



universität
wien

MASTERARBEIT

Titel der Masterarbeit

„Teilchenbeschleunigung in galaktischen Winden“

verfasst von

Florian Ragossnig, Bakk. rer. nat.

angestrebter akademischer Grad

Master of Science (MSc)

Wien, 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 066 881

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Masterstudium Astronomie UG 2002

Betreut von:

ao. Univ.-Prof. Dr. Ernst Dorfi

Abstract

Because *cosmic rays (CRs)* represent a main *heating process* in the *interstellar medium (ISM)*, interactions of high-energetic, charged particles with the ISM should be considered in all wind simulations. Especially the topic of *galactic wind simulations* will benefit from an implementation of *CR particle conservation equations (Fokker-Planck-equation)*.

This theses gives an overview about the different types of acceleration processes of charged particles, with a main focus on *1st Order Fermi-Acceleration*. It will be shown that it is possible to accelerate particles to the highest energies discovered, with the use of shock acceleration only. In doing so, the argument of the different slopes in the range of the “*knee*“ and the “*ankle*“ of the *CR particle spectrum* will also be discussed. Furthermore, a *galactic wind model*, which considers the physics of CR particles (*Fokker-Planck-equation*), on the conception of a model for galactic wind simulations (*GAWI*) based on Dorfi & Drury (1987) and Dorfi et al. (2006), will be created. This model is based on an *implicit code*, which makes it possible to explain the expansion of galactic winds in consideration of the so called *flux-tube geometry*, with the use of relatively large timesteps. In comparison to older models (see Dorfi, 1984, 1985) it is important, that *CR-pressure* and *CR-energy* have not been computed explicitly from the CR-conservation equation. Therefore it has not been possible to obtain the *CR-adiabatic index γ_C* directly from CR-equations. Remarkable results have been generated, especially in relation to *test calculations*. These test calculations, with the assumption of CRs behaving as *test particles (no coupling of hydrodynamics with CR-equations)*, have been conducted to prove the reliability of the numerical method, because the obtained results can then be compared with the *analytic solution*. Moreover, it will be tested using different initial models, which have a strong dependence on the accuracy of simulations. The second part of simulations will be held in a “*physically correct*“ (*coupling between hydrodynamics and CR-conservation*) state, which correspond thoroughly with results from earlier simulations (see Dorfi, 1984, 1985).

As the CR-values in these models are only given as an approximation, the results from the actual model also represent a test of the numerical method. In conclusion, a prospect on further possibilities, due to the use of the Fokker-Planck-equation, will be shown. For example, with introducing *spherical geometry*, it would be possible to develop more detailed information about the evolution of *stellar winds* and *supernova remnants (SNR)*. Furthermore, with introducing *synchrotron losses* in the Fokker-Planck equation, it will be possible to investigate the behavior of *electrons (and especially synchrotron-radiation)* within that model as well.

Zusammenfassung

Da *kosmische Strahlung (CR)* einen wesentlichen Heizprozess im *interstellaren Medium (ISM)* darstellt, sollte eine Berücksichtigung der Wechselwirkung von hochenergetischen, geladenen Teilchen mit dem ISM in sämtlichen Wind-Simulationen erfolgen. Besonders das Gebiet der Simulation von *galaktischen Winden* sollte sehr stark von der Implementation von CR-Erhaltungsgleichungen profitieren.

Diese Arbeit bietet einen Überblick über die verschiedenen Arten der Beschleunigung von geladenen Teilchen, wobei das Hauptaugenmerk auf der Beschleunigung durch einen *Fermiprozess 1. Ordnung* liegt. Es wird gezeigt, dass es, mit Hilfe von Stoßbeschleunigung durchaus möglich ist, Teilchen auf die höchsten, beobachteten Energien zu beschleunigen, wobei auch das Argument der Steigungsänderung im Bereich von „*Knie*“ und „*Knöchel*“ des *CR-Teilchenspektrums* diskutiert wird. Weiters wird ein *Modell eines galaktischen Windes*, unter Berücksichtigung der Physik der CR-Teilchen (*Fokker-Planck-Gleichung*) und ausgehend von einem Modell zur Simulation von galaktischen Winden *GAWI* (vgl. *Dorfi et al., 2006; Dorfi & Drury, 1987*), erstellt. Dieses Modell beruht auf einem *impliziten Code*, mit dessen Hilfe es möglich ist, die Ausbreitung eines galaktischen Windes, unter Berücksichtigung der sogenannten *Flussröhrengemetrie* mit relativ großen Zeitschritten, zu bestimmen. Wesentlich ist, dass im Vergleich zu früheren Modellen (*Dorfi, 1984, 1985*) der *CR-Druck* sowie die *CR-Energie* explizit aus der CR-Erhaltungsgleichung bestimmt werden können, wodurch auch eine direkte Berechnung des *CR-Adiabatenkoeffizienten* γ_C möglich ist. Die aus den Modellrechnungen resultierenden Ergebnisse erweisen sich als außerordentlich gut im Bezug auf den Vergleich mit *Testrechnungen*. Um die Numerik des Modells zu überprüfen, werden Testrechnungen durchgeführt, wobei davon ausgegangen wird, dass die CRs nicht mit dem hydrodynamischen Stoß koppeln. Die daraus erhaltenen Ergebnisse machen dann einen Vergleich mit einer analytischen Lösung möglich. Weiters

wird auch mit verschiedenen Anfangsmodellen für die CR-Strahlung experimentiert, wobei sich zeigt, dass die Wahl des Anfangsmodells die Genauigkeit des Ergebnisses beeinflusst. Im zweiten Teil der Modellrechnungen werden Simulationen im Realfall (*Kopplung Hydrodynamik mit CR-Erhaltung*) durchgeführt, welche sich sehr gut mit Ergebnissen aus früheren Simulationen nach Dorfi (1984) und Dorfi (1985) decken. Da bei älteren Modellen die CR-Größen nur sehr stark approximiert eingehen, stellen diese Ergebnisse auch einen Test der numerischen Methodik dar. Abschließend wird noch ein Ausblick auf die Möglichkeiten gegeben, welche durch Implementation der Fokker-Planck-Gleichung nun offenstehen. Die Berücksichtigung der *sphärischen Geometrie* ermöglicht es beispielsweise *stellare Winde* und *Supernova-Überreste* zu untersuchen und die Einbeziehung von *Synchrotronverlusten* in die Fokker-Planck-Gleichung macht eine Anwendung für *Elektronen* e^- möglich.

Danksagung

Zu Beginn möchte ich mich bei *Prof. Dr. Ernst Dorfi* bedanken, der mir immer mit Rat und Tat zur Seite stand und mich mit zahlreichen Tipps wieder auf den richtigen Weg brachte - trotzdem ihm meine Fragen vielleicht das eine oder auch andere graue Haar gekostet haben.

Besonderer Dank gilt meiner Familie und im Speziellen meiner Mutter *Evelyne Ragossnig* sowie meiner Großmutter *Ingeborg Gspan*, ohne deren Unterstützung es niemals zur Fertigstellung dieser Arbeit gekommen wäre. Ein weiteres außerordentliches Dankeschön geht an meinen Studienkollegen und guten Freund *Georg Lochmann*, der mich besonders in der Studienzeit und auch in der Entstehungsphase dieser Arbeit in zahlreichen Diskussionen immer wieder auf die richtige Fährte brachte, sogar als es manchmal aussichtslos erschien.

Auch Herrn *Daniel Steiner* und Herrn *Dr. Alexander Stökl* möchte ich danken, da auch sie bei dem einen oder anderen Problem eine große Hilfe waren.

Weiters möchte ich auch meiner Lebensgefährtin *Sylvia Hödlmoser* dafür danken, dass sie meine Stimmungsschwankungen beim Entstehen dieser Arbeit toleriert hat.

Zu guter Letzt geht ein großer Dank natürlich auch an meine Freunde, die meine Studienzeit in Wien zu einem unvergesslichen Ereignis machten, ein Lebensabschnitt auf den ich gerne zurückblicken werde.

„Die besten Dinge im Leben sind nicht die, die man für Geld bekommt.“

Albert Einstein

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Beschleunigungsmechanismen	4
1.1.1	Zyklotron-Mechanismus	4
1.1.2	Beschleunigung durch Sonnenfleckenpaare	5
1.1.3	Beschleunigung in Stoßwellen	6
1.1.4	Fermi-Beschleunigung	10
1.1.5	Beschleunigung in Pulsaren	12
1.1.6	Beschleunigung in Doppelsternsystemen	15
1.2	Galaktischer Wind	16
1.2.1	Flussröhrengometrie	18
2	Hydrodynamische Gleichungen	22
2.1	Massenerhaltung	22
2.2	Impulserhaltung	25
2.3	Energieerhaltung	27
2.3.1	Gesamtenergie	27
2.3.2	Leistung	28
2.3.3	Wärmestrom	29
2.4	Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen	31
2.4.1	Euler-Gleichungen	33
3	Diffusive Stoßbeschleunigung von geladenen Teilchen	35
3.1	Bewegung von Teilchen im Magnetfeld	35

3.1.1	Magnetischer Spiegel	37
3.2	Heuristische Herleitung der Erhaltungsgleichung	39
3.3	Analytische Lösung im makroskopischen Testteilchenbild	42
4	Vollständiges physikalisches Gleichungssystem	46
5	Numerische Methodik	49
5.1	Explizite VS implizite Verfahren	50
5.2	Donor-Cell Schema	52
5.3	Gittergleichung	54
5.4	Künstliche Viskosität	57
5.5	Diskretisierung	59
5.5.1	Kontinuitätsgleichung	60
5.5.2	Bewegungsgleichung	62
5.5.3	Energiegleichung	63
5.5.4	CR-Erhaltungsgleichung	63
5.5.5	CR Druck und Energie	66
5.6	Randbedingungen	67
6	Anfangsmodelle	68
6.1	Reflektierende Wand	68
6.2	Mitbewegte Box	69
6.3	Kosmische Strahlung	70
7	Ergebnisse	73
7.1	Testteilchenbild	73
7.1.1	Exponentialfunktion	75
7.1.2	Lineare Anfangsverteilung	76
7.1.3	Konstante Anfangsverteilung	77
7.1.4	Testrechnung mit hydrodynamischen Gleichungen	78
7.2	Kopplung von CR- mit hydrodynamischen Gleichungen	79

8	Diskussion und Ausblick	85
8.1	Testergebnisse	85
8.2	CR-modifizierte Stoßfront	85
8.3	Ausblick	86

Abbildungsverzeichnis

1.1	Energiespektrum der kosmischen Strahlung	2
1.2	Ausbreitung von CRs in Halo	3
1.3	Prinzip der Teilchenbeschleunigung in Sonnenflecken.	4
1.4	Teilchenbeschleunigung durch Sonnefleckenpaare	6
1.5	Stoßbeschleunigung schematisch	7
1.6	Stoßbeschleunigung zwischen zwei Stoßfronten	8
1.7	Fermi-Beschleunigung 1. Ordnung	9
1.8	Fermi-Beschleunigung	11
1.9	Fermi-Mechanismus 2. Ordnung	11
1.10	Erhöhung der Magnetfeldichte während Gravitationskollaps	14
1.11	H_2 2.12 μm Emission in M82	17
1.12	Galaktische Scheibe und Flussröhre	19
2.1	Volumenelement mit Massenströmen in kartesischen Koordinaten	24
2.2	Kräftefreies Volumenelement	25
2.3	Leistungs- bzw. Wärmeflüsse in x- Richtung an dV	29
3.1	Gyration eines Teilchens im homogenen Magnetfeld	37
3.2	Magnetischer Spiegel	38
5.1	Staggered Mesh	50
5.2	Schematische Darstellung von explizitem und implizitem Verfahren	51
5.3	Fluss über Zellen	53
5.4	Donor-cell Advektion	54

Abbildungsverzeichnis

5.5	Visualisierung der Gittergleichung	55
5.6	Künstliche Viskosität	59
6.1	Verschiedene Anfangsverteilungen der kosmischen Strahlung	71
7.1	Gegenüberstellung der exponentiellen Anfangsverteilung zur analytischen Lösung	76
7.2	Gegenüberstellung der linearen Anfangsverteilung zur analytischen Lösung .	77
7.3	Gegenüberstellung der konstanten Anfangsverteilung zur analytischen Lösung	78
7.4	Anfangsmodell des numerischen, hydrodynamischen Stoßes	79
7.5	Gegenüberstellung numerischer Stoß mit analytischer Lösung	80
7.6	Anfangsmodell des numerischen Stoßes	82
7.7	Entwicklung von P_C , E_C und γ_C nach Kopplung	83
7.8	Einfluss von CRs auf den Stoß	84
7.9	Verteilungsfunktion nach Kopplung	84

Tabellenverzeichnis

1.1	Druck-, Dichte- und Temperaturverhältnis bei starkem Stoß	7
2.1	Zusammensetzung des Kraftvektors \vec{F} für Fluide	26
7.1	Modellwerte für analytischen Stoß	74
7.2	Modellwerte für numerischen Stoß	75

1 Einleitung

Das Gebiet der Astroteilchen-Physik ist relativ neu und daher ist die historische Entwicklung dieses Teilgebiets der Physik, speziell die der kosmischen Strahlung, sehr schwer zu beschreiben. Der folgende historische Überblick sowie die zugrundeliegenden Beschleunigungsmechanismen werden sehr gut von Grupen (2005) und Kachelriess (2008) zusammengefasst.

Kosmische Strahlung wurde erstmals 1912 von Victor Hess entdeckt. Er unternahm eine Reihe von Ballonflügen, um die Restleitfähigkeit von Luft als Funktion der Höhe zu bestimmen. Dabei zeigte sich, dass die Ionisation bis zu einer Höhe von ca. 2000 m durch die Bodenradioaktivität leicht abnimmt, anschließend jedoch mit der Höhe wieder steigt. Hess begründete dies korrekterweise als eine Ursache von extra-terrestrischer Strahlung.

Einen ersten Nachweis von kosmischer Strahlung gelang 1938 Pierre Auger, der bei seinen Koinzidenz-Experimenten Teilchen zur gleichen Zeit in Detektoren, die hunderte Meter von einander entfernt aufgestellt waren, messen konnte. Daraus schloss er auf die Existenz ausgedehnter Luftschauer, deren Primärteilchen Energien von ca. 10^{15} eV besitzen mussten.

Später, in den 1930er und 40er Jahren, war die kosmische Strahlung überwiegend für die Teilchenphysik von Bedeutung, was zu einer Reihe von Entdeckungen in der Elementarteilchenphysik führte.

Kosmische Strahlung besteht zu 98% aus ionisierten Kernen wie Protonen (87%), α -Teilchen (12%) und schweren Elementen (1%), sowie zu 2% aus Elektronen. Folglich ist die kosmische Strahlung eine Teilchenstrahlung. Das Energiespektrum dieser Strahlungsart ist sehr breit. Es deckt einen Energiebereich von 10^8 eV bis 10^{21} eV ab, wobei allerdings

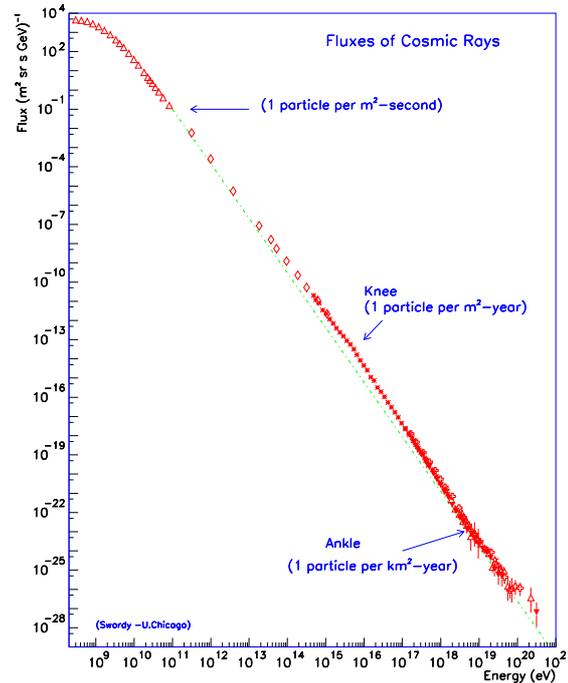


Abbildung 1.1: Es ist deutlich zu sehen, dass das Energiespektrum der kosmischen Strahlung einen sehr breiten Bereich abdeckt. Die unterschiedliche Form der Datenpunkte kennzeichnet verschiedene Datensets (LEAP, akeno, yakustk, proton, havera). Quelle: J. Cronin, T.K. Gaisser, and S.P. Swordy, *Sci. Amer.* v276, p44 (1997).

der Fluss sehr stark mit steigender Energie abnimmt (Abb. 1.1). Die Flussrate ergibt sich formal zu

γ	Energiebereich
2,7	$10^{10} - 10^{15}$ eV \rightarrow "knee"
3	$10^{15} - 10^{18}$ eV \rightarrow "ankle"
2,7	$> 10^{18}$ eV

Wie in Abbildung 1.1 ersichtlich, zeigt sich eine Änderung in der Steigung der Kurve. Für dieses Verhalten im Bereich des „knees“ gibt es zwei mögliche Erklärungen: Einerseits können Teilchen in der Galaxie nur dann verweilen, wenn ihr Gyroradius kleiner oder gleich des galaktischen Radius ist. Für die Milchstraße bedeutet dies, dass Teilchen mit einer Energie $> 10^{15}$ eV beginnen, die Galaxie zu verlassen. Andererseits wird bei dieser Teilchenenergie auch das Maximum der Beschleunigung durch einen *Fermi-Mechanismus*

1. Ordnung (siehe Abschnitt 1.1.3) erreicht. Allerdings ist der Übergang in diesem Bereich stetig, was darauf schließen lässt, dass auch im Bereich der hohen Teilchenenergien eine Fermi-Beschleunigung verantwortlich ist. Eine mögliche Erklärung für die Steigungsänderung in diesem Bereich wäre, dass Teilchen mit einer höheren Energie auch weiter in den galaktischen Halo hinein propagieren und somit, durch die größere Distanz zum Beobachter, wieder Energie beim Durchgang durch das ISM verlieren (ähnlich wie beim Effekt der solaren Modulation von kosmischer Strahlung in unserem Sonnensystem). Dieses Argument ist auch das Hauptziel, welches diese Arbeit verfolgt. Die anschließende

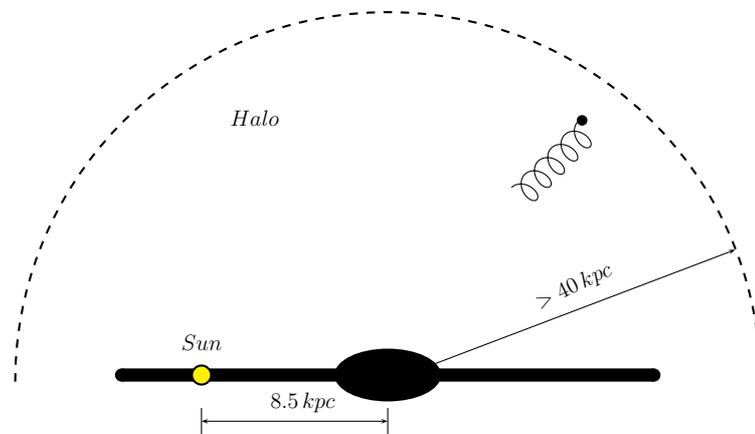


Abbildung 1.2: Im Vergleich zu hochenergetischen Teilchen im Bereich von 10^9 bis 10^{15} eV (deckt sich mit Fermi-Beschleunigung), müssen Teilchen mit höherer Energie einen längeren Weg durch das ISM zurücklegen. Das wäre eine mögliche Erklärung zur Steigungsänderung im Bereich des Knies.

Abflachung der Kurve im Bereich des „ankles“ ist höchstwahrscheinlich auf eine extragalaktische Komponente (z.B. AGN) zurückzuführen. Hier ist auch die Teilchenausbeute derart gering, dass das Argument der Fermi-Beschleunigung nicht mehr vertretbar ist, da diese auf Gleichungen aus der statistischen Physik zurückgreift (Fokker-Plank Gleichung).

Eine weitere Änderung der Steigung ist zudem noch im Bereich der geringen Energien $< 10^9$ eV zu erkennen. Dieser ist auf den Effekt der solaren Modulation zurückzuführen. Sobald Teilchen in unser Sonnensystem eintreten, müssen sie einen nach außen gerichteten solaren Wind überwinden. Dies ist natürlich mit einem Energieverlust verbunden, welcher Teilchen mit niedriger Energie stärker beeinflusst als jene mit hoher Energie.

1.1 Beschleunigungsmechanismen

Die Beschleunigungsmechanismen der kosmischen Strahlung kann man grundsätzlich in vier Gruppen einteilen. Da der für diese Arbeit wesentliche Beschleunigungsmechanismus der Fermi-Mechanismus 1. Ordnung darstellt, wird diesem im Folgenden auch mehr Beachtung geschenkt.

1.1.1 Zyklotron-Mechanismus

Unter Zyklotronstrahlung versteht man im Zusammenhang mit der kosmischen Strahlung die Beschleunigung in Sonnenflecken, wobei sogar sonnenähnliche Sterne Teilchen auf GeV Niveau beschleunigen können. Die Beschleunigung erfolgt dabei in zeitlich veränderbaren Magnetfeldern. Sonnenflecken erscheinen dunkler, da ein Teil der thermischen Energie in magnetische Energie übergeht. In typischen Sternen können Sonnenflecken mit Magnetfeldern von bis zu 10^4 Gauss auftreten, wobei die Lebensdauer der Flecken einige Rotationsperioden überdauern kann. Weiters können sonnenähnliche Sterne Flecken mit bis 10^9 cm aufweisen (*vgl. Grupen, 2005, Seite 64*).

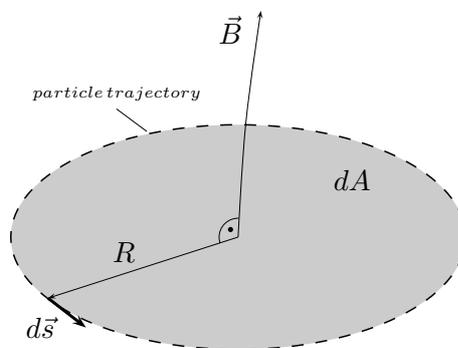


Abbildung 1.3: Prinzip der Teilchenbeschleunigung in Sonnenflecken.

Magnetfelder in sonnenähnlichen Sternen entstehen durch turbulentes Plasma, welches hauptsächlich aus Protonen und Elektronen besteht. Diese Plasmabewegung verursacht Ströme, wodurch wiederum ein Magnetfeld erzeugt wird. Durch das permanente Entstehen und Zerfallen von Magnetfeldern entstehen elektrische Felder, in welchen Protonen und Elektronen beschleunigt werden können. In Bild 1.3 wird schematisch ein Sonnenfleck

mit der Fläche $A = R^2\pi$ mit einem variablen Magnetfeld \vec{B} dargestellt. Erstes Semester Physik lehrt uns, dass ein zeitlich verändernder magnetischer Fluss Φ eine Spannung U zur Folge hat,

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = U, \quad (1.1)$$

wobei \vec{E} der elektrischen Feldstärke und $d\vec{s}$ einer infinitesimalen Länge entlang der Trajektorie des Teilchens entspricht. Der magnetische Fluss ist gegeben durch

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = R^2\pi B, \quad (1.2)$$

mit $d\vec{A}$ als Flächenelement. In Gleichung 1.2 ist angenommen, dass das Magnetfeld normal auf das Flächenelement $d\vec{A}$ steht. Somit ergibt sich ein Energiegewinn für ein geladenes Teilchen bei einer Umrundung der Feldlinie wie

$$E = eU = e\pi R^2 \frac{dB}{dt}. \quad (1.3)$$

Für einen Sonnenfleck mit einem Radius von $R = 10^9$ cm, einem Magnetfeld der Stärke $B = 2000$ Gauss und einer Lebensdauer von einem Tag ergibt sich demnach

$$E = 1.6 \times 10^{-19} \text{ As } \pi 10^{14} \text{ m}^2 \frac{0.2 \text{ Vs}}{86400 \text{ sm}^2} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 0.73 \text{ GeV} \quad (1.4)$$

Beobachtungsdaten der Sonne zeigen Teilchen mit Energien von bis zu 10^{11} eV, das höchstwahrscheinlich das Maximum des Zyklotron-Mechanismus in Sternen bestimmt.

Das Zyklotron-Modell kann zwar korrekte Teilchenenergien voraussagen, jedoch nicht erklären, warum sich geladene Teilchen in kreisförmigen Orbits um ein sich zeitlich veränderndes Magnetfeld bewegen, da zirkuläre Orbits nur unter dem Einfluss von Stabilisierungskräften (*wie beispielsweise in Teilchenbeschleunigern*) möglich sind.

1.1.2 Beschleunigung durch Sonnenfleckenpaare

Sonnenflecken treten sehr oft paarweise, mit unterschiedlich gerichteter magnetischer Polarisation auf. Im Normalfall nähern sich die beiden Sonnenflecken einander an, bis sie sich schließlich miteinander vereinigen. Nimmt man an, dass der linke Fleck ruht und sich der Rechte mit einer Geschwindigkeit \vec{v} auf den Linken zubewegt (*vgl. Abb. 1.4*), dann

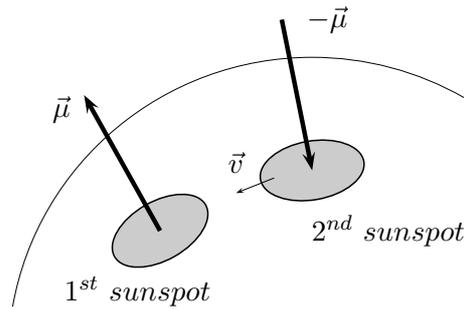


Abbildung 1.4: *Teilchenbeschleunigung durch Sonnenfleckenpaare*

wird durch die Bewegung des magnetischen Dipols ein elektrisches Feld erzeugt, welches normal auf den Dipol und auf die Geschwindigkeit v steht ($\vec{v} \times \vec{B}$). Typische Sonnenflecken erzeugen elektrische Felder von ca. 10 V/m. Trotz dieser geringen elektrischen Felder ist es möglich, geladene Teilchen zu beschleunigen, da der Energieverlust durch Kollision aufgrund der geringen Dichte der Chromosphäre sehr klein ist. Unter realistischen Bedingungen (*Sonnenfleckenabstand* $D = 10^7$ m, *magnetische Feldstärke* $B = 2000$ Gauss, *Relativgeschwindigkeit* $v_{rel} = 10^7$ m/Tag) sind durchaus Teilchenenergien im GeV Bereich möglich. Somit zeigt sich, dass die Energien welche durch Annäherung magnetischer Dipole erzeugt werden, im selben Bereich liegen, wie jene durch den Zyklotron-Mechanismus. Allerdings scheint der Prozess der paarweisen Sonnenflecken-Beschleunigung plausibler zu sein, da in diesem Fall keine Stabilisierungskräfte von Nöten sind.

1.1.3 Beschleunigung in Stoßwellen

Hat ein massereicher Stern sein nuklear prozessierbares Material aufgebraucht, entsteht ein Ungleichgewicht zwischen Strahlungsdruck und Gravitationsdruck und der Stern kollabiert. Je nach Anfangsmasse des Sterns sind unterschiedliche Szenarien möglich, spricht man jedoch von einem *massereichen* Stern, entsteht im Normalfall ein Neutronenstern und der Rest des Materials wird als *Supernova* in die interstellare Materie ISM geschleudert. Das ausgeschleuderte Material der Supernova breitet sich in Form einer *Stoßwelle* in das ungestörte ISM aus. Angenommen, die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_1

und hinter dem Stoß fällt die Geschwindigkeit des Gases auf eine Geschwindigkeit von u_2 ab. Für das Laborsystem (*im System des Gases*) bedeutet dies somit eine Gasgeschwindigkeit von $u_1 - u_2$ (Abb. 1.5). Grundsätzlich ist eine Stoßwelle eine Druckwelle, die sich mit

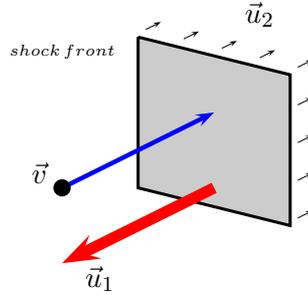


Abbildung 1.5: Stoßbeschleunigung schematisch

Überschallgeschwindigkeit bzw. mehr als der Alfvén-Geschwindigkeit bewegt. Das bedeutet, dass die Wellenfront ungestört bleibt und eine Unstetigkeit an der Stoßfront auftritt. Das Medium im Vorder- bzw. Hinterland des Stoßes wird durch die Größen Druck, Dichte und Temperatur charakterisiert, welche wiederum über die Massen-, Impuls- und Energieerhaltung miteinander verknüpft sind. Für ein einatomiges Gas ($\gamma = 5/3$) ergeben sich demnach für einen *starken Stoß* ($M \gg 1$) Werte nach 1.1.3, wobei $c_S = \sqrt{\gamma P/\rho}$ und $M = v/c_S$ entspricht.

für $\gamma = \frac{5}{3}$		
$\frac{P_2}{P_1}$	$= \frac{2\gamma}{\gamma+1} M^2$	$= \frac{5}{3} M_1^2$
$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} M^2$	$= 4M_1^2$
$\frac{T_2}{T_1}$	$= \frac{2\gamma(\gamma-1)}{\gamma-1} M^2$	$= \frac{5}{16} M_1^2$

Tabelle 1.1: Druck-, Dichte- und Temperaturverhältnis bei starkem Stoß

Ein Teilchen, welches mit der Stoßfront kollidiert und dadurch reflektiert wird (vgl. Abb. 1.5), erfährt einen Energiezuwachs von

$$\Delta E = \frac{1}{2}m [v + (u_1 - u_2)]^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m [2v(u_1 - u_2) + (u_1 - u_2)^2]. \quad (1.5)$$

Da der lineare Term dominiert (*da* $v \gg u_1, u_2$ und $u_1 > u_2$), folgt ein relativer Energiezuwachs von

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{2(u_1 - u_2)}{v}. \quad (1.6)$$

Eine etwas genauere relativistische Betrachtung, welche auch verschiedene Streuwinkel berücksichtigt, führt zu

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4}{3} \frac{u_1 - u_2}{c}, \quad (1.7)$$

wobei angenommen wurde, dass die Teilchengeschwindigkeit durch die Lichtgeschwindigkeit approximiert werden kann.

Ähnliche Ergebnisse zeigen sich, wenn das Teilchen innerhalb zweier Stoßfronten gefangen ist und zwischen diesen hin und her reflektiert wird. Normalerweise hat die innere Front v_2 eine viel höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit als die Äußere v_1 , da diese bereits durch die Wechselwirkung mit dem ISM abgebremst wurde. Die innere Stoßfront kann Geschwindigkeiten bis zu $v_2 = 20000$ km/s erreichen, während die äußere Front lediglich mit Geschwindigkeiten von einigen 100 km/s bis 1000 km/s ins ISM propagiert (*Abb. 1.6*). Ein Teilchen mit Geschwindigkeit v welches am inneren Stoß reflektiert wird gewinnt die

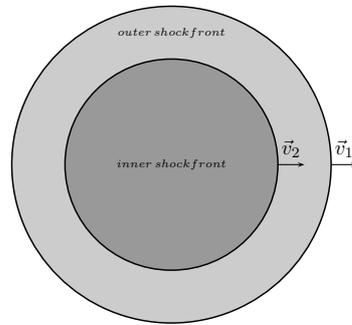


Abbildung 1.6: *Teilchenbeschleunigung durch mehrmalige Reflexion zwischen zwei Stoßfronten.*

Energie

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2} m (v + v_2)^2 - \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 + 2v v_2). \quad (1.8)$$

Durch Reflexion am äußeren Stoß verliert das Teilchen die Energie

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2} m (v - v_1)^2 - \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_1^2 - 2v v_1). \quad (1.9)$$

Damit ergibt sich ein mittlerer Energiegewinn für das Teilchen zu

$$\Delta E = \frac{1}{2}m [v_1^2 + v_2^2 + 2v(v_2 - v_1)]. \quad (1.10)$$

Da $v_2 > v_1$ können die quadratischen Terme vernachlässigt werden und es ergibt sich

$$\Delta E \approx mv\Delta v \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} \approx \frac{2\Delta v}{v}. \quad (1.11)$$

Es zeigt sich, dass beide Stoßbeschleunigungsmechanismen linear in der Relativgeschwindigkeit sind, deswegen wird diese Art von Beschleunigungsmechanismus auch als *Fermi-Mechanismus 1. Ordnung* bezeichnet. Der Unterschied zum Fermi-Mechanismus im allgemeinen Fall besteht darin, dass der Stoß nun eine Vorzugsrichtung hat und deshalb die Mittelung über die Streuwinkel etwas anders ausfällt. Die lineare Energiezunahme in Abhängigkeit von der Stoßgeschwindigkeit kann folgendermaßen dargestellt werden

$$\frac{dN}{dE} = \frac{dN}{dE}(E_0) \cdot \left[\frac{E}{E_0} \right]^{-1+\ln P-\xi} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{E_k}{E_{k-1}} = 1 + \frac{4}{3}\beta, \quad (1.12)$$

wobei ξ die mittlere Energie nach k Stößen, P die Wahrscheinlichkeit mit der ein Teilchen nach dem Stoß im System verbleibt und $\beta = u/c$ entspricht. Der Energiezuwachs ist von 1. Ordnung in der Geschwindigkeit der Stoßfront.

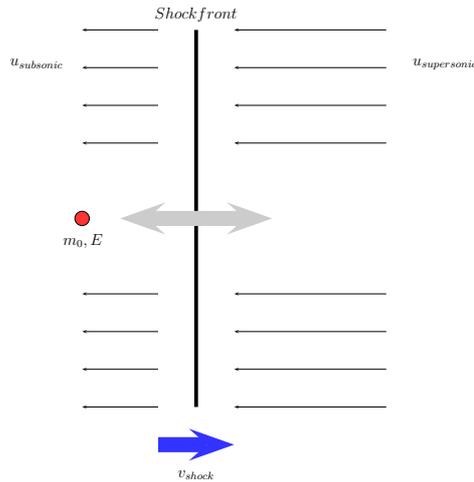


Abbildung 1.7: Teilchen ab einer gewissen Energie ($\sim 10^9$ GeV) propagieren durch die Stoßfront und werden aufgrund von Unstetigkeiten im Magnetfeld wieder zurück reflektiert. Bei jedem Durchgang erhöht sich somit die Energie des Teilchens.

Bisherige numerische Simulationen (*z.B. Baring et al., 1999; Medina Tanco, 2002*) ergaben Werte, die mit den Beobachtungen unterhalb des Knies (*ca. 10^{14} eV*) sehr gut übereinstimmen. Die Energien oberhalb von 10^{14} eV konnten bisher mit diesem Mechanismus noch nicht geklärt werden. Wie bereits erwähnt, ist dies das Kernthema dieser Arbeit. Auffällig ist, dass der Übergang der Verteilungsfunktion im Bereich des Knies stetig erfolgt, was darauf schließen lässt, dass auch oberhalb von 10^{14} eV eine Stoßbeschleunigung stattfindet, jedoch andere Faktoren, wie beispielsweise die größere Distanz von hochenergetischen Teilchen zum Beobachter (*Abb. 1.2*), die Steigungsänderung bewirken. Theoretisch wäre es so durchaus möglich, Teilchen in Stoßfronten auf Energien bis zu 10^{19} eV (*ankle*) zu beschleunigen. Ab dem Bereich des *ankles* hingegen reicht die Anzahl der Teilchen ($N \leq 1 \text{ km}^{-2} \text{ a}^{-1}$) nicht mehr aus, um diese Energien mit dem Argument der Stoßbeschleunigung zu erklären, da die zugrundeliegende Theorie Gleichungen aus der statistischen Physik verwendet.

1.1.4 Fermi-Beschleunigung

Eine Fermi-Beschleunigung im allgemeinen Fall beschreibt eine Streuung geladener Teilchen an räumlich beliebig verteilten, inhomogenen Plasmawolken. Weiters bewegen sich alle diese Wolken mit einer beliebigen Geschwindigkeit u . Tritt nun ein geladenes Teilchen mit einer Geschwindigkeit v_1 in die Plasmawolke ein, erfährt es isotrope Streuung innerhalb der Wolke und tritt gegebenenfalls mit Geschwindigkeit v_2 wieder aus (*Abb. 1.1.4*). Um diesen Sachverhalt etwas übersichtlicher zu gestalten, betrachtet man zuerst eine antiparallele Bewegung von Teilchen und Wolke (*vgl. Abb. 1.9*). Somit erhöht sich die Energie des Teilchens nach

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}m(v+u)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2uv + u^2). \quad (1.13)$$

Falls eine parallele Bewegung vorliegt, verringert sich die Teilchenenergie zu

$$\delta E_2 = \frac{1}{2}m(v-u)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-2uv + u^2). \quad (1.14)$$

Damit ergibt sich ein Netto-Energiegewinn von

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 = mu^2 \quad (1.15)$$

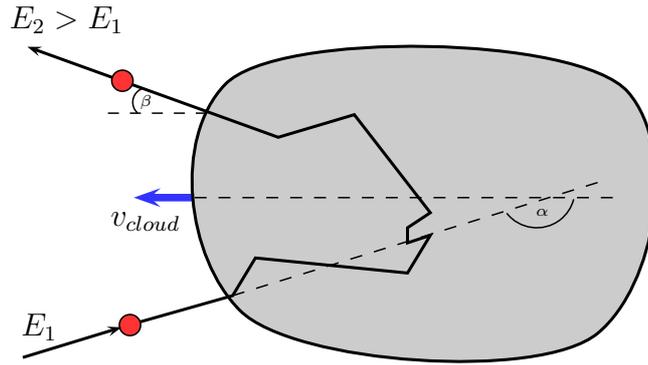


Abbildung 1.8: Bei der Fermi-Beschleunigung wird ein geladenes Teilchen innerhalb einer oder mehrerer Plasmawolken, welche sich mit Geschwindigkeiten \vec{v}_{cloud} bewegen, abgelenkt und kann so beschleunigt werden.

und ein daraus resultierender relativer Energiegewinn von

$$\frac{\Delta E}{E} = 2 \frac{u^2}{v^2}. \quad (1.16)$$

Wie man sieht, ist dieser Beschleunigungsmechanismus quadratisch in der Geschwindigkeit und wird deshalb auch als *Fermi-Mechanismus 2. Ordnung* bezeichnet. Weiters ist das

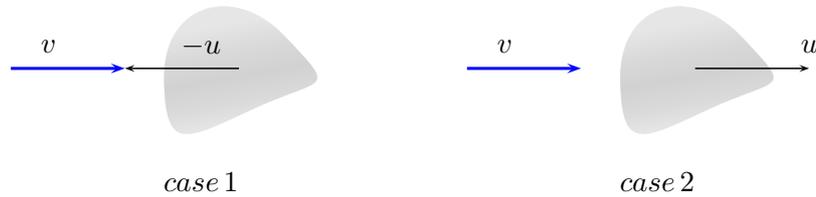


Abbildung 1.9: Ist die Teilchengeschwindigkeit antiparallel zur Wolkengeschwindigkeit, erfolgt eine Energieerhöhung, andernfalls eine Energieverminderung.

Ergebnis von 1.16 auch unter relativistischer Betrachtungsweise korrekt. Für das Energiespektrum der Teilchenstrahlung bedeutet dies, dass es einem Potenzgesetz gehorcht

$$\frac{dN}{dE} = \frac{dN}{dE}(E_0) \cdot \left[\frac{E}{E_0} \right]^{-1 + \ln P - \xi} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{E_k}{E_{k-1}} = 1 + \frac{4}{3} \beta^2, \quad (1.17)$$

wobei ξ die mittlere Energie nach k Stößen, P die Wahrscheinlichkeit mit der ein Teilchen nach dem Stoß im System verbleibt und $\beta = u/c$ entspricht. Allerdings gibt es eine Reihe

von Gründen, die es sehr unwahrscheinlich machen, dass die Fermi-Beschleunigung für die beobachteten hohen Energien verantwortlich sein könnte:

- $\beta \leq 10^{-4}$ d.h. der Energiezuwachs ist sehr gering.
- Die Kollisionswahrscheinlichkeit eines Teilchens mit einer Plasmawolke beträgt nur ca. eine Kollision pro Jahr.
- Der Energieverlust (*z.B. Ionisation*) ist ähnlich hoch wie der Zuwachs.

Insgesamt bedeutet dies also, dass dieser Mechanismus bei weitem nicht effizient genug ist, um die hohen Energien der kosmischen Strahlung zu erklären.

1.1.5 Beschleunigung in Pulsaren

Pulsare sind magnetisierte, rotierende Neutronen-Sterne und Überreste einer Supernova-Explosion. Während Sterne typischerweise einen Durchmesser von etwa 10^6 km aufweisen, sind Neutronen-Sterne durch einen gravitativen Kollaps auf etwa 20 km zusammengeschrumpft. Dieser Prozess erzeugt Dichten von bis zu $6 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$, was vergleichbar mit nuklearen Dichten ist. Durch die hohe Packungsdichte werden über die schwache Wechselwirkung so Neutronen erzeugt,



Die so entstandenen Neutronen können nicht zerfallen, da die Fermi-Energie in einem Neutronen-Stern mehrere hundert MeV beträgt und die maximale Energie von Elektronen beim Beta-Zerfall nur 0.78 MeV beträgt (*Pauli Prinzip*). Somit sind alle Energiestufen bis zu diesem Maximum und darüber, in einem Fermi Gas aus Elektronen verboten.

Bei einem Gravitationskollaps eines Sterns bleibt die Rotationsenergie erhalten, daher ist die Rotationsperiode von Neutronensternen, aufgrund ihres geringen Durchmessers, sehr kurz. Eine durchschnittliche Rotationsperiode eines sonnenähnlichen Sterns beträgt ca. einen Monat. Unter Vernachlässigung des Masseverlustes bei Kontraktion ergibt sich

für einen Pulsar somit eine Winkelgeschwindigkeit ω_P von

$$\omega_S \Phi_S = \omega_P \Phi_P \omega_P, \quad (1.19)$$

$$\omega_P = \frac{R_S^2}{R_P^2} \omega_S. \quad (1.20)$$

Hierbei entspricht Φ dem Massen-Trägheitsmoment. Dieses Ergebnis führt schließlich zu einer Rotationsperiode von

$$T_P = T_S \frac{R_P^2}{R_S^2}. \quad (1.21)$$

Für einen sonnenähnlichen Stern mit $R_S = 10^6$ km und einer Rotationsperiode $T_S = 2.592 \times 10^6$ s ergibt sich für einen Pulsar mit $R_P = 20$ km somit eine Rotationsperiode von

$$T_P \approx 10^{-3} \text{ s}. \quad (1.22)$$

Zusätzlich wird das Magnetfeld durch den Gravitationskollaps deutlich verstärkt (*Abb. 1.10*), da der magnetische Fluss durch die Oberfläche eines Sterns während der Kontraktion erhalten bleiben muss und so die magnetischen Feldlinien stark zusammengedrückt werden. Es zeigt sich

$$\int \vec{B}_S d\vec{A}_S = \int \vec{B}_P d\vec{A}_P \quad (1.23)$$

$$B_P = B_S \frac{R_S^2}{R_P^2}. \quad (1.24)$$

Für einen Stern mit $B = 10^3$ Gauss können so bei einem Pulsar Magnetfelder von 2.5×10^{13} Gauss erzeugt werden. Diese theoretisch sehr starken Magnetfelder konnten bereits experimentell (*Landau Levels*) bestätigt werden. Üblicherweise fällt die Rotationsachse des Pulsars nicht mit der Richtung des magnetischen Feldes zusammen, was starke elektrische Felder zur Folge hat und Teilchenbeschleunigung ermöglicht. Für einen Pulsar mit einer Rotationsperiode von $T_P = 30$ ms ergibt sich eine Rotationsgeschwindigkeit von

$$v = 2\pi \frac{R_P}{T_P} \approx 4 \times 10^6 \text{ m/s}. \quad (1.25)$$

Unter der Annahme, dass $\vec{v} \perp \vec{B}$ ergibt sich eine elektrische Feldstärke ($\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$) von

$$E \approx vB = 10^{15} \text{ V/m}, \quad (1.26)$$

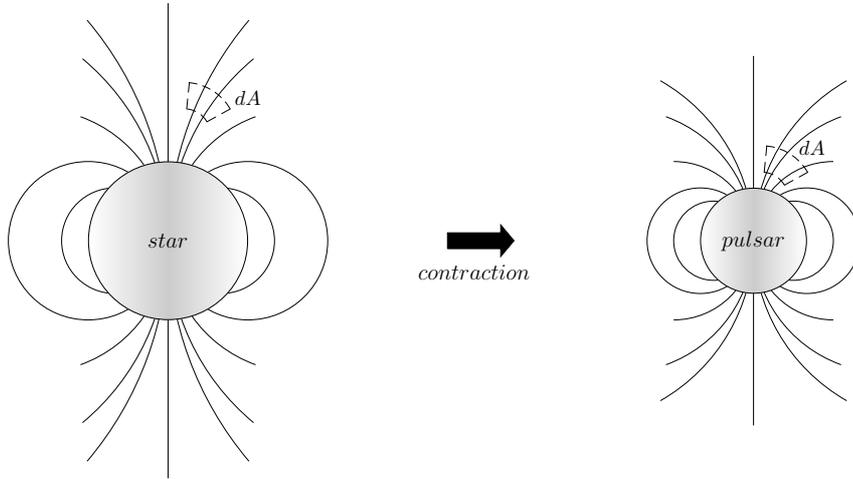


Abbildung 1.10: Während eines Gravitationskollapses eines Sterns kommt es zu einer Erhöhung der Magnetfelddichte und damit des Magnetfeldes.

was demnach bedeutet, dass ein einfach geladenes Teilchen eine Beschleunigung von 10^{15} eV/m erfährt. Es sei jedoch erwähnt, dass der genaue Prozess, wie ein Pulsar Rotationsenergie in die Beschleunigung von Teilchen transformiert, noch nicht verstanden wird. Ein durchschnittlicher Pulsar ($T_P = 30$ ms, $M_P = 2 \times 10^{30}$ kg, $R_P = 20$ km, $\omega = 2\pi/T$) weist eine Rotationsenergie von etwa 4.4×10^{61} eV auf. Unter der Annahme, dass 1% dieser Rotationsenergie zur Beschleunigung von Teilchen verwendet wird und einer Lebensdauer des Pulsars von 10^{10} Jahren, erhält man eine Injektionsrate von

$$\frac{dE}{dt} \approx 1.4 \times 10^{42} \text{ eV/s}. \quad (1.27)$$

In Anbetracht der Tatsache, dass unsere Galaxie etwa 10^{11} Sterne beinhaltet und die Supernova-Explosionsrate (*entspricht der Entstehungsrate von Pulsaren*) mit ca. einer Explosion pro Jahrhundert (*vgl. Grupen, 2005*) angenommen wird, waren seit der Entstehung der Milchstraße 10^8 Pulsare an der Beschleunigung von Teilchen der kosmischen Strahlung beteiligt. Mit einer durchschnittlichen Pulsar-Injektionszeit von 5×10^9 führt das zu einer Gesamtenergie von 2.2×10^{67} eV und im Weiteren, für ein Gesamtvolumen der Galaxie von 2×10^{67} cm³, bedeutet das eine Energiedichte der kosmischen Strahlung von 1.1 eV/cm³. Natürlich muss berücksichtigt werden, dass CR Teilchen nur eine bestimmte Zeit in der Galaxie verweilen und auch Energie durch Wechselwirkung mit ISM

verloren geht, aber die vorher getroffenen, groben Abschätzungen beschreiben die aktuelle CR Energiedichte von rund 1 eV/cm^3 sehr gut.

1.1.6 Beschleunigung in Doppelsternsystemen

Doppelsternsysteme, welche aus einem Pulsar oder Neutronenstern und einem herkömmlichen Stern bestehen, können auch als Beschleunigungsmechanismus kosmischer Teilchen dienen. In einem solchen System besteht ein konstanter Massefluss vom leichteren zum schwereren Partner. Dieser Materiefluss stellt sich als spiralförmige Akkretionsscheibe um den schwereren Partner dar, wo dann, durch den enormen Plasmafluss, sehr starke elektromagnetische Felder entstehen. Theoretisch können in diesen Feldern geladene Teilchen auf sehr hohe Energien beschleunigt werden.

Der Energiegewinn eines Protons mit Masse m_p , welches in das Gravitationspotential eines Pulsars mit Masse M_P einfällt ist

$$\Delta E = - \int_{\infty}^{R_P} G \frac{m_p M_P}{r^2} dr = G \frac{m_p M_P}{R_P} \approx 7 \times 10^7 \text{ eV}, \quad (1.28)$$

wobei $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $M_P = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R_P = 20 \text{ km}$ und $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$ entspricht. Die auf die Akkretionsscheibe einfallende Masse erreicht die Geschwindigkeit v aus der Bedingung

$$\frac{1}{2} m v^2 = \Delta E = G \frac{m M_P}{R_P} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 G M_P}{R_P}} \approx 1.2 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (1.29)$$

unter Betrachtung der zuvor gewählten Werte. Das variable magnetische Feld des Pulsars welches normal auf die Akkretionsscheibe steht, erzeugt über die *Lorentzkraft* starke elektrische Felder

$$\vec{F} = e (\vec{v} \times \vec{B}) = e \vec{E}, \quad (1.30)$$

wobei die Energie aus der Bedingung $\vec{v} \perp \vec{B}$ gewonnen wird

$$E = \int \vec{F} d\vec{s} = e v B \delta s. \quad (1.31)$$

Unter plausiblen Bedingungen ($v \approx c$, $B = 10^2 \text{ Gauss}$, $\delta s = 10^5 \text{ m}$) sind Teilchenenergien bis $3 \times 10^{19} \text{ eV}$ möglich. Akkretionsscheiben um schwarze Löcher oder um AGN haben

sogar noch mehr Potential, um Teilchen auf die beobachteten maximalen Energien zu beschleunigen. Die Details dieses Beschleunigungsprozesses sind noch nicht verstanden, aber Regionen um schwarze Löcher könnten durchaus für die Teilchen mit den Maximalenergien verantwortlich sein.

1.2 Galaktischer Wind

In den letzten Jahrzehnten wurden Galaxien, im Besonderen *Galaxienentstehung* und *Evolution*, zu einem zentralen Thema der Astrophysik. Vieles wird noch nicht zur Gänze verstanden, jedoch ist klar, dass *Gravitation* nicht der einzige Parameter zur Erklärung der beobachteten Strukturen sein kann. Moderne Ansätze berücksichtigen verschiedene physikalische Vorgänge wie z.B. *Sternentstehung* und *Evolution* oder auch die *chemische Entwicklung* des interstellaren Mediums (*ISM*).

Mit der Entdeckung eines sehr starken Outflows in der Galaxie M82 (*vgl. Lynds & Sandage, 1987*), rückten galaktische Winde (*GWs*) mehr ins Zentrum des Interesses und werden seitdem als ein signifikanter Faktor bei der Entstehung und Entwicklung von Galaxien angesehen (*Velleux et al., 1963*). Seither wurden verschiedene Anstrengungen (*vgl. Burke, 1968; Johnson & Axford, 1971; Mathews & Baker, 1971*) unternommen, um Modelle zur Beschreibung von galaktischen Outflows zu entwickeln und es zeigte sich, dass Massenströme auftreten, wenn die Temperatur des Gases genügend hoch ist (*siehe Breitschwerdt et al., 1991*). Problematisch ist, dass die meisten der aktuellen GW-Modelle nur Effekte des ausgeworfenen Gases berücksichtigen (*z.B. radiative Kühlung*). Somit wird der Wind rein durch *thermischen Druck* angetrieben, weshalb man solche Winde auch als *thermisch getriebene Winde* bezeichnet. Es zeigt sich, dass diese Winde Strukturen ausbilden, bei denen Gas mit hoher kinetischer Energie ausgeworfen wird, bis sich durch radiative Kühlung dichte Klumpen geformt haben, welche dann in die galaktische Scheibe zurückfallen (*galactic fountains - siehe Kahn (1981), Kahn (1991) und Kahn (1998)*). Das Ergebnis ist ein inhomogener galaktischer Halo, wie in Abbildung 1.11 ersichtlich. Man erwartet thermisch getriebene Winde ausschließlich in Galaxien mit aktiven Kernen *AGN* oder in Galaxien mit sehr hohen Gastemperaturen, wie beispielsweise in *Starburst*

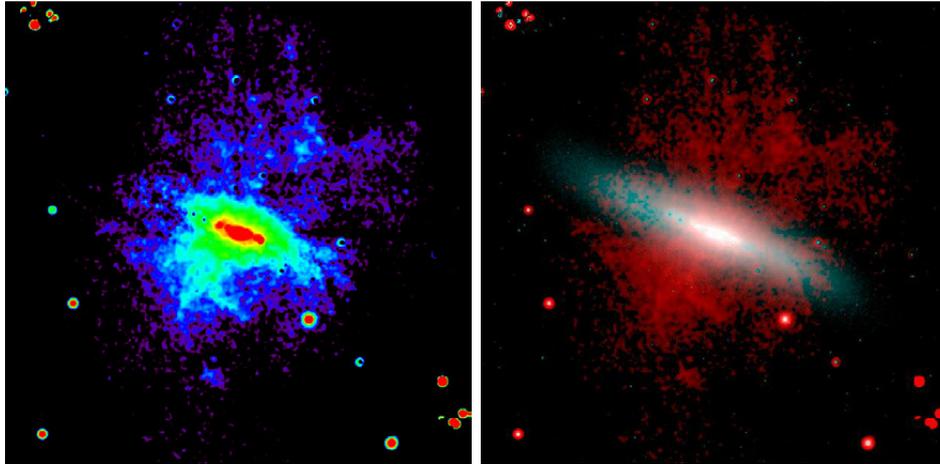


Abbildung 1.11: Links: „Reine“ H_2 Emission in Falschfarben. Rechts: H_2 (rot) + K_S (blau) Kontinuum Emission. Deutlich zu erkennen die dichten Klumpen welche durch galaktischen Outflow entstanden sind. Diese Strukturen werden höchstwahrscheinlich als „galactic fountain“ wieder auf die Scheibe einfallen. Quelle: Veilleux et al. (2009).

Galaxien.

Die Implementation von *kosmischer Strahlung (CRs)* in die dynamischen Modelle von galaktischen Winden stellte den nächsten Schritt zum besseren Verständnis von deren Verhalten dar (Ipavich, 1975). Unter Berücksichtigung der CR Komponente sind die Temperaturwerte, die zum Treiben eines galaktischen Windes notwendig sind, signifikant gefallen. Möglich wird dies durch den Transport von Teilchenenergie (*Impulserhaltung*) in das Gas. Somit kann Gas die Scheibenebene verlassen, auch wenn es relativ kalt ist. Berechnungen solcher Modelle fanden bisher in sphärischer Geometrie unter der Annahme der Galaxie als Punktquelle von Masse und Energie statt. Weiters wurde bisher auch noch keine Kopplung zwischen CRs und Hydrodynamik des Gases berücksichtigt.

Das Modell für diese Arbeit beruht auf der Idee von Breitschwerdt et al. (1991), deAvillez & Breitschwerdt (2005) und Dorfi & Breitschwerdt (2012), welche die Geometrie einer Flussgeometrie (*Flussröhrengemetrie, siehe 1.2.1*) und die Kopplung zwischen den drei Hauptkomponenten von galaktischen Winden, *Gaskomponente, kosmische Strahlung* und *Magnetwellenfeld* berücksichtigt. Der Unterschied zu dieser Arbeit besteht darin, dass Dorfi & Breitschwerdt (2012) bisher von einer vereinfachten Beschreibung der CRs *ohne Kenntnis über die Struktur des CR-Spektrums* ausgingen. Unter Einbeziehung der Vertei-

lungsfunktions der kosmischen Strahlung lässt sich eine viel genauere Aussage über die Teilchenenergien treffen und so der Einfluss auf die Stoßfront besser simulieren. Da sowohl CR-Druck P_C als auch Energie E_C über die *Fokker-Planck-Gleichung* getrennt berechnet werden können, kann auch der Adiabatenindex γ_C der kosmischen Strahlung bestimmt werden, woraus sich eine zusätzliche Kontrolle der Numerik ergibt.

1.2.1 Flussröhrengometrie

Die Geometrie, welche für die Berechnungen dieser Arbeit herangezogen wurde, wird als *1D Flussröhrengometrie* (vgl. Breitschwerdt et al., 1991) bezeichnet. Diese Geometrie eignet sich hervorragend zur Simulation von galaktischen Winden, da einerseits

- *eindimensionale* Modelle bei numerischen Simulationen sehr große Vorteile in Bezug auf Umsetzung und Rechenzeit haben, und andererseits
- unter der Annahme von *lokal offenen* Feldlinien die Flussgeometrie sich durch *magnetische Feldlinien* charakterisieren lässt. Somit ist ein Übergang von *plan-parallel* (*nahe an der Scheibe*) zu einer *sphärischen Geometrie* (*in großem Abstand von der Scheibe*) möglich.

Alle unbekanntenen Größen sind vom *projizierten Abstand* z von der galaktischen Ebene abhängig (vgl. Dorfi & Breitschwerdt, 2012). Der Übergang wird durch die Definition einer *Flussröhren-Grundfläche* A in Abhängigkeit von z erreicht (siehe Dorfi & Breitschwerdt, 2012; Breitschwerdt et al., 1991).

$$A(z) = A_0 \left[1 + \left(\frac{z}{Z_0} \right)^2 \right], \quad (1.32)$$

wobei A_0 der Grundfläche bei $z = 0$ und Z_0 dem typischen Wert für einen Übergang von plan-parallel zu sphärischer Geometrie entspricht.

Diese Geometrie kann durch einen metrischen Tensor, welcher wichtig ist für die Bestimmung der Differentialoperatoren wie Divergenz und Gradient, beschrieben werden. Um den Tensor zu erhalten werden vorerst *verallgemeinerte Zylinderkoordinaten* (R, ϕ, z) eingeführt, wobei z dem Abstand über der Mittelebene und R bzw. ϕ der *radialen* bzw.

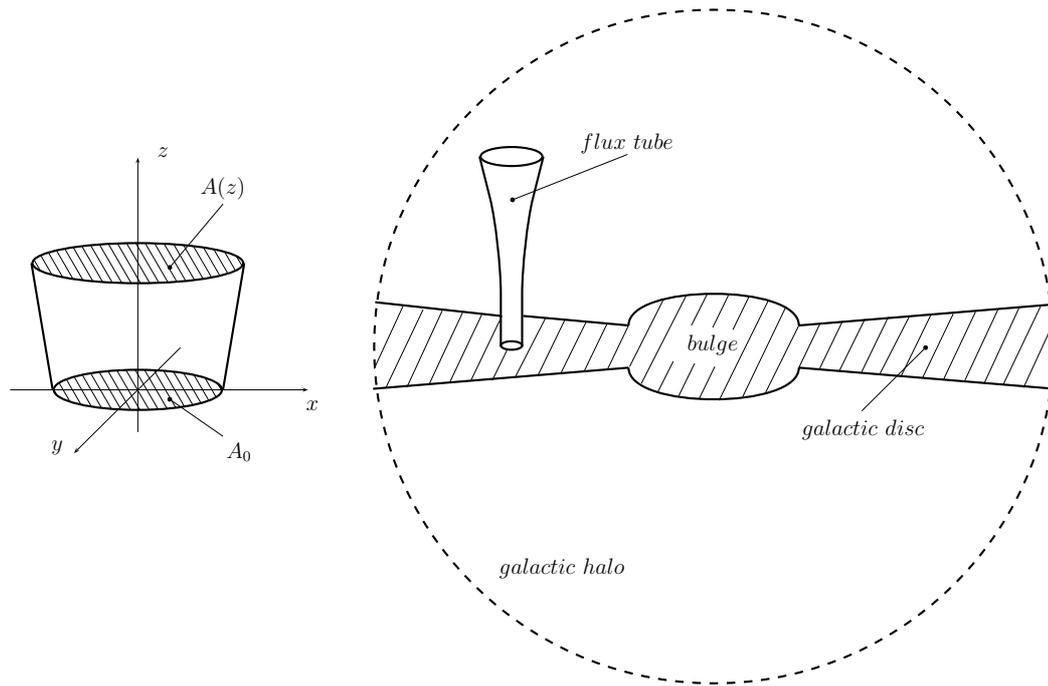


Abbildung 1.12: Galaktische Scheibe und Flussröhre

winkelabhängigen Variable in der Ebene von $A(z)$ entspricht. Die ursprünglichen *kartesischen Koordinaten* erhalten mit den Definitionen

$$A_0 := R^2 \pi \quad (1.33)$$

$$r(z) := \sqrt{\frac{A(z)}{\pi}} = R \sqrt{\frac{A(z)}{A_0}} \quad (1.34)$$

folgende Form

$$x = r(z) \cos(\phi) \quad (1.35)$$

$$y = r(z) \sin(\phi) \quad (1.36)$$

$$z = z. \quad (1.37)$$

Aus 1.34 folgt, dass die radiale Koordinate $r(z)$ mit $\sqrt{A(z)}$ skaliert. Mit der Standarddefinition eines Basisvektorsystems (e_R, e_ϕ, e_z)

$$e_R = \frac{\partial x}{\partial R} e_x + \frac{\partial y}{\partial R} e_y + \frac{\partial z}{\partial R} e_z \quad (1.38)$$

$$e_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi} e_x + \frac{\partial y}{\partial \phi} e_y + \frac{\partial z}{\partial \phi} e_z \quad (1.39)$$

$$e_z = \frac{\partial x}{\partial z} e_x + \frac{\partial y}{\partial z} e_y + \frac{\partial z}{\partial z} e_z \quad (1.40)$$

lässt sich somit ein *Basisvektorsystem* für die Flussröhrengometrie ermitteln

$$e_R = \begin{pmatrix} \frac{zR\sqrt{\pi}}{\sqrt{A(z)Z_0^2}} \cos(\phi) \\ \frac{zR\sqrt{\pi}}{\sqrt{A(z)Z_0^2}} \sin(\phi) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

$$e_\phi = r(z) \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

$$e_z = \sqrt{\frac{A(z)}{A_0}} \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Der metrische Tensor g_{exakt} nimmt somit folgende Form an

$$g_{\text{exakt}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{z^2 R^2 \pi}{A(z) Z_0^4} & 0 & \frac{Rz}{Z_0^2} \\ 0 & r(z)^2 & 0 \\ \frac{Rz}{Z_0^2} & 0 & \frac{A(z)}{A_0} \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Man sieht sofort, dass dieser Tensor nicht orthogonal ist. Um dennoch die geforderte Orthogonalität zu erreichen, wird angenommen, dass die Strömungsrichtung des Gases immer normal zu Flussröhrenfläche $A(z)$ ist. Man setzt die Diagonalelemente $Rz/Z_0^2 = 0$ und erhält somit den orthogonalen Metrik-Tensor g

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r(z)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A(z)}{A_0} \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Mit Hilfe dieser Annahmen ist nun eine eindimensionale Formulierung der hydrodynamischen Gleichungen in Flussröhrengometrie möglich. Der Gradient bleibt unverändert und die Divergenz schreibt sich zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[u_z A(z) \right]. \quad (1.46)$$

2 Hydrodynamische Gleichungen

Die physikalischen Prozesse in einem galaktischen Wind sind maßgeblich durch die Strömung eines Fluids (*ideales Gas*) bestimmt. Demnach kommen hier die *hydrodynamischen*, oder auch *Navier-Stokes Gleichungen* zu tragen, welche im Prinzip Erhaltungsgleichungen von *Masse*, *Impuls* und *Energie* sind. Im Folgenden wird nun eine kurze Zusammenfassung zur Herleitung der erforderlichen Gleichungen bzw. die Überführung in eine vereinfachte Form, welche für die Bedingung eines idealen Gases gilt (*Euler-Gleichungen*), präsentiert (für nähere Ausführungen vgl. Lecheler, 2009).

2.1 Massenerhaltung

Die Grundlage bildet ein kartesisches Koordinatensystem $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ mit Volumenelement $dV = dx dy dz$ und den Strömungsgeschwindigkeiten u, v, w (Abb. 2.1). Mit einer Dichte ρ kann also die Masse im Volumenelement beschrieben werden zu

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz. \quad (2.1)$$

Stellt man nun die Massenbilanz auf, ergeben sich demnach folgende Relationen:

- Die zeitliche Änderung der Masse in dV ist

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz). \quad (2.2)$$

- Der in x -Richtung durch die Fläche $dy dz$ einströmende Massestrom ist

$$(\rho u) dy dz \quad (2.3)$$

und der Ausströmende (*Summe aus äußerem und innerem Massestrom in x-Richtung*)

$$\left[(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right] dy dz. \quad (2.4)$$

- Der in y -Richtung durch die Fläche $dx dz$ einströmende Massestrom ist

$$(\rho v) dx dz \quad (2.5)$$

und der Ausströmende (*Summe aus äußerem und innerem Massestrom in y-Richtung*)

$$\left[(\rho v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy \right] dx dz. \quad (2.6)$$

- Der in z -Richtung durch die Fläche $dx dy$ einströmende Massestrom ist

$$(\rho w) dx dy \quad (2.7)$$

und der Ausströmende (*Summe aus äußerem und innerem Massestrom in z-Richtung*)

$$\left[(\rho w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz \right] dx dy. \quad (2.8)$$

Somit ergibt sich schließlich für die Massenbilanz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) &+ \left[(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right] dy dz - (\rho u) dy dz \\ &+ \left[(\rho v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy \right] dx dz - (\rho v) dx dz \\ &+ \left[(\rho w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz \right] dx dy - (\rho w) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

und nach Kürzung der Terme (ρu) , (ρv) , (ρw) und Division durch dx, dy, dz erhält man die *Differentialform* in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \quad (2.10)$

Dieses Ergebnis bedeutet nun also, dass die zeitliche Änderung der Dichte plus der Änderung der Massenströme (ρu) , (ρv) , (ρw) in x -, y - und z -Richtung gleich Null ergibt. Die Physik dahinter wird deutlich, wenn man die Kontinuitätsgleichung nun in *Divergenzform*

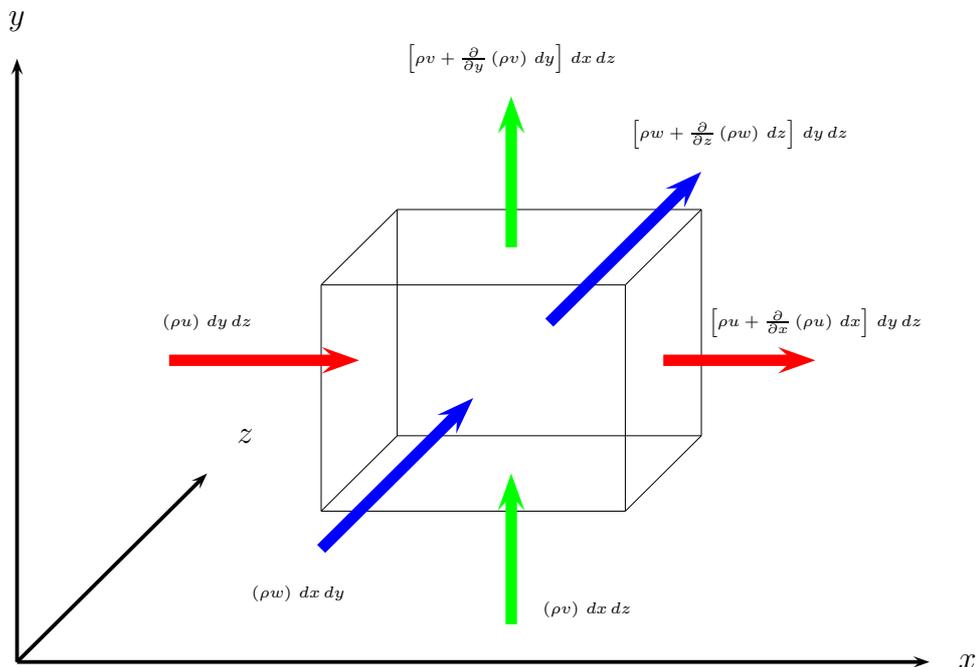


Abbildung 2.1: Volumenelement mit Massenströmen in kartesischen Koordinaten

anschreibt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (2.11)$$

Weiters kann Gleichung 2.10 auch in Integralform, wie sie für *finite Volumenverfahren* verwendet wird, geschrieben werden zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (2.12)$$

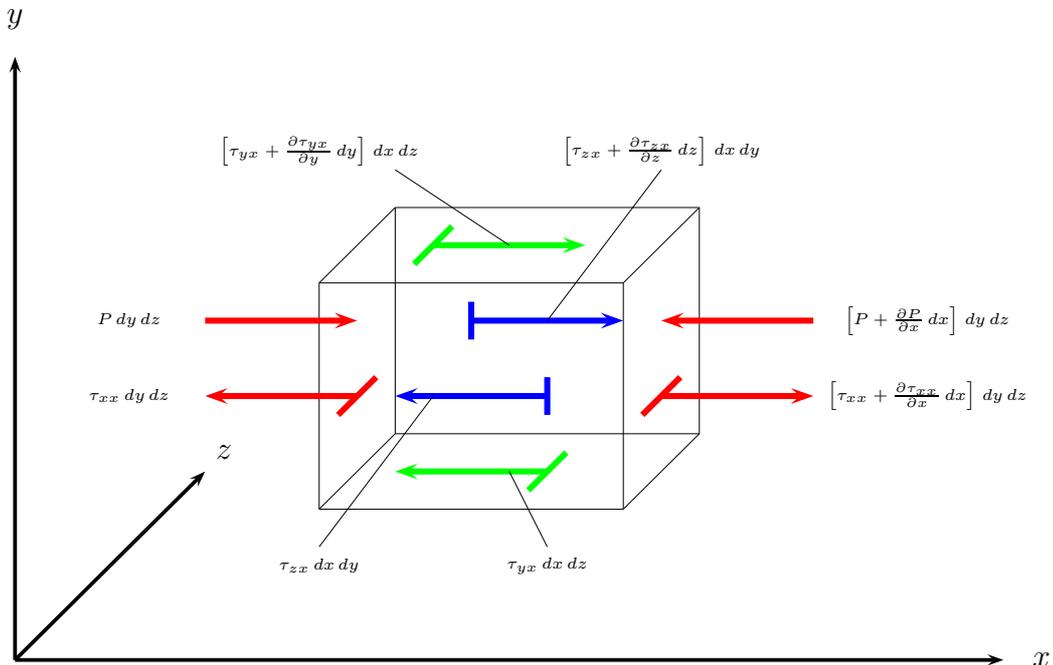


Abbildung 2.2: Kräftefreies Volumenelement

2.2 Impulserhaltung

Bei der Impulserhaltung kommt das zweite Newton'sche Gesetz zur Anwendung, welches besagt, dass die Bewegungsänderung eines Körpers proportional zur auf ihn einwirkenden Kraft ist und in die Richtung des Kraftvektors erfolgt. Formal bedeutet dies für ein kartesisches Koordinatensystem also

$$\begin{aligned}
 F_x &= m \cdot a_x \\
 F_y &= m \cdot a_y \quad , \\
 F_z &= m \cdot a_z
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

wobei der Kraftvektor \vec{F} sowohl *Körperkräfte* als auch *Oberflächenkräfte* beinhaltet (Tab. 2.2). Betrachtet man nun wieder ein infinitesimal kleines Volumenelement $dV = dx dy dz$ und macht dieses kräftefrei (vgl. 2.2), ergibt sich für die Bewegungsgleichung in x -Rich-

2.2. IMPULSERHALTUNG

Körperkräfte	Oberflächenkräfte
Schwerkraft	Druckkraft
elektromagnetische Kraft	Reibungskräfte
	<i>(Normalspannungskraft, Schubkraft)</i>

Tabelle 2.1: Zusammensetzung des Kraftvektors \vec{F} für Fluide

tung somit

$$\underbrace{\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \right]}_{F_x} dx dy dz = \underbrace{\rho}_{m} dx dy dz \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right]}_{a_x} \quad (2.14)$$

mit dem Druck des Fluids $P = f(x, y, z, t)$, der Normalspannung in x -Richtung τ_{xx} normal auf die $dy dz$ Ebene, der Schubspannung τ_{yx} und τ_{zx} entlang der $dx dz$ Ebene bzw. $dx dy$ Ebene und der Gravitationskraftkomponente g_x . Kürzt man weiters durch $dx dy dz$, erhält man die sogenannte *nicht konservative Form* der Bewegungsgleichung in x -Richtung, da hierbei die Terme $\rho, \rho u, \rho v$ und ρw vor den Ableitungen stehen

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.15)$$

Diese Form hat den Nachteil, dass bei einer späteren Diskretisierung der Impuls nicht erhalten bleibt, weshalb es günstiger ist, Gleichung 2.15 in die *konservative Form* umzuformulieren

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u \cdot v - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u \cdot w - \tau_{zx}) - \rho g_x = 0. \quad (2.16)$$

Eine ausführliche Herleitung von 2.16 findet sich in Lecheler (2009). Der komplette Satz der Impulserhaltungsgleichungen in allen drei Raumrichtungen lautet demnach

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u \cdot v - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u \cdot w - \tau_{zx}) - \rho g_x &= 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v \cdot u - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + P - \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v \cdot w - \tau_{zy}) - \rho g_y &= 0, \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w \cdot u - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w \cdot v - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2 + P - \tau_{zz}) - \rho g_z &= 0 \end{aligned}$$

wobei sich der reibungsbehaftete Normal- bzw. Schubspannungstensor (*Viskositätstensor*) noch durch Geschwindigkeitsgradienten ausdrücken lässt. Hierbei kann man zwischen *Newton'schen Fluiden* und *nicht Newton'schen Fluiden* unterscheiden:

- Newton'sche Fluide: Spannungen sind proportional zum Geschwindigkeitsgradienten (*Aerodynamik*).
- Nicht Newton'sche Fluide: Spannungen sind nicht proportional zum Geschwindigkeitsgradienten (*Honig*).

2.3 Energieerhaltung

Die Energieerhaltung beruht auf dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\frac{dE}{dt} = \dot{W} + \dot{Q}. \tag{2.17}$$

Dies bedeutet also, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie E gleich der Leistung \dot{W} am Volumenelement dV plus dem Wärmestrom \dot{Q} in dV entspricht. Es sei angemerkt, dass Gleichung 2.17 nur für geschlossene Systeme gilt und hier aufgrund der Übersichtlichkeit verwendet wird, da so die konvektiven Terme verschwinden.

2.3.1 Gesamtenergie

Die Gesamtenergie E setzt sich folgendermaßen zusammen:

- innere Energie: $E_{th} = m e$ (e ... spezifische Energie)
- kinetische Energie: $T = 1/2 m \vec{u}^2$

- potentielle Energie: $V = mgh$ (kann in diesem Fall für ein Gas vernachlässigt werden).

Somit ergibt sich für die Gesamtenergie eines Gases mit $V = 0$

$$E = E_{th} + T = m e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 = \rho dV \cdot \left(e + \frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) = \rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) dx dy dz \quad (2.18)$$

und die totale Ableitung von 2.18 nach der Zeit liefert

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) \right] dx dy dz \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot u \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \cdot v \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \cdot w \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] \right\} dx dy dz. \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.3.2 Leistung

Die Leistung \dot{W} ist jene Leistung, die durch Körper- und Oberflächenkräfte verrichtet wird. Demnach setzt sie sich aus folgenden Komponenten zusammen:

- der Gravitation g , welche auf dV wirkt,
- dem Druck P , welcher auf die Oberfläche von dV wirkt
- und Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ (Normal- bzw. Schubspannungen), welcher ebenfalls auf die Oberfläche von dV wirkt.

Mit den entsprechenden Flüssen aus Abbildung 2.3 ergibt sich somit für die Leistung

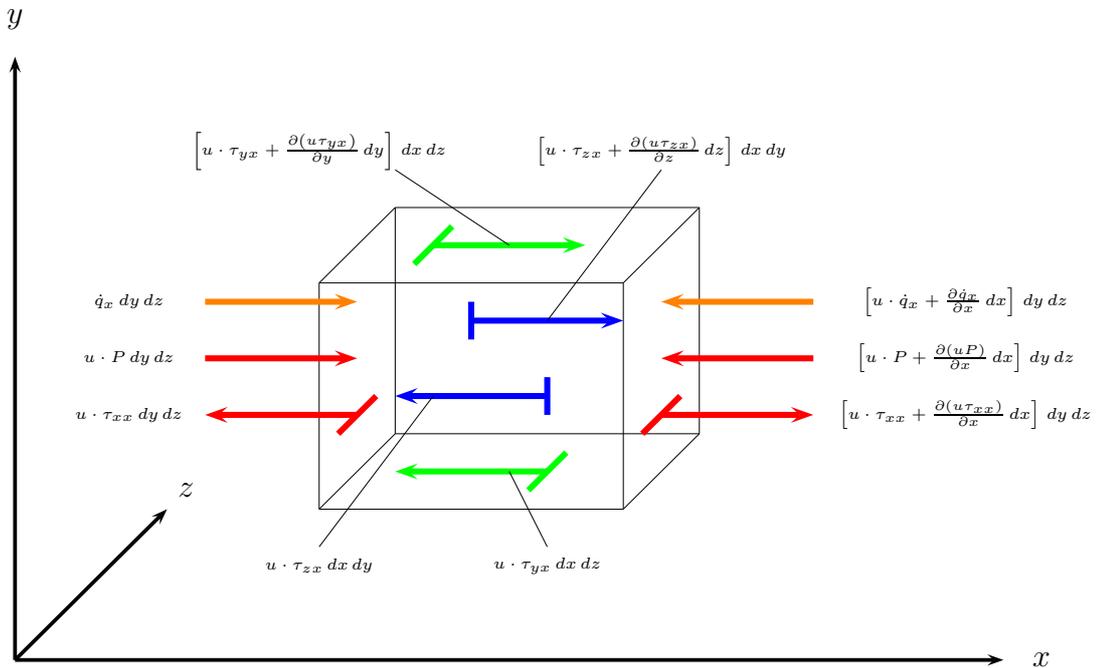


Abbildung 2.3: Leistungs- bzw. Wärmeflüsse in x -Richtung an dV

$$\begin{aligned}
 \dot{W} = & \left[\begin{aligned}
 & \rho (u g_x + v g_y + w g_z) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} (u P) - \frac{\partial}{\partial y} (v P) - \frac{\partial}{\partial z} (w P) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) \\
 & - \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz})
 \end{aligned} \right] dx dy dz. \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

2.3.3 Wärmestrom

Der Wärmestrom \dot{Q} setzt sich zusammen aus

- Wärmestrahlung \dot{q}_S

- Wärmestrom \dot{q}_L über die Oberfläche von dV (entsteht durch Temperaturgradient)
- Konvektion (hier aber vernachlässigt, da dV keine Relativbewegung zur Strömung aufweist).

Formal schreibt sich somit der Wärmestrom \dot{Q} zu

$$\dot{Q} = \left[\rho \dot{q}_S - \frac{\partial \dot{q}_{L,x}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{q}_{L,y}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{q}_{L,z}}{\partial z} \right] dx dy dz. \quad (2.21)$$

Unter Anwendung des Fourier'schen Wärmeleitungsgesetzes $\dot{q}_L = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T$ schreibt sich 2.21 zu

$$\dot{Q} = \left[\rho \dot{q}_S + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz. \quad (2.22)$$

Setzt man nun 2.19, 2.20 und 2.22 in 2.18 ein, schreibt sich die *Energieerhaltungsgleichung* zu

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot u \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \cdot v \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \cdot w \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] \\ & + \rho (u g_x + v g_y + w g_z) - \frac{\partial}{\partial x} (u P) - \frac{\partial}{\partial y} (v P) \\ & - \frac{\partial}{\partial z} (w P) - \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) - \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) \\ & - \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz}) \\ & - \rho \dot{q}_S - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

welche sich nach Verwendung der spezifischen Enthalpie $h = e + P/\rho$ (der Druckterm fällt dadurch weg) und herausheben von $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ und $\partial/\partial z$ als *Energieerhaltungsgleichung in Differentialform* schreiben lässt

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot u \left(h + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) - (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \cdot v \left(h + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) - (u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \cdot w \left(h + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) - (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz}) - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right] \\
 & - \rho (u g_x + v g_y + w g_z) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

2.4 Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die *vollständigen Navier-Stokes Gleichungen* hergeleitet. Vollständig bedeutet, dass diese Gleichungen die Strömung eines Fluids physikalisch korrekt beschreiben. Weiters sind diese Gleichungen im Allgemeinen nur numerisch lösbar (*unter Ausnahme einiger Spezialfälle, wie z.B. eindimensionale Strömungen um ebene Platte*), da sie ein nichtlineares, gekoppeltes Gleichungssystem bilden. Weiters ist es von Vorteil, die Navier-Stokes Gleichungen (2.10, 2.16 und 2.24) in der *Divergenzschreibweise* darzustellen, da die Gleichungen somit vom Koordinatensystem unabhängig sind. Mit den Identitäten des Geschwindigkeitsvektors \vec{u} , dem Gravitationsvektor \vec{g} , der Einheitsmatrix \mathbf{I} und der Spannungsmatrix $\boldsymbol{\tau}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

können die Erhaltungsgleichungen schließlich in Divergenzschreibweise geschrieben werden zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P \cdot \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}) = \rho \vec{g} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{u} \cdot \left(h + \frac{1}{2} \vec{u}^2 - \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{u} - \lambda \vec{\nabla} T \right) \right] = \rho \vec{g} \cdot \vec{u} + \rho \dot{q}_S, \quad (2.27)$$

wobei 2.25, 2.26 und 2.27 der *Kontinuitäts*-, der *Bewegungs*- und der *Energiegleichung* entspricht.

Zusammengefasst in ein Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{u} \\ \rho \left(e + \frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) \end{pmatrix}}_{\vec{U}} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \rho \vec{u} \\ \rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P \cdot \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \\ \rho \vec{u} \left(h + \frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) - \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{u} - \lambda \vec{\nabla} T \end{pmatrix}}_{\vec{F}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \rho \vec{g} \\ \rho \vec{g} \cdot \vec{u} + \rho \dot{q}_S \end{pmatrix}}_{\vec{Q}}$$

mit Erhaltungsvektor \vec{U} , Flussvektor \vec{F} und Quellterm \vec{Q} , kann dieses Ergebnis kurz geschrieben werden zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{Q}. \quad (2.28)$$

Mit dieser Formulierung lässt sich nun die Analogie zur *Integralform* zeigen

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{U} dV + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{Q}. \quad (2.29)$$

Wie sofort zu sehen ist, reicht die Anzahl der Gleichungen nicht aus, um alle Unbekannten zu bestimmen. Daher werden noch zusätzliche Gleichungen zur Beschreibung des Systems benötigt:

- Die *thermische Zustandsgleichung* koppelt den Druck P mit der Dichte ρ und der Temperatur T . Formal bedeutet dies für ein ideales Gas

$$P = \rho RT. \quad (2.30)$$

- Die *kalorischen Zustandsgleichungen* koppeln die spezifische Energie e bzw. die spezifische Enthalpie h mit der Temperatur T . Für ein ideales Gas ergibt sich (*mit spez.*

Wärmekapazität bei konst. Volumen c_v und spez. Wärmekapazität bei konst. Druck c_p)

$$de = c_v dT \quad (2.31)$$

$$dh = c_p dT. \quad (2.32)$$

- Die *Stokes'schen Beziehungen* koppeln bei *Newton'schen Fluiden* den Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ mit dem Geschwindigkeitsvektor \vec{u} . Mit der *dynamischen Viskosität des Fluids* μ schreibt sich dies zu

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.33)$$

$$\tau_{yy} = -\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.34)$$

$$\tau_{zz} = -\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.35)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.36)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.37)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.38)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (2.39)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.40)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}. \quad (2.41)$$

Die weiterhin noch unbekanntenen *Stoffwerte* λ, c_v, c_p und μ sind in der Regel temperaturabhängig und werden im Allgemeinen experimentell bestimmt. Die Werte werden dann meist aus Tabellen entnommen.

2.4.1 Euler-Gleichungen

Die Gleichungen 2.25, 2.26 und 2.27 beschreiben zwar die Physik der Strömung vollständig, jedoch ist der Rechenaufwand aufgrund der Nichtlinearität der Gleichungen sehr hoch. Es kann hier eine Reihe verschiedenster Vereinfachungen, je nach benötigter Genauigkeit der Lösungen, vorgenommen werden (*vgl. Lecheler, 2009*). Für eine Stoßausbreitung in einem

galaktischen Wind ist es jedoch ausreichend, eine Abwandlung der sogenannten *Euler-Gleichungen* zu verwenden. Die Euler-Gleichungen ergeben sich aus den Navier-Stokes Gleichungen unter Vernachlässigung der Reibung τ und der Wärmeleitung λ . Das Modell der Euler-Gleichungen eignet sich besonders für Modelle mit hohen Reynoldszahlen. Eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Art der Gleichungen (*auch Navier-Stokes Gleichungen*) ist, dass sie Unstetigkeiten, wie beispielsweise Verdichtungsstöße automatisch erfassen, da sie die *Rankine-Hugoniot Bedingungen* erfüllen.

Für das Modell eines galaktischen Windes mit hochenergetischen geladenen Teilchen (*kosmische Strahlung*) ergibt sich somit folgender Satz von hydrodynamischen Gleichungen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P_{ges} \cdot \mathbf{I}) - \rho \vec{g} = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} m \vec{u}^2 \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{u} \cdot \left(h + \frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) \right] - \rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \rho \dot{q}_S = 0. \quad (2.44)$$

Wobei der Gesamtdruck $P_{ges} = P_G + P_C$ sich aus *Gasdruck* P_G und *kosmischem Strahlungsdruck* P_C zusammensetzt.

3 Diffusive Stoßbeschleunigung von geladenen Teilchen

Wie bereits aus dem vorangegangenen Kapitel hervorgeht, gibt es eine Reihe von möglichen Beschleunigungsmechanismen, die für die beobachteten Teilchenenergien verantwortlich sein können. Diese Arbeit beschäftigt sich jedoch mit dem Mechanismus, bei welchem Stoßwellen in dünnem, ionisiertem Medium (*interstellare Materie*) geladene Teilchen beschleunigen. Die folgenden Ausführungen beziehen sich im Wesentlichen auf Drury (1983).

3.1 Bewegung von Teilchen im Magnetfeld

Die Bewegung von Teilchen in einem elektromagnetischen Feld wird grundsätzlich durch die Lorentzkraft F_L bestimmt, welche gegeben ist durch

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (3.1)$$

Wobei q der Elementarladung, \vec{v} der Teilchengeschwindigkeit und \vec{B} dem (*homogenen*) Magnetfeld entspricht. Unter Berücksichtigung des 2. Newton'schen Gesetzes für ein Teilchen mit der Ladung q und der konstanten Masse m_0 schreibt sich die Bewegungsgleichung des Teilchens nach Henke (2007) zu

$$m_0 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \left(\vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right). \quad (3.2)$$

Da nun ein reines Magnetfeld betrachtet wird, d.h. es liegt kein elektrisches Feld vor, vereinfacht sich 3.2 zu

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{q}{m_0} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}. \quad (3.3)$$

Wie leicht zu erkennen ist, steht die Kraft immer senkrecht auf die Geschwindigkeit ($\vec{v} \times \vec{B}$), womit also keine Arbeit an der Ladung verrichtet wird, d.h. die kinetische Energie des Teilchens bleibt konstant. Unter der Annahme, dass \vec{B} nur in z -Richtung wirkt, lässt sich 3.3 komponentenweise anschreiben

$$\dot{v}_x = \omega_z v_y \quad \dot{v}_y = -\omega_z v_x \quad \dot{v}_z = 0, \quad (3.4)$$

wobei der Faktor $\omega_z = \frac{q}{m_0} B_z$ als *Zyklotronfrequenz* bezeichnet wird. Weiters ist aus 3.4 ersichtlich, dass keine Beschleunigung in z -Richtung erfolgt, somit also die *longitudinale* Geschwindigkeitskomponente konstant ist. Erneute Ableitung nach der Zeit von 3.4 und Elimination führt schließlich auf die *Schwingungsdifferentialgleichung*

$$\ddot{v}_x - \omega_z^2 v_x = 0 \quad \ddot{v}_y + \omega_z^2 v_y = 0. \quad (3.5)$$

Wie leicht zu zeigen ist, genügt 3.5 genau der Kreisgleichung mit dem Radius

$$r_g = \sqrt{\frac{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2}{\omega_z^2}} = \frac{v_{\perp 0}}{\omega_z} = \frac{m_0 v_{\perp 0}}{q B_z}. \quad (3.6)$$

Dieser Radius wird als *Larmor-Radius* oder *Gyrationsradius* bezeichnet. Existiert eine Geschwindigkeitskomponente in z -Richtung, so stellt sich die Bahnkurve des Teilchens als Schraubenlinie (*Abb. 3.1*) dar, wobei der Radius dem Gyrationsradius und die Umlauffrequenz der Zyklotronfrequenz entspricht. Der Gyrationsradius r_g ist somit jener Radius, bei dem sich ein Gleichgewichtszustand zwischen der *Zentrifugalkraft* des Teilchens und der, durch das Magnetfeld hervorgerufenen, *Zentripetalkraft* einstellt

$$m_0 \frac{v_{\perp 0}^2}{r_g} = q v_{\perp 0} B_z. \quad (3.7)$$

Somit lässt sich dem gyrierenden Teilchen sozusagen ein magnetisches Moment durch $\text{Strom} \times \text{Kreisfläche}$ zuordnen

$$p_m = \frac{q v_{\perp 0}}{2\pi r_g} \pi r_g^2 = \frac{1}{2} q v_{\perp 0} r_g = \frac{T_{\perp}}{B_z} \quad (3.8)$$

mit der kinetischen Energie $T_{\perp} = \frac{1}{2} m_0 v_{\perp 0}^2$. Weiters kann nun, da sowohl $v_{\perp 0}$ und $v_{\parallel 0}$ bekannt sind, ausgedrückt durch die Impulse $p_{\perp 0}$ und $p_{\parallel 0}$ der sogenannte *Pitch* μ , also der Cosinus des Winkels zwischen Impulsvektor \vec{p} und Magnetfeldlinie B_z , bestimmt werden

$$\mu = \frac{\vec{p} \cdot \vec{B}}{\|\vec{p}\| \|\vec{B}\|}, \quad (3.9)$$

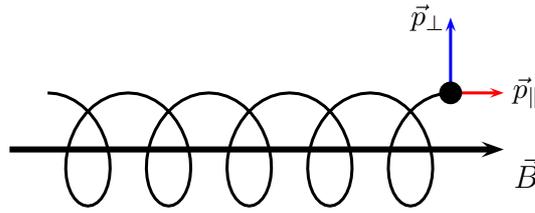


Abbildung 3.1: Gyration eines Teilchens im homogenen Magnetfeld

wobei dann die Impulsvektoren folgendermaßen definiert sind

$$p_{\parallel} = \mu \|\vec{p}\| \quad p_{\perp} = \sqrt{1 - \mu^2} \|\vec{p}\| \quad (3.10)$$

mit Gyrationradius

$$r_g = \frac{p_{\perp}}{q B_z}. \quad (3.11)$$

3.1.1 Magnetischer Spiegel

Bisher wurde immer ein konstantes, homogenes Magnetfeld betrachtet. Kosmische Magnetfelder sind in der Realität allerdings weder homogen noch konstant und genau diese Unstetigkeiten beeinflussen die Teilchen auf ihren Bahnkurven und führen schließlich zu Streuung. Da die Berechnung von Teilchenbahnen in inhomogenen Magnetfeldern i.A. nur numerisch möglich ist, wird hier kurz auf eine der wenigen analytischen Lösungen, den *magnetischen Spiegel*, eingegangen.

Ausgangspunkt bildet ein sehr langsam konvergierendes (*nahezu homogenes*) Magnetfeld, welches zylindersymmetrisch zur z -Achse ausgerichtet ist. Unter dieser Annahme kann die Teilchenbewegung als Störung der schraubenförmigen Bahn (*Abb. 3.2*) betrachtet werden. Nach Gleichung 3.3 schreibt sich die z -Komponente zu

$$m_0 \frac{dv_z}{dt} = q v_{\perp} B_{\rho} = K_z. \quad (3.12)$$

Mit Hilfe der Divergenzgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_{\rho}) + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0 \quad (3.13)$$

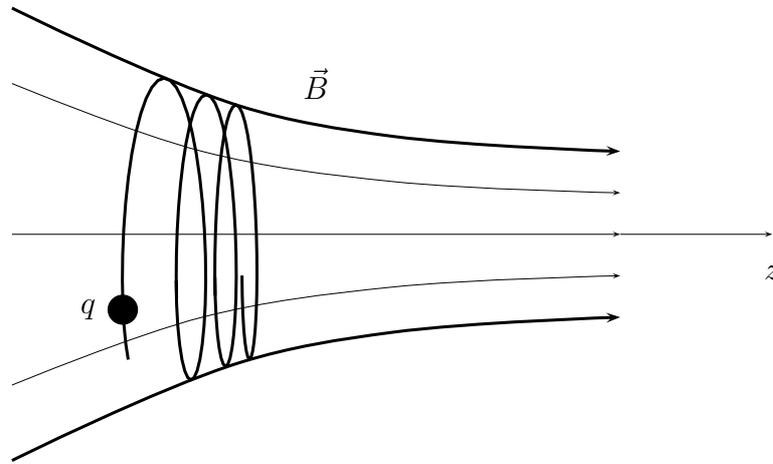


Abbildung 3.2: Tritt ein Teilchen in ein konvergierendes Magnetfeld ein, wird es in longitudinaler Richtung abgebremst (v_z verringert sich). Gleichzeitig steigt aber aufgrund der Energieerhaltung die transversale Geschwindigkeit (v_ϕ), was zur Folge hat, dass sich der Gyrationradius verkleinert.

und unter der Annahme eines schwach konvergenten Feldes, in welchem die Änderung des Feldes in z -Richtung während eines Umlaufs klein gegenüber dem Gyrationradius ist ($\partial B_z / \partial z = \text{const}$), lässt sich B_ρ nach Integration ausdrücken zu

$$B_\rho \sim \frac{\rho}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (3.14)$$

Einsetzen in 3.12 und mit Hilfe von 3.8 liefert schließlich

$$m_0 \frac{dv_z}{dt} = -p_m \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (3.15)$$

Es zeigt sich also, dass auf das Teilchen eine negative Kraft in z -Richtung (*in Richtung des schwächeren Magnetfeldes*) ausgeübt wird. Multipliziert man 3.15 mit v_z

$$m_0 v_z \frac{dv_z}{dt} = -p_m v_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = -p_m \frac{dB_z}{dt}, \quad (3.16)$$

vergleicht mit der zeitlichen Ableitung der kinetischen Energie und unter Verwendung von

3.8 folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_0 v_z^2 \right) = \frac{d}{dt} (T - T_z) = -\frac{dT_\perp}{dt} = -\frac{d}{dt} (p_m B_z) \quad (3.17)$$

Wie leicht zu sehen ist, muss also das magnetische Dipolmoment konstant sein. Ist dies aber der Fall, muss sich, wenn die Rotationsgeschwindigkeit des Teilchens zunimmt, der Gyrationradius aufgrund der Energieerhaltung verringern.

3.2 Heuristische Herleitung der Erhaltungsgleichung

Während die Wechselwirkung von freien, geladenen Teilchen in einem homogenen Magnetfeld trivial ist, ist es bei kosmischen Magnetfeldern deutlich komplizierter die Bewegung von Partikeln zu bestimmen. Um die Teilchenbewegung dennoch zu beschreiben, wählt man einen Ansatz, bei welchem als Ausgangspunkt ein homogenes Medium mit eingebettetem, homogenem Magnetfeld dient, wobei das Magnetfeld kleine, statische Störungen aufweist. Ist kein elektrisches Feld vorhanden, bleibt nach 3.3 die kinetische Energie der Teilchen bei der Streuung erhalten und es ändert sich nur der *Pitch Winkel*. Ist nun der Streuprozess von ausreichend stochastischer Natur, folgt daraus, dass die Phasenraum-dichte der Teilchen $F(\vec{p}, \vec{x}, t)$ annähernd isotrop, d.h. also $F(\vec{p}, \vec{x}, t) \sim f(p, \vec{x}, t)$, ist. f entspricht demnach dem isotropen Anteil von F , was bedeutet, dass die kosmische Strahlung als ideales Gas betrachtet werden kann. Mit Hilfe dieser Annahmen kann somit der Teilchentransport mit Hilfe des 2. *Fick'schen Gesetzes* beschrieben werden nach

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\kappa} \vec{\nabla} f), \quad (3.18)$$

wobei $\boldsymbol{\kappa}$ dem (*anisotropen*) Diffusions-Tensor entspricht. Die Bestimmung von $\boldsymbol{\kappa}$ ist natürlich nicht trivial, dennoch kann mit einem relativ simplen Argument (*siehe Blandford, 1979; Longair, 1981*) der Diffusions-Tensor relativ einfach berechnet werden. Die effektivsten Störungen, welche zu einer Streuung eines Teilchens führen, sind jene mit Längenskalen, die vergleichbar mit dem Gyrationradius r_g sind. Diese Störungen bewirken eine Änderung des Feldes in der Größenordnung von $kI(K)$, wobei $k \sim r_g^{-1}$ und $I(K)$ der räumlichen Energieverteilung der Störungen entspricht. Damit ergibt sich eine Variation

der Änderung des Feldes mit einer Längenskala von r_g zu

$$\phi^2 \sim \frac{kI(k)}{B_0^2}, \quad (3.19)$$

wobei B_0 dem ungestörten Feld entspricht. Nach jeder Gyrationperiode wird der *Pitch Winkel* des Teilchens demnach um einen beliebigen Betrag der Ordnung ϕ geändert. Somit ist nach N Gyrationen die Änderung von der Ordnung $\phi \sqrt{N}$, was also bedeutet, dass das Teilchen seinen ursprünglichen *Pitch* „vergisst“, wenn $N \sim \phi^{-2}$. Somit ist die mittlere freie Weglänge entlang des Feldes $\lambda_{\parallel} \sim Nr_g$ mit der Streufrequenz $\nu \sim V/\lambda_{\parallel}$. Demnach ergibt sich der Diffusionskoeffizient parallel zum Feld zu

$$\kappa_{\parallel} \sim \frac{1}{3} \lambda_{\parallel}^2 \nu. \quad (3.20)$$

Zwischen der Streuung kommt es zu einer Verschiebung des Teilchens normal zum Feld in einer Größenordnung von

$$\lambda_{\perp} \sim \phi r_g \sqrt{N} \sim r_g. \quad (3.21)$$

Somit ergibt sich der orthogonale Diffusionskoeffizient zu

$$\kappa_{\perp} \sim \frac{1}{3} \lambda_{\perp}^2 \nu \quad (3.22)$$

und demnach ist

$$\kappa_{\parallel} \kappa_{\perp} \sim \kappa_B^2. \quad (3.23)$$

$\kappa_B = \frac{1}{3} r_g \nu$ wird als *Bohm Diffusionskoeffizient* bezeichnet und ist der kleinste erlaubte Wert in diesem speziellen Modell des Teilchentransports. Das bedeutet demnach, dass wir eine Streuung durch stationäre, magnetische Störungen (*Störquellen*) erhalten. Im Weiteren müssen zwei Arten von Störungszentren-Bewegung berücksichtigt werden: einerseits die Bewegung des Hintergrundmediums selbst (*Advektion der Störquellen*), mit der Geschwindigkeit \vec{u} , und andererseits die Relativbewegung der Störquellen zum Hintergrundmedium. Die allgemeine Bewegung des Hintergrunds erfordert natürlich eine Erweiterung der Zeitableitung von 3.18 mit einem Advektionsterm:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \quad (3.24)$$

und im Weiteren, da es sich im Falle eines Stoßes um eine divergente Hintergrundbewegung handelt, muss auch auf der rechten Seite ein Term für die adiabatische Änderung der Teilchenimpulse angefügt werden. Eine einfache Form dieses Terms kann aus dem *Lioville-Theorem* abgeleitet werden, welches besagt, dass eine Konvergenz im Ortsraum zu Divergenz im Impulsraum führt und vice versa. Diese Argumente führen schließlich zu

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \left(\kappa \vec{\nabla} f \right) + \frac{1}{3} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) p \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (3.25)$$

Um die vollständige Erhaltungsgleichung für kosmische Strahlung zu erhalten, muss nun noch eine zweite Art der Bewegung berücksichtigt werden. Falls die Bewegung der Störquellen relativ zum Hintergrund systematisch ist, kann diese einfach zur Hintergrundgeschwindigkeit \vec{u} addiert werden, da die geladenen Teilchen nur die mittlere Geschwindigkeit der Störquellen wahrnehmen und nicht direkt von der Bewegung des Hintergrundmediums beeinflusst werden. Die verbleibende Restkomponente verursacht eine Änderung des Teilchenimpulses von der Größenordnung $\delta p \sim pv/\nu$ bei jeder einzelnen Streuung (*v entspricht hier der Geschwindigkeit der Störquelle.*) Demnach kommt es zu einer Diffusion im Impulsraum mit einem Diffusionskoeffizienten

$$D \sim \frac{1}{3} (\delta p)^2 \nu \sim \frac{v^2 p^2}{q \kappa_{\parallel}}, \quad (3.26)$$

was einem *Fermi-Mechanismus 2. Ordnung* im klassischen Sinne entspricht. Daher lautet die vollständige Erhaltungsgleichung nun:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f}_{\text{Advektion}} = \underbrace{\vec{\nabla} \left(\kappa \vec{\nabla} f \right)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} p \frac{\partial f}{\partial p}}_{\text{adiabatische Beschleunigung}} + \underbrace{\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 \vec{D} \frac{\partial f}{\partial p} \right)}_{\text{Fermi-Mechanismus 2. Ordnung}}. \quad (3.27)$$

Die Geschwindigkeit v entspricht der Geschwindigkeit einer kleinen Störung im Plasma, was unter astrophysikalischen Bedingungen von der Größenordnung der *Alfvén-Geschwindigkeit* ist. Dieser Prozess ist für den Beschleunigungsprozess der Teilchen zu langsam und daher kann der Fermi-Mechanismus 2. Ordnung in diesem Fall vernachlässigt werden. Um Gleichung 3.27 im Weiteren in eine konservative Form überzuführen, muss sowohl der *Advektionsterm* als auch der Term der *adiabaten Beschleunigung* umgeschrieben werden. Für den Advektionsterm verwendet man die Identität

$$\vec{\nabla} (f \vec{u}) = \vec{u} \vec{\nabla} (f) + f \vec{\nabla} (\vec{u}) \quad (3.28)$$

und für den Term der adiabaten Beschleunigung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \frac{1}{3p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^3 f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \frac{1}{3p^2} \left(3p^2 f + p^3 \frac{\partial f}{\partial p} \right) = \left(f + p \frac{\partial f}{\partial p} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{u}. \quad (3.29)$$

Setzt man 3.28 und 3.29 in 3.27 ein, erhält man die Erhaltungsgleichung für kosmische Strahlung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} f) = \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} f) + \frac{1}{3p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^3 f) \vec{\nabla} \cdot \vec{u}. \quad (3.30)$$

3.3 Analytische Lösung im makroskopischen Testteilchenbild

Um eine *analytische Lösung* für die zuvor besprochene Transportgleichung für kosmische Strahlung zu erhalten, wird angenommen (*vgl. Drury, 1983*), dass die Teilchengeschwindigkeit viel größer als die Geschwindigkeit des Fluids ist. Weiters soll die Streuung der Teilchen unregelmäßig genug sein, um die Verteilungsfunktion isotrop zu halten und somit die Annahme der Diffusionsapproximation 3.18 gilt. Zusätzlich sollen rein elastische Stöße bei der Streuung auftreten und die Stoßpartner sollen unendlich große Masse haben (*damit sich die Teilchenenergie im lokalen Bezugssystem des Fluids bei der Streuung nicht ändert*). Schließlich wird die Stoßfront noch als unendlich große Platte angenommen, welche zwei uniforme Magnetfelder mit normal auf die Stoßfront stehenden Magnetfeldlinien, im *upstream* und *downstream* Medium, trennt. Wählt man im Weiteren das Koordinatensystem noch so, dass der Stoß in der y, z Ebene liegt und der Stoß darin ruht (*stationär*), dann hängen alle Variablen nur noch von x ab (*eindimensionales Problem*) und die Gasgeschwindigkeit lässt sich folgendermaßen definieren

$$u(x) = \begin{cases} u_1 & x < 0 \\ u_2 & x > 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

oder mit der *Heaviside Funktion* $H(x)$ und *Kompressionsverhältnis* $r = u_1/u_2$ (vgl. *Blandford, 1979*)

$$u(x) = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{r} \right) H(x) \right], \quad (3.32)$$

wobei u_1 und u_2 die konstanten *upwind* bzw. *downwind* Geschwindigkeiten bezeichnen. In diesem Bezugssystem vereinfacht sich 3.30 zu

$$u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (3.33)$$

wobei u entweder u_1 oder u_2 entspricht und $u = \text{const}$ gilt. Einfaches aufintegrieren von 3.33 ergibt sofort die allgemeine Lösung

$$f(x, p) = g_1(p) \exp \left(\int_0^x \frac{u(x')}{\kappa(x', p)} dx' \right) + g_2(p), \quad (3.34)$$

wobei $g_1(p)$ bzw. $g_2(p)$ beliebig wählbare Funktionen darstellen. Impliziert man nun die natürlichen Randbedingungen, sodass sich f einer gegebenen Funktion annähert, wenn man sich weit genug im Vorland des Stoßes befindet ($f(x, p) \rightarrow f_1(p)$ wenn $x \rightarrow -\infty$) und $|f(x, p)| < \infty$ wenn $x \rightarrow \infty$ im Hinterland gilt, dann wird 3.34 zu

$$f(x, p) = \begin{cases} f_1(p) + g_1(p) \exp \left(\int_0^x \frac{u_1}{\kappa(x', p)} dx' \right) & x < 0 \\ g_2(p) = f_2(p) & x \geq 0 \end{cases}, \quad (3.35)$$

solange $\int_0^x dx'/\kappa(x', p) \rightarrow \pm\infty$ bei $x \rightarrow \pm\infty$ gilt. Physikalisch bedeutet dies nun, dass eine stationäre Lösung durch einen Ausgleich von Diffusion und Advektion im Vorland zustande kommt.

Um nun die Abhängigkeit von den beiden unbekannt Funktionen f_2 und g_1 von f_1 zu definieren, werden zwei Bedingungen benötigt. Die Überlegung dabei ist, dass ein paralleler Stoß die geladenen Teilchen lokal nicht beeinflusst, da keine Diskontinuität im Magnetfeld vorliegt und die Teilchen auf ihrer Spiralbahn bleiben, auch wenn sie durch die Front stoßen. Daher bleibt die gesamte Verteilungsfunktion im Impulsraum beim Durchgang durch die Stoßfront glatt.

Um nun die Winkelabhängigkeit im System des Fluids von der gesamten Verteilungsfunktion $F(x, p, \mu)$ zu bestimmen, wird F in ein *Legendre Polynom* entwickelt und nach

dem zweiten Term abgebrochen. Weiters wird der anisotrope Teil proportional zum Gradienten des isotropen Teils gesetzt. Demnach ergibt sich

$$F(x, p, \mu) \sim \underbrace{f(x, p)}_{\text{isotrop}} - \mu \lambda \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x, p)}_{\text{anisotrop}}, \quad (3.36)$$

wobei λ der *mittleren freien Weglänge*, aus $\kappa = \lambda v/3$ mit der Teilchengeschwindigkeit v entspricht. Setzt man nun 3.35 für den isotropen Teil ein und berechnet getrennt jeweils upstream bzw. downstream vom Stoß, ergibt sich

$$F(x, p, \mu) \sim \begin{cases} f_1 + g_1 - \mu \frac{3u_1}{v} g_1 & x = 0^- \\ f_2 & x = 0^+ \end{cases}. \quad (3.37)$$

In dieser Darstellung wird jedoch p anstelle von x im System des Fluids betrachtet. Transformiert man nun in das System des Stoßes, welches sich mit Geschwindigkeit $-u$ relativ zum Fluid bewegt, transformiert sich der Teilchenimpuls demnach zu

$$p \mapsto p' = p \left(1 - \mu \frac{u}{v} \right) \quad (3.38)$$

und daher transformiert sich 3.37 zu

$$F(x, p, \mu) \mapsto F(x, p', \mu) = \begin{cases} f_1 + g_1 - \mu \left[\frac{u_1}{v} p \frac{\partial}{\partial p} (f_1 + g_1) + \frac{3u_1}{v} g_1 \right] & x = 0^- \\ f_2 - \mu \left(\frac{u_2}{v} p \frac{\partial}{\partial p} f_2 \right) & x = 0^+ \end{cases}. \quad (3.39)$$

Koeffizientenvergleich der isotropen und anisotropen Teile vor und nach dem Stoß ergibt die Bedingungen zur Lösung des Gleichungssystems

$$f_1 + g_1 = f_2 \quad \text{isotrop} \quad (3.40)$$

$$u_1 p \frac{\partial}{\partial p} (f_1 + g_1) + 3u_1 g_1 = u_2 p \frac{\partial}{\partial p} f_2 \quad \text{anisotrop}. \quad (3.41)$$

Eliminiert man nun g_1 und verwendet das Kompressionsverhältnis $r = u_1/u_2$, erhält man

$$(r - 1) p \frac{\partial f_2}{\partial p} = 3r (f_1 - f_2). \quad (3.42)$$

Setzt man im Weiteren noch $a := 3r/(r - 1)$, erhält man die Lösung, welche die Verteilungsfunktion vor dem Stoß mit der Verteilungsfunktion hinter dem Stoß zueinander in

Beziehung setzt

$$f_2(p) = ap^{-a} \int_0^p p'^{a-1} f_1(p') dp' + bp^{-a}. \quad (3.43)$$

Der erste Term kann als das Teilchenspektrum betrachtet werden, bei dem Teilchen vom Vor- und Hinterland in den Stoß advektiert und dort beschleunigt werden. Der zweite Term (*b ist beliebige Integrationskonstante*) symbolisiert die Injektion von Teilchen aus dem thermischen Hintergrund in den Beschleunigungsprozess. Betrachtet man nun nur den ersten Term, zeigt sich, dass sich für jene Teilchen die durch die Stoßfront advektieren, die Verteilungsfunktion im Hinterland als Potenzfunktion gefaltet mit dem Teilchenspektrum im Vorland des Stoßes ergibt. Maßgeblich hierbei ist, wenn das upstream-Spektrum flacher als eine Potenzfunktion mit Index a ist, hat das downstream-Spektrum bei hohen Impulsen eine Potenzfunktion mit Index a *unabhängig* von der genauen Form des Spektrums im Vorland des Stoßes. Weiters zeigt sich auch, dass Stöße mit speziellen Adiabatenindizes γ , sodass sich das Kompressionsverhältnis r schreibt zu

$$r = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + M^{-2}}, \quad (3.44)$$

mit Stoßmachzahl M und für den Standardfall eines *starken Stoßes* in einem nicht relativistischen Plasma ($\gamma = 5/3$, $M \rightarrow \infty$), der Index $a \rightarrow 4^+$ strebt. Dieses Ergebnis ist sehr nahe an dem Index des beobachteten Spektrums der kosmischen Strahlung (*vgl. Drury, 1983, $a_{obs} = 4.3$*).

4 Vollständiges physikalisches Gleichungssystem

Die Erhaltungsgleichungen aus Kapitel 2.4.1 bilden zusammen mit der Transportgleichung aus Kapitel 3.2 ein vollständiges Gleichungssystem, welches nun numerisch gelöst werden kann. Weiters wird im Rahmen dieser Arbeit die Gravitation vernachlässigt, womit sich die Gleichungen 2.42 und 2.43 anschreiben lassen zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.1)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} P_{ges} = 0. \quad (4.2)$$

Da die Energiegleichung die Erhaltung der Gesamtenergie beschreibt, stellt es sich als günstig heraus, 2.44 in die jeweiligen beteiligten Energien zu unterteilen. Einerseits besteht in dem jeweiligen Volumenelement die *Gasenergie* und andererseits auch die *Energie der kosmischen Strahlung*. Die Gasenergie schreibt sich allgemein zu (*vgl. Dorfi & Breitschwerdt, 2012*)

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (e_g \vec{u}) + P_g \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \Gamma - \Lambda, \quad (4.3)$$

wobei e_g der *Energiedichte*, P_g dem *Gasdruck* und Γ bzw. Λ der Heiz- bzw. Kühlrate entspricht.

Die Energie der kosmischen Strahlung ist über einen Adiabaten-Exponent γ_c mit dem Strahlungsdruck folgendermaßen verknüpft

$$P_c = (\gamma_c - 1) e_c. \quad (4.4)$$

Der Strahlungsdruck der kosmischen Strahlung ist gegeben durch ein Moment der Verteilungsfunktion (vgl. *Drury, 1983*)

$$P_c = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} p^3 v f(p) dp \quad (4.5)$$

und die Energiedichte

$$e_c = 4\pi \int_0^{\infty} p^2 T(p) f(p) dp, \quad (4.6)$$

wobei $T(p)$ der kinetischen Energie der Teilchen entspricht.

Abschließend wird nun noch eine Gleichung benötigt, welche die thermodynamischen Bezugsgrößen des Fluids (*Druck p , Volumen V*) miteinander in Beziehung setzt. Diese Eigenschaft wird durch die *Zustandsgleichung für ideale Gase* erfüllt:

$$pV = nRT, \quad (4.7)$$

wobei n der *Molzahl*, R der *universellen Gaskonstante* und T der *Temperatur* entspricht. Gleichung 4.7 kann auch mit Hilfe des *Adiabatindex* γ beschrieben werden

$$p = e(\gamma - 1). \quad (4.8)$$

Da die Verteilungsfunktion der kosmischen Strahlung voraussichtlich einem Potenzgesetz mit Exponent -4 entspricht (*siehe Abschnitt 3.3*), erweist es sich als günstig, eine neue, impulsabhängige Variable $g(p)$ einzuführen

$$g := p^4 f \quad (4.9)$$

und verwendet zusätzlich

$$y := \ln(p) \quad \text{und} \quad z := \frac{p}{m_{PC}} = \frac{e^y}{m_{PC}}. \quad (4.10)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lässt sich Gleichung 3.30 umschreiben zu

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}g) - \frac{1}{3} \left[\frac{\partial g}{\partial y} - g \right] \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\kappa} \vec{\nabla} g) = 0. \quad (4.11)$$

Schließlich ist das Gleichungssystem zur Beschreibung des Problems vollständig bestimmt und hat folgende Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (P_g + P_c) = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (e_g \vec{u}) + P_g \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \Gamma - \Lambda \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} g) - \frac{1}{3} \left[\frac{\partial g}{\partial y} - g \right] \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\kappa} \vec{\nabla} g) = 0 \quad (4.15)$$

$$e_g (\gamma - 1) = P_g \quad (4.16)$$

$$\frac{4\pi}{3} \int_{y_1}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} g dy = P_c \quad (4.17)$$

$$4\pi \int_{y_1}^{\infty} \left[\sqrt{1+z^2} - 1 \right] \frac{g}{z} dy = e_c. \quad (4.18)$$

5 Numerische Methodik

Da es nicht möglich ist, infinitesimal kleine Änderungen numerisch zu berechnen, müssen verschiedene Überlegungen getroffen werden, um eine bestmögliche Beschreibung des Problems zu gewährleisten. Wesentlich ist hierbei die Wahl des Gitters, welches den physikalischen Raum abdeckt. Die folgenden Ausführungen in diesem Kapitel richten sich im Wesentlichen nach Dorfi et al. (2006) bzw. Dorfi & Drury (1987).

Wie bereits in Abschnitt 1.2.1 gezeigt wurde, ist die Strömungsgeschwindigkeit in einem galaktischen Wind immer normal auf die Grundfläche des Volumenelements. Dies bedeutet also, dass es sich bei der Modellierung eines galaktischen Windes um ein *eindimensionales Problem* handelt. Allerdings ist die Strömungsgeschwindigkeit innerhalb der Flussröhre nicht konstant und es ist auch sehr wahrscheinlich, dass Unstetigkeiten, wie beispielsweise Stoßfronten, innerhalb des Simulationsraumes auftreten werden. Um das Problem adäquat beschreiben zu können, müssen also einige Dinge berücksichtigt werden, welche im Laufe dieses Kapitels noch näher erörtert werden. Grundsätzlich ist für die Beschreibung eines eindimensionalen Problems die Gitterstruktur trivial. Daher wird der physikalische Raum in $N-1$ Flussröhren-Volumenelemente (*Abb. 1.12*) mit N radialen Gitterpunkten unterteilt. Es wird weiterhin angenommen, dass die physikalischen Erhaltungsgrößen (*Masse, Energie, etc.*) innerhalb eines Volumenelements konstant bleiben. Somit erweist es sich als günstig, die *skalaren* Größen, wie beispielsweise die Masse, auf ein zu den *vektoriellen* Größen, wie beispielsweise die Geschwindigkeit, versetztes Gitter zu legen. Schematisch ist dies in Abbildung 5.1 dargestellt.

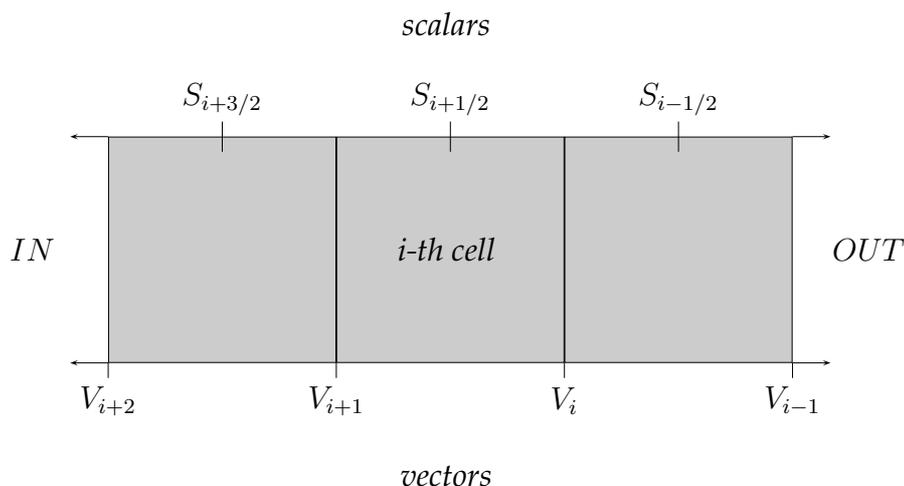


Abbildung 5.1: Vektorielle Größen wie Geschwindigkeit und Radius sind von den skalaren Größen wie Dichte, Energie, etc. getrennt und versetzt angeordnet.

5.1 Explizite VS implizite Verfahren

Typischerweise werden zwei Verfahren zur Lösung eines zeitabhängigen Systems von Differentialgleichungen unterschieden (vgl. *Lecheler, 2009; LeVeque, 2002*)

- explizite Verfahren und
- implizite Verfahren.

Dabei unterscheiden sich diese beiden Verfahren darin, wie die Lösung zum neuen Zeitschritt berechnet wird. Bei *expliziten Verfahren* wird die neue Lösung aus den *alten* Lösungen berechnet, während bei *impliziten Verfahren* die neue Lösung *implizit* in der Gleichung enthalten ist (siehe Abb. 5.2). So ein Verfahren verwendet also die alten *und* neuen Lösungen zur Bestimmung des Problems.

Will man einen Lösungsvektor x am i ten Gitterpunkt zum neuen Zeitpunkt nach dem expliziten Verfahren bestimmen, schreibt man daher

$$\frac{x^{t+1} - x^t}{\delta t} = F(x)^t. \quad (5.1)$$

Und somit ergibt sich die Lösung zu

$$x^{t+1} = x^t + \delta t F(x)^t. \quad (5.2)$$

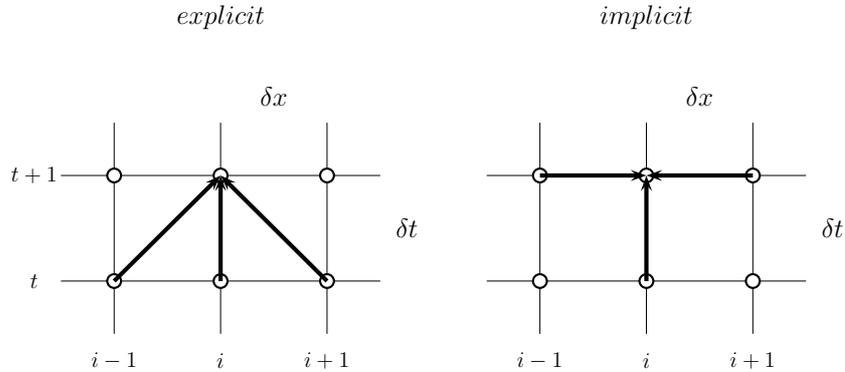


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung von explizitem und implizitem Verfahren

Es ist leicht zu sehen, dass die Lösung einfach einer Extrapolation von den alten zu den neuen Zeitschritten entspricht, demnach ist dieses Verfahren sehr stark von der Schrittweite δt abhängig. Beim expliziten Verfahren existiert immer ein maximaler Zeitschritt δt , welcher durch die *Courant-Friedrichs-Levy (CFL)-Bedingung* gegeben ist (vgl. *LeVeque, 2002*).

Implizite Verfahren lösen hingegen das Gleichungssystem mit Hilfe der Lösungen aus den alten und neuen Zeitschritten. Formal bedeutet dies

$$\frac{x^{t+1} - x^t}{\delta t} = F(x^{t+1}, x^t). \quad (5.3)$$

Normalerweise sind solche Systeme nicht linear und können daher nicht explizit gelöst werden. Jedoch kann die Lösung mittels eines Iterationsverfahrens (z.B. *Newton-Raphson Verfahren*) angenähert werden. Allerdings muss dafür das gesamte Gleichungssystem zum alten Zeitpunkt bekannt sein (*Anfangsmodell*). Für ein System mit N Stützstellen und M Variablen lässt sich ein Gleichungssystem für eine beliebige Stützstelle i daher folgendermaßen darstellen

$$\mathcal{G}_{m,i}(\mathbf{X}^t) = 0 \quad m \in [1, M]. \quad (5.4)$$

$\mathcal{G}_{m,i}$ entspricht somit einem Gleichungssystem von M Gleichungen an der Stützstelle i und \mathbf{X}^t beschreibt ein Set von Variablen zum alten Zeitpunkt. Damit ergibt sich insgesamt

ein Gleichungssystem mit $N \times M$ Gleichungen \mathcal{G} . Natürlich muss diese Bedingung auch für alle neuen Zeiten erfüllt sein, daher schreibt man

$$\mathcal{G}_{m,i}(\mathbf{X}^{t+1}) = 0 \quad m \in [1, M]. \quad (5.5)$$

Da es sich hier um ein nicht lineares Gleichungssystem handelt, kann man hier keine explizite Lösung finden, jedoch kann eine Lösung durch Entwicklung in eine *Taylorreihe* approximiert werden. Für ein Verfahren erster Ordnung und für jede Stützstelle i schreibt sich dies daher zu

$$\mathcal{G}_{m,i}(\mathbf{X}^{t+1}) = \mathcal{G}_{m,i}(\mathbf{X}^t) + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{G}_{m,i}(\mathbf{X}^t)}{\partial X_i^t}}_{\mathcal{J}} (X_i^{t+1} - X_i^t) = 0. \quad (5.6)$$

Die Ableitung entspricht hier einem Element der *Jacobimatrix*, womit die Jacobimatrix demnach eine $(N \cdot M \times N \cdot M)$ Matrix darstellt. Nach Invertierung der Matrix kann somit eine Lösung zum neuen Zeitpunkt $t+1$ für jeden Gitterpunkt i aus Gleichung 5.6 berechnet werden. Formal bedeutet dies:

$$\delta \mathbf{X}_i = -\mathcal{J}_{mi}^{-1} \mathcal{G}_{m,i}(\mathbf{X}^t) \quad (5.7)$$

mit $\delta \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i^{t+1} - \mathbf{X}_i^t$. Für eine detaillierte Struktur der Jacobimatrix siehe Steiner (2012). Da hier nur mit der ersten Ordnung approximiert wurde, ist diese Lösung natürlich noch ungenau. Allerdings kann die Lösung nun mit Hilfe eines Iterationsverfahrens (*hier Newton-Raphson*) verbessert werden. Dabei wird die Prozedur so oft wiederholt, bis eine bestimmte Genauigkeit ϵ erreicht wird (*Details siehe LeVeque, 2002*). Formal bedeutet dies

$$\min \left(\frac{|\delta \mathbf{X}_{m,i}|}{|\mathbf{X}_{m,i} + \eta_{m,i}|} \right) \leq \epsilon. \quad (5.8)$$

Der Wert $\eta_{m,i}$ wird dazu verwendet, um eine Division durch 0 zu vermeiden, falls $\mathbf{X}_{m,i} = 0$. Natürlich muss darauf geachtet werden, dass $\eta_{m,i} \ll \mathbf{X}_{m,i}$ gilt.

5.2 Donor-Cell Schema

Gleichungen wie die hydrodynamischen Gleichungen und die Transportgleichung der kosmischen Strahlung sind *Erhaltungsgleichungen* (siehe Kapitel 2 und Abschnitt 3.2), d.h.,

die Quantität einer bestimmten physikalischen Größe (*Masse, Impuls, Energie, etc.*) bleibt während eines physikalischen Prozesses erhalten. Betrachtet man beispielsweise den physikalischen Prozess eines strömenden Fluids und will dies in einem finiten numerischen Raum beschreiben, bedarf es spezieller Überlegungen, damit die Physik während der numerischen Berechnung nicht verletzt wird. Schematisch ist dies in Abbildung 5.3 dargestellt.

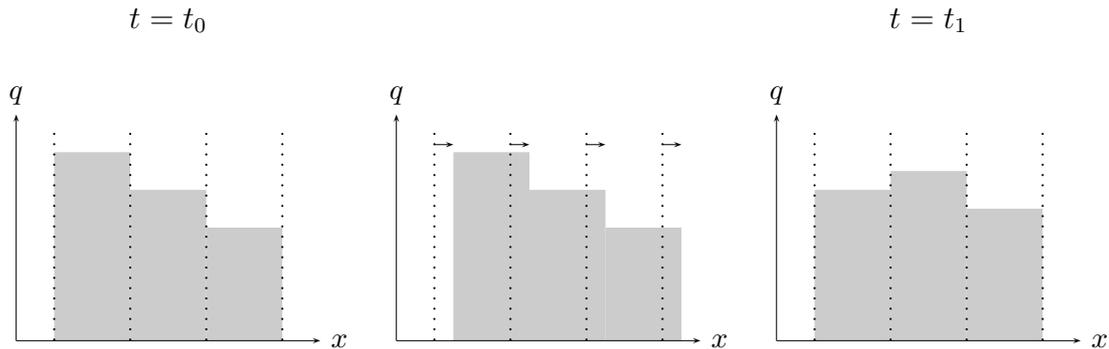


Abbildung 5.3: Beim Fluss einer Erhaltungsgröße q von einer Zelle in die Nächste soll diese Größe erhalten bleiben.

Das einfachste Schema, welches solch einen Fluss erhält, ist das *Donor-Cell Schema* oder auch *Donor-Cell Advektion*. Die folgenden Ausführungen beziehen sich im Allgemeinen auf LeVeque (2002). Der Grundgedanke besteht in der Annahme, dass die zu erhaltende physikalische Größe innerhalb einer Zelle konstant ist. Betrachtet man nun einen Materialfluss \mathcal{F}_i über eine Zellwand i mit Geschwindigkeit u_i , so kann dieser, wenn $u_i < 0$ von rechts nach links, oder wenn $u_i > 0$, von links nach rechts gerichtet sein. Weiters muss gewährleistet sein, dass der Fluss während eines Zeitschrittes von $t_n \mapsto t_{n+1}$ eine Zellengröße nicht überschreitet (*CFL-Bedingung*). Mit diesen Annahmen ist der Fluss über ein Zelleninterface konstant und lässt sich darstellen zu

$$\mathcal{F}_i = \tilde{q}_i u_i, \tag{5.9}$$

wobei \tilde{q}_i einer skalaren Größe (*Masse, Energie, etc.*) entspricht und gleichbedeutend mit der Nomenklatur des Staggered Grid (*siehe Abb. 5.1 und 5.4*) übereinstimmt, also $\tilde{q}_i =$

$q_{i+1/2}$. Das bedeutet demnach, dass sich der Donor-Cell Interface-Fluss schreibt zu

$$\mathcal{F}_i = \begin{cases} \tilde{q}_i u_i & \text{wenn } u_i > 0 \\ \tilde{q}_{i-1} u_i & \text{wenn } u_i < 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

wobei hier schon eine negative Zählrichtung von x_N innen bis x_1 außen berücksichtigt wurde (Abb. 5.4). Je nachdem, ob $u_i > 0$ oder $u_i < 0$ ist, wird entweder die Größe links \tilde{q}_i oder rechts von der Zellwand \tilde{q}_{i-1} zur Berechnung verwendet.

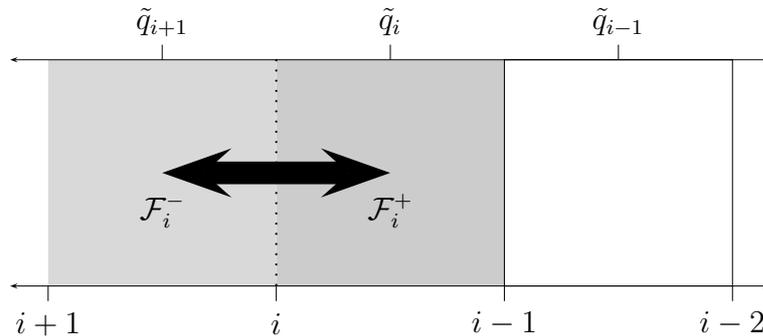


Abbildung 5.4: Die Erhaltungsgrößen \tilde{q}_i sind innerhalb einer Zelle konstant. Je nach Fließrichtung wird entweder die Größe der rechten oder der linken Seite der Zellwand zur Berechnung verwendet.

Wie leicht ersichtlich ist, kann das Donor-Cell Schema ohne großen Aufwand implementiert werden. Es sei jedoch bemerkt, dass dieses Verfahren nur erster Ordnung und daher sehr diffusiv ist.

5.3 Gittergleichung

In galaktischen Winden muss man davon ausgehen, dass lokal beschränkte Systeme, wie Stoßwellen, auftreten können. Um dieses Problem ausreichend genau numerisch zu beschreiben, muss daher eine relativ große Anzahl von Gitterpunkten gewählt werden, um auch die Auflösung der Stoßfront selbst zu gewährleisten. Für einen stationären Stoß kann dies umgangen werden, wenn man eine größere Anzahl von Gitterpunkten um den Bereich des Stoßes verteilt und eine geringere dort, wo der Gradient konstant ist (Abb. 5.5). Im

Normalfall liegt allerdings kein stationäres Problem vor und die Flusstruktur wird einer ständigen Änderung unterzogen sein. Die Idee ist nun, dass sich die Dichte der Gitterpunkte dort *erhöht*, wo große Gradienten auftreten und dort *verringert*, wo die Gradienten konstant sind. Ein Gitter mit dieser Eigenschaft wird als *adaptive Gitter* bezeichnet und wird nach Dorfi & Drury (1987) folgendermaßen beschrieben: Zu Beginn wird ein Gitter mit den Stützstellen x_1, \dots, x_N (N entspricht der Anzahl der Stützstellen) angenommen, welches abhängig von den physikalischen Gegebenheiten ist. Dabei wird von dem Gitter verlangt, dass sich die Konzentration an Gitterpunkten dort erhöht, wo eine höhere Auflösung zur Beschreibung des Problems gefordert wird und gleichzeitig dort verringert, wo keine größere Auflösung zur Beschreibung des Problems notwendig ist.

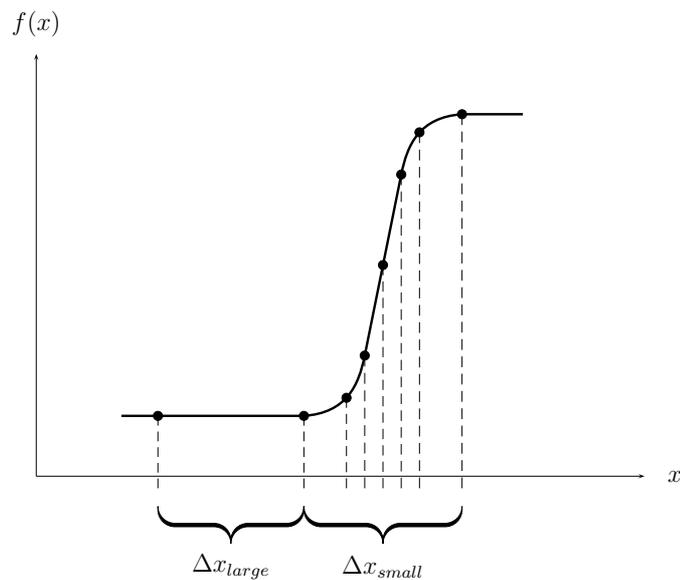


Abbildung 5.5: Die vorerst äquidistanten Stützstellen Δx werden einerseits im Bereich der Stoßfront verkleinert und andererseits im Bereich von konstanten Gradienten verbreitert.

Angenommen n sei die aktuelle Verteilungsfunktion von Gitterpunkten (z.B. äquidistant) und R sei die geforderte Verteilungsfunktion um das Problem bestmöglich zu

beschreiben, dann sollte trivialerweise n_i proportional R_i (i bezeichnet den Index des Gitterpunkts) sein

$$n_i \propto R_i. \quad (5.11)$$

Unglücklicherweise kann dieses Konzept nicht direkt angewandt werden, da es zu Instabilitäten kommen kann, falls sich n zu schnell ändert. Um dieses Problem zu umgehen, ist n_i nur über eine Reihe von Glättungsoperatoren proportional zu R_i , welche moderate Änderungen in n_i gewährleisten. Die Verteilungsfunktion n wird daher folgendermaßen definiert

$$n_i := \frac{l_{nat}}{x_{i+1} - x_i}, \quad (5.12)$$

wobei l_{nat} einer vom Problem abhängigen, *natürlichen Längenskala* entspricht. Die Definition der gewünschten Verteilungsfunktion R ist etwas komplizierter und Dorfi & Drury (1987) beschreibt R als *Bogenlänge* einer Funktion $f(x)$ (Abb. 5.5). Demnach nimmt R_i folgende Form an

$$R_i = \sqrt{1 + \sum_{k=1}^M \frac{l_{nat_i}}{F_k} g_k \frac{\Delta f_{k,i}}{\Delta x_i}}, \quad (5.13)$$

wobei $f_{k,i} := f_k(x_i)$ und $\Delta f_{k,i} := f_{k,i+1} - f_{k,i}$ entspricht. Weiters entspricht g_k den erforderlichen Gewichten der Funktionen f_k und F_k entspricht wieder einer natürlichen Skala, abhängig von f_k .

Die Glättung kann nach folgendem Schema implementiert werden (vgl. Dorfi & Drury, 1987)

$$\frac{\alpha}{\alpha + 1} \leq \frac{n_{i+1}}{n_i} \leq \frac{\alpha + 1}{\alpha}, \quad (5.14)$$

wobei α der Steifigkeit des Gitters entspricht. Benutzt man dieses Resultat und manipuliert das Ergebnis noch etwas (Steiner, 2012; LeVeque, 2002), kann die *räumliche Glättung* geschrieben werden zu

$$\tilde{n}_i = n_i - \alpha(\alpha + 1)(n_{i+1} - 2n_i + n_{i-1}). \quad (5.15)$$

Zusätzlich zur räumlichen muss auch noch eine *zeitliche Glättung* berücksichtigt werden

$$\hat{n}_i = \tilde{n}_i + \tau \frac{\tilde{n}_i - \tilde{n}_i^{alt}}{\delta t}. \quad (5.16)$$

Dies bedeutet also, dass sich das Gitter bei Zeitschritten δt größer als τ ändert, jedoch nahezu unverändert bei Zeitschritten kleiner als τ bleibt. Die Wahl der Zeitskala τ hängt vom betrachteten Problem ab, muss jedoch kleiner als die kleinste Zeitskala sein. Schließlich führen diese Überlegungen zu der endgültigen Form der Gittergleichung

$$\frac{\hat{n}_{i-1}}{R_{i-1}} = \frac{\hat{n}_i}{R_i}. \quad (5.17)$$

Die Randbedingungen für das Gitter müssen je nach Art des Problems definiert werden. Sie können so gewählt werden, dass der innere x_I und äußere x_A Gitterpunkt fix sind (*physikalischer Raum ist konstant*), oder die inneren und äußeren Gitterpunkte variabel (*stationäres Problem, z.B. Stoß wird im inneren des Raumes zentriert gehalten*) sind. Die Randbedingungen für die Gittergleichung hingegen wählt man so, dass die Gradienten der Verteilungsfunktion n am Rand des Gitters null sind. Formal bedeutet dies

$$\text{innerer Rand } x_I : \begin{cases} x_N = x_I(t) \\ n_{N-2} = n_{N-1} \end{cases}, \quad (5.18)$$

$$\text{äußerer Rand } x_A : \begin{cases} x_1 = x_A(t) \\ n_1 = n_2 \end{cases}. \quad (5.19)$$

5.4 Künstliche Viskosität

In hydrodynamischen Systemen erscheinen Stoßfronten als reine Diskontinuitäten, d.h., dass eine numerische Berechnung im Bereich des Stoßes nicht mehr möglich ist. Daher wird eine *künstliche Viskosität* als Druckterm in die hydrodynamischen Gleichungen (*Bewegungsgleichung, Energiegleichung*) eingebracht. Die meistbenutzte Form dieses „viskosen Drucks“ ist nach VonNeumann & Richtmyer (1950) gegeben durch

$$q = \begin{cases} l^2 \rho \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 & \frac{\partial u}{\partial r} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (5.20)$$

wobei hier l die Größenordnung der „Verschmierung“ des Stoßes darstellt (*Abb. 5.6*). Damit also der Stoß noch numerisch berechenbar bleibt, muss l also die Größenordnung

der lokalen Gitterbreite aufweisen. Nach Tscharnuter & Winkler (1979) müssen demnach folgende Bedingungen für eine künstliche Viskosität gegeben sein:

- Stoßfronten müssen auf die lokale Gitterbreite verbreitert werden.
- Expansionsgebiete müssen frei von künstlicher Viskosität sein.
- Es dürfen keine Störungen durch den Übergang von Überschall-Strömung in den hydrostatischen Bereich induziert werden.
- Eine homologe Kontraktion (*z.B. wenn u_{rel} linear in r ist*) muss ebenfalls von der künstlichen Viskosität unbeeinträchtigt bleiben.

Es zeigt sich, dass es sich als günstig erweist, die rechte Seite von 5.20 in zwei Terme $l^2 \rho \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)$ und $\frac{\partial u}{\partial r}$ aufzuspalten. Wenn nun $\frac{\partial u}{\partial r}$ einerseits als $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ und andererseits als *nablau* identifiziert wird, ist es möglich, eine Unterscheidung des Gradienten und der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes zu machen. Der dementsprechende Viskositäts-Tensor lautet daher (*vgl. Tscharnuter & Winkler, 1979*)

$$Q = \begin{cases} l^2 \rho \operatorname{div}(\vec{u}) \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \vec{e}) \right] & \vec{\nabla} \cdot \vec{u} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.21)$$

Hier ist \vec{e} der Einheitstensor. Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass die künstliche Viskosität nur im Falle von Kompression ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} < 0$) in Kraft tritt. D.h., dass die Viskosität über eine breite Übergangszone, in der $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} < 0$ und $\partial u / \partial r > 0$ gilt, langsam ansteigt. Da die komplette Herleitung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, wurde auf eine weitere Behandlung und Diskretisierung des Tensors, angewandt auf eine Flussröhrengemetrie verzichtet, und im Weiteren werden die Viskositätsterme nur mehr als *spezifischer Druckterm* q angeführt.

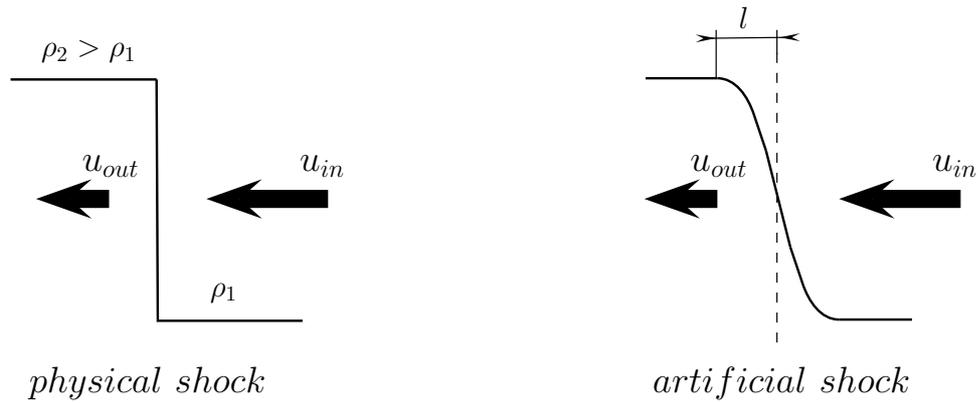


Abbildung 5.6: Der physikalisch scharfe Stoß wird mit Hilfe des Viskositätstensors künstlich „verschmiert“. Hierbei ist es wichtig, dass l in der Größenordnung der lokalen Gitterbreite gewählt wird.

5.5 Diskretisierung

Da es im Allgemeinen keine Lösungen für die Erhaltungsgleichungen aus Kapitel 4 gibt und numerisch partielle Ableitungen nur als endliche Differenzen dargestellt werden können, muss das Gleichungssystem 4.18 diskretisiert werden. Dazu ist es wichtig, dass alle Gleichungen des Gleichungssystems in *Erhaltungsform* bzw. *Integralform* dargestellt werden, um die Advektionsprozesse von einer Zelle in die nächste adäquat beschreiben zu können. Formal erhält man also einen *Volumsterm* und einen *Advektionsterm*

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q(x, t) dV}_{\text{Volumsterm}} - \underbrace{\oint_S \vec{\mathcal{F}}(x, t) d\vec{S}}_{\text{Advektionsterm}} = 0, \quad (5.22)$$

wobei $Q(x, t)$ einer skalaren Funktion und $\mathcal{F}(x, t)$ der korrespondierenden Flussfunktion entspricht. Damit die physikalische Größe erhalten bleibt, muss also die zeitliche Änderung von Q in einem Volumen dV demnach gleich groß wie der Fluss \mathcal{F} durch die Zellwand des Volumens dV sein.

Die Diskretisierung des Volumenterms wurde folgendermaßen gewählt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV \approx \frac{\delta \int_V Q dV}{\delta t} = \frac{1}{\delta t} \left[\left(\int_V Q dV \right)^{n+1} - \left(\int_V Q dV \right)^n \right], \quad (5.23)$$

wobei $n + 1$ bzw. n den *neuen* bzw. *alten* Zeitpunkt beschreibt. Das verbleibende Integral muss nun wiederum weiter diskretisiert werden. Es sei angemerkt, dass das Integrationsvolumen sich für jede Gitterzelle ändert (*Flussröhrengemetrie*)

$$\int_V Q dV \approx Q_i \delta V_i. \quad (5.24)$$

Mit den Annahmen aus Abschnitt 1.2.1 ist das Volumenelement eindeutig bestimmt und hat die Form

$$\delta V_i := \int_{z_i}^{z_{i-1}} A_0 \left(1 + \frac{z^2}{Z_0^2} \right) = A_0 \left(\Delta z_i + \frac{\Delta z_i^3}{3Z_0^2} \right). \quad (5.25)$$

Daher schreibt sich die endgültige diskrete Form des Volumenterms zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV \approx \frac{1}{\delta t} [Q_i^{n+1} \delta V_i^{n+1} - Q_i^n \delta V_i^n] \quad (5.26)$$

Die Diskretisierung des *Advektionsterms* geht nun nach dem gleichen Prinzip vor

$$\oint_S \vec{F} d\vec{S} \approx \mathcal{F}_{i-1} dS_{i-1} - \mathcal{F}_i dS_i, \quad (5.27)$$

wobei das Flächenelement der Zellwand für den Gitterpunkt i folgendermaßen definiert ist

$$\delta S_i = A_0 \left(1 + \frac{z_i^2}{Z_0^2} \right). \quad (5.28)$$

Diese Ergebnisse werden nun im Zuge der Diskretisierung der physikalischen Gleichungen verwendet.

5.5.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung ist die am Einfachsten zu diskretisierende Gleichung, da sie nur aus zwei Termen besteht

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (5.29)$$

In Integralform schreibt sich 5.29 zu

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0, \quad (5.30)$$

bzw. mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_O \rho \vec{u} \cdot d\vec{f} = 0, \quad (5.31)$$

und schließlich in diskreter Form

$$\frac{\delta}{\delta t} (\rho \delta V) + \delta \mathcal{F} = 0. \quad (5.32)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Flüsse \mathcal{F}_i bzw. die Volumenelemente δV_i , jeweils auf die Flussröhrengometrie aus dem vorigen Abschnitt bezogen sind. Da die Flüsse \mathcal{F}_i eine Funktion der Geschwindigkeit u_i sind, ist weiters zu beachten, dass sich auch die Gitterpunkte aufgrund des adaptiven Gitters (*siehe Abschnitt 5.3*) mit einer Geschwindigkeit u_{grid} gegenüber dem Fluid bewegen. Daher muss die *Relativgeschwindigkeit* u_{rel} aus Gas- und Gridgeschwindigkeit betrachtet werden

$$u_{rel_i} = u_{G_i} - u_{grid_i} \quad (5.33)$$

mit der Gittergeschwindigkeit

$$u_{grid_i} = \frac{x_i^{t+1} - x_i^t}{\Delta t}. \quad (5.34)$$

Unter Anwendung des Donor-Cell Verfahrens schreibt sich der Dichtefluss über die Zellwand der i -ten Zelle zu

$$\mathcal{F}_i = \tilde{\rho}_i u_{rel_i} \quad (5.35)$$

mit

$$\tilde{\rho}_i = \alpha \rho_{i-1} + (1 - \alpha) \rho_i \quad \alpha = \begin{cases} 1 & u_{rel_i} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (5.36)$$

Ist also die Relativgeschwindigkeit positiv, bedeutet das, dass die Strömung von rechts nach links läuft und damit die Dichte der Zelle mit Index $i - 1$ einströmt. Andernfalls, wenn die Strömung von rechts nach links läuft, ist die Dichte mit dem Index i maßgeblich.

Somit ergibt sich die diskrete Form der Kontinuitätsgleichung zu

$$(\rho_i^{n+1} \delta V_i^{n+1} - \rho_i^t \delta V_i^t) + \left[\tilde{\rho}_{i-1}^{n+1} u_{rel_{i-1}}^{n+1} \delta S_{i-1}^{n+1} - \tilde{\rho}_i^{n+1} u_{rel_i}^{n+1} \delta S_i^{n+1} \right] \delta t = 0. \quad (5.37)$$

Da ein implizites Verfahren angewandt wird, wird der Index $n + 1$ in Zukunft nicht mehr verwendet.

5.5.2 Bewegungsgleichung

Die allgemeine Form der Bewegungsgleichung oder *Impulserhaltungsgleichung*, inklusive *viskosem Druck* (siehe Abschnitt 5.4), lautet

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\vec{u} \otimes (\rho \vec{u})] + \vec{\nabla} (P_G + P_C + q) = 0. \quad (5.38)$$

Der Ausdruck $(\rho \vec{u})$ bezeichnet hierbei den *Gasimpuls* und wird daher im Folgenden mit $(\rho \vec{u}_{Gas})$ bezeichnet. Integration über das Volumen zeigt, dass anders als bei der Kontinuitätsgleichung, hier ein Volumenterm und zwei Advektionsterme vorliegen

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \vec{u}_{Gas}) dV + \oint_O \vec{u}_{rel} \otimes (\rho \vec{u}_{Gas}) d\vec{f} + \oint_O \vec{\nabla} (P_G + P_C + q) d\vec{f} = 0. \quad (5.39)$$

Unter neuerlicher Anwendung des *Donor-Cell* Schemas ergibt sich die diskrete Form von 5.38 zu

$$\begin{aligned} & \rho_{i-1} u_{Gas_{i-1}} \delta V_{i-1} - \rho_i u_{Gas_i} \delta V_i + \\ & \delta t \left[u_{rel_{i-1}} \cdot \tilde{\rho}_{i-1} \tilde{u}_{Gas_{i-1}} \delta S_{i-1} - u_{rel_i} \cdot \tilde{\rho}_i \tilde{u}_{Gas_i} \delta S_i \right] + \\ & \delta t \delta S_{i-1} \left[P_{G_{i-1}} - P_{G_i} + P_{C_{i-1}} - P_{C_i} + q_{i-1} - q_i \right] - \\ & \delta t \delta S_i \left[P_{G_i} - P_{G_{i+1}} + P_{C_i} - P_{C_{i+1}} + q_i - q_{i+1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

wobei $\tilde{\rho}$ der advektierten Dichte aus dem *Donor-Cell* Schema und δS bzw. δV dem Flussröhren Flächen- bzw. Volumenelement entsprechen.

5.5.3 Energiegleichung

Da, wie bereits in Kapitel 4 behandelt wurde, die Energie der kosmischen Strahlung separat über die Verteilungsfunktion berechnet wird, muss für die Energieerhaltung nur die Gasenergie berücksichtigt werden. Allgemein lautet die Energieerhaltung für ein Gas (vgl. 4.3)

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (e_g \vec{u}) + P_g \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \Gamma - \Lambda.$$

Zu beachten ist allerdings, dass die Beziehung zwischen Gasdruck P_g und Energiedichte e_g über die Zustandsgleichung 4.8 gegeben ist. In Integralform ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V e_g dV + \oint_S (e_g \vec{u}_{rel}) \cdot d\vec{S} + P_g \oint_S \vec{u}_{Gas} \cdot d\vec{S} - \int_V (\Gamma - \Lambda) dV = 0. \quad (5.41)$$

Diskretisiert schreibt sich die Energieerhaltung demnach zu

$$\begin{aligned} & (e_{g_i} \delta V_i - e_{g_i}^n \delta V_i^n) + \\ & \delta t (e_{g_{i-1}} u_{rel_{i-1}} dS_{i-1} - e_{g_i} u_{rel_i} \delta S_i) + \\ & \delta t P_{g_i} (u_{Gas_{i-1}} dS_{i-1} - u_{Gas_i} \delta S_i) + \\ & \delta t (\Gamma_i - \Lambda_i) \delta V_i = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

5.5.4 CR-Erhaltungsgleichung

Wie in Kapitel 4 bereits beschrieben, ist ein Potenzgesetz mit Index -4 für die Lösung der Erhaltungsgleichung zu erwarten. Weiters muss der *Diffusionskoeffizient* κ aus Gleichung 3.30 einer genaueren Analyse unterzogen werden. Grundsätzlich setzt die genaue Berechnung von κ vollständige Kenntnis über die Alfvén-Wellenstruktur voraus. Da dies sehr komplexe Abhängigkeiten in den Erhaltungsgleichungen implizieren würde, wird κ durch einen, rein von Impuls und Dichte abhängigen, Diffusionskoeffizienten $\chi = f(y, \rho)$ ersetzt. Nach Falle & Giddings (1987) bzw. Dorfi & Drury (1985) kann angenommen werden, dass χ nur vom Teilchenimpuls und der Gasdichte abhängt, womit zumindest die Variation von χ durch Welleneinflüsse im Vor- und im Hinterland des Stoßes simuliert

werden kann. Da aber die Impulsabhängigkeit von χ auch nicht vollständig bekannt ist, wird der Einfachheit halber angenommen, dass χ sich proportional mit dem Impuls ändert und diese Proportionalität, sowohl für relativistische als auch nicht relativistische Teilchen, gleich groß ist. Formal bedeutet dies

$$\chi := \chi_0 \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right) \left(\frac{p}{p_1} \right)^a \quad (5.43)$$

und mit Hilfe der Definition für den Teilchenimpuls aus Kapitel 4 schreibt sich χ demnach zu

$$\chi := \chi_0 \frac{\rho_1}{\rho} e^{(y-y_1)a}, \quad (5.44)$$

wobei ρ_1 der Dichte des ungestörten Mediums im Vorland, p_1 dem minimalen Impuls der Teilchen bzw. dem Impuls bei Injektion und a einem Skalierungsindex entspricht. Die Dichteabhängigkeit wurde gewählt, um Schallwelleninstabilitäten zu verhindern. Ein besonderes Augenmerk bei dieser Definition des Diffusionskoeffizienten sollte auf den Wert χ_0 gelegt werden, da dieser sehr stark von der Breite der *Computational Domain*, der *Stoßbreite* und der *Stoßgeschwindigkeit* abhängt. Die *charakteristische Diffusionslängenskala* ist hierbei folgendermaßen definiert

$$l_{\text{diff}} = \frac{\chi}{u_{\text{shock}}}. \quad (5.45)$$

Somit muss einerseits $l_{\text{diff}} \gg l_{\text{sto}}$ (mit *Stoßbreite* l_{sto}) und andererseits die Länge der Computational-Domain $l_{\text{Domain}} = x_{\text{out}} - x_{\text{in}} \ll l_{\text{diff}}$ (mit *äußerem Rand* x_{out} und *innerem Rand* x_{in}) sein, um Einflüsse durch die Randbedingung zu vermeiden. Durch die Impulsabhängigkeit von χ sind hier besonders Diffusionskoeffizienten bei großen Impulsen zu beachten.

Mit Hilfe dieser Definitionen kann Gleichung 3.30 folgendermaßen dargestellt werden

$$\underbrace{\frac{\partial g}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}g)}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\vec{\nabla}(\chi \vec{\nabla} g)}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} \left[\frac{\partial g}{\partial y} - g \right] \vec{\nabla} \cdot \vec{u}}_{\textcircled{3}}. \quad (5.46)$$

Die Diskretisierung von Gleichung 5.46 erweist sich als übersichtlicher, wenn jeder der Terme $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ und $\textcircled{3}$ getrennt behandelt wird. Man sieht beispielsweise sofort, dass *Term*

① genau der Kontinuitätsgleichung entspricht, d.h. sich genau nach dem gleichen Schema wie in 5.5.1 behandeln lässt. In Integralform schreibt sich Term ① daher zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V g dV + \oint_O g \vec{u} \cdot d\vec{f} = \dots \quad (5.47)$$

Unter Berücksichtigung des Donor-Cell Schemas schreibt sich die diskrete Form von 5.47 zu

$$\left[g_i^{t+1} \delta V^{t+1} - g_i^t \delta V^t \right] + \left[\tilde{g}_i^{t+1} u_{rel_i}^{t+1} \delta S_i - \tilde{g}_{i+1}^{t+1} u_{rel_{i+1}}^{t+1} \delta S_{i+1} \right] \delta t = \dots \quad (5.48)$$

Der Diffusionsterm (*Term ②*) wird in Integralform dargestellt zu

$$-\partial t \int_V \vec{\nabla} (\chi \vec{\nabla} g) dV = -\partial t \oint_O \chi \vec{\nabla} g \cdot d\vec{f} = \dots \quad (5.49)$$

und somit folgt für Term ② in diskreter Schreibweise

$$-\delta t \left[\chi_{i,j} \frac{g_{i-1,j} - g_{i,j}}{x_{i-1} - x_i} \cdot \delta S_i - \chi_{i+1,j} \frac{g_{i,j} - g_{i+1,j}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \delta S_{i+1} \right]. \quad (5.50)$$

Für die adiabate Beschleunigung (*Term ③*) muss schließlich nur noch ein Divergenzterm berücksichtigt werden, da im Rahmen der numerischen Näherung (*Größen innerhalb eines Volumenelements konstant*) der Gradient $\partial g / \partial y$ vor das Integral gezogen werden kann

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_V \underbrace{\left[\frac{\partial g}{\partial y} - g \right]}_u \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}}_{v'} dV &\sim \left| \begin{array}{ll} u = \left[\frac{\partial g}{\partial y} - g \right] & v' = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \\ u = \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{\partial g}{\partial y} - g \right] = 0 & v = \oint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} \end{array} \right| \\ &\sim \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial y} - g \right) \oint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} - 0 \right]. \end{aligned}$$

Somit kann Term ③ näherungsweise folgendermaßen dargestellt werden

$$-\delta t \frac{1}{3} \left(\frac{\partial g}{\partial y} - g \right) \oint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \dots \quad (5.51)$$

sowie diskret

$$-\delta t \frac{1}{3} \left(\frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} - g_{i,j} \right) [u_{Gas_i} dS_i - u_{Gas_{i+1}} dS_{i+1}] = \dots \quad (5.52)$$

Fasst man nun 5.48, 5.50 und 5.52 zusammen, ergibt sich schließlich die diskrete Form der Erhaltungsgleichung für kosmische Strahlung

$$\begin{aligned}
 & [g_i^{t+1} \delta V^{t+1} - g_i^t \delta V^t] + [\tilde{g}_{i-1}^{t+1} u_{rel_{i-1}}^{t+1} \delta S_{i-1} - \tilde{g}_i^{t+1} u_{rel_i}^{t+1} \delta S_i] \delta t - \\
 & \delta t \left[\chi_{i-1,j} \frac{g_{i-1,j} - g_{i,j}}{x_{i-1} - x_i} \cdot \delta S_{i-1} - \chi_{i,j} \frac{g_{i,j} - g_{i+1,j}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \delta S_i \right] - \quad (5.53) \\
 & \delta t \frac{1}{3} \left(\frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} - g_{i,j} \right) [u_{Gas_{i-1}} dS_{i-1} - u_{Gas_i} dS_i] = 0.
 \end{aligned}$$

5.5.5 CR Druck und Energie

Die Diskretisierung des kosmischen Strahlungsdruckes bzw. der Energie ist im Vergleich zu den vorher behandelten Erhaltungsgleichungen trivial, da sowohl Druck als auch Energie direkt aus der Verteilungsfunktion folgen

$$P_C = \frac{4\pi c}{3} \int_{y_1}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} g dy, \quad (5.54)$$

$$E_C = 4\pi c \int_{y_1}^{\infty} \left(\sqrt{1+z^2} - 1 \right) \frac{g}{z} dy, \quad (5.55)$$

mit $z = e^y / m_p c$.

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten, eine numerische Integration durchzuführen. Eine sehr einfach zu implementierende Methode, welche ausreichend genaue Ergebnisse liefert, ist die Integration mittels der *Trapezregel*. Hierbei wird die zu integrierende Funktion mittels Geradenstücken angenähert und die Fläche unter der Kurve berechnet. Diskret bedeutet dies

$$P_{C_i} \sim \frac{4\pi c}{3} \sum_{k=N_C}^2 \frac{y_{k+1} - y_k}{2} \left[\frac{z_{k-1}}{\sqrt{1+z_{k-1}^2}} g_{i,k-1} + \frac{z_k}{\sqrt{1+z_k^2}} g_{i,k} \right], \quad (5.56)$$

$$E_{C_i} \sim 4\pi c \sum_{k=N_C}^2 \frac{y_{k+1} - y_k}{2} \left[\left(\sqrt{1+z_{k-1}^2} - 1 \right) \frac{g_{i,k-1}}{z_{k-1}} + \left(\sqrt{1+z_k^2} - 1 \right) \frac{g_{i,k}}{z_k} \right] \quad (5.57)$$

N_C entspricht dabei der Anzahl der Stützstellen im Impulsraum. Es sei auch angemerkt, dass die Stützstellen bei diesem Verfahren nicht gleichverteilt sein müssen.

5.6 Randbedingungen

Randbedingungen sind ein notwendiges Kriterium, um das Gleichungssystem auch am Rand des Simulationsraumes zu bestimmen. Grundsätzlich ist eine Vielzahl verschiedener Randbedingungen (*je nach physikalischen Gegebenheiten*) möglich, jedoch werden für diese Arbeit nur zwei verschiedenen RB's benötigt:

- fixe Randbedingungen (*für die Erstellung des Anfangsmodells*) und
- Randbedingungen bei denen der Gradient der Größen Null wird.

Betrachtet man also ein Gleichungssystem mit j Gleichungen und einen Simulationsraum mit N Gitterpunkten, ergeben sich die Randbedingungen für die physikalischen Größen $X_{N,j}$ oder $X_{1,j}$ zu

$$\text{fixe Randbed.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{innerer Rand } (i = N) \rightarrow X_{N,j} = X_{in,j} \\ \text{äußerer Rand } (i = 1) \rightarrow X_{1,j} = X_{out,j} \end{array} \right. \quad (5.58)$$

$$\text{konst. Gradienten} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{innerer Rand } (i = N) \rightarrow X_{N,j} = X_{N-1,j} \\ \text{äußerer Rand } (i = 1) \rightarrow X_{1,j} = X_{2,j} \end{array} \right. , \quad (5.59)$$

wobei $X_{in,j}$ und $X_{out,j}$ jeweils fix gewählte Parameter sind.

6 Anfangsmodelle

Anfangsmodelle sind bei impliziten Verfahren von besonderer Bedeutung, da es gewährleistet sein muss, dass sie auch eine Lösung des Problems darstellen. Im Falle dieser Arbeit war die Erstellung eines korrekten Anfangsmodells relativ trivial, da Einflussfaktoren, wie beispielsweise Gravitation oder Temperatur Fluktuationen, vernachlässigt wurden und somit von einer konstanten Strömung über den Simulationsraum ausgegangen werden konnte. Mit Hilfe dieses konstanten Anfangsmodells wurde zuerst ein rein hydrodynamischer Stoß erzeugt (*reflektierende Wand*), welcher anschließend in der Mitte des Simulationsraumes zentriert wurde (*mitbewegte Box*). Abschließend werden hochenergetische Teilchen in den Simulationsraum eingebracht (*kosmische Strahlung*). Es sei darauf hingewiesen, dass diese Anfangsmodelle gewählt wurden, um die analytische Lösung der Verteilungsfunktion (*vgl. 3.3*) reproduzieren zu können. Für reale Systeme sind natürlich andere Anfangsmodelle notwendig.

6.1 Reflektierende Wand

Zur Erstellung des hydrodynamischen Stoßes wurde eine Strömung mit konstanter Dichte, konstanter Temperatur und konstantem Druck mit konstanter Geschwindigkeit gegen eine *reflektierende Wand* gebracht. Definitionsgemäß kann über diese Wand kein Medium ausströmen, was bedeutet, dass die Strömungsgeschwindigkeit (*und somit auch alle Flüsse*) über den Rand Null sein muss. Somit wird sich immer mehr Material an der Wand anlagern und eine Stoßwelle von der Wand, entgegen der Strömungsrichtung, treiben. Die Randbedingungen in diesem Fall lauten daher:

- $U_{INBC} = 0$, $U_{OUBC} = U_0$ (fixe Randbedingung) und
- der Gradient der anderen Größen $X = \{\rho, P_G, P_C, E_C, E\}$ verschwindet am Innenrand, d.h. $\vec{\nabla}X = 0$. Am Außenrand herrscht allerdings ein konstanter Inflow. Demnach werden dort die Randwerte immer wieder auf den Wert der ungestörten, einströmenden Materie gesetzt.

Formal bedeutet dies:

$$\text{innere Randbedingung} \quad \begin{cases} G_j = X_{N,j} - X_{N-1,j} \\ G_u = u_N \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\text{äußere Randbedingung} \quad \begin{cases} G_j = X_{1,j} - C_j \\ G_u = u_1 - C_u \end{cases} \quad (6.2)$$

Per Definition ist $G_j = 0$. Somit ist die Vorgabe von $\vec{\nabla}X_j = 0$ und $u_N = 0$ in obiger Formulierung der Randbedingungen erfüllt.

6.2 Mitbewegte Box

Hat sich nach einiger Zeit der Stoß aufgebaut und ist annähernd in der Mitte des Simulationsraumes angekommen, muss auf eine Randbedingung umgestellt werden, die die radialen Randpunkte mit der Geschwindigkeit des Stoßes mitbewegt, um den Stoß über einen längeren Zeitraum stabil im Zentrum der Box zu halten. Dabei muss natürlich die Stoßgeschwindigkeit bekannt sein. Um die Stoßgeschwindigkeit zu ermitteln, muss zuerst die Stoßposition bestimmt werden. Die eindeutig günstigste Methode stellt hierbei die Positionsbestimmung über die künstliche Viskosität dar, da diese nur im Falle einer Kompression ($\vec{\text{abla}} \cdot \vec{u}$) in Kraft tritt (vgl. Abschnitt 5.4). Um nicht in Konflikt mit dem impliziten Verfahren zu kommen, wurden nur die alten Zeitschritte zur Berechnung verwendet, da sonst, bei Verwendung der aktuellen Zeitschritte, die Ableitungen mitberücksichtigt werden müssten. Die volumsintegrierte Form der künstlichen Viskosität errechnet sich dann aus der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes, multipliziert mit der

Dichte (*entspricht somit einer physikalischen Viskosität*):

$$\vec{q}^{alt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{alt} \cdot \rho^{alt}. \quad (6.3)$$

Nun werden jeweils drei Stoßpositionen gespeichert und so mit Hilfe des Zeitschrittes die mittlere Geschwindigkeit der Stoßfront ermittelt

$$\bar{u}_{shock} = \left\langle \frac{x_{Sto}^{neu} - x_{shok}^{alt}}{\Delta t^{alt}} \right\rangle. \quad (6.4)$$

Um nun den Stoß zentriert zu halten, müssen also die äußeren radialen Randpunkte jeweils um jenen Wert erhöht werden, um den sich der Stoß innerhalb eines Zeitschrittes fortbewegt hat

$$\Delta x_{shock} = \bar{u}_{shock} \cdot \Delta t. \quad (6.5)$$

Damit ergibt sich als Randbedingung für die Gittergleichung

$$\begin{aligned} x_N &= x_N + \Delta x_{shock} && \text{innen} \\ x_1 &= x_1 + \Delta x_{shock} && \text{außen} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Die Randbedingungen der anderen Größen sind wie folgt:

$$\text{innere Randbedingung:} \quad G_j = X_{N,j} - X_{N-1,j} \quad (6.7)$$

$$\text{äußere Randbedingung:} \quad G_j = X_{1,j} - C_j. \quad (6.8)$$

Wie also leicht ersichtlich ist, muss im Falle des stationären Stoßes die fixe innere Randbedingung der Geschwindigkeit auf eine Randbedingung mit konstanten Gradienten gesetzt werden.

6.3 Kosmische Strahlung

Ist der hydrodynamische Stoß schließlich erzeugt und in der Mitte der Box stationär, wird die kosmische Strahlung zugeschaltet. Dazu ist es wiederum erforderlich, eine geeignete Anfangsverteilungsfunktion zu bestimmen. Wie in Abschnitt 3.3 gezeigt, existiert eine analytische Lösung, die einer Exponentialfunktion mit Index ~ 4 entspricht. Das bedeutet, dass eine Anfangsverteilung mit Exponentialansatz am besten für eine Reproduktion der

analytischen Lösung geeignet sein sollte. Weiters, da ein impliziter Code verwendet wird, welcher vom Anfangsmodell verlangt, dass es eine Lösung des Systems darstellt, darf das Integral über die Verteilungsfunktion einen gewissen Schwellwert μ nicht überschreiten. Als Referenz wurde gewählt, dass der kosmische Strahlungsdruck ein Hundertstel des Gasdrucks im Vorland ($P_C = \mu \leq P_G/100$) nicht überschreiten darf. Mit der Annahme des exponentiellen Wachstums der Verteilungsfunktion, ergibt sich folgender Ansatz

$$g = Ae^{-y}. \quad (6.9)$$

Für den kosmischen Strahlungsdruck bedeutet dies

$$P_C = \frac{4\pi c}{3} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} Ae^{-y} dy. \quad (6.10)$$

Unter Berücksichtigung des Schwellwerts μ erhält man die Bedingung

$$P_C = \frac{4\pi c}{3} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} Ae^{-y} dy = \mu \leq \frac{P_G}{100}. \quad (6.11)$$

Über einen *eindimensionalen Simplex* kann nun das Integral für eine bestimmte Konstante

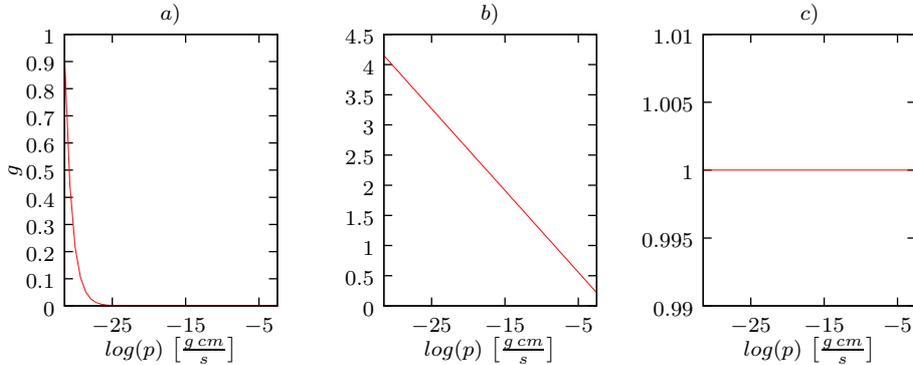


Abbildung 6.1: Verschiedene Anfangsverteilungen der kosmischen Strahlung, wobei a) der exponentiellen, b) der linearen und c) der konstanten Anfangsverteilung entspricht.

A gelöst werden, sodass die Bedingung 6.11 erfüllt ist. Für eine Dichte $\rho = 1.67 \cdot 10^{-27}$ und einer spezifischen Energiedichte $\epsilon_G = 7 \cdot 10^{13}$ im Vorland ergibt sich somit eine Anfangsverteilung wie in Abbildung 6.1a) dargestellt. Der Maximalwert der Verteilungsfunktion legt

gleichzeitig auch die Randbedingung im Impulsraum fest. Hierbei wird davon ausgegangen, dass Teilchen unterhalb 10^9 eV nicht durch den Fermiprozess beschleunigt werden. Teilchen mit kleineren Energien unterliegen mikrophysikalischen Prozessen (*z.B. Beschleunigung durch Variation im Magnetfeld*), welche nicht Teil dieser Arbeit sind. Durch die Festlegung eines fixen Grenzwertes am unteren Ende des Impulsraums wird somit ein Source-Term impliziert, der eine bestimmte Verteilungsfunktion (*Teilchenerzeugung mit $E = 10^9 \text{ eV}$*) vorgibt.

Um Vergleichswerte zu erhalten, wurden zusätzlich noch ein *konstantes* Anfangsmodell mit

$$g = C \tag{6.12}$$

und ein *lineares* Anfangsmodell nach

$$g = ky + d \tag{6.13}$$

verwendet (*siehe Abb. 6.1*).

7 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden Ergebnisse der *Testrechnungen*, welche sich mit der Reproduktion der analytischen Lösung beschäftigen und ebenso Rechnungen, welche eine Kopplung der Hydrodynamik (*Euler-Gleichungen*) und der kosmischen Strahlung (*Fokker-Plank-Gleichung*) berücksichtigen, behandelt. Bei den Simulationen im Testteilchenbild (*keine Kopplung von Hydrodynamik und CR*) wurden einerseits Kalkulationen mit hydrodynamischen *Dummy-Gleichungen* (*also durch Vorgabe einer konstanten hydrodynamischen Lösung der Kontinuitäts-, Impuls- und Energiegleichung*) und andererseits *physikalisch korrekte* hydrodynamische Gleichungen betrachtet. Diese Differenzierung hat zur Folge, dass im Falle einer Vernachlässigung der hydrodynamischen Gleichungen eine fixe Stoßstruktur erzeugt werden kann, welche sich exakt (*bis auf numerische Ungenauigkeiten*) mit der analytischen Lösung vergleichen lässt. Wird hingegen ein *numerischer* Stoß betrachtet, kann dieser nur im Rahmen von numerischen Ungenauigkeiten (*Stoßbreite begrenzt durch künstliche Viskosität, Wallheating, etc.*) für die analytische Lösung herangezogen werden. Beide Fälle wurden im folgenden Abschnitt untersucht.

7.1 Testteilchenbild

Grundsätzlich dienen Simulationen im Testteilchenbild nur zur Überprüfung des numerischen Setups. Kann die jeweilige analytische Lösung reproduziert werden, ist demnach die Physik des Systems numerisch richtig umgesetzt. Es sei jedoch erwähnt, dass diese Simulationen kein physikalisch korrektes Bild darstellen und demnach kein Interesse an einer detaillierten Untersuchung im Testteilchenbild besteht, sondern vielmehr das Verhalten der Numerik (*Trend zur analytischen Lösung bei Erhöhung der Punktdichte, etc*)

analytischer Stoß							
u_1	=	-	1.00×10^8 ,	u_2	=		0.00
ρ_1	=		1.67×10^{-27} ,	ρ_2	=		6.63×10^{-27}
e_1	=		7.00×10^{13} ,	e_2	=		5.00×10^{15}
x_{in}	=		3.08×10^{21} ,	x_{out}	=		3.08×10^{23}
y_{min}	=	-	31.5,	y_{max}	=	-	2.50
κ	=		3.00×10^{29}				

Tabelle 7.1: Modellwerte für analytischen Stoß. Werte VOR dem Stoß haben Index 1, Werte im Hinterland haben Index 2. Alle Einheiten in CGS.

im Mittelpunkt steht.

Wie bereits in Abschnitt 3.3 bzw. nach Drury (1983) gezeigt wurde, existiert *mindestens* eine exakte Lösung, falls sich die Teilchen der kosmischen Strahlung wie *Testteilchen*, d.h. also ohne dynamischen Effekt auf das Gas, verhalten. Wird Teilcheninjektion vernachlässigt, bzw. kein Source-Term verwendet, verhält sich die *Downstream*-Verteilung f_2 zur *Upstream*-Verteilung f_1 wie (vgl. 3.43)

$$f_2(p) = ap^{-a} \int_0^p p'^{a-1} f_1(p') dp'. \quad (7.1)$$

Wie bereits erwähnt, wurde für die Testrechnungen einerseits ein *analytischer* und andererseits ein *numerischer* Stoß betrachtet. Das Anfangsmodell des analytischen Stoßes ist in Tabelle 7.1 dargestellt, diese Struktur blieb auch während der Simulation konstant. Für den Fall eines numerischen Stoßes wurde ein Anfangsmodell wie in Abschnitt 6.1 erstellt. Die Startwerte finden sich in Tabelle 7.1.

Mit den unterschiedlichen Anfangsmodellen aus Kapitel 6 lassen sich somit die im Folgenden dargestellten analytischen Lösungen bestimmen.

numerischer Stoß			
Startwerte für Stoßerzeugung			
u	= -	1.00×10^8	
ρ	=	1.67×10^{-27}	
e	=	7.00×10^{13}	
x_{in}	=	3.08×10^{21} ,	$x_{out} = 3.08 \times 10^{23}$
Nach Stoßerzeugung			
y_{min}	= -	31.5,	$y_{max} = - 2.50$
κ	=	3.00×10^{29}	

Tabelle 7.2: Modellwerte für numerischen Stoß. Werte VOR dem Stoß haben Index 1, Werte im Hinterland haben Index 2. Alle Einheiten in CGS.

7.1.1 Exponentialfunktion

Die Verteilungsfunktion zu Simulationsstart sei $g_1(y) = A e^{-y}$. Mit den Transformationen $f = g/p^4$ und $y = \ln(p)$, lässt sich die Anfangsverteilung darstellen zu

$$g_1(p) = A \frac{1}{p}. \quad (7.2)$$

Einsetzen in 7.1 ergibt

$$f_2(p) = ap^{-a} \int_0^p (p')^{a-1} \frac{g_1(p')}{(p')^4} dp' = ap^{-a} A \int_0^p (p')^{a-6} dp'. \quad (7.3)$$

Berücksichtigt man den Impulsbereich p_{min} bis p_{max} , ergibt sich die analytische Lösung zu

$$f_2(p) = A \frac{a}{a-5} p^{-a} (p_{max}^{a-5} - p_{min}^{a-5}). \quad (7.4)$$

Testrechnungen mit unterschiedlich hoher Anzahl von Punkten im Impulsraum ergaben eine sehr gute Übereinstimmung zur analytischen Lösung, wie in Abbildung 7.1 b) und c) ersichtlich. Aus Abb. 7.1 c) wird auch eine sehr gute Übereinstimmung im Bereich der geringen Impulse, bei einer Punktdichte von 41 Punkten im Impulsraum (*grüne Linie*), deutlich.

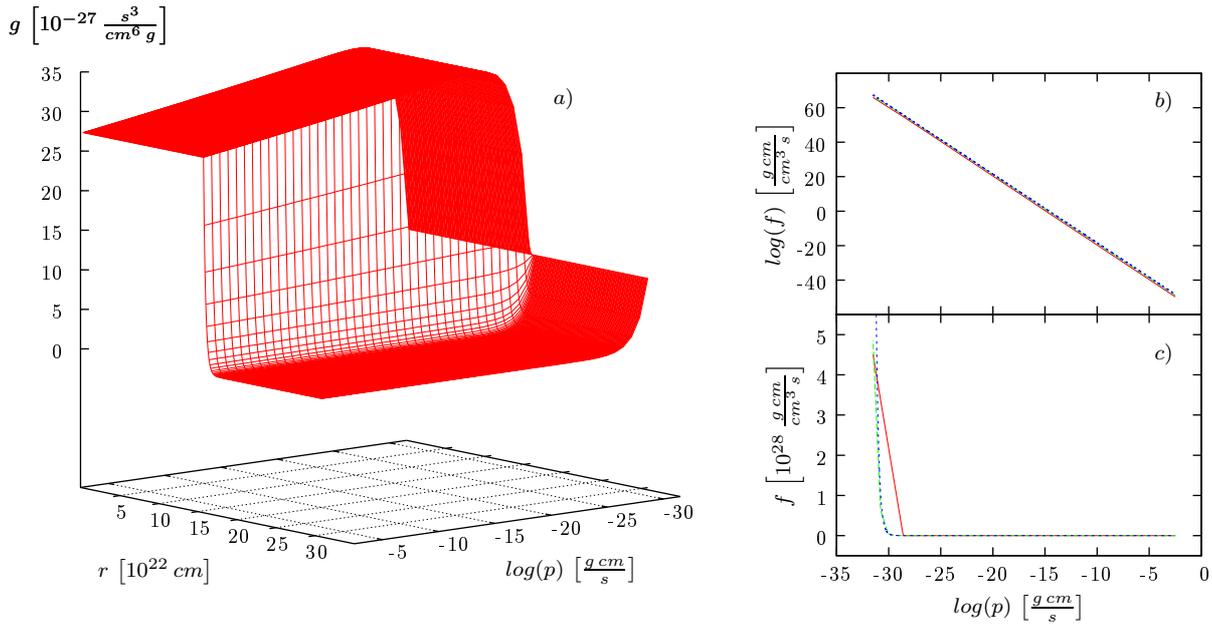


Abbildung 7.1: In Abbildung a) ist die Verteilungsfunktion als Funktion von Raum und Impuls dargestellt. Abbildung b) zeigt den Vergleich mit der analytischen Lösung (blau punktiert). Abbildung c) zeigt die Entwicklung der Genauigkeit mit steigender Punktdichte im Impulsraum (grün: 41 Punkte, rot: 11 Punkte, blau: analytische Lösung).

7.1.2 Lineare Anfangsverteilung

Wird eine lineare Anfangsverteilung angenommen sodass $g = ky + d$, ergibt sich die Upstream-Verteilung $g_1(p)$ zu

$$g_1(p) = k \ln(p) + d. \quad (7.5)$$

Einsetzen in 7.1 und ausmultiplizieren führt auf

$$f_2(p) = ap^{-a} \int_{p_{min}}^{p_{max}} (p')^{a-5} (k \ln(p') + d) dp' \quad (7.6)$$

und Integration liefert schließlich

$$f_2(p) = \frac{a}{a-4} p^{-a} \left\{ k \left[p_{max}^{a-4} \left(\ln(p_{max}) - \frac{1}{a-4} \right) - p_{min}^{a-4} \left(\ln(p_{min}) - \frac{1}{a-4} \right) \right] + d (p_{max}^{a-4} - p_{min}^{a-4}) \right\}. \quad (7.7)$$

Im Vergleich zu Abbildung 7.1 ist in Abbildung 7.2 eine größere Abweichung zur ana-

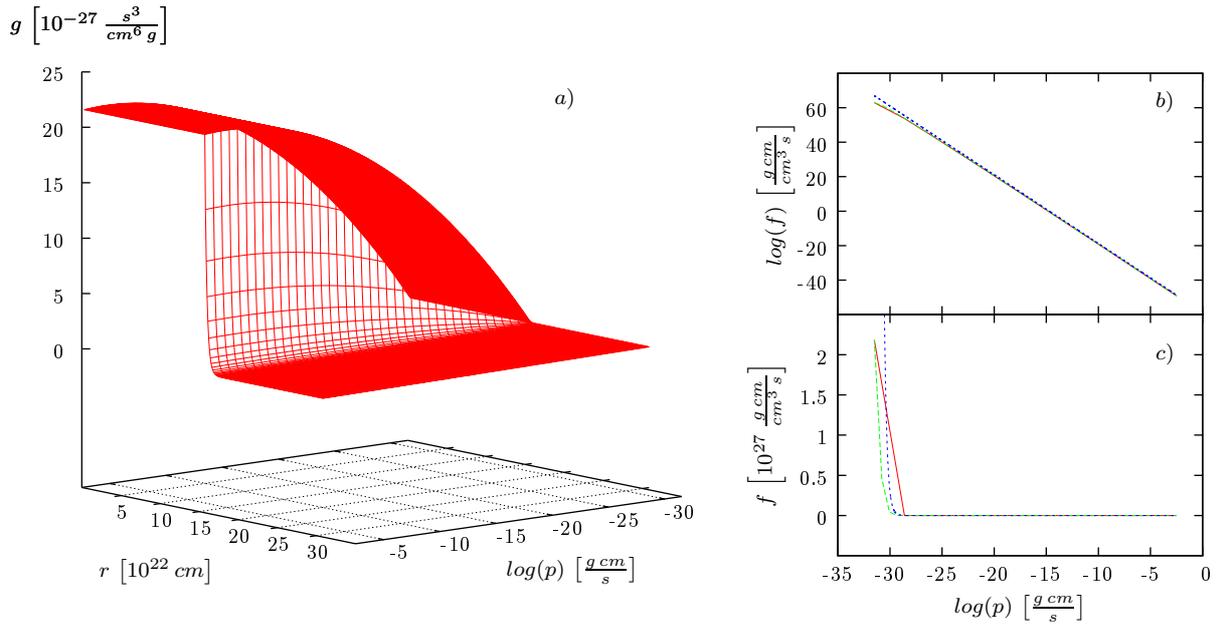


Abbildung 7.2: Auch bei linearer Anfangsverteilung zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung (Abb. b)). Die Genauigkeitsverbesserung fällt jedoch um einiges geringer aus als bei exponentieller Anfangsverteilung (Abb. c)).

lytischen Lösung sichtbar. Jedoch ist auch hier ein Trend zur analytischen Lösung bei Erhöhung der Punktzahl im Impulsraum erkennbar. Deutlich ist auch, dass bei einer Erhöhung der Punktzahl im Impulsraum von 11 (rote Linie) auf 41 (grüne Linie) die Übereinstimmung mit der analytischen Lösung (blaue Linie), erheblich schlechter ausfällt, als bei Simulation mit exponentieller Anfangsverteilung.

7.1.3 Konstante Anfangsverteilung

Betrachtet man schließlich noch eine konstante Anfangsverteilung mit $g = C$, dann ergibt sich für die Downstream-Verteilung

$$g_1(p) = g_1(y) = C. \quad (7.8)$$

Einsetzen in 7.1 ergibt

$$f_2(p) = ap^{-a} C \int_{p_{min}}^{p_{max}} (p')^{a-5} dp' \quad (7.9)$$

und nach Integration erhält man für die analytische Lösung der Upstream-Verteilungsfunktion

$$f_2(p) = C \frac{a}{a-4} p^{-a} (p_{max}^{a-4} - p_{min}^{a-4}). \quad (7.10)$$

Abbildung 7.3 zeigt, dass bei einer konstanten Ausgangskonfiguration eine Reproduk-

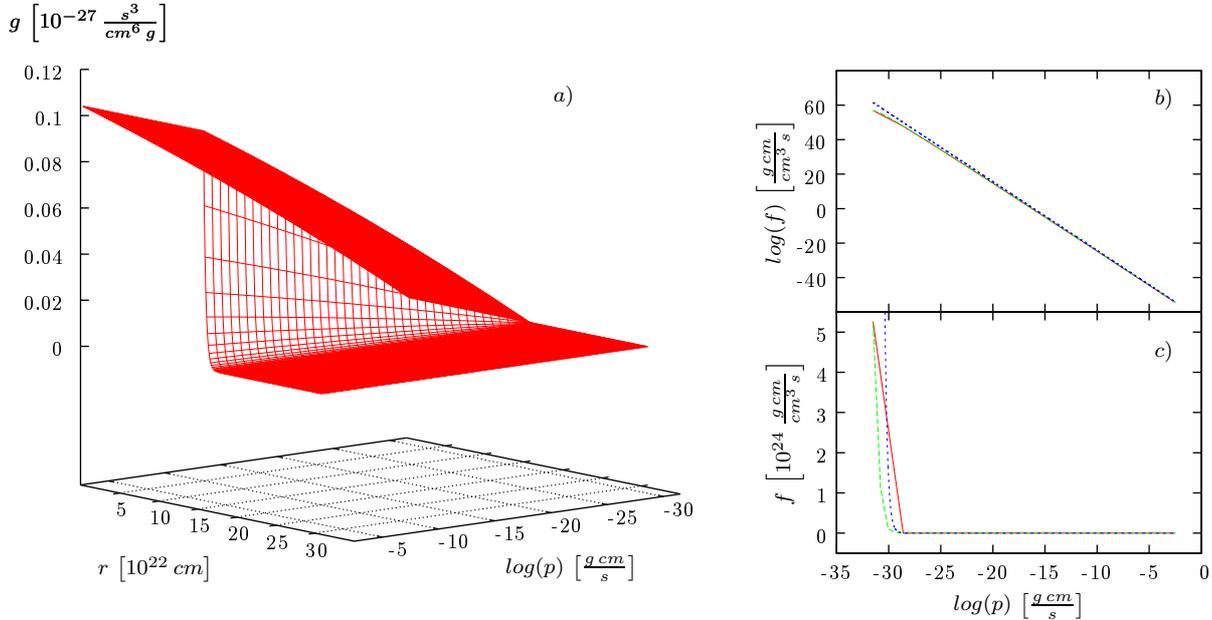


Abbildung 7.3: Auch mit einer konstanten Anfangsverteilung lässt sich die analytische Lösung reproduzieren, jedoch ist die Genauigkeit bei dieser Wahl der Punktdichten (grün 41 Punkte, rot 11 Punkte) im Impulsraum sehr gering.

tion der analytischen Lösung nur bedingt möglich ist. Auch hier zeigt sich zwar ein Trend in Richtung analytischer Lösung bei steigender Punktzahl, jedoch muss die Punktzahl in diesem Fall sehr groß sein, um ausreichend gute Ergebnisse zu erzielen.

7.1.4 Testrechnung mit hydrodynamischen Gleichungen

Im Fall eines *numerischen Stoßes* ist die Reproduzierbarkeit der analytischen Lösung etwas schwieriger herzustellen, da die Geschwindigkeiten vor bzw. nach dem Stoß sowie die Stoßgeschwindigkeit selbst nicht exakt bestimmt werden können. Das bedeutet, dass die Berechnung der analytischen Lösung nur in einem gewissen Bereich gültig ist. Trotzdem zeigt sich auch hier eine sehr gute Übereinstimmung von Simulation und Analytik (*siehe Abb. 7.5*). Bei diesen Testrechnungen wurde einmal mit 21 Punkten (*rote Linie*) und 41

Punkten (*grüne Linie*) im Impulsraum gerechnet. Unter 21 Punkten ist die Genauigkeit zu gering, um gute Ergebnisse bei der Testrechnung zu erzielen.

Ausgangspunkt für die Testrechnungen mit numerischem Stoß bildeten wieder eine exponentielle Anfangsverteilung nach Abschnitt 7.1.1 der CR's sowie ein rein hydrodynamischer Stoß, welcher mit den Anfangswerten aus 7.1 und den Randbedingungen wie in Abschnitt 6.1, erzeugt wurde (*Abb. 7.4*).

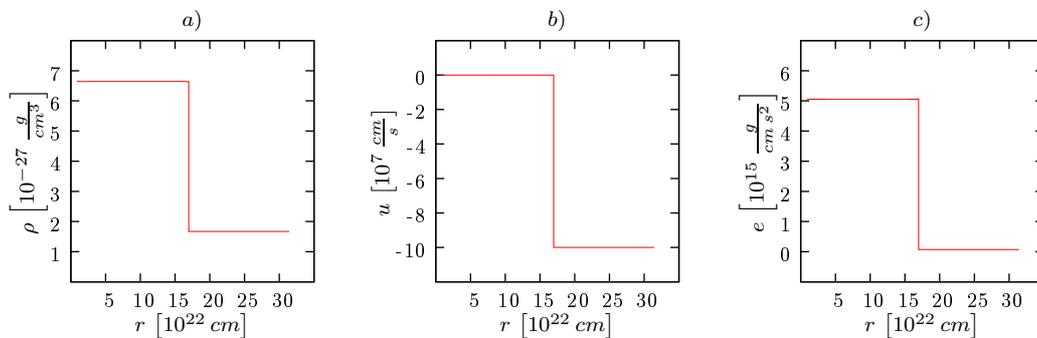


Abbildung 7.4: Dichteverteilung ρ , Geschwindigkeitsverteilung u und Energiedichte e des hydrodynamischen Stoßes. Stoßmachzahl $M = 15.17$.

7.2 Kopplung von CR- mit hydrodynamischen Gleichungen

Nachdem die Simulationen im Testteilchenbild die analytischen Lösungen der verschiedenen Anfangsbedingungen sehr gut reproduzieren konnten, wurde schließlich noch die Kopplung von *hydrodynamischen* mit den *CR*-Gleichungen betrachtet. Diese Simulationen bilden den Hauptteil dieser Arbeit.

Durch die Kopplung ist es möglich die zeitliche Evolution der kosmischen Strahlung in einem galaktischen Wind zu bestimmen. Die größte Herausforderung bestand in der

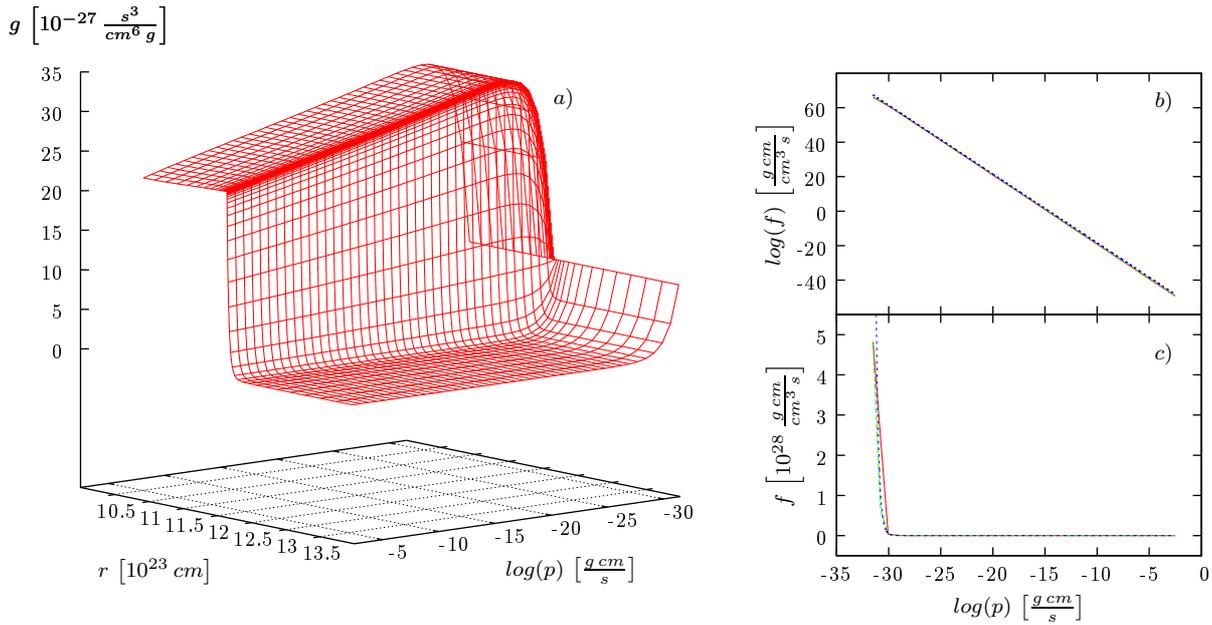


Abbildung 7.5: Bild a) zeigt eine sehr ähnliche Struktur wie in Abb. 7.1. Die analytische Lösung lässt sich sehr gut reproduzieren (Abb. b), die analytische Lösung ist blau gepunktet). Abb c) zeigt die Genauigkeitsverbesserung durch Erhöhung der Punktzahl im Impulsraum (grün: 41 Punkte, rot: 21 Punkte, blau: analytische Lösung).

Erstellung des Anfangsmodells des numerischen Stoßes. Durch die hohen Energien der CR-Teilchen und deren *charakteristischen Länge* κ/u musste der Simulationsraum soweit angepasst werden, dass auch die Teilchen mit den höchsten Energien keinen Einfluss auf den Rand der *Computational Domain* haben, also der Gradient der Verteilungsfunktion ($\vec{\nabla} f = 0$) ist. Um im Bereich einer typischen Größenordnung eines galaktischen Haalos zu bleiben (um auch die Möglichkeit eines Vergleichs mit Beobachtungsdaten nicht auszuschließen), wurde ein Simulationsraum von 1 bis 100 kPc gewählt. Da der Diffusionskoeffizient κ allerdings impulsabhängig ist (vgl. Abschnitt 5.5.4), musste besonders bei Teilchen mit geringer Energie darauf geachtet werden, dass die Stoßbreite kleiner als die charakteristische Länge ist. Wäre die Stoßbreite größer, würde anstatt einer Stoßbeschleunigung nur eine adiabate Beschleunigung vorliegen. Somit ergeben sich zwei Bedingungen für das Anfangsmodell des numerischen Stoßes:

- Die charakteristische Länge der Teilchen mit den *höchsten* Energien darf die Breite

des Simulationsraumes ΔC nicht überschreiten

$$\frac{\chi_{max}}{u_{Sto}} < \Delta C. \quad (7.11)$$

- Die charakteristische Länge der Teilchen mit den *geringsten* Energien muss größer als die Stoßbreite δS sein

$$\frac{\chi_{min}}{u_{Sto}} > \delta S. \quad (7.12)$$

Für einen Simulationsraum ΔC von 1 bis 100 kPc ($\Delta C = 3.05 \times 10^{29}$ cm) und mit 5.43 ergibt sich somit

$$\frac{\chi_{max}}{u_{Sto}} = \frac{1}{u_{Sto}} \frac{\rho_1}{\rho} \left(\frac{p}{p_1} \right)^a < \Delta C. \quad (7.13)$$

Unter Annahme von $a = 1$ und der Bedingung, dass die charakteristische Länge eine Größenordnung unter jener des Simulationsraumes bleibt ($\chi_{max}/u_{Sto} = \Delta C/10$), ergibt sich ein Maximalwert für χ_0 von

$$\chi_0 = \frac{1}{10} \frac{p_1}{p} \frac{\chi_{max}}{u_{Sto}}. \quad (7.14)$$

Mit diesem Wert für χ_0 kann nun die Stoßbreite bestimmt werden, welche vom Anfangsmodell verlangt wird, um adäquate Beschleunigung der Teilchen im gesamten Impulsraum zu garantieren. Es zeigte sich bald, dass es numerisch nur sehr schwer möglich ist den gesamten Impulsbereich von 0 bis 10^{21} eV zu überdecken. Da allerdings nur Teilchenenergien ab dem *Knie* von Interesse sind bzw. Teilchen mit Energien oberhalb von 10^{19} eV eine zu geringe Anzahldichte aufweisen (*siehe Kap. 1*), wurde der Impulsbereich auf $10^{13} - 10^{19}$ eV eingeschränkt. Diese Einschränkung war notwendig, da es sonst numerisch nicht möglich gewesen wäre die Stoßbreite an die geforderte Breite anzupassen. Mit einer Stoßgeschwindigkeit von $u_{Sto} = 3.36 \times 10^7$ cm/s und den gerade definierten Impulsen ergibt sich mit 7.14 als Wert für $\chi_0 = 3.92 \times 10^{24}$ cm²/s. Daraus errechnet sich mit 7.12 eine Stoßbreite von maximal $\delta S \leq 6.92 \times 10^{16}$ cm. Mit Hilfe dieser Werte wurde ein Anfangsmodell eines numerischen Stoßes wie in Abbildung 7.6 erstellt. In Abb. 7.6 b) ist die Verminderung der Stoßbreite im Vergleich zum Anfangsmodell (*grüne Linie*), wie in Abschnitt 7.1.4 und Abbildung 7.4 dargestellt, ersichtlich. Dies wurde über eine konsequente Verminderung der *quadratischen Viskosität* (*vgl. Abschnitt 5.4*) erreicht. Die Startwerte

entsprechen exakt den Werten aus Tabelle 7.1 mit einer Punktdichte im Ortsraum von $N = 300$. Nach dem erfolgreichen Erstellen des Anfangsmodells wurde schließlich die

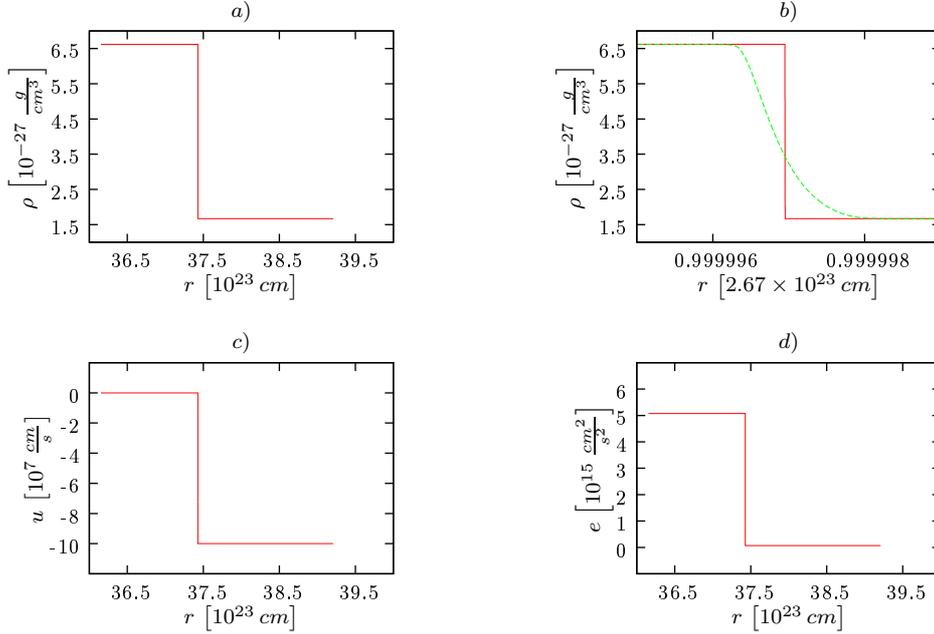


Abbildung 7.6: *Anfangsmodell des numerischen Stoßes für den Fall der Kopplung von Hydrodynamik und CR Erhaltungsgleichung. Abb. a), c) und d) zeigen die Stoßstruktur in Abh. von ρ , u und e . Abb. b) zeigt die Verschärfung des Stoßes durch Verringerung der quadratischen, künstlichen Viskosität im Vergleich zum Ausgangsmodell (grüne Linie, vgl. 7.4). Stoßmachzahl $M = 15.17$.*

CR-Erhaltungsgleichung zugeschaltet. Als Ausgangsverteilungsfunktion der CRs wurde eine *Exponential-Verteilungsfunktion* (siehe Abschnitt 7.1.1) gewählt. Das Verhältnis von CR-Druck P_C zu Gasdruck P_G wurde jedoch erhöht auf $P_C/P_G = 1/10$, um die Effekte auf den numerischen Stoß besser zu verdeutlichen. Abbildungen 7.7 a), c) und e) zeigen deutlich, dass sich die Stoßstruktur des numerischen Stoßes nach Einstellen des quasistationären Zustandes in den CR-Größen γ_C , P_C und E_C wiederfindet. Der Wert von γ_C nimmt im Laufe der Zeit kontinuierlich ab und bleibt ab einem Wert von $4/3$ konstant (*relativistisches Gas*). Die Werte von CR-Druck und Energie verhalten sich dagegen genau korrelativ (vgl. Abb. 7.7 b), d) und e)).

In Abbildung 7.8 ist schließlich die veränderte Stoßstruktur durch Kopplung mit kosmischer Strahlung dargestellt. Während die Dichte ρ im Hinterland ansteigt (*Bild a*)), nimmt der Gasdruck P_G und die Gasenergie E_C ab. Dies ist darauf zurückzuführen, dass

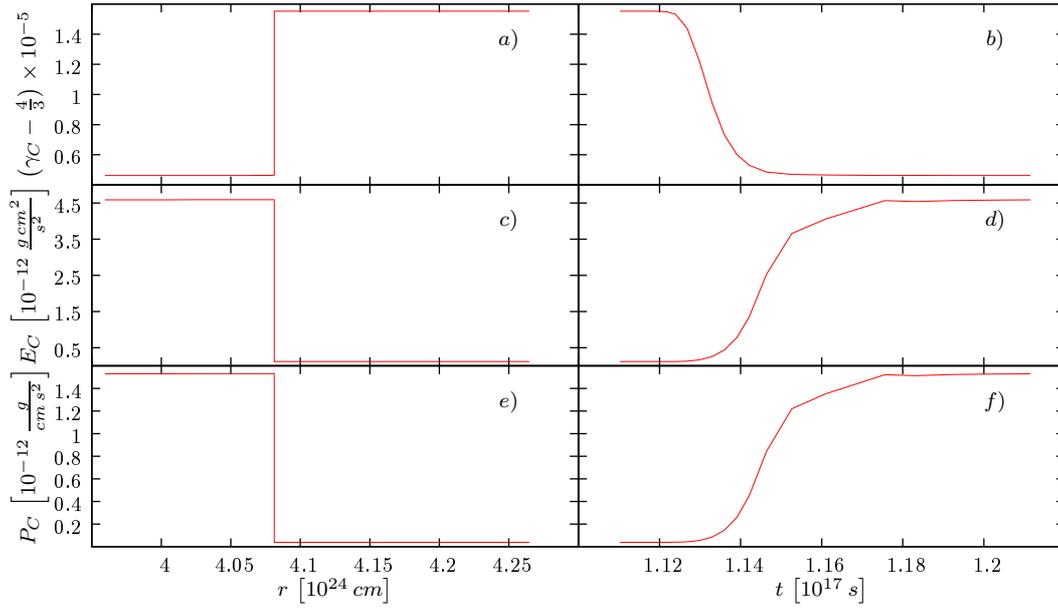


Abbildung 7.7: Dargestellt ist die räumliche Verteilung von γ_C , P_C und E_C nach Erreichen des quasistationären Zustandes (Bild a), c) und e)). Bild b), d) und f) zeigt die zeitliche Entwicklung von γ_C , P_C und E_C eines Wertes nach dem Stoß.

die Gasenergie in die Beschleunigung der CRs übergeht. Weiters ist eine Veränderung der Stoßstruktur im Bereich des Vorlandes (*besonders gut zu erkennen in Abb. 7.8 c)*) zu erkennen. Diese Veränderung wird als *Cosmic Ray Precursor* (vgl. Dorfi, 1985) bezeichnet, welcher dadurch entsteht, dass das ankommende Plasma abgebremst wird. Der Effekt ist in diesen Simulationen nicht so deutlich zu sehen, da durch die Impulsabhängigkeit von κ hauptsächlich Teilchen mit geringer Energie betroffen sind und die charakteristische Länge κ/u dieser Teilchen im Vergleich zum Simulationsraum sehr gering ist. Für diese Teilchen erscheint der Stoß komplett verschmiert, d.h. sie werden nur noch adiabatisch beschleunigt.

Zu guter Letzt ist die Verteilungsfunktion nach Erreichen des quasistationären Zustandes in Abbildung 7.9 dargestellt. Die Struktur ähnelt sehr stark jener der Testrechnungen (*siehe Abb. 7.5*).

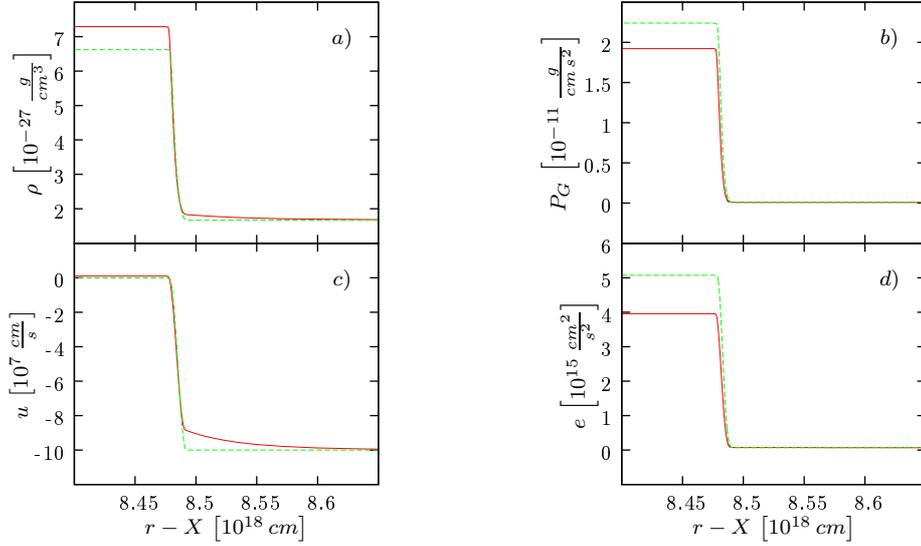


Abbildung 7.8: Dargestellt ist der Einfluss der kosmischen Strahlung auf den numerischen Stoß. Während die Dichte ρ im Hinterland steigt, nehmen Gasenergie e_G und Gasdruck P_G ab. Die Gasgeschwindigkeit u bleibt weitgehend unverändert, allerdings ist hier der Precursor am deutlichsten zu erkennen. Die grüne Linie kongruiert mit dem Anfangsmodell des analytischen Stoßes, die rote Linie mit der veränderten Stoßstruktur durch Kopplung mit CRs. $X = 4.32304 \times 10^6$.

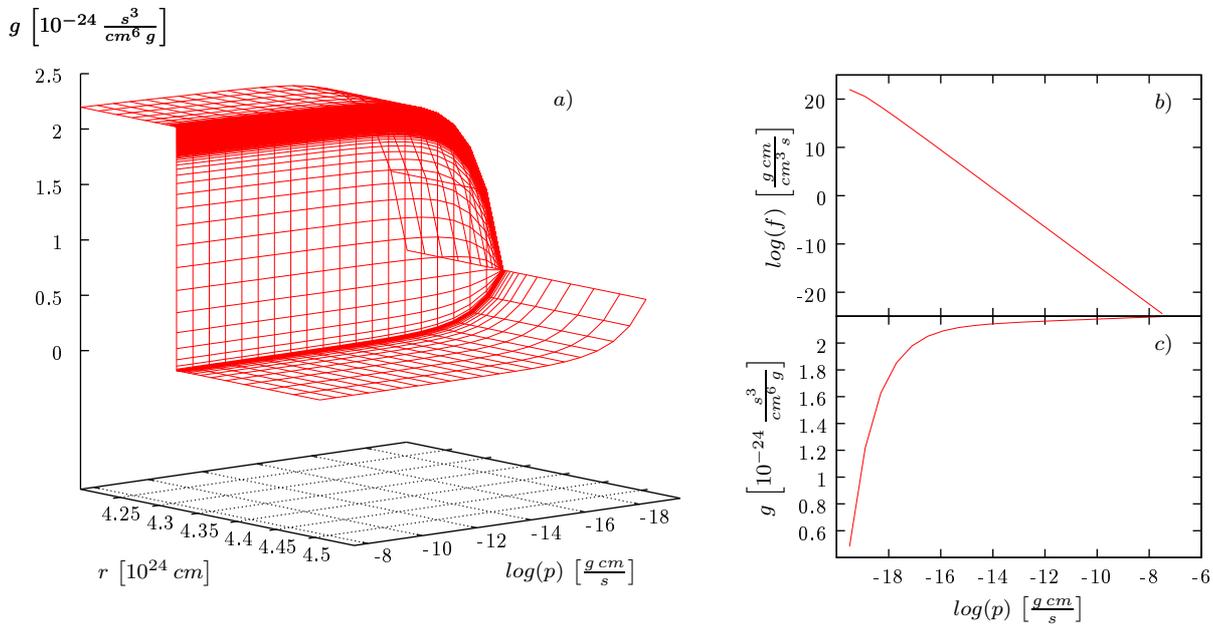


Abbildung 7.9: Dargestellt ist die Verteilungsfunktion f der kosmischen Strahlung nach Kopplung mit dem numerischen Stoß. Die Ergebnisse ähneln sehr stark denen der Testrechnungen (vgl. Abb. 7.5).

8 Diskussion und Ausblick

Die im vorangegangenen Kapitel präsentierten Ergebnisse werden in diesem Kapitel diskutiert. Weiters wird ein kurzer Ausblick auf die möglichen Resultate, die mithilfe dieser Arbeit möglich sind, dargestellt.

8.1 Testergebnisse

Wie bereits in Abschnitt 7.1 erwähnt, zeigen alle Testrechnungen eine Konvergenz zur jeweiligen analytischen Lösung bei steigender Punktzahl, was den Schluss erlaubt, dass das numerische Schema korrekt ist. Die größere Genauigkeit bei Verwendung einer exponentiellen Anfangsverteilung von kosmischer Strahlung (*vgl. Abschnitt 7.1.1*) ist darauf zurückzuführen, dass der *Cutoff* bei den geringen Impulsen hier bereits sehr nahe an der analytischen Lösung liegt. In ähnliche Simulationen, wie beispielsweise von Falle & Giddings (1987), wurde der *Cutoff* auf den Wert 0 gesetzt, was eine erhöhte Punktzahl verlangt um die analytische Lösung zu reproduzieren. Es sei auch erwähnt, dass in diesem Bereich die analytische Lösung selbst nicht aussagekräftig ist, da keine Kenntnis über eine *CR-Quelle* besteht und diese auch bei den Simulationen nicht berücksichtigt wurde.

8.2 CR-modifizierte Stoßfront

Auch in diesem Fall wurde bereits ein Großteil der Ergebnisse in Abschnitt 7.2 diskutiert. Wesentlich ist, dass die Ergebnisse sich physikalisch, mit Ergebnissen früherer, vereinfachter Simulationen (siehe Dorfi, 1984, 1985) decken. Lediglich die Modifikation der Stoßfront fällt deutlich schwächer aus als bei früheren Simulationen, was auf die Berücksichtigung

eines impulsabhängigen Diffusionskoeffizienten zurückzuführen ist. Besonders im Bereich geringer Teilchenenergien ist der Unterschied drastisch, da hier das κ früherer Rechnungen deutlich größer angenommen wurde. Durch die viel größere Teilchenzahl bei geringen Energien (*vgl. Abb. 7.9*) und durch die Wahl eines zu großen κ fällt die Verschmierung des Stoßes überdurchschnittlich groß (*im Vergleich zur Simulation in dieser Arbeit*) aus.

8.3 Ausblick

Durch die Lösung der *Fokker-Planck-Gleichung* für die Verteilungsfunktion der kosmischen Strahlung ist eine Reihe von Möglichkeiten gegeben, um das Gebiet der Hochenergie-Astrophysik voranzutreiben. Da *kosmische Strahlung* einen wesentlichen Heizprozess im ISM darstellt, sollte die Wechselwirkung von hochenergetischen, geladenen Teilchen mit dem ISM in allen zukünftigen Windsimulationen berücksichtigt werden.

In den meisten bisherigen Modellen wurde der CR-Druck P_C sowie die CR-Energie E_C nicht explizit bestimmt, sondern durch eine Reihe von Annahmen definiert (Details siehe Dorfi, 1984, 1985). Durch die Lösung der Verteilungsfunktion für kosmische Strahlung wird es möglich den CR-Druck sowie die CR-Energie direkt aus der Fokker-Planck-Gleichung zu berechnen, womit auch der Adiabatenkoeffizient (*für ein ideales Gas*) der CRs γ_C sofort aus der Beziehung $P_C = (\gamma_C - 1) E_C$ bestimmt werden kann und nicht mehr durch einen fixen Wert (*da es sich um relativistische Teilchen handelt, wird normalerweise $\gamma_C = 4/3$ gesetzt*) approximiert. Aus Abschnitt 7.2 geht hervor, dass sich frühere Modelle, trotz inkonsistenter Berechnung der CR-Größen, sehr gut mit den Ergebnissen aus Abschnitt 7.2 decken. Somit kann das in dieser Arbeit beschriebene Modell auch als Test für die Genauigkeit eines „simplifizierten“ Modells herangezogen werden.

Da in dieser Arbeit galaktische Winde mit der für diese Art von Winden sehr praktischen und auch üblichen *Flussröhrengometrie* (*siehe Abschnitt 1.2.1*) modelliert wurden, eignet sich die aktuelle Form der diskretisierten Gleichungen nur teilweise, um andere Systeme, wie beispielsweise *Supernova-Überreste SNR*, numerisch zu beschreiben. Eine Erweiterung der hydrodynamischen und der CR-Gleichungen in *sphärische Geometrie* würde eine Anwendung für *stellare Winde* und *Supanova-Überreste* möglich machen, wenn die

Expansion als sphärisch-symmetrisch angenommen wird.

Weiters gilt die in der Arbeit verwendete Form der Fokker-Planck-Gleichung generell für *geladene Teilchen*, was bedeutet, dass sowohl *Protonen* p^+ als auch *Elektronen* e^- untersucht werden können. Um Elektronenverteilungen zu simulieren, muss lediglich ein *Energie-Verlustterm*, welcher durch die *Synchrotronstrahlung* zustande kommt, in der Erhaltungsgleichung berücksichtigt werden. Elektronen (*und damit vor allem die Synchrotronstrahlung*) spielen bei der Beobachtung von SNRs und stellaren Winden eine wesentliche Rolle. Beispielsweise liegen Beobachtungsdaten vor, welche auf Anzeichen von Teilchenenergien von $E_{e^-} \sim 40$ TeV in dem Supernova-Überrest *Cassiopeia A* hinweisen (*siehe Allen et al., 1997*).

Um die Ausbreitung großskaliger, *galaktischer Winde* besser zu modellieren, würde eine Erweiterung des Gleichungssystems um die Gleichungen der *Magneto-Hydrodynamik (MHD)* detailliertere Informationen über das Ausbreitungsverhalten geben. Die MHD erlaubt es, die Magnetfeldstruktur zu beschreiben und somit die Wechselwirkungen der geladenen CR-Teilchen mit dem Magnetfeld konkret zu bestimmen. Wie bereits in Abschnitt 5.5.4 erwähnt, wurde in bisherigen Arbeiten (*z.B. Dorfi, 1984, 1985*) der Diffusionskoeffizient κ stets als eine rein impulsabhängige Variable definiert. Diese durchaus gerechtfertigte Approximation stellt allerdings nur eine grobe Abschätzung dar, da der Diffusionskoeffizient κ im Realfall eine Funktion der Magnetwellenstruktur ist. Durch Einbeziehung von MHD wäre demnach eine *physikalisch korrekte* Beschreibung des Diffusionskoeffizienten möglich. Die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse zeigen wie stark der Diffusionskoeffizient die Stoßstruktur (*Precursor*) beeinflusst und wie groß dabei die Abhängigkeit von Teilchenzahl und zugehörigem Impulsbereich ist (*siehe Abschnitt 7.2*). Eine physikalisch aufwendigere Modellierung des Diffusionskoeffizienten würde noch detailliertere Aussagen über die Ausbreitung der Stoßfront und deren Änderung geben können.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass, aufbauend auf diese Arbeit, noch eine Reihe von Optionen im Bezug auf Modellrechnungen mit kosmischer Strahlung offen stehen, die für die zukünftige Untersuchung von astrophysikalischen Problemen von großem Interesse sind.

Literaturverzeichnis

- G. E. Allen, J. W. Keohane, E. V. Gotthelf, R. Petre, K. Jahoda, R. E. Rothschild, R. E. Lingenfelter, W. A. Heindl, D. Marsden, D. E. Gruber, M. R. Pelling, & P. R. Blanco. Evidence of X-Ray Synchrotron Emission from Electrons Accelerated to 40 TeV in the Supernova Remnant Cassiopeia A. *The Astrophysical Journal Letters*, 487:L97, 1997.
- M. G. Baring, D. C. Ellison, S. P. Reynolds, I. Grenier, & P. Goret. Radio to gamma ray emission from shell-type supernova remnants: predictions from nonlinear shock acceleration models. *The Astrophysical Journal*, 513:311–338, 1999.
- R. D. Blandford. Fermi acceleration by shock waves. In *AIP Conference Proceedings*, volume 56, pages 333–350, 1979.
- D. Breitschwerdt, J. F. McKenzie, & H. J. Vökl. Galactic winds. I. Cosmic ray and wave-driven winds from the Galaxy. *Astronomy and Astrophysics*, 245:79–98, 1991.
- J. A. Burke. Mass flow from stellar systems-I. Radial flow from spherical systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 140:241, 1968.
- M.A. deAvillez & D. Breitschwerdt. Global Dynamical Evolution of the ISM in Star Forming Galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 436:585–600, 2005.
- E. A. Dorfi. Numerical studies of time-dependend cosmic-ray shocks. In *Advances in Space Research*, volume 4, pages 205–213, 1984.
- E. A. Dorfi. Time-dependend cosmic ray/gas interactions. In *VNU Science Press*, volume 1, pages 137–142, 1985.

- E. A. Dorfi & D. Breitschwerdt. Time-dependent galactic winds. *Astronomy and Astrophysics*, 540:A77, 2012.
- E. A. Dorfi & L O'C Drury. A Cosmic Ray driven Instability. In *Goddard Space Flight Center 19th Intern. Cosmic Ray Conf. Proc.*, volume 3, pages 121–123, 08 1985.
- E. A. Dorfi & L O'C Drury. Simple adaptive grids for 1-D initial value problems. *Journal of Computational Physics*, 69:175–195, 1987.
- E.A. Dorfi, H. Pikall, A. Stökl, & A. Gautschy. Towards a more consistent discretization scheme for adaptive implicit RHD computations. *Computer Physics Communications*, 174:771–782, September 2nd 2006.
- L O'C Drury. An introduction to the theory of diffusive shock acceleration of energetic particles in tenuous plasmas. *Rep. Prog. Phys.*, pages 973–1027, 1983.
- S.A.E.G. Falle & J. R. Giddings. Time-dependend cosmic ray modified shocks. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 225:399–423, 1987.
- Claus Grupen. *Astroparticle Physics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- Heino Henke. *Elektromagnetische Felder*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd edition, 2007.
- F. M. Ipavich. Galactic winds driven by cosmic rays. *Astrophysical Journal*, 196:107–120, 1975.
- H. E. Johnson & W. I. Axford. Galactic Winds. *Astrophysical Journal*, 165:381, 1971.
- M. Kachelriess. *Lecture notes on high energy cosmic rays*, 2008.
- F. D. Kahn. Dynamics of the Galactic Fountain. In *Astrophysics and Space Science Library*, volume 91, pages 1–28, 1981.
- F. D. Kahn. Introduction to fountains, wind, infall - and magnetic fields and dynamo mechanisms. *The interstellar disk-halo connection in galaxies*, 144:1–11, 1991.

- F. D. Kahn. The galactic fountain. In *Lecture Notes in Physics*, volume 506, pages 483–494, 1998.
- Stefan Lecheler. *Numerische Strömungsberechnung*. Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009, 2009.
- Randall J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- M. S. Longair. High energy astrophysics. *Cambridge University Press*, page 420, 1981.
- c. R. Lynds & A. R. Sandage. Evidence for an Explosion in the Center of the Galaxy M82. *Journal of Computational Physics*, 69:175–195, 1987.
- W. G. Mathews & J. C. Baker. Galactic Winds. *Astrophysical Journal*, 170:271, 1971.
- G. A. Medina Tanco. Fermi acceleration at shock waves and the galactic cosmic ray spectrum: numerical simulations. *Plasma Science, IEEE Transactions*, 20:909–916, 2002.
- Daniel Steiner. Time-dependend Galactic Winds. Master’s thesis, University of Vienna, 2012.
- W. M. Tscharnuter & K. H. Winkler. A method for computing selfgravitating gas flows with radiation. *Computer Physics and Communications*, 18:171–199, 1979.
- S. Veilleux, D. S. N. Rupke, & R. Swaters. Warm Molecular Hydrogen in the Galactic Wind of M82. *Astrophysical Journal*, 700:149–153, 2009.
- S. Velleux, G. Cecil, & J. Bland-Hawthorn. Galactic Winds. *Astrophysical Journal*, 137:1005, 1963.
- J. VonNeumann & R. D. Richtmyer. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks. *J. Appl. Phys.*, 21:232, 1950.



Florian Ragossnig

Ausbildung

Akademische Ausbildung

- 2010–2013 **Master Studium**, *Universität Wien*, Studienrichtung: Astronomie.
- 2007–2010 **Bakkalaureat**, *Universität Wien*, Studienrichtung: Astronomie, Abschluss: Bakk.rer.nat..
- 2003–2007 **Diplomstudium**, *Wien*, Studienrichtung: Maschinenbau.
- 2002–2003 **Diplomstudium**, *München*, Studienrichtung: Luft- und Raumfahrttechnik.

Schule

- 1996–2001 **HTBLA Eisenstadt**, *Eisenstadt*, Ausbildungsschwerpunkt: Flugtechnik, Abschluss: Matura.
- 1995–1996 **THS**, *Gabelsbergerstraße*, Innsbruck.
- 1992–1995 **SHS**, *Hötting West*, Innsbruck.
- 1988–1992 **Volksschule**, Innsbruck.

Sprachkenntnisse

- Englisch **sehr gute Kenntnisse**
- Spanisch **Grundkenntnisse**

Berufspraxis in Wort und Schrift

Zertifikat, Level A1