universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Vorschläge zur Wahrscheinlichkeit in der Unterstufe – Genügt der Wahrscheinlichkeitsbegriff von Laplace oder benötigt man noch andere?

Verfasserin

Ulrike Fischer

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, Juni 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 333
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Deutsch
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit Fragen zur Behandlung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Schulunterricht.
Den zentralen Bereich dieser Arbeit stellt die didaktische Diskussion der Wahrscheinlichkeitsbegriffe für den Unterricht in der Unterstufe dar. Dabei steht die Entwicklung adäquater Grundvorstellungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mittelpunkt.
Die Ausführungen werden durch zahlreiche Beispiele anschaulich gestaltet sowie didaktisch kommentiert.
Durch die Auseinandersetzung mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht der Unterstufe werden Folgerungen für den zukünftigen Mathematikunterricht abgeleitet.

Abstract

This paper concentrates on questions concerning possibilities of probability in lower grade.
The main focus of the paper is the didactic discussion of the probability concepts for the classes in the lower grade.
The decisive factor is the development of adequate basic ideas of the probability calculus.
The written pleadings are arranged with descriptions and are commented on with a didactic focus.
By the analysis of the probability calculus for classes in the lower grade consequences for the future math class are inferred.

Vorwort

„Einer der großen Vorteile der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der, daß man lernt dem ersten Anschein zu mißtrauen.“[1]

Dieses Zitat von Pierre Simon Laplace zeigt eine Herausforderung bei der Auseinandersetzung mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf. Oft ist es schwierig, die intuitiven Vorstellungen mit dem formalen Konzept der Wahrscheinlichkeitstheorie zu verbinden.

Die Behandlung wahrscheinlichkeitstheoretischer Aspekte im Schulunterricht beinhaltet zahlreiche Schwierigkeiten und Chancen, die es zu überwinden bzw. zu nutzen gilt. Gerade die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie stellt ein herausragendes Argument dar, warum die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht unverzichtbar ist. Im österreichischen Lehrplan für Allgemein bildende höhere Schulen wird dieses Teilgebiet der Mathematik erst im Oberstufenlehrplan thematisiert.[2]

Die folgenden Ausführungen sollen zeigen, wie Aspekte der Wahrscheinlichkeitsrechnung bereits in der Unterstufe dargestellt werden können und so passende Grundvorstellungen zu den Begriffen Wahrscheinlichkeit und Zufall bei SchülerInnen aufgebaut werden. Dabei werden folgende Fragen diskutiert: Welche Aspekte der Wahrscheinlichkeitsrechnung können in der Unterstufe behandelt werden? Welche Vorteile und Schwierigkeiten bringt dieser Bereich der Mathematik im Unterstufenunterricht mit sich? Genügt der Wahrscheinlichkeitsbegriff von Laplace oder benötigt man noch andere?

Durch die Darstellungen der theoretischen Grundlage sowie durch die Auseinandersetzung mit anschaulichen Beispielen bzw. Aufgaben versucht die Arbeit diese Fragen zu beantworten.

Ziel ist, die Notwendigkeit und Durchführbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht der Unterstufe aufzuzeigen.

1 Pierre Simon Laplace zitiert nach [12], S.11.
2 Siehe [18].

1. Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1. Vorgeschichte – Glücksspiel und Würfel in der Antike

Auch wenn die ersten Schritte einer Begriffsbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung relativ spät erfolgten, so kann man dennoch Spuren von Wahrscheinlichkeit bereits in den alten Kulturen der Inder, Babylonier und Ägypter entdecken. Diese Spuren zeigen sich anhand der sogenannten Astragali, die bereits 3500 v. Chr. für die Durchführung von Glücksspielen verwendet wurden.[3]


[4]

Die Astragali (siehe Abbildung oben) sind Knöchelchen, welche die Form von Quadern aufweisen und aus dem Sprunggelenk von Schafen hergestellt wurden. Das Glücksspiel mit Astragali war vor allem bei den Römern beliebt. Dabei verwendeten sie vier Astragali oder Knöchelchen, deren Seiten mit 1 bis 6 markiert wurden, wobei die Schmalseiten 2 und 5

3 Siehe [4], S. 56.
4 Siehe [22].

sehr selten geworfen wurden. Beim „schönsten“ Wurf – Venus genannt – erzeugten alle vier Astragali ein anderes Ergebnis.
Es ist wahrscheinlich, dass sich Würfel durch das Abschleifen der Astragali entwickelten. In Folge wurden Würfel aus Ton und Glas hergestellt. Durch Fundstellen im nördlichen Irak wissen wir, dass bereits die Babylonier Würfel aus Ton gebrauchten.[5]
Allerdings weicht bei den ältesten noch erhaltenen Würfeln die Anordnung der Augenzahlen von unserer heute gewohnten ab: zwei aufeinanderfolgende Zahlen wurden gegenüber platziert. Erst ab ca. 1500 v. Chr. wurden Würfel mit der heute üblichen Beschriftung – die Addition der Zahlen der gegenüberliegenden Seiten ergibt 7 – angefertigt. Durch Versuche mit „alten“ Würfeln bzw. Astragali, z.B. durch Maistrov, wurde die Symmetrie dieser Würfel untersucht. Während sich die knöchernen Würfel als nicht-symmetrisch erweisen, erzielen die Würfel aus Ton oder Glas eine ausgezeichnete Symmetrie.[6]

Wenn man das Ausmaß betrachtet, mit dem in der Antike Würfel zum Einsatz kamen und Glücksspiele durchgeführt wurden, ist es erstaunlich, dass es in der Antike keine Ansätze gab, um derartige Zufallsexperimente bzw. Spiele zu analysieren. Es gab weder Versuche, die statistische Regelmäßigkeit zu untersuchen, noch Überlegungen, etwa die Zahl der Möglichkeiten zu gewichten. Statt den zufälligen Charakter der Spiele passend einzuschätzen, wurde das Ergebnis durch das Schicksal oder den Willen Gottes begründet.[7]
Dies zeigt, dass in der Antike Würfel, Astragali oder auch Lose Mittel zur Divination – zur Erforschung des göttlichen Willen oder der Zukunft – darstellten. Dadurch stand die einzelne Entscheidung, d.h. der nächste Wurf, im Mittelpunkt, sodass verschiedene Versuche nicht als Durchführung eines Experiments angesehen wurden.
Außerdem war das systematische Experimentieren in der antiken

5 Siehe [4], S. 56.
6 Siehe [4], S. 56-57.
7 Siehe [4], S. 57.

Philosophie nicht verankert. In Folge stellte ebenso die christliche Philosophie ein Hindernis für die Durchdringung des Zufalls- oder Wahrscheinlichkeitsbegriffs dar. Die christliche Philosophie argumentierte, dass der Zufall nur durch die eingeschränkte Sichtweise des Menschen existiere.[8]

Daraus wurde u.a. gefolgert, dass die eigentliche Begriffsbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht so sehr dem Glücksspiel, sondern der wirtschaftlichen Situation des 17. Jahrhunderts – u.a. Planung und Sicherheit im Handel – geschuldet sei, auch wenn die Ideen oft anhand von Glücksspielen oder Zufallsexperimenten entwickelt wurden bzw. werden. [9]

1.2. Das Zara-Spiel – gleichzeitiger Wurf dreier Würfel

Das Zara-Spiel war unter dem Namen *gioco della zara* bekannt. Anhand dieses Glücksspiels, bei dem die Augensumme der Punkte dreier Würfel vorherzusagen war, wurde bereits im Mittelalter der stochastische Charakter des Werfens dreier Würfel berücksichtigt und untersucht. Das Problem der drei Würfel von Chevalier de Mére konnte bereits in der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts gelöst werden.

Zunächst wird eine mögliche Lösung um ca. 1325 in einem Kommentar zu Dantes *Commedia* folgendermaßen dargestellt:

Summe 3 = 1+1+1

Summe 4 = 2+1+1

Summe 5 = 2+2+1, 3+1+1

...[10]

Nach dieser Darstellung hängt die Häufigkeit des Auftretens einer bestimmten Augensumme von der Anzahl ihrer möglichen Realisierungen

8 Siehe [4], S. 58.
9 Siehe [4], S. 57-58.
10 Siehe [4], S. 60.

ab. Allerdings wurden hier die verschiedenen Permutationsmöglichkeiten für die Summanden nicht berücksichtigt.[11]
Deshalb entstehen dann Fragen wie: Warum tritt Summe 10 häufiger auf als Summe 9?
Durch derartige Fragestellungen wird auf die Notwendigkeit, die Reihenfolge der Würfel zu beachten, hingewiesen. Erstaunlich erscheint, dass bereits in der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts in *de vetula* diese Problematik der drei Würfel vollständig gelöst wurde:[12]

„3	18	punctatura	1	cadentiae	1
4	17	punctatura	1	cadentiae	3
5	16	punctatura	2	cadentiae	6
6	15	punctatura	3	cadentiae	10
7	14	punctatura	4	cadentiae	15
8	13	punctatura	5	cadentiae	21
9	12	punctatura	6	cadentiae	25
10	11	punctatura	6	cadentiae	27“[13]

In dieser Darstellung beziehen sich die ersten zwei Spalten auf die jeweiligen Summen. Außerdem wird durch die Bezeichnung *punctatura* die Anzahl der Kombinationen der drei Summanden und durch die Bezeichnung *cadentiae* die Anzahl der entsprechenden Permutationen aufgezeigt.
Hier wurde also erstmals die Idee formuliert, dass in symmetrischen Glücksspielen der Anteil aller Möglichkeiten als Maß für die Erwartung eines Ereignisses zu sehen ist.[14]

11 Siehe [4], S. 60.
12 Siehe [4], S. 61.
13 Siehe [4], S. 61.
14 Siehe [4], S. 61-62.

1.3. Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der Ursprung der Wahrscheinlichkeitstheorie liegt nicht nur in der Beschäftigung mit Problemen des Glücksspiels. Es gab eine ganze Reihe vielfältigster Probleme aus verschiedenen Bereichen, die zur Entwicklung der Methodik und Begriffswelt der Wahrscheinlichkeitsrechnung beitrugen.

Ein zentrales Problem, das die Ausbildung der Wahrscheinlichkeitstheorie initiierte sowie förderte, stellte die Verarbeitung von numerischen Datenmaterial dar. Dieses wurde bei statistischen Erhebungen, Beobachtungsreihen und wiederholten Experimenten offensichtlich. Erhebungen wie beispielsweise Volkszählungen gibt es bereits seit der Antike, um u.a. die Basis für Steuereintreibungen zu schaffen. Sterbetafeln wurden hingegen erstmals im 16. Jahrhundert in England aufgestellt. Sie hielten die Folgen der Pestepidemien fest.[15]
Auch die Versicherungsgesellschaften, erstmals im 14. Jahrhundert in Holland und Italien gegründet, begünstigten die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zu Beginn betrachtete man hauptsächlich Schiffe als Versicherungsobjekte. Beobachtungen zu Schiffsunfällen führten zu einer festgesetzten Prämie von 12-15 %, die das Risiko der Unfälle abdeckte.
Nicht unerwähnt soll die Bedeutung der Renaissancezeit für die naturwissenschaftliche und wahrscheinlichkeitstheoretische Forschung bleiben. In dieser Zeit wurde das Experiment als wichtiges Hilfsmittel der Forschung eingeführt. Im Zuge dessen begründete sich das Bedürfnis, „die bei wiederholten Messungen auftretenden Zufallsfehler abzuschätzen und zu eliminieren."[16]

Wie ausgeführt spielten zahlreiche Faktoren eine entscheidende Rolle bei der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dennoch war die

15Siehe [10], S. 279.
16Siehe [10], S. 279.

Beschäftigung mit Problemen bei Glücksspielen zentral. Anhand der Untersuchung der Glücksspiele schufen Mathematiker bewusst Methoden, die die Gesetzmäßigkeiten der realen Welt analysierten bzw. darlegten.
Dabei verstärkte sich im Laufe der Zeit das Bedürfnis, Zufallserscheinungen zu erklären bzw. zu verstehen. Im 16. Jahrhundert entwickelten Pioniere der Wahrscheinlichkeitsrechnung systematische Überlegungen, die man als Vorläufer der heutigen Wahrscheinlichkeitstheorie charakterisieren kann.[17]

1.4. Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung – Teilungsproblem im 16. und 17. Jahrhundert

Als ersten Pionier der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man Girolamo Cardano (1501-1576) bezeichnen. Er untersuchte in seinem posthum erschienenen Buch *liber de ludo aleae* (*das Buch der Glücksspiele*) systematisch das Würfelspiel.[18]
Die Durchführung eines Spiels mit dem Wurf zweier Würfel beschreibt Cardano so: „Im Fall von zwei Würfeln gibt es sechs Würfe mit gleicher Augenzahl und 15 Kombinationen mit ungleicher Augenzahl. Letztere Anzahl gibt bei Verdopplung 30, also gibt es insgesamt 36 Würfe.“[19]
Im Anschluss daran analysierte Cardano das Werfen dreier Würfel. Sowohl beim Wurf zweier als auch beim Wurf dreier Würfel bezog er die Permutationsmöglichkeiten der Augensummen in seine Überlegungen ein, d.h. er berücksichtigte bereits die Reihenfolge der Würfel.
Weiter versuchte er dann die Möglichkeiten, eine bestimmte Summe der Augenzahlen mit mehreren Würfeln zu erzielen, aufzuzeigen. Anhand derartiger Überlegungen gelang es ihm, sich dem Begriff der Wahrscheinlichkeit zu nähern. Er schrieb dazu:[20]

17 Siehe [10], S. 279.
18 Siehe [12], S. 21.
19 Girolamo Cardano zitiert nach [10], S. 280.
20 Siehe [10], S. 280.

„Der Punkt 10 besteht aus (5,5) und aus (6,4). Letzterer Fall kann auf zwei Arten auftreten, also ist die Gesamtanzahl, 10 zu erhalten, gleich 1/12 Möglichkeiten[…] So gibt es also eine allgemeine Regel, nämlich, wir müssen die Gesamtzahl aller Möglichkeiten betrachten, und die Zahl jener Würfe, die darstellt, wie viele Möglichkeiten für ein günstiges Resultat auftreten können. Diese Zahl vergleicht man mit dem Rest der Möglichkeiten, und gemäß diesem Verhältnis müssen die Einsätze gesetzt werden, damit unter gleichen Voraussetzungen gespielt wird.“[21]

Ein zentrales Problem in frühen Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt das *force majeure*, das sogenannte Teilungsproblem, dar. Mit dieser Problematik – die gerechte Aufteilung der Einsätze bei vorzeitigem Abbruch eines Glücksspiels – beschäftigte sich u.a. auch Cardano.[22]

Da sich zahlreiche Mathematiker des 16. und 17. Jahrhunderts mit Teilungsproblemen beschäftigten, spielten diese eine entscheidende Rolle in der Entwicklungsgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bei den Lösungsvorschlägen ist folgende Situation zugrunde gelegt:

Zwei Spieler *A* und *B* führen ein Glücksspiel durch und absolvieren eine Reihe von Partien. Jede Partie endet mit Gewinn bzw. Verlust, d.h. ein Unentschieden ist ausgeschlossen. Die Siegchance ist für jeden Spieler gleich und derjenige Spieler gewinnt, der zuerst 5 Partien für sich entscheidet. Beim Stand von 4:3 für Spieler *A* muss das Spiel abgebrochen werden. Da eine spätere Fortsetzung nicht möglich ist, muss nun geklärt werden, wie die Einsätze aufzuteilen sind.[23]

<u>Lösungsvorschläge</u>

- Fra Luca Pacioli (1445-1514), Mönch und Lehrer für Mathematik an italienischen Hochschulen, bezog sich auf das bereits realisierte

21 Girolamo Cardano zitiert nach [10], S. 280.
22 Siehe [10], S. 280.
23 Siehe [12], S. 15.

Ergebnis und teilte deshalb die Einsätze im Verhältnis 4:3 auf.

- Niccolò Tartaglia (1499-1557), Mathematiker in Venedig, war der Meinung, dass dieses Problem besser durch die Justiz als durch die Vernunft zu lösen sei. Dennoch entwickelte er eine für ihn „beste" Lösung: Die Einsätze sind im Verhältnis (5+4-3) : (5+3-4) = 3:2 zu teilen.[24]
- Girolamo Cardano (1501-1576) bemängelte am Lösungsversuch von Pacioli, dass die Anzahl der Punkte, die zum Sieg fehlten, unberücksichtigt blieben. Er beschrieb die Lösung folgendermaßen: m = Zahl der zum Sieg benötigten Punkte; n_1 = Punkte Spieler A (bei Abbruch); n_2 = Punkte Spieler B (bei Abbruch).
  Der Einsatz ist dann im Verhältnis (1+2+ … + (m-n_2)) : (1+2+ … + +(m-n_1)) zu Gunsten von Spieler A aufzuteilen. Mit den obigen Werten ergibt sich also ein Teilungsverhältnis von 3:1 für Spieler A.[25]
  Auch wenn dieses Verhältnis hier richtig ist, so ist doch die Formel im Allgemeinen nicht gültig. Dies kann man leicht erkennen, wenn man den Spielabbruch beim Stand von 4:2 betrachtet. Laut Cardano sind dann die Einsätze im Verhältnis 6:1 aufzuteilen. Gerecht ist aber in diesem Fall ein Teilungsverhältnis von 7:1.

Wie zu erkennen ist, setzte das Teilungsproblem entscheidende Impulse für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fast jeder der Väter der Wahrscheinlichkeitstheorie hat sich dieser Problematik angenommen. Dennoch gehen die oben beschriebenen Lösungen des Problems am stochastischen Charakter der Situation vorbei.[26]

Das Teilungsproblem wurde vor allem durch den Briefwechsel zwischen Blaise Pascal (1623-1662) und Pierre de Fermat (1607-1665) – französische Mathematiker – so berühmt. Ihren Briefwechsel 1654

24 Siehe [12], S. 15-16.
25 Siehe [10], S. 281.
26 Siehe [4], S. 62.

bezeichnen viele als die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das Teilungsproblem wurde Pascal durch Chevalier de Mére (1607-1684) – französischer Edelmann und Glücksspieler – vorgelegt. Sowohl Pascal als auch Fermat bestimmten als Teilungskriterium die Wahrscheinlichkeit des Gewinns der Serie für die jeweiligen Spieler. Dabei war die mögliche Fortsetzung des Spiels bis zum endgültigen Sieg (einer gewinnt 5 Partien) als stochastischer Prozess im Zentrum ihrer Betrachtungen.[27]
Anders gesagt bedeutet dies, dass sie ihre Berechnungen auf die zu erwartenden zukünftigen Ergebnisse stützten, während die bereits erzielten Punkte keine Beachtung fanden. Pascal formulierte diese Situation wie folgt: „[…], so daß man richtigerweise nur die Anzahl der Spiele betrachten darf, die von jedem Einzelnen noch zu gewinnen sind und nicht die Anzahl derer, die sie bereits gewonnen haben.“[28]

Bei der Lösung dieses Problems argumentierte Pascal dementsprechend:
Falls Spieler *B* die nächste Partie gewinnt, gibt es einen Gleichstand und deshalb muss Spieler *B* die Hälfte des Einsatzes bekommen. Da aber die Chance, dass Spieler *B* die nächste Partie gewinnt nur ½ beträgt, ist Spieler *B* die Hälfte der Hälfte, d.h. ¼ des Einsatzes, auszuzahlen. Das bedeutet, dass die Einsätze im Verhältnis 3:1 zugunsten von Spieler *A* zu teilen sind.[29]

Auf ähnliche Weise gelangte Fermat, unabhängig von Pascal, zum gleichen Ergebnis. Er legte dar, dass nach höchstens zwei weiteren Partien der Sieger des Spiels feststeht. Deshalb stellte er die möglichen Ausgänge der noch zu spielenden Partien dar. (Ausgangssituation 4:3 für Spieler *A*)[30]

27 Siehe [4], S. 62.
28 Siehe [12], S. 17.
29 Siehe [12], S. 16.
30 Siehe [12], S. 17.

1. Partie	2. Partie	Sieger
A gewinnt	*A* gewinnt	*A*
A gewinnt	*B* gewinnt	*A*
B gewinnt	*A* gewinnt	*A*
B gewinnt	*B* gewinnt	*B*

Da in 3 von 4 möglichen Ergebnissen Spieler *A* gewinnt und die Gleichwahrscheinlichkeit der Fälle anzunehmen ist, sind die Einsätze im Verhältnis 3:1 auszuzahlen.[31]

Diese Lösungsvorschläge durch Pascal und Fermat überzeugten und führten dazu, dass die Wahrscheinlichkeit als natürliches Maß für die Teilung des Einsatzes verwendet wurde.
Zusätzlich beschäftigte sich u.a. noch der Holländer Christiaan Huygens (1629-1695), der die Korrespondenz zwischen Fermat und Pascal kannte, mit Verallgemeinerungen des Teilungsproblems.
Pascal sowie Fermat untersuchten auch andere Probleme bei Glücksspielen, z.B. das Drei-Würfel-Problem. Auch wenn sie keine Definition der Wahrscheinlichkeit als „günstige durch mögliche" gaben, so bestimmten sie doch entsprechende Wahrscheinlichkeiten.
Man kann sagen, sie gebrauchten die Vorstellung, die sich seit *de vetula* entwickelte, dass der Anteil der Möglichkeiten ein berechtigtes Maß für die Erwartung darstellt. Allerdings leisteten beide keinen Beitrag für die eigentliche Begriffsbildung, da sie nicht klärten, wann die Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse vorliegt. Dies war für ihre Ausführungen nicht nötig, denn sie analysierten Glücksspiele, bei denen die Gleichwahrscheinlichkeit offensichtlich impliziert ist.[32]

Neben Pascal und Fermat waren in dieser Zeit die Überlegungen von Huygens – niederländischer Mathematiker, Astronom sowie Physiker – von

31 Siehe [12], S. 17-18.
32 Siehe [4], S. 64.

großer Bedeutung für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er verfasste das erste Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das 1657 unter dem Titel *de ratiociniis in ludao aleae* gedruckt wurde. Dieses Werk widmet sich u.a. der Einführung des Erwartungswerts und Verallgemeinerungen der Teilungsproblematik. Bis Beginn des 18. Jahrhunderts war dies das Standardwerk der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Gelehrte bzw. Mathematiker wie beispielsweise Jakob Bernoulli setzten sich intensiv damit auseinander.[33]

Zusammenfassend ist festzustellen, dass bis etwa Mitte des 17. Jahrhunderts für einzelne Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung spezielle Lösungsvorschläge gemacht wurden. Dabei fehlte in der Regel der gemeinsame mathematische Hintergrund. Dann untersuchten Pascal, Fermat und Huygens die Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und konnten dem Bereich eine einheitliche Theorie zugrunde legen. Deshalb werden sie oft als die Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung angesehen.[34] Auch wenn man sagen kann, dass Pascal sowie Fermat nichts für die eigentliche Begriffsbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung beitrugen, ist anzumerken, dass die Mathematiker dieser Zeit bereits Additions- und Multiplikationsregeln für Wahrscheinlichkeiten beherrschten. Außerdem konnten sie abhängige von unabhängigen Ereignissen unterscheiden und kannten den Begriff des Erwartungswerts. In der Folge machte Jakob Bernoulli, der wie erwähnt mit dem Werk von Huygens vertraut war, einen wesentlichen Schritt für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.[35]

33 Siehe [10], S. 284.
34 Siehe [10], S. 282.
35 Siehe [10], S. 285.

1.5. Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie – seit Beginn des 18. Jahrhunderts

Jakob Bernoulli (1654-1705) befasste sich mit wahrscheinlichkeitstheoretischen und kombinatorischen Problemen und hielt die Resultate in seinem Werk *ars conjectandi* (*Kunst des Vermutens*) fest, das erst 1713 – acht Jahre nach seinem Tod – publiziert wurde. In diesem Werk stehen kombinatorische Abhandlungen, Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit (heute als klassische Wahrscheinlichkeit bezeichnet) sowie Bezüge zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten.[36] Dementsprechend ist das Werk in vier Teile gegliedert, wobei der vierte Teil von besonderer Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsentwicklung war. In diesem formulierte und bewies er den wahrscheinlichkeitstheoretischen Satz, der inzwischen nach Bernoulli bezeichnet wird. Diesen Satz nannte Bernoulli selbst Hauptsatz oder Goldenes Theorem, heute auch bekannt als Gesetz der großen Zahlen. Der Satz wurde von ihm wie folgt niedergeschrieben:[37]

> „Verhalte sich die Anzahl der günstigen Fälle eines Ereignisses zu den ungünstigen Fällen so wie r zu s, genau oder nur ungefähr, oder verhalte sie sich zur Gesamtzahl der Versuche wie r zu $r+s$, oder r zu t. Dieses Verhältnis liegt zwischen $r+1/t$ und $r-1/t$. Man muss zeigen, dass man die Zahl der Versuche so wählen kann, dass für jede Zahl c, für die die Gewinnchancen c:1 vorliegen, die Anzahl der günstigen Fälle dann zwischen diesen Grenzen liegen wird, d.h. das Verhältnis der Anzahl des Eintretens des günstigen Falles zur Gesamtzahl der Versuche liegt zwischen $r+1/t$ und $r-1/t$."[38]

Sicherlich wurde dieses sogenannte Gesetz der großen Zahlen bereits durch frühere Mathematiker angewendet bzw. formuliert, aber Bernoulli war der erste Mathematiker, der den Satz theoretisch begründete. Dazu schrieb er:

36 Siehe [12], S. 24.
37 Siehe [10], S. 285.
38 Jakob Bernoulli zitiert nach [10], S. 285.

> „Jedem ist auch klar, dass es zur Beurteilung irgendeiner Erscheinung nicht ausreicht, eine oder zwei Beobachtungen zu machen, sondern es ist eine große Anzahl von Beobachtungen erforderlich. Aus diesem Grund weiß selbst der beschränkteste Mensch [...], dass je mehr Beobachtungen in Betracht gezogen werden, desto kleiner die Gefahr ist, das Ziel nicht zu erreichen.“[39]

Durch diese Ausführungen von Jakob Bernoulli wurde das Verhältnis zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit geklärt. Sein Gesetz der großen Zahlen zeigt, dass die relativen Häufigkeiten gegen die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit konvergiert. Dadurch war es ihm gelungen, den Begriff Wahrscheinlichkeit über Glücksspiele hinaus, d.h. wenn die Symmetrieeigenschaft – Gleichwahrscheinlichkeit der Ausgänge – fehlt, anzuwenden. Außerdem ersetzte er die durch Huygens postulierte Erwartung durch Wahrscheinlichkeit als den zentralen Begriff.[40]

Ein weiterer Zugang zum empirischen Wahrscheinlichkeitsbegriff entstand im Laufe des 17. Jahrhunderts in England. Hier war vor allem John Graunt (1620-1674) mit seinem Buch *Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality* prägend. Graunt unternahm den Versuch, aus Beobachtungsdaten allgemeine Aussagen über das Verhalten großer Bevölkerungsgruppen abzuleiten. In seinem Buch stellte er Sterbefälle und Geburten dar, um die Ausbreitung der Pestepidemien zu analysieren und so Aussagen über das Bevölkerungswachstum zu treffen.[41]
Derartige Unterlagen bildeten später die Basis, um Lebensversicherungen adäquat zu berechnen. Dies zeigt, dass im Laufe der Zeit die Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie auf immer mehr Probleme des täglichen Lebens projiziert wurden. Der englische Zugang zu Wahrscheinlichkeiten wurde also nicht so sehr durch das Glücksspiel, sondern durch die Lebensumstände geprägt.[42]

39 Jakob Bernoulli zitiert nach [10], S. 285.
40 Siehe [4], S. 71.
41 Siehe [10], S. 285.
42 Siehe [10], S. 286.

Kenntnisse über wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme und Forschung waren im 18. Jahrhundert in England weit verbreitet. Wichtige Publikationen dazu stammen von Thomas Bayes (ca. 1701-1761) und Abraham de Moivre (1667-1754).[43]

Thomas Bayes löste beispielsweise das Problem der Wahrscheinlichkeitsberechnung für die Richtigkeit von Hypothesen unter der Voraussetzung, dass bereits Beobachtungsergebnisse existieren. Der bayes'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff bzw. die bedingte Wahrscheinlichkeit ist heutzutage jedem Mathematiker bekannt. Bayes legte den Grundstein für einen wichtigen Aspekt der Wahrscheinlichkeitstheorie und zwar die Vorstellung von der sogenannten bedingten Wahrscheinlichkeit.

Im Gegensatz dazu lieferte de Moivre mit seinem Buch *The Doctrine of chances* einen wichtigen Beitrag zum klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Bereits vor Pierre Simon Laplace (1749-1827) formulierte er als Maß für Wahrscheinlichkeit den Quotienten Anzahl $g(A)$ der für das Ereignis A günstigen Fälle / Anzahl m der möglichen Fälle.[44]

Pierre Simon Laplace – französischer Mathematiker und Physiker – fixierte eine für damalige Verhältnisse sehr umfangreiche Darstellung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Kenntnisse durch sein Werk *Théorie analytique des probabilités* (1812) sowie seinen Essay *Essai philosophique sur les probabilités* (1814).

Im Gegensatz zu de Moivre betont er die notwendige Gleichmöglichkeit der Ausgänge:[45]

> „Die Theorie des Zufalls ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Zurückführung aller Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl gleich möglicher Fälle, d.h. solcher, über deren Existenz wir in gleicher Weise unschlüssig sind, und durch Bestimmung der dem Ereignis günstigen

43 Siehe [10], S. 286-287.
44 Siehe [12], S. 25.
45 Siehe [12], S. 25.

Fälle. Das Verhältnis dieser Zahl zu der aller möglichen Fälle ist das Maß dieser Wahrscheinlichkeit, die also nichts anderes als ein Bruch ist, dessen Zähler die Zahl der günstigen Fälle und dessen Nenner die Zahl aller möglichen Fälle ist.“[46]

Diese Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, die durch Laplace beschrieben wurde, bezeichnet man heute als klassische Wahrscheinlichkeit oder als Laplace-Wahrscheinlichkeit. Bei der Laplace-Wahrscheinlichkeit handelt es sich nicht um eine Definition für Wahrscheinlichkeit, sondern sie stellt vielmehr eine Vorschrift zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dar, deren Anwendungsbereich durch die notwendige Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit der Ausgänge begrenzt ist.[47]
Weitere Ausführungen zur klassischen Wahrscheinlichkeit werden im dritten Kapitel gegeben.

Neben ihren Ausführungen zur Berechnungsmöglichkeit von Wahrscheinlichkeiten lieferten de Moivre und Laplace auch wichtige Überlegungen für das Konzept der stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung. De Moivre verwendete als erster die Funktion, die heute als Normalverteilung bezeichnet wird. Dabei versuchte er eine Approximation für Summen von Binomialwahrscheinlichkeiten zu geben, um die entsprechenden Abweichungen im Bernoulli-Theorem abzuschätzen.[48] Allerdings hatte die Normalverteilung für de Moivre noch keine stochastische Bedeutung. Erst ab 1755 wird die stetige Verteilung benutzt, um die Veränderlichkeit von Beobachtungen aufzuzeigen.[49]
In diesem Zusammenhang muss der zentrale Grenzverteilungssatz (1810) von Laplace genannt werden. Dieser Satz stellt vermutlich die bedeutendste Leistung von Laplace dar und besagt: Wenn die Anzahl der Versuche gegen unendlich strebt, nähert sich die Binomialverteilung der Normalverteilung an.
Außerdem entwickelte Laplace intuitive Vorstellungen, ob die

46 Pierre Simon Laplace zitiert nach [12], S. 26.
47 Siehe [12], S. 26-27.
48 Siehe [4], S. 71.
49 Siehe [4], S. 74.

Normalverteilung anwendbar ist.[50]

Im weiteren Verlauf der Forschung beschäftigten sich viele Wissenschaftler, Mathematiker und Physiker mit der Normalverteilung. Die Normalverteilung nahm eine wichtige Position bzw. Funktion in der Mathematik bzw. Physik ein.

„Die russische Schule (Tschebyscheff, Markow) verfolgte verschiedenste Verallgemeinerungen des zentralen Grenzverteilungssatzes und brachte dabei immer mehr die Idee der Maßtheorie ins Spiel, was letztlich zur axiomatischen Grundlegung geführt hat.“[51]

Erst Ende des letzten Jahrhunderts verlor die Normalverteilung durch die nicht-parametrische Statistik oder auch die exploratorische Datenanalyse an Bedeutung.[52]

Insgesamt ist zu sagen, dass Laplace's Arbeit einen Höhepunkt in der frühen Begriffsbildung der Wahrscheinlichkeit darstellt. Vor allem sein zentraler Grenzverteilungssatz und die durch ihn formulierte erste formale Definition von Wahrscheinlichkeit lieferten einen entscheidenden Beitrag für die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie.[53]

Da die Berechnungsmethode für Wahrscheinlichkeiten von Laplace nicht bei unsymmetrischen Objekten anwendbar ist, weil die Ausgänge keine Gleichwahrscheinlichkeit aufweisen, fanden auch andere Methoden zur Wahrscheinlichkeitsberechnung große Beachtung. Im Zusammenhang mit unsymmetrischen Objekten ist der Begriff der relativen Häufigkeit von enormer Wichtigkeit. Da bei Zufallsexperimenten eine Stabilisierung der relativen Häufigkeiten stattfindet, wurde die Grenzwertdefinition der Wahrscheinlichkeit postuliert. Hier ist der Ansatz von Richard Edler von Mises (1883-1953) zu nennen. Er definierte Wahrscheinlichkeit als den Grenzwert der Folge der entsprechenden relativen Häufigkeiten.[54]

Ähnlich wie bei dem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff gab es auch

50 Siehe [4], S. 74.
51 Siehe [4], S. 76.
52 Siehe [4], S. 76.
53 Siehe [4], S. 76.
54 Siehe [12], S. 28.

hier beim sogenannten frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff einige Einwände gegen die Theorie. Dennoch sind beide Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bis heute unentbehrlich. Wie zum klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff werden weitere Ausführungen zur Vorstellung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit im dritten Kapitel gegeben.

Ende des 19. Jahrhunderts verstärkte sich dann das Bemühen um eine allgemeingültige Definition von Wahrscheinlichkeit. David Hilbert (1862-1943) forderte beispielsweise in einem Vortrag auf dem zweiten internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris eine mathematisch exakte Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung:[55]

> „Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt: dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik. [...]"[56]

Dieses Problem, die Wahrscheinlichkeitstheorie allgemeingültig zu begründen, wurde erst 1933 durch das Axiomensystem des russischen Mathematikers Alexander Nikolajewitsch Kolmogoroff (1903-1987) gelöst. Sein Axiomensystem besteht aus folgenden drei Axiomen:[57]

> „Sei Ω ein nichtleerer endlicher Ergebnisraum und sei P: $\wp(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ eine Abbildung der Potenzmenge $\wp(\Omega)$ in die Menge der nicht negativen reellen Zahlen $\mathbb{R} \geq 0$ mit folgenden Eigenschaften:
>
> Axiom 1: Jedem Ereignis $A \in \wp(\Omega)$ ist durch die Abbildung P eindeutig eine reelle Zahl $P(A)$ zugeordnet, für die gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$.
>
> Axiom 2: Für das sichere Ereignis Ω gilt: $P(\Omega) = 1$. (Normierung)
>
> Axiom 3: Sind $A \in \wp(\Omega)$ und $B \in \wp(\Omega)$ unvereinbare Ereignisse (gilt also

55 Siehe [12], S. 28.
56 David Hilbert zitiert nach [12], S. 28-29.
57 Siehe [12], S. 29.

$A \cap B = \emptyset$), so gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Additivität)

Dann heißt die Funktion P Wahrscheinlichkeitsfunktion oder Wahrscheinlichkeitsverteilung, der Funktionswert $P(A)$ heißt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A und das Paar (Ω,P) heißt ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum."[58]

Durch diese axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff mathematisch abgesteckt und sein Gebrauch geregelt. Damit wurde eine allgemeingültige Grundlage für die Wahrscheinlichkeitstheorie geschaffen.

Heute existieren parallel verschiedene Vorstellungen zu Wahrscheinlichkeiten. Diesen Vorstellungen ist die Erfüllung des Axiomensystems von Kolmogoroff gemein. Je nach Anwendungsgebiet ist zu entscheiden, welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff bzw. welcher Aspekt der Wahrscheinlichkeit zu betrachten ist.

58 Siehe [11], S. 62.

2. Wahrscheinlichkeitstheorie im schulischen Kontext

2.1. Anwendungsorientierte Stochastik

Wenn man sich mit der Thematik Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie im Mathematikunterricht auseinandersetzt, stellen sich zunächst folgende Fragen: Was ist Stochastik? Wozu wird Stochastik bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht behandelt? Welche Aspekte bzw. fundamentale Ideen der Wahrscheinlichkeitstheorie sind im Schulunterricht darzustellen? Wozu dient die Auseinandersetzung mit den Aspekten und Begriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie?

Mit Stochastik kann man die Wissenschaft bezeichnen, die sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der mathematischen Statistik sowie deren Anwendungsgebiete auseinandersetzt. In einem ersten Zugang ist die Stochastik in drei Bereiche zu gliedern: Kombinatorik, beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Dabei sind diese Teilbereiche eng miteinander vernetzt.[59]
Um ein umfassendes bzw. tiefes Verständnis für die Bereiche der Stochastik zu entwickeln ist es unbedingt erforderlich, über ausreichende Kenntnisse in all ihren Bereichen zu verfügen. Bei den folgenden Ausführungen steht die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mittelpunkt des Interesses. Dennoch ist klar, dass auf die anderen Teilbereiche der Stochastik nicht vollständig verzichtet werden kann.

Bei didaktischen Überlegungen zur Behandlung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Schulunterricht wird schnell klar, dass die Stochastik als essentielles Teilgebiet der Mathematik bei einer fundierten mathematischen Grundausbildung unverzichtbar ist. Diese mathematische Grundausbildung erfüllt in erster Linie den Zweck, die SchülerInnen auf

59 Siehe [12], S. 8-10.

zukünftige Ausbildungswege und Berufe vorzubereiten. Wenn man die möglichen Ausbildungswege und Berufszweige betrachtet, wird klar, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie die Statistik in vielen Fachbereichen eine wichtige Funktion einnimmt. Deshalb ist es unbedingt erforderlich, dass die Lernenden über ausreichende Kenntnisse im Bereich der Stochastik verfügen. Außerdem gilt es, die SchülerInnen auf Situationen des Berufs- oder Alltagslebens vorzubereiten, in denen stochastisches Denken gefragt ist. Dies beinhaltet vor allem Situationen, bei denen unter Unsicherheit zu beurteilen oder zu entscheiden ist. Dazu gehören u.a. das richtige Einschätzen statistischer Erhebungen in Medien oder das Deuten medizinischer Testergebnisse. Grundlegend bei allen Situationen, in denen wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte Anwendung finden, ist, dass man den stochastischen Charakter der Situation erkennt und adäquate Verbindungen zu den gelernten stochastischen Inhalten aufbaut. Diese Ausführungen zeigen, dass angemessene Grundvorstellungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie unerlässlich sind.[60]

Um passende Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeiten zu entwickeln, ist es zwingend erforderlich, ein ausgeprägtes Verständnis für die zentralen Begriffe Wahrscheinlichkeit und Zufall aufzubauen. Die Begriffe Wahrscheinlichkeit und Zufall sind untrennbar miteinander verbunden und beinhalten beide die Herausforderung, dass sie über keine eindeutige Definition verfügen. Gerade Berechnungen zu Wahrscheinlichkeiten liegen im Normalfall Zufallsexperimente zugrunde. Der Begriff Zufall zeigt sich in den vielfältigsten Situationen. Deshalb beschäftigen sich mit diesem Begriff nicht nur Mathematiker, sondern ebenso Philosophen, Theologen, Physiker oder auch Schriftsteller:[61]

„Auch der Zufall ist nicht unergründlich, er hat seine Regelmäßigkeit."[62]

Diese Zitat von Novalis zeigt, dass bei aller Uneindeutigkeit des Zufalls die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit dem Begriff das Ziel verfolgt, den Zufall zu beschreiben oder sogar zu entschlüsseln.

---

60 Siehe [16].
61 Siehe [16].
62 Novalis zitiert nach [11], S. 12.

Auch wenn die Ausbildung von Grundvorstellungen zu den Begriffen Wahrscheinlichkeit und Zufall eine wichtige Aufgabe des schulischen Stochastikunterrichts darstellt, so kann bzw. muss der schulische Stochastikunterricht ebenso dazu dienen, allgemeine mathematische Fähigkeiten zu entwickeln. Gerade die Themenfelder der Stochastik sind bestens geeignet, um einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht zu gestalten. Ziel eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts ist es, die SchülerInnen mit mathematischen Denk-, Sprech- und Handlungsweisen vertraut zu machen. Dabei lernen die Heranwachsenden, wie man Probleme mit mathematischen Möglichkeiten untersuchen und gegebenenfalls lösen kann. Ergänzend müssen die SchülerInnen auch die Grenzen der Mathematik bei der Lösung von Problemen erfahren.[63]
Insgesamt zeigt sich, dass im Stochastikunterricht sowohl der Erwerb von Fachkenntnissen als auch die Anwendung der erworbenen Kenntnisse auf reale Situationen im Mittelpunkt stehen muss.

2.2. Wahrscheinlichkeit und mathematische Modellbildung

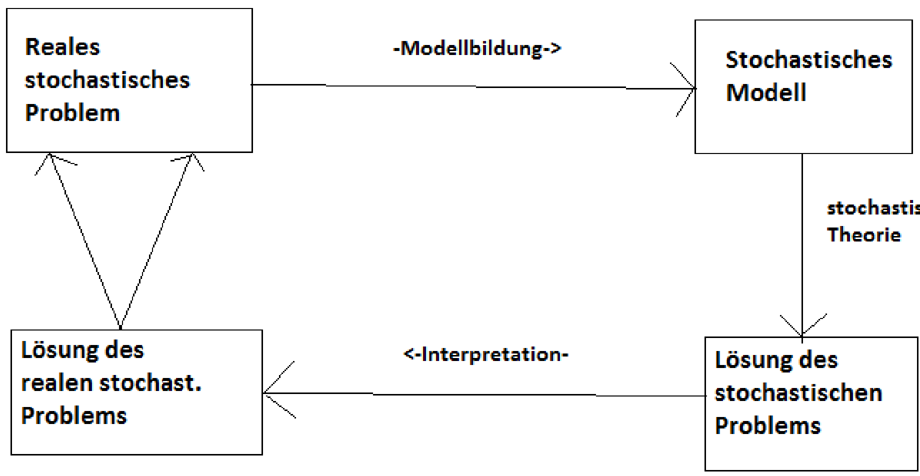
Im Bereich der Stochastik stehen zahlreiche Anwendungsgebiete zur Verfügung, beispielsweise Aufgaben oder Problemstellungen aus der Wirtschaft, der Psychologie oder der Medizin sowie aus den Bereichen Qualitätskontrolle und Glücksspiel.
Dabei können prägnante oder auch illustrative Beispiele von Modellierungsprozessen behandelt werden, bei denen aber auch auf sprachliche Aktivitäten bzw. Fähigkeiten der Lernenden zu achten ist. Die Stochastik bzw. die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann also als ein Paradegebiet für Mathematisierung und Modellierungen angesehen werden:[64]

63 Siehe [9], S. 20.
64 Siehe [9], S. 147.

> „Will man zufallsbestimmte Phänomene und Situationen des täglichen Lebens mathematisch beschreiben, so müssen sie erst durch ein System mathematischer Begriffe und Beziehungen, also durch Mathematisierung (Modellbildung) erfassbar und berechenbar gemacht werden.“[65]

In stochastischen Situationen wird die Grundlage derartiger Modelle durch die Wahrscheinlichkeitstheorie gebildet. Anhand der Modelle werden die Probleme der Realität, die durch den Zufall bestimmt sind, zuerst als mathematische Fragestellungen formuliert und dann gelöst. Dazu erfolgt also die Lösung zunächst im mathematischen Modell. Anschließend wird die mathematische Lösung mit Blick auf das reale Problem interpretiert. Dabei muss das Sachproblem so weit wie möglich aus dem Sachzusammenhang erklärt werden. [66]

Stochastische Modellbildung



[67]

Anhand der Abbildung wird deutlich, dass Modelle als Abbilder der eigentlichen Sache fungieren. Außerdem wird das Anspruchsniveau bei Mathematisierung bzw. Modellierung deutlich: Man muss über doppelte

65 Siehe [12], S. 9.
66 Siehe [12], S. 9.
67 Siehe [12], S. 9.

Kompetenz verfügen. Zum einen sind genaue Kenntnisse der stochastischen Theorie unverzichtbar, um ein adäquates stochastisches Modell zu wählen bzw. anzuwenden. Zum anderen muss man fachliches Wissen im Bereich des Sachproblems besitzen. Dadurch kann man das Sachproblem vollständig erfassen und die Lösung passend – im Hinblick auf das Sachproblem – interpretieren.[68]

In Bezug auf Anwendungsbeispiele sind Aufgaben zu bevorzugen, die aus Bereichen stammen, die die SchülerInnen direkt oder indirekt betreffen. Dadurch dass die Beispiele aus der Um- bzw. Erfahrungswelt der Heranwachsenden sind, sind sie verständlich und die Motivation der SchülerInnen dementsprechend hoch.[69]

2.3. Gründe für den Wahrscheinlichkeitsunterricht

Nach diesen Ausführungen zum Stellenwert der Stochastik im Fachbereich Mathematik bzw. im schulischen Kontext ist klar, dass die Behandlung der Stochastik im Schulunterricht unverzichtbar ist. Im Folgenden werden die Gründe für die Behandlung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Schulunterricht übersichtlich dargestellt:[70]

- Wahrscheinlichkeitstheorie als Teil der Grundausbildung

Die Schule besitzt die Aufgabe, den SchülerInnen eine umfassende Grundausbildung zu vermitteln, die das mathematische Erfassen der Wirklichkeit beinhaltet. Im Zuge dessen müssen Grundkenntnisse zum Verständnis zufallsbedingter Erscheinungen behandelt werden. Dabei ist die Anwendung der erworbenen Fähigkeiten auf reale Situationen wie beispielsweise Glücksspiele, Prognosen aufgrund statistischer Daten, Testverfahren in der Psychologie oder Simulation großtechnischer Prozesse in Physik und Chemie empfehlenswert.

68 Siehe [12], S. 10.
69 Siehe [9], S. 149.
70 Siehe [11], S. 21-26.

Dadurch sollen Aussagen über Zufallserscheinungen objektiviert und vergleichbar gemacht sowie umgangssprachliche Formulierungen wie „wahrscheinlich“ oder „unsicher“ präzisiert werden.[71]

- Anwendungsbezug der Wahrscheinlichkeitstheorie: Mathematisierung bzw. Modellbildung

Durch den starken Anwendungsbezug des Stochastikunterrichts kann der Prozess der Mathematisierung bzw. der Modellbildung verdeutlicht werden. Auch in Bereichen des täglichen Lebens werden einfache Schemata benutzt um komplexe Sachverhalte verständlich darzustellen. Ähnlich arbeitet man mit Modellen, wenn der Anwendungscharakter der Mathematik im Mittelpunkt steht.[72]

- Wahrscheinlichkeitstheorie – eine ideen- und erkenntnisreiche Disziplin

In der Stochastik gibt es eine Fülle von Möglichkeiten, substantielle mathematische Fähigkeiten zu vermitteln. Dabei kann die Kreativität der SchülerInnen angeregt sowie ihre Argumentations- bzw. Kommunikationsfähigkeit gefördert werden. Außerdem können Problemstellungen durch Simulation bzw. Vereinfachung gelöst werden. Insgesamt finden sich in der Literatur zahlreiche und vielfältige Beispiele dafür.[73]

- Wahrscheinlichkeitstheorie – Interesse und Motivation

Durch den Anwendungsbezug und die Vielfalt der Wahrscheinlichkeitstheorie sowie ihrer Beispiele ist das Interesse der Heranwachsenden an entsprechenden Aufgaben groß. Insgesamt kann eine hohe Motivation der SchülerInnen im Stochastikunterricht festgestellt werden.[74]

71 Siehe [11], S. 21-26.
72 Siehe [11], S. 21-26.
73 Siehe [11], S. 21-26.
74 Siehe [11], S. 21-26.

- Integrative Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie

Der Stochastikunterricht ist in den Mathematikunterricht einzubetten. Beispielsweise können bei der Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung traditionelle Rechengebiete wie Bruchrechnen oder Prozentrechnen geübt bzw. vertieft werden sowie ihre Anwendbarkeit bzw. Nützlichkeit dargestellt werden.
In der fortgeschrittenen Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es wichtige Verbindungen zu Bereichen der Analysis oder der Linearen Algebra.[75]

- Wahrscheinlichkeitstheorie als Entwicklungsgeschichte der Mathematik

Anhand der Entwicklungsgeschichte der Stochastik kann ein guter und spannender Einblick in die Grundlagen der wissenschaftlichen Arbeit gegeben werden. Der Blick in die abwechslungsreiche Geschichte der Stochastik gestaltet den Mathematikunterricht lebendig und teilweise auch verständlicher.
Durch die Betrachtung der Probleme der Entstehungsgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die u.a. durch Grundlagendiskussionen über den Begriff Wahrscheinlichkeit und durch zahlreiche Paradoxien geprägt wurden, kann den SchülerInnen veranschaulicht werden, wie Fehler überwunden wurden und sich so die Wissenschaft der Wahrscheinlichkeitstheorie herausbildete.[76]

Diese Zusammenstellung der Gründe für die Behandlung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Schulunterricht erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit.
Sicher ist, dass Stochastik im Schulunterricht nicht nur einen neuartigen Stoff, sondern ebenso eine neue Sichtweise darstellen kann. Vor allem der Anwendungsbezug und die integrativen Aspekte können den

75 Siehe [11], S. 21-26.
76 Siehe [11], S. 21-26.

Mathematikunterricht in ein neues Licht rücken. Die Stochastik kann die Einstellung der SchülerInnen zur Wissenschaft Mathematik günstig beeinflussen. Außerdem bietet die Wahrscheinlichkeitstheorie zahlreiche Möglichkeiten, um Kooperationen mit anderen Unterrichtsfächern oder auch die Eigenaktivität der SchülerInnen zu fördern.[77]

Insgesamt wurde gezeigt, dass es mehr als sinnvoll ist, die Wahrscheinlichkeitstheorie umfassend im schulischen Mathematikunterricht zu behandeln. Allerdings gibt es einige Herausforderungen bzw. Schwierigkeiten, die im Wahrscheinlichkeitsunterricht zu berücksichtigen sind.

Dadurch dass keine eindeutige Definition der Wahrscheinlichkeit vorliegt, ist es zwingend erforderlich zu wissen, welchen Begriff bzw. welches Modell im jeweiligen Fall anzuwenden ist. Dazu muss man über ausreichende Kenntnisse der verschiedenen Begriffe und Modelle verfügen und diese zueinander in Bezug setzen.

Außerdem bergen die intuitiven Vorstellungen der Lernenden eine große Gefahr beim Erlernen adäquater Fähigkeiten im Bereich der Stochastik. Im Gegensatz zu anderen mathematischen Teilbereichen stimmen in der Wahrscheinlichkeitstheorie die intuitiven Vorstellungen der Lernenden und die tatsächlich richtigen Lösungen häufig nicht überein. Diese Problematik wurde bereits von Pierre Simon Laplace erkannt und formuliert:

„Einer der großen Vorteile der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der, daß man lernt, dem ersten Anschein zu mißtrauen."[78]

Diese Schwierigkeiten gilt es, bei der Gestaltung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht zu beachten. Dabei ist es unerlässlich, die Voraussetzungen der Lernenden entsprechend ihrer Jahrgangsstufe sowie ihrer sprachlichen Fähigkeiten zu berücksichtigen. Gerade sprachliche Aspekte und die Förderung sprachlicher Fähigkeiten gewinnen auch im Mathematikunterricht immer mehr an Bedeutung. Der

77 Siehe [8], S. 8-9.

78 Laplace zitiert nach [12], S. 11.

Stochastikunterricht ist gut geeignet, um einen sprachsensiblen Mathematikunterricht zu gestalten, der sowohl allgemeine sprachliche als auch fachsprachliche Fertigkeiten entwickelt.[79]

Auf den folgenden Seiten wird nun dargestellt, wie Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie im Mathematikunterricht der Unterstufe behandelt werden können. Dabei werden Chancen, Eigenheiten und mögliche Schwierigkeiten der schulischen Vermittlung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Sekundarstufe I thematisiert.

79 Siehe [13], S. 143-162.

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht

Im vorherigen Kapitel wurden bereits einige mögliche Schwierigkeiten bei der Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht dargestellt. Dennoch ist klar, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine wichtige Säule der Mathematik ist, in zahlreichen Wissenschaften Anwendung findet und somit dieser ein wichtiger Stellenwert im schulischen Mathematikunterricht einzuräumen ist. Außerdem gilt es, die SchülerInnen unabhängig von nachfolgenden Ausbildungsschienen auf Situationen des Alltags- und Berufsleben vorzubereiten, in denen stochastisches Denken Anwendung finden muss.[80]

Es wird nun gezeigt, wie man den Begriff der Wahrscheinlichkeit bzw. das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten für SchülerInnen verständlich machen kann. Hier werden folgende Wahrscheinlichkeitsbegriffe bzw. ihre Umsetzung im Schulunterricht der Sekundarstufe I dargestellt:

- sogenannte naive oder frequentistische Wahrscheinlichkeit (empirische Sichtweise)
- klassische oder Laplace-Wahrscheinlichkeit (theoretische Sichtweise)
- subjektive Wahrscheinlichkeit
- geometrische Wahrscheinlichkeit
- bedingte oder bayesianische Wahrscheinlichkeit

Damit SchülerInnen den Begriff der Wahrscheinlichkeit verstehen und befähigt sind, den Begriff adäquat anzuwenden, ist es unerlässlich, die Vielfalt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu zeigen, in dem man die sogenannte naive, klassische, subjektive, geometrische sowie bedingte Wahrscheinlichkeit im Schulunterricht behandelt.

Dabei sind gerade am Beginn des Wahrscheinlichkeitsunterrichts die

80 Siehe [16].

intuitiven Vorstellungen der Lernenden zu berücksichtigen. Auf die intuitiven Vorstellungen und mögliche Probleme bzw. Chancen daraus wurde bereits in Kapitel 2 hingewiesen. Nun folgt die praktische Umsetzung.

3.1 Die sogenannte „naive“ Wahrscheinlichkeit

3.1.1. Theoretische Grundlage

Dem „naiven“ Wahrscheinlichkeitsbegriff liegt die Vorstellung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit zugrunde:
„Die relative Häufigkeit $h_n(A)$ für ein Ereignis A bezeichnet in der Versuchsfolge von n Versuchen den Quotienten
$h_n(A)$ = Anzahl $H_n(A)$ der Versuche mit dem Ereignis A / Gesamtzahl n der Versuche“[81]

In diesem Zusammenhang ist sicher, dass die Aussagekraft der relativen Häufigkeit steigt je mehr Versuche durchgeführt werden. Bei dieser Thematik erregte lange Zeit der Ansatz von Richard Edler von Mises große Aufmerksamkeit. Er definierte die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A als Grenzwert der Folge der relativen Häufigkeiten $h_n(A)$ unter einschränkenden Bedingungen.
Die Basis dieser Deutung der Wahrscheinlichkeit ist die Einsicht in die empirische Stabilisierung der relativen Häufigkeit, d.h. dass relative Häufigkeiten mit zunehmender Zahl der Versuche immer weniger fluktuieren. Mathematisch gesehen steckt dahinter also das sogenannte empirische Gesetz der großen Zahlen.[82]

Der Limesdefinition der Wahrscheinlichkeit durch Mises stehen schwerwiegende Einwände gegenüber. So formulierte beispielsweise

81 Siehe [12], S. 28.
82 Siehe [12], S. 28.

Vietoris 1951: „In der Natur gibt es keine unendlichen Ereignisfolgen“.[83] Es ist offensichtlich, dass ebenso ein Zufallsexperiment nicht unendlich oft durchführbar ist und dadurch ist der entsprechende Grenzwert nicht zu bestimmen. Außerdem muss der Grenzwert nicht existieren, selbst wenn das Experiment unendlich oft wiederholt werden könnte.

Dennoch werden relative Häufigkeiten aus langen Versuchsreihen als Schätzwerte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verwendet.[84] Gerade im Schulunterricht ist meiner Ansicht nach der Gebrauch der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit eine sehr gute Chance, um den SchülerInnen den Begriff der Wahrscheinlichkeit verständlich zu machen.

Selbstverständlich ist hier und in allen folgenden Ausführungen vorauszusetzen, dass die SchülerInnen bereits den Begriff der relativen Häufigkeit aus der Statistik kennen und mathematische Fähigkeiten in zahlreichen Bereichen wie beispielsweise dem Bruchrechnen aufweisen.

3.1.2. „Naive“ Wahrscheinlichkeit im Schulunterricht

Sinnvoll bei der Auffassung von Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten ist es, anhand eines konkreten Beispiels Vorstellungen zu überprüfen bzw. aufzubauen.

Zunächst wird den SchülerInnen folgende Hausübung gestellt :

Nimm eine Münze und werfe sie 50 Mal! Notiere, wie oft das Ereignis (Ergebnis) Zahl eintritt! Berechne die relativen Häufigkeiten (Zahl) für die ersten 5 und 10 sowie für die gesamten 50 Würfe! Welche relativen Häufigkeiten erwartest du für die Würfe deiner MitschülerInnen? Welchen Wert schätzt du für die relative Häufigkeit bei 100 Würfen? Begründe deine

83 Siehe [11], S. 43.
84 Siehe [12], S. 28.

Voraussagen! (Notiere deine Schätzungen und Begründungen schriftlich!)

Bei dieser Aufgabe führen die SchülerInnen selbst ein Zufallsexperiment durch. Anhand der absoluten Häufigkeiten können die SchülerInnen die relativen Häufigkeiten berechnen.

> „Klassische Zufallsexperimente wie Würfeln mit einem normalen Würfel, das Werfen einer Münze oder das Ziehen aus einem Behälter (mit Zurücklegen) dienen vor allem dazu, die Aufmerksamkeit der Lernenden vom Einzelergebnis auf die langfristigen Ergebnisse zu verlagern. Die einfache Durchführbarkeit und Erfassbarkeit dieser Experimente rechtfertigen ihren hohen Stellenwert im stochastischen Anfangsunterricht.“[85]

Diese Hausübung ist aber nicht nur handlungsorientiert, d.h. die SchülerInnen führen nicht nur ein Experiment bzw. einen Versuch selbst durch. Vielmehr sind die daran anschließenden Fragestellungen denkorientiert, da die Lernenden Voraussagen bzw. Schätzungen zu den Ergebnissen der MitschülerInnen bzw. zu einer längeren Versuchsserie abgeben. Gerade Begriffe und Fragestellungen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie sind auf der denkorientierten Seite angesiedelt.[86] „Statt einer Voraussage für das tatsächliche Ergebnis des Werfens des Plättchens denkt man über die möglichen Ausgänge nach und bewertet diese mit Gewichten, nämlich den Wahrscheinlichkeiten.“[87]
Bei dieser Hausübung wird bewusst auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit verzichtet. Dieser soll erst in der darauffolgenden Stunde eingeführt werden. Außerdem ist es meiner Meinung nach empfehlenswert, dass die Lernenden die Antworten schriftlich fixieren, so dass sie die sprachliche Äußerung über mathematische Sachverhalte üben.

Die Resultate der Hausübung werden besprochen. Dabei werden die Ergebnisse für das Ereignis Zahl tabellarisch festgehalten. Anhand der

85 Siehe [16].
86 Siehe [4], S. 37.
87 Siehe [4], S. 37.

Tabellen kann nun geklärt werden, in wie weit die Voraussagen der SchülerInnen für die relativen Häufigkeiten stimmen. Dazu ist es sinnvoll, die SchülerInnen nach den Begründungen für ihre Schätzungen zu befragen.
Außerdem kann erörtert werden, ob und in welchem Zahlenbereich sich die Ergebnisse der relativen Häufigkeiten der SchülerInnen unterscheiden. Anhand der Tabellen kann nun die Entwicklung der relativen Häufigkeiten in einem Diagramm dargestellt werden. Hier werden dann die Ergebnisse für die relativen Häufigkeiten für eine steigende Zahl an Versuchen simuliert.

Ein derartiges Diagramm findet sich beinahe in jedem Schulbuch.
Anhand des Diagramms sollen die SchülerInnen erkennen, dass sich die Werte der relativen Häufigkeiten bei längerer Versuchsfolge stabilisieren. Meiner Ansicht nach ist es sinnvoll, dass die Lernenden zunächst selbst in einer Partnerarbeit über die möglichen Aussagen des Diagramms nachdenken. Danach werden die Resultate der Partnerarbeit gemeinsam im Plenum besprochen und diskutiert. Dabei werden ebenso die sprachlichen Fähigkeiten der Lernenden geschult, da sie über mathematische Sachverhalte sprechen. Insgesamt wird anhand des Diagramms gezeigt, dass sich die relativen Häufigkeiten für das Ereignis Zahl bei langer Versuchsfolge dem Wert 0,5 immer mehr annähern. Außerdem wird geklärt, warum dies der Wert 0,5 ist.
Im Anschluss daran führt der Lehrer den Begriff der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit ein.

In diesem Zusammenhang kann durch eine behutsame Formulierung den SchülerInnen eine passende Beschreibung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gegeben werden:

> „Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit:
>
> Ein Versuch mit einem Ereignis A werde n-mal unter den gleichen Bedingungen durchgeführt.

Es sei n groß und $h_n(A)$ die relative Häufigkeit von A. Für eine Zahl $P(A)$, die als Wahrscheinlichkeit für A angenommen wird, soll dann gelten: $h_n(A) \approx P(A)$“[88]

Alternativ kann die Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit folgendermaßen im Schulheft festgehalten werden:

„Die relative Häufigkeit für das Ereignis *A*
Anzahl der Versuche mit dem Ereignis *A* / Gesamtzahl *n* der Versuche
aus einer langen Versuchsserie kann als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses *A* gewählt werden.“[89]

Diese Merkregel besitzt den Vorteil, dass sie weitgehend auf Formalsprache verzichtet. Gerade in der Unterstufe sollte man behutsam mit der mathematischen Symbolsprache umgehen. Eine zu komplexe bzw. zu häufig auftretende Formalsprache kann für das Verständnis der SchülerInnen gegenüber mathematischen Sachverhalte hinderlich sein.

Außerdem halte ich es hier für sinnvoll, von einer Merkregel und nicht von einer Definition zu sprechen. Es gibt schließlich keine eindeutige Definition der Wahrscheinlichkeit und die Deutung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit ist ebenso nicht unumstritten.
Wichtig bei der Begriffseinführung ist, dass die SchülerInnen die Bedingungen, Möglichkeiten und Grenzen der Deutung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit verstehen. Dazu gehören unter anderem: Erkennen, dass diese Deutung nur bei längerer Versuchsfolge und gleichbleibenden Voraussetzungen funktioniert. Zusätzlich ist hervorzuheben, dass bei dieser Deutung die Wahrscheinlichkeit als ein Schätzwert aufgefasst wird.
Außerdem bietet sich hier die Möglichkeit, das Beispiel des Münzwurfs durch Computerprogramme mit Tabellenkalkulation zu illustrieren. Ich werde dies im Anschluss an das folgende Beispiel genauer erläutern.

88 Siehe [8], S. 31.
89 Siehe [12], S. 38.

Nach dem Münzwurf ist es ratsam, das neugewonnene Wissen durch ein weiteres Beispiel zu vertiefen. Die Lernenden bekommen beispielsweise folgende Aufgabe:
Ein (regelmäßiger/symmetrischer) Würfel wird geworfen. Überlege welchen Wert die relative Häufigkeit für das Ereignis 3 bei 6, 60 und 600 Würfen annimmt! Fertige eine grobe Skizze bzw. Diagramm für die entsprechenden $h_n(3)$ mit n = 1000 an! Schätze und begründe die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis 3! Notiere deine Antworten und Begründungen schriftlich!

Durch diese Aufgabe sollen die SchülerInnen das Gelernte selbst anwenden. Für die Lehrkraft zeigt sich anhand der Antworten und Begründungen, ob die Lernenden die Vorstellung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit verstehen. Wichtig ist, dass diese Übung ausführlich durch ein Lehrer-Schüler-Gespräch besprochen wird, um mögliche Fehlvorstellungen zu eliminieren.

3.1.3. Computerprogramme mit Tabellenkalkulation

Die Zufallsexperimente Münzwurf und Würfelversuch eignen sich, um die Nützlichkeit von Computerprogrammen in der Mathematik aufzuzeigen. Der Einsatz elektronischer Werkzeuge und Medien bzw. des Computers im Schulunterricht ist u.a. laut Lehrplan zwingend gefordert.
Anhand entsprechender Programme mit Tabellenkalkulation wie beispielsweise Microsoft Excel oder LibreOffice Calc können Grafiken und Tabellen erstellt werden. Dadurch werden mathematische Sachverhalte veranschaulicht. Ebenso ist es möglich durch die Anwendung dieser Programme Simulationen sowie iterative und rekursive Berechnungen zu verdeutlichen.

Laut Herbert Groß verfügt der Einsatz der Programme Microsoft Excel oder

LibreOffice Calc im Schulunterricht über folgende Vorteile:

> „- Erwerb einer grundlegenden Kompetenz (für weiteren Bildungsweg, fürs
> Berufsleben, für den Privatgebrauch, …)
> - Excel ist nahezu auf jedem (privaten) PC vorhanden (im Gegensatz z.B. zu
> CAS-Systemen)
> - hervorragend geeignet zur Modellbildung in der Mathematik
> - schülerzentriertes Lernen
> - Schüler als Tutoren einsetzbar (auch zur Entlastung des Lehrers)
> - Veranschaulichungen einfach durchführbar“[90]

Kritisch anzumerken ist, dass gerade Microsoft Excel nicht auf jedem PC vorhanden ist. Außerdem kann dieses Programm nicht kostenlos zur Verfügung gestellt werden. Da im Gegensatz dazu die Programme LibreOffice und OpenOffice kostenlos im Internet zum Download bereit stehen, empfiehlt es sich, die Tabellenkalkulation von LibreOffice oder OpenOffice im Unterricht zu verwenden sowie den SchülerInnen zu zeigen, wie diese Programme auf ihrem Computer installiert werden können.

Bei der Würfel- bzw. Münzwurfaufgabe hängt die Durchführung der Illustration des Beispiels mittels Tabellenkalkulation von den mitgebrachten Kenntnissen der SchülerInnen ab. Im Normalfall verfügen Heranwachsende über ausgezeichnete Kenntnisse im Umgang mit dem Computer und ihre Motivation bei derartigen Übungen ist entsprechend hoch. Dennoch können die Fähigkeiten der Lernenden in Bezug auf Programme wie Microsoft Excel sehr unterschiedlich ausfallen. Wichtig ist, dass man das mitgebrachte Vorwissen der SchülerInnen kennt und anhand dessen die einzelnen Schritte zur Erstellung der Tabellen bzw. Grafiken so ausführlich wie nötig zeigt.

Zunächst kann das Beispiel des Münzwurfs und die entsprechenden Daten mittels Excel oder Calc dargestellt werden. Dabei ist es sinnvoll, die

90 Siehe [7], S. 58.

Ereignisse Wappen (Kopf) bzw. Zahl mit 0 bzw. 1 zu codieren. Dies dient u.a. dazu, den SchülerInnen zu zeigen, dass man derartige Versuchsanordnungen mittels Microsoft Excel oder LibreOffice Calc durch wenige Handgriffe, z.B. der Funktion der Zufallszahl bzw. des Zufallsbereichs, simulieren kann. In diesem Kontext sollte man kurz den Begriff Zufallszahl bzw. Zufallsbereich klären. Allerdings müssen diese Begriffe im weiteren Unterrichtsverlauf immer wieder aufgegriffen bzw. ausführlich behandelt werden, damit sich passende Vorstellungen zu diesen Grundbegriffen bei den Lernenden aufbauen.
Bei der Darstellung des Münzwurfs mittels Microsoft Excel oder LibreOffice Calc können zunächst die durch die SchülerInnen erhobenen Daten verwendet werden. Dann wird gezeigt, wie man diesen Versuch in kurzer Zeit durch das Tabellenkalkulationsprogramm immer wieder neu durchführen kann.

So wie Borovcnik beschreibt, besteht eine adäquate Vorgehensweise darin, „mit realen Objekten zu beginnen, erste Ergebnisse und Gesetzmäßigkeiten herauszuarbeiten und dann auf virtuelle Experimente überzugehen und die Ergebnisse miteinander zu vergleichen.“[91]
Mit virtuellen Experimenten kann man also mit geringem Aufwand eine große Versuchsfolge untersuchen, z.B. das 600-fache Werfen einer Münze. Derartige umfangreiche Analysen mittels realer Objekte würden einen enormen Zeitfaktor im Unterricht bedeuten. Die Nützlichkeit der virtuellen Experimente bzw. Simulationen, in kurzer Zeit einen großen Umfang an Daten zu produzieren, sollte den Lernenden verdeutlicht werden. Die zu den Daten erstellten Diagramme bzw. Grafiken verfügen über vielfältige Möglichkeiten der Gestaltung. Wichtig ist, die entsprechenden Grafiken möglichst einfach zu gestalten, so dass der Aufwand der Gestaltung möglichst gering ist. SchülerInnen können daraufhin selbst mit verschiedenen Gestaltungsmöglichkeiten experimentieren.
Durch die Darstellung des 10-, 50-, 600-maligen Werfens einer Münze

91 Siehe [3], S. 5.

anhand entsprechender Tabellen und Grafiken wird sichtbar, dass sich die absoluten und relativen Häufigkeiten der Ereignisse (Wappen-Zahl) bei zunehmender Versuchsfolge annähern. Außerdem ist es hier sinnvoll zu zeigen, dass dennoch die relativen Häufigkeiten – beispielsweise für das Ereignis Zahl – beim 600-maligen Werfen geringe Unterschiede aufweisen können. Durch das Markieren der entsprechenden Zellen können die Zufallszahlen, d.h. die Ereignisse, immer wieder neu generiert werden. In Folge dessen werden die Werte für die absoluten und relativen Häufigkeiten sowie deren grafische Darstellung automatisch neu simuliert. Dadurch wird die Varianz der Versuchsausgänge für verschiedene Versuchsfolgen schnell und übersichtlich gezeigt.
Dabei werden durch den Vergleich einzelner Grafiken und Werte Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit überprüft.[92]

Ähnlich dem Münzwurf kann ebenso die Aufgabe des Würfelexperiments mittels Tabellenkalkulation und Grafiken gelöst werden. Dabei kann zunächst das 6-malige Werfen dargestellt werden. Dann kann das 60-malige Werfen durch einfache Eingaben mittels Tabellen bzw. Grafik verdeutlicht werden.
Zuletzt erstellen dann die SchülerInnen selbst die entsprechenden Tabellen und die Grafik für das 600-malige Werfen. Im Anschluss daran sollen sie sich überlegen, in wie weit sich die Grafik verändert und Gründe dafür finden. Nähern sich auch hier die absoluten und relativen Häufigkeiten der Ereignisse bei Zunahme der Versuchsfolgen einander an?
Diese Beobachtungen und mögliche Schlussfolgerungen werden durch die Lehrkraft schriftlich fixiert. Die Lernenden können diese Aufgabe gegebenenfalls als Partner- oder Gruppenarbeit erledigen. Außerdem kann die Fragestellung als Hausübung bearbeitet werden. Allerdings ist sicherzustellen, dass die Lernenden über Zugang zu dem Programm verfügen, entweder zu Hause oder in der Schule.

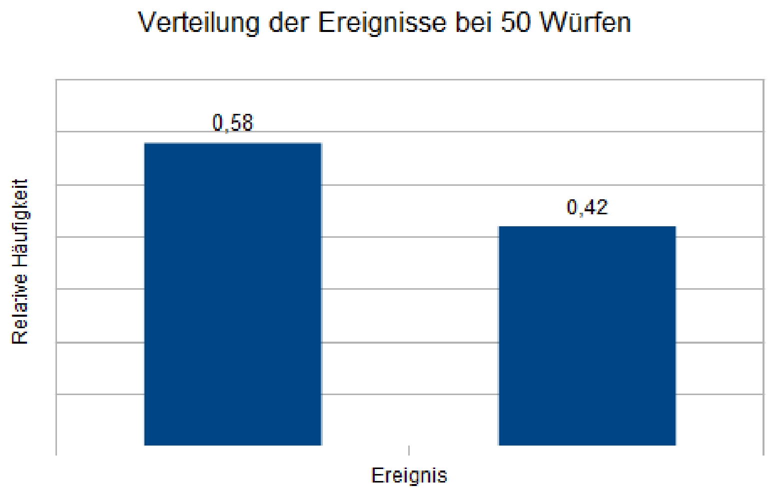
92 Siehe [3], S. 3-6.

Münzwurf

Wurf	Ergebnis (Code)
1	1
2	1
3	0
4	0
5	0
6	1
7	0
8	1
9	1
10	0
11	1
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	1
18	0
19	0
20	1
21	0
22	1
23	1
24	1
25	1
26	0
27	1
28	0
29	0
30	0
31	1
32	1
33	1
34	1
35	1
36	0
37	1
38	0
39	0
40	0
41	0
42	0
43	1
44	0
45	0
46	1
47	0
48	0
49	1
50	1

10 Würfe	Ereignis	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	Zahl (1)	5	0,5
	Wappen (0)	5	0,5
	Summe	10	1

50 Würfe	Ereignis	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	Zahl (1)	23	0,46
	Wappen (0)	27	0,54
	Summe	50	1



Würfelexperiment

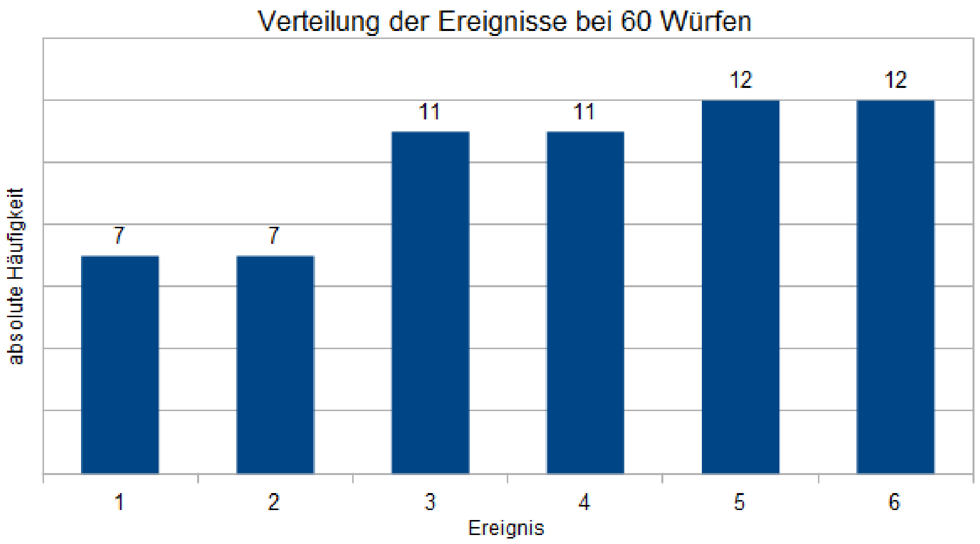
Wurf	Ergebnis
1	5
2	3
3	4
4	5
5	3
6	2
7	6
8	5
9	3
10	2
11	5
12	2
13	1
14	2
15	4
16	5
17	4
18	3
19	1
20	1
21	1
22	2
23	4
24	3
25	6
26	6
27	3
28	6
29	4
30	2
31	5
32	6
33	3
34	6
35	3
36	5
37	5
38	5
39	6
40	1
41	2
42	3
43	1
44	1
45	2
46	1
47	2
48	5
49	6
50	1
51	2
52	1
53	3
54	3
55	1
56	3
57	6
58	3
59	6
60	3

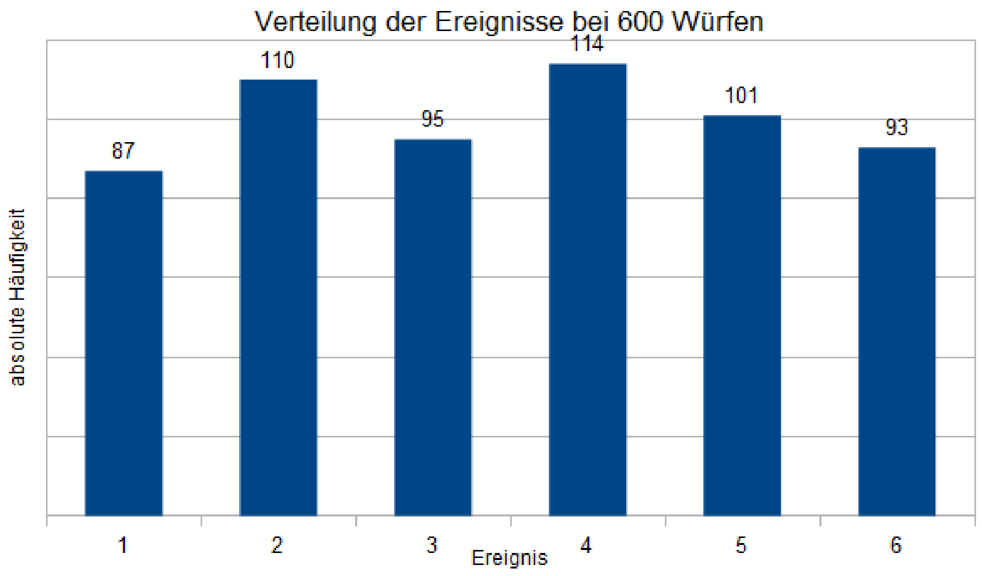
60 Würfe	Ereignis	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	1	11	0,1833333333
	2	10	0,1666666667
	3	14	0,2333333333
	4	5	0,0833333333
	5	10	0,1666666667
	6	10	0,1666666667
	Summe	60	1

600 Würfe	Ereignis	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
	1	98	0,1633333333
	2	91	0,1516666667
	3	99	0,165
	4	99	0,165
	5	109	0,1816666667
	6	104	0,1733333333
	Summe	600	1

...

590	2
591	4
592	4
593	1
594	6
595	1
596	6
597	2
598	3
599	5
600	4





Wenn man Aufgaben durch Programme mit Tabellenkalkulation wie beispielsweise Microsoft Excel im Schulunterricht behandelt, ergeben sich folgende Schwierigkeiten bzw. Herausforderungen:
Es kommt immer wieder vor, dass SchülerInnen Rechenergebnisse nicht durch Formeleingabe ermitteln, sondern die Ergebnisse nur in die entsprechenden Zellen schreiben. Darauf muss die Lehrkraft besonders achten. In den obigen Beispielen wird dieser Fehler schnell sichtbar, da das wiederholte Simulieren dann nicht möglich ist. Es ist wichtig, den Lernenden den Sinn der Formeleingabe zu erläutern. Außerdem sollte man betonen, dass die Formeleingabe exakt erfolgen muss. Schon kleine Ungenauigkeiten, z.B. das Einfügen eines Abstands, beeinflusst die Ergebnisse bzw. sorgt dafür, dass eine Fehlermeldung auftritt. Im Verlauf des Arbeitens mit Computerprogrammen ist es ratsam, das Wissen der Lernenden über die Anwendbarkeit und den Gebrauch des jeweiligen Programms stetig auszubauen. Dabei können immer wieder neue Tricks gezeigt werden, die das Arbeiten vereinfachen. Es ist ebenso möglich, dass die Heranwachsenden selbst neue Tricks herausfinden. Man sollte ihnen dann Gelegenheit geben, diese zu äußern. Falls jeder Schüler und jede Schülerin über einen Zugang zu dem entsprechenden Programm verfügt, können Aufgaben als Hausübung gestellt werden. Gerade durch die eigenständige Nutzung wird der Umgang mit dem Computer bzw. dem Programm – hier Microsoft Excel – gesichert und ausgebaut. Um die Übungen zu überprüfen, werden Ausdrucke angefertigt oder Dateien gespeichert sowie der Lehrkraft zugänglich gemacht. Zusätzlich können Aufgaben mittels PowerPoint-Präsentationen im Plenum vorgestellt werden.[93]

Insgesamt ist die Einbindung verschiedener Computerprogramme in den Mathematikunterricht aufgrund institutioneller Rahmenbedingungen und didaktischer Gründe unerlässlich. Deshalb muss man als Lehrkraft über entsprechende Kenntnisse der Programme sowie deren Anwendbarkeit bei

93 Siehe [7], S. 70.

mathematischen Teilthemen verfügen. Im Bereich der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit eignen sich Programme wie Microsoft Office oder LibreOffice Calc. Dies wurde hier gezeigt.

Nachdem die Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit ausführlich eingeführt bzw. betrachtet wurde, halte ich es für ratsam, zeitnah den Begriff der klassischen Wahrscheinlichkeit (Laplace-Wahrscheinlichkeit) im Schulunterricht zu behandeln. Dadurch können die SchülerInnen erkennen, dass es nicht eine einzige bzw. eindeutige Definition oder auch Berechnungsmethode für Wahrscheinlichkeiten gibt. Es kommt immer auf die Beschaffenheit der Versuchsanordnung sowie der Situation an, welche Deutung der Wahrscheinlichkeit anzuwenden ist.

3.2. Klassische Wahrscheinlichkeit (Laplace)

3.2.1. Theoretische Grundlage

Bevor ich fortfahre die praktische Umsetzung im Schulunterricht weiter zu beleuchten, möchte ich kurz einiges Grundlegendes zum klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff darstellen.

Pierre Simon Laplace hat 1812 die erste formale Definition von Wahrscheinlichkeit schriftlich fixiert:

> „Wahrscheinlichkeit in symmetrischen Situationen
> Wahrscheinlichkeit als Anteil. Ist die Ergebnismenge *M* eines Zufallsversuches endlich und sind die einzelnen Versuchsergebnisse gleichwahrscheinlich, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *G* (Teilmenge von *M*) als Anteil an der Ergebnismenge *M*:
> $W(G) = |G| / |M|$ = günstige / mögliche“[94]

Hier wurde Wahrscheinlichkeit in einer eingeschränkten Form, Gleichwahrscheinlichkeit aller Einzelergebnisse, festgehalten. [95]
Diese Auffassung der Wahrscheinlichkeit nennt man ebenso Laplace-Wahrscheinlichkeit. Da nicht immer Gleichwahrscheinlichkeit der Einzelergebnisse vorauszusetzen ist, muss man die Anwendbarkeit des Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriffs in einem konkreten Problem zunächst prüfen. Hierzu hat Laplace das sogenannte Prinzip des unzureichenden Grundes angegeben:
„Wenn man keinen Grund hat, irgendeines der Versuchsergebnisse für wahrscheinlicher als die anderen zu halten, dann sind alle gleichwahrscheinlich und man kann die Regel 'günstige durch mögliche' anwenden.“[96]

94 Siehe [4], S. 98.
95 Siehe [4], S. 98.
96 Blaise Pascal zitiert nach [4], S. 99.

Die Objektivierung des unzureichenden Grundes zeigt Borovcnik durch die physikalische Symmetrie einer Situation bzw. eines Glücksspielgeräts auf:

> „Der Würfel von oben ist geometrisch symmetrisch und vom Material her homogen; man hat daher keinen Grund, irgendeines der Ergebnisse bevorzugt zu erwarten. Die physikalische Symmetrie eines Glückspiels wird zu einem entscheidenden Argument für die Anwendung der Laplaceschen Definition von Wahrscheinlichkeit.“[97]

Die Laplace-Wahrscheinlichkeit kann man folgendermaßen festhalten. Zunächst wird der Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum definiert:

Definition:

> „Sei Ω eine endliche Ergebnismenge mit m Elementen, sei also $|\Omega| = m$.
> Dann heißt die durch $P(\{w\}) = 1/|\Omega| = 1/m$, für alle $w \in \Omega$,
> definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung Laplace-Verteilung oder Gleichverteilung.
> $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ heißt Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum.“[98]

Daraufhin lässt sich ein Satz formulieren, der die Laplace-Wahrscheinlichkeit zeigt.

Satz:

> „Sei Ω die Ergebnismenge eines Laplace-Wahrscheinlichkeitsraumes mit m Elementen und A ein Ereignis aus $\wp(\Omega)$ mit $|A| = g$ Elementen. Dann gilt
> $P(A) = |A| / |\Omega| = g/m$,
> d.h.: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A in einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum ist gleich dem Quotienten
> Anzahl $g(A)$ der für das Ereignis A günstige Fälle / Anzahl m der möglichen Fälle.
> Diese Wahrscheinlichkeit heißt Laplace-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.“[99]

Diese Darstellung der Laplace-Wahrscheinlichkeit eignet sich natürlich nicht für den Unterricht in der Unterstufe.

97 Siehe [4], S. 99.
98 Siehe [12], S. 60.
99 Siehe [12], S. 61.

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Laplace'schen Formel nimmt eine wichtige Stellung gerade zu Beginn des schulischen Wahrscheinlichkeitsunterrichts ein. Dabei ist es wichtig klarzustellen, dass es sich hierbei wie bei der Vorstellung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit um keine eindeutige Definition der Wahrscheinlichkeit handelt. Vielmehr stellt die Laplace'sche Formel eine Vorschrift zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit unter eingeschränkten Bedingungen dar. Häufig werden die für entsprechende Experimente verwendeten Zufallsgeneratoren als Laplace-Gerät, Laplace-Würfel oder Laplace-Münze bezeichnet.
Die notwendige Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit aller Einzelergebnisse, d.h. der eingeschränkte Anwendungsbereich dieser Berechnungsmethode kann im Unterricht beispielsweise durch das Werfen unsymmetrischer Objekte thematisiert bzw. verdeutlicht werden.
Dazu wird die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Lagebeziehung beispielsweise bei Reißnägeln oder Streichholzschachteln gestellt. Es zeigt sich, dass derartige Wahrscheinlichkeiten nicht mittels Laplace gelöst werden können. Hier stellt die Vorstellung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit einen Ausweg dar.[100]

Dadurch wird deutlich, dass die SchülerInnen in einer konkreten Situation erkennen müssen, ob sie die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Laplace'schen Formel oder mit Hilfe der Abschätzung der relativen Häufigkeit oder mit Hilfe beider bestimmen können.
Dies untermauert die Annahme, dass es empfehlenswert ist, beide Vorstellungen für Wahrscheinlichkeiten zeitnah zu behandeln.
Außerdem gibt es in geeigneten Fällen die Möglichkeit nicht gleichmögliche Einzelergebnisse in gleichmögliche Ereignisse umzustrukturieren und somit die Anwendbarkeit der Laplace'schen Berechnungsmethode auszuweiten. Dies kann man anhand des Glücksrads im Schulunterricht zeigen.[101]

100Siehe [8], S. 42.
101Siehe [11], S. 36.

Anhand der vorauszusetzenden Symmetrie der Zufallsgeräte eignen sich Glücksspiele für die Anwendung der Vorstellung der klassischen Wahrscheinlichkeit besonders gut. Als Beispiele sind Roulette, Würfelspiele, Kartenspiele und Münzspiele zu nennen.

Dennoch können gerade bei Glücksspielen Unterschiede zwischen den intuitiven Vorstellungen der Heranwachsenden und den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten der Einzelergebnisse auftreten, so dass die Gleichwahrscheinlichkeit nicht erkannt wird. Oft wird beispielsweise beim Werfen eines Würfels die Meinung vertreten, dass die Zahlen 6 und 1 seltener erzielt werden als die Zahlen 3 und 4. Diese falschen Annahmen bzw. Eindrücke muss man im Schulunterricht thematisieren und widerlegen. Dabei ist es hilfreich mögliche Gründe für die falschen intuitiven Vorstellungen zu geben.[102]

Zum einen bedeutet die Wahrscheinlichkeit $p = 1/6$ für das Eintreten des Ereignisses 6 beim Werfen eines Würfels nicht, dass bei 6 Würfen tatsächlich einmal 6 auftritt. Schließlich sagt die Wahrscheinlichkeit nicht das Ergebnis voraus, sondern sie zeigt lediglich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses auf. Dennoch kann das Ergebnis anders sein. Hier wird die Bedeutung des Zufalls sichtbar.

Zum anderen bleiben unerwünschte bzw. unerwartete Ergebnisse meist besser in Erinnerung als erwünschte oder erwartete. Wenn Pokerspieler beispielsweise bei der Variante Texas Hold'em mit der besten Starthand AA verlieren, so bleibt ihnen das oft stärker im Gedächtnis als wenn sie mit der Starthand AA erwartungsgemäß und der Wahrscheinlichkeit entsprechend gewinnen.

Insgesamt verdeutlichen diese theoretischen Ausführungen die Komplexität und die Herausforderungen, die der schulischen Vermittlung der Berechnungsmethode für Wahrscheinlichkeiten von Laplace zukommen.

102Siehe [4], S. 100-101.

3.2.2. Laplace-Wahrscheinlichkeit in der Unterstufe

Nachdem die SchülerInnen bereits mit Hilfe der relativen Häufigkeit die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses 3 beim Werfen eines symmetrischen Würfels bestimmt haben, wird nun dieses Beispiel verwendet um den Begriff der Laplace-Wahrscheinlichkeit einzuführen. Dabei wird zunächst das Laplace-Gerät definiert.

Als erster Schritt wird im Plenum mit den SchülerInnen besprochen, dass bei einer idealen Münze aus Symmetriegründen folgt, dass Zahl und Kopf/Wappen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten: $P(Z) = P(K) = ½$.

Anschließend wird den SchülerInnen folgende Aufgabe gestellt:

Ein symmetrischer Würfel wird geworfen. Überlege mit deinem Partner bzw. deiner Partnerin, welche der folgenden zwei Möglichkeiten richtig ist und begründe deine Wahl!

(1) Alle Zahlen treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf. Daraus folgt:
    $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$
(2) Die Zahlen 2,3,4,5 treten häufiger auf als die Zahlen 1 und 6. Das bedeutet, dass die Zahlen 1 und 6 eine geringe Wahrscheinlichkeit haben als die Zahlen 2,3,4,5.

Im Anschluss daran werden die Ergebnisse der Aufgabe im Plenum besprochen und es wird geklärt, wann man von einem Laplace'schen (Zufalls-)Experiment bzw. einem Laplace-Gerät sprechen darf.

> „Ein Zufallsexperiment, bei dem jedes der n ($n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$) möglichen Versuchsergebnisse ω mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $P(\omega) = 1/n$ auftritt, heißt LAPLACE'sches (Zufalls-)Experiment.

Das zugehörige Zufallsgerät heißt LAPLACE-Gerät.“[103]

Eine derartige formale Definition des Laplace'schen (Zufalls-) Experiment ist für den Schulunterricht in der Unterstufe nicht sinnvoll. In der Sekundarstufe I kann man stattdessen folgenden Merksatz bzw. Definition festhalten:

Ein Zufallsexperiment, bei dem jedes mögliche Versuchsergebnis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit P auftritt, heißt Laplace'sches Experiment oder Zufallsexperiment. Das verwendete Zufallsgerät (z.B. Münze oder idealer Würfel) heißt Laplace-Gerät.[104]

Wie man leicht erkennen kann, weicht diese Merkregel kaum von der obigen Definition ab. Dennoch ist es wichtig, in der Unterstufe möglichst auf Formal- bzw. Symbolsprache zu verzichten. Die Verwendung der Symbolsprache kann das Verständnis auf Seiten der SchülerInnen erschweren. Diese Wahrscheinlichkeitsbegriffe werden in der Sekundarstufe II wieder aufgegriffen und können dann dort mittels Formalsprache umfangreich formuliert werden. Außerdem ist es empfehlenswert, kurz die Begriffe Zufallsexperiment sowie Zufallsgerät zu erläutern.

Daraufhin kann nun die Laplace-Wahrscheinlichkeit (klassische Wahrscheinlichkeit) eingeführt werden:

$P(A)$ = Anzahl der für A günstigen Versuchsergebnisse / Anzahl der möglichen Versuchsergebnisse = g/m

Hier muss die Symmetrie des Geräts bzw. die Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Versuchsergebnisse unbedingt erfüllt sein. Erst dann darf man zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit die Formel von Laplace verwenden. Außerdem liegt dieser Berechnung immer eine endliche Menge

103Siehe [6], S. 170.
104Siehe [6], S. 170-171.

zugrunde.

Im Anschluss an die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nach Laplace ist die Berechnung entsprechender Wahrscheinlichkeiten zu üben. Dazu werden zunächst einige Beispiele gemeinsam gelöst, bevor die SchülerInnen weitere Aufgaben als Einzelarbeit oder als Hausübung erledigen. Diese Aufgaben können beispielsweise wie folgt aussehen:

Ein idealer/ symmetrischer Würfel wird geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ergebnisse

(1) 1 oder 6
(2) gerade
(3) ungerade
(4) 2,3,5 oder 6
(5) 7
(6) 1,2,3,4,5 oder 6
(7) > 3
(8) negativ
(9) <5
(10) ein Vielfaches von 2
(11) ein Teiler von 50
(12) ≥ 1
(13) ≤ 3
(14) Primzahl
(15) durch 2 teilbar
(16) ≤7
(17) 4 oder 5

Im Zuge dieser Aufgaben wird ein unmögliches und sicheres Ereignis sowie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten definiert:
„Ist $A = \{\}$, so heißt A unmögliches Ereignis: $P(\{\}) = 0$
Ist $A = \Omega$, so heißt A sicheres Ereignis: $P(\Omega) = 1$“[105]
Ω … Ergebnismenge des Experiments, A … Ereignis

Auch in Bezug auf die Definition des unmöglichen bzw. sicheren Ereignisses gilt es, eine behutsame Formulierung für die Lernenden der Unterstufe zu finden. Diese kann beispielsweise folgendermaßen lauten:

105Siehe [6], S. 171.

Unmögliches Ereignis:
Ein Ereignis *A* heißt unmöglich, wenn das Eintreten des Ereignisses *A* ausgeschlossen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit eines unmöglichen Ereignisses *A* ist 0: $P(A) = 0$.
Sicheres Ereignis:
Ein Ereignis *A* heißt sicher, wenn das Eintreten des Ereignisses *A* als sicher gilt. Die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses *A* ist 1: $P(A) = 1$.

Es gibt zahlreiche Übungsaufgaben, die nun bearbeitet werden können. Um die Kreativität der SchülerInnen zu fördern kann man sie veranlassen, ein eigenes Beispiel zu verfassen, das durch die Laplace'sche Berechnungsmethode gelöst wird. Außerdem gibt es eine Vielfalt an spielerischen Methoden, die den Wahrscheinlichkeitsbegriff und dessen Berechnung (nach Laplace) vertiefen bzw. üben. Beispielsweise kann anhand der durch die SchülerInnen entwickelten Aufgaben sowie deren Lösungen ein Memory gebastelt werden. Zum einen erzeugt die Durchführung des Spiels Memory Motivation und Freude auf Seiten der Heranwachsenden. Zum anderen werden mathematische Sachverhalte und Berechnungen zum klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff abgeprüft.

Schließlich ist es unabdingbar die Grenzen der klassischen Wahrscheinlichkeitsberechnung anhand eines konkreten Beispiels aufzuzeigen. Ich wähle in den folgenden Ausführungen eine Aufgabe zu Reißzwecken. Ebenfalls sind andere unsymmetrische Objekte denkbar wie beispielsweise eine Streichholzschachtel.
Jeder Schüler und jede Schülerin erhält einen Reißnagel. Dazu werden ihnen folgende Fragen gestellt:

Beim Werfen eines Reißnagels sind zwei Ereignisse möglich: „Spitze nach unten“ oder „Spitze nach oben“. Du möchtest die Wahrscheinlichkeit *P* für das Ereignis „Spitze nach oben“ bestimmen. Welche Möglichkeiten gibt es, um Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen? Welche Methode wählst du, um

die entsprechende Wahrscheinlichkeit zu ermitteln?
Überlege dazu, ob der Reißnagel ein Laplace-Gerät ist! Begründe deine Antworten kurz!

Zunächst denken die SchülerInnen selbstständig über die Lösung der Aufgabe nach. Dann werden die Ideen im Plenum gesammelt und anhand eines ausführlichen Unterrichtsgesprächs wird mit Hilfe des Lehrers bzw. der Lehrerin festgestellt, dass die Berechnungsmethode von Laplace nicht anwendbar ist. Der Reißnagel stellt kein Laplace-Gerät dar, d.h. die Bedingung der Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Ausgänge ist nicht erfüllt. Deshalb kann die entsprechende Wahrscheinlichkeit P nur durch Schätzen mittels relativer Häufigkeiten fixiert werden. Hier müssen also die Lernenden die Vorstellung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit, d.h. den sogenannten naiven Wahrscheinlichkeitsbegriff, verwenden. Dabei ist man allein auf die Versuchsergebnisse angewiesen.
Allerdings sind für das Reißnagelexperiment bestimmte Annahmen zu treffen: Die Reißnägel dürfen sich im Experimentverlauf nicht zu stark verändern bzw. abnutzen. Außerdem müssen sie alle identisch fabriziert sein. Zusätzlich müssen die Versuche unabhängig voneinander durchgeführt werden. Es darf also keine bestimmte Strategie beim Werfen geben, sondern die einzelnen Würfe müssen rein zufällig erfolgen.[106]
Wichtig bei dieser Aufgabe ist nicht die tatsächliche Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Spitze nach oben“, sondern die Einsicht der SchülerInnen darin, dass die Berechnungsmethode von Laplace hier nicht anwendbar ist, da keine Gleichwahrscheinlichkeit der Ausgänge vorliegt. Dadurch entsteht die Einsicht, dass die Anwendbarkeit eines speziellen Wahrscheinlichkeitsbegriffs immer kontext- und situationsgebunden ist. Man muss in der Situation zunächst erst feststellen, welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff anzuwenden ist.

Nachdem die Begriffe klassische wie naive Wahrscheinlichkeit geklärt sind,

106Siehe [8], S. 42.

ist es nun sinnvoll einige weiterführende Aufgaben zu stellen. Dabei sollen die Anwendbarkeit sowie Unterschiede oder auch Gemeinsamkeiten beider Wahrscheinlichkeitsbegriffe im Fokus stehen. Ziel ist, das Verständnis für die Begriffe zu vertiefen bzw. zu stärken sowie Fehlvorstellungen zu minimieren. Hilfreich ist eine abwechslungsreiche Gestaltung der Schulübungen.

3.3. Klassische und naive Wahrscheinlichkeit – ein Vergleich durch Aufgaben

Wie gezeigt, wird bei der Einführung der Wahrscheinlichkeitsbegriffe großer Wert auf die eigenständige Durchführung der Versuche durch die SchülerInnen gelegt. Dennoch ist die Annahme, dass sich durch umfangreiche Versuchsreihen passende Vorstellungen über Wahrscheinlichkeiten bei Lernenden automatisch entwickeln, falsch.[107]
Vielmehr muss immer wieder anhand geeigneter Beispiele über Wahrscheinlichkeiten nachgedacht, reflektiert und gesprochen werden. Dabei gilt es die Eigenschaften, Bedingungen, Gemeinsamkeiten und Unterschiede des frequentistischen und klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs aufzuzeigen.
Über den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff wurde in der Literatur sehr ausführlich diskutiert. Wichtig ist, dass die Heranwachsenden die Einsatzmöglichkeit dieser Vorstellung sowie ihrer Berechnungsmethode kennen und verstehen. Hier ist vor allem die oft erwähnte Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Ausgänge das entscheidende Kriterium, dass die Anwendbarkeit dieses Wahrscheinlichkeitsbegriffs bedingt. Falls die Voraussetzungen der Einsetzbarkeit der Vorstellung der Wahrscheinlichkeit nach Laplace erfüllt sind, zeigt sich der große Vorteil dieser Anschauung: die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten lassen sich mittels der Laplace'schen Berechnungsmethode relativ einfach und schnell bestimmen. Allerdings ist eben die Anwendbarkeit dieser Berechnungsmethode begrenzt.
Im Gegensatz dazu beinhaltet die sogenannte naive Wahrscheinlichkeit einen sehr umfangreichen Anwendungsbereich. Dabei muss aber im Schulunterricht klargestellt werden, dass bei der Durchführung der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels Abschätzen über relative Häufigkeiten einige Probleme auftreten können. Oftmals wird fälschlicherweise angenommen, dass die entsprechenden

107Siehe [8], S. 41.

Wahrscheinlichkeiten bereits bei 100 Versuchen eines Zufallsexperiments abgeschätzt werden können. Dies entspricht aber nicht der Realität. Die Ergebnisse, die in einigen Lehrbüchern für 100 Versuche dargestellt werden, erfordern in Wirklichkeit sehr umfangreiche bzw. ausgedehnte Versuchsreihen. In Bezug auf den Münzwurf ist beispielsweise zu thematisieren:
„Das Beste, das man bei 100 Versuchen mit einer Sicherheit von 95% erreichen kann, ist ein Intervall der relativen Häufigkeiten von etwa 0,40 bis 0,6, aber das kann man kaum Nähe von ½ nennen.“[108]
Dies verdeutlicht, dass die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten anhand relativer Häufigkeiten sehr aufwendig ist. Diese Tatsache, dass man dabei sehr lange Versuchsreihen braucht, kann den Lernenden sehr gut durch die Simulation der Zufallsexperimente mittels Programmen mit Tabellenkalkulation – Microsoft Excel – gezeigt werden. Zusätzlich sind bei jedem Experiment inhaltliche Überlegungen wie Vorannahmen zum vorliegenden Zufallsgegenstand unerlässlich. Beim zuvor beschriebenen Reißnagelexperiment muss beispielsweise geklärt werden, ob es sich um ein Zufallsexperiment handelt und ob die Beschaffenheit des Reißnagels konstant bleibt. [109]

Damit steht fest, sowohl der klassische als auch der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff beinhalten Vor- und Nachteile. Beide Vorstellungen nehmen eine wichtige Funktion in der Wahrscheinlichkeitstheorie ein und es ist sinnvoll beide Begriffe zeitnah im Unterricht einzuführen. Zum einen wird dadurch die Uneindeutigkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gezeigt. Zum anderen ergänzen sich beide Vorstellungen, d.h. sie kompensieren wechselseitig Defizite, die bei Anwendung der jeweils anderen Konzeption auftreten. Für die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs werden also gleichzeitig beide Positionen gebraucht:[110]

108Siehe [8], S. 42.
109Siehe [8], S. 42.
110Siehe [8], S. 43.

„Sowohl der Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit muß sofort auf reale Zufallsphänomene bezogen, als auch der Zusammenhang von Gleichwahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit diskutiert werden, will man nicht einer Vorgehensweise verfallen, welche die Wahrscheinlichkeitstheorie durch Kombinatorik ersetzt; umgekehrt muß der Begriff der relativen Häufigkeit auf dem Hintergrund inhaltlicher und gegenstandsspezifischer Aspekte des jeweiligen Zufallsgenerators gesehen werden.“[111]

In der praktischen Umsetzung im Schulunterricht gilt es nun, die Merkmale der beiden Wahrscheinlichkeitsbegriffe sowie deren Anwendbarkeit den SchülerInnen zu vermitteln. Dazu ist zweierlei nötig. Einerseits können die Lernenden entsprechende Einsichten durch Bearbeitung adäquater Beispiele aufbauen. Diese Beispiele sollten sowohl handlungs- als auch denkorientiert gestaltet sein. Andererseits müssen diese Beispiele durch Erklärungen und Diskussionen anhand zahlreicher Unterrichtsgespräche thematisiert, mögliche Fehlvorstellungen überprüft und die zentralen Begriffe immer wieder aufgegriffen und erweitert werden. Erst langsam können sich entsprechende Grundvorstellungen und tiefe Einsichten entwickeln.

Im folgenden werden einige Beispiel gezeigt, die die Begriffe naive sowie klassische Wahrscheinlichkeit vertiefen sowie deren Anwendungsbereich ausbauen.

1. Beispiel: Laplace oder relative Häufigkeit

Die Lernenden werden in Gruppen eingeteilt. Die Lehrkraft stellt jeder Gruppe einige Zufallsgeräte zur Verfügung. Mögliche Zufallsgeräte (Würfel) sind:

Oktaeder-Würfel, unsymmetrischer Würfel, Dodekaeder-Würfel, Streichholzschachtel, Plättchen, Stein (mit markierter Fläche), Spielkarte, Beutel/Sack (mit entsprechenden gleichgroßen Murmeln), Buchstaben-

111Siehe [8], S. 43.

Würfel, Farbwürfel, Kreisel.

Zunächst werden einige Bezeichnungen – Oktaeder-Würfel – durch die Lehrkraft geklärt und die Verwendungsmöglichkeit des Beutels (mit Murmeln) – Ziehen mit Zurücklegen – illustriert. Anschließend untersuchen die SchülerInnen die ausgeteilten Zufallsgeräte nach ihrer Anwendbarkeit in Bezug auf die bekannten Wahrscheinlichkeitsbegriffe. Ihre Ergebnisse halten die Heranwachsenden auf folgendem Arbeitsblatt fest:

<u>Aufgabe:</u>
Untersucht gemeinsam die Zufallsgeräte! Stellt dabei fest, wie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden können und begründet eure Aussage. Falls die Berechnungsmethode nach Laplace anwendbar ist, gebt dazu ein einfaches Beispiel an! Tragt eure Ergebnisse in das Arbeitsblatt ein! Die Ergebnisse werden dann den MitschülerInnen präsentiert.

Zufallsgerät	Laplace	Relative Häufigkeit	Begründung	Beispiel (falls Laplace)
6-seitiger (symmetr.) Würfel	ja	ja	Symmetrie, Gleichwahrschein-lichkeit	$P(1) = 1/6$
Streichholz-schachtel	nein	ja	Keine Symmetrie, keine Gleichwahrschein-lichkeit	
Beutel	ja	ja	Gleichwahrschein-lichkeit Ziehen mit Zurücklegen	$P(\text{rot}) = 1/3$
Oktaeder-Würfe	ja	ja	Symmetrie, Gleichwahrschein-lichkeit	$P(6) = 1/8$
Stein	nein	ja	Keine Symmetrie, keine Gleichwahrschein-lichkeit	

Bei der Durchführung dieser Aufgabe ist es sinnvoll, bestimmte Zufallsgeräte wie Streichholzschachtel und Beutel jeder Gruppe zuzuteilen. Andere können durch ähnliche Geräte variiert werden, z.B. Oktaeder- oder Dodekaeder-Würfel.
Ziel ist, dass die Lernenden die Wahrscheinlichkeitsbegriffe richtig anwenden können.
Durch eine abschließende Präsentation im Plenum werden mögliche Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten sichtbar. Gruppenarbeiten unterstützen sowie vertiefen sowohl kommunikative als auch sprachliche Fähigkeiten. „Jedenfalls kann die Gruppenarbeit die zusammenhängende sprachliche Darstellung mathematischer Sachverhalte fördern.“[112] Außerdem wird das Verständnis der Begriffe geprüft.
Wichtig bei Kleingruppenarbeit und Präsentation ist, dass die Lehrkraft Hilfestellung leistet. Um den SchülerInnen den Einstieg in die Aufgabe zu erleichtern, ist es ratsam, die Ergebnisse für den symmetrischen 6-seitigen Würfel vorzugeben. So können sich die Lernenden an diesem exemplarischen Beispiel orientieren.

In der Folge können die Merkmale beider Wahrscheinlichkeitsbegriffe anhand einer Tabelle gegenüber gestellt werden. Dabei werden sowohl Unterschiede als auch Gemeinsamkeiten aufgezeigt. Da diese Tabelle im Schulheft festgehalten wird, können die SchülerInnen jeder Zeit kurz die wichtigen Facetten der Wahrscheinlichkeitsbegriffe nachschlagen und so mögliche Unklarheiten selbstständig richtig stellen.
Beim Aufstellen der Übersicht muss darauf geachtet werden, dass die Heranwachsenden den Hintergrund der einzelnen Schlagworte verstehen. Außerdem ist darauf zu achten, dass die sprachliche Darstellung möglichst einfach und klar gewählt wird.

112Siehe [14], S. 161.

Laplace/ klassische Wahrscheinlichkeit	Naive/frequentistische Wahrscheinlichkeit
einfache Berechnungsmethode	lange Versuchsreihe erforderlich
begrenzter Anwendungsbereich	großer Anwendungsbereich
Voraussetzung: Laplace-Gerät Symmetrie Gleichwahrscheinlichkeit aller Ausgänge	Voraussetzung: anhaltend gleiche Bedingungen
Voraussetzung: Zufallsexperiment	Voraussetzung: Zufallsexperiment
sicheres Ereignis A => $P(A) = 1$	Sicheres Ereignis A => $P(A) = 1$
unmögliches Ereignis A => $P(A) = 0$	unmögliches Ereignis A => $P(A) = 0$
$0 \leq P(A) \leq 1$	$0 \leq P(A) \leq 1$
alle Einzelergebnisse addiert ergeben 1 z.B. $P(A)+P(B) = 1$	alle Einzelergebnisse addiert ergeben 1 z.B. $P(A)+P(B) = 1$

2. Beispiel: Aussagen: wahr-falsch

Um die Vorstellungen über Wahrscheinlichkeiten sowie deren Bedingungen zu festigen, kann den SchülerInnen beispielsweise folgendes Arbeitsblatt gegeben werden. Dabei sollen sie wahre und falsche Aussagen zu den Begriffen erkennen bzw. gegebenenfalls richtig stellen. Dadurch werden mögliche Fehlvorstellung sichtbar, die in der Folge durch die Lehrkraft geklärt werden.

Aufgabe

Lest euch in Einzel- oder Partnerarbeit folgende Aussagen genau (Wort für Wort) durch!

Entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind! Falls eine Aussage falsch ist, versucht sie durch das Austauschen einzelner Wörter richtig zu stellen! Bei Schwierigkeiten nehmt ihr das Schulheft – tabellarische

Gegenüberstellung der Wahrscheinlichkeitsbegriffe - zu Hilfe!

	wahr	falsch
Relative Häufigkeit wird durch den Quotienten aus absoluter Häufigkeit und Anzahl der Versuche berechnet.		
Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, dessen Ausgang vorhersagbar ist.		
Durch die Laplace'sche Berechnungsmethode können die Wahrscheinlichkeiten für den Münzwurf bestimmt werden.		
Der Reißnagel ist ein Laplace-(Zufalls)Gerät.		
Es gibt Zufallsexperimente, bei denen sowohl der klassische als auch der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff angewendet werden kann.		
Ist das Eintreten des Ereignisses *A* unmöglich, dann ist $P(A)=1$.		
Eine Wahrscheinlichkeit *P* ist nie größer als die Zahl 2.		
Durch das 10-malige Werfen eines Würfels kann man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis 2 durch die relative Häufigkeit abschätzen.		
Es gibt nur eine Methode, um Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.		
Bei einem Zufallsexperiment können keine Voraussagen über die tatsächlichen Ergebnisse getroffen werden.		
Der Oktaeder-Würfel ist ein Laplace'sches (Zufalls)Gerät.		
Beim Werfen einer Streichholzschachtel und eines Würfels können die Wahrscheinlichkeiten durch Laplace berechnet werden.		
Sind alle möglichen Versuchsausgänge gleichwahrscheinlich, so kann der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff angewendet werden.		
Wird ein unsymmetrischer 6-seitiger Würfel geworfen, dann gilt: $P(3) = 1/6$.		
Wenn Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten abgeschätzt werden, ist es gleichgültig, ob ein Zufallsexperiment zugrunde liegt.		
Ist das Eintreten des Ereignisses *A* sicher, dann gilt:		

$P(A) = 1$		

Dieser Aufgabentyp dient u.a. dazu, das exakte Lesen zu üben. Falls die SchülerInnen eine Aussage als falsch identifizieren, sollen sie überlegen, wie die entsprechende Aussage zu korrigieren ist. Das Arbeitsblatt ist dazu geeignet, das Wissen über Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten zu überprüfen. Schnell wird für die Lehrkraft sichtbar, in wie weit bei den SchülerInnen Kenntnisse über die diskutierten Wahrscheinlichkeitsbegriffe vorliegen.

Solche Aufgaben werden inzwischen vermehrt im Mathematikunterricht genutzt, da sie das Wissen der Lernenden überprüfen und die Motivation der Heranwachsenden bei derartigen Übungstypen groß ist. Ähnliche Aufgaben finden sich ebenso in allgemeingültigen Tests (Pisa, Bildungsstandard) wider. Es ist sinnvoll, die SchülerInnen mit verschiedenen Aufgabentypen zu konfrontieren.

3. Beispiel: Brief schreiben

Den SchülerInnen wird folgende Aufgabe als Hausübung oder als Einzelarbeit im Schulunterricht gestellt:

Schreibe einen Brief an einen kranken Mitschüler oder eine kranke Mitschülerin! Erläutere ihm bzw. ihr einen Wahrscheinlichkeitsbegriff, d.h. du kannst dich entweder für den klassischen oder für den naiven Wahrscheinlichkeitsbegriff entscheiden. Versuche durch exakte Beschreibungen, Begründungen und Beispiele ihm bzw. ihr den Begriff verständlich zu machen! (Als Unterstützung kannst du das Schulheft verwenden.)

Es ist wichtig, dass die Lernenden zu eigenständigen schriftlichen und mündlichen Sprachproduktionen auch im Mathematikunterricht aufgefordert werden. Denn Sprache dient nicht nur zur Begriffsbezeichnung, sondern „auch als Strukturierungshilfe für begriffliche Erfahrungen sowie als Instrument der Darstellung und Übermittlung von Begriffsbedeutungen".[113] Deshalb muss der Umgang mit Sprache geübt und die sprachlichen Fähigkeiten im Mathematikunterricht trainiert werden. Dabei ist allerdings klar, dass i.a. keine vollständigen oder exakten Formulierungen entstehen, die alle Aspekte des jeweiligen Wahrscheinlichkeitsbegriffs abdecken.[114]

Durch die Aufgabenstellung – Brief schreiben – können Hemmnisse abgebaut werden. Im Normalfall werden SchülerInnen durch Formulierungen abgeschreckt, in denen Begriffsbeschreibungen oder Definitionen explizit verlangt werden.

Diese Hausübung kann in der folgenden Stunde durch einzelne Lernende laut vorgelesen werden. Selbstverständlich ist wie bei allen Hausübungen wichtig, dass der Lehrende sie genau prüft. Dadurch erlangt er Informationen über die sprachlichen, fachsprachlichen und mathematischen Kenntnisse der SchülerInnen. Außerdem kann die Lehrkraft hier anhand der Briefe feststellen, welche Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeiten existieren und mögliche Fehlvorstellungen erkennen.

Diese sprachliche Form ist untypisch für den Mathematikunterricht und schafft so Abwechslung. Es ist ebenso eine gute Möglichkeit, um einen fächerübergreifenden Unterricht zwischen den Fächern Mathematik und Deutsch zu gestalten. Gerade fächerübergreifender Unterricht oder Projekte nehmen eine immer größere Rolle im Schulalltag ein. Die Zusammenarbeit der Lehrkräfte ist gefordert.

4. Aufgabe: Stein-Schere-Papier

Das Knobelspiel Stein-Schere-Papier – auch bekannt als Schnick-Schnack-

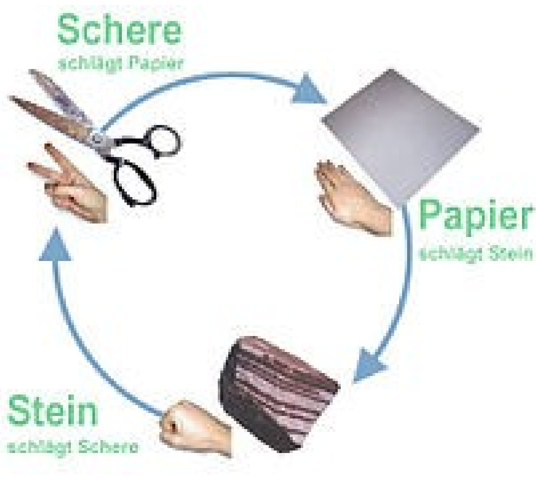
113Maier 1986 zitiert nach [1], S. 159.
114Siehe [9], S. 72.

Schnuck – ist bei den Heranwachsenden weit verbreitet und beliebt. Das Spiel funktioniert folgendermaßen: Zwei Akteure formen gleichzeitig mit der Hand einen der Begriffe Stein (Faust), Schere (gespreizter Daumen und Zeigefinger) oder Papier (flache Hand). Dabei siegt Stein über Schere (Stein zerschlägt Schere), Schere über Papier (Schere schneidet Papier) und Papier über Stein (Papier wickelt Stein ein). Falls beide SpielerInnen den gleichen Begriff anzeigen, so endet das Spiel bzw. die Runde unentschieden.[115]

Ist geklärt, dass jeder Lernende die Spielweise kennt, so kann folgende Aufgabe gestellt werden:

Aufgabe

Anna und Max wollen zusammen ins Kino. Da sie sich nicht auf einen Film einigen können, beschließen sie das Spiel Stein-Schere-Papier zu nutzen. Die Siegerin bzw. der Sieger darf den Film aussuchen. Gespielt wird eine Runde, beide dürfen die Symbole Stein, Papier, Schere verwenden. Sowohl Max als auch Anna wählen die dargestellten Begriffe zufällig aus, d.h. sie spielen ohne Taktik bzw. System. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einer Runde kein Sieger bzw. keine Siegerin feststeht?



116

115Siehe [12], S. 49.
116Siehe [23].

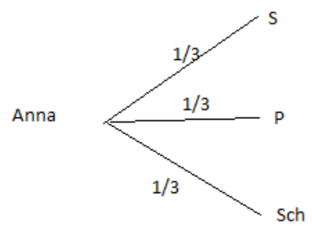
Da dieses Beispiel wie das Werfen zweier Würfel neue Herausforderungen für SchülerInnen darstellt, ist es sinnvoll, dieses gemeinsam anhand eines Lehrer-Schüler-Gesprächs zu erarbeiten.
Zunächst sollte man klären, dass dieses Spiel ein Zufallsexperiment ist, da die SpielerInnen ihre Begriffe laut Angabe zufällig auswählen. Außerdem sind die möglichen Ausgänge gleichwahrscheinlich. Sind diese Bedingungen gezeigt, so kann man für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten die Laplace'sche Methode verwenden. Es ist wichtig, dass die Lernenden diese Voraussetzungen erkennen und verstehen.
Als nächsten Schritt sollte man zuerst die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für Max und Anna bestimmen:

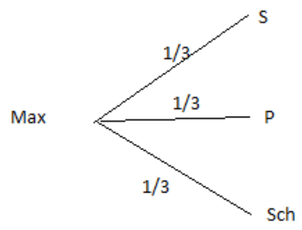
Jeder Spieler bzw. jede Spielerin wählt aus 3 vorgegebenen (möglichen) Begriffen einen (günstigen) aus.
Anna: $P(S) = 1/3$, $P(P) = 1/3$, $P(Sch) = 1/3$.
Max: $P(S) = 1/3$, $P(P) = 1/3$, $P(Sch) = 1/3$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Anna bzw. Max einen bestimmten Begriff darstellen, ist 1/3.

Jetzt kann man die Aufgabe, dass das Spiel unentschieden endet, lösen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten der Illustration. Zum einen kann die Lösung anhand eines Baumdiagramms abgebildet werden. Zum anderen kann man durch das Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten anhand einer Tabelle den Lösungsweg aufzeigen. Welche der beiden Varianten gewählt wird, hängt vom Vorwissen der Lernenden sowie von der Funktion der Aufgabe für den Unterrichtsfortschritt ab. Es kann ebenso sinnvoll sein, beide Möglichkeiten aufzuzeigen.

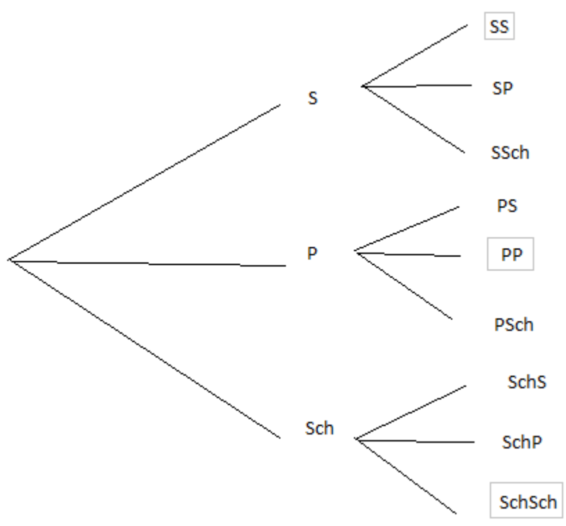
1. <u>Baumdiagramm</u>

Bei der Illustration mittels Baumdiagramms kommt es sehr auf die Vorkenntnisse der SchülerInnen über Baumdiagramme an. Wenigstens aus dem Bereich der Statistik sollte die Darstellungsart bekannt sein. Ob sie bereits auf Wahrscheinlichkeiten angewendet wurde, beeinflusst das weitere Vorgehen. Es ist sicherlich empfehlenswert das Baumdiagramm in zwei Schritten zu erstellen.





Als erstes werden die Baumdiagramme für die Einzelereignisse von Anna und Max gezeigt. Im Anschluss daran kann nun das Baumdiagramm für ein Unentschieden angefertigt werden.



Falls diese Darstellungsart für Wahrscheinlichkeiten das erste Mal verwendet wird, müssen alle Schritte ausführlichst besprochen werden. Außerdem sind die entsprechenden Regeln festzuhalten. In weiteren Aufgaben gilt es dann, diese Regeln anzuwenden, so dass die SchülerInnen ihre diesbezüglichen Kenntnisse bzw. Fertigkeiten festigen können.

2. Tabelle

Auch bei dieser Variante wird auf den Einzelwahrscheinlichkeiten für Anna und Max aufgebaut. Anhand der folgenden Tabelle können dann weitere Schlüsse für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, Spiel endet unentschieden, gezogen werden.

	Papier	Stein	Schere
Papier	*PP*	*SP*	*SchP*
Stein	*PS*	*SS*	*SchS*
Schere	*PSch*	*SSch*	*SchSch*

Aus der Tabelle lässt sich ablesen, dass neun mögliche Ereignisse eintreten können. Um ein Unentschieden zu erreichen, gibt es allerdings nur 3 Möglichkeiten. Deshalb kann man mittels Laplace schließen:
P(unentschieden) = g/m (günstige/mögliche) = 3/9 = 1/3.
Also endet das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von P = 1/3 durch ein Unentschieden.

Anhand dieses Beispiels wird die Problemstellung der Berechnung der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis beim Werfen zweier Würfel aufgezeigt und verständlich gemacht. Im Anschluss daran eignen sich Aufgaben, die die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten beim Werfen zweier Würfel in den Mittelpunkt stellen. Gerade die Veranschaulichung durch Tabellen ist eine gute Möglichkeit, um derartige Problemstellungen zu verdeutlichen.

Dieses Spiel Stein-Schere-Papier kann in Bezug auf subjektive Wahrscheinlichkeit nochmals thematisiert werden.

5. Aufgabe: Das Drei-Würfel-Problem

Grundsätzlich ist es empfehlenswert, im Unterricht auch historische Beispiele den SchülerInnen zu geben. Diese zeigen die Entwicklung der Mathematik auf und schließlich gibt es keine Wissenschaft ohne ihre Geschichte. Die historischen Aspekte gestalten das Mathematiklernen lebendig. Im Gegensatz dazu lässt laut Hans Freudenthal eine ahistorisch vermittelte Mathematik ein Zerrbild eines unattraktiven Fertigprodukts entstehen.[117]

Für SchülerInnen ist es meist überraschend, mit welch einfachen Mitteln früher Aufgaben sowie Problemstellungen gelöst wurden. Zudem wird deutlich, „dass Widersprüche zwischen Theorie und Erfahrung und theoretische Fehlschlüsse die Entwicklung einer Wissenschaft vorantreiben können."[118]

Aus diesen Gründen wird hier kurz das Drei-Würfel-Problem von Chevalier de Méré beschrieben. Meiner Ansicht nach ist dieses Beispiel durchaus für den Unterricht in der Sekundarstufe I geeignet, auch wenn die Lernenden sicherlich über ein gutes Verständnis der Wahrscheinlichkeitsbegriffe verfügen müssen.

Aufgrund theoretischer Überlegungen war Chevalier de Méré davon überzeugt, dass beim gleichzeitigen Werfen dreier symmetrischer (unterscheidbarer) Spielwürfel die Augensumme 11 und 12 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten, denn für beide gab es sechs verschiedene Möglichkeiten:

Augensumme 11: 4 – 4 – 3, 5 – 3 – 3, 5 – 4 – 2, 5 – 5 – 1, 6 – 3 – 2,

117Hans Freudenthal zitiert nach [12], S. 20.
118Siehe [12], S. 20.

6 – 4 - 1

Augensumme 12: 4 – 4 – 4, 5 – 4 – 3, 5 – 5 – 2, 6 – 3 – 3, 6 – 4 – 2,

6 – 5 – 1

Andererseits stellte Chevalier de Méré durch weitere Überlegungen fest, dass gerade in der Spielpraxis die Augensumme 12 seltener auftrat als die Augensumme 11, d.h. das Eintreten beider Ereignisse wies nicht dieselbe Wahrscheinlichkeit auf.[119]

Dieser Widerspruch, dass es nach den Überlegungen von de Méré zwei richtige Lösungsmöglichkeiten gibt, die zu verschiedenen Ergebnissen führten, wurde von Blaise Pascal (1623-1662) aufgeklärt. Er zeigte, dass man nicht nur die Gesamtsummen 11 und 12 betrachten darf, sondern vielmehr die Verteilungen der einzelnen Zahlen auf die drei unterscheidbaren Würfel berücksichtigen muss.

So ergeben sich – wenn man die Unterscheidbarkeit der Würfel berücksichtigt – für die Konstellation 6 – 3 – 2 (Augensumme11) sechs verschieden Realisierungen, während beispielsweise die Konstellation 4 – 4 – 4 (Augensumme 12) nur eine konkrete Realisierung gestattet.

6 – 3 – 2 (Augensumme 11): (6,3,2), (6,2,3), (3,2,6), (3,6,2), (2,3,6)

5 – 5 – 1 (Augensumme 11): (5,5,1), (5,1,5), (1,5,5)

4 – 4 – 4 (Augensumme 12): (4,4,4)

Aufgrund der unterschiedlichen Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten der einzelnen Konstellationen erkennt man: Wenn man alle Möglichkeiten addiert, so ergeben sich 27 Varianten für die Augensumme 11 und 25 Varianten für die Augensumme 12. Dadurch ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Augensumme 11 größer als die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Augensumme 12.[120]

Dieses Problem von de Méré konnte bereits im 13. Jahrhundert gelöst werden – siehe Kapitel 1. Dennoch griffen sowohl de Mére wie Pascal

119Siehe [12], S. 11-12.
120Siehe [12], S. 12-13.

diese Thematik erneut auf.
Dieses Beispiel kann man den SchülerInnen als Text vorgeben. Durch die Lektüre sollen sie die Problemstellung sowie deren Lösung verstehen. Anschließend geben sie mit eigenen Worten – mündlich oder schriftlich – das Drei-Würfel-Problem wider. Dies dient u.a. dazu, Textverständnis und Lesestrategien zu fördern bzw. zu üben. Auch im mathematischen Fachunterricht sollen historische Beispiele sowie fachsprachliche und alltagssprachliche Texte kennengelernt werden. Dabei ist es sinnvoll, dass die SchülerInnen mit vielfältigen Sprachprodukten konfrontiert werden.
Ob dieses Beispiel für die Unterstufe geeignet ist, hängt von den Fähigkeiten und dem Vorwissen der jeweiligen Schulklasse ab. Alternativ kann man diese Aufgabe in der beginnenden Oberstufe stellen. Auch Wahrscheinlichkeitsbegriffe müssen im Verlauf des Mathematikunterrichts in den einzelnen Schulstufen immer wieder aufgegriffen werden. Dadurch können erst passende Grundvorstellungen aufgebaut und die entsprechenden Begriffe gefestigt werden.

6. Aufgabe: Knobelspiel mit 2 Würfel

Diese Übungsaufgabe verfügt über eine umfangreiche Problemstellung, bei der sich die SchülerInnen mit den drei zentralen Begriffen Zufall, Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert auseinandersetzen. Durch die Gegenüberstellung theoretischer und experimenteller Ergebnisse wird der Zufallsbegriff thematisiert. Außerdem wird auf dem bisherigen Wissen und Verständnis zu Wahrscheinlichkeiten aufgebaut sowie anhand der theoretischen Lösung eine Vorstufe des Erwartungswertes verwendet. Dieses Beispiel trägt auf spielerische Weise dazu bei, Grundvorstellungen zu diesen drei Begriffen zu entwickeln bzw. zu festigen.[121]

121Siehe [16].

Aufgabe

> „Jede/ r von euch wählt eine Zahl von 2 bis 12.
> Ihr würfelt abwechselnd mit zwei Würfel und addiert nach jedem Wurf die Augenzahlen.
> Ist die Summe der Augenzahlen genau gleich der gewählten Zahl, erhält der/die Spieler/in diese Summe als Produkt gutgeschrieben.
> Weicht die Summe der Augenzahlen um 1 von der gewählten Zahl ab, erhält man eine um 1 kleinere Zahl als die Summe der Augenzahlen gutgeschrieben. Wer zuerst mindestens 30 erreicht, hat gewonnen. Welche Zahl sollte man wählen?“[122]

Diese von Hauer-Typpelt beschriebene Aufgabenstellung kann man entsprechend den Fertigkeiten der Lernenden variieren. Dadurch lässt sich diese Aufgabe – je nach Variation – sowohl im fortgeschrittenen Stochastikunterricht der Sekundarstufe II als auch am Beginn der schulischen Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Unterstufe durchführen.
Beispielsweise ist folgende Aufgabenstellung in der Sekundarstufe I möglich:

Aufgabe
Wähle zwei verschiedene Zahlen zwischen 2 und 12! Mit deinem Partner führst du folgendes Spiel durch:
Ihr werft abwechselnd zwei Würfel. Dabei addiert ihr beide Augenzahlen miteinander. Falls die Summe der Augenzahlen gleich einer von euch gewählten Zahl ist, so bekommt ihr diese Zahl als Punkte gutgeschrieben. Der Spieler bzw. die Spielerin, die zuerst mindestens 25 Punkte erreicht, gewinnt das Spiel.
Die Wahl welcher Zahlen ist günstig?

Diese Aufgabenstellung ist in der Sekundarstufe I erfolgreich zu bearbeiten. Die durch Hauer-Typpelt dargestellte Aufgabe wurde vereinfacht. Im folgenden wird gezeigt, wie die Lösung dieses Beispiels im Unterricht

122Siehe [16].

entwickelt werden kann. Dazu ist es empfehlenswert den SchülerInnen genaue Arbeitsanweisungen zu geben. Durch geeignete Zwischenschritte können die Lernenden diese Aufgabe relativ selbstständig bearbeiten, da die Komplexität der Fragestellung aufgelöst wird. Anhand dieses Beispiels kann die Lehrkraft das Wissen bzw. die Grundvorstellungen der SchülerInnen erkennen:
„Welche Aspekte in der Bearbeitung, in der Argumentation und in der Interpretation Berücksichtigung durch die Lernenden finden, gibt Aufschluss in welchem Maß Kompetenzen und Wissen gesichert vorhanden sind.“[123]

Aufgabe

Probiert das Spiel zu zweit aus und nehmt dafür mehrere verschiedene Zahlen her!

Nachdem die SchülerInnen das Spiel selbst durchgeführt haben, sollte ein kurzes Unterrichtsgespräch stattfinden. Dabei werden beispielsweise folgende Fragen diskutiert: Nach welchen Kriterien hast du deine Zahlen ausgewählt? Warst du über den Ausgang des Spiels überrascht und warum? Welche Zahlen sind deiner Meinung nach erfolgsversprechend? Versuche deine Antworten zu begründen![124]

Um derartige Fragen besser bzw. umfangreicher zu beantworten, ist es hilfreich eine Tabelle zu den erfolgreichen Zahlen aufzustellen:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Anhand einer solchen Tabelle kann in den einzelnen Zeilen durch

123Siehe [16].
124Siehe [16].

Ankreuzen gezeigt werden, mit welchen Zahlen die SchülerInnen das Spiel gewonnen haben. Sicherlich kommt dem Zufall sowie den Zahlen des Gegners dabei eine große Bedeutung zu. Dennoch können durch das Erfassen einer genügend großen Stichprobe Tendenzen dargestellt werden.[125]

Durch die Durchführung des Spiels, die dazu gesammelten Daten und die Analyse der Spielergebnisse im Unterrichtsgespräch sollen Einflussfaktoren für die Güte einer Zahl sichtbar werden. Die Spielergebnisse stellen also gute Ausgangspunkte dar, um die theoretischen Aspekte der Wahrscheinlichkeit anhand dieses Beispiels aufzuzeigen und mögliche Einflussfaktoren selbst zu erkennen bzw. zu formulieren.
Insgesamt soll folgendes klargestellt werden: Einerseits kommt es darauf an, ob eine Zahl leicht zu werfen ist. Andererseits ist es entscheidend, wie viele Punkte die geworfene Zahl bringt.[126]

Hier werden also erste Vermutungen für das Lösen der Ausgabenstellung getätigt. Diese Vermutungen müssen nun anhand theoretischer Überlegungen bestätigt oder widerlegt werden.
Zunächst ist klarzustellen, dass man anhand der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten zeigen kann, wie leicht oder schwer eine Zahl zu würfeln ist. Für die weitere Vorgehensweise ist es entscheidend, über welches Vorwissen der Wahrscheinlichkeitsbegriffe die SchülerInnen verfügen.
Falls sie über geringe Vorkenntnisse verfügen, ist es zwingend erforderlich, zunächst die Wahrscheinlichkeit über relative Häufigkeiten anzunähern, d.h. dass beispielsweise jeder Schüler 20 mal den Würfel wirft und notiert welche Augensummen erzielt werden. Über das Sammeln der Ergebnisse kann dann geschätzt werden, welche Zahlen häufig und welche Zahlen selten geworfen werden.

125Siehe [16].
126Siehe [16].

Sind ausreichende Kenntnisse über den klassischen sowie frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff vorhanden, kann man das Auszählen der relativen Häufigkeiten weglassen. Stattdessen kann man gleich den theoretischen Zugang über Laplace wählen.
Die SchülerInnen erhalten folgende Tabelle. Anhand dieser ist zu erkennen, wie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der Augensummen beim Werfen zweier Würfel verteilt sind:[127]

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Durch diese Tabelle berechnen die SchülerInnen zunächst die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der entsprechenden Summen der Augenzahlen. Außerdem stellen sie die zu erwartenden absoluten Häufigkeiten bei 36 Würfen dar. Nun ist geklärt, welche Zahlen leicht bzw. schwer zu würfeln sind.[128]

Im nächsten Schritt muss nun betrachtet werden, in wie weit die Punkte der Zahlen das Ergebnis beeinflussen. Dazu ist es nun sinnvoll den Lernenden die Anweisung zu geben, dass sie die zu erwartenden Punkte bei 36 Würfen darstellen. Bei 36 Würfen ist folgende Punktverteilung anzunehmen:

Augensumme 2: Da die Augensumme 2 bei 36 Würfen durchschnittlich 1 mal geworfen wird und durch sie 2 Punkte gutzuschreiben sind, kann man

127Siehe [16].
128Siehe [16].

folgende Rechnung aufstellen: 1*2 Punkte = 2
Das bedeutet, dass die Wahl der Zahl 2 bei 36 Würfen 2 Punkte bringt.
Besonders interessant sind die Ergebnisse für die häufig auftretenden Zahlen:
Augensumme 6: 5*6 Punkte = 30 Punkte
Augensumme 7: 6*7 Punkte = 42 Punkte
Augensumme 8: 5*8 Punkte = 40 Punkte[129]

Hier erfolgt also die Berechnung der zu erwartenden Punkte (bei 36 Würfen) über die Produkte aus „theoretische Anzahl des Ereignisses (bei 36 Würfen)“ und „Wert des Ereignisses“. Dies stimmt mit der Annahme der Einflussfaktoren überein. Dadurch werden anhand der Verbindung zwischen intuitivem Wissen und theoretischen Ausführungen passende Grundvorstellungen ausgebaut. Außerdem kann hier ein gutes Fundament für den Begriff des Erwartungswertes für diskrete Zufallsvariablen gelegt werden.[130]

Nichtsdestotrotz sollte den Lernenden ebenso gezeigt werden, wie man entsprechende Punkte beispielsweise für das 100-malige Werfen bestimmen kann.
Dazu bestimmt man zuerst die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der Augensummen. Im Anschluss daran sind die zu erwartenden Punkte (bei 100 Würfen) über die Produkte aus „Wahrscheinlichkeit des Ereignisses bzw. der Augensumme“, „Anzahl der Würfe“ und „Wert des Ereignisses“ zu bestimmen.

Nach diesen Überlegungen sollte den Lernenden klar sein, dass die Wahl der Zahlen 7 und 8 empfehlenswert ist. Außerdem bleibt die zu empfehlende Wahl bei unterschiedlicher Anzahl an Würfen gleich. Dies liegt daran, dass die Werte der Ereignisse sowie die Wahrscheinlichkeiten für

129Siehe [16].
130Siehe [16].

das Eintreffen der Ereignisse konstant bleiben. Allerdings muss man den SchülerInnen noch verdeutlichen, dass natürlich der Zufall und die Zahlen des Gegners eine wichtige Rolle spielen. Dazu kann man den Vergleich zwischen den theoretischen Ergebnissen und den tatsächlichen Ergebnissen, die zu Beginn anhand einer Tabelle festgehalten wurden, heranziehen.
Dabei wird indirekt das Verständnis für das empirische Gesetz der großen Zahlen hergestellt. Das bedeutet, je mehr Spiele durchgeführt werden, desto häufiger gewinnen die Zahlen 7 und 8. Wenn man also die benötigten Punkte zum Sieg von 25 beispielsweise auf 100 erhöht, steigt die Wahrscheinlichkeit, dass die empfehlenswerten Zahlen 7 und 8 tatsächlich gewinnen, da durch steigende Anzahl an Würfen bzw. Spielen der Einfluss des Zufalls gemildert wird und sich die relativen Häufigkeiten um die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten stabilisieren.[131]

Durch diese Problemstellung und deren Lösung wird Schüler-Aktivität sowie selbstständiges Arbeiten gefördert. Außerdem werden intuitive Annahmen mit theoretischen Überlegungen verknüpft, so dass u.a. folgende Fragen geklärt werden:
Wozu sind Wahrscheinlichkeiten nützlich? Die Anwendung welches Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist in welcher Situation zu empfehlen bzw. notwendig?
Dabei wird die Rolle des Zufalls diskutiert und eine intuitive Grundlage für das empirische Gesetz der großen Zahlen gelegt.[132]

Im Anschluss an diese umfangreiche Aufgabe können ebenso folgende weiterführende Fragestellungen bearbeitet werden:

1. Stefans Lieblingszahl ist 6. Er ist fest davon überzeugt, dass er diese Zahl häufiger wirft als andere Zahlen. Ist es ratsam, dass er deshalb die

131Siehe [16].
132Siehe [16].

Zahl 6 auswählt? Begründe deine Antwort.
2. Julia und Mesut spielen 3 Runden bis zu jeweils mindestens 25 Punkte. Der Spieler oder die Spielerin gewinnt, der oder die 2 Runden für sich entscheidet. Julia wählt die Zahlen 7 und 8. Nach der ersten Spielrunde trat die Zahl 10 am häufigsten auf. Die Zahl 7 wurde gar nicht gewürfelt. Nun kann Julia ihre Zahlen neu wählen. Welchen Rat gibst du ihr? Begründe!

Durch derartige Fragestellungen wird erörtert, dass die Wahrscheinlichkeit, beispielsweise die Zahl 10 zu werfen, bei jedem Wurf gleich groß ist. Sie ist also unabhängig von den vorherigen Ergebnissen. Außerdem ist zu klären, dass die intuitive Annahme mancher Lernenden, z.B. die Zahl 6 sei beim Werfen eines Würfels schwieriger oder leichter zu erzielen als die Zahl 3, falsch ist.

Fazit

In diesem Kapitel wurden teilweise sehr ausführliche bzw. umfangreiche Aufgaben zu klassischer und frequentistischer Wahrscheinlichkeit bei Zufallsexperimenten gezeigt. Sicherlich nehmen einige Beispiele viel Zeit in Anspruch. Dennoch halte ich diese Ausführlichkeit für nötig, um entsprechende Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall aufzubauen bzw. zu festigen. Selbstverständlich stellen die dargelegten Aufgaben nur eine Auswahl an möglichen Beispielen oder Problemstellungen dar.
Es gibt Begriffe im Fach Mathematik, z.B. Dreieck, bei denen das adäquate Verwenden der Begriffe durch die Lehrkraft automatisch zu einem passenden Verständnis auf Seiten der SchülerInnen führt. Im Gegensatz zu derartigen Begriffen, lassen sich die Begriffe Wahrscheinlichkeit und Zufall nicht eindeutig definieren, da sie u.a. verschiedene Aspekte ineinander vereinen. Deshalb reicht eine adäquate Verwendungsweise der Lehrkraft nicht aus. Vielmehr müssen sich die Lernenden immer wieder mit den

Begriffen, ihren Verwendungsweisen und Eigenschaften auseinandersetzen, um die Begriffe richtig zu erfassen. Dabei sind sowohl theoretische Überlegungen als auch intuitive Annahmen durch praktisches Durchführen einzubinden. Gerade Fragestellungen zu Wahrscheinlichkeiten stellen ein derart umfassendes Gebiet dar, dass die in der Unterstufe eingeführten Begriffe in der Sekundarstufe II aufgegriffen und durch weitere Problemstellungen vertieft werden müssen. [133]

133Siehe [16].

3.4. Subjektive Wahrscheinlichkeit

Auch wenn man im Unterricht versucht, den Charakter der Mathematik als Fachwissenschaft zu betonen, in dem man u.a. mit rationaler Distanz Problemstellungen bearbeitet, so gibt es dennoch Situationen wie beispielsweise im Zuge des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs, bei denen subjektive Informationen zu erfassen sowie in Berechnungen aufzunehmen sind.
Gerade durch die Bedeutung subjektiver Wahrscheinlichkeit in Berufsfeldern, bei politischen Entscheidungen oder im alltäglichen Leben sollte dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff im Schulunterricht erarbeitet und diskutiert werden. Beispielsweise bei der internationalen Kreditvergabe durch die Weltbank werden neben wirtschaftlichen Kennziffern auch informelle Informationen als Einschätzungen von ExpertInnen eingeholt, um die Kreditwürdigkeit zu bewerten.[134]

Die folgende Aufgabe versucht den Lernenden einen Zugang zu subjektiver Wahrscheinlichkeit auf intuitiver Ebene zu geben. Sie sollen durch Eigenerfahrung subjektive Wahrscheinlichkeit kennenlernen und so Grundvorstellungen zu diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff entwickeln.[135]

Aufgabe

> „Führt ein Wurfexperiment mit einer Versuchsanordnung wie in der Abbildung 3 durch! Einigt euch zuvor auf die Entfernung des Korbes!
> a) Jede/r schätzt zuerst, wie viele von 10 Würfen sie/er treffen wird. Überprüft dann experimentell!
> b) Schätzt wieder zuerst:
> Wie groß muss die Entfernung des Korbes sein, damit du in der Hälfte der Fälle triffst?
> Überprüft im Anschluss experimentell!“[136]

134Siehe [16].
135Siehe [16].
136Siehe [16].

Die Grundidee zu dieser von Hauer-Typpelt vorgestellten Aufgabe stammt aus dem deutschen Schulbuch *Fokus Mathematik* und wurde für den gymnasialen Mathematikunterricht in der Unterstufe entwickelt. Diese Übung ist auch gut für einen fächerübergreifenden Unterricht in den Fächern Mathematik und Sport geeignet. Dabei kann diese Aufgabenstellung derart abgewandelt werden, dass die Lernenden beispielsweise schätzen, wie viele Körbe sie beim Basketball oder Tore beim Fußball erzielen. [137]

Die obige Aufgabe kann als Einstieg in die Thematik des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs dienen. Dennoch ist es wichtig, die ersten Vorstellungen der Lernenden zu diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff zu bestätigen. Dabei kann beispielsweise das Spiel Stein-Schere-Papier verwendet werden. Dieses Spiel wurde bereits als Aufgabe im Zuge der Eigenschaften der Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsvorstellung benutzt. Dort war die Voraussetzung gegeben, dass die SpielerInnen die Begriffe Stein, Schere und Papier zufällig auswählen und somit die Gleichwahrscheinlichkeit der Ausgänge vorhanden ist. Erst dadurch konnte die Berechnungsmethode nach Laplace Anwendung finden. Jetzt ist diese Gleichwahrscheinlichkeit der Ausgänge nicht vorausgesetzt, sondern die Problemstellung lautet folgendermaßen:

Johanna und David spielen oft das Spiel Stein-Schere-Papier gegeneinander. Dabei ist Johanna aufgefallen, dass David meist zuerst (d.h. in der ersten Runde) das Symbol für Schere auswählt. Diskutiere mit deinem Partner:
In wie weit kann diese Information für Johanna hilfreich sein? Handelt es sich hierbei um ein Zufallsexperiment? Können die Wahrscheinlichkeiten mittels der Formel von Laplace berechnet werden?

Diese Aufgabe wird dann im Plenum ausführlich besprochen.

137Siehe [16].

Im Zuge des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist es sinnvoll, die Verwendung der Begriffe wie Wahrscheinlichkeit und Zufall im Alltag zu analysieren. Dazu suchen die Lernenden alltägliche Sätze und passende Begriffe beispielsweise aus Zeitungen oder Werbungen aus. Eine weitere Variante sind Wetterberichte. Der Einfluss der subjektiven Information bzw. Annahmen kann anhand der folgenden Frage bzw. Problematik erörtert werden:

Julia will zu ihrer Oma gehen. Frühmorgens sagte der Wetterbericht voraus, dass die Regenwahrscheinlichkeit für den heutigen Tag bei 70% liege. Gerade regnet es aber nicht. Welche Faktoren spielen eine Rolle, ob Julia einen Schirm einsteckt?

Anhand dieser Fragestellung soll den Lernenden gezeigt werden, dass es eine ganze Reihe weiterer Faktoren gibt, die entscheiden, ob Julia einen Schirm mitnimmt. Dabei sind beispielsweise folgende Faktoren zu nennen: Wie lang ist Julias Weg zur Oma? Wie sieht der Himmel aus? Wie stark ist der Wind? Wann kehrt Julia zurück nach Hause? Hat Julia einen Schirm? Trägt Julia eine Kapuze? Ist es für Julia schlimm, wenn ihre Haare nass werden?

Hier wird sichtbar, dass Angaben zu Wahrscheinlichkeiten eine Unterstützung für das Treffen von Entscheidungen sind. Dennoch fließen im Alltag weitere subjektive Informationen und Erfahrungen in die Entscheidungsfindung ein, die eine zentrale Rolle spielen können.
Im Gegensatz dazu haben subjektive Erfahrungen oder Informationen bei mathematischen Zufallsexperimenten keine Bedeutung. Es ist wichtig, dass die Heranwachsenden diesen Unterschied verstehen und erkennen.

3.5. Geometrische Wahrscheinlichkeit

Nachdem die SchülerInnen bereits den klassischen und statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff kennengelernt und zu beiden adäquate Grundvorstellungen entwickelt haben, wird ihnen nun die geometrische Wahrscheinlichkeit anhand einfacher Beispiele vorgestellt.

Theoretische Grundlage

Wenn man den geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff mit dem klassischen und statistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit vergleicht, kann man Gemeinsamkeiten und Unterschiede entdecken. Ein entscheidender Unterschied ist beim Vergleich der Ergebnisräume festzustellen:

„Während der Ergebnisraum bei der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung stets endlich (diskret) ist, handelt es sich bei der geometrischen Wahrscheinlichkeit um unendliche (kontinuierliche, stetige) Ergebnisräume.“[138]

Dieser Unterschied wird schließlich bei der Betrachtung der berechneten Werte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten deutlich. Durch den klassischen sowie statistischen Zugang werden rationale Zahlen als Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse bestimmt. Im Gegensatz dazu treten bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten ebenso irrationale Zahlen für Wahrscheinlichkeiten auf. Nicht nur daraus ergibt sich für alle drei Wahrscheinlichkeitsbegriffe ein jeweils realer und zugleich spezifischer Anwendungsbereich. Entscheidend ist, dass man weiß, wann welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff Anwendung findet. Dabei gilt es die jeweiligen Unzulänglichkeiten, Vor- und Nachteile zu beachten.

Trotz der Differenzen verfügen die genannten Wahrscheinlichkeitsbegriffe aber auch über Gemeinsamkeiten. Dass beispielsweise bei allen drei Ansätzen die Wahrscheinlichkeiten mittels identischer Rechengesetze zu

138Siehe [11], S. 53.

verknüpfen sind, legt ein verbindendes Moment der Zugänge offen.[139]

Im folgenden Abschnitt werden nun einige Beispiele gezeigt, wie der geometrische Wahrscheinlichkeitsbegriff im Schulunterricht aufgegriffen werden kann. Dabei wird unmittelbar auf die Laplace'schen Vorstellungen und Berechnungsmethoden zu Wahrscheinlichkeiten zurückgegriffen. Die Beispiele zeigen, „wie man auch beim Vorgehen überabzählbarer Versuchsergebnisse mit Hilfe von geometrischen Überlegungen eine Gleichwahrscheinlichkeit gewisser Ereignisse (zufällige Auswahl von Punkten, Längen, Flächen) erzeugen und dann ähnlich wie im Laplace-Modell Wahrscheinlichkeiten berechnen kann.“[140]

Sicherlich ist es nicht zwingend erforderlich, geometrische Überlegungen zu Wahrscheinlichkeiten im Schulunterricht durchzuführen. Dennoch erachte ich die Behandlung des geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs als sehr empfehlenswert, da die bereits diskutierten Zugänge zu Wahrscheinlichkeiten dadurch ergänzt, erweitert oder auch abgerundet werden.

Insgesamt bleibt zu sagen, dass diese Ansätze zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über sich hinaus weisen. Die Zugänge selbst stellen zwar nicht die Theorie dar, aber sie sind als Aspekte der Theorie zu verstehen. Durch die Theorie selbst, die durch den axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgt, können dann die klassischen, frequentistische oder auch geometrische Wahrscheinlichkeit als Modelle zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet werden.[141]

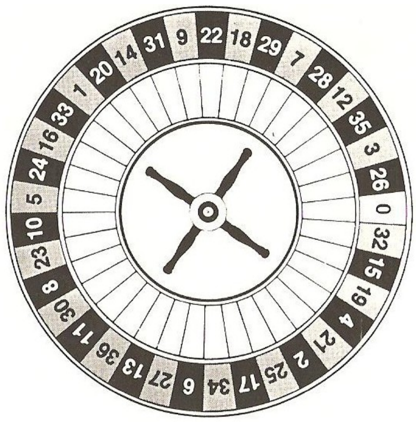
139Siehe [11], S. 53.
140Siehe [12], S. 67.
141Siehe [11], S. 53.

3.5.2. Geometrische Wahrscheinlichkeit im Unterricht (Beispiele)

1. Roulette

Das Roulette ist ein Glücksspiel, das in vielen Casinos in Österreich bzw. weltweit große Beachtung findet. Das Roulette, das einen chinesischen Ursprung haben soll und sich in Europa Anfang des 18. Jahrhunderts das erste Mal festgesetzt hat, besitzt eine wechselvolle Geschichte: Es wurde zunächst durch Ludwig XIV. in Frankreich eingeführt, verbreitete sich anschließend auch in Deutschland und wurde dann im Laufe des 19. Jahrhunderts durch immer striktere Verbote eingegrenzt bis im Jahr 1868 alle Spielbanken schließen mussten. Dadurch verschwand das Roulette offiziell von der Bildfläche, da es keine Möglichkeit mehr gab dieses Glücksspiel legal in Deutschland durchzuführen. Erst ab 1919 wurden wieder Casinos eröffnet, z.B. in Danzig. Nach 1945 erlebten die Casinos sowie das Roulette eine ungeahnte Renaissance und in Österreich steigerte dieses Glücksspiel gerade seit den 1970er seinen Stellenwert enorm.[142]

Das Roulette ist also ein weit verbreitetes Zufallsgerät und wird im Schulunterricht häufig dazu genutzt, die SchülerInnen auf den geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff vorzubereiten.



143

142Siehe [2], S. 18.
143Siehe [24].

Anhand der Abbildung des Roulettes ist offensichtlich, dass die Roulettescheibe aus 37 gleich großen Feldern besteht, die durch die Zahlen 0, 1, …, 36 beschriftet sind. Damit ist klar, dass die Möglichkeit, dass die Kugel in einem dieser Felder liegen bleibt, für jedes Feld gleich groß ist. Dadurch ist für das Roulette als Zufallsgerät die Gleichwahrscheinlichkeit der möglichen Ereignisse 0, 1, …, 36 gegeben. Deshalb ist es leicht, die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis durch die Anwendung der Laplace'schen Berechnungsmethode zu bestimmen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses aus der Grundmenge 0, 1, …, 36 beträgt 1/37: z.B. $P(6) = 1/37$.[144]

Im Anschluss daran können die Lernenden selbstständig weitere Ereignisse berechnen: z.B. $P(\text{rot}) = 18/37$, $P(\text{gerade}) = 18/37$
Außerdem ist das Roulette-Spiel bestens geeignet, um die Thematiken Glücksspiel (Casino) sowie fairer Einsatz zu erörtern. Dabei sollte den SchülerInnen vermittelt werden, dass Casinos stets daran interessiert sind, die größtmöglichen Gewinne zu erzielen. Dadurch stehen die Einsätze und die zu erwartenden Gewinne in keinem fairen Verhältnis zueinander.

Glücksspiele und Wetten stellen eine gute Möglichkeit dar, um fächerübergreifende Projekte beispielsweise zwischen den Fächern Mathematik, Deutsch und Geschichte zu gestalten. Dabei können die verschiedenen Bereiche, z.B. Roulette, Lotto, Poker, BlackJack und Fußball-Toto, auf Schülergruppen aufgeteilt werden. Zu jedem Bereich kann man zunächst die Funktionsweise des Spiels bzw. der Wette betrachten. Anschließend können historische Fakten, gesetzliche sowie moralische Aspekte und mathematische Berechnungen gesammelt bzw. erstellt werden. Dazu werden den SchülerInnen einerseits Materialien zur Verfügung gestellt. Andererseits ergänzen die Heranwachsenden die Unterlagen durch eigene Recherchen. So entstehen umfangreiche Spielanalysen. Diese werden dann durch Plakate und Präsentationen der

144Siehe [2], S. 18.

Lernenden den MitschülerInnen zugänglich gemacht.
Derartig umfangreiche und komplexe Aufgabenstellungen sind gerade zu Beginn der Oberstufe gut durchführbar. In der Unterstufe erscheinen mir diese umfangreichen Projekte nicht geeignet.
Das Roulette und andere Glücksspiele bieten vielfältige Verwendungsmöglichkeiten für den Schulunterricht an. Im Mathematikunterricht der Unterstufe ist das Roulette geeignet, die Lernenden auf die Einführung des geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs sowie dessen Verbindung zum klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff vorzubereiten.
Dabei wurden die Laplace'sche Berechnungsmethode sowie die Grundlagen eines Zufallsexperiments wiederholt. Nun kann der geometrische Wahrscheinlichkeitsbegriff anhand des Glücksrads gezeigt werden.

2. Glücksrad

Das Glücksrad ist ein bekanntes Zufallsgerät, das bei Glücksspielen, der Gewinnverlosung und in zahlreichen Fernsehshows verwendet wird. Deshalb ist die Funktionsweise den Lernenden klar. Ähnlich wie beim Roulette wird eine Scheibe dargestellt, die in verschiedene Bereiche unterteilt ist. Verfügen diese Bereiche über identische Größe und Symmetrie, so ist die Gleichwahrscheinlichkeit der möglichen Ausgänge gegeben. Dann können die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten durch die Laplace'sche Formel berechnet werden. Allerdings gilt es zu betonen, dass diese Argumentationsweise nur bei gleich großen, symmetrischen Flächen anzuwenden ist.

„Eine zweite Argumentationsweise bedient sich stärker der geometrischen Aspekte des Glücksrades und führt so zu einer ersten

Verallgemeinerung.“[145]

Hier wird die Wahrscheinlichkeit durch das Verhältnis der dem Ereignis günstigen Fläche zur Gesamtfläche des Glücksrades bestimmt. Dabei wird also eine allgemeine Vorstellung über Flächenverhältnisse genutzt, um Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln.

„Die Tatsache, daß nicht mehr in allen Situationen eine Reduktion auf endlich viele gleichmögliche Fälle vorgenommen werden kann (wenn etwa Flächenverhältnisse irrational sind), bringt deutlich den Umstand zum Ausdruck, daß die Wahrscheinlichkeit ein Verhältnis darstellt.“[146]

Im Mathematikunterricht können den SchülerInnen folgende Abbildungen gezeigt werden. Durch das vorherige Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten beim Zufallsgerät Roulette stellt die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten des Glücksrads bei gleichwahrscheinlichen Ausgängen – Abbildung 1 – für die Lernenden kein Problem dar. Anders sieht die Situation in Abbildung 2 aus. Dort ist die Gleichwahrscheinlichkeit der Ausgänge zunächst nicht gegeben. Deshalb wird die Wahrscheinlichkeit, z.B. P(blau), über den geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff berechnet:

P(blau) = blaue Fläche / Gesamtfläche (Scheibe)

Abbildung 1

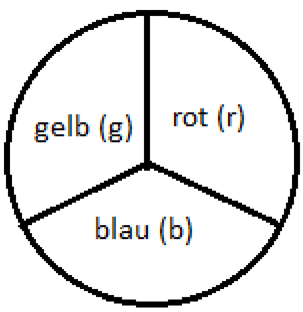
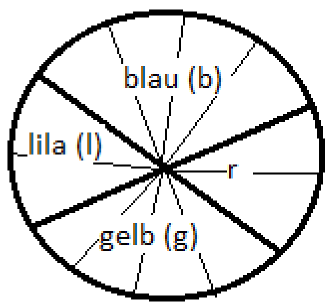


Abbildung 2



145Siehe [8], S. 68.
146Siehe [8], S. 68.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten nach Laplace bei Abbildung 1:
Es gibt 3 gleichmögliche Ereignisse rot, gelb und blau. Um nun die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, rechnet man einfach anhand der Formel günstige/mögliche die Wahrscheinlichkeiten aus.
P(rot) = 1/3; P(blau) = 1/3; P(gelb) = 1/3

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei Abbildung 2:
Zuerst wird festgestellt, dass keine Gleichwahrscheinlichkeit vorliegt. Dadurch ist Laplace nicht anwendbar. Stattdessen kann man durch geometrische Überlegungen die Wahrscheinlichkeiten über das Verhältnis „günstige Fläche" zu „möglicher Fläche = Gesamtfläche" darstellen.

Beispiel: P(blau) = ?
Aufgrund der Abbildung ist klar, dass die blaue Fläche bzw. der blaue Kreissektor ein Drittel der Kreisfläche beträgt. Folglich setzt man diese beiden Größen ins Verhältnis:
$A_b = 1/3\ (r\hat{}2)\pi$, $A_k = (r\hat{}2)\pi$
P(blau) = $A_b / A_k = (1/3\ (r\hat{}2)\pi) / ((r\hat{}2)\pi) = 1/3$
Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad im blauen Bereich zum Stillstand kommt, bei 33,3 % liegt.

Alternativ kann man statt dem Flächenverhältnis das Umfangsverhältnis betrachten. Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten durch die Umfangsverhältnisse erzielen selbstverständlich identische Werte.
Es ist wichtig, dass die Lernenden verstehen, dass man so Wahrscheinlichkeiten durch Flächen-, Strecken- oder Winkelverhältnisse ausdrücken kann. Dadurch können im Gegensatz zu Berechnungen mittels klassischer Wahrscheinlichkeit ebenso irrationale Werte für Wahrscheinlichkeiten entstehen.

Abschließend gilt es hier einen weiteren wichtigen Punkt den SchülerInnen zu erläutern. Häufig können Flächenverhältnisse durch einen einfachen

Trick mittels Laplace berechnet werden. Der Trick besteht darin, dass man die Gleichwahrscheinlichkeit der Ausgänge konstruiert, denn dann kann die Berechnungsmethode der klassischen Wahrscheinlichkeit angewendet werden. Bei Abbildung 2 kann dies folgendermaßen geschehen: Anhand der Skizze ist zu erkennen, dass der Kreis – unabhängig von Farben – in 12 gleichgroße und symmetrische Sektoren unterteilt ist. Die blaue Fläche besteht nun aus 4 dieser gleichwahrscheinlichen Kreissektoren. Dadurch kann man für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit P(blau) folgende Größen annehmen:

günstige: $g = 4$; mögliche: $m = 12$

P(blau) = g/m = 4/ 12 = 1/ 3.

Diese Aspekte des geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs erweitern die bisherigen Wahrscheinlichkeitsbegriffe und erzeugen außerdem ein tieferes Verständnis für den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace.

> „Vor allem diese geometrischen Betrachtungen bringen in anschaulicher Weise zum Ausdruck, daß die klassische Wahrscheinlichkeitskonzeption sich auf ein Anteilsargument stützt: Es werden ganz allgemein Maßzahlen (Anzahlen von Elementen, Flächeninhalte bzw. 'beliebige' Maße) entsprechender Mengen zueinander ins Verhältnis gesetzt. Grundlegende Annahme dabei ist die rein zufällige Wahl, die sich in konkreten Situationen durch inhaltliche Überlegungen (ideale Symmetrie, [...]) wenn auch nicht deduzieren, so doch in hohem Maße rechtfertigen läßt.“[147]

Durch diese Ausführungen ist klar, dass der geometrische Wahrscheinlichkeitsbegriff eine nicht unbedeutende Rolle bei der Entwicklung adäquater Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall einnimmt. Auch wenn auf den geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff im Schulunterricht verzichtet werden kann, so ist es meiner Ansicht nach empfehlenswert, einige geometrische Wahrscheinlichkeitsberechnungen den SchülerInnen vorzustellen. Dabei

147Siehe [8], S. 24.

stellen gerade das Roulette und das Glücksspiel geeignete Zufallsgeräte dar. Im folgenden werden zwei weitere Aufgaben zu geometrischen Wahrscheinlichkeiten gezeigt.

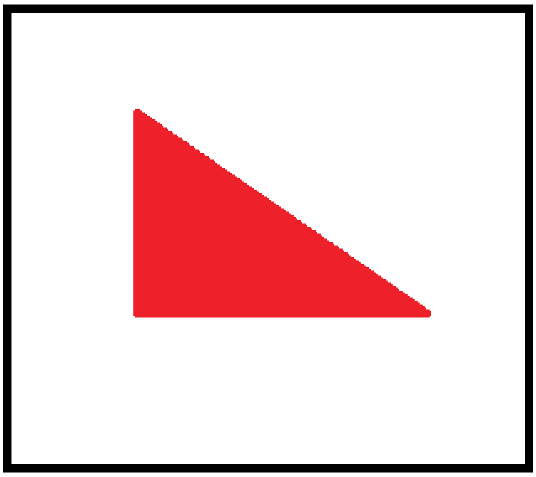
3. Fallschirmsprung

Die Lernenden haben bereits anhand des Glücksrads Wahrscheinlichkeiten über Flächenverhältnisse ausgerechnet. Zum einen geht es nun darum Grundvorstellungen zum geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff durch das selbstständige Lösen vergleichbarer Aufgaben zu festigen bzw. aufzubauen. Zum anderen sind weitere Aufgaben essentiell, damit die Anwendbarkeit dieser Berechnungsmöglichkeit auch ohne das Zufallsgerät Glücksrad offensichtlich wird.
Beispielsweise wird den SchülerInnen folgende Aufgabe gestellt:

Fallschirmsprung!
Stefan möchte bei einem Fallschirmsprung in dem unten dargestellten roten Dreieck landen. Durch Berechnungen ist es ihm möglich, den Absprung so zu wählen, dass er sicher im weißen Quadrat landet. Allerdings ist es unmöglich, den Landungspunkt genauer zu bestimmen. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass er auf einem zufällig gewählten Punkt im Quadrat landet für jeden Punkt gleich groß ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich im roten Dreieck landet?

1. Berechne die entsprechende Wahrscheinlichkeit durch folgende Angaben:
   Quadrat: Seitenlänge a = 8 m
   Dreieck: Winkel zwischen den Seiten a_D und b_D; a_D = 5m, b_D = 4m

2. Überlege, ob hier die entsprechende Wahrscheinlichkeit mittels der Berechnungsmethode nach Laplace möglich ist.



Da die Lernenden bereits ab der 2. Jahrgangsstufe der Sekundarstufe I Flächeninhalte zu Quadraten und rechtwinkeligen Dreiecken berechnen und den geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff kennengelernt haben, sollte die Lösung dieser Aufgabe kein Problem darstellen:
P(landet im Dreieck) = A_D/A_Q = $(½\ a_D * b_D)\ /\ a$^2 = ½(4*5) / 8*8 = 10/64 = 5/32

Im Gegensatz zum Glücksrad ist nach der obigen Angabe eine Berechnung nach Laplace nicht möglich. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist nur durch das Flächenverhältnis zu bestimmen. Außerdem sollte man den SchülerInnen bei dieser Aufgabe verdeutlichen, dass die obigen Berechnungen nur modellhaft zu sehen sind. Schließlich ist die in der Angabe festgelegte Gleichwahrscheinlichkeit realitätsfremd. In Wirklichkeit sind Größen wie Windverhältnisse und Absprungspunkt dafür verantwortlich, dass die Gleichwahrscheinlichkeit hier nicht zutreffen kann.

4. Paradoxon von Bertrand

Das Paradoxon von Bertrand kann als historisches Beispiel im Schulunterricht behandelt werden.

Joseph L.F. Bertrand (1822-1900) formulierte die Aufgabe, die heute als Paradoxon von Bertrand bezeichnet wird, in seinem Werk *calcul des propabilités* (1889). Diese Aufgabe lautet:
„Vorgegeben sei ein Kreis mit dem Radius *r*. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine willkürlich (zufällig) in diesem Kreis gezogene Sehne länger als die Seite des dem Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist?“[148]
Da durch die Aufgabenstellung die Frage unbeantwortet bleibt, wie die zufällige Auswahl der Sehne erfolgt, gibt es verschiedene mögliche Lösungen. Bertrand selbst stellte in seinem Werk drei verschiedene Lösungen dar.

Bei der Beantwortung dieser Fragestellung im Schulunterricht müssen die SchülerInnen über ausreichende Kenntnisse bezüglich geometrischer Figuren und deren Flächenberechnung verfügen. Außerdem ist es sinnvoll, zu Beginn eine einfache Skizze anzufertigen. Anhand dieser Skizze können dann die Eigenschaften des Kreises und des gleichseitigen Dreiecks wiederholt werden. Durch die Wiederholung kann sichergestellt werden, dass die Lernenden alle notwendigen geometrischen Eigenschaften kennen, um diese Aufgabe zu lösen. Gegebenenfalls können Eigenschaften und Argumente als Vorbemerkung schriftlich fixiert werden.

Vorbemerkung:
Im gleichseitigen Dreieck sind die drei Höhen zugleich Winkelhalbierende sowie Seitenhalbierende und sie scheiden einander im Punkt *M*. Wir bezeichnen die Seitenlänge des Dreiecks mit *a* und den Radius des Kreises mit *r*. *D* ist der Mittelpunkt der Seite *AB*. Es gilt:[149]
$a = r\sqrt{3}$ und $MD = r/2$

Nun kann man in einem Unterrichtsgespräch die erste mögliche Lösung,

148Siehe [12], S. 69.
149Siehe [12], S. 69.

d.h. das erste Modell, zeigen. Zu jeder Lösungsmöglichkeit ist das Anfertigen einer Skizze unbedingt empfehlenswert. Durch Skizzen werden Problemstellungen und Lösungswege veranschaulicht.

Modell 1:

Es wird ein Punkt aus dem Inneren des Kreises gewählt. Der gewählte Punkt ist Mittelpunkt der Sehne. Somit wurde die Lage und Länge der willkürlich gezogenen Sehne bestimmt. Da die Sehne länger als die Seite *a* ist, muss gelten: Der Mittelpunkt der Sehne liegt in dem zum vorgegebenen Kreis konzentrischen Kreis mit Radius $r/2$.

Angenommen alle Flächen gleichen Inhalts haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, so erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch:[150]

$P = ((r/2)^2)*\pi \;/\; (r^2)*\pi = ¼$

Im Anschluss daran muss thematisiert werden, dass es mindestens eine weitere Lösung bzw. ein weiteres Modell gibt, in dem man eine andere Sehne betrachtet. Es ist zu empfehlen, eine zweite Lösung bzw. ein zweites Modell durch ein Lehrer-Schüler-Gespräch zu entwickeln.

Modell 2:

Man wählt zufällig einen Punkt *A* aus allen Punkten auf der Peripherie des Kreises aus. Dieser Punkt *A* ist ein Endpunkt der Sehne und ein Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks *ABC*. Soll die Sehne größer als die Dreiecksseite *a* sein, so muss *D* als der zweite Endpunkt der Sehne auf dem Kreisbogen zwischen *B* und *C* liegen. Da die Bögen zwischen *A* und *B*, *B* und *C* sowie *A* und *C* gleich lang sind, ist für die Wahl von *D* nur ein Drittel des Kreisumfangs günstig.

$P = (1/3*2r\pi) / 2r\pi = 1/3$[151]

150Siehe [12], S. 70.
151Siehe [12], S. 70.

Nachdem die SchülerInnen nun beide Modelle bzw. Lösungen kennen, ist es sinnvoll, dass sie selbstständig folgende Fragen zu zweit diskutieren: Warum gibt es zwei unterschiedliche Ergebnisse für die Aufgabenstellung von Bertrand? Welches Ergebnis ist deiner Meinung nach richtig?
Anschließend wird durch ein Unterrichtsgespräch geklärt, dass es sich hier nicht um zwei Lösungen zu einer Aufgabe, sondern um zwei Lösungen zu zwei Aufgaben handelt. Da in der ursprünglichen Aufgabe eine Beschreibung der experimentellen Bedingungen für die Auswahl der Sehne fehlt, gibt es dazu mehrere Aufgabenstellungen, die jeweils eine eigene Lösung haben.[152]
Ist die Sachlage geklärt, dass anhand dieser Angabe verschiedene Aufgabe gelöst werden können, ist die Frage zu stellen, ob es noch weitere mögliche Varianten gibt. Um weitere Aufgaben bzw. Lösungen darzustellen, ist zweierlei vorstellbar.
Zum einen kann den Lernenden ein Arbeitsblatt ausgehändigt werden, auf dem ein drittes Modell beschrieben wird. Die SchülerInnen sollen anhand der Beschreibung des Arbeitsblattes eine passende Skizze anfertigen sowie die Lösung der Aufgabe erklären. Diese Übung kann als Partnerarbeit erledigt werden. Außerdem ist es ratsam, die Ergebnisse durch ein Gespräch im Plenum zu überprüfen. Dabei kann leicht festgestellt werden, ob die SchülerInnen die Aufgabe und deren Lösung verstehen. Nachdem das Paradoxon von Bertrand zuerst in einem Lehrer-Schüler-Gespräch entwickelt wurde, ist es unbedingt empfehlenswert, den Heranwachsenden eine Übung zu geben, die ihre Eigenaktivität fördert.
Zum anderen kann es sinnvoll sein, die SchülerInnen selbst nach einem weiteren Modell suchen zu lassen. Dazu können sie beispielsweise das Internet für die Recherche verwenden. Hier muss die Lehrkraft zuvor sicherstellen, dass die Recherche mit Hilfe des Computers erfolgreich ist.

Es gibt weitere mögliche Beispiele, die sich gut eignen, um geometrische Wahrscheinlichkeiten zu betrachten, z.B. das Nadelproblem von Buffon

152Siehe [12], S. 71.

oder das sogenannte Treffpunktproblem.

Insgesamt sind geometrische Wahrscheinlichkeiten gut eignet, um die Anwendbarkeit und Vielfältigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu zeigen. Zusätzlich kann durch derartige Beispiele überprüft werden, ob die SchülerInnen über ausreichende Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie verfügen und ob ein tiefes Verständnis für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten aufgebaut wurde.

3.6. Bedingte Wahrscheinlichkeit – Satz von Bayes

3.6.1. Theoretische Grundlage

Thomas Bayes (ca. 1702-1761) war ein presbyterianer Pfarrer, der in der Nähe von London lebte bzw. wirkte und sich mit mathematischen Fragen beschäftigte. In seinem posthum veröffentlichen Werk *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances* stellte er folgende grundlegende Ideen zum Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit dar:[153]

Bei einem Zufallsexperiment gibt es für das Eintreten eines Ereignisses B Ursachen oder Hypothesen, die man mit A_1, A_2, … A_n bezeichnet.
Die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ ($i \in 1,\dots,n$) stellen die a-priori-Wahrscheinlichkeiten dar. Außerdem kennt man die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A_i)$, d.h. die Wahrscheinlichkeiten, dass B eintritt unter der Bedingung, dass A_i bereits eingetreten ist.
Dann wird das Zufallsexperiment durchgeführt und das Ereignis B erzielt. Daraus ergibt sich folgende Frage für die Neueinschätzung der a-priori-Wahrscheinlichkeiten: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A_i|B)$?
Bayes bezeichnete $P(Ai|B)$ als die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten.
Der sogenannte Satz von Bayes legt dar, wie die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten aus den a-priori-Wahrscheinlichkeiten sowie den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A_i)$ zu berechnen sind:[154]
$P(A|B) = P(A)*P(B|A) / P(B)$, $P(B) \neq 0$ (Verallgemeinerung)

Da $P(A \cap B) = P(A)*P(B|A) = P(B)*P(A|B)$, kann man die bedingte Wahrscheinlichkeit folgendermaßen definieren:

> „Ist $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und B ein Ereignis mit $P(B) > 0$, so heißt

153Siehe [17].
154Siehe [17].

$P(A|B) := P(A \cap B) / P(B)$ für jedes $A \in \wp(\Omega)$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

Statt $P(A|B)$ schreibt man auch $P_B(A)$.“[155]

Bei einem axiomatischen Aufbau der Stochastik bleibt zu zeigen, dass der folgende Satz die drei Axiome von Kolmogoroff erfüllt. Damit ist dann der Satz bewiesen. Außerdem ist dadurch formalisiert, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit eine Wahrscheinlichkeit im Sinne der Axiome ist.

„Sei $(\Omega,\wp(\Omega),P)$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, und sei B ein Ereignis mit $P(B) > 0$. Dann ist die Funktion

$P(*|B)$: $\wp(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $P(A|B) := P(A \cap B) / P(B)$,

die also jedem Ereignis $A \in \wp(\Omega)$ die Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ zuordnet,

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\wp(\Omega)$.“[156]

Die Formel von Bayes bzw. Überlegungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten finden Anwendung in vielfältigen Bereichen wie beispielsweise in der Medizin, Industrie oder Rechtsprechung. Wenn ein Angeklagter wegen Mordes vor Gericht steht, können mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten Indizien wie Blutspuren eingeordnet und so die Entscheidungen des Gerichts erleichtert werden. Allerdings wird die Begrenztheit dieser Methode schnell offensichtlich, da man die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ kennen muss. Häufig sind aber die Kenntnisse über diese a-priori-Wahrscheinlichkeiten nicht ausreichend, so dass Annahmen zu treffen sind. Ebenso muss auch die jeweilige Wahrscheinlichkeit $P(B)$ bekannt sein oder geschätzt werden. Dadurch kommen hier Aspekte des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs zum Tragen und es können Missverständnisse oder Fehlurteile entstehen.[157]

Es ist also sicher, dass Überlegungen und Berechnungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten in einigen Bereichen unerlässlich sind bzw. eine

155Siehe [12], S. 125.
156Siehe [12], S. 125.
157Siehe [11], S. 238-239.

große Bedeutung zu kommt. Dennoch gibt es auch im Zusammenhang mit diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff Fehlerquellen bzw. Gefahren, die man nicht außer Acht lassen darf.

Im Zuge des bedingten Wahrscheinlichkeitsbegriffs kann die Eigenschaft der stochastischen Unabhängigkeit betrachtet werden.

Genau dann, wenn $P(A|B) = P(A)$ gilt, dann ist:
$P(A \cap B) = P(B) * P(A|B) = P(B)*P(A)$
Diese Gleichung kann man zur Definition der stochastischen Unabhängigkeit von zwei Ereignissen verwenden:[158]

„Es sei $(\Omega,\wp(\Omega),P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Ereignisse A, B Element aus $\wp(\Omega)$ heißen stochastisch unabhängig, genau dann, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)*P(B)$$“[159]

Anhand der Definition ist klar, dass der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit symmetrisch ist. Das bedeutet, dass wenn das Ereignis A vom Ereignis B unabhängig ist, dann ist zugleich ebenso das Ereignis B vom Ereignis A unabhängig.
Diese Eigenschaft der stochastischen Unabhängig lässt sich auch auf mehr als zwei Ereignisse anwenden. Für n Ereignisse kann man die stochastische Unabhängigkeit folgendermaßen definieren:[160]

> „Die n Ereignisse $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n$ eines endlichen Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega,\wp(\Omega),P)$ heißen genau dann stochastisch unabhängig, wenn für jede Auswahl von k Ereignissen $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} \ldots, A_{ik}$ aus der Menge $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$ der gegebenen n Ereignisse die Gleichung
>
> $P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap A_{i3} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})*P(A_{i2})*P(A_{i3})*\ldots*P(A_{ik})$

158Siehe [12], S. 128.
159Siehe [12], S. 128.
160Siehe [12], S. 129.

erfüllt ist. Hierbei ist k jede natürliche Zahl mit $1< k \leq n$."[161]

3.6.2. Bedingte Wahrscheinlichkeit im Schulunterricht

Durch die Auseinandersetzung mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit kann man den Mathematikunterricht sehr lebendig gestalten.

Zum einen wird durch anwendungsorientierte Aufgaben Nähe zu der Lebenswelt der Lernenden hergestellt. Zum anderen gibt es in diesem Kontext meist intuitive Vorstellungen bzw. Einschätzungen der SchülerInnen, die zu intensiven Diskussionen im Unterricht führen.

Wie bei den zuvor beschriebenen wahrscheinlichkeitstheoretischen Aspekten im Mathematikunterricht wird auch hier das Thema der bedingten Wahrscheinlichkeit zunächst anhand eines passendes Beispiels eingeführt. Im Zuge des Besprechens bzw. des Lösens der Aufgabenstellungen werden dann neue mathematische Begriffe und Methoden dargestellt. Im Anschluss daran werden diese neuen wahrscheinlichkeitstheoretischen Kenntnisse formalisiert sowie verallgemeinert.[162]

Ist das bekannte Ziegenproblem (auch bekannt als das Drei-Türen-Problem) als Einstieg in die Thematik der bedingten Wahrscheinlichkeit gut geeignet?

Diese Problemstellung bekam ihren Namen – Ziegenproblem – durch eine amerikanische Fernsehshow, in der dem Kandidaten folgendes Angebot gemacht wurde:

> „Hinter drei (geschlossenen) Türen befinden sich zwei Ziegen und ein Auto. Der Kandidat, der nicht weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet,wählt eine Türe, z. B. die linke. Befindet sich dahinter das Auto, so hat es der Kandidat gewonnen, andernfalls schweigt die Kunde, ob auch eine Ziege mitgenommen werden kann. Dieser andere Fall wird jedenfalls als Verlust für den Kandidaten angesehen. Der

161Siehe [12], S. 129.
162Siehe [17].

> Spielleiter (der schon weiß, wo sich das Auto befindet) öffnet eine andere Tür, hinter der sich eine Ziege befindet. Der Kandidat hat jetzt die Möglichkeit, bei seiner gewählten Tür (der linken) zu bleiben oder auf die noch geschlossene zu wechseln. Wie sind die beiden Strategien (bleiben oder wechseln) zu bewerten?“[163]

Um die Motivation der SchülerInnen zu erhöhen, wird diese Aufgabe – das Ziegenproblem – abgewandelt.
Dabei bereitet die Lehrkraft drei verschlossene Umschläge vor. In zwei Umschlägen befindet sich die Angabe der Hausübung, der dritte Umschlag ist leer. Nun sollen sich die SchülerInnen gemeinsam für einen Umschlag entscheiden. Bei fehlender Einigung kann dies durch Abstimmen erfolgen.
Im Anschluss daran öffnet der Lehrer bzw. die Lehrerin ein nicht gewähltes Kuvert, in dem sich eine Angabe zur Hausübung befindet. Nun dürfen die SchülerInnen nochmals entscheiden, ob sie bei ihrem zuerst gewählten Umschlag bleiben oder den Umschlag wechseln. Hier sollte den Lernenden Zeit gegeben werden, damit sie sich beraten und über mögliche Gründe für eine günstige Wahl nachdenken. Schließlich entscheiden sich die SchülerInnen für einen Wechsel oder nicht. Nun werden die übrigen zwei Kuverts geöffnet.
Falls in dem von den Lernenden gewählten Umschlag die Angabe der Hausübung ist, lautet diese folgendermaßen:
Überlege bis zur kommenden Stunde, ob der Wechsel des Kuverts eine größere Wahrscheinlichkeit auf Erfolg – der Umschlag ist leer – verspricht!
Falls in dem gewählten Umschlag keine Angabe ist, können die Lernenden auf freiwilliger Basis diese Aufgabenstellung bearbeiten.

In der kommenden Stunde werden die Überlegungen der SchülerInnen zum Ziegenproblem besprochen. Anhand von Baumdiagrammen und Tabellen können den Lernenden die richtigen Lösungen zu den Wahrscheinlichkeiten gezeigt werden.[164]

163Siehe [5], S. 31.
164Siehe [5], S. 31-32.

Tabelle

Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, die Inhalte auf die Umschläge zu verteilen.

Kuvert 1	Kuvert 2	Kuvert 3
Hausübung	Hausübung	kein Inhalt
Hausübung	kein Inhalt	Hausübung
kein Inhalt	Hausübung	Hausübung

Anhand dieser Tabelle kann man den SchülerInnen die möglichen Ausgänge der Ereignisse für Bleiben und Wechsel illustrieren. Angenommen die Lernenden wählen zunächst Kuvert 1. Mit Hilfe der Tabelle kann man erkennen, dass in 2 von 3 Möglichkeiten, der Wechsel das gewünschte Ergebnis erzielt. Dadurch kann man schlussfolgern, dass der Wechsel mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3, d.h. ca. 66,6 %, das Ereignis „kein Inhalt" ergibt.

Bei der Bearbeitung dieses Beispiels wird bewusst auf den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit verzichtet. Es geht zunächst darum, intuitive Vorstellungen richtig zu stellen bzw. zu erzeugen. Erst anhand eines weiteren Beispiels werden Berechnungsmethoden sowie Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt. Sind der Begriff sowie seine Berechnungsmethoden geklärt, kann das Ziegenproblem erneut betrachtet und mit Hilfe der Berechnungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten gelöst werden.

Nun wird also im Schulunterricht eine weitere Aufgabe betrachtet. Dazu werden die SchülerInnen befragt, ob sie sich für Fußball interessieren. Anhand dieser Daten wird eine Tabelle angefertigt, die die weiblichen und männlichen SchülerInnen nach ihrem Interesse an Fußball trennt.
Eine derartige Tabelle – Vierfeldertafel – kann beispielsweise für 24

SchülerInnen folgendermaßen aussehen:

SchülerInnen	weiblich	männlich	insgesamt
Fußball	4	9	13
kein Fußball	7	4	11
insgesamt	11	13	24

Anhand dieser Tabelle können nun einzelne Wahrscheinlichkeiten aufgestellt werden. Dabei beziehen sich diese Wahrscheinlichkeiten immer darauf, dass ein Schüler bzw. eine Schülerin zufällig ausgewählt wird.
Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Schüler bzw. diese Schülerin Interesse an Fußball hat? Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten werden dann mittels der Berechnungsmethode von Laplace bestimmt. Das zeigt, dass der Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff auch bei bedingten Wahrscheinlichkeiten Anwendung findet.

Zuerst werden einzelne Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Tabelle im Plenum aufgestellt:
F … Interesse an Fußball, K … kein Interesse an Fußball
W … weibliche Schülerin, M … männlicher Schüler
P(Interesse an Fußball) = $P(F)$ = 13/ 24
P(kein Interesse an Fußball) = $P(K)$ = 11/ 24
P(weiblich) = $P(W)$ = 11/24
P(Interesse an Fußball und weiblich) = $P(F \cap W)$ = 4/ 24
P(kein Interesse an Fußball und weiblich) = $P(K \cap W)$ = 7/24

Nun bestimmen die Lernenden selbstständig weitere Wahrscheinlichkeiten:
P(männlich) = $P(M)$ = 13/ 24
P(Interesse an Fußball und männlich) = $P(F \cap M)$ = 9/24
P(kein Interesse an Fußball und männlich) = $P(K \cap M)$ = 4/24

Dann können bedingte Wahrscheinlichkeiten durch ein Lehrer-Schüler-Gespräch erstellt werden:
P(kein Interesse an Fußball | weiblich) = $P(K|W)$ = P(kein Interesse an Fußball und weiblich) / P(weiblich) = $P(K \cap W)$ / $P(W)$ = 7/24 / 11/24 = 7/11
P(Interesse an Fußball | weiblich) = $P(F|W)$ = P(kein Interesse an Fußball und weiblich) / P(weiblich) = $P(K \cap W)$ / $P(W)$ = 4/24 / 11/24 = 4/ 11
P(weiblich | kein Interesse an Fußball) = $P(W|K)$ = P(kein Interesse an Fußball und weiblich) / P(kein Interesse an Fußball) = $P(K \cap W)$ / $P(K)$ = 7/24 / 11/24 = 7/11

Bei der Bestimmung dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten ist es wichtig, den SchülerInnen die Berechnungsmöglichkeiten mittels Formel sowie mittels Tabelle bzw. Vierfeldertafel aufzuzeigen. Außerdem ist die Formulierung in mathematischer Umgangssprache von entscheidender Bedeutung. Erst durch passende Formulierungen können die Lernenden den Sinn bzw. Verständnis für den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit erkennen bzw. entwickeln. Deshalb muss man als Lehrkraft sehr genau auf eine korrekte sprachliche Ausdrucksweise achten und entsprechende Sätze schriftlich fixieren.

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für männliche Schüler können nun die Lernenden selbst aufstellen und formalsprachlich wie umgangssprachlich formulieren. Dabei zeigt sich, ob die SchülerInnen diese Vorstellung von Wahrscheinlichkeiten verstanden haben. Außerdem ist es hier wichtig, genau auf die Unterschiede zwischen $P(A|B)$ und $P(B|A)$ sowie zwischen $P(A \cap B)$ und $P(A|B)$ einzugehen, um diese Fehlerquellen zu minimieren.
Im Anschluss an dieses Beispiel empfiehlt es sich, die Schreibweisen und Formulierungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten anhand einfacher Aufgaben zu üben. Dadurch können die neuen Erkenntnisse gefestigt werden sowie mögliche Fehlvorstellungen erkannt und folglich beseitigt

werden:
z.B. P(Person ist Frau | Person ist Mutter) im Vergleich zu P(Person ist Mutter | Person ist Frau)

Bei einfachen Beispielen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten können die Lernenden die Schreibweisen auf zweierlei Art üben:
Zum einen kann man Aufgaben geben, bei denen sie formalsprachliche und umgangssprachliche Formulierungen passend zuordnen müssen. Zum anderen können sie selbstständig bedingte Wahrscheinlichkeiten in Formalsprache oder mathematische Umgangssprache formulieren.
Jetzt ist klargestellt, dass die SchülerInnen Formal- und Umgangssprache richtig erkennen, zuordnen und teilweise selbst formulieren können. Damit ist allerdings noch nicht sicher gestellt, dass die SchülerInnen diese Schreibweisen im jeweiligen Kontext richtig interpretieren und anwenden.

Bevor man weitere Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten bearbeitet, sollten einige Merkregeln im Schulheft festgehalten werden. Dabei wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit, seine Schreibweise und seine Berechnungsmöglichkeiten schriftlich fixiert. Hier ist es notwendig, dass die SchülerInnen mit den formalsprachlichen Formulierungen umgehen können.

Merkregeln

- Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A unter der Bedingung, dass B bereits eingetreten ist, bezeichnet man als die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Man schreibt:
  $P(A|B)$
- Man kann $P(A|B)$ durch die Formel $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ berechnen.
- $P(A \cap B) = P(A|B)*P(B)$ und $P(B \cap A) = P(B|A)*P(A)$
  Da $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ folgt:

$P(A|B) = P(B|A)*P(A) / P(B)$ (Satz von Bayes)

Nun gilt es die Anwendung der Berechnungsmethode für bedingte Wahrscheinlichkeiten durch zahlreiche Beispiele zu üben. Hier ist es nun ebenso sinnvoll, erneut das Ziegenproblem zu betrachten. Dieses kann nun mit Hilfe der Berechnungsmethode für bedingte Wahrscheinlichkeiten folgendermaßen gelöst werden:[165]

A_i … der i-te Umschlag ist leer (i = 1,2,3)

$P(A_i) = 1/3$

Angenommen die SchülerInnen entscheiden sich für das Kuvert 1. Die Lehrkraft öffnet daraufhin Kuvert 3, d.h. Ereignis X=3. Damit sind folgende Wahrscheinlichkeiten festgelegt:

$P(X=3 \mid A_1) = ½$

$P(X=3 \mid A_2) = 1$

$P(X=3 \mid A_3) = 0$

Dadurch kann man nun die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für $P(A_i \mid X=3)$ berechnen.

$P(A_1 \mid X=3) = P(X=3 \mid A_1)*P(A_1) / [(P(X=3 \mid A_1)*P(A_1) + P(X=3 \mid A_2)*P(A_2) + P(X=3 \mid A_3)*P(A_3))] = ½ / (½ + 1 + 0) = ½ / 3/2 = 1/3$

$P(A_2 \mid X=3) = 1 / 3/2 = 2/3$

$P(A_3 \mid X=3) = 0 / 3/2 = 0$[166]

Das zeigt, dass ein Wechsel zu Kuvert 2 die Wahrscheinlichkeit auf ein günstiges Ereignis – Inhalt ist leer – verdoppelt.

Sicherlich stellt die Berechnung des Ziegenproblems gerade durch die formalsprachliche Komplexität eine große Herausforderung für die Lernenden dar. In der Unterstufe ist dieses Beispiel nur im fortgeschrittenen Wahrscheinlichkeitsunterricht zu empfehlen, wenn die SchülerInnen über

165Siehe [5], S. 33.
166Siehe [5], S. 33.

ausreichende formalsprachliche Fähigkeiten verfügen. Dabei müssen immer wieder erklärende umgangssprachliche Formulierungen eingesetzt werden. Auch wenn die SchülerInnen gute formalsprachliche Fähigkeiten besitzen, sind die exakten Berechnungen zum Ziegenproblem für Lernende verhältnismäßig komplex und schwierig. Das Aufstellen der entsprechenden Bedingungen stellt dabei eine große Schwierigkeit dar, die selbst im fortgeschrittenen Unterricht zu bedingten Wahrscheinlichkeiten Probleme hervorruft. Aus diesem Grund ist es fraglich, ob das Ziegenproblem als Einstieg in die Thematik der bedingten Wahrscheinlichkeit gewählt werden kann.

Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit ist wie eingangs gesagt gut geeignet, um anwendungsorientierte Beispiele im Schulunterricht zu besprechen. Sind Begriff, Schreibweisen und Berechnungsmöglichkeiten ausreichend geklärt, können im weiteren Verlauf komplexe Aufgaben zu Problemstellungen aus Wirtschaft oder Medizin betrachtet werden. Ein beliebtes Gebiet stellen hier die medizinischen Testverfahren dar.

Diagnostischen Tests kommen in der Medizin eine tragende Rolle zu, da anhand ihrer Ergebnisse bedeutende Entscheidungen gefällt werden. Zusätzlich wird fast jeder Mensch im Laufe seines Lebens mit medizinischen Testergebnissen konfrontiert. Um mit diesen Testergebnissen passend umzugehen, ist ein Grundverständnis zu bedingten Wahrscheinlichkeiten hilfreich. Für den Schulunterricht sind beispielsweise Testverfahren zur Früherkennung verschiedener Krebsarten, zur HIV-Infektion oder zur Erkennung des Down-Syndroms bei Ungeborenen geeignet.[167]

Diese Testverfahren stellen interessante und anwendungsorientierte Beispiele dar, durch die das Verständnis des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit vertieft werden kann und die gut geeignet sind, um fächerübergreifende Projekte durchzuführen. Dabei können vor allem die Fächer Mathematik, Biologie und Deutsch einbezogen werden.

167Siehe [17].

Um bedingte Wahrscheinlichkeiten darzustellen werden Vierfeldertafeln und Baumdiagramme verwendet. Meiner Ansicht nach sind Baumdiagramme im Anfängerunterricht zu bedingten Wahrscheinlichkeiten nicht zu verwenden. Ihre Darstellungsweise ist kompliziert.

Sicherlich birgt gerade die bedingte Wahrscheinlichkeit einige Schwierigkeiten und Gefahren, die man als Lehrkraft unbedingt berücksichtigen muss. In dem man diese erkennt, kann man falsche Grundvorstellungen auf Seiten der SchülerInnen vermeiden.

3.6.3. Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten

- Rolle der Intuitionen

Der Zusammenhang zwischen bedingten Wahrscheinlichkeiten ist durch den Satz von Bayes mathematisch gesehen relativ einfach. Dennoch gibt es Schwierigkeiten beim Zusammenfügen der intuitiven Vorstellungen mit dem formalen Konzept. Intuitionen kommen bei allen Lernprozessen eine entscheidende Rolle zu. Dabei kann man zwischen primären und sekundären Intuitionen differenzieren. Eine primäre Intuition ist eine „Vorstellung, die sich ohne vorangehende (systematische) Auseinandersetzung mit einem Sachverhalt aufgrund von Vorerfahrung entwickelt.“[168] Im Gegensatz dazu handelt es bei einer sekundären Intuition um eine „Vorstellung, die sich aufgrund vorangegangener (systematischer) Auseinandersetzung mit einem Sachverhalt entwickelt.“[169]

Gerade im Stochastikunterricht bzw. bei bedingten Wahrscheinlichkeiten ist nun die Frage zu stellen, ob es hier überhaupt angemessene primäre Intuitionen gibt. Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten ist die Herausbildung angemessener sekundärer Intuitionen eine wichtige Aufgabe. Einen erfolgreichen Brückenschlag zwischen intuitiven Verständnis und formalen Konzepten zu schaffen, stellt eine große Herausforderung für die Lehrkraft dar.[170]

168Siehe [17].
169Siehe [17].
170Siehe [17].

- Unterschied zwischen $P(A|B)$ und $P(B|A)$

Auf diese Schwierigkeit wurde bereits in den obigen Ausführungen hingewiesen. Dieser Fehler tritt in erster Linie am Beginn der Arbeit mit bedingten Wahrscheinlichkeiten auf. Deshalb ist es wichtig, zunächst anhand einfacher Beispiele die Schreibweisen und Formulierungen zu üben und dadurch die unterschiedliche Bedeutung dieser beiden Wahrscheinlichkeiten aufzuzeigen. Hier ist es ebenso sinnvoll, die Lernenden selbstständig Aufgaben formulieren zu lassen. Dadurch kann ihre Aufmerksamkeit für die sprachliche Formulierung gesteigert werden.[171]

- Unterschied: konjunktive & bedingte Wahrscheinlichkeit

Der Fehler, konjunktive und bedingte Wahrscheinlichkeit gleichzusetzen – $P(A|B) = P(A \cap B)$ – ,tritt ebenso vor allem am Anfang der Thematik der bedingten Wahrscheinlichkeit auf. Hier wird von einem kausalen Zusammenhang zwischen den Ereignissen A und B ausgegangen, aber bedingte Wahrscheinlichkeiten sagen nichts über diesen kausalen Zusammenhang aus. Diesen Fehler kann man mit Hilfe von Baumdiagrammen veranschaulichen oder durch die Deutung als relative Anteile leicht offenlegen.[172]

Sicherlich gibt es weitere Schwierigkeiten oder Fehlvorstellungen, die bei Überlegungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten auftreten können. Dennoch ist bei der Erarbeitung der Vorstellungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten im Schulunterricht häufig ein großes Interesse auf Seiten der SchülerInnen vorhanden. Selbst bei Lernenden, die sonst nicht an mathematischen Themengebieten interessiert sind, lässt sich bei dieser Thematik eine hohe Motivation feststellen. Das liegt zum einen an den anwendungsorientierten und lebensnahen Beispielen. Zum anderen bietet der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit gute Möglichkeiten, um Diskussionen zwischen den SchülerInnen zu initiieren, die u.a. auf den

171Siehe [17].
172Siehe [17].

intuitiven Vorstellungen der Lernenden aufbauen. Dadurch können hier gerade sprachliche Aspekte gut zum Tragen kommen. Dabei ist das notwendige handwerkliche mathematische Rüstzeug auf einfaches Bruchrechnen beschränkt. Dies stellt sicherlich auch einen Faktor dar, warum gerade in diesem Stoffgebiet auch Lernende Engagement zeigen, die sich sonst im Mathematikunterricht zurückhalten.[173]

173Siehe [17].

4. Fazit – aktuelle Situation und Ausblick

4.1. Wahrscheinlichkeit in der Unterstufe?

Wahrscheinlichkeitstheorie ist im mathematischen Schulunterricht unverzichtbar. Gründe für die Behandlung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Mathematikunterricht wurden ausführlich in Kapitel 2 dargestellt. Dennoch ist festzustellen, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie lange Zeit ein Schattendasein im Schulunterricht geführt hat. Auch wenn im Laufe des letzten Jahrzehnts die Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie die Statistik mehr und mehr in den Fokus der Betrachtungen rückte, werden wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte immer noch an den Rand des Mathematikunterrichts gedrängt. Im Gegensatz dazu ist die Statistik bereits im Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehen angelangt.
Diese Entwicklungen werden vor allem bei der Analyse des Lehrplans für Mathematik für die Unterstufe allgemeinbildender höherer Schulen sichtbar. Während das Themengebiet Statistik in jeder Schulstufe der Sekundarstufe I zu behandeln ist, werden Aspekte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht erwähnt.[174]

Begriffe zur Wahrscheinlichkeitstheorie finden sich erst in der 6. Jahrgangsstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen wieder, d.h. im Lehrplan der Oberstufe. Hier werden nun folgende Lehr- bzw. Lernziele formuliert:

> „- Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik
> - Kennen des Begriffes Zufallsversuch, Beschreiben von Ereignissen durch Mengen
> - Kennen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs;
> Auffassen von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile, als relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen
> - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten;

174Siehe [19].

Arbeiten mit der Multiplikations- und der Additionsregel; Kennen des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit
- Arbeiten mit dem Satz von Bayes“[175]

Wie in meinen Ausführungen dargestellt, können diese Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie bereits in der Unterstufe gelehrt werden. Vielmehr ist es eigentlich sogar unerlässlich, zentrale Begriffe und Vorstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie bereits in der Sekundarstufe I zu betrachten. Wie wichtig wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte für die mathematische Allgemeinbildung bzw. für das heutige Berufs- und Alltagsleben sind, ist offensichtlich.
Im Hinblick auf wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte im Schulunterricht stellen sich nun folgende Fragen: Wie können adäquate Grundvorstellungen zu Begriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie aufgebaut werden? Welche Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie sind im Schulunterricht zu bevorzugen?
Die Annahme, dass ein passender Umgang mit den Begriffen der Stochastik durch die Lehrkraft automatisch zu einem angemessenen Verständnis der Begriffe auf Seiten der SchülerInnen führt, muss stark bezweifelt werden. Die zentralen Begriffe Wahrscheinlichkeit und Zufall lassen sich gar nicht erst definieren. Dadurch muss man im Stochastikunterricht besonderes Engagement zeigen, um adäquate Grundvorstellungen bzw. Verständnis für wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte zu ermöglichen. Dafür ist es notwendig, diese zentralen Begriffe bereits in der Unterstufe zu behandeln. Grundvorstellungen und tiefes Verständnis kann in der Regel nur dadurch aufgebaut werden, dass die Begriffe bzw. Aspekte der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer wieder aufgegriffen und so das Wissen über diesen Bereich immer weiter ausgebaut bzw. vertieft wird. Wenn der Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie aber erst in der 6. Jahrgangsstufe aufgegriffen wird, bleibt kaum Zeit, um die Kenntnisse bzw. Grundvorstellungen immer

175Siehe [18].

weiter zu entwickeln. Dies zeigt, dass es dringend empfehlenswert ist, wichtige bzw. grundlegende Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie bereits in der Unterstufe zu lehren sowie nach und nach mit fortschreitenden Jahrgangsstufen auszubauen bzw. zu vertiefen. Sicherlich kommt dabei dem Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff eine wichtige Bedeutung zu. Der Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff findet Anwendung bei Glücksspielen, aber auch bei geometrischen Betrachtungen. Außerdem ist die Laplace'sche Berechnungsmethode bei bedingten Wahrscheinlichkeiten sowie in der Kombinatorik unverzichtbar. Dennoch ist es für ein breit angelegtes bzw. tiefes Verständnis von Wahrscheinlichkeiten nicht empfehlenswert, ausnahmslos den Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu betrachten. Schon im Anfangsunterricht muss die Vielfältigkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sowie die eingeschränkte Anwendbarkeit des Laplace'schen Begriffs dargestellt werden, um mögliche Fehlvorstellungen zu vermeiden. Ansonsten werden derartige Fehlvorstellungen sofort sichtbar, sobald stochastische Situationen vorliegen, die sich nicht dem Laplace'schen Modell zuordnen lassen.
Auch wenn nun die Begriffe Zufall und Wahrscheinlichkeit nicht im Unterstufen-Lehrplan explizit erfasst sind, so ist es dennoch zwingend erforderlich, diese Begriffe im Rahmen des Statistikunterrichts zu behandeln. Dadurch können dann manche Probleme des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe II vermieden werden.
Zu den elementaren Begriffen der Mathematik wie Funktion oder Wahrscheinlichkeit, müssen über Jahre hinweg passende Grundvorstellungen in den einzelnen Schulstufen entwickelt werden, denn tiefes Verständnis für die Begriffe entsteht nicht über Nacht.[176]

Deshalb werden meiner Ansicht nach wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte zukünftig verstärkt in den Fokus des mathematischen Unterrichts der Unterstufe rücken. In anderen Ländern in Europa bzw. der Welt ist dies bereits erfolgt, beispielsweise in unserem Nachbarland Deutschland.

176Siehe [16].

Sowohl in Sachsen als auch in Bayern finden sich bereits Lehrziele der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der 8. Jahrgangsstufe, d.h. in der gymnasialen Unterstufe, wider.[177]

Auch das österreichische Bildungssystem wird sich dieser Tendenz nicht verschließen können. Dies zeigt sich schon bei der universitären Lehrerausbildung, in der die Stochastik einen zentralen Bereich darstellt.

4.2. Sprachliche Aspekte und Wahrscheinlichkeit – Kontext Mehrsprachigkeit

Zum Abschluss meiner Betrachtungen möchte ich noch auf einen weiteren Aspekt des Mathematikunterrichts eingehen, der zukünftig noch stärker an Bedeutung gewinnen wird. Gerade die Rolle der Sprache im Fachunterricht bzw. Mathematikunterricht nimmt immer mehr zu. Durch den Kontext der Mehrsprachigkeit rücken die sprachlichen Fähigkeiten der Lernenden in allen Gegenstandsbereichen in den Fokus.

Inzwischen wird den sprachlichen Fähigkeiten der Lernenden im schulischen Kontext große Bedeutung beigemessen. Empirische Untersuchungen verdeutlichen, dass adäquate Kenntnisse der Unterrichtssprache entscheidend zum Kompetenzerwerb in der Schule beitragen. Dies zeigt, dass Sprachfähigkeit ein zentraler Schlüssel für den Zugang zu Bildung ist und dadurch die sprachlichen Fertigkeiten der SchülerInnen auch im Fachunterricht zu berücksichtigen sind.[178]

Folglich ist Sprachförderung eine Aufgabe aller Fächer, denn Sprache wächst gleichzeitig mit dem Lernen der Fachinhalte:

„Insofern kann man Fach und Sprache nicht voneinander trennen, weder fachdidaktisch, noch sprachdidaktisch, noch lernpsychologisch. Dann müssen Fachinhalte und Sprache aber gleichzeitig gelehrt und gelernt werden.“[179]

177Siehe [20] bzw. [21].
178Siehe [9], S. 61.
179Siehe [13], S. 143.

Dabei gilt es die sprachlichen Fertigkeiten der Lernenden im Fachunterricht in zweierlei Hinsicht zu fördern: Einerseits muss die allgemeine sprachliche Ausdrucksfähigkeit in jedem Unterrichtsfach gelehrt werden. Andererseits geht es um den Ausbau der Sprachfähigkeiten bei spezifisch fachlichen – beispielsweise mathematischen – Sachverhalten.[180]
Wenn Sprachförderung im Fachunterricht gelingt, profitiert nicht nur die Sprache vom Fachunterricht, sondern ebenso setzt die Sprache positive Impulse für den Fachunterricht. Es ist unabdingbar, die Sprache als durchgehendes Unterrichtsprinzip in allen Fächern umzusetzen und somit dafür zu sorgen, dass Sprache und Fachunterricht einander unterstützen und fördern.[181]
Doch wie können die sprachlichen Fertigkeiten der Lernenden im Mathematikunterricht gefördert werden? Welche Herausforderungen und Chancen ergeben sich daraus – speziell auch für den schulischen Unterricht im Kontext Mehrsprachigkeit?

Robert Leisen fordert ausgehend von der These, dass Fachinhalte und Sprache - eng miteinander verbunden - gelehrt und gelernt werden sollten, dass jeglicher Fachunterricht die Merkmale eines sprachsensiblen Unterrichts erfüllt.
Durch einen sprachsensiblen Fachunterricht kann Sprachförderung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich gelingen und es wird ein bewusster Umgang mit der Sprache als Medium gepflegt sowie gegebenenfalls fachliches Lernen nicht durch (vermeidbare) sprachliche Schwierigkeiten gelähmt.[182]
Um das Konzept eines sprachsensiblen Mathematikunterrichts umzusetzen, ist es notwendig, dass die Lehrkraft ausreichende Kenntnisse über die Fachsprache der Mathematik vorweisen kann. Außerdem muss der Lehrer bzw. die Lehrerin die Eigenschaften der Sprache im Schulunterricht sowie die notwendigen sprachlichen Fertigkeiten kennen.

180Siehe [9], S. 61.
181Siehe [9], S. 61.
182Siehe [13], S. 143.

Es ist klar, dass die SchülerInnen vor allem durch den Gebrauch die mathematische Sprache erlernen. Dabei ist es wichtig, dass die Lernenden regelmäßig schriftliche Produkte im Mathematikunterricht anfertigen, die in der Folge durch die Lehrkraft korrigiert werden. So kann man Fehlvorstellungen sowie mangelnde sprachliche Fähigkeiten erkennen und dann durch adäquate Maßnahmen verringern oder gar beseitigen.

Durch spezielle Arbeitsformen und Methoden kann das Sprachverstehen und die sprachliche Produktivität gefördert werden. Beispielsweise kann durch Diskussionen oder Kleingruppengespräche im Mathematikunterricht die mündliche Sprachproduktion angeregt werden. Eine gute Auswahl an passenden Methoden, die einen sprachsensiblen Fachunterricht unterstützen, stellt Josef Leisen in seinen Ausführungen dar:

> „Mit Methoden-Werkzeuge können Lernsituationen gestaltet werden, die sowohl fachlich und sprachlich anregend und herausfordernd sind als auch die jeweiligen Bedürfnisse der Lernenden binnendifferenzierend berücksichtigen. […] Methoden-Werkzeuge haben Aufforderungscharakter. Sie helfen, die Lernenden inhaltsgebunden in kommunikative und kooperative Situationen zu bringen, in denen sie aktiv handeln müssen.“[183]

Als Beispiele für Methoden-Werkzeuge sind Lückentext, Mind-Map, Memory und Wortliste (Liste wichtiger Wörter und Fachbegriffe) zu nennen.[184]
Durch den Einsatz unterschiedlicher Methoden-Werkzeuge kann der Fachunterricht abwechslungsreich gestaltet werden. Dadurch werden zahlreiche Fähigkeiten – sprachliche und fachliche – gebraucht bzw. erlernt und die Motivation der SchülerInnen wird gesteigert.

Gerade im Stochastikunterricht können sprachliche Aspekte berücksichtigt und gefördert werden. Die Wahrscheinlichkeitstheorie bietet gute

183Siehe [13], S. 159.
184Siehe [13], S. 160-161.

Möglichkeiten um Methoden-Werkzeuge, beispielsweise Diskussionen oder Kleingruppengespräche, einzusetzen. Außerdem ist im Stochastikunterricht die passende umgangssprachliche Formulierung unerlässlich für das Verstehen der Begriffe.

Insgesamt zeigt sich, dass bei der Förderung der sprachlichen und fachlichen Fertigkeiten der Lernenden die Gestaltung des Unterrichts eine wichtige Funktion einnimmt. Dieser Aspekt verdeutlicht, dass gerade der Lehrende als Initiator des Unterrichts sowie des Fachsprachengebrauchs die Sprachförderung entscheidend beeinflusst.
Das bedeutet, dass das Professionswissen der mathematischen Lehrkräfte neben den fachlichen Grundlagen und seiner fachdidaktischen Aufbereitung ebenso umfangreiche Kenntnisse in der Fachsprache Mathematik und der Fachsprachvermittlung beinhalten muss. Außerdem muss jeder Lehrende über ausreichende sprachliche Fähigkeiten sowie über Kompetenz in der Sprachvermittlung verfügen.[185]
Dadurch ist klar, dass die sprachlichen und fachlichen Herausforderungen an die Lehrer bzw. Lehrerinnen enorm sind. Dies hat sich in den letzten Jahren durch die Bedingungen der Mehrsprachigkeit im schulischen Alltag noch gesteigert. Eine gute Möglichkeit um sprachliche sowie fachliche Inhalte zu verbinden oder auch um die Heterogenität der Klassen einzubinden, stellt das fächerübergreifende Arbeiten oder der Stochastikunterricht dar.

Insgesamt wird die Bedeutung der sprachlichen Fähigkeiten der Lernenden sowie der Wahrscheinlichkeitstheorie für den Schulunterricht weiter zunehmen. Dabei ist wichtig oder entscheidend, dass die Lehrkräfte über ausreichend Wissen in beiden Bereichen verfügen, um den SchülerInnen eine mathematische Grundausbildung sowie Kompetenzen in sprachlichen Aspekten zu vermitteln. Das sprachliche Potential sowie die Anwendungsorientierung der Wahrscheinlichkeitstheorie stellen

185Siehe [15], S. 299-300.

entscheidende Vorteile für den Ausbau der wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen im Schulunterricht dar.

Literaturverzeichnis

[1] Beckmann, Astrid: Fächerübergreifend unterrichten in Mathematik und Deutsch. Arbeiten mit Gemeinsamkeiten und Differenzen. In: Fenkart, Gabriele/ Lembens, Anja/ Erlacher-Zeitlinger, Edith (Hg.): Sprache, Mathematik und Naturwissenschaften. Innsbruck: StudienVerlag 2010, S. 154-175.

[2] Borovcnik, Manfred: Glücksspiel in Theorie und Praxis. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 22 (1994), S. 9-48.

[3] Borovcnik, Manfred: Nützliche Gesetze über den Zufall – Experimente mit Excel. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 33 (2001), S. 1-22.

[4] Borovcnik, Manfred: Stochastik im Wechselspiel von Intuition und Mathematik. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI Wissenschaftsverlag 1992. (Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik 10)

[5] Götz, Stefan: Von Pferden, Ziegen und unmöglichen Würfeln. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 37 (2004), S. 19-46.

[6] Götz, Stefan/ Reichel, Hans-Christian: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbv&hpt Verlagsgesellschaft 2005.

[7] Groß, Herbert: Elektronische Hilfsmittel in der Unterstufe – insbesondere EXCEL. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 33 (2001), S. 58-70.

[8] Harten, Gerd von/ Steinbring, Heinz: Stochastik in der SekundarstufeI. Köln: Aulis Verlag Deubner 1984. (Untersuchungen zum Mathematikunterricht 8)

[9] Humenberger, Johann/ Reichel, Hans Christian: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. Und ihre Umsetzung im Unterricht. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI Wissenschaftsverlag 1995. (Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik 31)

[10] Kaiser, Hans/ Nöbauer, Wilfried: Geschichte der Mathematik. Für den Schulunterricht. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky 1998.

[11] Kütting, Herbert: Didaktik der Stochastik. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI Wissenschaftsverlag 1994. (Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik 23)

[12] Kütting, Herbert/ Sauer, Martin J.: Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte. Berlin, Heidelberg: Akademischer Verlag Spektrum 2008. (Mathematik Primar- und Sekundarstufe)

[13] Leisen, Josef: Sprachsensibler Fachunterricht. Ein Ansatz zur Sprachförderung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. In: Prediger, Susanne/ Özdil, Erkan (Hg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann Verlag 2011, S. 143-162.

[14] Maier, Hermann/ Schweiger, Fritz: Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Wien: öbv&hpt Verlagsgesellschaft 1999. (Mathematik für Schule und Praxis 4)

[15] Schmidt-Thieme, Barbara: Fachsprache oder: Form und Funktion fachlicher Varietäten im Mathematikunterricht. In: Kadunz, Gert (Hg.): Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker 2010, S. 271-304.

[16] Hauer-Typpelt, Petra: Angemessene Grundvorstellung zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht.
http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2009%20Band%2042/VortragHauerTyppelt.pdf (29.05.2013).

[17] Hauer-Typpelt, Petra: Unbedingt „Bedingte Wahrscheinlichkeit"? Der Satz von Bayes im Schulunterricht.
http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2006%20Band%2039/VortragHauerTyppelt.pdf (29.05.2013).

[18] Lehrplan Mathematik Oberstufe.
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (21.05.2013).

[19] Lehrplan Mathematik Unterstufe.
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (21.05.2013).

[20] Lehrplan Mathematik Bayern.
http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26279 (21.05.2013).

[21] Lehrplan Mathematik Sachsen.
http://www.bildung.sachsen.de/apps/lehrplandb/downloads/lehrplaene/lp_gy_mathematik_2011.pdf (21.05.2013).

[22] Bild Astragali.
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Knuck_dice_Steatite_37x27x21_mm.JPG#file (28.05.2013).

[23] Bild Stein-Schere-Papier.
http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Schere_Stein_Papier.jpg&filetimestamp=20080517173237 (28.05.2013).

[24] Bild Roulette.
http://en.wikipedia.org/wiki/File:French_Layout-Single_Zero_Wheel.jpg (28.05.2013).

SACHERSCHLIESSUNG
der
Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien

Klassifikation

Aufstellungsort: ☐ HoA ☒ HoD

MSC2010: 97K50 – 97D40 – 97D80

BK: 31.04

Schlagwortketten nach RSWK
Wahrscheinlichkeitsrechnung – Schulmathematik – Mathematikunterricht – Schuljahr 5-8 (1234)

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

29. Mai 2013
Datum

Unterschrift

Persönliche Daten

Name:	Ulrike Kornelia Fischer
Geburtsdatum:	31.12.1983
Geburtsort:	Regensburg (Deutschland)
Staatsbürgerschaft:	Deutsch
Familienstand:	Ledig

Eltern:	Mag. Max Fischer (64), Lehrer
	Kornelia Scheppank (57), Erzieherin
Schwester:	Elisabeth Fischer (28), Wirtschaftsinformatikerin

Schulische Ausblidung:

1990-1994 Grundschule St. Wolfgang (Regensburg)

1994-2003 Goethe Gymnasium (Regensburg)

Abschluss: Abitur

Studienlaufbahn:

2004-2006 Deutsche Philologie und Geschichte:

2004 Universität Regensburg, 2004-2006 Universität Wien

2006-2013 Lehramt für Mathematik und Deutsch: Universität Wien