec (Reegen, 2007) bestimmt. Der Massenbereich wurde für die Darstellung auf 1-15 Erdmassen beschränkt, da für kleinere Massen die Schwingungsperiode bereits in der Größenordnung des Integrationszeitraums von 1.000 Jahren liegt und die Frequenzanalyse daher nicht mehr zuverlässig funktioniert. Die in Abbildung 37a gezeigte absolute Abweichung ist über den gesamten betrachteten Bereich annähernd konstant und steigt nur in den Randbereichen an. In Abbildung 37b ist der Absolutbetrag des relativen Fehlers dargestellt, wobei zur besseren Veranschaulichung der Winkelbereich auf  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 30^\circ$  bis  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 110^\circ$  verkleinert wurde. Es zeigt sich, dass der relative Fehler mit zunehmender Masse ansteigt, mit maximal 0,1% jedoch sehr gering ist.



**Abbildung 37:** Unterschied zwischen analytisch und numerisch bestimmter Oszillationsperiode

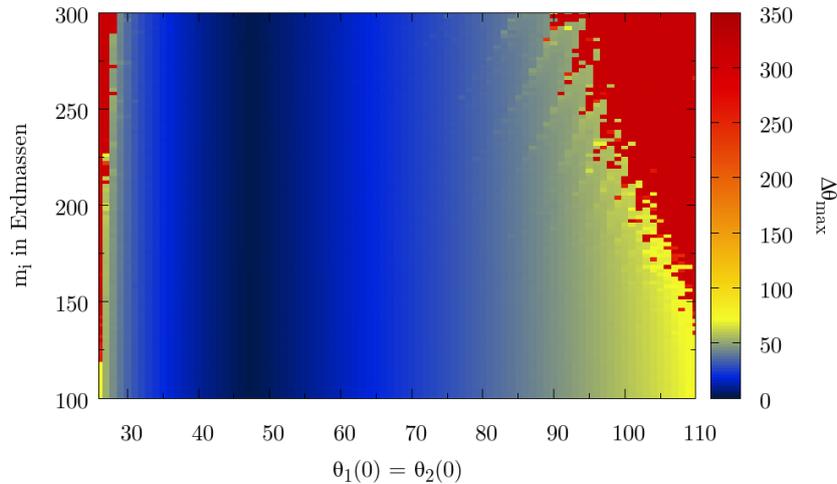
### 3.3.1.3 Verhalten bei größeren Planetenmassen

Der Vergleich zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen im vorigen Abschnitt hat gezeigt, dass die Abweichungen zwischen den vereinfachten und den exakten Gleichungen zwar mit der Masse der Planeten zunehmen, bis zu 15 Erdmassen jedoch vergleichsweise gering sind. Dies war zu erwarten, da bei drei Planeten mit je 15 Erdmassen ( $\mu_i \approx 4,5 \times 10^{-5}$ ), die Voraussetzung  $M \gg m_i$  noch in ausreichendem Maße erfüllt ist.

In diesem Abschnitt wird das Verhalten des Systems bei größeren Planetenmassen beschrieben. Zu diesem Zweck wurde wie zuvor ein Gitter aus symmetrischen

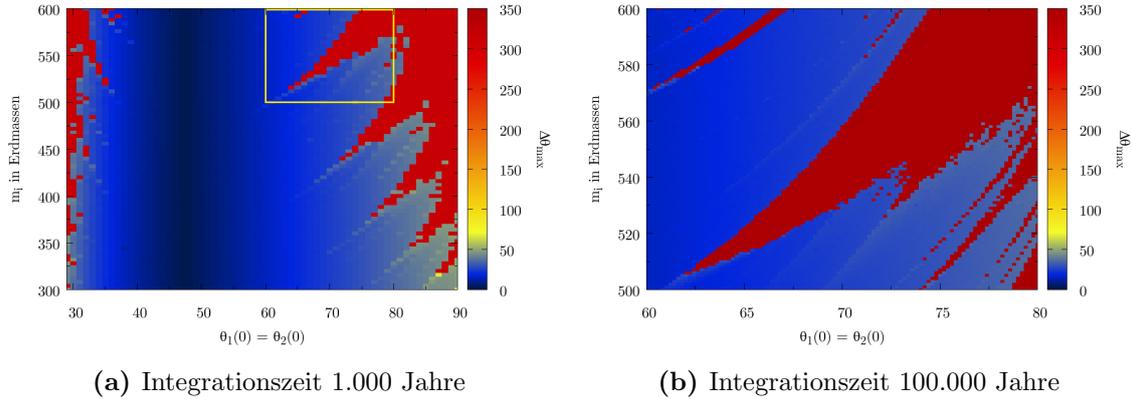
Anfangsbedingungen, diesmal jedoch für den Massenbereich zwischen 15 und 600 Erdmassen gebildet. Die Anfangsstörung wurde bis 100 Erdmassen wie im vorigen Abschnitt in Form einer azimuthalen Auslenkung zwischen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 26^\circ$  und  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 112^\circ$  mit einem Gitterabstand von einem Grad realisiert. Für größere Massen wurde der Winkelbereich verkleinert, sodass keine unnötigen Berechnungen im chaotischen Bereich durchgeführt wurden.

Für drei Planeten mit Massen zwischen 15 und 100 Erdmassen werden die Abweichungen zu den vereinfachten Bewegungsgleichungen etwas größer und die Grenzen des stabilen Bereichs rücken unwesentlich nach innen, am grundlegenden Verhalten des Systems ändert sich gegenüber den geringeren Massen jedoch nichts. Ab etwa 120 Erdmassen rückt die äußere Grenze des stabilen Bereichs mit zunehmender Masse jedoch deutlich nach innen, wie in Abbildung 38 zu erkennen ist, welche die maximale azimuthale Abweichung vom Gleichgewichtspunkt  $\Delta\theta_{\max}$  zeigt. Dies liegt daran, dass durch die Größe des gemeinsamen Hill-Radius der Planeten  $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}}$  bereits im eigentlich stabilen Bereich ( $E/V_I < 1,6868$ ) einen kritischen Wert annimmt, wodurch es, wie bereits in Abschnitt 3.3.1.1 erwähnt, zu einem fließenden Übergang zwischen regelmäßiger Oszillation und Kollaps der koorbitalen Konfiguration kommt. Wie bereits in Abbildung 33 zu sehen war, ist die Grenze jedoch keine glatte Kurve, sondern zeigt eine ausgefranste Zackenstruktur.



**Abbildung 38:** Maximale Abweichung von der Gleichgewichtsdistanz

Diese Zackenstruktur wird mit zunehmenden Planetenmassen immer ausgeprägter und tritt ab etwa 350 Erdmassen auch bei Anfangsauslenkungen innerhalb der Gleichgewichtspunkte auf (Abbildung 39a). Die Ränder der instabilen Zacken scheinen scharf begrenzt zu sein. Zur genaueren Betrachtung wurde der in Abbildung 39a gelb umrahmte Bereich mit einer besseren Auflösung (Gitterabstand  $0,2^\circ$ ,  $1m_\oplus$ ) und über einen längeren Zeitraum (100.000 Jahre) berechnet. Es zeigt sich, dass neben dem dominanten Zacken noch weitere kleinere instabile Bereiche existieren und die Struktur auch bei längerer Integrationszeit nicht verschwindet (Abbildung 39b).



**Abbildung 39:** Maximale Abweichung von der Gleichgewichtsdistanz

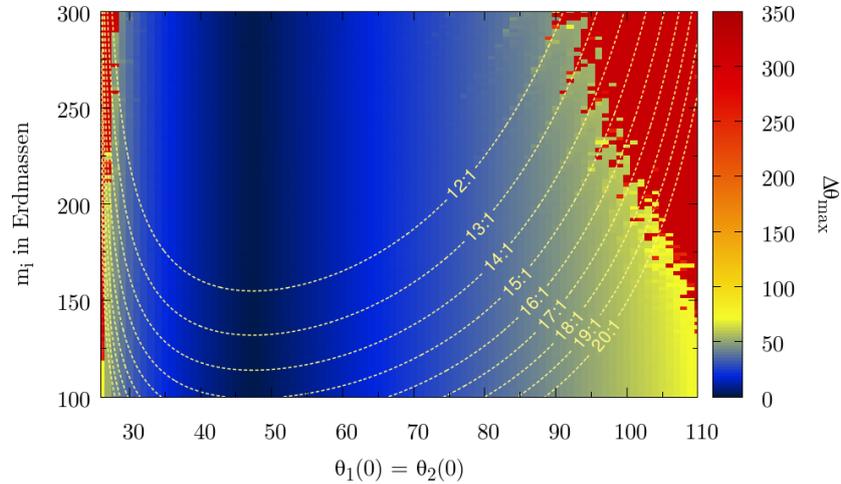
Die Zacken stellen einen scharfen Übergang zwischen Stabilität und Chaos dar. Eine minimale Änderung des Anfangswinkels oder der Planetenmassen entscheidet, ob eine stabile Oszillation vorliegt, oder das System bereits nach kurzer Zeit kollabiert. Eine Langzeitintegration für den gezeigten Ausschnitt war im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, es ist jedoch zu erwarten, dass bei einer solchen sich einige scheinbar stabile Anfangsbedingungen zwar als instabil erweisen, die Zackenstruktur aber grundsätzlich erhalten bleibt. Dies wird durch die Integration einiger ausgewählter Anfangsbedingungen über 10 Millionen Jahre bestätigt.

So bleiben beispielsweise bei drei Planeten mit je 520 Erdmassen die Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 62,5^\circ$ ,  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 70^\circ$  und  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 78^\circ$  jeweils über 10 Millionen Jahre stabil, bei  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 65^\circ$  kollabiert das System hingegen bereits innerhalb der ersten 1.000 Jahre. Drei Planeten mit je 560 Erdmassen bleiben bei  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 65^\circ$  wiederum 10 Millionen Jahre stabil. Es konnten auch Anfangsbedingungen gefunden werden, die 10 Millionen Jahre stabil bleiben, während eine Änderung der Anfangspositionen um nur  $0,2^\circ$  bewirkt, dass das System bereits nach kurzer Zeit instabil wird. So wird  $m_i = 520m_\oplus$ ,  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 67,1^\circ$  nach 30.000 Jahren instabil,  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 67,2^\circ$  nach 5 Millionen Jahren, während  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 67,3^\circ$  10 Millionen Jahre lang stabil bleibt.

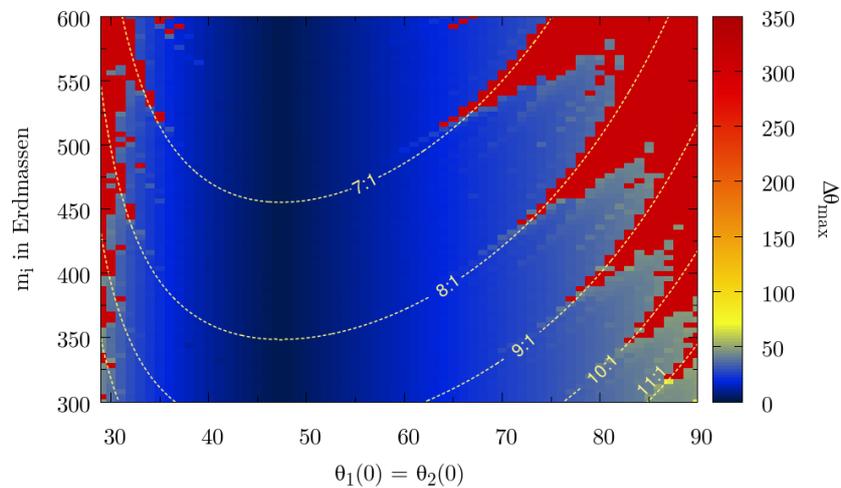
Als Ursache für die Zackenstruktur konnte eine Resonanz zwischen Umlaufperiode und Oszillationsperiode gefunden werden. Ein ganzzahliges Verhältnis zwischen Umlaufperiode und Oszillationsperiode wirkt auf das System destabilisierend. In den Abbildungen 40 und 41 sind die in den Abbildungen 38 und 39a gezeigten Stabilitätskarten mit den ganzzahligen Oszillationsperioden im Bereich zwischen 7 und 20 Jahren überlagert dargestellt. Die Perioden wurden dabei mit Hilfe von Gleichung 83 ermittelt. Jeder instabile Zacken kann eindeutig einer Resonanz zugeordnet werden.

Im in Abbildung 39b gezeigten Ausschnitt sind vermutlich Resonanzen höherer Ordnung für die zusätzlichen instabilen Streifen verantwortlich. Diese konnten jedoch, wie in Abbildung 42 zu sehen ist, nicht eindeutig identifiziert werden. Während der dominante Zacken eindeutig der 7:1 Resonanz zuzuordnen ist, zeigen die übrigen eingezeichneten Resonanzperioden ein widersprüchliches Bild. Während die 13:2

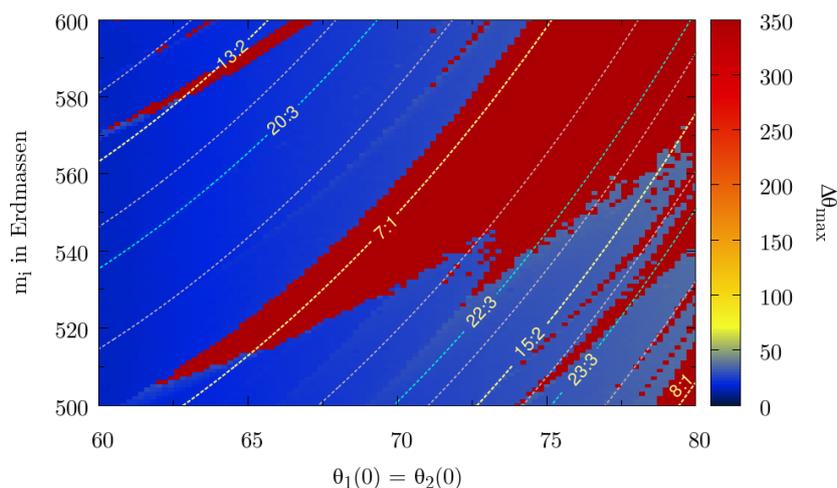
Resonanz beispielsweise für den instabilen Streifen im linken oberen Bildbereich verantwortlich sein dürfte, scheint die 15:2 Resonanz im Gegensatz dazu stabilisierend zu wirken.



**Abbildung 40:** Maximale Abweichung von der Gleichgewichtsdistanz. Die instabilen Zacken treten dann auf, wenn die Oszillationsperiode mit der Umlaufperiode in Resonanz ist.



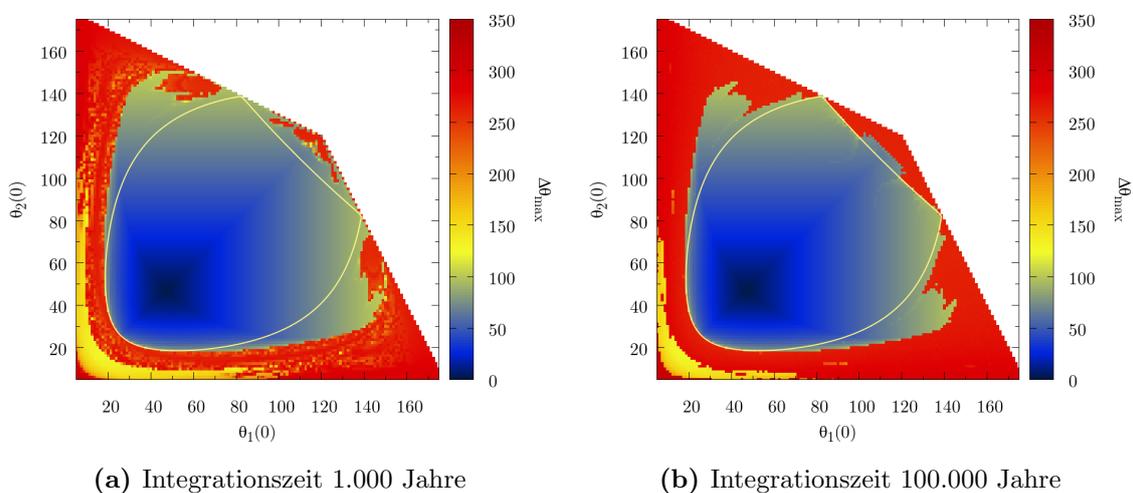
**Abbildung 41:** Bei großen Planetenmassen haben die Resonanzen starke Auswirkungen auf die Stabilität des Systems.



**Abbildung 42:** Resonanzen höherer Ordnung. Die unbeschrifteten grauen Linien zeigen die Resonanzen 32:5 bis 39:5

### 3.3.2 Asymmetrische Anfangsbedingungen

Wie bei der Integration der vereinfachten Bewegungsgleichungen in Abschnitt 3.2.2 wurde für drei Planeten mit je einer Erdmasse ein Gitter aus Anfangsbedingungen gebildet, welche anschließend 1.000, sowie 100.000 Jahre integriert wurden. Die daraus resultierenden Stabilitätskarten sind in Abbildung 43 zu sehen.



(a) Integrationszeit 1.000 Jahre

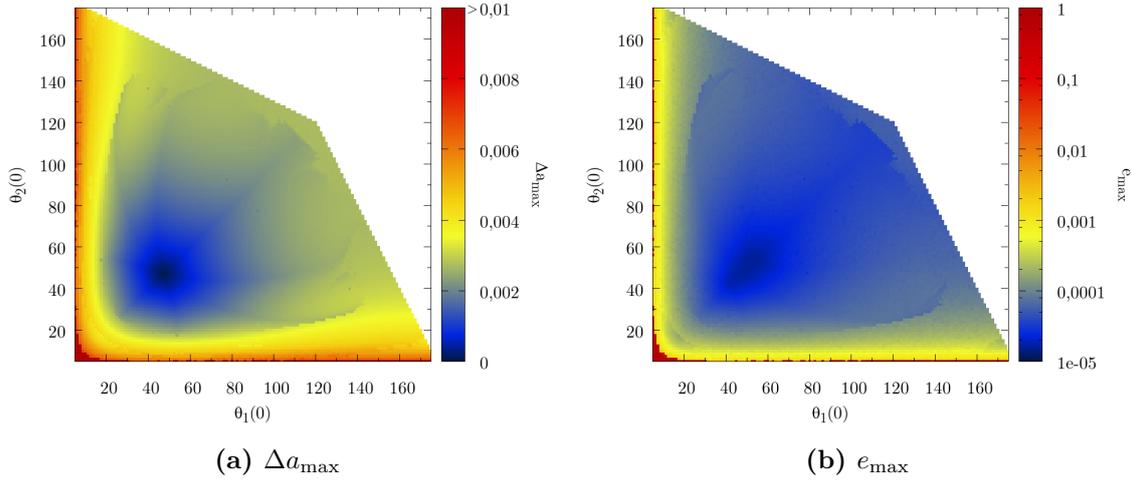
(b) Integrationszeit 100.000 Jahre

**Abbildung 43:** Maximale Abweichung der Differenzwinkel von der Gleichgewichtsdistanz. Die zusätzlich eingezeichnete Konturlinie entspricht der kritischen Störungsenergie von  $E/V_I \approx 1,6868$

Als Indikator für die Stabilität wurde wieder die maximale Abweichung beider Differenzwinkel von der Gleichgewichtsdistanz  $\Delta\theta_{\max}$  gewählt. Die zusätzlich eingezeichnete Konturlinie markiert wie in Abschnitt 3.2.2 die maximale Störungsenergie, die im Rahmen der vereinfachten Bewegungsgleichungen eine reguläre Oszillation garantiert ( $E/V_I = 1,6868$ ). Qualitativ sind dieselben Strukturen wie bei der Integration

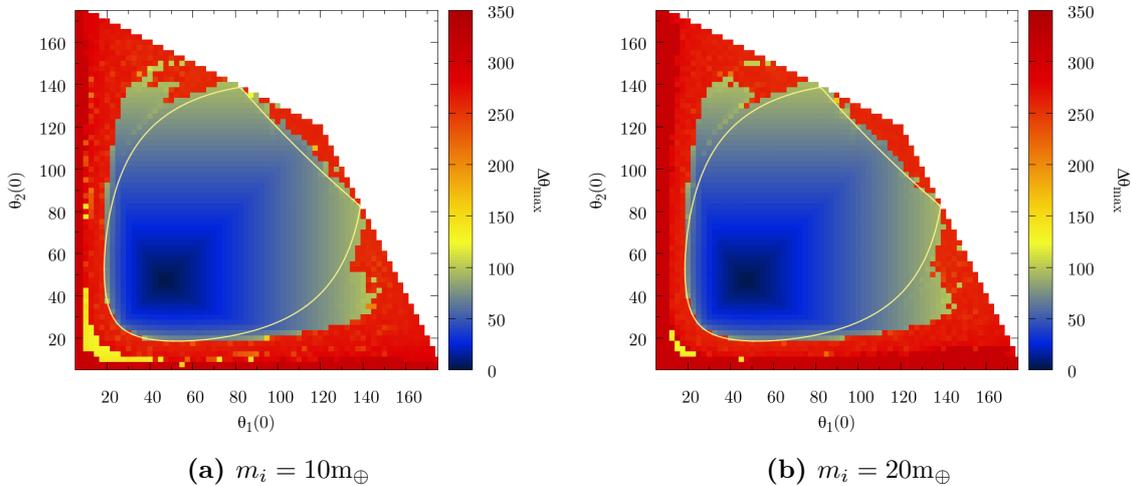
### 3.3 Numerische Integration der exakten Bewegungsgleichungen

der vereinfachten Gleichungen erkennbar, wobei diese sich grundsätzlich bereits nach 1.000 Jahren Integrationszeit zeigen, nach 100.000 Jahren jedoch ausgeprägter sind. In Abbildung 44 sind mit der maximalen große Halbachse, sowie der maximalen Exzentrizität aller drei Planetenbahnen zwei andere Möglichkeiten einer Stabilitätskarte dargestellt.



**Abbildung 44:** Andere Möglichkeiten zur Darstellung einer Stabilitätskarte, Integrationszeit 100.000 Jahre

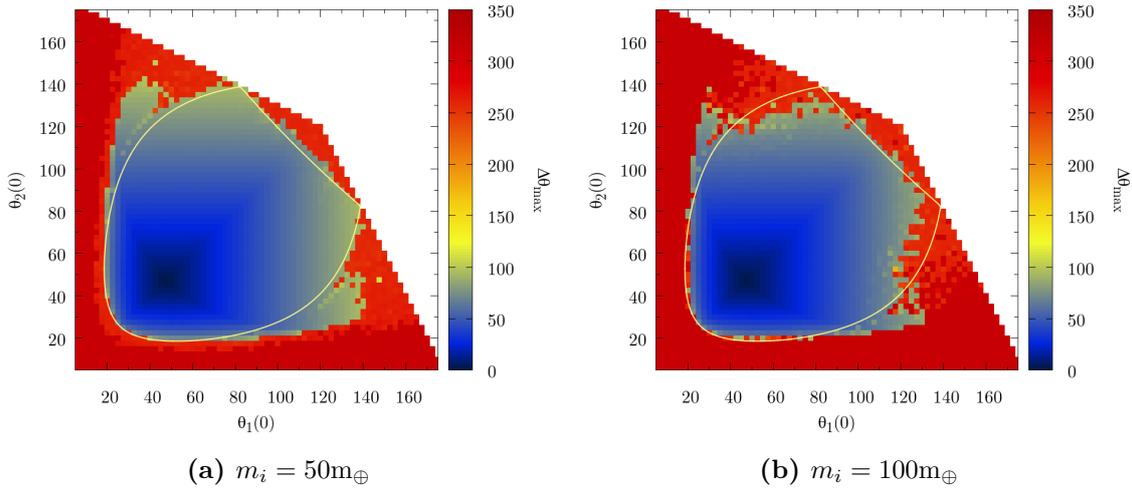
In Abschnitt 3.3.1.3 wurde gezeigt, dass die Masse der Planeten einen Einfluss auf die Größe der stabilen Region hat, da die maximale Störungsenergie, bis zu der das System stabil bleibt, mit zunehmenden Planetenmassen kleiner wird. Dabei wurden jedoch nur symmetrische Anfangsbedingungen betrachtet. Daher wurde auch für größere Planetenmassen ein Gitter aus Anfangsauslenkungen gebildet. Um die Rechenzeit zu verkürzen, wurde jedoch ein gröberes Gitter (Gitterabstand  $2,5^\circ$ ) bei einer Integrationszeit von 1.000 Jahren herangezogen.



**Abbildung 45:** Stabilitätskarten für  $m_i = 10m_{\oplus}$  und  $m_i = 20m_{\oplus}$

Abbildung 45 zeigt die Stabilitätskarten für drei Planeten mit jeweils 10 und 20 Erdmassen. Im stabilen Bereich kann kein Unterschied zur Stabilitätskarte für drei Planeten mit jeweils einer Erdmasse (Abbildung 43) festgestellt werden, bei hohen Störungsenergien zeigt sich die Instabilität jedoch mit zunehmender Planetenmasse früher.

Während bei drei Planeten mit jeweils 50 Erdmassen nach 1.000 Jahren Integrationszeit noch keine chaotischen Orbits im theoretisch stabilen Bereich auftreten (Abbildung 46a), ist dies bei drei Planeten mit jeweils 100 Erdmassen bereits der Fall. Wie Abbildung 46b zeigt, ist das Auftreten von chaotischen Orbits jedoch nicht nur von der Störungsenergie, sondern auch von den ursprünglichen Winkelpositionen der Planeten abhängig. Dass dies nicht nur bei kurzer Integrationsdauer der Fall ist, zeigt die Integration einiger ausgewählter Anfangspositionen über einen längeren Zeitraum. Während beispielsweise bei den ursprünglichen Differenzwinkeln  $\theta_1(0) = 50^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 127,028^\circ$  ( $E/V_I \approx 1,6868$ ) bereits nach 2.000 Jahren der Kollaps der koorbitalen Konfiguration eintritt, bleiben sowohl  $\theta_1(0) = 28^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 100,75^\circ$  ( $E/V_I \approx 1,6868$ ), als auch  $\theta_1(0) = 25^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 102^\circ$  ( $E/V_I \approx 1,8$ ) über einen Zeitraum von 10 Millionen Jahren stabil.



**Abbildung 46:** Stabilitätskarten für  $m_i = 50m_\oplus$  und  $m_i = 100m_\oplus$

Bei noch größeren Planetenmassen hat die Konturlinie  $E/V_I = 1,6868$  keine Aussagekraft mehr, wie in Abbildung 47 zu sehen ist. Die zweite zusätzlich eingezeichnete Konturlinie entspricht jenem Wert, der in Abschnitt 3.3.1.1 für symmetrische Anfangsbedingungen als größte noch stabile Störungsenergie ermittelt wurde. Bei 300 Erdmassen ist dies  $E/V_I = 1,422$  ( $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}} = 4,7$ ), bei 540 Erdmassen  $E/V_I = 1,189$  ( $\theta_{\text{mvc}}/\theta_{\text{Hill}} = 4,94$ ). Diese Konturlinien entsprechen in grober Nähe dem tatsächlich stabilen Bereich.

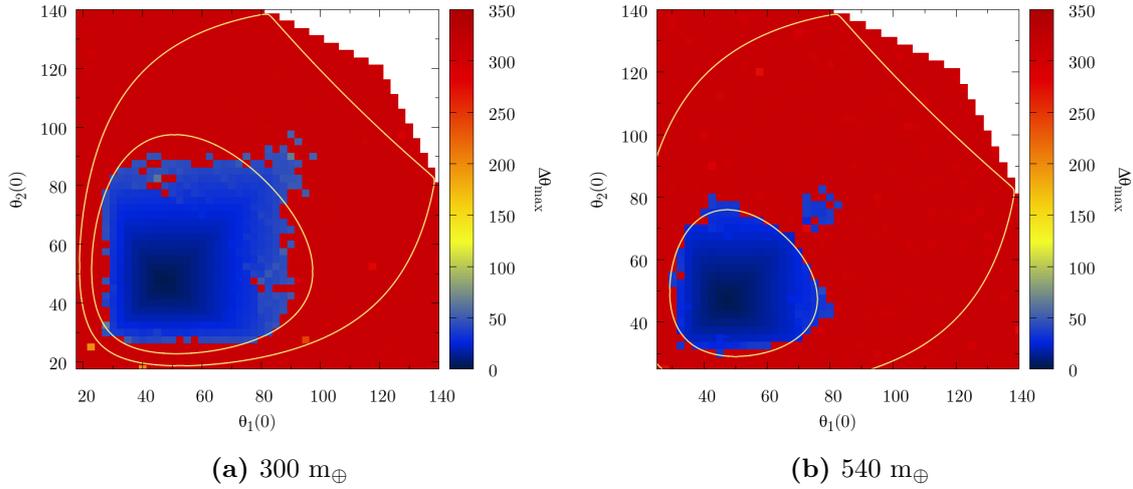


Abbildung 47: Stabilitätskarten für  $m_i = 300m_{\oplus}$  und  $m_i = 540m_{\oplus}$

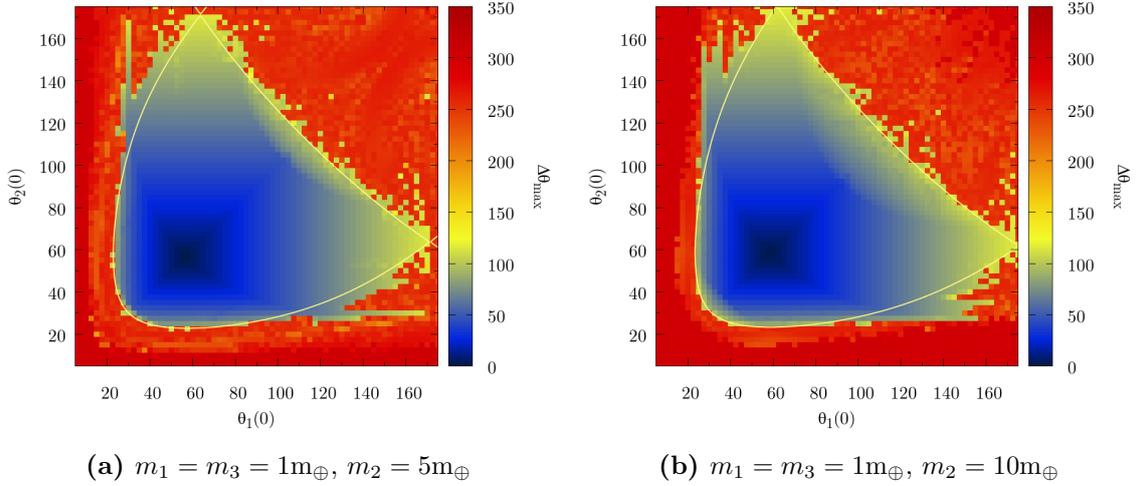
### 3.3.3 Zwei gleiche Massen

In Abschnitt 2.3.4 wurde bereits die Form des Potentials für einige ausgewählte Konfigurationen mit unterschiedlichen Massenverhältnissen  $\mu_i$  gezeigt, sowie ermittelt, dass die bekannte Trojaner-Konfiguration mit einem dominanten Planeten die größte stabile Zone aufweist. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse einiger Simulationen für Systeme mit unterschiedlichen  $\mu_i$  vorgestellt, wobei zunächst wieder mit einer Einschränkung, nämlich dass zwei der Planeten die gleiche Masse haben, begonnen wurde. Da bei unterschiedlichen Planetenmassen die Anordnung der Planeten eine entscheidende Rolle spielt, wurde das Gitter aus Anfangsbedingungen über den gesamten Winkelbereich  $0^\circ < \theta_i < 180^\circ$  erstellt. Der Integrationszeitraum beträgt, wenn nicht anders angegeben, 1.000 Jahre.

#### 3.3.3.1 $m_1 = m_3$

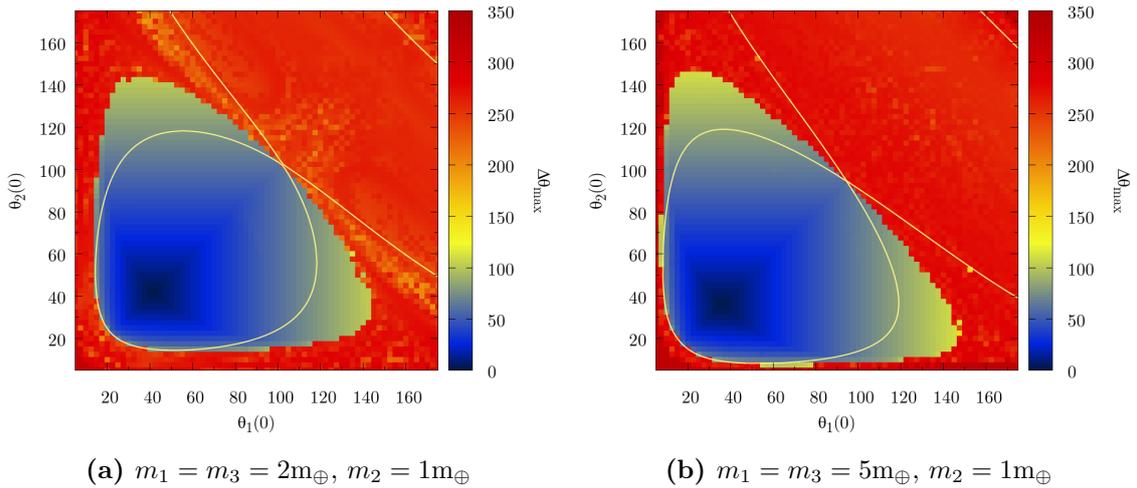
Abbildung 48a zeigt die Stabilitätskarte für den Fall, dass der mittlere Planet um den Faktor 5 schwerer als die beiden äußeren ist. Der stabile Gleichgewichtspunkt liegt hier bei  $\theta_1 = \theta_2 = 56,60377^\circ$ , die analytisch bestimmte Stabilitätsgrenze (eingzeichnete Konturlinie) bei  $E/V_I = 1,8409$ . In Abbildung 48b ist der mittlere Planet um den Faktor 10 schwerer als die beiden äußeren. Der stabile Gleichgewichtspunkt liegt bei  $\theta_1 = \theta_2 = 58,25573^\circ$ , die Stabilitätsgrenze bei  $E/V_I = 1,9080$ .

Erhöht man die Masse des mittleren Planeten weiter, erhält man im Grenzfall von zwei, im Vergleich zum mittleren Planeten masselosen äußeren Planeten, die Trojaner-Konfiguration mit dem Gleichgewichtspunkt  $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$  und der Stabilitätsgrenze  $E/V_I = 2$ . Da diese bereits ausführlich untersucht ist (siehe z.B. Robutel & Souchay, 2010), wurden keine weiteren Simulationen mit einem dominanten mittleren Planeten durchgeführt.



**Abbildung 48:** Mittlerer Planet schwerer als die beiden äußeren

Ist der mittlere Planet kleiner als die beiden äußeren, hängt die Größe des stabilen Bereichs stark vom Massenverhältnis zwischen den Planeten untereinander, aber auch vom Massenverhältnis zwischen den Planeten und dem Zentralkörper ab. Sind die beiden äußeren Planeten nur geringfügig schwerer als der mittlere, ist bei kurzer Integrationsdauer und geringen Planetenmassen der tatsächlich stabile Bereich deutlich größer als der aus den vereinfachten Bewegungsgleichungen folgende und wird mit zunehmender Masse der äußeren Planeten größer (Abbildung 49). Eine stichprobenhafte Überprüfung zeigte, dass auch bei einer Integrationsdauer von einer Million Jahren noch zahlreiche stabile Anfangsbedingungen im theoretisch chaotischen Bereich existieren.



**Abbildung 49:** Mittlerer Planet leichter als die beiden äußeren

Wird die Masse der beiden äußeren Planeten jedoch weiter erhöht, nimmt die Größe des stabilen Bereichs rasch ab (Abbildung 50). Bei einem Massenverhältnis zwi-

schen mittlerem und äußeren Planeten von 1:100, bleibt nur noch ein kleiner stabiler Bereich in der unmittelbaren Umgebung der Gleichgewichtsposition, welche bei  $\theta_1 = \theta_2 = 30,38953^\circ$  liegt, übrig (Abbildung 51). Dies ist dadurch zu erklären, dass in diesem Fall der mittlere Planet den durch die beiden äußeren Planeten verursachten starken Störungen ausgesetzt ist, aufgrund seiner geringen Masse jedoch selbst nur wenig zur Stabilisierung des Systems beiträgt. Dieses Ergebnis kann so interpretiert werden, dass es sehr unwahrscheinlich ist, in einem System, bestehend aus zwei annähernd gleich großen koorbitalen Planeten, zusätzlich koorbitale Asteroiden in der Mitte zwischen den beiden Planeten zu finden.

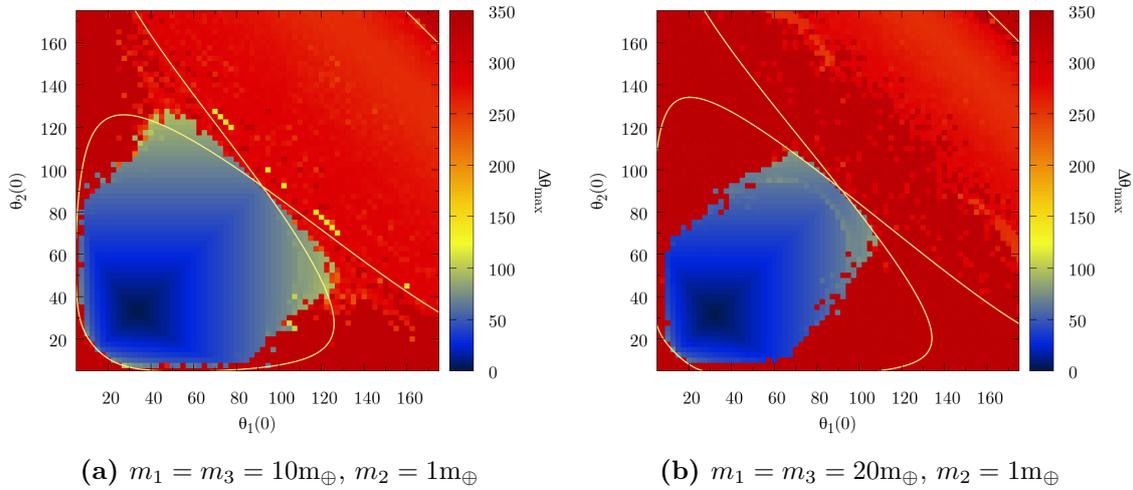


Abbildung 50: Mittlerer Planet leichter als die beiden äußeren

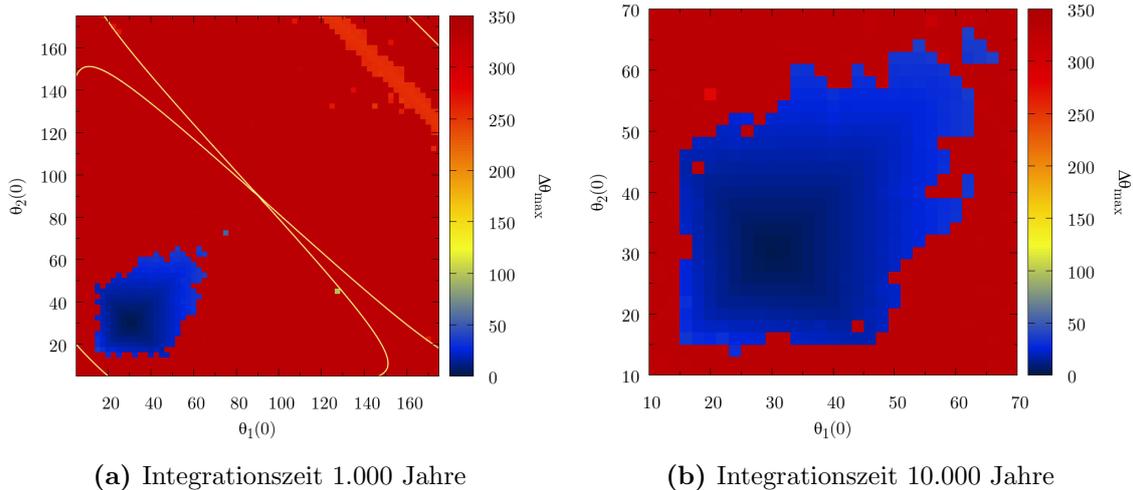
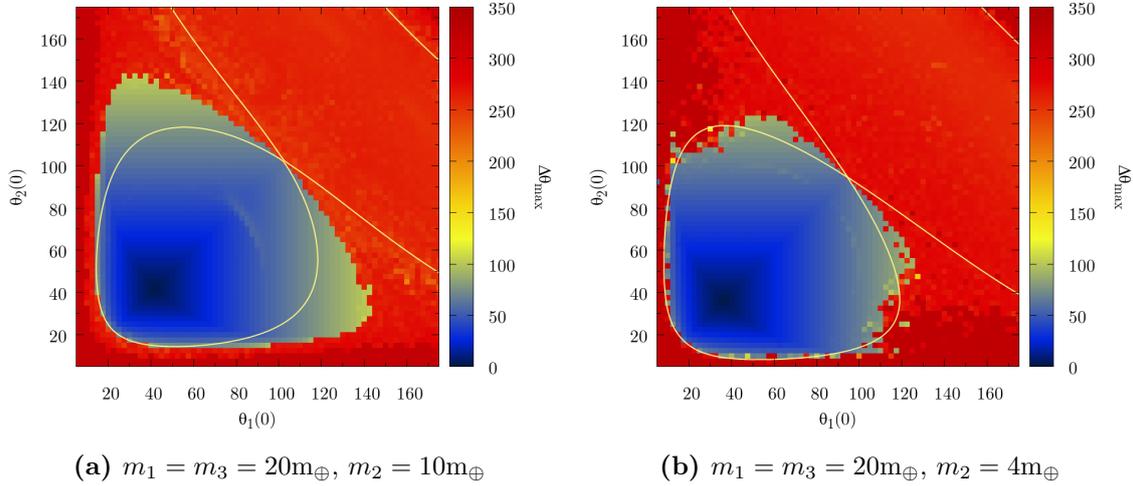


Abbildung 51:  $m_1 = m_3 = 100m_\oplus, m_2 = 1m_\oplus$

Bei größeren Planetenmassen wirkt sich das Massenverhältnis der Planeten untereinander noch stärker aus, wie im Vergleich von Abbildung 49 mit Abbildung 52 zu sehen ist. Während eine Erhöhung der Planetenmassen um den Faktor 10 bei

einem Massenverhältnis zwischen innerem und äußeren Planeten von 1:2 kaum eine Auswirkung auf die Größe des stabilen Bereichs hat, bewirkt eine Erhöhung der Planetenmassen um den Faktor 4 bei einem Massenverhältnis von 1:5 eine deutliche Verkleinerung des stabilen Bereichs.

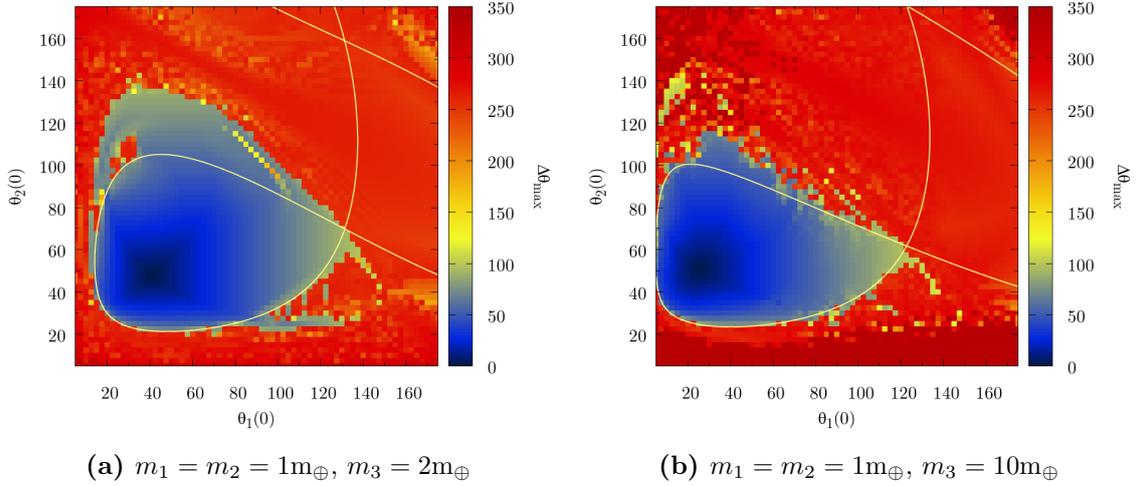


**Abbildung 52:** Mittlerer Planet leichter als die beiden äußeren

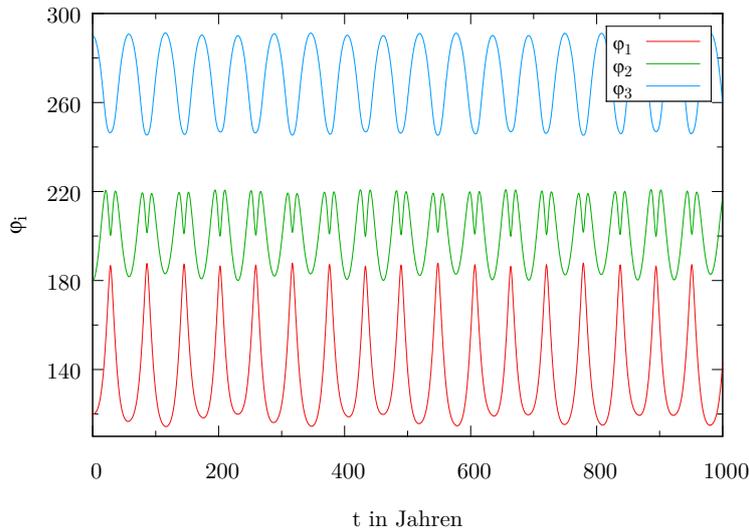
### 3.3.3.2 $m_1 = m_2$

Wenn die zwei gleich schweren Planeten nicht symmetrisch um den mittleren Planeten angeordnet sind, sondern nebeneinander liegen, ist auch das Potential als Funktion von  $\theta_1$  und  $\theta_2$  asymmetrisch. Das bedeutet, dass die Gleichgewichtsdistanzen  $\theta_{1_0}$  und  $\theta_{2_0}$  unterschiedliche Werte haben und auch die für eine stabile Oszillation erforderlichen maximal möglichen Abweichungen von den beiden Differenzwinkeln unterschiedlich groß sind. Für die Konfiguration  $m_2/m_1 = 1$ ,  $m_3/m_1 = 2$  sind die Gleichgewichtsdistanzen beispielsweise  $\theta_1 \approx 40,83683^\circ$ ,  $\theta_2 \approx 48,02600^\circ$ . Während die Distanz zwischen den beiden gleich schweren Planeten ( $\theta_1$ ) im Rahmen der vereinfachten Gleichungen bei stabiler Oszillation zwischen  $14^\circ$  und  $131^\circ$  liegt, ist  $\theta_2$  auf einen kleineren Winkelbereich von  $21^\circ - 105^\circ$  beschränkt.

Die numerische Integration der exakten Bewegungsgleichungen zeigt, dass das System bei kurzer Integrationsdauer und geringen Planetenmassen auch bei größeren ursprünglichen  $\theta_2$ -Werten stabil bleibt (Abbildung 53a). Eine stichprobenhafte Überprüfung zeigte, dass einige dieser Anfangsbedingungen auch bei der zehnfachen Planetenmasse über eine Million Jahre stabil blieben. Als Beispiel für solche Anfangsbedingungen ist in Abbildung 54 der zeitliche Verlauf der azimuthalen Oszillation für die Anfangsbedingungen  $\theta_1(0) = 60^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 110^\circ$  dargestellt.



**Abbildung 53:** Zwei Planeten mit gleicher Masse, asymmetrische Anordnung



**Abbildung 54:**  $\theta_1(0) = 60^\circ, \theta_2(0) = 110^\circ, \xi_1(0) = \xi_2(0) = \xi_3(0) = 0,$   
 $m_1 = m_2 = 10m_{\oplus}, m_3 = 20m_{\oplus}$

Ist das Massenverhältnis zwischen dem dritten und den anderen beiden Planeten größer, stimmt der stabile Bereich besser mit den vereinfachten Gleichungen überein, wie in Abbildung 53b zu sehen ist. Es ist jedoch ebenfalls klar ersichtlich, dass die beiden kleineren Planeten einander sehr nahe kommen können, was bei größeren Planetenmassen und längerer Integrationsdauer zum Kollaps der koorbitalen Konfiguration führen kann.

Abbildung 55 zeigt die Stabilitätskarten für den Fall, dass die zwei gleich schweren Planeten eine größere Masse haben, als der dritte Planet. In diesem Fall bleibt der Differenzwinkel zwischen den beiden größeren Planeten kleiner als der Differenzwinkel zwischen dem mittlerem und dem dritten Planeten. Wie auch bei symmetrischer Anordnung von zwei schwereren und einem leichteren Planeten nimmt

die Größe des stabilen Bereichs mit zunehmendem Massenverhältnis zwischen den Planeten schnell ab. Bei einem großen Massenverhältnis ist eine stabile koorbitale Konfiguration von drei Objekten nur dann möglich, wenn sich die beiden massereichen Planeten annähernd in der Gleichgewichtsdistanz zueinander befinden, wie in Abbildung 55c am Beispiel des Massenverhältnis 1:100 zu sehen ist.

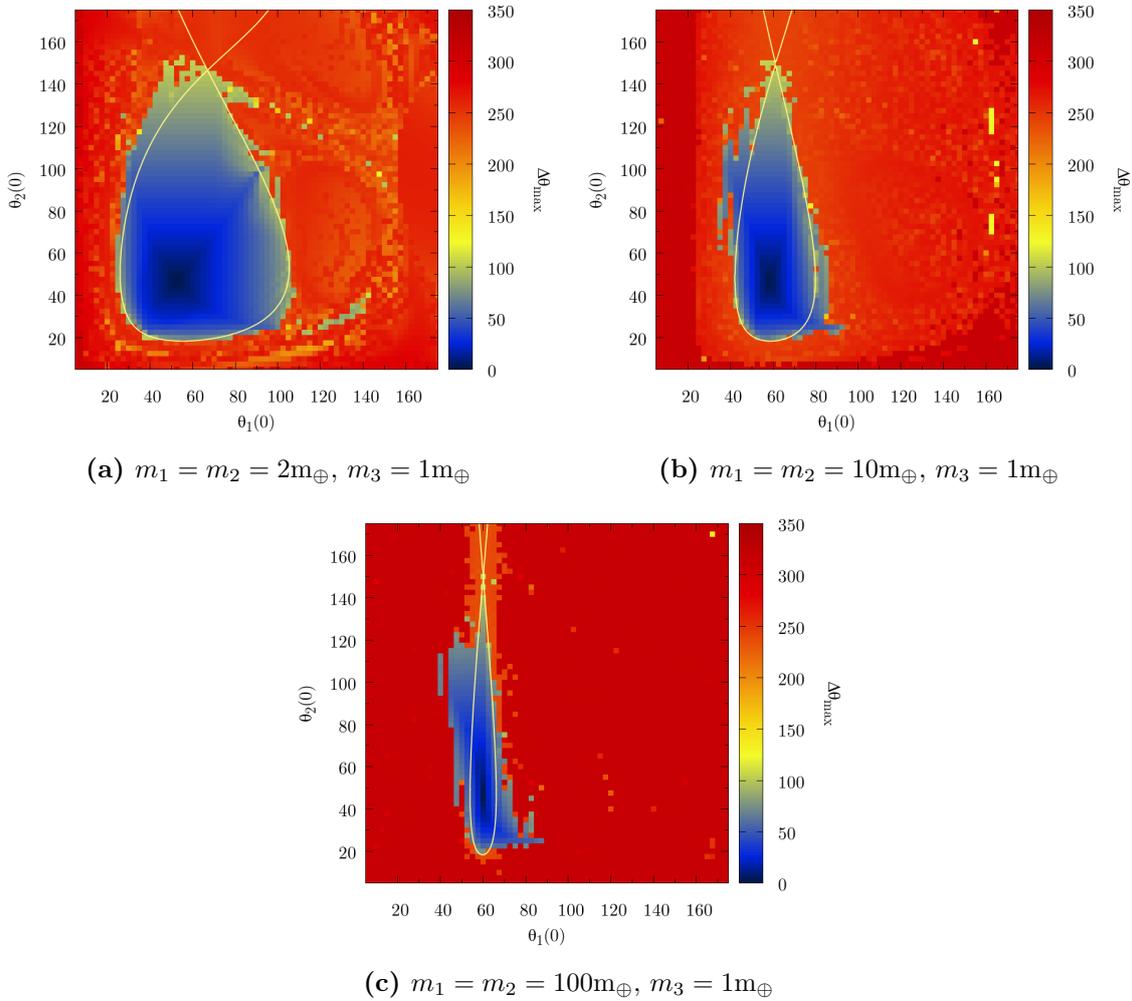


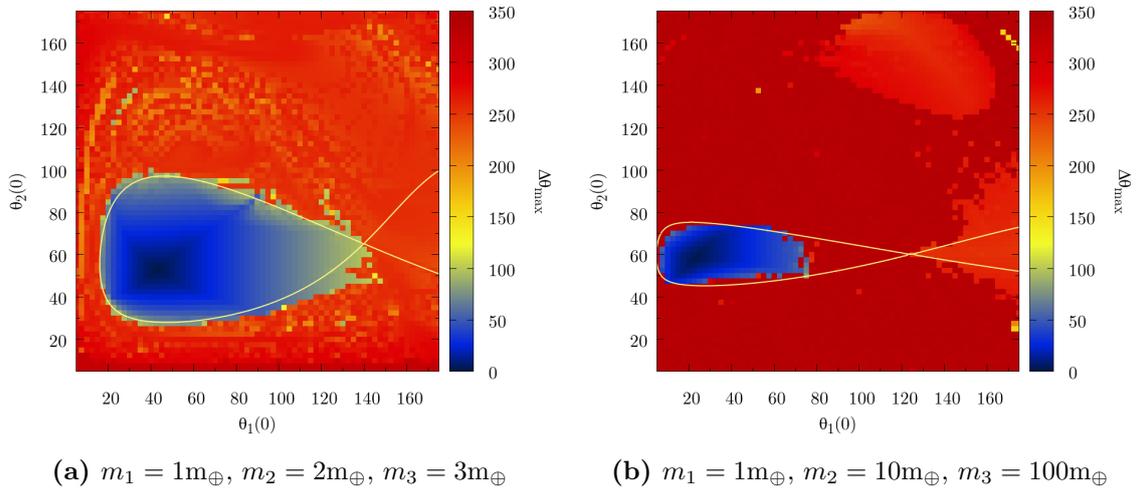
Abbildung 55: Zwei Planeten mit gleicher Masse, asymmetrische Anordnung

### 3.3.4 Drei unterschiedliche Massen

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, hängt die Größe des stabilen Bereichs, und damit die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer stabilen Konfiguration bei zwei gleich großen Planeten stark vom Massenverhältnis zwischen den gleich großen und dem dritten Planeten ab. Je unterschiedlicher die Planetenmassen sind, desto kleiner wird der stabile Bereich. Zur Verallgemeinerung dieser Aussage wurden zum Abschluss dieser Arbeit einige ausgewählte Konfigurationen mit drei unterschiedlichen Planetenmassen betrachtet. In Abbildung 56a ist die Stabilitätskarte einer Konfiguration mit geringem Massenverhältnis abgebildet. Der stabile Bereich ist

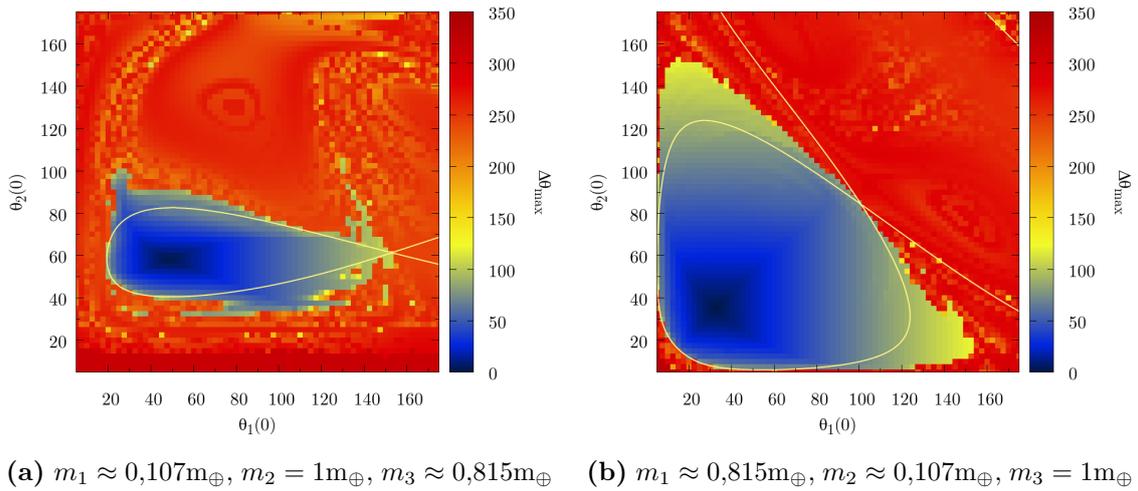
### 3.3 Numerische Integration der exakten Bewegungsgleichungen

zwar deutlich kleiner als bei drei Planeten mit annähernd gleichen Massen, jedoch groß genug, dass das System auch mit zusätzlichen Störungen über einen längeren Zeitraum stabil bleiben kann. Bei sehr unterschiedlichen Planetenmassen (Abbildung 56b) bestätigt sich das Ergebnis aus Abschnitt 3.3.3.1. Ein solches System ist nur in einem kleinen Bereich um die Gleichgewichtskonfiguration stabil.



**Abbildung 56:** Drei unterschiedliche Planetenmassen

Abbildung 57 zeigt die Stabilitätskarten für ein koorbitales System, bestehend aus drei Planeten mit den Massen von Mars, Venus und Erde. Der deutliche Unterschied in der Größe des stabilen Bereichs zeigt, dass nicht nur die absoluten Planetenmassen, sondern auch deren Anordnung entscheidend für die Stabilität des Systems sind.



**Abbildung 57:** Drei unterschiedliche Planetenmassen

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das sogenannte Drei-Trojaner-Problem analytisch und numerisch betrachtet. Dabei handelt es sich um eine stabile Konfiguration von drei Himmelskörpern mit nicht vernachlässigbaren Massen, die sich auf einem gemeinsamen mittleren Orbit um einen zentralen Körper bewegen.

Im ersten Teil der Arbeit wurde die Herleitung von vereinfachten Bewegungsgleichungen nach Salo & Yoder (1988) beschrieben, mit deren Hilfe die Gleichgewichtspunkte des Systems berechnet werden können. Es zeigte sich, dass für jede Anordnungsmöglichkeit von drei Planeten mit beliebigen Massen jeweils drei Gleichgewichtskonfigurationen existieren. Mit Hilfe einer Eigenwertanalyse wurde festgestellt, dass nur eine dieser Konfigurationen gegen Störungen stabil ist, und zwar jene, bei der sich die drei Planeten auf der gleichen Seite der gemeinsamen Umlaufbahn mit einer Winkeldistanz von weniger als  $60^\circ$  zwischen zwei benachbarten Planeten befinden. Im Spezialfall einer Konfiguration bestehend aus drei gleich schweren Planeten befinden sich die stabilen Gleichgewichtspunkte in einer Winkeldistanz von etwa  $47,36^\circ$  links und rechts des mittleren Planeten.

Die vereinfachten Bewegungsgleichungen können außerdem dazu verwendet werden, einige grundsätzliche Eigenschaften des Systems zu ermitteln. So geht aus der Eigenwertanalyse beispielsweise hervor, dass die Planeten bei Auslenkung aus der Gleichgewichtslage eine Oszillation um die Gleichgewichtspunkte ausführen. Diese Oszillation ist eine Überlagerung von zwei Schwingungsmoden, deren Perioden analytisch berechnet werden können. Mit Hilfe des vereinfachten Potentials können die Anfangsbedingungen ermittelt werden, bei denen das System von dieser regulären Oszillation in einen chaotischen Zustand übergeht.

Im Anschluss an die analytische Betrachtung wurden die exakten Bewegungsgleichungen numerisch integriert und mit den vereinfachten Bewegungsgleichungen verglichen. Es zeigte sich, dass die vereinfachten Gleichungen eine gute Beschreibung des Systems liefern, sofern das Massenverhältnis zwischen dem Zentralkörper und den Planeten ausreichend groß ist und die drei Planetenmassen in der gleichen Größenordnung liegen. Bei großen Planetenmassen bewirken Resonanzeffekte ein komplexes Verhalten des Systems.

Im letzten Teil der Arbeit wurden einige numerische Simulationen von ausgewählten Systemen mit unterschiedlichen Planetenmassen durchgeführt, die zeigten, dass die Existenz solcher Systeme aus dynamischer Sicht theoretisch möglich ist. Differieren die Planetenmassen jedoch stark, ist die Langzeitstabilität eines solchen Systems nur unter sehr eingeschränkten Anfangsbedingungen möglich.

## Abstract

In this thesis, the so called Three Trojan Problem is studied analytically and numerically. This problem consists of a stable configuration of three celestial bodies with non-negligible masses revolving around a central mass and sharing the same mean orbit.

In the first section of this thesis, the derivation of simplified equations of motion based on the work of Salo & Yoder (1988) is described. These simplified equations enable the calculation of the stationary solutions to the system. For every possible arrangement of three planets with arbitrary masses, there exist three stationary configurations. Using an eigenvalue analysis, it is found that only one of these configurations is stable against perturbations; namely, the one where the three planets are arranged on the same side of the common orbit, with angular separations of less than  $60^\circ$  between two subsequent planets. In the special case of a configuration consisting of three planets with equal mass, the angular equilibrium distance is  $47.36^\circ$  to the left and to the right of the central planet.

The simplified equations can also be used to determine some fundamental properties of the system. The eigenvalue analysis for example, shows that the planets perform an oscillation around the stationary points when displaced from the equilibrium positions. This oscillation is a superposition of two basic modes whose periods can be calculated analytically. With the aid of the simplified gravitational potential, the initial conditions where a transition between regular oscillation and chaotic motion occurs can be determined.

Subsequent to the analytical approach, the exact equations of motion are integrated numerically and compared with the simplified equations. This shows that the simplified equations provide a good description of the system, provided that the mass ratio between the central mass and the planets is sufficiently large and that the mass of the planets are of the same order of magnitude. When the planet masses are large, resonance effects lead to a complex behavior of the system.

In the last part of this work, some numerical simulations of selected systems with unequal planet masses are performed. These simulations show, that the existence of such systems is theoretically possible from a dynamic perspective. However, if the planet masses differ strongly, the long term stability of such a system is only possible if certain initial conditions are met.

## Quellenangabe

- Belbruno, E., Gott, J.R. 2005, AJ, 129, 1724
- Christou, A.A., Wiegert, P. 2012, Icar, 217, 27
- Giuppone, C.A., Benítez-Llambay, P., Beaugé, C. 2012, MNRAS, 421, 356
- Hanslmeier, A., Dvorak, R. 1984, A&A, 132, 203
- IAU Minor Planet Center, abgerufen am 17.5.2013  
<http://www.minorplanetcenter.net/iau/lists/Trojans.html>
- Jutzi, M., Asphaug, E. 2011, Natur, 476, 69
- NASA Solar System Exploration, abgerufen am 29.10.2011  
<http://solarsystem.nasa.gov/>
- Reegen, P. 2007, A&A, 467, 1353
- Renner, S., Sicardy, B. 2004, CeMDA, 88, 397
- Robutel, P., Souchay, J. 2010, LNP, 790, 195
- Salo, H., Yoder, C.F. 1988, A&A, 205, 309
- Schwarz, R., Süli, Á., Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E. 2009, CeMDA, 104, 69
- Thüring, B. 1931, AN, 243, 181
- Yoder, C.F., Colombo, G., Synnott, S.P., Yoder, K.A. 1983, Icar, 53, 431

## **Danksagung**

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mich bei der Entstehung dieser Diplomarbeit begleitet und unterstützt haben.

Besonderer Dank geht an meinen Betreuer Prof. Dr. Rudolf Dvorak für seine Geduld und die immer freundliche fachliche Unterstützung.

Bei Ákos Bazsó bedanke ich mich für seine fachliche Hilfe.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Eltern, die mir durch ihre finanzielle Unterstützung das Studium ermöglicht haben.

## Lebenslauf

### Persönliche Daten

Name: Simon Dauth  
Geburtsdatum: 8.1.1984  
Geburtsort: Wien, Österreich  
Adresse: St. Elisabeth-Platz 6/31, 1040 Wien  
e-mail Adresse: simon.dauth@chello.at

### Ausbildung

2009 - 2013: Masterstudium Astronomie, Universität Wien  
2004 - 2009: Bakkalaureatsstudium Astronomie, Universität Wien  
1994 - 2002: Wiedner Gymnasium, 1040 Wien (Matura)

### Beruflicher Werdegang

2003 - 2004: Kinderfreunde Wien - Zivildienst