



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Fraktale Geometrie im GZ- und DG-Unterricht“

Verfasserin

Michaela Schmöger

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 456

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramt: Mathematik, Geographie und Wirtschaftskunde

Betreuer: Privatdoz. Mag. Dr. Bernhard Krön

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	1
Einleitung	3
1. Was ist ein Fraktal?	5
1.1. Selbstähnlichkeit.....	6
1.2. Selbstaffinität	10
1.3. Dimension.....	12
1.3.1. Fraktale Dimension.....	13
2. Erzeugung von Fraktalen	23
2.1. Cantor-Menge.....	23
2.2. Die Barnsley-Maschine	25
2.3. Kongruenzabbildungen	27
2.4. Ähnlichkeitsabbildungen	29
2.5. Affine Abbildungen	31
2.6. Beispiele der Barnsley-Maschine	33
2.7. Metrische Räume	37
2.8. Die Hausdorff-Distanz	40
2.9. Der Übergang von (E, d) zu (M, h)	42
3. Didaktische Bemerkungen	47
3.1. Lehrplanbezug	47
3.2. Sozialformen	48
3.2.1. Gruppenunterricht	48
3.2.2. Partnerarbeit	49
3.2.3. Stationenlernen	50
3.3. Begründung des Computereinsatzes	52
3.4. Vorstellung der verwendeten Programme	53
3.4.1. Programm GAM	53
3.4.2. GeoGebra	53
3.4.3. MicroStation	54
4. Unterrichtskonzept	55
4.1. Unterstufe: 4. Klasse	55
4.2. Oberstufe: 7. Klasse	87
Zusammenfassung	117
Literaturverzeichnis	119
Abbildungsverzeichnis	123
Tabellenverzeichnis	135

Anhang	135
Lebenslauf	139

Danksagung

In erster Linie möchte ich mich sehr herzlich bei meinem Professor, Herrn Mag. Dr. Bernhard Krön, bedanken, der stets ein offenes Ohr für mich gehabt und mir wertvolle Ratschläge gegeben hat.

Ein großer Dank gilt ebenfalls meinen Eltern, die mir immer Mut zugesprochen haben sowie für deren persönliche, als auch finanzielle Unterstützung. Ohne ihre Hilfe hätte ich mein Studium nicht absolvieren können.

Ebenso möchte ich mich bei Mario Pannagl und Tomas Musil bedanken, die mir geholfen haben, Computerprobleme zu lösen und mich somit sehr unterstützt haben.

Abschließend möchte ich mich herzlich bei all jenen bedanken, die an dieser Diplomarbeit mitgewirkt haben.

Einleitung

Die fraktale Geometrie wird ihre Sicht der Dinge grundlegend verändern. Es ist gefährlich weiterzulesen. Sie werden es riskieren, ihre kindlichen Vorstellungen von Wolken, Wäldern, Galaxien, Blättern, Federn, Blumen, Felsen, Bergen, Sturzbächen, Teppichen, Steinen und vielen anderen Dingen zu verlieren. Es wird kein Zurück zu ihrer alten Auffassung dieser Dinge mehr geben.

Michael F. Barnsley (Peitgen et al., S. 275)

Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt – und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade.

Benoit Mandelbrot (Mandelbrot, S. 13)

Dadurch brauchen wir eine neue Geometrie, welche die Geometrie der Natur, der unregelmäßigen Formen, miteinschließt. (Vgl. Mandelbrot, S. 13) Denn aufgrund ihrer Irregularität konnten sie früher weder mit der euklidischen noch mit der Differentialgeometrie beschrieben werden. Benoit Mandelbrot hat diese Formen untersucht und benennt (Vgl. Warnecke, S. 136) diese neue Geometrie als fraktale Geometrie (Vgl. Mandelbrot, S. 13), deren Objekte Fraktale genannt werden. (Vgl. Warnecke, S. 136)

Ein Fraktal ist eine Abstraktion, genauso wie ein Punkt, eine Gerade oder eine Ebene. Es gibt aber Strukturen in der Natur, welche einem Fraktal sehr ähnlich sind. (Vgl. Halling et. al, S. 102)

1. Was ist ein Fraktal?

In der Literatur gibt es verschiedene Definitionen eines Fraktales (Vgl. Haftendorn, S. 93), welche nicht zueinander äquivalent sind. (Vgl. Raith, S. 15)

Zwei wichtige Charakteristika werden im Zusammenhang mit Fraktalen immer wieder genannt: Selbstähnlichkeit und keine ganzzahlige Dimension. (Vgl. Haftendorn, S. 93) Die erste Definition nahm Benoit Mandelbrot im Jahr 1977 vor (Vgl. Mandelbrot, S. 373), wonach ein Fraktal (Vgl. Mandelbrot, S. 27) eine Menge ist, deren Hausdorff-Besicovitch-Dimension echt die topologische Dimension übersteigt. Jede Menge mit einer nichtganzzahligen Dimension ist ein Fraktal. (Mandelbrot, S. 27)

Fraktale Muster erscheinen äußerst komplex. Aufgrund der Skaleninvarianz kann man jedoch die Einfachheit der Fraktale erkennen, welche sich hinter dieser Komplexität verbirgt. Skaleninvarianz bedeutet nämlich, dass das Muster, egal ob es vergrößert oder verkleinert wird, immer dasselbe bleibt. (Vgl. Hastings et al., S. 17) Im Folgenden werden zuerst die Bezeichnungen Selbstähnlichkeit und Selbstaffinität definiert. Anschließend wird auf den Begriff der Dimension näher eingegangen.

1.1. Selbstähnlichkeit

Ein Objekt heißt selbstähnlich, wenn ein Teil des Objektes vom ganzen nicht zu unterscheiden ist. (Vgl. Komorek et al., S. 71)

Definition:

Eine nichtleere kompakte Teilmenge A des \mathbb{R}^2 heißt selbstähnlich, wenn sie invariant ist bezüglich eines Systems $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ von kontrahierenden Ähnlichkeitsabbildungen:

$$A = \beta_1(A) \cup \beta_2(A) \cup \dots \cup \beta_m(A). \quad (\text{Dufner et al., S. 17})$$

Somit besteht die Menge A (Vgl. Dufner et al., S. 17) aus einer endlichen Anzahl ähnlich verkleinerter Kopien (Dufner et al., S. 17) $\beta_1(A), \dots, \beta_m(A)$ ihrer selbst. Die Kopien können auch teilweise übereinander liegen. (Vgl. Dufner et al., S. 17)

Beispiele:

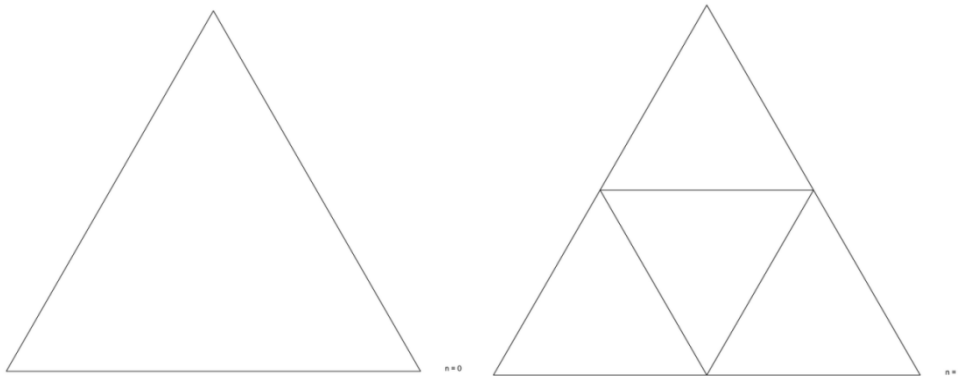
Sierpinski-Dreieck

Das Sierpinski-Dreieck, welches ein klassisches Fraktal ist (Vgl. Peitgen et al., S. 98), geht auf den berühmten polnischen Mathematiker Waclaw Sierpinski zurück, welcher zwischen 1882 und 1969 lebte. Sein Interesse lag in der Zahlentheorie und der Topologie. (Vgl. Dufner et al., S. 19)



Abbildung 1: Waclaw Sierpinski, 1882 - 1969

Das Sierpinski-Dreieck erfüllt durch die iterative Erzeugung die obige Definition der Selbstähnlichkeit. Es wird mit einem gleichseitigen Dreieck gestartet, welches in vier gleich große gleichseitige Dreiecke aufgeteilt wird, von denen anschließend das mittlere entfernt wird. Dieser Prozess wird solange wiederholt, bis ein selbstähnliches Objekt entsteht. (Vgl. Komorek, S. 73)



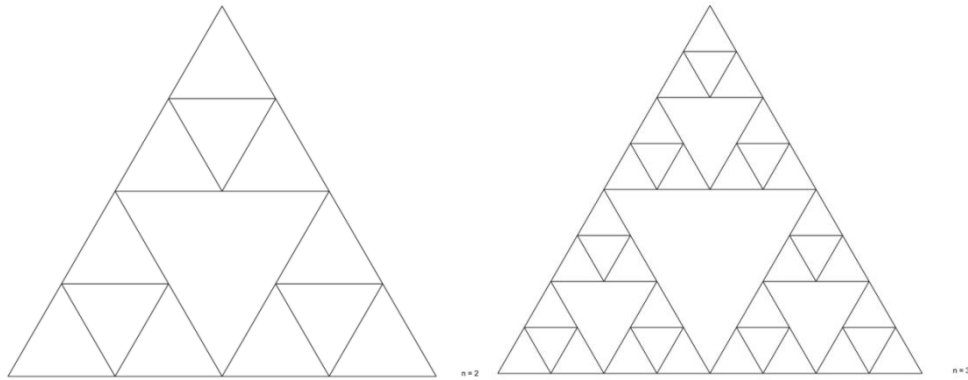


Abbildung 2: Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks

Koch-Kurve

Die Koch-Kurve geht auf den schwedischen Mathematiker Helge von Koch (Vgl. Peitgen et al., S. 107) (1870 – 1924) (Vgl. URL: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Koch.html> Stand 01.11.2013) zurück. Über von Koch ist zwar nur wenig bekannt, allerdings soll er Benoit Mandelbrot durch die interessanten Eigenschaften der Koch-Kurve sehr inspiriert haben. (Vgl. Peitgen et al., S. 109f)



Abbildung 3: Helge von Koch, 1870-1924

Auch die Koch-Kurve erfüllt die Definition der Selbstähnlichkeit, denn jeder (Vgl. URL: <http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/InformatikMathematik/ExperimMathe.pdf> Stand 05.11.2013, S. 191) Teil der Kurve ist ähnlich zur Gesamtkurve. (URL: <http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/InformatikMathematik/ExperimMathe.pdf> Stand 05.11.2013, S. 192) Um so eine Kurve zu erzeugen, muss ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck jede Seite gedrittelt werden. Über dem mittleren Drittel

entsteht ein neues gleichseitiges Dreieck, bei welchem alle Seiten gleich lang sind, wie die anderen Teilstrecken. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis eine Schneeflockenkurve entsteht. (Vgl. URL: <http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/InformatikMathematik/ExperimMathe.pdf> Stand 05.11.2013 Mathematik, S. 192)

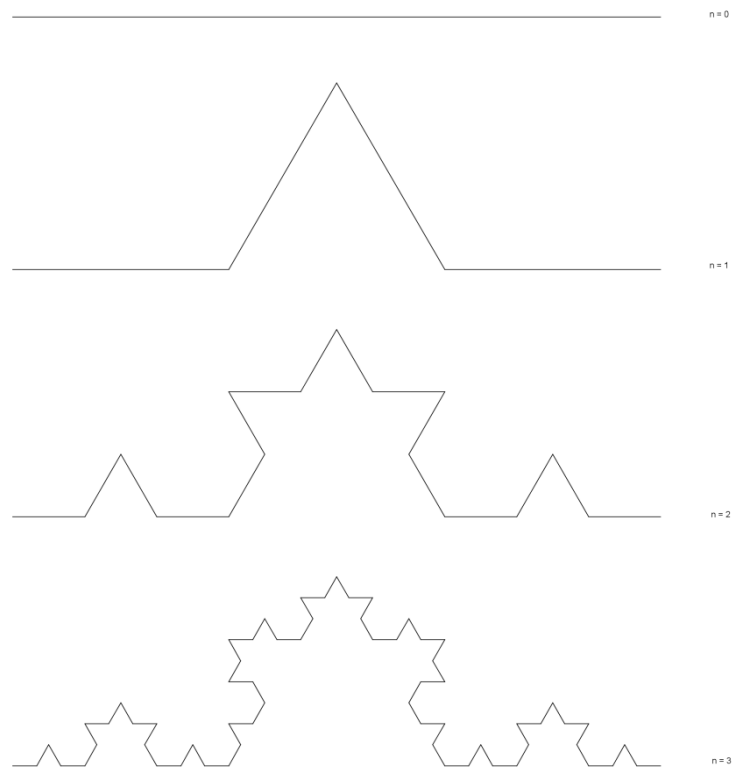


Abbildung 4: Konstruktion der Koch-Kurve

Die Koch-Kurve besitzt einige interessante Eigenschaften:

1. Ihr Umfang ist unendlich lang.
2. Der Inhalt hat einen endlichen Wert.
3. Sie ist selbstähnlich (skaleninvariant).

(Vgl. URL: <http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/InformatikMathematik/ExperimMathe.pdf> Stand 05.11.2013, S. 192)

1.2. Selbstaffinität

Da Selbstähnlichkeit bei realen Objekten oft nicht anzutreffen ist, hat man den Begriff der „Selbstaffinität“ eingeführt, um die Ähnlichkeiten der Fraktale zu beschreiben. Dieser ist weiter gefasst und schließt die Selbstähnlichkeit ein. (Vgl. Komorek et al., S. 73)

Definition:

Die Menge A wird selbstaffin genannt, wenn die Kontraktionen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ (Vgl. Dufner et al., S. 17) in der Invarianzgleichung (Dufner et al., S. 17) $A = \bigcup_{i=1}^m \beta_i(A)$ (Vgl. Dufner, S. 17) affine Abbildungen sind. (Dufner et al., S. 17)

Beispiel:

Cantor-Fläche

Die Cantor-Fläche geht auf den deutschen Mathematiker Georg Cantor, welcher zwischen 1845 und 1918 lebte, zurück. Das erste Mal wurde sie 1883 (Vgl. Peitgen et al., S. 85) als Beispiel für gewisse außergewöhnliche Mengen (Peitgen, S. 85) veröffentlicht. (Vgl. Peitgen et al., S.85)



Abbildung 5: Georg Cantor, 1845-1918

Die Cantor-Fläche entsteht ebenfalls wie das Sierpinski-Dreieck durch Iteration. Zuerst wählt man eine Fläche mit der Länge l_0 und der Breite b_0 mit dem Flächeninhalt A_0 . Danach wird die Fläche gedrittelt und das mittlere Drittel wird entfernt. Die Breite der äußeren Teile wird vergrößert, damit der Flächeninhalt zur ursprünglichen Fläche gleich bleibt, d.h. die Breite vergrößert sich um die Hälfte der ursprünglichen Breite. Dieser Vorgang wird immer wieder ausgeführt (Vgl. Komorek et al., S. 74), wodurch die unten stehende Abbildung entsteht.

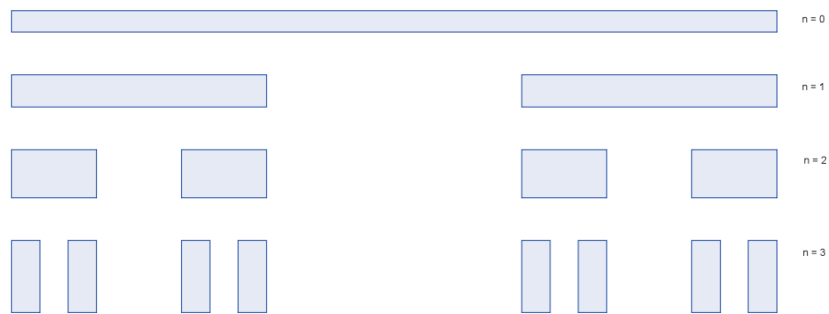


Abbildung 6: Konstruktion der Cantor-Fläche

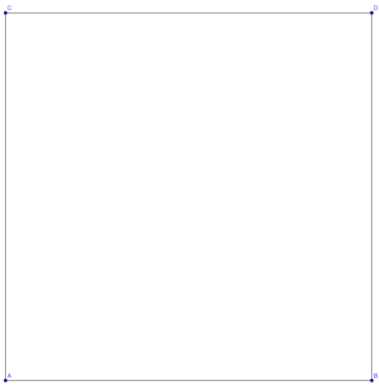
1.3. Dimension

Der Mensch kann nur die erste, zweite, dritte und möglicherweise auch die vierte Dimension begreifen.

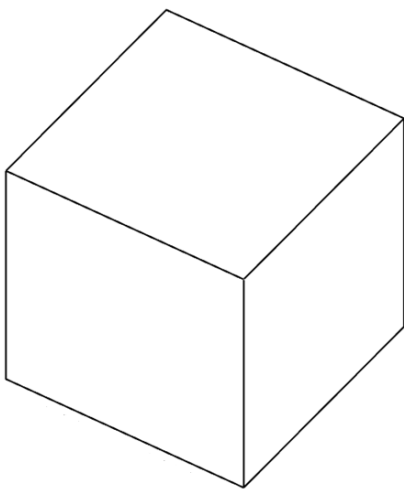
Den eindimensionalen Raum kann man sich als Strecke vorstellen,



den zweidimensionalen Raum als Fläche,



den dreidimensionalen Raum als Würfel,



den vierdimensionalen Raum als vierdimensionalen Würfel, welcher auch Tesseract genannt wird. (Vgl. Reiter, S. 47 f) Die Darstellung ist nur mithilfe einer Projektion in den zwei- oder dreidimensionalen Raum möglich (vergleichbar mit dem Schatten eines dreidimensionalen Objektes auf eine zweidimensionale Wand [...]). (Reiter, S. 48)

Hier ist deutlich zu erkennen, dass die vierte und auch die weiteren Dimensionen dem menschlichen Gehirn Probleme bereiten. (Vgl. Reiter, S. 48)

Die Cantor-Menge entsteht, indem ausgehend vom Intervall $[0,1]$ Teilmengen konstruiert werden, welche durch das Entfernen des mittleren Drittels entstehen. (Vgl. Dufner et al., S. 2) Dadurch besitzt diese Menge die Länge 0. (Vgl. Dufner et al., S. 47) Sie ist nicht „typisch eindimensional“, aber offenbar „mehr als 0-dimensional“. (Dufner et al, S. 47) Wir würden sie daher zwischen diesen beiden Dimensionen einordnen. Die Koch-Kurve hat hingegen eine unendliche Länge und einen Flächeninhalt von 0. Somit kann auch sie keiner der oben beschriebenen Dimensionen beigeordnet werden. Intuitiv würde sie zwischen den Dimensionen eins und zwei eingeordnet werden. (Vgl. Dufner et al., S. 47) Aus diesen Beispielen geht hervor, dass die Dimension bei Fraktalen nicht ganzzahlig ist (Vgl. Stoyan et al., S. 27), was bereits aus dem lateinischen Wort „fractum“ (gebrochen) hervorgeht. (Vgl. Haftendorn, S. 80) Somit wird die Dimension von den natürlichen Zahlen auf die positiven reellen Zahlen erweitert. (Vgl. Reiter, S. 48)

1.3.1. Fraktale Dimension

Laut Mandelbrot ist ein Fraktal (Vgl. Mandelbrot, S. 27) eine Menge [...], deren Hausdorff-Besicovitch-Dimension echt die topologische Dimension übersteigt. (Mandelbrot, S. 27)

Die topologische Dimension ist eine Weiterentwicklung der Dimension des Vektorraumes. Die Dimension des Vektorraumes ist definiert (Vgl. Reiter, S. 48) durch die „Anzahl der Ausdehnungen“ – diese Anzahl gibt an, wie viel aufeinander senkrecht stehende Strecken – maximal – in dem betreffenden Gebilde möglich sind.

(Reiter, S. 48) Bei der topologischen Dimension geht man hingegen von der Dimension 0 aus. (Vgl. Reiter, S. 48f) Eine Punktmenge E hat die topologische Dimension 0, wenn jeder Punkt $P \in E$ in eine beliebige kleine Umgebung eingeschlossen werden kann, deren Rand keinen Punkt von E enthält. (Reiter, S. 49) D_T ist größer Null (Vgl. Reiter, S. 49), wenn sie von keiner kleineren Dimension ist und wenn jeder Punkt $P \in E$ in eine beliebig kleine Umgebung eingeschlossen werden kann, deren Rand die Menge E in einer Menge der Dimension D_T-1 schneidet. (Reiter, S. 49)

Mandelbrots fraktale Dimension wurde stark von der Hausdorff-Dimension beeinflusst. Diese wurde (Vgl. Reiter, S. 49) vom deutschen Mathematiker Felix Hausdorff (1868 – 1942) (Vgl. URL: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hausdorff.html> Stand 06.08.2013) im Jahr 1919 (Vgl. Scheid et al., S. 102) eingeführt und bietet die Möglichkeit, beliebig komplizierten Punktfolgen, wie beispielsweise Fraktalen, eine Dimension zuzuordnen. (Reiter, S. 49)



Abbildung 7: Felix Hausdorff, 1868-1942

Die Dimension hilft uns, die Größe beziehungsweise Dicke der Fraktale zu messen. (Vgl. Raith, S. 12) Das bedeutet, wir bestimmen damit die Dichte in einem metrischen Raum und können die Fraktale dadurch miteinander vergleichen. (Vgl. Barnsley, S. 197)

Die fraktale Dimension kann durch die Selbstähnlichkeits-Dimension sowie durch die Box-Dimension berechnet werden. (Vgl. Peitgen et al., S. 246)

Selbstähnlichkeits-Dimension

Wir beschränken uns hier auf Punktmengen auf einer Geraden, in einer Ebene oder im Raum (Scheid et al., S. 102), die sich in Teilmengen aufteilen lassen, die mit einem bestimmten Faktor k kongruent zur ursprünglichen Punktmenge sind. Hat eine Punktmenge dieses Charakteristikum, so wird sie als selbstähnlich bezeichnet und die Zahl d , welche durch folgende Formeln berechnet werden kann (Vgl. Scheid et al., S. 102),

$$k^d = a \quad \text{bzw.} \quad d = \frac{\log a}{\log k} \quad (\text{Scheid et al., S. 102}),$$

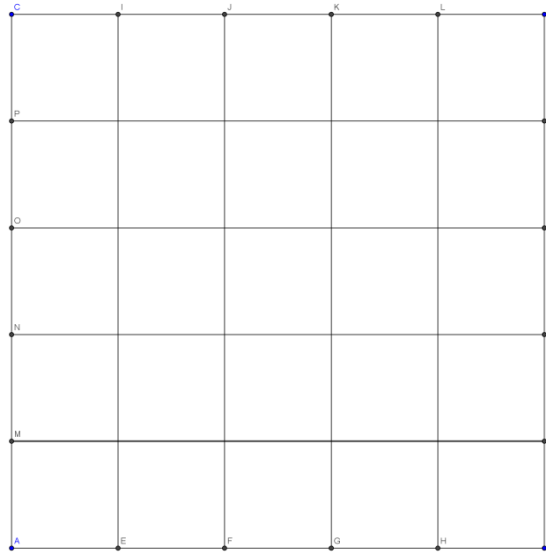
wird Dimension beziehungsweise Selbstähnlichkeitsdimension der Punktmenge genannt. (Vgl. Scheid et al., S. 102)

Beispiele:

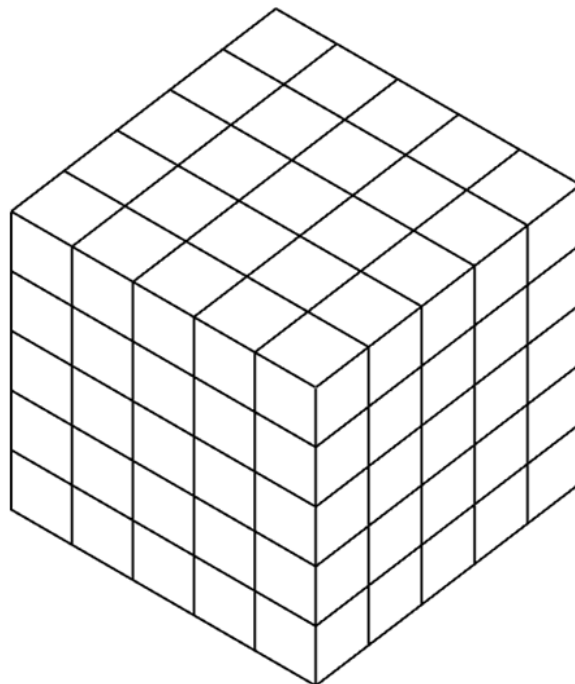
Stellen wir uns eine Strecke vor, welche wir in fünf gleichlange Teilstrecken teilen. Anders ausgedrückt, jede Teilstrecke ist eine Verkleinerung der ursprünglichen Strecke im Maßstab 1:5.



Stellen wir uns nun als nächstes ein Quadrat vor, welches in 25 Teilquadrate zerlegt wird. Die Seitenlänge des Teilquadrates beträgt ein Fünftel der ursprünglichen Seitenlänge.



Zuletzt stellen wir uns einen Würfel vor, welcher in 125 Teilwürfel zerlegt wird. Somit haben die Seitenlängen der Teilwürfel ein Fünftel der ursprünglichen Seitenlängen.



In einer Tabelle ausgedrückt:

Objekt	Verkleinerungsmaßstab der Längen	Original beinhaltet so viele Verkleinerungen	Dimension
Strecke	1 : 5	$5 = 5^1$?
Quadrat	1 : 5	$25 = 5^2$?
Würfel	1 : 5	$125 = 5^3$?

Tabelle 1: Strecke, Quadrat, Würfel

Aus der Tabelle kann man erkennen, dass die Anzahl der Verkleinerungen immer eine Potenz des Verkleinerungsfaktors ist. In einer Gleichung ausgedrückt: (Vgl. Reiter, S. 50)

$$\text{Anzahl der Verkleinerungen} = \text{Längenverkleinerungen}^{\text{Dimension}}$$

$$k = n^d \text{ (Reiter, S. 50)}$$

Um sich die Dimension zu berechnen, muss die Gleichung logarithmiert und durch $\ln(n)$ dividiert werden,

$$d = \frac{\ln(k)}{\ln(n)}$$

wobei k der Anzahl der Verkleinerungen entspricht und n dem Verkleinerungsfaktor. Somit kann man erkennen, dass die Strecke die Dimension 1 hat, das Quadrat die Dimension 2 und der Würfel die Dimension 3. (Vgl. Reiter, S. 50)

Beispiele:

Sierpinski-Dreieck

Man erkennt sofort, dass es drei Teildreiecke gibt und dass die Seiten nur halb so lang wie jene des Originaldreieckes sind.

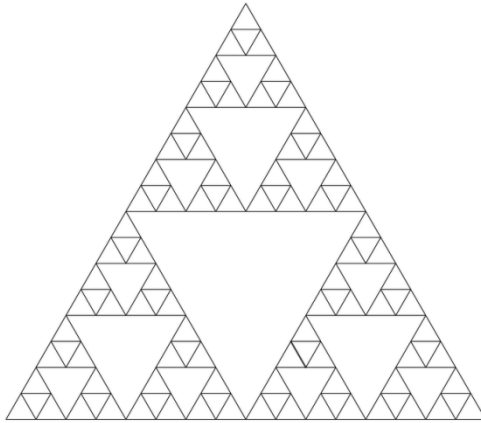


Abbildung 8: Sierpinski-Dreieck

Objekt	Verkleinerungsmaßstab der Längen	Original beinhaltet so viele Verkleinerungen	Dimension
Sierpinski-Dreieck	1 : 2	3	?

Tabelle 2: Sierpinski-Dreieck

Wir benutzen wieder die obige Gleichung, um die Dimension zu berechnen. Da es drei Teildreiecke gibt, ist $k = 3$ und da die Seiten halb so lang sind, ist $n = 2$.

$$k = n^d$$

$$3 = 2^d$$

Um die Gleichung zu lösen, muss der Logarithmus angewandt werden: (Vgl. Reiter, S. 51)

$$\ln(3) = \ln(2^d)$$

$$\ln(3) = d \cdot \ln(2)$$

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = d$$

$$d \approx 1,584962501 \text{ (Reiter, S. 51)}$$

Die Dimension des Sierpinski-Dreieckes ist ca. 1,6. Sie liegt somit zwischen der Dimension einer Strecke und einer Fläche. (Vgl. Reiter, S. 51)

Koch-Kurve

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass von der 0. Ordnung auf die 1. Ordnung 4 Teilstücke entstehen, welche einen Verkleinerungsmaßstab von 1:3 haben.

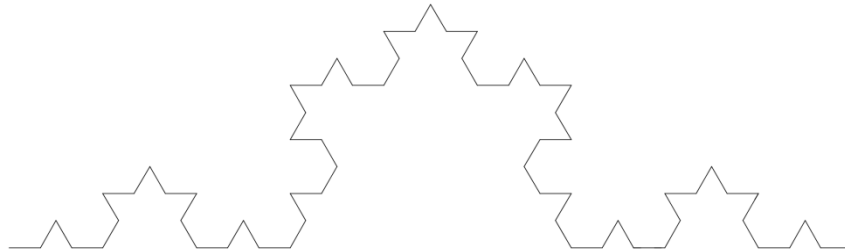


Abbildung 9: Koch-Kurve

Objekt	Verkleinerungsmaßstab der Längen	Original beinhaltet so viele Verkleinerungen	Dimension
Koch-Kurve	1 : 3	4	?

Tabelle 3: Koch-Kurve

Wir benutzen wieder die obige Gleichung. In diesem Beispiel ist $k = 4$ und $n = 3$.

$$k = n^d$$

$$4 = 3^d$$

Um die Gleichung zu lösen, muss der Logarithmus angewandt werden:

$$\ln(4) = \ln(3^d)$$

$$\ln(4) = d \cdot \ln(3)$$

$$\frac{\ln(4)}{\ln(3)} = d$$

$$d \approx 1,261859507$$

Die Dimension der Koch-Kurve beträgt ca. 1,3. Sie liegt somit ebenfalls zwischen der Dimension einer Strecke und einer Fläche, hat aber eine unendlich lange Länge. (Vgl. Reiter, S. 49 f)

Box-Dimension

Neben der Selbstähnlichkeitsdimension kann die fraktale Dimension auch mit Hilfe der Box-Dimension bestimmt werden. Da nicht jedes Fraktal selbstähnlich ist, kann die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Dimension nicht immer angewandt werden. Die Box-Dimension kann hingegen (Vgl. Peitgen et al., S. 256) auf jede Struktur in der Ebene (Peitgen et al., S. 256) verwendet werden und lässt (Vgl. Peitgen et al., S. 256) sich ohne weiteres auf Strukturen im Raum ausdehnen. (Peitgen et al., S. 256)

Um die Dimension zu bestimmen, muss über die Struktur ein regelmäßiges Gitter, welches die Maschenweite s hat, gelegt werden. Die dabei entstehenden Boxen werden gezählt und mit N bezeichnet, wobei N von der Größe von s abhängig ist, weshalb man $N(s)$ schreibt. Als nächstes werden Gitter mit immer kleineren Maschenweiten s über die Struktur gelegt und $N(s)$ wird berechnet. (Vgl. Peitgen et al., S. 257) Der Zusammenhang zwischen Gittergröße und Anzahl der Boxen ist ein Potenzgesetz, welches die fraktale Dimension der Struktur angibt. (Vgl. URL: <http://www.natur-struktur.ch/fraktale/boxdim.html> Stand 02.11.2013)

$$N(\Delta s) \approx c \left(\frac{1}{\Delta s}\right)^D \text{ (Hastings et al., S. 41)}$$

Es genügt, dass

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} N(\Delta s) \Delta s^D = c \text{ (Hastings et al., S. 41)}$$

gilt. Umgeformt für die Berechnung der Box-Dimension erhält man folgende Gleichung (Vgl. Hastings et al., S. 41)

$$D = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[-\frac{\log N(\Delta s)}{\log \Delta s} \right]. \text{ (Hastings et al., S. 41)}$$

Beispiel:

Ist nämlich der Reduktionsfaktor der Maschengröße $\frac{1}{2}$, so wird im nächsten Schritt eine Box zu vier Boxen. Für das Abzählen der Maschen erhalten wir somit eine Folge $N(2^{-k})$, wobei $k = 0, 1, 2, \dots$. Daher steigt die Maschenzahl um den Faktor 2^D an,

wenn dessen Größe immer wieder halbiert wird. D entspricht dabei der fraktalen Dimension. (Vgl. Peitgen et al., S. 257f)

Bei der Box-Dimension ist jedoch zu beachten, dass in der Ebene die Dimension niemals größer als 2 ist. Weiters stimmt sie nur mit der Selbstähnlichkeitsdimension überein, wenn die Maschenweiten sehr gering sind. (Vgl. Peitgen et al., S. 258)

Doch es gibt auch Fraktale, welche weder selbstähnlich sind noch keine ganzzahlige Dimension haben. Deshalb eignen sich diese Charakteristika nicht als Definition. (Vgl. Haftendorn, S. 93)

2. Erzeugung von Fraktalen

2.1. Cantor-Menge

Georg Cantor, welcher 1845 in St. Petersburg geboren und 1918 in Halle gestorben ist (Vgl. Dufner et al., S. 2), stieß während seiner Suche nach Monstern auf eine Punktmenge, von der er behauptete: (Vgl. Zeitler et al., S. 4)

„Je le vois, mais je ne le crois pas!“ (Zeitler et al., S. 4)

Übersetzt bedeutet dies (Vgl. Zeitler, S. 4):

„Ich sehe es, aber ich kann es nicht glauben!“ (Zeitler et al., S. 4)

Die bedeutende Cantor-Menge wird im nachfolgenden Abschnitt konstruiert. (Vgl. Dufner et al., S. 2)

Konstruktion

Ausgehend von dem Intervall $[0,1]$ werden immer wieder Teilmengen konstruiert, welche durch das Entfernen des mittleren Drittels entstehen. Dadurch erhalten wir ausgehend vom ursprünglichen Intervall $A_0=[0,1]$ die neuen Intervalle

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Im nächsten Schritt werden aus den A_1 -Intervallen wiederum die mittleren Drittel entfernt und wir erhalten A_2 .

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

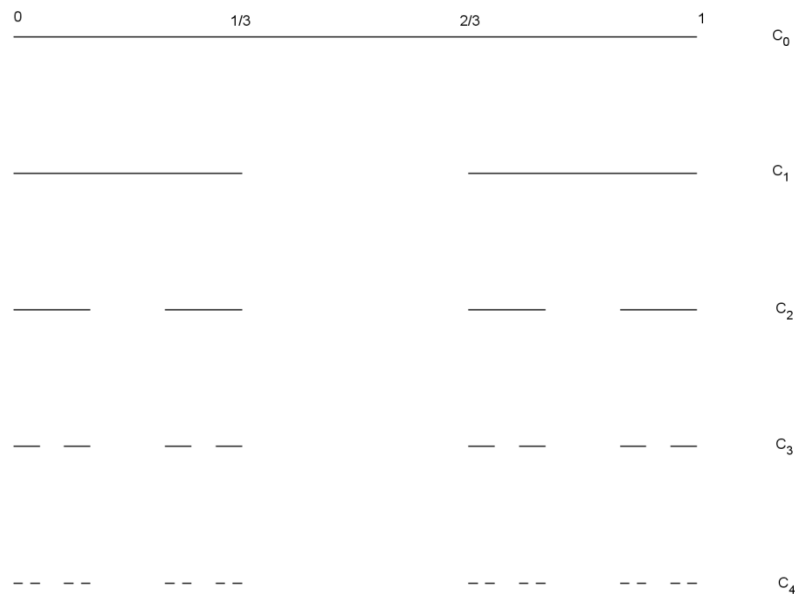


Abbildung 10: Konstruktion der Cantor-Menge

Wird wie oben beschrieben fortgeföhren, so erhält man eine Folge (A_k) mit $A_0=[0, 1]$, $A_{k+1}=A_k \setminus \{\text{mittlere Drittel}\}$.

Aus A_k entstehen 2^k abgeschlossene Intervalle, welche jeweils die Länge $(\frac{1}{3})^k$ besitzen. Diese werden A_k -Intervalle genannt, wobei $A_{k+1} \subseteq A_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Alle Punkte, welche auf einer der Mengen liegen, werden zur Cantor-Menge A zusammengefasst.

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$$

Da alle Mengen A_k aus 2^k abgeschlossenen Intervallen bestehen, wobei jedes die Länge $(\frac{1}{3})^k$ hat, besitzt A_k somit die Gesamtlänge

$$L(A_k)=2^{k*}(\frac{1}{3})^k = (\frac{2}{3})^k.$$

Um die Länge von A zu bekommen, muss aufgrund $A \subseteq A_k$ gelten:

$$L(A) \leq L(A_k) = (\frac{2}{3})^k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

Somit beträgt die Gesamtlänge von A Null. (Vgl. Dufner et al., S. 2f)

Im vorhergehenden Kapitel wurde die Cantor-Menge aus dem Intervall $[0,1]$ durch abermaliges Entfernen des beziehungsweise der mittleren Drittel konstruiert.

Im nachstehenden Kapitel werden iterierte Funktionensysteme vorgestellt, mit deren Hilfe Fraktale erzeugt werden.

2.2. Die Barnsley-Maschine

Michael Barnsley hat eine Maschine erfunden, welche die Iteration veranschaulichen soll. (Vgl. Zeitler et al., S. 93) Sie ist eine Metapher für das iterierte Funktionensystem der Mathematik. (Vgl. Peitgen et al., S. 277) Wir befinden uns im \mathbb{R}^2 .

1. Arbeitsschritt: Verkleinern

Zuerst wird eine kompakte Punktmenge A_0 mit Hilfe einer Ähnlichkeitsabbildung, welche als β bezeichnet wird, verkleinert. Der Verkleinerungsfaktor q liegt zwischen 0 und 1. (Vgl. Zeitler et al., S. 93)

Definition:

Eine Abbildung β heißt distanzkontrahierend, wenn es $q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q \leq 1$ so gibt, daß [sic!] für alle Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$d(\beta(A), \beta(B)) \leq qd(A, B). \text{ (Zeitler et al., S. 93)}$$

In Worten ausgedrückt bedeutet dies, dass der Abstand der Bildpunkte immer kleiner ist als der Abstand der Originalpunkte. q wird von nun an als Kontraktionsfaktor bezeichnet. Somit ist die Ähnlichkeitsabbildung β distanzkontrahierend mit dem Faktor q . (Vgl. Zeitler et al., S. 93)

2. Arbeitsschritt: Kopieren und Anordnen

Die kontrahierte Punktmenge $\beta(A_0)$ (Zeitler et al., S. 93) wird in diesem Arbeitsgang n -mal kopiert. Diese werden nun so angeordnet, dass (Vgl. Zeitler et al., S. 93) sie – bis auf Randpunkte – paarweise disjunkt sind. (Zeitler et al., S. 94). Wir erhalten eine neue Punktmenge, welche als A_1 bezeichnet wird.

$A_1 = \bigcup_n \beta(A_0)$. Eine andere Schreibweise wäre $A_1 = b(A_0)$. Jedem Punkt der Menge

A_0 wird somit $n > 1$ Punkte der neuen Menge zugeordnet. Deshalb sprechen wir nicht von einer Abbildung, sondern von einem Operator, welcher Hutchinson-Operator bezeichnet wird. (Vgl. Zeitler et al., S.94)

3. Arbeitsschritt: Iterieren

Nach den ersten zwei Arbeitsschritten folgt nun die Iteration. (Vgl. Zeitler et al., S. 94) Unter Iteration versteht man einen immer wieder durchgeführten Rechenprozess, bei welchem die Rechenschritte gleich sind. (Vgl. Redaktion Schule und Lernen, S. 205) Das bedeutet, dass nun die Punktmenge A_1 auf die Maschine angewandt wird und wir somit $A_2 = b(A_1) = b^2(A_0)$ erhalten. Wird dies immer wiederholt, so erhält man $A_n = b^n(A_0)$. (Vgl. Zeitler et al., S. 94)

Die Grenzmenge $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n(A_0) = A_\infty$ (Vgl. Zeitler, S. 94) wird als Attraktor bezeichnet. (Vgl. Haftendorn, S. 97)

Da die Barnsley-Maschine immer wieder die gleichen Arbeitsgänge verwendet, ist die Limesmenge A_∞ selbstähnlich. (Vgl. Zeitler et al., S. 94)

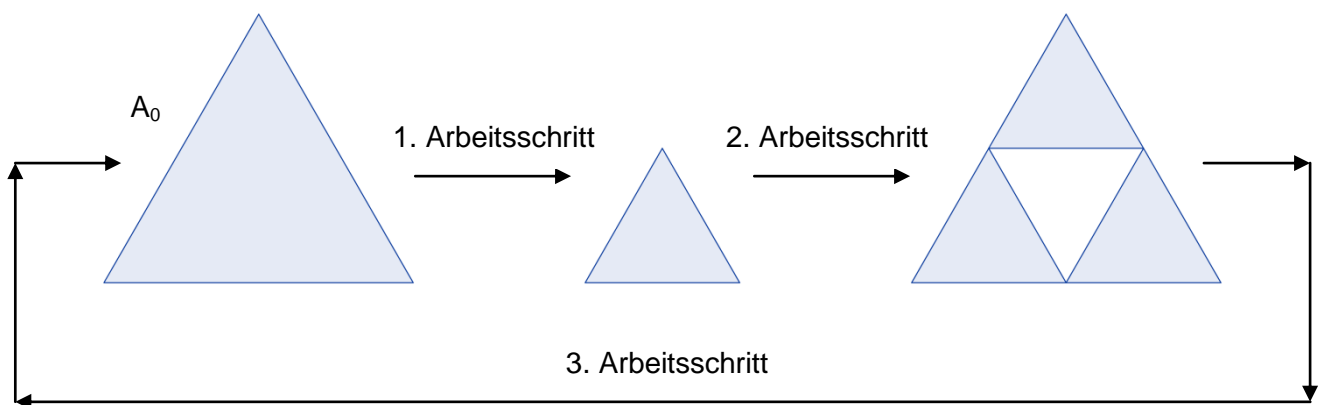


Abbildung 11: Die Barnsley-Maschine am Beispiel des Sierpinski-Dreieckes

Der entscheidende Gedanke dieser Maschine ist die Rückkopplungsfunktion. Das bedeutet, dass die Ausgabe immer zur neuen Eingabe wird. (Vgl. Peitgen et al., S. 277)

Um die Arbeitsschritte der Barnsley-Maschine durchzuführen, werden Abbildungen benötigt, welche im Folgenden näher beschrieben werden. (Vgl. Zeitler et al., S. 102)

2.3. Kongruenzabbildungen

Mathematisch gesehen handelt es sich bei den ersten zwei Arbeitsschritten der Barnsley-Maschine um Abbildungen. (Vgl. Zeitler et al., S. 102)

Definition:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + t_1 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + t_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{t}$$

Eine durch diese Gleichung beschriebene Abbildung der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 auf sich heißt Kongruenzabbildung, wenn die Matrix orthogonal ist.

Die Matrix ist orthogonal, wenn gilt $a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$ und $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$. Dann folgt $\det A = \pm 1$. Im Falle $\det A = \pm 1$ läßt [sic!] A stets in der Form

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ (Drehmatrix),}$$

für $\det A = -1$ in der Form

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

schreiben. (Zeitler et al., S. 102)

Eigenschaften:

Die Kongruenzabbildungen sind invariant und bestimmbar. Sie können nacheinander ausgeführt werden und bilden bei einer Verknüpfung eine Gruppe. (Vgl. Zeitler et al., S. 103)

Beispiele:

Kongruenzabbildungen können als Spiegelungen, Verschiebungen, Drehungen oder Schubspiegelungen auftreten. (Vgl. Scheid et. al, S. 113)

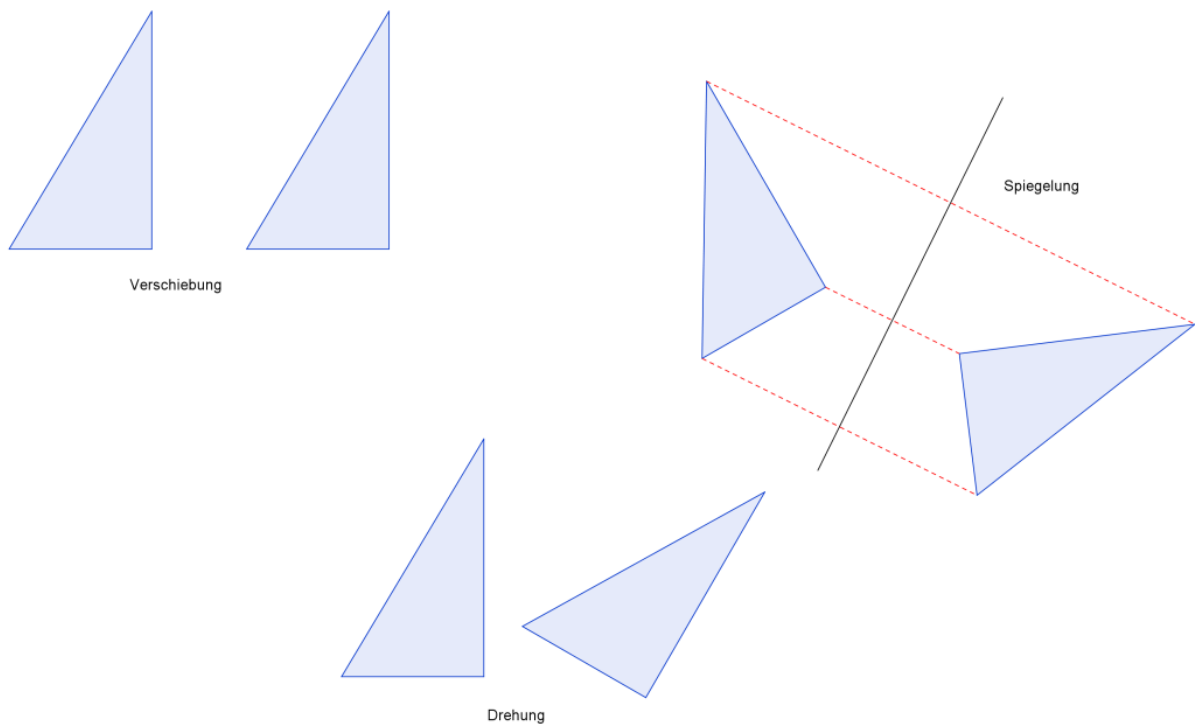


Abbildung 12: Kongruenzabbildungen

2.4. Ähnlichkeitsabbildungen

Definition:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = kA\vec{x} + \vec{t}$$

Eine durch diese Gleichung beschriebene Abbildung der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 auf sich heißt Ähnlichkeitsabbildung, wenn die Matrix A orthogonal ist und weiter gilt $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Zeitler et al., S. 104f)

Ist $k = \pm 1$, so handelt es sich um Kongruenzabbildungen. Für $k^2 \neq 1$ werden die Abbildungen Ähnlichkeitsabbildungen genannt. (Vgl. Zeitler et al., S. 105)

Eigenschaften:

Wie auch die Kongruenzabbildungen, sind die Ähnlichkeitsabbildungen invariant und bestimmbar. Sie können ebenfalls nacheinander ausgeführt werden und bilden eine Gruppe. (Vgl. Zeitler et al., S. 105f)

Beispiele:

Ähnlichkeitsabbildungen können (Vgl. Scheid et al., S. 127) als Verkettung einer Kongruenzabbildung mit einer zentrischen Streckung (Scheid et al., S. 127) aufgefasst werden. (Vgl. Scheid, S. 127) Somit sind Beispiele für Ähnlichkeitsabbildungen Drehstreckungen, Streckspiegelungen, zentrische Streckungen etc. (Vgl. Zeitler et al., S. 107)

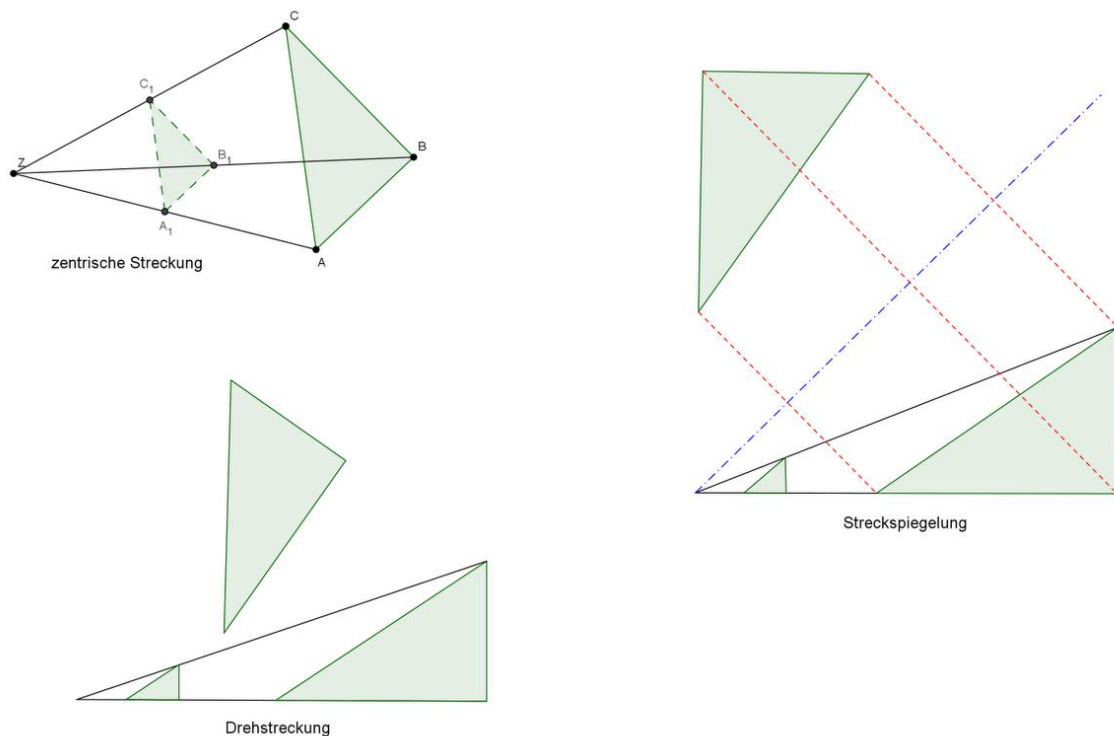


Abbildung13: Ähnlichkeitsabbildungen

2.5. Affine Abbildungen

Definition:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{t}$$

Eine durch diese Gleichung beschriebene Abbildung der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 auf sich heißt affine Abbildung.

Die bijektiven affinen Abbildungen bezeichnet man als Affinitäten. Für sie gilt $\det A \neq 0$. (Zeitler et al., S. 108)

Eigenschaften:

Die affinen Abbildungen sind ebenfalls invariant. Weiters gilt $F' = |\det A| \cdot F$, wobei F der Flächeninhalt der ursprünglichen Figur ist und F' der Inhalt der Bildfigur. (Vgl. Zeitler et al., S. 108)

Definition:

Eine Abbildung β heißt flächenkontrahierend, wenn es $q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q \leq 1$ so gibt, daß [sic!] für den Flächeninhalt F aller Figuren G gilt $F(\beta(G)) \leq q F(G)$. (Zeitler et al., S. 108)

Ist $|\det A| < 1$, so sind die affinen Abbildungen flächenkontrahierend. (Vgl. Zeitler et al., S. 108)

Weitere Eigenschaften der affinen Abbildungen sind die Bestimmbarkeit, die Nacheinanderausführbarkeit und die Bildung einer Gruppe. (Vgl. Zeitler et al., S. 109)

Beispiele:

Beispiele für Affine Abbildungen sind die Achsenaffinität, die Scherung sowie die Doppelstreckung. (Vgl. Zeitler et al., S. 110) Die Scherung kommt dabei besonders oft vor. (Vgl. Scheid et al., S. 138)

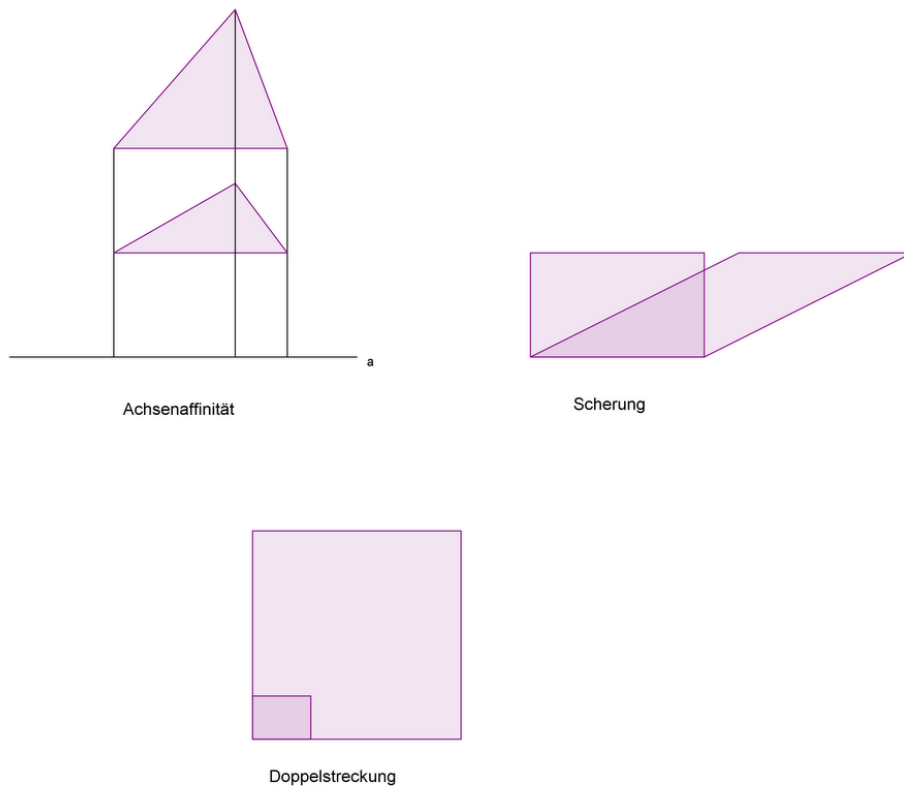


Abbildung 14: Ähnlichkeitsabbildungen

2.6. Beispiele der Barnsley-Maschine

Sierpinski-Dreieck

Im folgenden Abschnitt wenden wir die oben beschriebene Barnsley-Maschine auf das Sierpinski-Dreieck an.

Gestartet wird mit einer kompakten Punktmenge, welche als A_0 bezeichnet wird. In unserem Beispiel wäre dies ein gleichseitiges Dreieck, welches die Kantenlänge 1 hat. (Vgl. Zeitler et al., S. 112)

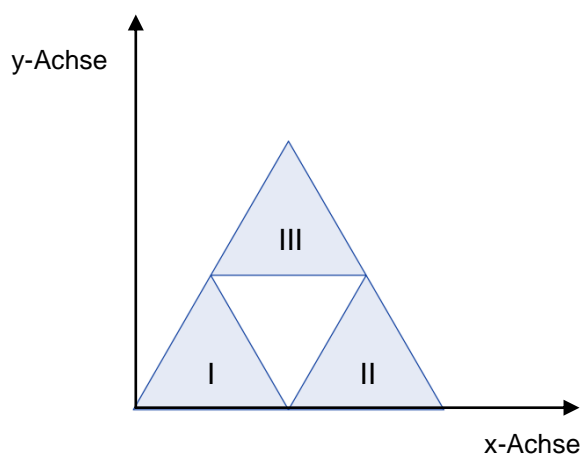
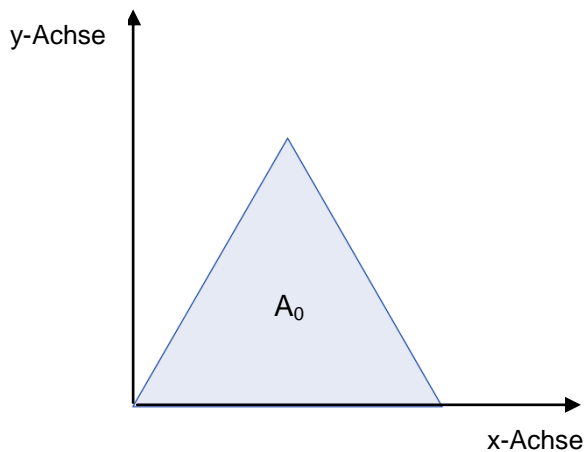


Abbildung 15: Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks

1. und 2. Arbeitsschritt

Um die oben angeführte Abbildung zu erreichen, muss beim ursprünglichen Dreieck eine zentrische Streckung, welche vom Zentrum 0 ausgeht, um den Faktor $k = \frac{1}{2}$ vorgenommen werden.

$$\beta_1 : \quad x'_1 = \frac{1}{2}x_1, \quad x'_2 = \frac{1}{2}x_2$$

Um die zweite Teilfigur zu bekommen, muss ebenfalls eine zentrische Streckung, welche ihren Ursprung im Zentrum 0 hat, um den Faktor $k = \frac{1}{2}$ vorgenommen werden. Anschließend erfolgt eine Verschiebung um $\frac{1}{2}$ parallel zur x-Achse.

$$\beta_2 : \quad x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}, \quad x'_2 = \frac{1}{2}x_2$$

Um die dritte Teilfigur zu erhalten, muss abermals eine (Vgl. Zeitler et al., S. 112f) zentrische Streckung mit Zentrum O und Faktor $k = \frac{1}{2}$ (Zeitler et al., S. 113) durchgeführt werden. Danach werden zwei Translationen getätigt. Die erste parallel zur x-Achse um $\frac{1}{4}$ und die zweite parallel zur y-Achse um $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. (Vgl. Zeitler et al., S. 113)

3. Arbeitsschritt

Unter Verwendung des Hutchinson-Operators (...) können wir schreiben:

$$A_1 = \alpha(A_0) = \beta_1(A_0) \cup \beta_2(A_0) \cup \beta_3(A_0) \quad (\text{Zeitler et al., S. 113})$$

Definition:

Die drei distanzkontrahierenden Funktionen (Ähnlichkeitsabbildungen) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ bilden ein sogenanntes „iteriertes Funktionen System“ – kurz ein IFS. (Zeitler et al., S. 113)

Koch-Kurve

Im nachfolgenden Abschnitt wenden wir die Barnsley-Maschine auch auf die Koch-Kurve an.

Gestartet wird mit einer Strecke, welche die Länge 1 hat. Um die Abbildung 16 zu erreichen, müssen auf die ursprünglichen Strecken Abbildungen angewandt werden. (Vgl. Zeitler et al., S. 114)

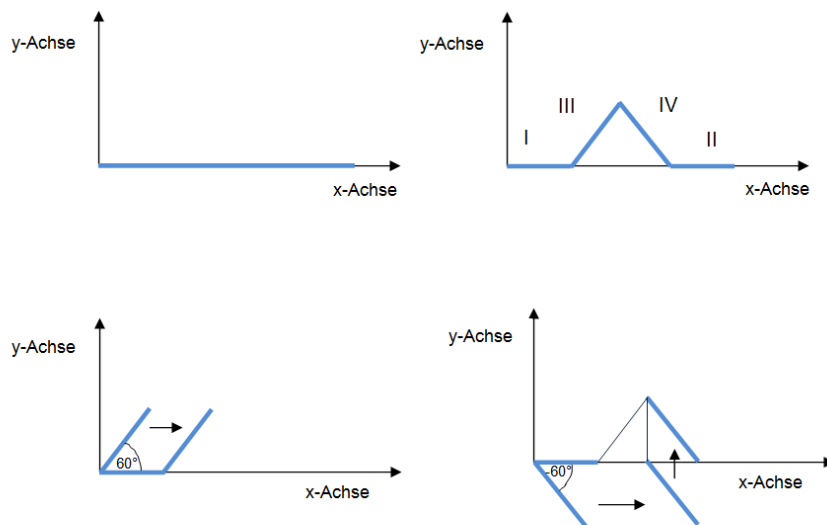


Abbildung 16: Konstruktion der Koch-Kurve

Um die erste Teilstrecke zu erhalten, muss die ursprüngliche Strecke auf ein Drittel ihrer Originallänge gestreckt werden.

$$\beta_1 \quad : \quad x'_1 = \frac{1}{3}x_1, \quad x'_2 = \frac{1}{3}x_2$$

Um die zweite Teilstrecke zu bekommen, muss abermals eine zentrische Streckung vom Ursprung mit dem Faktor $k = \frac{1}{3}$ durchgeführt werden. Anschließend muss diese

Strecke auf der x-Achse um $\frac{2}{3}$ verschoben werden.

$$\beta_2 \quad : \quad x'_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}, \quad x'_2 = \frac{1}{3}x_2$$

Für die dritte Teilstrecke muss die Startstrecke ebenfalls auf $\frac{1}{3}$ ihrer Originalstrecke verkleinert und anschließend um $\alpha = +60^\circ$ gedreht werden. Die Drehstreckung sieht folgendermaßen aus (Vgl. Zeitler et al., S. 115):

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \bar{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \bar{x} \quad (\text{Zeitler et al., S. 115})$$

Anschließend muss diese Drehstreckung auf der x-Achse um $\frac{1}{3}$ verschoben werden.

$$\beta_3 : \quad x'_1 = \frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{6}\sqrt{3}x_2, \quad x'_2 = \frac{1}{6}\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{6}x_2$$

Um die vierte Teilstrecke zu erhalten, muss abermals eine Drehstreckung durchgeführt werden. Die ursprüngliche Strecke wird auf ein Drittel verkleinert und anschließend um $\alpha = -60^\circ$ gedreht. (Vgl. Zeitler et al., S. 115)

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \bar{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \bar{x} \quad (\text{Zeitler et al., S. 115})$$

Danach wird eine Translation durchgeführt, auf der x-Achse um $\frac{1}{2}$ und auf der y-

Achse um $\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

$$\beta_4 : \quad x'_1 = \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{2}, \quad x'_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}\sqrt{3} \quad (\text{Vgl. Zeitler et al., S. 114f})$$

Wird beim dritten Arbeitsgang die Iteration öfters durchgeführt, so (Vgl. Zeitler et al., S. 124) läßt (sic!) die Existenz einer Limesmenge (Zeitler et al., S. 124), das heißt eines Attraktors (Vgl. Zeitler, S. 128), vermuten. (Zeitler et al., S. 124)

In den nachfolgenden Kapiteln wollen wir die Limesmenge exakt beweisen.

2.7. Metrische Räume

Fraktale benötigen metrische Räume (Vgl. Halling et al., S. 13), deshalb wird im folgenden Abschnitt eine Übersicht über Begriffe aus der Topologie metrischer Räume gegeben. (Vgl. Fernau, S. 59)

Definition:

Metrischer Raum (E, d)

Eine (nicht leere) Punktmenge E heißt metrischer Raum [...], wenn es eine Abbildung $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ so gibt, daß [sic!] für alle $A, B, C \in E$ gilt

- i. $d(A, B) \geq 0$ (positiv definit)
- ii. $d(A, B) = d(B, A)$ (symmetrisch)
- iii. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ (koinzident)
- iv. $d(A, B) + d(C, D) \geq d(A, C)$ (Dreiecksungleichung)

$d(A, B)$ nennt man die Distanz der Punkte A und B. (Zeitler et al., S. 12)

Beispiel:

Wir gehen aus vom Raum \mathbb{R}^n der n-Tupel reeller Zahlen $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. (Zeitler et al., S. 128) Um metrische Räume zu bekommen, wird die Distanz d in Euklidischen Räumen wie folgt definiert:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$$

(Vgl. Zeitler et al., S. 128)

Definition:

Vollständig metrischer Raum

Es sei (E, d) (Vgl. Zeitler et al., S. 131) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) heißt Cauchy-Folge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß [sic!] für alle größeren Indizes $m, n > N$ die entsprechenden Folgenglieder einen Abstand kleiner als ε voneinander haben. (Fernau, S. 71) (E, d) (Vgl. Zeitler et al., S. 131) heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in E (Vgl. Zeitler et al., S. 131) einen Grenzwert dortselbst besitzt. (Fernau, S. 71)

Satz

Der Fixpunktsatz von Banach

Jede distanzkontrahierende Abbildung α eines vollständigen metrischen Raumes (E, d) besitzt genau einen Fixpunkt A_∞ , d. h. gibt einen Punkt $A_\infty \in E$ so, daß (sic!) $\alpha(A_\infty) = A_\infty$.

Beweis

1. Schritt

Mit $A_n = \alpha(A_{n-1}) = \alpha^n(A_0)$ und der Tatsache, daß (sic!) eine distanzkontrahierende Abbildung ist folgt für $k, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(A_{k+p}, A_{k+p-1}) &\leq q \cdot d(A_{k+p-1}, A_{k+p-2}) \leq \\ &\leq q^2 \cdot d(A_{k+p-2}, A_{k+p-3}) \leq \\ &\vdots \\ &\leq q^{n-1} \cdot d(A_{k+1}, A_k) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
d(A_{k+1}, A_k) &\leq q \cdot d(A_k, A_{k-1}) \leq \\
&\leq q^2 \cdot d(A_{k-1}, A_{k-2}) \leq \\
&\vdots \\
&\leq q^k \cdot d(A_1, A_0)
\end{aligned}$$

2. Schritt

Nun betrachten wir $d(A_{k+p}, A_k)$. Um die Dreiecksungleichung anwenden zu können, „schieben“ wir die Punkte $A_{k+p-1}, A_{k+p-1}, \dots, A_{k+1}$ zwischen A_{k+p} und A_k .

$$d(A_{k+p}, A_k) \leq d(A_{k+p}, A_{k+p-1}) + d(A_{k+p-1}, A_{k+p-2}) + \dots + d(A_{k+1}, A_k).$$

Nun wenden wir die Ergebnisse des ersten Schrittes

$$d(A_{k+p}, A_k) \leq (q^{p-1} + q^{p-2} + \dots + 1) d(A_{k+1}, A_k).$$

Mit der Summenformel für geometrische Reihen weiter: $\frac{1-q^p}{1-q} d(A_{k+1}, A_k)$

Wegen $0 \leq q \leq 1$ gilt $1-q^p \leq 1$, also

$$d(A_{k+p}, A_k) \leq \frac{1}{1-q} d(A_{k+1}, A_k)$$

Jetzt wird nochmals ein Ergebnis des 1. Schrittes verwendet

$$d(A_{k+p}, A_k) \leq \frac{q^k}{1-q} d(A_1, A_0)$$

3. Schritt

Wählt man k genügend groß, so gilt also $d(A_{k+p}, A_k) < \varepsilon$. Dabei ist ε eine beliebige kleine positive reelle Zahl. Dies bedeutet, daß (sic!) A_0, A_1, A_2, \dots eine Cauchy-Folge ist. Sie muß (sic!) aber in unserem vollständigen metrischen Raum (E, d) gegen eine Element A_∞ aus E konvergieren, also $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_\infty$.

4. Schritt

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(A_n) = \alpha(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \alpha(A_\infty)$$

Das heißt, daß (sic!) A_∞ Fixpunkt der Abbildung α ist. Dabei wurde die Stetigkeit von α verwendet.

5. Schritt

Wir zeigen jetzt noch, daß (sic!) höchstens ein Fixpunkt, also mit dem Vorhergehenden genau einer existiert.

Angenommen es gebe zwei verschiedene Fixpunkte $S, T \in E$.

$$\begin{aligned} d(S, T) &= d(\alpha(S), \alpha(T)) \leq && \text{weil Fixpunkte} \\ &\leq q \cdot d(S, T) < && \text{weil distanzkontrahierend} \\ &< d(S, T) && \text{weil } q < 1 \end{aligned}$$

Also erhalten wir $d(S, T) < d(S, T)$. Dies ist ein Widerspruch. (Zeitler, S. 131f)

Der Fixpunkt wird durch wiederholte Iteration erreicht, unabhängig von dessen Startwert. (Vgl. Zeitler et al., S. 133)

2.8. Die Hausdorff-Distanz

Wir beginnen mit einem vollständigen metrischen Raum (E, d) , wo wir die Menge M aller kompakten Punktmengen analysieren.

Wir interessieren uns für den Abstand zweier kompakter Punktmengen in einem vollständigen metrischen Raum, das bedeutet für den Abstand zweier Elemente der Menge M .

Um dies herauszufinden, wird um alle Punkte eines Elementes A einer kompakten Menge eine Kugel, welche den Radius a besitzt, konstruiert. Dabei sind alle Punkte zu verstehen, welche vom Kugelmittelpunkt P einen kleineren Abstand als a haben. Die Vereinigung dieser Kugeln wird $K_a(A)$ genannt. Weiters ist $A \subset K_a(A)$. (Vgl. Zeitler et al., S. 133f)

Nun wählen wir a minimal (Zeitler et al., S. 134), sodass das Element B aus M gerade noch von der Vereinigung der Kugeln eingeschlossen wird.

Wie um die Punkte von A , zeichnen wir um alle Punkte aus B eine Kugel mit minimalem Radius b , sodass das Element A aus M gerade noch von der Vereinigung der Kugeln $K_b(B)$ überdeckt wird. (Vgl. Zeitler et al., S. 134)

Definition:

Hausdorff-Distanz

Wir bezeichnen das Maximum von a und b als die Hausdorff-Distanz $h(A, B)$ der beiden kompakten Mengen $A, B \in M$. (Zeitler et al., S. 134)

Beispiel:

Gegeben sind zwei Kreisscheiben A und B . Die Mittelpunkte werden mit N beziehungsweise n bezeichnet, die Radien mit R beziehungsweise r , wobei gilt $R > r$. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten beträgt e . Aus der Abbildung 16 können wir ablesen, dass die Kreisscheibe um S , welche den Radius $a=e-R+r$ hat, noch B überlappt und jene um T , welche den Radius $b=e-r+R$ besitzt, noch A überlappt. Aus $a < b$ folgt, dass $h(A, B) = b$. (Vgl. Zeitler et al., S. 134)

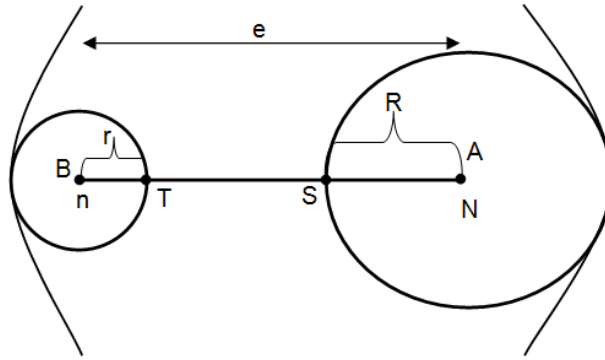


Abbildung 17 : Hausdorff-Distanz

Satz:

Die Menge M aller kompakten Mengen in (E, d) versehen mit der Hausdorff-Distanz h bildet einen vollständigen metrischen Raum (M, h) . (Zeitler et al., S. 135)

2.9. Der Übergang von (E, d) zu (M, h)

Die kompakten Mengen in (E, d) können nun als Punkte des Raumes (M, h) betrachtet werden. (Vgl. Zeitler et al., S. 135)

Satz

In (M, h) ist der Hutchinson-Operator α eine distanzkontrahierende Abbildung, wenn die Abbildungen β_i in (E, d) alle distanzkontrahierend sind.

Beweis

Gegeben sind zwei Mengen $A, B \in M$ mit $h(A, B) = s$. Es ist zu beweisen, daß (sic!) $h(\alpha(A), \alpha(B)) \leq q \cdot h(A, B)$ mit $0 \leq q \leq 1$. Wir beschränken uns auf den Fall, daß (sic!) nur zwei in (E, d) distanzkontrahierende Abbildungen β_1, β_2 mit den Kontraktionsfaktoren q_1, q_2 verwendet werden. (Zeitler et al., S. 137)

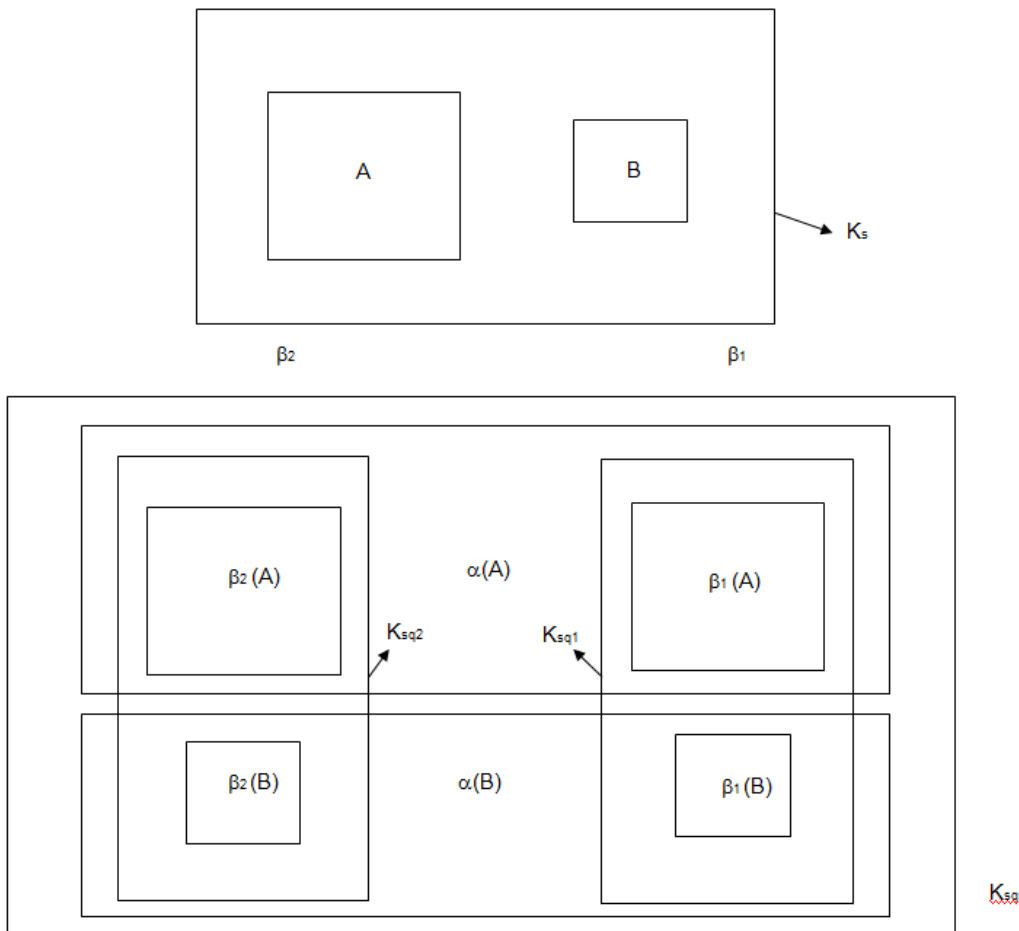


Abbildung 18: Hutchinson Operator

Abbildung 17 zeigt uns auf anschauliche Weise die Ausgangssituation, das bedeutet (Vgl. Zeitler et al., S. 137) die Mengen A und B mit dem zugehörigen Kragen K_s . (Zeitler et al., S. 137)

- a) Zuerst wird die Abbildung β_1 auf die Mengen A und B und den Kragen K_s angewandt. Dadurch hat die Punktmenge $A \cup B$ samt Kragen einen Kugelradius s . Die Abbildung β_1 liefert der neuen Punktmenge $\beta_1(A) \cup \beta_1(B)$ einen Kugelradius von $q \cdot s$.

- b) Durch die Abbildung β_2 bekommt die Punktmenge $\beta_2(A) \cup \beta_2(B)$ samt Kragen einen Radius von $q_2 \cdot s$.
- c) Anschließend ziehen wir um $\alpha(A) = \beta_1(A) \cup \beta_2(A)$ einen Kragen, welcher einen Radius $q = \max \{q_1, q_2\}$ besitzt. Durch die Punkte a) und b) muss diese Punktmenge auch $\beta_1(B)$ und $\beta_2(B)$ einschließen und der Kugelradius ist minimal.
- d) Somit gilt: $h(\alpha(A), \alpha(B)) = q \cdot s = q \cdot h(A, B)$. Da $q < 1$ ist, ist das Obige bewiesen.

Dadurch kann auch der Satz von Banach wieder angewandt werden. Man erhält folgende Aussagen (Vgl. Zeitler et al., S. 137):

i) $\alpha(A_\infty) = A_\infty$

Es gibt in M genau einen Fixpunkt A_∞ .

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(A_0) = A_\infty$

Der Fixpunkt A_∞ wird durch fortgesetzte Iteration erreicht.

iii) Es kann mit jedem Punkt $A_0 \in M$ gestartet werden. (Zeitler et al., S. 137)

Nun kehren wir wieder in den Raum (E, d) und übertragen das Obige auf diesen Raum. So ergibt sich ein neuer Satz. (Vgl. Zeitler et al., S. 137)

Satz

Sind die Abbildungen β_i eines IFS im vollständigen metrischen Raum (E, d) distanzkontrahierend, so liefert unsere Maschine genau eine kompakte Limesmenge A_∞ . Es kann bei der vorzunehmenden Iteration mit jeder beliebigen (in (E, d)) kompakten Punktmenge A_0 gestartet werden. (Zeitler, S. 138)

Durch diesen Satz gibt es einen Beweis für die Existenz von Limesmengen, wobei es egal ist, wie die Ausgangsmenge A_0 aussieht. (Vgl. Zeitler et al., S. 139)

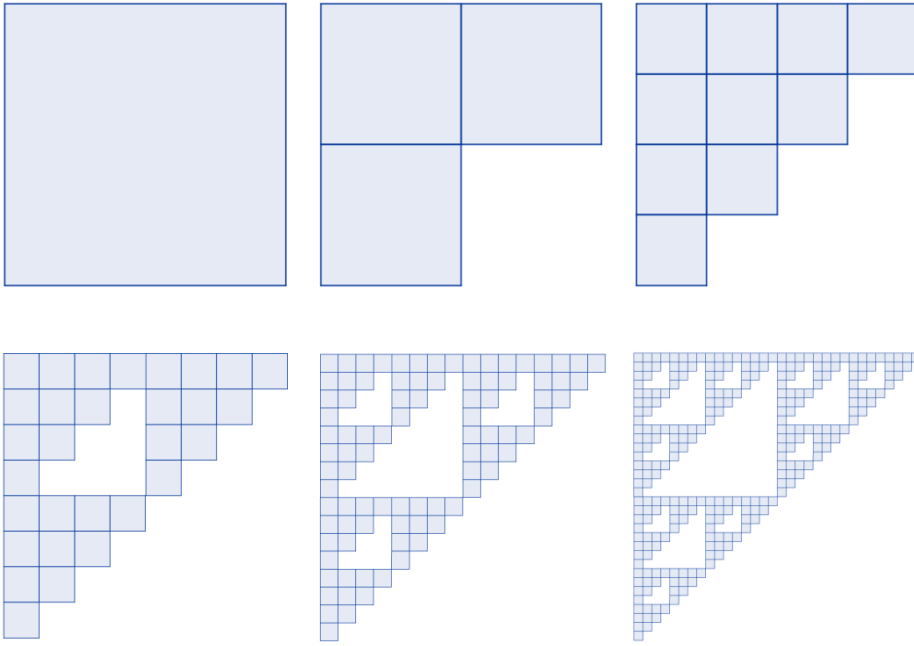


Abbildung 19: Konstruktion des Sierpinski-Dreieckes

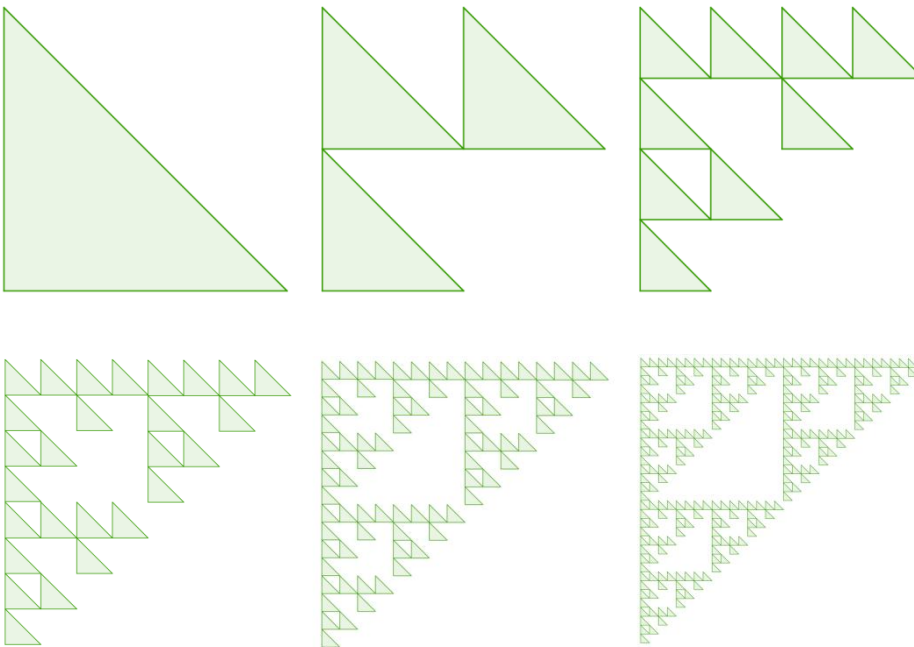


Abbildung 20: Konstruktion des Sierpinski-Dreieckes

Summa Summarum kann festgestellt, dass die Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks unabhängig von der Ausgangsfigur durchgeführt werden kann. (Vgl. Barnsey, S. 100f)

3. Didaktische Bemerkungen

3.1. Lehrplanbezug

Im Lehrplan „Geometrisches Zeichnen (Unterstufe AHS / Hauptschule / NMS)“ wird nicht explizit die fraktale Geometrie angesprochen, jedoch sind einige Punkte vorzufinden, woran angeknüpft werden kann. Zum Beispiel sollen in der dritten Klasse geometrische Körper aus dem Alltag modelliert werden. (Vgl. URL: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/785/ahs10.pdf> Stand 25.08.2013)

Auch im Lehrplan „Darstellende Geometrie (AHS)“ wird nicht ausdrücklich auf die fraktale Geometrie hingewiesen, aber wiederum gibt es einige Anknüpfungspunkte. Zum Beispiel soll die Verbindung zur Mathematik geschaffen werden oder die Schüler und Schülerinnen sollen Gesetzmäßigkeiten analysieren. (Vgl. URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11863/lp_neu_ahs_11.pdf Stand 25.08.2013)

Da Fraktale nicht nur ein Teil der modernen Mathematik sowie der modernen Naturwissenschaften sind, sondern einen wichtigen Beitrag leisten die uns umgebende Welt zu verstehen, sind sie in der allgemeinen mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung unumgänglich. Auch wird der Unterricht lebendiger werden, da die Kreativität der Schüler und Schülerinnen gefördert wird. (Vgl. Komorek et al., S. 103)

3.2. Sozialformen

Zu den vier Sozialformen zählen der Frontalunterricht, die Gruppenarbeit, die Partnerarbeit sowie die Einzelarbeit. (Vgl. Nuhn, S. 7)

Im alltäglichen Unterricht findet eine unausgewogene Bevorzugung von Sozialformen und Handlungsmustern mit hoher Lehrerlenkung statt. Die verfolgten Ziele sind eindeutig auf die Vermittlung von Wissen und die Förderung intellektueller Fähigkeiten ausgelegt. (Nuhn, S. 7)

Da die vorliegenden Unterrichtskonzepte bei den Schülern und Schülerinnen jedoch selbstständiges Denken und Handeln fördern sollen, habe ich mich für Sozialformen wie Gruppenarbeit oder Partnerarbeit entschieden, welche im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt werden.

3.2.1. Gruppenunterricht

Unter Gruppenunterricht versteht man, eine (Vgl. Meyer, S. 242) zeitlich begrenzte Teilung des Klassenverbandes in mehrere Abteilungen arbeitsfähiger Kleingruppen [...], die gemeinsam an der von der Lehrerin gestellten oder selbst erarbeiteten Themenstellung arbeiten. (Meyer, S. 242)

Dadurch können sich die Schüler und Schülerinnen aktiv am Unterrichtsgeschehen beteiligen (Vgl. Meyer, S. 245), da die Steigerung der Selbstständigkeit sich positiv auf diese auswirkt. Auch das solidarische Handeln wird durch das Arbeiten in Gruppen gestärkt. Weiters wird deren Kreativität gefördert. (Vgl. Meyer, S. 251) Somit muss die Rolle des Lehrers beziehungsweise der Lehrerin verändert werden. Er beziehungsweise sie nimmt im Gruppenunterricht eine beratende Funktion ein. (Vgl. Gudjons, S. 35)

Im Unterrichtsgeschehen gibt es unterschiedliche Formen des Gruppenunterrichts:

1. Tägliche Kleingruppenarbeit: Hier werden Klassen aufgrund ihrer Bedürfnislage das ganze Schuljahr differenziert.

2. Kurzzeitige themengleiche Kleingruppenarbeit: Sie wird im Unterrichtsgeschehen besonders oft angewandt. Sie dient der Vertiefung, Bearbeitung oder Neugewinnung von Informationen.
3. Arbeitsteilige Kleingruppenarbeit: Die Kleingruppen bearbeiten über mehrere Unterrichtsstunden unterschiedliche Themen.
4. Gruppenarbeit im Konzept eines Offenen Unterrichts: Gruppen unterschiedlicher Zusammensetzung arbeiten an kleinen Projekten. (Vgl. Gudjons, S. 14f)

3.2.2. Partnerarbeit

Bei der Partnerarbeit arbeiten zwei Schüler beziehungsweise Schülerinnen an einem Arbeitsauftrag. (Vgl. URL: <http://lexikon.stangl.eu/6420/partnerarbeit/> Stand 27.10.2013)

Bei dieser Unterrichtsform müssen die Schüler beziehungsweise die Schülerinnen aktiv werden, denn die Sprechzeit wird um ein Vielfaches erhöht. Auch das Arbeitstempo kann von ihnen selbst bestimmt werden, weshalb die Motivation erheblich erhöht wird. Weiters bekommen „die Schwächeren“ Hilfe „von den Stärkeren“, weshalb ein Lernzuwachs entsteht. Doch auch „die Stärkeren“ gewinnen, denn sie erhöhen ihre Fähigkeiten durch das Erläutern und Erklären.

Die Partnerarbeit hat verschiedene Einsatzmöglichkeiten. Sie dient zur Erarbeitung, Wiederholung etc. (Vgl. Nuhn, S. 13f)

Wie auch bei der Gruppenarbeit sind Vorteile der Partnerarbeit die erhöhte SchülerInnenaktivität (Vgl. Nuhn, S. 8), die Erziehung zu partnerschaftlichen Verhalten (Nuhn, S. 8) und die vermehrte Kreativität. (Vgl. Nuhn, S. 8)

3.2.3. Stationenlernen

Ein Hauptmerkmal des offenen Unterrichts ist das selbstbestimmte Lernen gemäß M. Montessori's Motto „Hilf mir, es selbst zu tun!“. Bei dieser Unterrichtsform können die Schüler und Schülerinnen die Inhalte aus dem Lernangebot selbstständig auswählen, die sie anschließend bearbeiten. Das heißt, dass sie den Arbeitsprozess selbst organisieren können. Sie bestimmen die Zeit, das Arbeitstempo und die Reihenfolge der Stationen. Die Arbeitsergebnisse werden auch selbstständig kontrolliert. Der Lehrer oder die Lehrerin nimmt eine Beratungsfunktion ein, denn er oder sie gibt nur Hilfestellung, wenn die Schüler oder Schülerinnen darum bitten.

Im Stationenlernen sollen die Schüler und Schülerinnen einen Lerninhalt an verschiedenen Stationen möglichst vielfältig, aspekt- und abwechslungsreich erarbeiten. Die Aufgabe der Lehrperson ist es, den Inhalt in Lernabschnitte zu gliedern und verschiedene Arbeitsmaterialien und Arbeitsaufträge zur Verfügung zu stellen. Somit nimmt diese eine Berater- oder Betreuerfunktion ein und ist gegebenenfalls als Organisator tätig.

Vorteile des Stationenlernens

- Der Lehrer oder die Lehrerin hat die Möglichkeit, sich aus dem Unterrichtsgeschehen herauszunehmen.
- Der Lehrer oder die Lehrerin hat die Möglichkeit die Klasse zu beobachten.
- Unterschiedliches Arbeitstempo
- Individuelle Bearbeitung eines Themas

Ziele des Stationenlernens

Die unterschiedlichen Kompetenzen werden gefördert:

- Sachkompetenz: Die fachliche Kompetenz, welche vom Lehrplan gefordert wird, kann mit Hilfe des Stationenlernens schülerInnenorientiert erworben werden.
- Methodenkompetenz: Die Schüler und Schülerinnen arbeiten selbstgesteuert und eigenständig.
- Sozialkompetenz: Die Schüler und Schülerinnen arbeiten an den Stationen in verschiedenen Sozialformen. (Vgl. Rinschede, S. 284f)

Durch den Stationenbetrieb sollen die Schüler und Schülerinnen verstehen, was sich hinter dem Wort „Fraktal“ beziehungsweise „Fraktale Geometrie“ verbirgt. Dazu gibt es sieben Pflichtstationen und zwei Wahlstationen, wobei letztere bezwecken, einen „Stau“ zu verhindern.

3.3. Begründung des Computereinsatzes

Die Entwicklung des Computerzeitalters hat die Sichtweise auf die Geometrie revolutioniert. Das herkömmliche Konstruieren mit Zirkel und Lineal wird weitgehend durch das Konstruieren und Modellieren am Computer ersetzt. (Vgl. Pillwein et al., Raumgeometrie, S. 3) In den Lehrplänen „Darstellende Geometrie“ und „Geometrisches Zeichnen“ wird jedoch beides gefordert. Die Schüler beziehungsweise die Schülerinnen sollen somit nicht nur zeitgemäße CAD-Programme verwenden, sondern auch per Hand konstruieren. (Vgl. URL: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/785/ahs10.pdf> Stand 25.10.2013 und URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11863/lp_neu_ahs_11.pdf Stand 25.10.2013). Daher gibt es auch im vorliegenden Unterrichtskonzept Sequenzen, wo die Schüler beziehungsweise die Schülerinnen händisch etwas konstruieren und Sequenzen, wo der Computer verwendet wird.

Die dynamischen Geometriesysteme sind als Unterstützung (Vgl. Weigand et al., S. 156) bei der Behandlung herkömmlicher Inhalte (Weigand et al., 156) anzusehen. Da solche Systeme zum tieferen Verständnis beitragen (Vgl. Weigand et al., S. 28), sollen die Schüler und Schülerinnen ihr Wissen sowohl anwenden als auch erweitern. Dies kann zum Beispiel geschehen, indem sie mit geometrischen Figuren experimentieren. (Vgl. Weigand et al., S. 157)

Ein weiterer Vorteil des Computereinsatzes ist die erhöhte Selbsttätigkeit der Schüler und Schülerinnen (Vgl. Weigand et al., S. 34), was auch im Lehrplan gefordert wird. (Vgl. URL: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/785/ahs10.pdf> Stand 01.11.2013) Dadurch ist der Unterricht auch individualisierter. (Vgl. Weigand et al., S. 34)

3.4. Vorstellung der verwendeten Programme

3.4.1. Programm GAM

Die Abkürzung GAM steht für Generieren, Abbilden, Modellieren. (Vgl. URL: <http://www.gam3d.at/seiten/info.html> Stand 16.08.2013) Dieses Programm soll die Schüler und Schülerinnen in den Unterrichtsfächern Geometrisches Zeichnen sowie Darstellende Geometrie unterstützen, ein räumliches Vorstellungsvermögen zu bekommen. Außerdem soll es ihnen ermöglichen, selbstständig (Vgl. URL: <http://www.gam3d.at/seiten/download.html> Stand 16.08.2013) mit Koordinatensystemen, Koordinaten und Objekten im Raum (URL: <http://www.gam3d.at/seiten/download.html> Stand 16.08.2013) zu arbeiten. Des Weiteren lernen die Schüler und Schülerinnen mithilfe des Programms die (Vgl. URL: <http://www.gam3d.at/seiten/download.html> Stand 16.08.2013) Arbeitsweisen professioneller CAD-3D-Software (URL: <http://www.gam3d.at/seiten/download.html> Stand 16.08.2013) kennen.

Das Programm kann einfach unter folgendem URL :http://www.gam3d.at/seiten/download_gam.html (Stand 23.09.2013) heruntergeladen werden.

3.4.2. GeoGebra

GeoGebra ist eine dynamische Mathematiksoftware, die man kostenlos im Internet abrufen kann. Deshalb ist sie in Schulen auch sehr beliebt. Weiters ist sie leicht verständlich und einfach zu bedienen, wodurch sie von allen Schülern und Schülerinnen jeglicher Altersklasse benützt werden kann. (Vgl. URL: <http://www.geogebra.org/cms/de/> Stand 16.08.2013) Der Name verbindet zwei Teilgebiete der Mathematik, nämlich die Geometrie und Algebra. Entwickelt wurde das Programm im Jahr 2001 von Martin Hohenwarter im Rahmen seiner Diplomarbeit an der Universität Salzburg. Es ist immer wieder weiter entwickelt und

in verschiedenste Sprachen übersetzt worden. (Vgl. URL: <http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/GeoGebra> Stand 16.08.2013)

Inzwischen ist das Programm nicht nur in der 2D-Version erhältlich, sondern auch in der 3D-Version (Vgl. URL: <http://www.geogebra.org/cms/de/> Stand 16.08.2013) und hat zahlreiche Auszeichnungen gewonnen. (Vgl. URL: <http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/GeoGebra> Stand 16.08.2013)

3.4.3. MicroStation

MicroStation ist ein CAD-System, welches weltweites Verbreitungsgebiet hat. (Vgl. URL:

http://old.arch.ethz.ch/space/space.arch.ethz.ch/ws98/files/tutorials/MSt1_WS98.pdf Stand 25.10.2013) Microstation wurde im Jahr 1995 von der Firma MK-CAD geschaffen (Vgl. URL: http://www.high-tech-center.ch/de/htc-geschichte/zeitungsartikel/HTC_0115.pdf Stand 25.10.2013) und ist mittlerweile (Vgl. Pillwein, Raumgeometrie, S. 3) die im AHS-Bereich am weitesten verbreitete CAD-Software. (Pillwein et al., S. 3) Im Programm gibt es bis zu acht verschiedene Ansichten, wodurch der Benutzer oder die Benutzerin das Objekt auch in mehreren Ansichten betrachten kann. (Vgl. URL: http://www.high-tech-center.ch/de/htc-geschichte/zeitungsartikel/HTC_0115.pdf Stand 25.10.2013)

4. Unterrichtskonzept

4.1. Unterstufe: 4. Klasse

Mit Hilfe des vorliegenden Unterrichtsmateriales sollen Begriffe wie „Fraktale“ und „Selbstähnlichkeit“ in Partner- sowie Gruppenarbeit erarbeitet werden. Im Anschluss wird versucht, Naturobjekte durch die Programme GAM und GeoGebra zu erzeugen.

Stundentafel

1. Unterrichtsstunde

Zeitschiene	Inhalt	Methoden/ Medien/ Materialien	Sozialformen	Ergebnis
1 min	Austeilen der Arbeitsblätter			
10 min	SchülerInnen sollen sich die Arbeitsblätter selbstständig durchlesen und die Arbeitsaufträge mit ihrem Partner/ ihrer Partnerin erledigen		Einzelarbeit bzw. Partnerarbeit	Die SchülerInnen sollen Begriffe wie „Fraktale“, „Ähnliche Figuren“ oder „Selbstähnlichkeit“ kennen lernen.
8 min	Besprechung der Arbeitsblätter		Plenum	Die SchülerInnen sollen die Begriffe verstehen und auch anwenden können.
5 min	Bildung von Gruppen zu 8 Personen durch Ziehung von unterschiedlichen Kärtchen		Gruppen zu 8 Personen	

1 min	Austeilen der Arbeitsblätter			
25 min	Bau des Tetraeders		Gruppenarbeiten	Die SchülerInnen sollen den Tetraeder mithilfe der Bastelanleitung bauen.

Zu Beginn der ersten Unterrichtsstunde werden Arbeitsblätter ausgeteilt, deren Inhalt sich die SchülerInnen selbst durchlesen sollen. Anschließend versucht die Lehrperson die auf den Arbeitsblättern angeführten Begriffe zu erarbeiten, sodass die SchülerInnen diese verstehen und auch anwenden können. Begriffe, wie „Ähnliche Figuren“ sollten ihnen bereits aus dem Mathematikunterricht bekannt sein und somit nur wiederholt und gefestigt werden. Daher sollen sie auch die Frage beantworten können, warum die zwei Schildkröten ähnlich zueinander sind. Weiters wird bei dem Begriff „Selbstähnlichkeit“ die Konstruktion des Sierpinski-Dreieckes erläutert. Die ersten zwei Konstruktionsschritte sind vorgegeben und den dritten sollen die SchülerInnen in das vorgegebene Dreieck zeichnen.

Der nächste Unterrichtspunkt ist der eigenständige Bau eines Tetraeders, welcher selbstähnlich ist. Zuerst werden Gruppen zu 8 Personen durch die Ziehung von Kärtchen gebildet. Anschließend sollen sie sich die Bastelanleitung durchlesen und mit den zu Verfügung gestellten Materialien einen Tetraeder bauen. Bei der nachstehenden Arbeitsaufgabe sollen die SchülerInnen feststellen, dass diese Figur die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit erfüllt.

Lernziele der ersten Unterrichtsstunde:

- Ich verstehe, was sich hinter dem Begriff „Fraktale“ verbirgt.
- Ich verstehe, was Begriffe wie „Ähnliche Figuren und Selbstähnlichkeit“ bedeuten und kann diese auch anwenden.

Name: _____ Klasse: _____

Fraktale

Formen der Natur wie eine Wolke, ein Berg oder auch ein Baum lassen sich nicht durch geometrische Formen, wie wir sie kennen, beschreiben. Deshalb brauchen wir neue Figuren, mit denen es möglich ist. (Vgl. Mandelbrot, S. 13) Mit Fraktalen können sowohl Landschaften als auch Bäume, Gräser und Wolken täuschend echt dargestellt werden. (Vgl. Becker et al., S. 223f)

Beispiele für Fraktale in der Natur:



Barnsley-Farn



Blumenkohl



menschliche Lunge

Ähnliche Figuren

Sind zwei Objekte zwar unterschiedlich groß (Vgl. Reichel et al., S. 191), haben aber die gleiche Gestalt (Reichel et al., S. 191), so sind diese ähnlich. (Vgl. Reichel et al., S. 191)

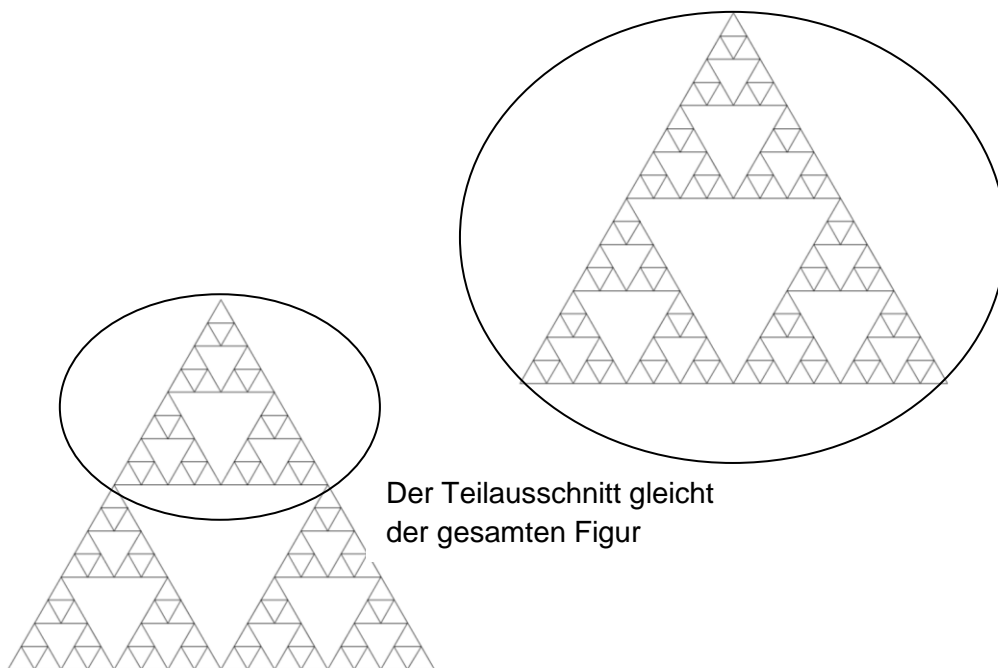
Beispiel: zwei ähnliche Schildkröten



Schildkröten

Selbstähnliche Figuren

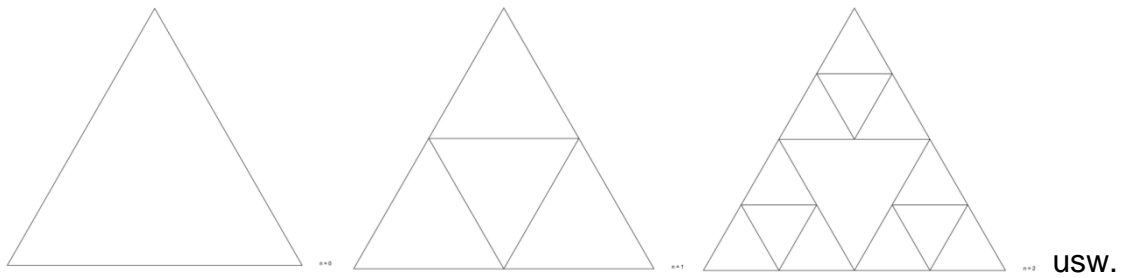
Selbstähnlichkeit bedeutet, dass ein Teilausschnitt der gesamten Figur gleich ist. (Komorek et al., S. 118) Das bedeutet, dass du innerhalb der Figur verkleinerte Kopien ihrer selbst finden kannst. (Vgl. URL: <http://www.docstoc.com/docs/18453002/Fraktale-im-COPYLAB> Stand 22.09.2013)



Beispiel einer selbstähnlichen Figur:

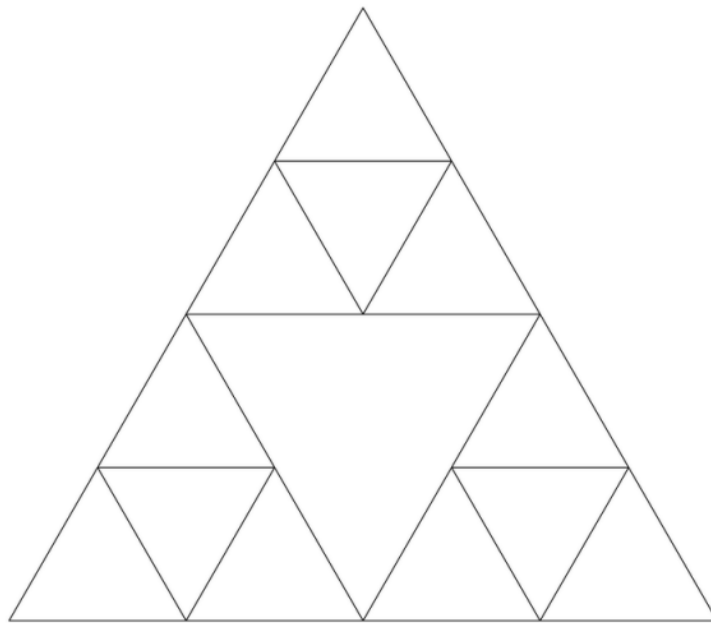
Das Sierpinski-Dreieck ist eine selbstähnliche Figur. Um es zu erzeugen, zeichnet man zuerst ein gleichseitiges Dreieck, welches in vier gleich große gleichseitige Dreiecke aufgeteilt wird, von denen das mittlere entfernt wird. Dieser Prozess wird solange wiederholt, bis ein selbstähnliches Objekt entsteht. (Vgl. Komorek et al., S. 73)

Konstruktion des Sierpinski-Dreieckes:



Das erste Dreieck wird Sierpinski-Dreieck 0. Ordnung genannt, das zweite Sierpinski-Dreieck 1. Ordnung, das dritte Sierpinski-Dreieck 2. Ordnung, usw.

Wie schaut der nächste Schritt aus? Zeichne ihn in das unten abgebildete Dreieck!

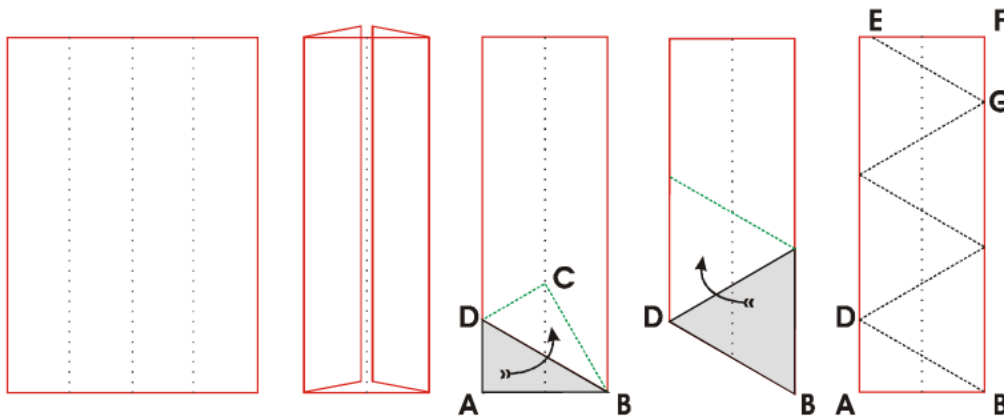


Bastelanleitung für einen Sierpinski-Tetraeder

Nun wollen wir den großen Bruder des Sierpinski-Dreieckes, nämlich den Sierpinski-Tetraeder, selbst bauen. Dazu brauchst du Papier und Kleber.

Anleitung:

Um einen Tetraeder zu falten, musst du ein Din-A4 Papier der Länge nach in vier gleich große Stücke teilen. Die äußeren Viertel werden anschließend nach innen geklappt. Jetzt nimmst du den Eckpunkt A und faltest diesen so, dass er auf Mittellinie des Blattes seinen Platz findet. Anschließend wird der Punkt B auf die linke Kante, das bedeutet, wo D liegt, gefaltet. Dies wird so lange wiederholt, bis man am anderen Ende des Blattes angekommen ist. Dann wird es wieder auseinander geklappt und man erkennt vier gleichseitige Dreiecke und zwei rechtwinklige. Falte es nun zu einem gleichseitigen Tetraeder, wobei die zwei rechtwinkligen Dreiecke ineinander gesteckt werden. (Vgl. URL: http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/did_geo/dateien/tetraeder-1.pdf Stand 23.09.2013)



Faltanleitung

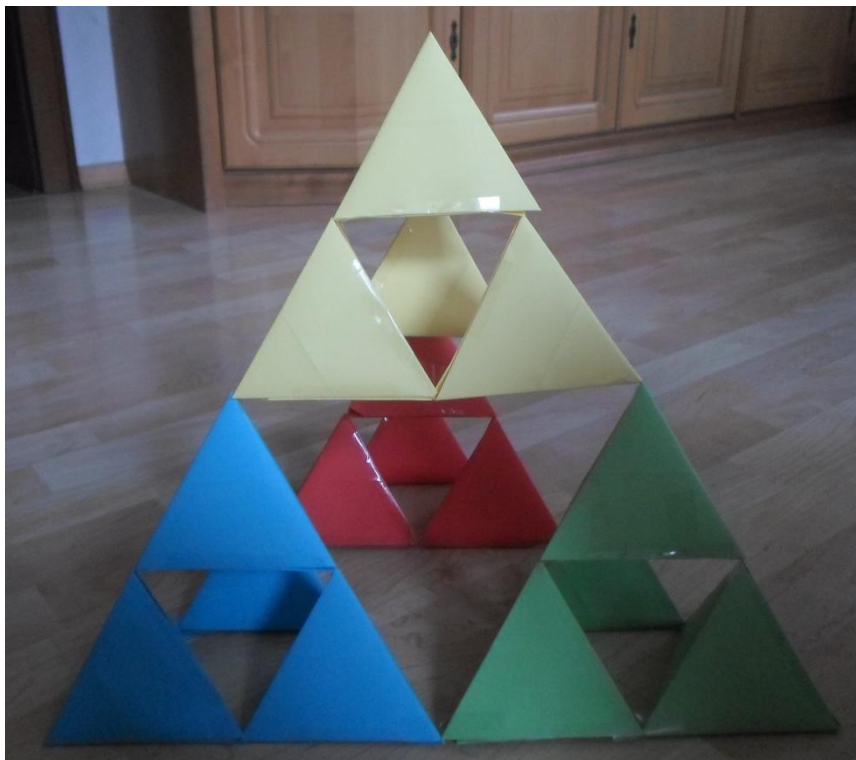
Wiederholt diesen Vorgang so lange, bis ihr von jeder Farbe vier Tetraeder habt.

Arbeitsaufgabe:

Wir starten mit einem kleinen Tetraeder. Dieser wird mit den drei Tetraedern, welche die gleiche Farbe besitzen, zusammengeklebt. Dadurch entstehen vier größere Tetraeder, welche wieder zu einem großen zusammengeklebt werden. (Vgl. URL: https://home.ph-freiburg.de/deisslerfr/science/pp_fraktale/sld017.htm Stand 22.09.2013)

Achtung: Ihr braucht für diesen Bau alle Gruppenmitglieder!

Die Figur sollte wie folgt aussehen:



Was fällt euch an diesem Tetraeder auf?

2. Unterrichtsstunde

Zeitschiene	Inhalt	Methoden/ Medien/ Materialien	Sozialformen	Ergebnis
1 min	Austeilen der Arbeitsblätter			
20 min	Bearbeitung des Arbeitsblattes		Partnerarbeit	Die SchülerInnen sollen verstehen, was eine Drachenkurve ist und wie diese gebildet wird.
5 min	Besprechung der Ordnungen bei einer Drachenkurve		Plenum	
4 min	Bildung von 4er Gruppen		Kleingruppen zu 4 Personen	
15 min	Bearbeitung der Arbeitsblätter		Kleingruppen	Die SchülerInnen sollen verstehen, wie die Drachenkurve gebildet wird.
5 min	Vergleich der Ergebnisse		Plenum	

Zu Beginn der zweiten Unterrichtsstunde werden wieder Arbeitsblätter ausgeteilt, welche die SchülerInnen in Partnerarbeit bearbeiten sollen. In dieser Unterrichtsstunde soll das Fraktal Drachenkurve sowohl mit der Hand als auch mit dem Computer gebildet werden. Zuerst soll die Drachenkurve durch eine Bastelanleitung gefaltet werden. Dabei sollen die unterschiedlichen Ordnungen der Drachenkurve von den SchülerInnen selbst erkannt werden und im Plenum besprochen werden.

Anschließend sollen die SchülerInnen durch gezielte Fragen am Arbeitsblatt verstehen, wie die Drachenkurve gebildet wird und dies selbstständig niederschreiben. Da dies jedoch sehr anspruchsvoll ist, werden aus den Zweiergruppen Teams zu je 4 Personen gebildet. Dazu sollen sich zwei SchülerInnen jeweils zum hinteren oder vorderen Tisch umdrehen. Die Ergebnisse sollen zum Schluss im Plenum verglichen werden.

Lernziele:

- Ich kann eine Drachenkurve selbst erzeugen.
- Ich weiß, wie aus einer Drachenkurve 0. Ordnung eine Drachenkurve 1. Ordnung entsteht, usw.
- Ich kenne das Bildungsgesetz der Drachenkurve.

Name: _____ Klasse: _____

Drachenkurve

Die Drachenkurve ist ein Fraktal, welches die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit erfüllt.

Bastelanleitung:

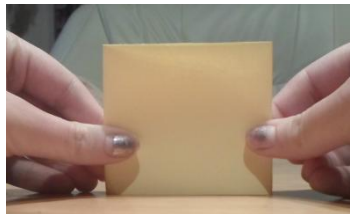
Zuerst wollen wir die Drachenkurve selbst falten. Dazu nimmst du dir einen Papierstreifen, welchen du in zwei Hälften teilst.



Klappe nun den Papierstreifen wieder auf, bis die beiden Hälften einen 90° -Winkel einschließen. Dies ist die erste Stufe beziehungsweise die erste Ordnung zur Konstruktion der Drachenkurve.



Um die nachfolgenden Ordnungen der Drachenkurve herzustellen, musst du die zwei Hälften wieder aufeinander legen und in der Mitte falten. Den neuen Streifen, welchen du gerade erhalten hast, teilst du wieder in zwei Hälften. Diesen Prozess wiederholst du solange es möglich ist. Du solltest aber darauf achten, dass du immer in die gleiche Richtung faltest. Dabei ist es von Vorteil, wenn du das Papier mit der rechten Hand hältst und mit der linken Hand faltest.



Wenn du mit dem Falten fertig bist, kannst du beginnen, die Drachenkurve zu öffnen. Zuerst falte die beiden Hälften auseinander, bis sie einen 90° -Winkel einschließen. Anschließend ziehe alle Hälften nach unten auseinander, bis du die Drachenkurve erkennen kannst! Jede Öffnung einer Faltung entspricht einer neuen Ordnung.

Versuche höhere Ordnungen, welche du aus deiner Faltung erkennen kannst, in die nachfolgende Abbildung einzuzeichnen.



Drachenkurve 0. Ordnung



Drachenkurve 1. Ordnung



Drachenkurve 2. Ordnung

Drachenkurve 3. Ordnung

Drachenkurve 4. Ordnung

Drachenkurve 5. Ordnung

Drachenkurve 6. Ordnung

Drachenkurve 7. Ordnung

Wie viele Stufen hast du geschafft? Vergleiche das Ergebnis mit anderen.
Überlege nun, wie man es schaffen könnte, mehr Ordnungen zu erzeugen!

Vergleicht nun in der Klasse, wie viele Ordnungen jeder beziehungsweise jede geschafft hat.

Mit einem Papierstreifen, welcher das Format DIN A4 hat, wird man höchstens die 7. Ordnung einer Drachenskurve herstellen können. Zwar könnte man mit einem längeren Streifen noch ein paar Ordnungen erzeugen, doch schon bald geht es nicht mehr weiter. Darum werden wir nun versuchen, die Drachenskurve höherer Ordnung mit Hilfe des Computers zu schaffen.

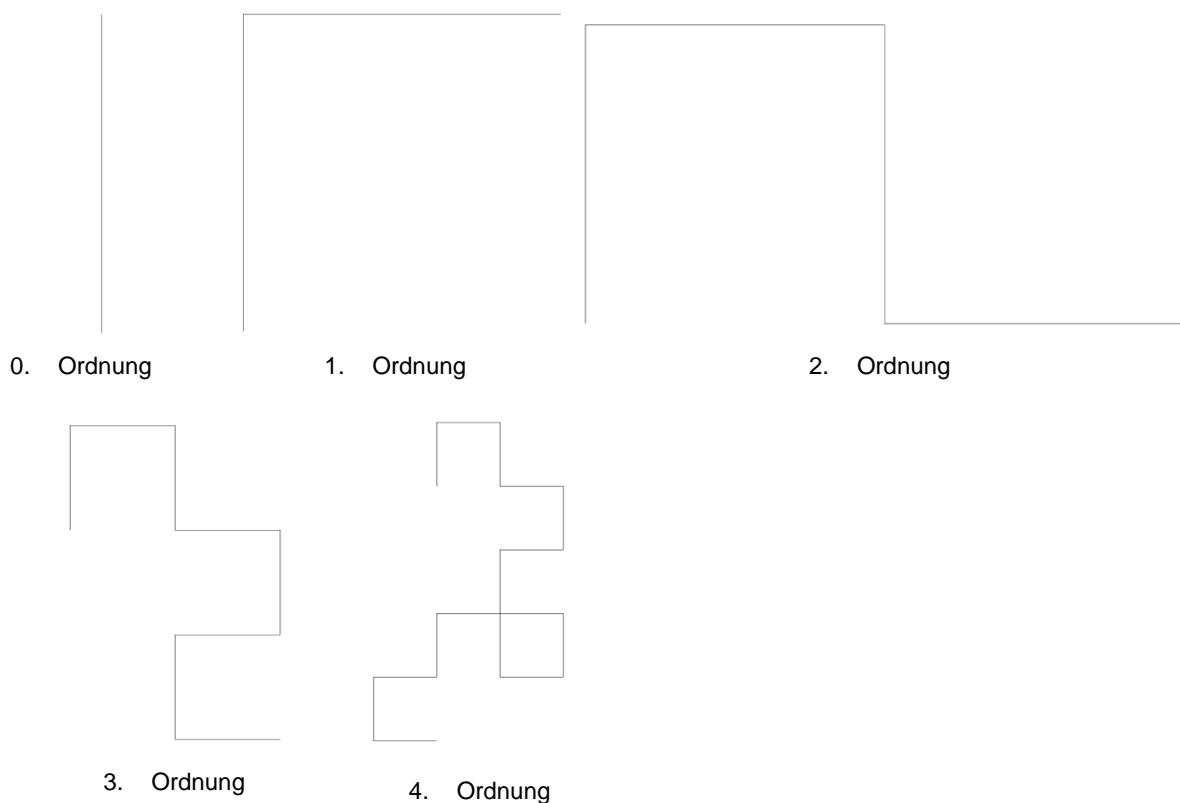
Doch vorher müssen wir uns überlegen, welche Gesetzmäßigkeiten bei der Drachenskurve vorzufinden sind.

Versucht in Gruppen folgende Fragen zu beantworten!

Was muss passieren, um aus der Drachenskurve 1. Ordnung die Drachenskurve 2. Ordnung entstehen zu lassen?

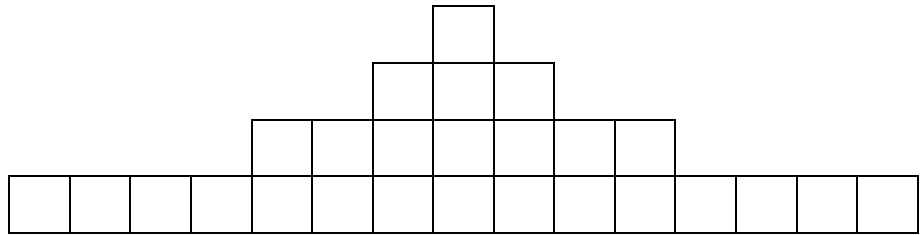
Was muss passieren, um aus der Drachenkurve 2. Ordnung die Drachenkurve 3. Ordnung entstehen zu lassen?

Stell dir vor, du bist eine Schildkröte, welche am Startpunkt der Drachenkurve sitzt und die Drachenkurve abgeht. Dabei musst du manchmal nach links und auch manchmal nach rechts abbiegen. Ermittle deinen Weg und dokumentiere ihn schriftlich. Als Grundlage benutze die folgende Abbildung der unterschiedlichen Ordnungsstufen.



Ermittelter Weg:

1. Ordnung
2. Ordnung
3. Ordnung
4. Ordnung



Fällt euch etwas auf?

Bildungsgesetz:

(Vgl. URL: http://wiki.zum.de/images/9/95/Drachenfalten_Mathetag.pdf, Stand 22.09.2013)

3. Unterrichtsstunde

Zeitschiene	Inhalt	Methoden/ Medien/ Materialien	Sozialformen	Ergebnis
5 min	Wiederholung der letzten Stunde			
15 min	Konstruktion der Drachenkurve bis zur dritten Ordnung		Plenum	Die SchülerInnen sollen die Konstruktion der Drachenkurve am Computer verstehen.
5 min	Erklärung der Aufgabenstellung			
25 min	Konstruktion bis zur 7. Ordnung		Einzelarbeit	Die SchülerInnen sollen die weiteren Ordnungen der Drachenkurve selbstständig konstruieren.

Zu Beginn der dritten Unterrichtsstunde werden die Ergebnisse der vorigen Stunde noch einmal gemeinsam wiederholt. Anschließend wird versucht, die Drachenkurve mithilfe des Programms GAM am Computer zu konstruieren. Die ersten drei Ordnungen sollen dabei gemeinsam konstruiert werden. Danach erhalten die Schüler und Schülerinnen die Aufgabe, die nächsten vier Ordnungen selbstständig zu schaffen. Dies sollte für den optimalen Lernzweck in Einzelarbeit passieren. Hat ein Schüler beziehungsweise eine Schülerin Fragen, soll er oder sie versuchen, diese innerhalb der Klasse zu klären, wenn dies nicht möglich ist, soll die Lehrperson einschreiten. Als Hilfestellung bekommen sie ein Arbeitsblatt, welches möglichst viele Fragen abdecken soll. Als Hausübung sollen sie die Drachenkurve bis zur 10. Ordnung konstruieren.

Lernziele:

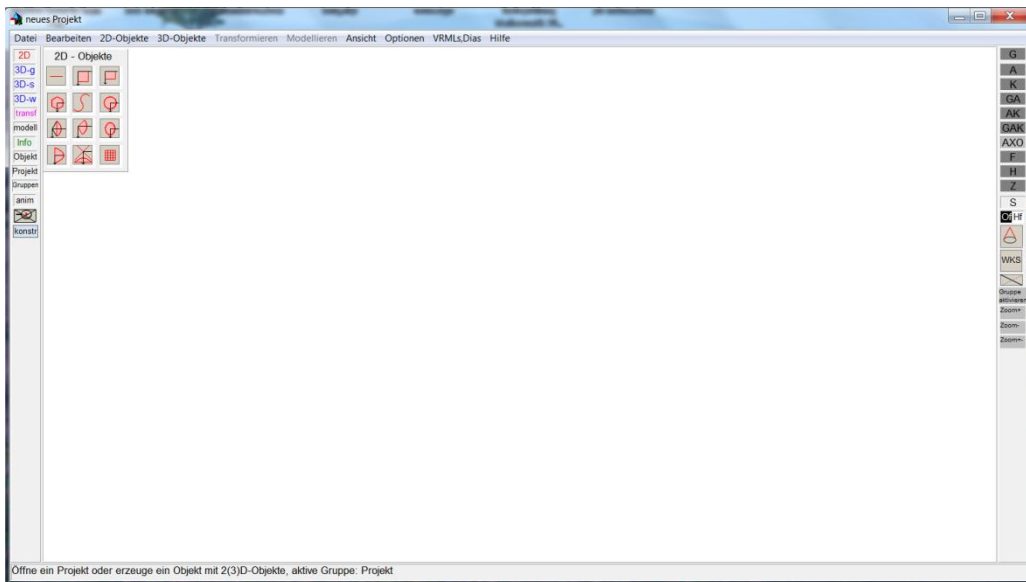
- Ich kann die Drachenkurve sowohl per Hand als auch am Computer herstellen.
- Ich kenne den Aufbau der Drachenkurve.
- Ich kann mit dem Programm GAM umgehen.

Name: _____ Klasse: _____

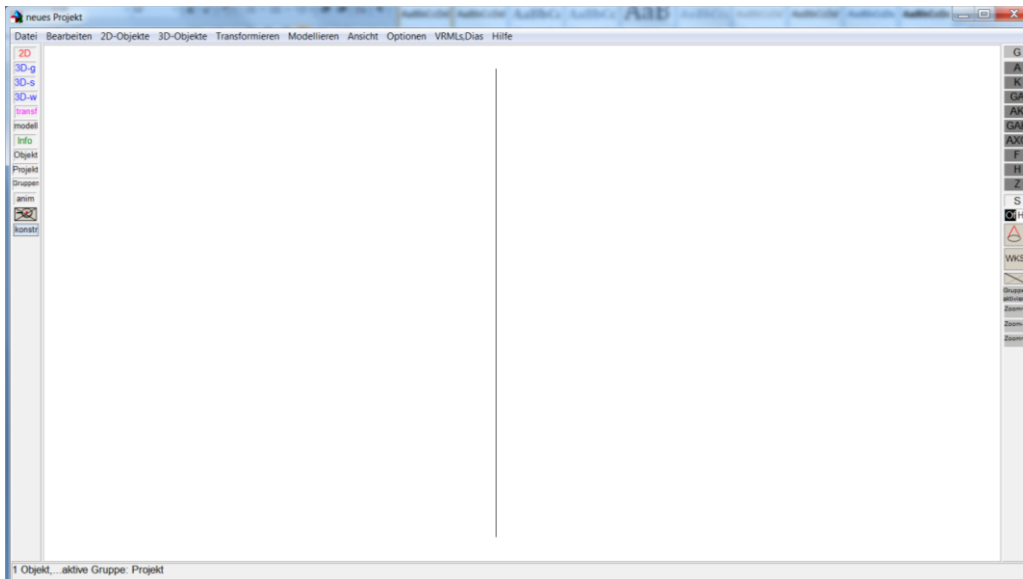
Anleitung, um die Drachenkurve mit dem Computerprogramm GAM zu konstruieren

Wir versuchen nun, die Drachenkurve mit Hilfe des Programms GAM, welches unter folgendem Link http://www.gam3d.at/seiten/download_gam.html (Stand 05.10.2013) heruntergeladen werden kann, zu erzeugen.

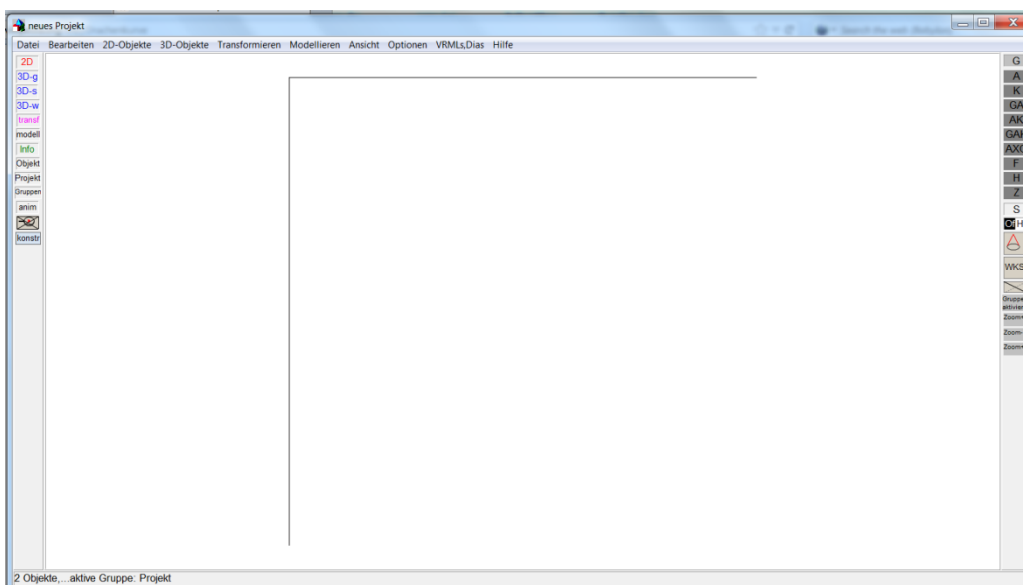
Da die Drachenkurve ein zweidimensionales Gebilde ist, werden wir im 2D Bereich des Programmes bleiben und die Drachenkurve im Grundriss erzeugen.



Um die Drachenkurve zu erzeugen, benötigen wir zunächst eine Ausgangsstrecke, welche wir durch den Befehl 2D Strecke zeichnen wollen. Da die Strecke in der xy-Ebene liegen soll, wählen wir als Koordinate für $x_1=0$ und für $y_1=0$, $x_2=1$ und $y_2=0$. Wir erhalten nun folgendes Bild:

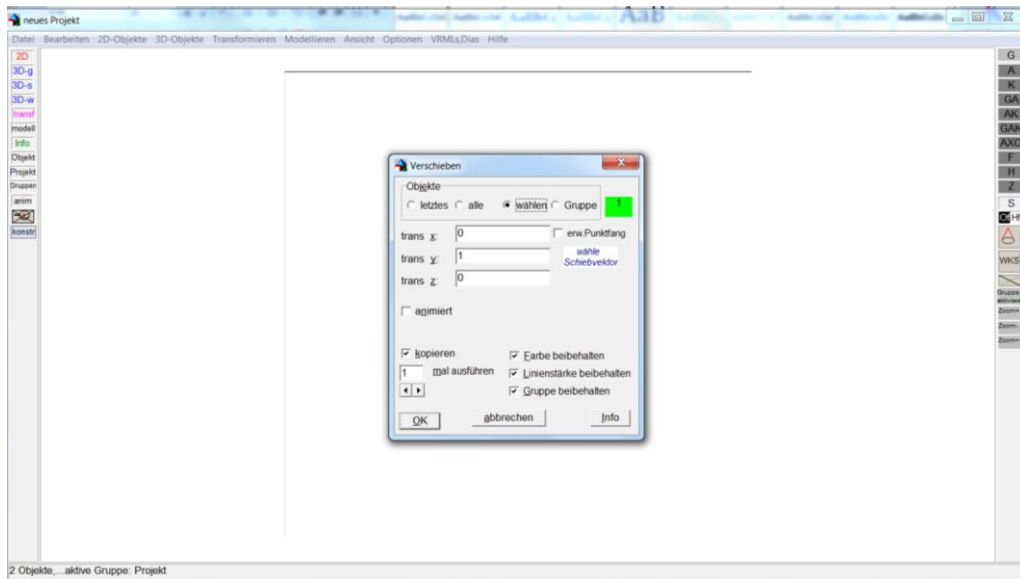


Dies ist die 0. Ordnung der Drachencurve. Um die 1. Ordnung zu erstellen, muss eine zweite Strecke mit den Koordinaten $x_1=0$ und $y_1=0$, $x_2=0$ und $y_2=1$ gezeichnet werden.

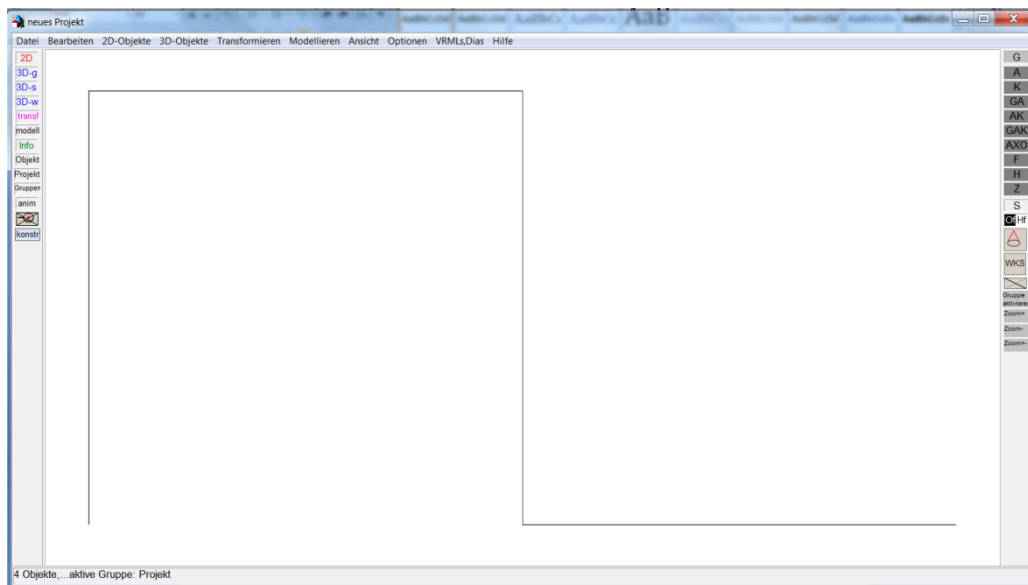


Um weitere Ordnungen zu erhalten, müssen diese Strecken verschoben werden. Dies geschieht mit dem Befehl „Schieben“. Diesen findet man auf der linken Seite des Programms unter dem pinken Button „Transformieren“ vor. Klickt man diesen Befehl an, so erhält man ein Kästchen, wo auszuwählen ist, welche Gerade um welche Koordinaten verschoben werden soll. Damit die ursprüngliche Gerade nicht verloren geht, muss der Befehl „kopieren“ ausgewählt werden. Da die waagrechte Strecke die y-Achse darstellt und die senkrechte die x-Achse, muss die ausgewählte Strecke um $y = 1$ verschoben werden. Werden Strecken nach unten verschoben, so

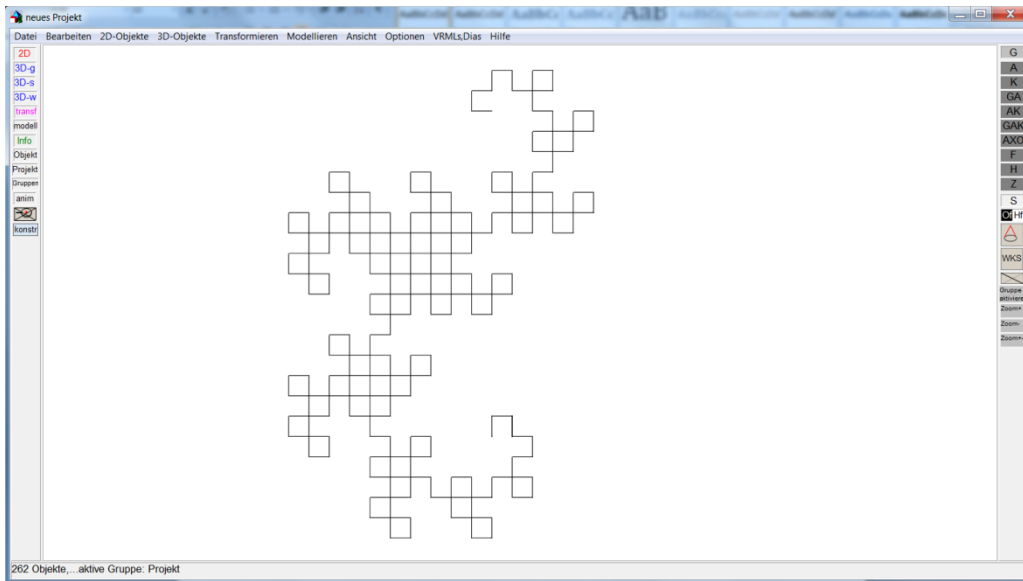
muss $x = 1$ eingesetzt werden. Werden diese jedoch nach oben verschoben, so muss für $x = -1$ eingesetzt werden.



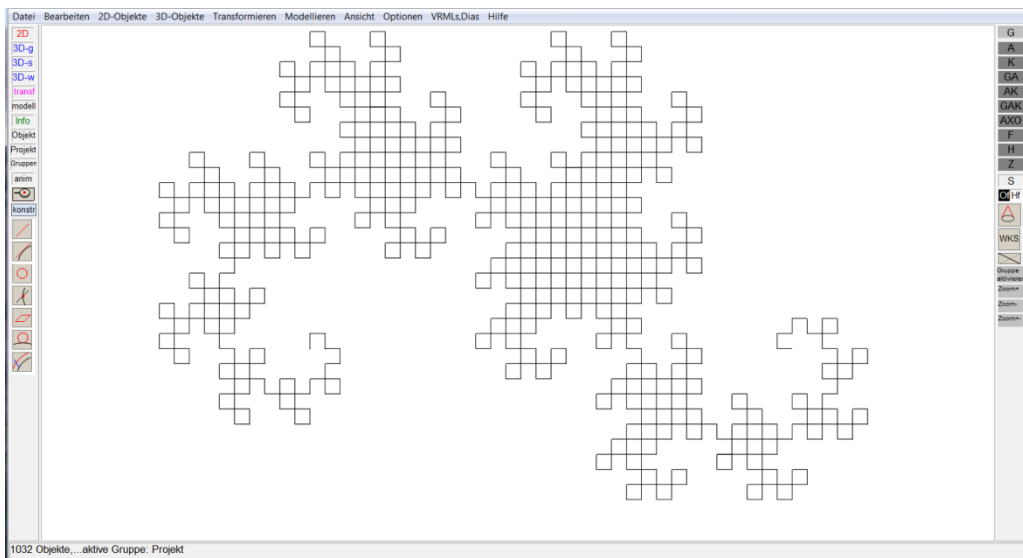
Wird auch die zweite Strecke transformiert, so erhält man die zweite Ordnung.



Führt man die Transformationen wie oben beschrieben mehrmals aus, so erhält man die verschiedenen Ordnungsstufen der Drachenkurve. Mit diesem Programm ist es sehr leicht, höhere Ordnungsstufen zu konstruieren, was jedoch sehr zeitaufwändig sein kann. Deshalb sollte in der Unterrichtsstunde die Drachenkurve bis zur 7. Ordnung konstruiert werden. Die restlichen Stufen sollten als Hausübung erledigt werden. Damit es nicht zu unübersichtlich wird, sollte das Fraktal höchstens bis zur 10. Ordnung gezeichnet werden.



Drachenkurve 7. Ordnung



Drachenkurve 10. Ordnung

4. , 5. und 6. Unterrichtsstunde (vorzugsweise drei Stunden hintereinander)

Zeitschiene	Inhalt	Methoden/ Medien/ Materialien	Sozialformen	Ergebnis
10 min	Konstruktion einer grasähnlichen Figur bis zur zweiten Ordnung		Plenum	Die SchülerInnen sollen die Konstruktion einer grasähnlichen Figur am Computer verstehen.
20 min	Konstruktion einer grasähnlichen Figur bis zur fünften Ordnung		Einzelarbeit	Die SchülerInnen sollen die weiteren Ordnungen selbstständig konstruieren.
5 min	Vergleich der Figuren		Plenum	
15 min	Einführung zur Konstruktion des Pythagorasbaumes		Plenum	Die SchülerInnen sollen mithilfe der Lehrperson den Satz des Pythagoras, dessen geometrische Deutung und die Proportionen kurz wiederholen.
Pause	Pause	Pause	Pause	Pause
15 min	Konstruktion des Pythagorasbaumes bis zur dritten Ordnung		Plenum	Die SchülerInnen sollen die Konstruktion eines Pythagorasbaumes am Computer verstehen.
35 min	Konstruktion des Baumes bis zur fünften Ordnung		Einzelarbeit	Die SchülerInnen sollen die weiteren Ordnungen selbstständig konstruieren.
Pause	Pause	Pause	Pause	Pause
20 min	Konstruktion des Baumes bis zur sechsten Ordnung		Einzelarbeit	Die SchülerInnen sollen die weiteren Ordnungen selbstständig konstruieren.

5 min	Vergleich des Pythagorsbaumes mit einem echten Baum		Plenum	Die SchülerInnen sollen verstehen, dass Gegenstände der Natur sehr gut durch Fraktale dargestellt werden können.
15 min	Zusammenfügen der erstellen Figuren		Partnerarbeit	
10 min	Vorstellen der Ergebnisse		Plenum	

In der vierten Stunde wird versucht, eine grasähnliche Figur mit dem Computerprogramm GeoGebra zu konstruieren. Die ersten zwei Ordnungen werden in den ersten zehn Minuten im Plenum hergestellt, die restlichen drei in Einzelarbeit. Als Hilfestellung soll den Schülern und Schülerinnen dabei eine schriftlich ausgearbeitete Anleitung dienen. Die selbstständig erstellten Figuren werden anschließend von einigen SchülerInnen, welche von der Lehrperson ausgewählt werden, präsentiert. Die restliche Unterrichtsstunde wird dazu verwendet, die Grundlagen des Pythagorasbaumes zu wiederholen. Einerseits soll den SchülerInnen die geometrische Deutung des Satzes von Pythagoras sowie die Proportionen in Erinnerung gerufen werden.

In der nächsten Stunde wird versucht, einen Pythagorasbaum zu konstruieren. Dabei werden wieder die ersten drei Ordnungen im Plenum hergestellt und die restlichen in Einzelarbeit. Da die Herstellung eines Pythagorasbaumes sehr zeitintensiv ist, haben die SchülerInnen dafür eineinhalb Unterrichtsstunden zur Verfügung.

Die Ergebnisse der Einzelarbeit werden in der vierten Stunde verglichen. Der Pythagorsbaum soll auch mit einem echten Baum verglichen werden, damit die SchülerInnen sehen, dass sich Formen der Natur sehr gut durch Fraktale darstellen lassen.

Lernziele:

- Ich kann den Pythagorasbaum am Computer herstellen.
- Ich kann eine grasähnliche Figur am Computer konstruieren.
- Ich kenne den Aufbau des Pythagorasbaumes und einer grasähnlichen Figur.
- Ich kann mit dem Programm GeoGebra umgehen.

Name: _____ Klasse: _____

Anleitung, um eine grasähnliche Figur mit dem Computerprogramm GeoGebra zu konstruieren

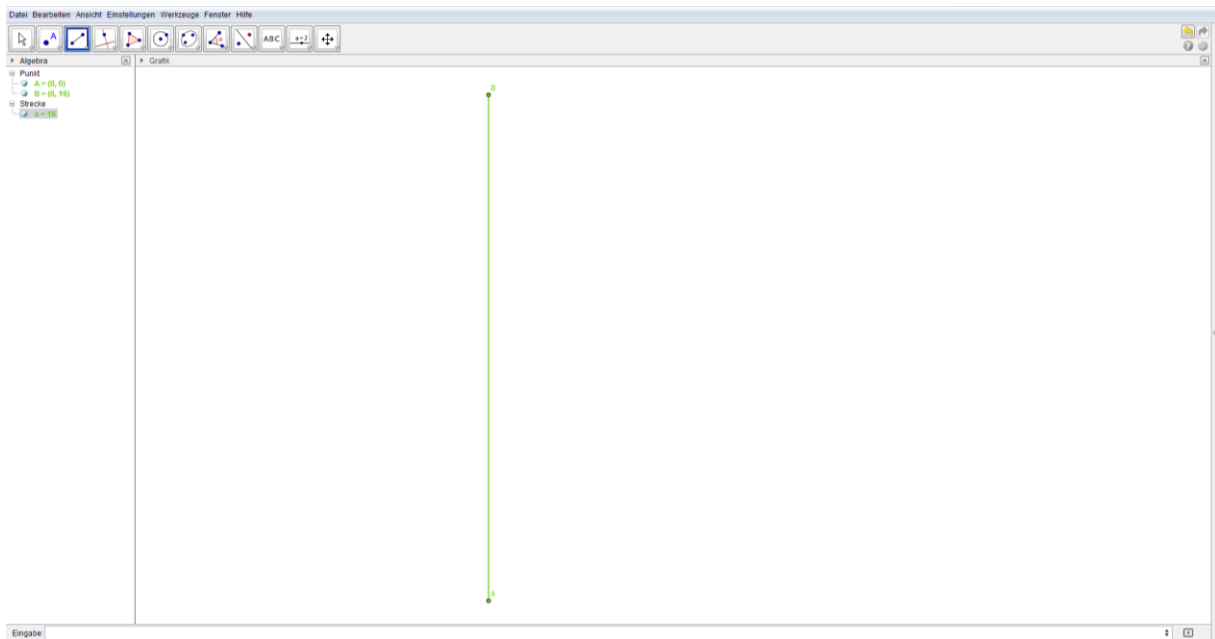
Wir versuchen nun, eine grasähnliche Figur mit Hilfe des Programmes GeoGebra, welches unter folgendem Link <http://www.geogebra.org/cms/de/download/> (Stand 05.10.2013) heruntergeladen werden kann, zu erzeugen.

Da diese Figur ein zweidimensionales Gebilde ist, wird sie im 2D Bereich des Programmes erzeugt.

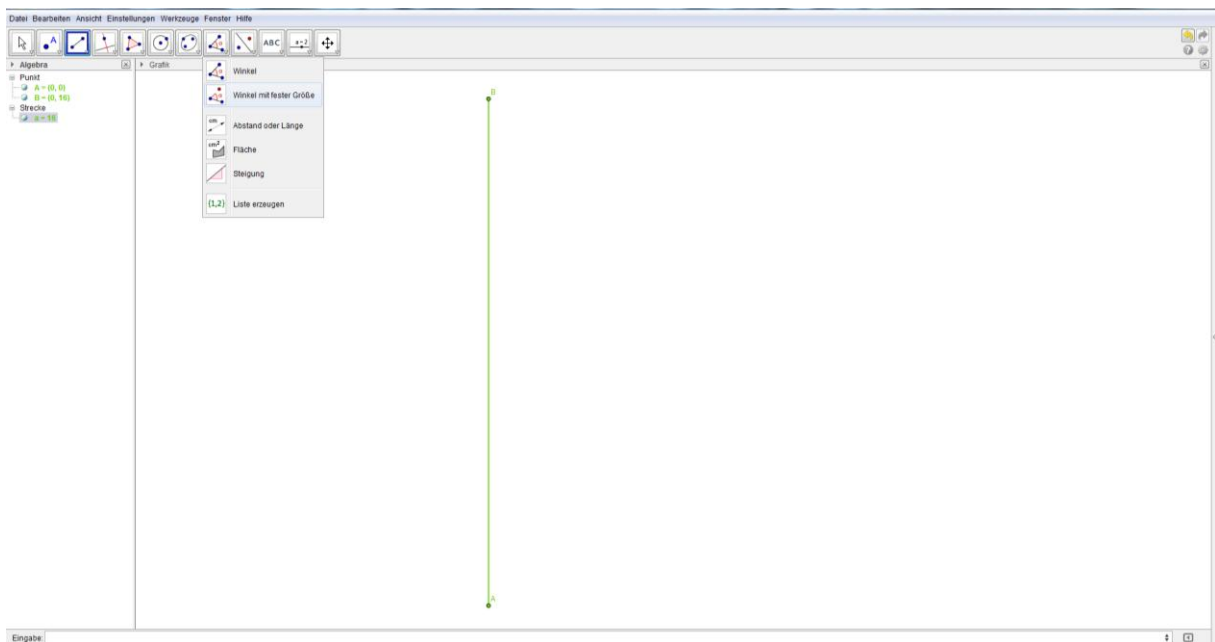


Da wir das Koordinatensystem hier nicht benötigen, kann dieses leicht durch Klick auf die rechte Maustaste „Achsen“ ausgeblendet werden.

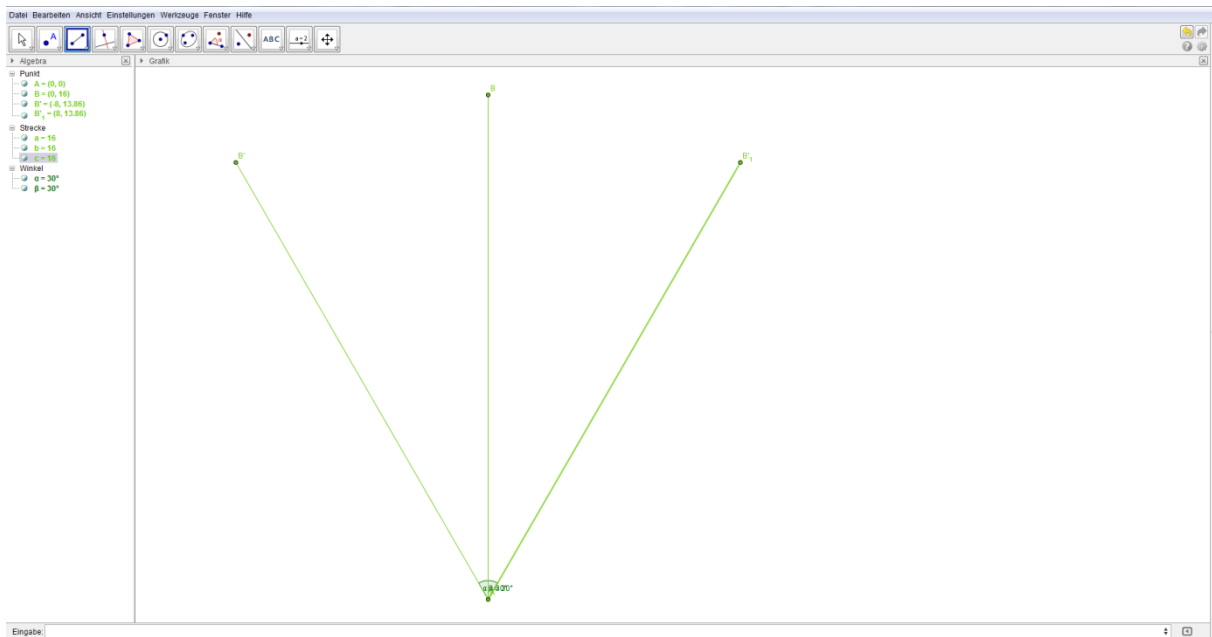
Um die Figur zu konstruieren, muss eine Strecke gezeichnet werden, welche die Länge 16 hat. Dazu werden zwei Punkte festgelegt $A:=(0,0)$, $B:=(0,16)$, die miteinander verbunden werden. Durch den Button „Eigenschaften“, welcher mithilfe der rechten Maustaste aufrufen werden kann, kann die Farbe geändert werden.



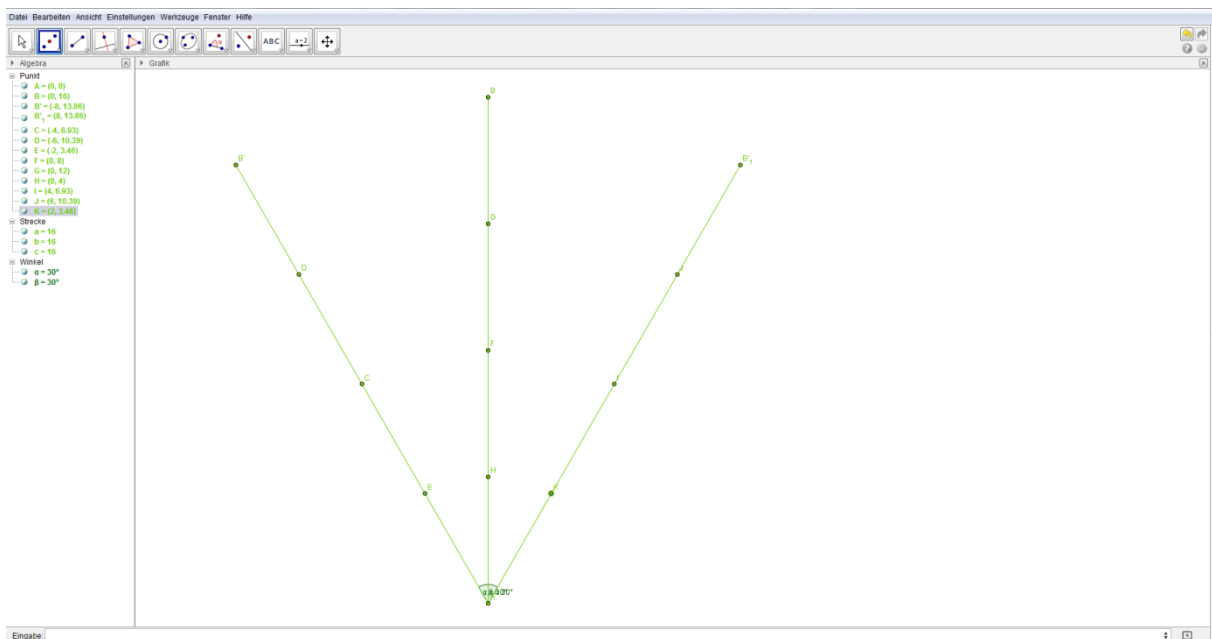
Die entstandene Strecke wird 30° im und gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Dazu wird der Befehl „Winkel mit fester Größe“, welcher am fünften Button von rechts vorzufinden ist, gewählt.



Zuerst wird der obere Punkt angeklickt und anschließend der untere. Beim erscheinenden Kästchen wird dieser sowohl 30° im und gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Die entstandenen Punkte werden mit dem unteren verbunden.

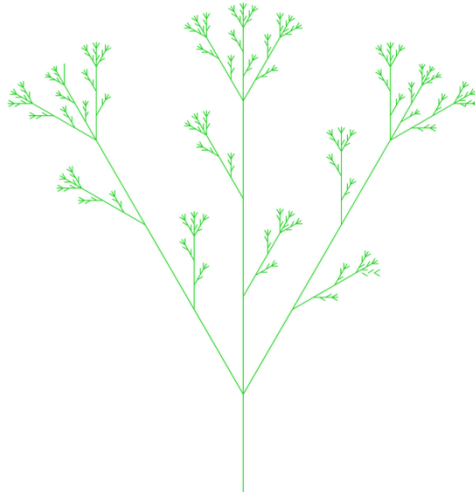


Anschließend wird jeder der drei Striche geviertelt, was mit Hilfe des Befehls „Mittelpunkt“, welcher am zweiten Button von links vorzufinden ist, geschieht. Zuerst konstruiert man den Mittelpunkt zwischen Anfangs- und Endpunkt und anschließend die Mittelpunkte der neu gewonnenen Hälften.



Man wählt anfangs den Befehl „Winkel mit fester Größe“ aus und klickt anschließend den dritten und dann den zweiten Punkt an. Beim erscheinenden Kästchen gibt man 30° im Uhrzeigersinn an. Man bekommt einen Punkt, welcher mit dem zweiten Punkt auf der Strecke verbunden wird. Um den nächsten Ast zu konstruieren, wird wieder der Befehl „Winkel mit fester Größe“ ausgewählt. Zuerst wird der vierte Punkt

angeklickt, anschließend der dritte. Beim erscheinenden Kästchen wird dieser nun um 30° gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Der neue Punkt wird mit dem dritten auf der Strecke verbunden. Um das „V“ zu konstruieren, wird ebenfalls der Befehl „Winkel mit fester Größe“ gewählt. Zuerst wird der fünfte Punkt angeklickt, anschließend der vierte. Einmal wird dieser 30° im Uhrzeigersinn gedreht und einmal 30° gegen den Uhrzeigersinn. Die neuen Punkte werden mit dem vierten verbunden. Diese Schritte werden wiederholt, bis eine grasähnliche Figur entsteht. Damit die Figur besser erkennbar ist, werden alle Punkte ausgeblendet. Die Beschriftung der Strecken sollte im Vorhinein ausgeschaltet werden, da das spätere Ausblenden sonst sehr zeitintensiv ist. Drei Iterationsschritte sind dazu schon ausreichend. Man erhält folgendes Bild:



Name: _____ Klasse: _____

Anleitung, um eine grasähnliche Figur mit dem Computerprogramm GeoGebra zu konstruieren

Wir versuchen nun, einen Pythagorasbaum mit Hilfe des Programms GeoGebra, welches unter folgendem Link <http://www.geogebra.org/cms/de/download/> (Stand 05.10.2013) heruntergeladen werden kann, zu erzeugen.

Da diese Figur ein zweidimensionales Gebilde ist, wird sie im 2D Bereich des Programmes erzeugt.



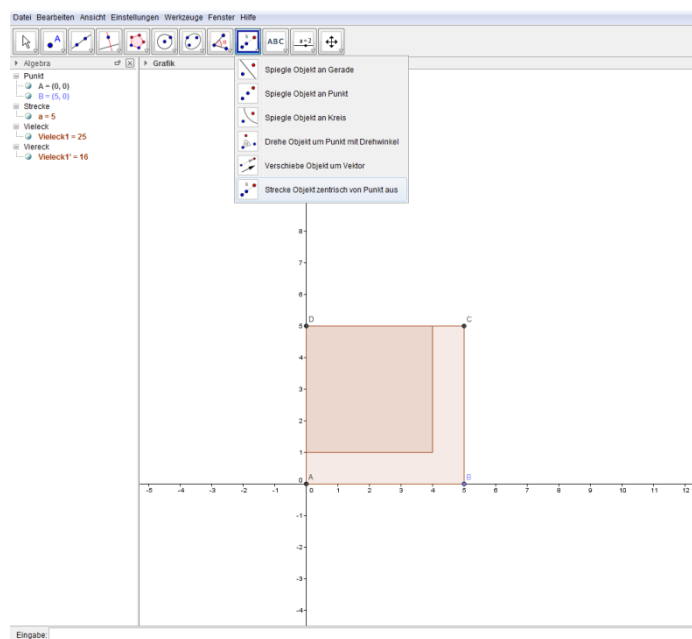
Da wir das Koordinatensystem hier nicht benötigen, kann dieses leicht durch Klick auf die rechte Maustaste „Achsen“ ausgeblendet werden.

Um einen Pythagorasbaum zu konstruieren, muss ein Quadrat erstellt werden, über welches ein rechtwinkliges Dreieck errichtet wird. Die Seiten des Dreiecks haben ein Verhältnis von 3:4:5 zueinander. Die Hypotenuse des Dreiecks entspricht einer Seite des Ausgangsquadrates. Die beiden Katheten bilden die Basis zweier neuer Quadrate. (Vgl. URL: <http://www.schulmodell.eu/unterricht/84-mathematik-ergaenzend/mathelexikon?start=140> Stand 03.2013)

Um das rechtwinklige Dreieck schneller zu erhalten, wird das Ausgangsdreieck zuerst um den Faktor 4:5 verkleinert und anschließend um $36,87^\circ$ gedreht. Um einer Verschiebung zu entgehen, wird das Basisquadrat beim Eckpunkt D mit Hilfe des Befehls „Strecke Objekt zentrisch vom Punkt aus“, welches unter dem vierten Button

von rechts vorzufinden ist, um den Faktor $\frac{4}{5}$ gestreckt.

Man erhält nun folgendes Bild:



Anschließend wird das neu entstandene Quadrat um den Winkel $126,87^\circ$ beim Eckpunkt D gedreht. Der entsprechende Befehl dazu lautet „Drehe Objekt um Punkt mit Drehwinkel“, welcher wiederum unter dem vierten Button von rechts zu finden ist. Das neue Bild sieht wie folgt aus:

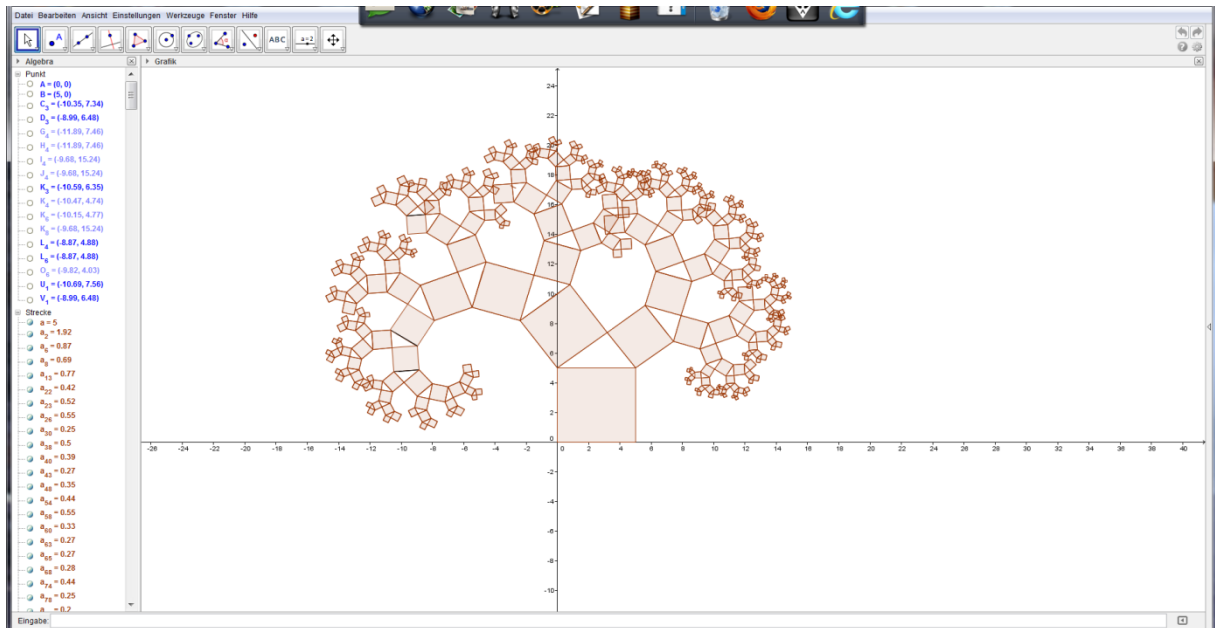


Da jenes Quadrat, welches zwar verkleinert worden, aber nicht gedreht ist, nicht mehr gebraucht wird, kann dieses ausgeblendet werden.

Das zweite Quadrat kann einfach mit den Befehl „Regelmäßiges Vieleck“, welcher unter dem fünften Button von links vorzufinden ist, erzeugt werden. Man klickt dazu beide Eckpunkte, auf welchen das neue Quadrat liegen soll, an und bestätigt, dass zwei weitere Eckpunkte erzeugt werden sollen. Wichtig ist jedoch, dass anfangs der obere und anschließend der untere Eckpunkt angeklickt wird. In unserem Fall wird zuerst der Eckpunkt E und danach der Eckpunkt C angeklickt. Wird dies vertauscht, liegt das Quadrat verkehrt.



Diese Schritte werden so lange wiederholt bis ein Baum entsteht, welcher die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit besitzt.



Vergleicht man den konstruierten Baum mit dem Foto eines echten Baumes, so erkennt man, dass sich diese stark ähneln.



4.2. Oberstufe: 7. Klasse

Mit Hilfe des vorliegenden Unterrichtsmateriales soll zuerst der Fraktalbegriff unter Anwendung eines Stationenbetriebes erarbeitet werden. Dieser Stationenbetrieb umfasst drei Unterrichtsstunden. Im Anschluss wird versucht, ein fraktales Gebirge mittels des Programmes Microstation zu erzeugen.

Stundentafel

1. Unterrichtsstunde

Zeitschiene	Inhalt	Methoden/ Medien/ Materialien	Sozialformen	Ergebnis
5 min	Einteilung der Teams mittels Ziehung von Zuckerl	Verschieden farbige Zuckerl		Kleingruppen (2 bis 3 SchülerInnen) entstehen
3 min	Gruppen finden sich zusammen			Kleingruppen (2 bis 3 SchülerInnen) entstehen
5 min	Erklärung der Aufgabenstellung			
2 min	Austeilen der der Bilder			
15 min	Arbeitsphase		Kleingruppen (2 bis 3 SchülerInnen)	Die Bilder sollen zu Gruppen zusammengefasst werden.
10 min	Jede Gruppe stellt ihre Ergebnisse vor		Plenum	
10 min	Diskussion		Plenum	Die SchülerInnen sollen die Ähnlichkeiten zwischen den Bildern erkennen.

In der ersten Unterrichtsstunde zum Thema „Fraktale“ werden die SchülerInnen in Gruppen eingeteilt. Dies geschieht mittels verschieden farbiger Zuckerl. Dadurch entstehen Kleingruppen, wobei jede zwei bis drei SchülerInnen umfasst. Dann wird die Aufgabenstellung erklärt, welche sie im Anschluss bearbeiten sollen. Den Schülern und Schülerinnen werden acht Bilder vorgelegt, welche sie in Gruppen zusammenfassen sollen. Die Begründung soll von den SchülerInnen schriftlich festgehalten werden. Nach der Arbeitsphase haben die SchülerInnen zehn Minuten Zeit, um ihre Ergebnisse vorzustellen. Dies soll in einer Diskussion münden, warum jene Bilder gerade zu dieser Gruppe zugeteilt worden sind. Passiert dies nicht, soll die Lehrperson durch gezielte Fragen eine Diskussion eröffnen.

Lernziele:

- Ich kenne den Unterschied zwischen Objekten, welche die Eigenschaften eines Fraktals besitzen, und jenen, die keine derartigen Eigenschaften haben.
- Ich kann Fraktale in Gruppen zusammenfassen.

Name: _____

Fraktale

Arbeitsaufgabe:

Versucht die vorliegenden Bilder in Gruppen zusammenzufassen! Haltet eure Ergebnisse schriftlich fest!

Ergebnisse:

2. Unterrichtsstunde

Zeitschiene	Inhalt	Methoden/ Medien/ Materialien	Sozialformen	Ergebnis
5 min	Aufbau des Stationenbetriebes			
10 min	Erklärung des Stationenbetriebes		Frontal	
1 min	Austeilen der Kontrollblätter			
34 min	Durchführung des Stationenbetriebes		Einzel- oder Partnerarbeit	Die SchülerInnen sollen erkennen, was sich hinter dem Wort „Fraktal“ und „Fraktale Geometrie“ verbirgt

In der zweiten Unterrichtsstunde wird mit dem Stationenbetrieb begonnen. Die Reihenfolge der Stationen ist für die Schüler und Schülerinnen frei wählbar, jedoch sollten sie nach drei Unterrichtsstunden alle Pflichtstationen absolviert haben. Die Pflichtstationen sind in Einzel- oder Partnerarbeit durchzuführen. Am Kontrollblatt sollen jene Stationen eingetragen werden, welchen schon bearbeitet wurden.

Station Bedeutung von Fraktalen

Mit dieser Station sollen die Schüler und Schülerinnen die Bedeutung der Fraktale kennen lernen. Weiters soll ihnen bewusst werden, dass der Begriff „Fraktal“ nicht so abstrakt ist, wie er klingt.

Station Definition „Fraktal“

Durch diese Station sollen die Schüler und Schülerinnen verstehen, dass es keine einheitliche Definition gibt, jedoch die Selbstähnlichkeit ein essentielles Charakteristikum ist. Die Schüler und Schülerinnen sollen wissen, was man unter „Selbstähnlichkeit“ versteht und diese Definition auch anwenden können.

Station Blumenkohl – Form und Aufbau

Diese Station soll in Partnerarbeit durchgeführt werden. Dazu erhält jede Gruppe die zur Verfügung stehenden Materialien wie Blumenkohl und Lupe. Jede Gruppe erhält ihre eigenen Materialien, damit es zu einem reibungslosen Arbeiten kommen kann. Der Blumenkohl kann nach Bedarf in kleinere Stücke zerlegt werden. Mit Hilfe dieses Arbeitsauftrages sollen die Schüler und Schülerinnen die Selbstähnlichkeit an einem realen Beispiel, dem Blumenkohl, kennen lernen.

Welche Bilder sind selbstähnlich?

In dieser Station sollen die Schüler und Schülerinnen abermals die Definition der „Selbstähnlichkeit“ anwenden und entscheiden, ob Figuren selbstähnlich sind oder nicht.

Entstehung eines Fraktals

In dieser Station wird die Entstehung eines Fraktals behandelt. Dazu wird der Prozess der Iteration anhand der Koch-Kurve vorgestellt. Diesen Konstruktionsprozess sollen die Schüler und Schülerinnen nachvollziehen und anschließend die Konstruktion der Cantor-Fläche weiterführen.

Lindenmayer-Systeme

Bei dieser Station sollen die Schüler und Schülerinnen verstehen, dass Fraktale sehr gut geeignet sind, natürliche Figuren zu beschreiben. Der Biologe Lindenmayer hat dazu ein System entwickelt, welches die Schüler und Schülerinnen anhand dieser Station kennen lernen werden.

Fraktale Geometrie

Hier wird die Weiterentwicklung der euklidischen Geometrie behandelt. Die Schüler beziehungsweise Schülerinnen sollen verstehen, dass natürliche Phänomene nicht durch euklidische Formen beschrieben werden können.

Wie lang ist die Küste Englands?

Bei dieser Wahlstation sollen die Schüler sowie Schülerinnen feststellen, dass die Küste, je kleiner der Maßstab wird, länger wird und somit eigentlich unendlich lang ist.

Drachenkurve

Bei der zweiten Wahlstation haben die Schüler und Schülerinnen die Möglichkeit, ein Fraktal selber herzustellen. Durch Falten eines Papierees können sie die Drachenkurve herstellen.

Lernziele:

- Ich kenne die Konstruktion der Koch-Kurve.
- Ich kenne das Bildungsgesetz der Koch-Kurve und kann dieses auch anwenden.
- Ich weiß, dass die Koch-Kurve selbstähnlich ist.
- Ich weiß, dass der Blumenkohl selbstähnlich ist.
- Ich weiß, was hinter dem Begriff Selbstähnlichkeit steckt.
- Ich kann Figuren auf Selbstähnlichkeit überprüfen.
- Ich weiß, was ein Fraktal ist.
- Ich kenne die Konstruktionsschritte eines Fraktals.

3. Unterrichtsstunde

Zeitschiene	Inhalt	Methoden/ Medien/ Materialien	Sozialformen	Ergebnis
5 min	Aufbau des Stationenbetriebes			
45 min	Durchführung des Stationenbetriebes		Einzel- oder Partnerarbeit	Die SchülerInnen sollen erkennen, was sich hinter dem Wort „Fraktal“ und „Fraktale Geometrie“ verbirgt

In der dritten Unterrichtsstunde wird der Stationenbetrieb weiter bearbeitet. Die Reihenfolge der Stationen ist wieder für die Schüler und Schülerinnen frei wählbar.

4. Unterrichtsstunde

Zeitschiene	Inhalt	Methoden/ Medien/ Materialien	Sozialformen	Ergebnis
5 min	Aufbau des Stationenbetriebes			
45 min	Durchführung des Stationenbetriebes		Einzel- oder Partnerarbeit	Die SchülerInnen sollen erkennen, was sich hinter dem Wort „Fraktal“ und „Fraktale Geometrie“ verbirgt

In der vierten Unterrichtsstunde wird der Stationenbetrieb weiter bearbeitet. Die Reihenfolge der Stationen ist wieder für die Schüler und Schülerinnen frei wählbar.

Stationenbetrieb: Fraktale Geometrie

Name: _____

- Du kannst dir die Reihenfolge der Stationen selber aussuchen!
- Alle Pflichtstationen müssen bearbeitet werden!

	Station	Sozialform	Kontrolle	erledigt am:
Pflicht	Warum sind Fraktale so bedeutend?	☺		
	Definition „Fraktal“	☺☺	L	
	Blumenkohl – Form und Aufbau	☺☺	L	
	Welche Bilder sind selbstähnlich?	☺☺	S	
	Entstehung eines Fraktals	☺	S	
	Lindenmayer-Systeme	☺		
	Fraktale Geometrie	☺	L	
Wahl	Wie lang ist die Küste Englands?	☺	L	
	Erstellung einer Drachencurve	☺	S	

☺ Einzelarbeit

☺☺ Partnerarbeit

S Selbstkontrolle

L Kontrolle der Lehrperson

Warum sind Fraktale so bedeutend?



Benoit Mandelbrot

Warum wird die Geometrie oft als <<nüchtern>> und <<trocken>> bezeichnet? Nun, einer der Gründe besteht in ihrer Unfähigkeit, solche Formen zu beschreiben, wie etwa eine Wolke, einen Berg, eine Küstenlinie oder einen Baum. Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade. (Mandelbrot, S. 13)

Fractals are important because they reveal a new area of mathematics directly relevant to the study of nature (Lesmoir-Gordon et al., S. 3)



Ian Stewart

No one will be considered scientifically literate tomorrow who is not familiar with fractals (Lesmoir-Gordon et al., S. 3)



John Archibald Wheeler

Arbeitsaufgabe:

Such zwei weitere Aussagen im Internet, warum Fraktale in der heutigen Zeit so bedeutend sind! Vergleiche deine Ergebnisse mit einer zweiten Person.

Definition „Fraktal“

Das Wort „Fraktal“ hat Benoit Mandelbrot im Jahr 1975 geprägt. Das Wort geht auf das lateinische Wort „fractus“ zurück, welches gebrochen bedeutet.

In der Literatur gibt es verschiedene Definitionen eines Fraktales (Vgl. Haftendorn, S. 93), welche nicht zueinander äquivalent sind (Vgl. Raith, S. 15), doch ein wichtiges Charakteristikum, welches immer wieder genannt wird, ist die Selbstähnlichkeit. (Vgl. Haftendorn, S. 93)

Definition Selbstähnlichkeit:

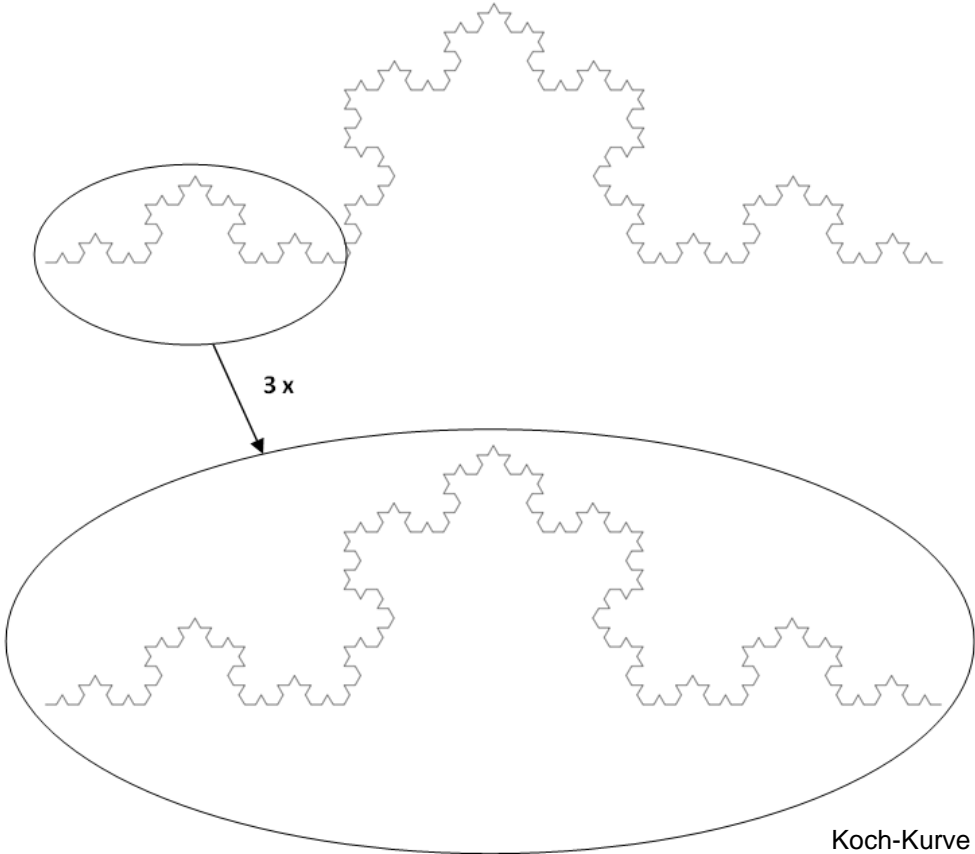
Selbstähnlichkeit bedeutet, daß [sic!] ein echter Teil der Gesamtfigur, vergrößert mit einer passend gewählten zentrischen Streckung, der Gesamtfigur ähnlich sieht oder ihr sogar exakt gleicht. (Komorek et al., S. 118)



Benoit Mandelbrot

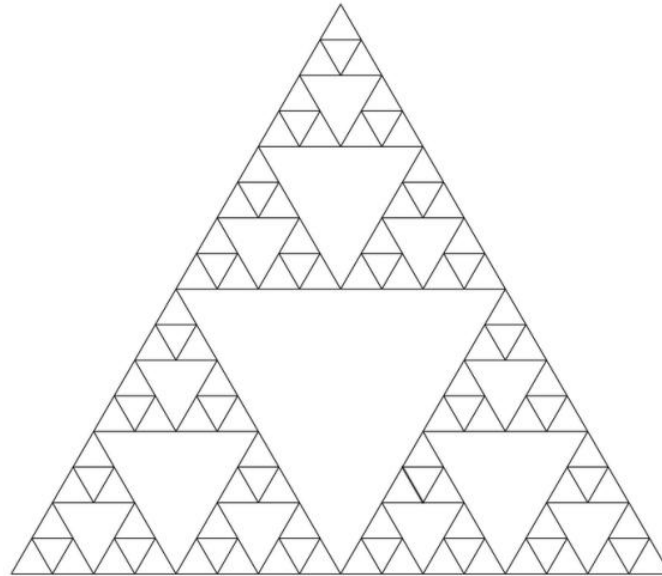
Beispiel:

Die Koch-Kurve, welche in der unten stehenden Abbildung zu sehen ist, ist selbstähnlich, da der umkreiste Teilbereich der Koch-Kurve nach entsprechender Reskalierung nicht mehr von der ursprünglichen Kurve zu unterscheiden ist.



Arbeitsaufgabe:

Ist die nachstehende Figur, das Sierpinski-Dreieck, selbstähnlich?



Sierpinski-Dreieck

Begründung:

Blumenkohl – Aufbau und Form



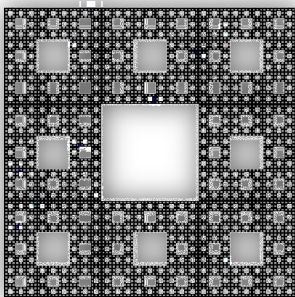
Arbeitsaufgabe:

Versucht in 2er Teams die Form beziehungsweise den Aufbau des Blumenkohls zu analysieren und haltet eure Ergebnisse schriftlich fest!

Ergebnisse:

Welche Bilder sind selbstähnlich?

SELBSTÄHNLICH	NICHT SELBSTÄHNLICH



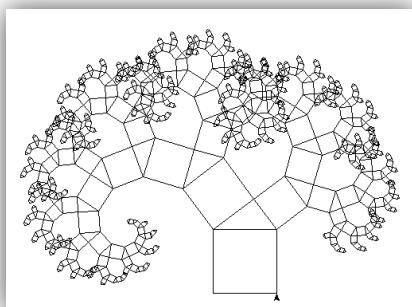
Menger-Schwamm



Barnsley-Farn



Stickmuster



Pythagorasbaum



Zeichnung von Escher



Buchenblatt



menschliche Lunge

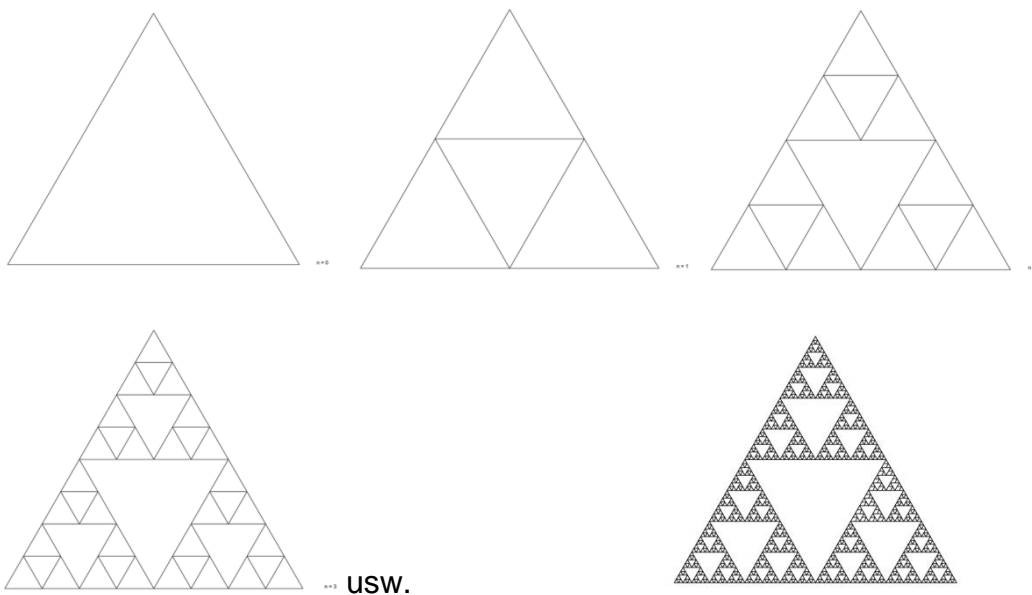
(Vgl. Komorek et

al., S. 179)

Entstehung eines Fraktals

Ein Fraktal entsteht mit Hilfe des Iterated Function Systemes (kurz IFS). (Vgl. Haftendorn, S. 95) IFS bezeichnet ein System von Funktionen, die man iteriert, d. h. immer wieder auf ihr eigenes Ergebnis anwendet (Haftendorn, S. 95) Das Fraktal ist somit (Vgl. Komorek et al., S. 120) als Grenzfigur eines unendlich fortgesetzten Konstruktionsprozesses zu verstehen. (Komorek et al., S. 120)

Das Sierpinski-Dreieck entsteht daher durch wiederholtes Wegnehmen des mittleren Dreieckes, welches unendlich oft ausgeführt wird. (Vgl. Komorek et al., S. 120) Fraktale haben also eine „unendlich feine“ Struktur; vergrößert man einen Teil, so hat auch die Vergrößerung dieselbe „unendlich feine“ Struktur und kann daher exakt mit der Gesamtfigur übereinstimmen. (Komorek et al., S. 120)



Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks

Arbeitsaufgabe:

Versuche, möglichst viele Iterationsschritte bei der Cantorfläche durchzuführen!

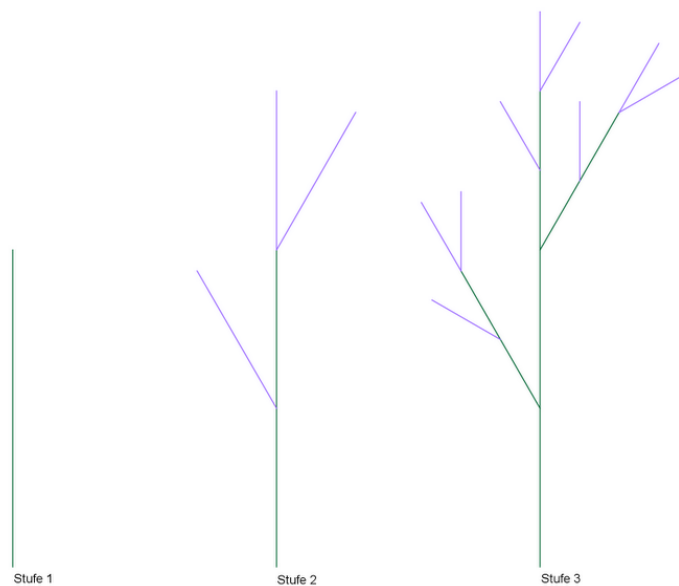
Die Cantor-Fläche wird ebenfalls durch Iteration hergestellt. Als Ausgangselement dient eine Fläche, welche die Länge a_0 , die Breite b_0 sowie einen Inhalt A_0 besitzt. Um die Cantor-Fläche 1. Ordnung herzustellen, muss das mittlere Drittel der ursprünglichen Fläche entfernt werden. Damit sich der Flächeninhalt jedoch nicht verändert, muss sich die Breite gegenüber der ursprünglichen Breite um die Hälfte erhöhen. Dieser Schritt wird immer wieder wiederholt. (Vgl. Komorek et al., S. 74)



Lindenmayer-Systeme

Mit Hilfe von Lindenmayer-Systemen kann das Pflanzenwachstum modelliert werden. (Vgl. URL: <https://home.ph-freiburg.de/deisslerfr/programme/lindenmayer.pdf> Stand 23.10.2013) Diese Idee wurde vom niederländischen Biologen Astrid Lindenmayer entwickelt. (Vgl. Haftendorn, S. 89)

Grundprinzip der Lindenmayer-Systeme



Stufe 1: Um ein fraktales Kraut entstehen zu lassen, muss zuerst ein gerader Strich gezeichnet werden, welcher (Vgl. Haftendorn, S. 89) in der Mitte einen Keim für einen Ast nach links trägt und oben einen Keim für einen geradeaus gehenden und einen rechten Ast. (Haftendorn, S. 89) Dieser Strich wird Initiator genannt. (Vgl. Haftendorn, S. 89)

Stufe 2: Diese Stufe zeigt die entwickelten Keime der vorherigen Stufe. Jeder dieser Keime trägt jedoch wieder (Vgl. Haftendorn, S. 89) in der Mitte einen Keim. (Haftendorn, S. 89). Stufe 2 heißt Generator. (Vgl. Haftendorn, S. 89)

Stufe 3: In dieser Stufe sind die entwickelten Keime der Stufe 2 zu sehen. Doch die Äste haben wieder Keime, welche erst in der Stufe 4 reifen.

Dieser Prozess wird immer wieder fortgeführt. (Vgl. Haftendorn, S. 89)

Ab einer gewissen Größe stößt auch der Computer an seine Grenzen. Diese Grenzfigur des iterierten Bildungsprozesses wird als Fraktal bezeichnet. (Vgl. Haftendorn, S. 89f)

Arbeitsaufgabe:

Rufe das Programm LSy4-0.exe auf. Wenn du auf den Button „Regelsystem laden“ drückst, erscheinen unterschiedliche Fraktale, welche du mit Hilfe des Programms zeichnen kannst.

Das Axiom ist mit dem Initiator gleichzusetzen. (Vgl. Haftendorn, S. 90) Die verschiedenen Stufen einer Pflanze erhält man, indem die Regeln immer wieder auf den Startterm angewandt werden.

- F ... eine Linie mit einer festgelegten Länge wird gezeichnet
- f ... die Linie mit einer festgelegten Länge wird zwar gezeichnet, ist aber nicht sichtbar
- + ... Drehung um einen festen Winkel (positiver Umlauf)
- - ... Drehung um einen festen Winkel (negativer Umlauf)
- [... die momentane Position und Richtung wird gespeichert
-] ... Rückzug zur letzten gemerkten Position und Richtung

(Vgl. URL: <https://home.ph-freiburg.de/deisslerfr/programme/lindenmayer.pdf>
Stand 23.10.2013)

Wenn du auf den Button „Zeichnen“ drückst, erscheint das Zeichenfenster, bei welchem du die Tiefe (Stufe) einstellen kannst.

Wenn du dies alles eingestellt hast, kannst du die Figur zeichnen. Unter dem Button „In Zwischenablage speichern“ kannst du diese Figur anschließend mit der Tastenkombination „StrgV“ in das Programm Paint einfügen, wo du zum Beispiel einen Wald erstellen sollst!

Fraktale Geometrie



Benoit Mandelbrot

Warum wird die Geometrie oft als <<nüchtern>> und <<trocken>> bezeichnet? Nun, einer der Gründe besteht in ihrer Unfähigkeit, solche Formen zu beschreiben, wie etwa eine Wolke, einen Berg, eine Küstenlinie oder einen Baum. Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade. (Mandelbrot, S. 13)

Mit diesem Aphorismus hat Mandelbrot die Komplexität natürlicher Objekte aufgezeigt, welche sich von den Formen der euklidischen Geometrie wesentlich unterscheiden. Dadurch können Naturerscheinungen auch nicht mit euklidischen Formen konstruiert werden, da hier die Komplexität nicht berücksichtigt werden kann. Euklidische Formen haben eine glatte Oberfläche, was jedoch bei keiner Naturerscheinung vorzufinden ist. Daher hat Mandelbrot die fraktale Geometrie eingeführt, welche die natürlichen Phänomene am besten beschreiben kann. (Vgl. Sakas, S. 37f)

Arbeitsaufgabe:

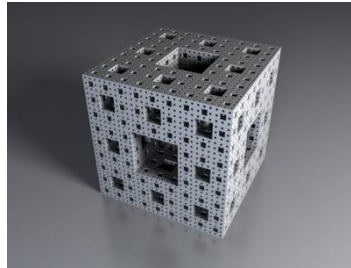
Was versteht man unter euklidischer Geometrie? Auf wen geht sie zurück? Was versteht man unter euklidischen Formen? Versucht diese Fragen in Partnerarbeit mithilfe des Internets zu beantworten!

Wie lange ist die Küste Englands?

Auch mithilfe des Computers können keine Fraktale hergestellt werden, da auch er die Iteration nicht unendlich oft ausführen kann. Es werden nur „angefangene“ Fraktale konstruiert. Doch in der Natur finden wir fraktalähnliche Gebilde vor, wie zum Beispiel ein vulkanisches Gestein, da es dem Menger-Schwamm ähnlich sieht.



Tuffstein



Menger-Schwamm

Auch die Küste Englands ist wegen der Fjorde, Buchten, Unterbuchten etc. ein Fraktal. (Vgl. Zeitler et al., S. 145f)

Arbeitsaufgabe:

Versuche die Küste Englands zwischen Plymoth und St. Austell auf den beiliegenden Landkarten mithilfe eines Zirkels beziehungsweise eines Fadens zu vermessen.

Zu welchem Ergebnis bist du gekommen?

Schlag im Internet, in Lexika etc. nach, wie lange die Küste Englands ist.

Drachenkurve

Die Drachenkurve ist ein Fraktal, welches die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit erfüllt.

Bastelanleitung:

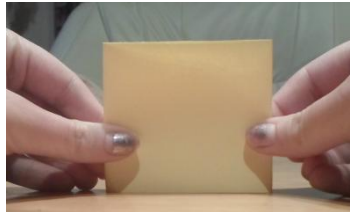
Zuerst wollen wir die Drachenkurve selbst falten. Dazu nimmst du dir einen Papierstreifen, welchen du in zwei Hälften teilst.



Klappe nun den Papierstreifen wieder auf, bis die beiden Hälften einen 90°-Winkel einschließen. Dies ist die erste Stufe beziehungsweise die erste Ordnung zur Konstruktion der Drachenkurve.



Um die nachfolgenden Ordnungen der Drachenkurve herzustellen, musst du die zwei Hälften wieder aufeinander legen und in der Mitte falten. Den neuen Streifen, welchen du gerade erhalten hast, teilst du wieder in zwei Hälften. Diesen Prozess wiederholst du solange es möglich ist. Du solltest aber darauf achten, dass du immer in die gleiche Richtung faltest. Dabei ist es von Vorteil, wenn du das Papier mit der rechten Hand hältst und mit der linken Hand faltest.



Wenn du mit dem Falten fertig bist, kannst du beginnen, die Drachenkurve zu öffnen. Zuerst falte die beiden Hälften auseinander, bis sie einen 90° -Winkel einschließen. Anschließend ziehe alle Hälften nach unten auseinander, bis du die Drachenkurve erkennen kannst! Jede Öffnung einer Faltung entspricht einer neuen Ordnung.

(Vgl. URL: http://wiki.zum.de/images/9/95/Drachenfalten_Mathetag.pdf Stand 05.11.2013)

5. und 6. Unterrichtsstunde (vorzugsweise zwei Stunden hintereinander)

Zeitschiene	Inhalt	Methoden/ Medien/ Materialien	Sozialform en	Ergebnis
10 min	Erklärung der Konstruktion durch die Lehrperson		Plenum	Die SchülerInnen sollen die Konstruktion eines fraktalen Gebirges am Computer verstehen.
10 min	Konstruktion der ersten Schritte		Plenum	
30 min	Konstruktion des fraktalen Gebirges		Einzel- oder Partnerarbeit	Die SchülerInnen sollen ein fraktales Gebirge am Computer selbst erstellen.
Pause	Pause	Pause	Pause	Pause
20 min	Konstruktion des fraktalen Gebirges		Einzel- oder Partnerarbeit	Die SchülerInnen sollen ein fraktales Gebirge am Computer selbst erstellen.
15 min	Visualisierung des fraktalen Gebirges		Plenum	Die SchülerInnen sollen gemeinsam mit der Lehrkraft versuchen, das fraktale Gebirge möglichst lebensnah zu visualisieren.
15 min	Vorstellen der Ergebnisse		Plenum	Die SchülerInnen sollen verstehen, dass Phänome der Natur gut durch Fraktale dargestellt werden können.

In der fünften und sechsten Unterrichtsstunde wird versucht, ein fraktales Gebirge mithilfe des Programmes Microstation zu erstellen. Die Grundlagen sollen im Plenum besprochen werden. Anschließend sollen die Schüler beziehungsweise Schülerinnen die weiteren Konstruktionsschritte selber durchführen. Die Visualisierung sollte wieder im Plenum geschehen. Danach werden die Ergebnisse der Einzel- oder Partnerarbeit im Plenum verglichen. Es soll auch besprochen werden, ob ein Gebirge der Natur durch ein fraktales Gebirge geschaffen werden kann.

Lernziele:

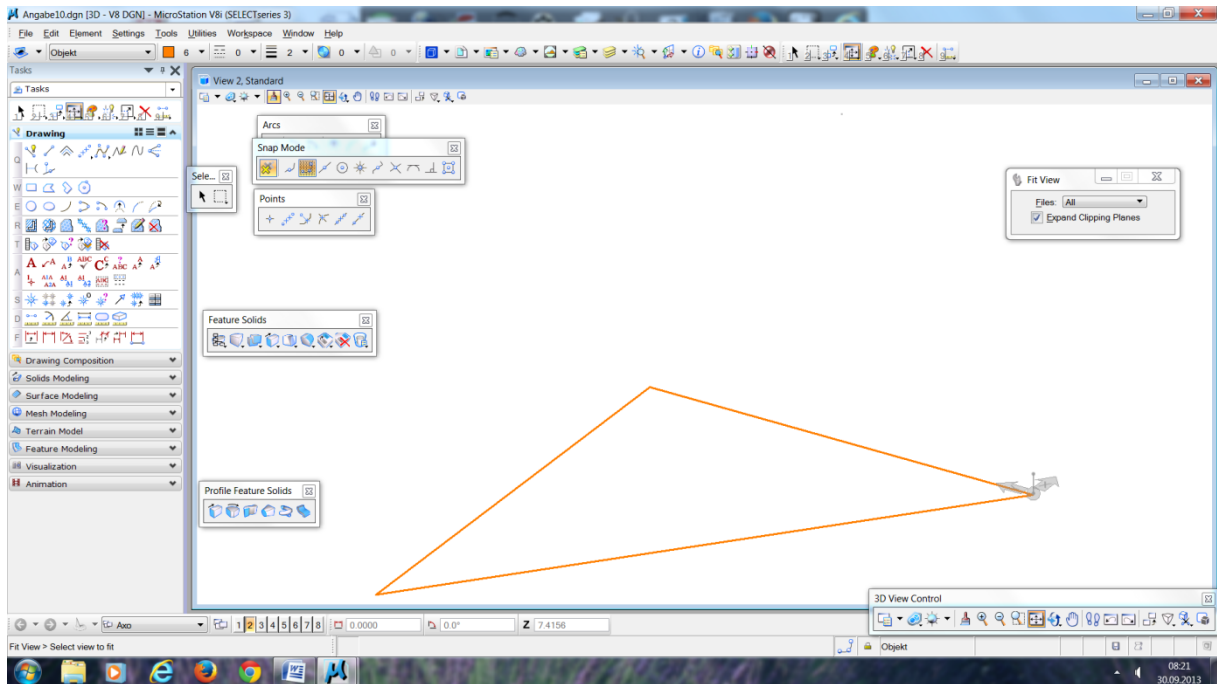
- Ich kann ein fraktales Gebirge am Computer herstellen.
- Ich kenne den Aufbau eines fraktalen Gebirges.
- Ich kann mit dem Programm Microstation umgehen.

Name: _____

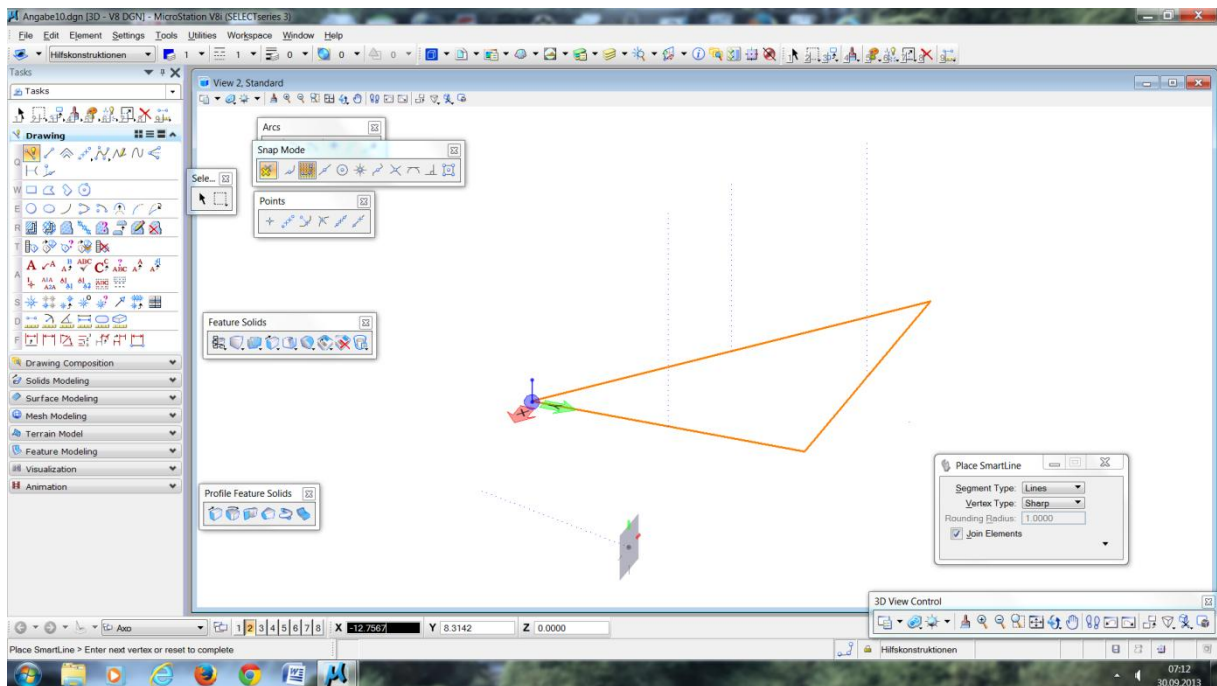
Anleitung, um ein fraktales Gebirge mit dem Computerprogramm Microstation zu konstruieren

Um einen Berg herzustellen, wird ein Dreieck in der Ebene gezeichnet. Die Mittelpunkte jener drei Seiten werden je nach Lust und Laune auf den Seitensymmetralen entweder nach oben oder nach unten verschoben. Diese neu entstandenen Punkte werden zu einem Dreieck ergänzt und man verbindet sie auch mit den übrigen Eckpunkten, sodass insgesamt vier Dreiecke entstehen, welche gleiche Seiten und Eckpunkte besitzen. Anschließend werden die kleineren Dreiecke nach dem gleichen Schema wie oben unterteilt. Um einen möglichst realistischen Effekt zu bekommen, sollten die Verschiebungen der Mittelpunkte immer kleiner werden.

Summa Summarum entstehen aus einem Dreieck mit drei Eckpunkten, zuerst vier Dreiecke mit 6 Eckpunkten, anschließend 16 Dreiecke mit 15 Eckpunkten, danach 64 Dreiecke mit 45 Eckpunkten. Nach sechs Iterationsschritten sind aus einem großen Dreieck 4096 kleine geworden und aus 3 Eckpunkten 2145. Wird die Figur näher betrachtet, so fällt auf, dass sie einem Berg stark ähnelt. (Vgl. Becker et al., S. 226)



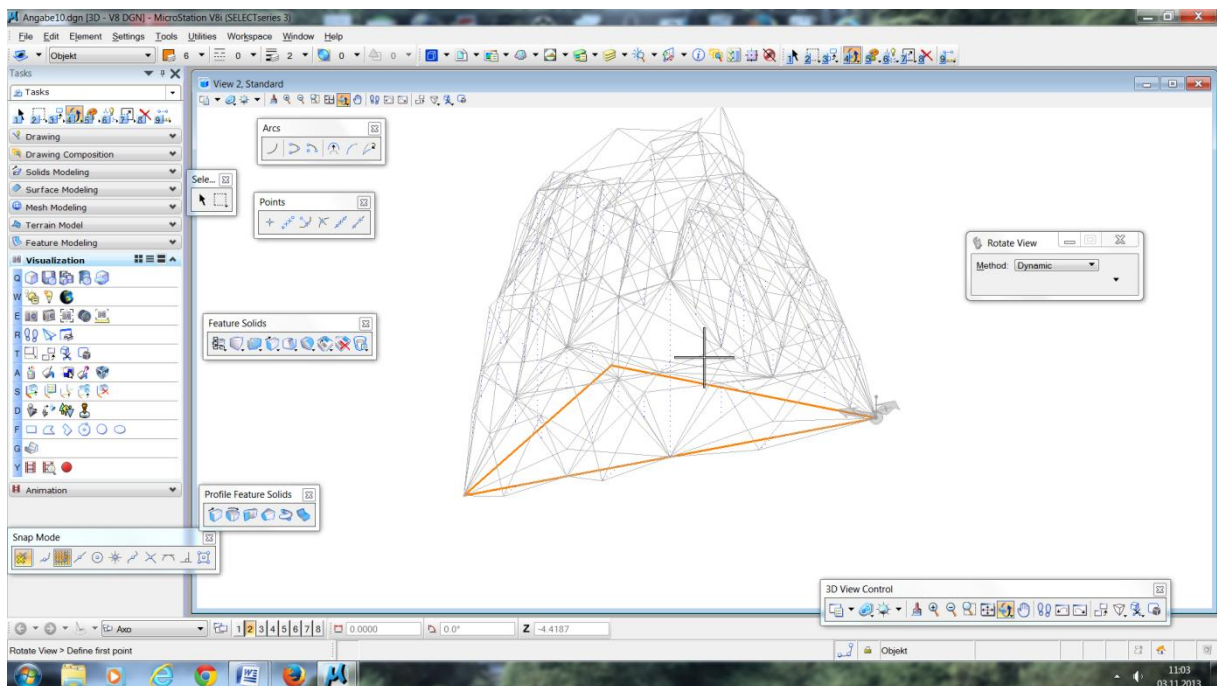
Um ein fraktales Gebirge zu erschaffen, musst du ein Ausgangsdreieck in der Ebene zeichnen.



Anschließend konstruierst du mit dem Befehl „Point(s) Between“ die Mittelpunkte der drei Seiten. Dazu werden einfach die Eckpunkte angeklickt.

Diese werden danach mithilfe von Hilfslinien in die Höhe verschoben. Damit diese wirklich in die z-Richtung schauen, musst du eventuell den Accu-Draw entweder mit der Taste t oder der Taste s drehen.

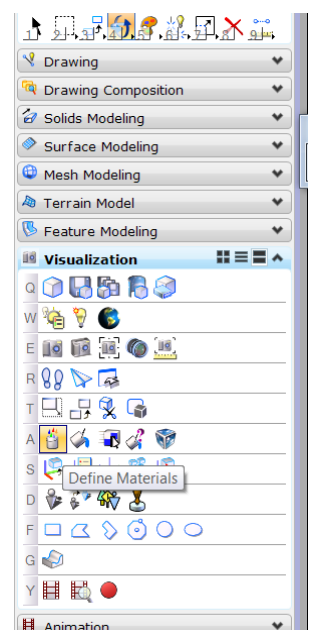
Die nach oben verschobenen Mittelpunkte werden zu einem Dreieck verbunden. Weiters werden jeweils zwei Mittelpunkte mit einem Eckpunkt des ursprünglichen Dreiecks zu einem neuen Dreieck zusammengefasst. Somit entstehen aus einem Dreieck vier Dreiecke. Von diesen neu entstandenen Dreiecken werden wieder die Mittelpunkte konstruiert, erneut in die z-Richtung verschoben und zu neuen Dreiecken verbunden. Die Verschiebung ist bei diesem Schritt jedoch geringer als bei dem vorherigen. Dies wird mehrmals wiederholt, bis ein fraktales Gebirge entsteht oder die Unterteilung fein genug ist.



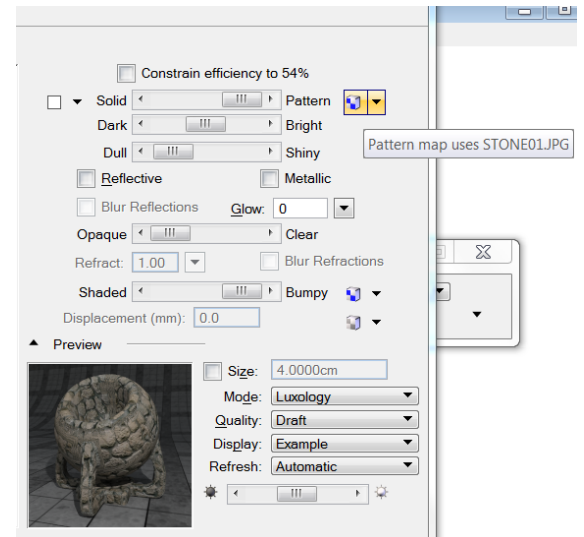
Achtung: Die Dreiecke sollten der Objektebene zugeordnet werden und die Hilfskonstruktionen der Hilfskonstruktionsebene. Benutz dazu immer die gleichen Farben!

Um dieses fraktale Gebirge zu visualisieren, öffnet man den Punkt „Visualization“, welcher am linken Rand von Microstation vorzufinden ist.

Anschließend wird der Befehl „Define Materials“ angeklickt. Es öffnet sich der Material Editor, wo eine neue Palette unter dem Befehl „Palette -> New“ erstellt werden muss.

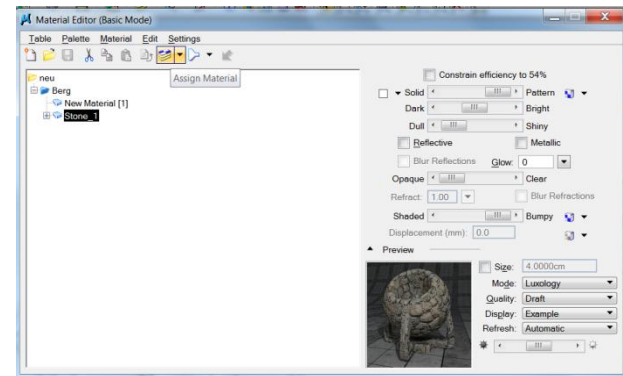


Unter dem Befehl „Material -> Import“ kann das gewünschte Material der Palette zugeordnet werden. Um ein realistisches Gebirge zu erstellen, erweist sich das Material „Stone&Gravel“ als passend.

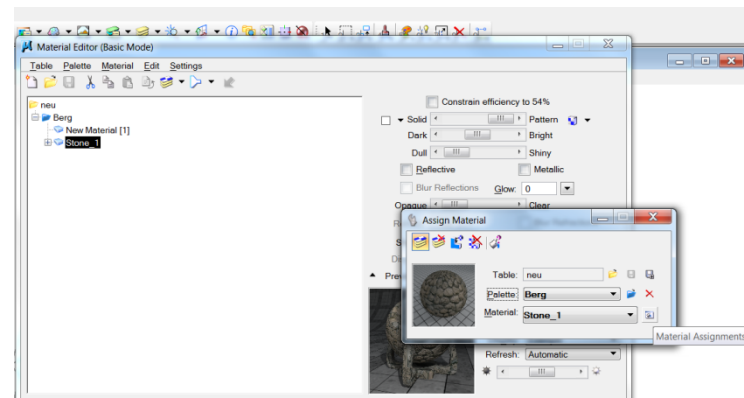


Unter dem Befehl „Pattern“ kann das Material wie gewünscht bearbeitet werden.

Unter dem Befehl „Assign Material“ kann das Material einer Ebene zugewiesen werden.

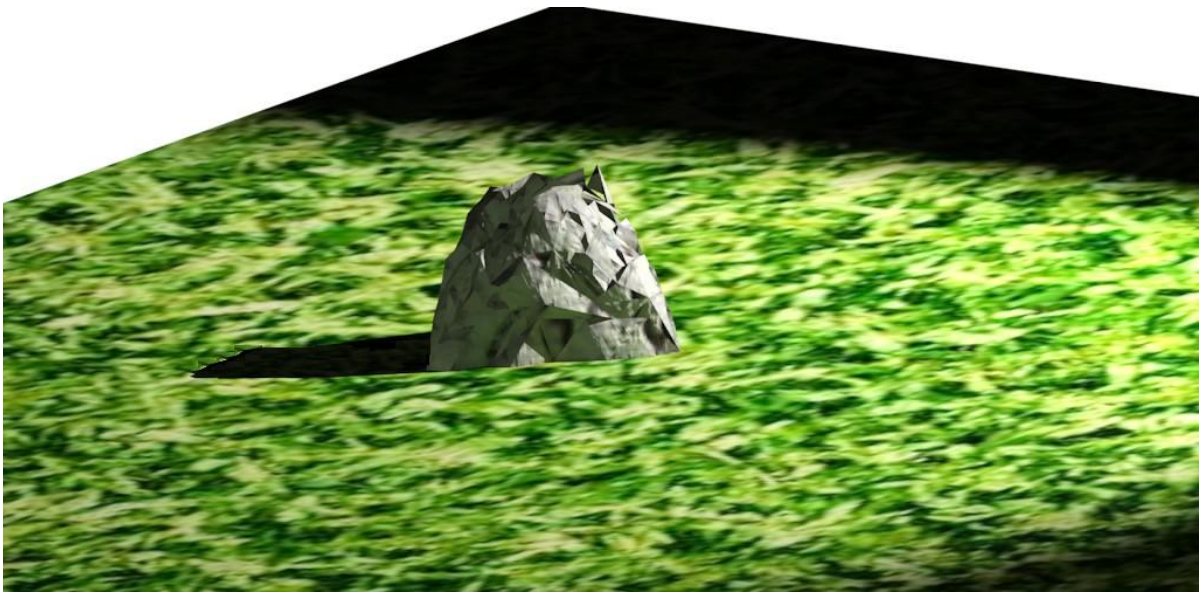


Es öffnet sich ein neues Fenster, wo unter „Material Assignments“ die Ebene ausgewählt werden kann. Es muss sowohl die Ebene als auch die verwendete Farbe angegeben und auf „Apply“ gedrückt werden.



Anschließend kann das fraktale Gebirge durch dem Befehl „Render“ konstruiert werden. Dieser ist abermals unter dem Punkt „Visualization Q“ vorzufinden.

Werden noch Gras und Licht eingefügt, so erhält man folgendes Bild:



Zusammenfassung

Das Thema meiner Diplomarbeit ist die fraktale Geometrie im Unterricht. Im ersten Teil der Arbeit befaße ich mich mit der Theorie von Fraktalen und fraktaler Geometrie. Zuerst wird vorgestellt, was unter einem Fraktal zu verstehen ist. Dazu werden die Begriffe „Selbstähnlichkeit“, „Selbstaffinität“ und „Dimension“ diskutiert. Im Anschluss wird versucht, auf die Entstehung von Fraktalen einzugehen. Dabei wird zuerst ein Beispiel vorgestellt und danach die Theorie erläutert.

Der Hauptteil meiner Diplomarbeit beschäftigt sich jedoch mit der fraktalen Geometrie im GZ- sowie DG-Unterricht. Dazu wurde zuerst der Lehrplan analysiert. Leider ist die fraktale Geometrie weder im GZ- noch im DG-Lehrplan vorzufinden, jedoch sind einige Anknüpfungspunkte vorhanden, die uns erlauben, dies im Unterricht behandeln. Im Anschluss an die didaktischen Bemerkungen befindet sich ein Unterrichtsvorschlag sowohl für die Unter- als auch für die Oberstufe. Dieser umfasst jeweils sechs Unterrichtsstunden und fordert die Schüler und Schülerinnen zur Selbstständigkeit auf.

In der Unterstufe wird aufbauend auf den Begriff „Ähnlichkeit“, welcher in der dritten Klasse im Mathematikunterricht behandelt wird, der Begriff „Selbstähnlichkeit“ eingeführt. Verschiedene Figuren, welche die Schüler und Schülerinnen selbst herstellen müssen, werden auf diese Eigenschaft untersucht. Im Zuge dessen wird mithilfe der Konstruktion von Fraktalen deren Regelmäßigkeit erarbeitet. Da die Erstellung von Fraktalen händisch sehr zeitintensiv ist, wird mit zunehmender Komplexität auf den Computer umgestiegen, mit dessen Hilfe naturähnliche Fraktale hergestellt werden können. Diese werden mit realen Objekten verglichen, wobei die Schüler sowie Schülerinnen feststellen sollen, dass Phänomene der Natur gut durch Fraktale dargestellt werden können.

In der Oberstufe wird ebenso in den ersten Unterrichtsstunden viel Wert auf Begrifflichkeiten im Zusammenhang mit Fraktalen gelegt. Wichtige Eigenschaften der Fraktale wie „Selbstähnlichkeit“ und „Dimension“ werden durch einen Stationenbetrieb näher gebracht. Zudem wird auf die Erzeugung von Fraktalen eingegangen und der Unterschied zwischen fraktaler und euklidischer Geometrie aufgezeigt. Nach dem Stationenbetrieb wird schließlich versucht, ein fraktales Gebirge mithilfe des Computerprogramms Microstation zu konstruieren.

Da der Geometrie immer wieder vorgeworfen wird, trocken und nüchtern zu sein, eignet sich die fraktale Geometrie als Werkzeug, einen lebensnahen und auch lebendigen GZ- sowie DG-Unterricht zu gestalten. Die vorliegenden Unterrichtsmaterialien richten somit sich an GZ- und DG-LehrerInnen, welche versuchen, einen lebensnahen Geometrieunterricht zu betreiben.

Literaturverzeichnis

Bücher:

- Barnsley, M. (1995): Fraktale, Theorie und Praxis der deterministischen Geometrie, Berlin, Oxford.
- Becker, K.H., Dörfler, M. (1989): Dynamische Systeme und Fraktale, 3. Auflage, Braunschweig, Wiesbaden.
- Dufner, J., Rosner, A., Unseld, F. (1998): Fraktale und Julia-Mengen, Frankfurt am Main.
- Fernau, H. (1994): Iterierte Funktionen, Sprachen und Fraktale, Aspekte der komplexen Systeme, Band 2, Mannheim u.a. .
- Gudjons, H. Hrsg. (1993): Handbuch Gruppenunterricht, Weinheim, Basel.
- Haftendorn, D. (2011): Mathematik sehen und verstehen, Schlüssel zur Welt, o.O. .
- Halling, H. , Möller, R. (1995): Mathematik fürs Auge, Eine Einführung in die Welt der Fraktale, Berlin, Oxford.
- Hastings, H. , Sugihara, G. (1993): Fraktale, Ein Leitfaden für Anwender, Berlin, Oxford.
- Komorek, M. Duit, R. Schnegelberger, M. Hrsg. (1998): Fraktale im Unterricht, Zur didaktischen Bedeutung des Fraktalbegriffs, Kiel.
- Lesmoir-Gordon, N., Rood, W., Edney R. (2013): Fractals, A Graphic Guide, Malta.
- Mandelbrot, B. (1987): Die fraktale Geometrie der Natur, Basel, Boston.
- Meyer, H. (1991): Unterrichtsmethoden II: Praxisband, 4. Auflage, Frankfurt am Main.
- Nuhn, H.-E. (1995): Partnerarbeit als Sozialform des Unterrichts, Weinheim und Basel.
- Peitgen, O., Hartmut, J., Saupe, D. (1998): Bausteine des Chaos, Fraktale, Hamburg.
- Pillwein, G., Asperl, A., Müllner, R., Wischounig, M. (2006): Raumgeometrie, Konstruieren und Visualisieren, Wien.
- Redaktion Schule und Lernen Hrsg. (2004): Mathematik II, Ein Lexikon zur Schulmathematik für das 11. Bis 13. Schuljahr, Mannheim.

- Reichel, H.-C., Litschauer, D., Groß, H. (2002): Das ist Mathematik 3, Wien.
- Rinschede, G. (2007): Geographiedidaktik, Paderborn u.a. .
- Sakas, G. (1993): Fraktale Wolken, virtuelle Flammen, Berlin u.a. .
- Scheid, H. , Schwarz, W. (2007): Elemente der Geometrie, München.
- Stoyan, D., Stoyan, H. (1992): Fraktale, Formen, Punktefelder, Methoden der Geometrie – Statistik, Berlin.
- Warnecke, H.-J. (1993): Die Fraktale Fabrik, Revolution der Unternehmenskultur, Berlin, Heidelberg.
- Weigand, H.G., Weth, T. (2010): Computer im Mathematikunterricht, Neue Wege zu alten Zielen, Heidelberg.
- Zeitler, H., Pagon, D. (2000): Fraktale Geometrie, Eine Einführung, Wiesbaden.

Internetlinks

- URL: <http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/InformatikMathematik/ExperimMathe.pdf> Stand 05.11.2013
- Raith, P. (o.J.): Chaos und Fraktale, URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~peter/spapers/ps01.pdf> Stand 27.07.2013.
- Reiter, R. (2006): Die Ästhetik der Fraktale, Mathematik Kunst des Unendlichen, URL: <http://www.zonk.at/fraktale/> Stand 27.07.2013.
- URL: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Koch.html> Stand 01.11.2013
- URL: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hausdorff.html> Stand 06.08.2013
- URL: <http://www.natur-struktur.ch/fraktale/boxdim.html> Stand 02.11.2013
- URL: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/785/ahs10.pdf> Stand 25.08.2013
- URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11863/lp_neu_ahs_11.pdf Stand 25.08.2013
- URL: <http://lexikon.stangl.eu/6420/partnerarbeit/> Stand 27.10.2013
- URL: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/785/ahs10.pdf> Stand 16.08.2013

- URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11863/lp_neu_ahs_11.pdf Stand 25.10.2013)
- URL: <http://www.gam3d.at/seiten/info.html> Stand 16.08.2013
- URL: <http://www.gam3d.at/seiten/download.html> Stand 16.08.2013
- URL: <http://www.geogebra.org/cms/de/> Stand 16.08.2013
- URL: <http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/GeoGebra> Stand 16.08.2013
- <http://www.geogebra.org/cms/de/> Stand 16.08.2013
- URL:
http://old.arch.ethz.ch/space/space.arch.ethz.ch/ws98/files/tutorials/MSt1_WS_98.pdf Stand 25.10.2013
- URL: http://www.high-tech-center.ch/de/htc-geschichte/zeitungsartikel/HTC_0115.pdf Stand 25.10.2013
- URL: http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/did_geo/dateien/tetraeder-1.pdf Stand 23.09.2013
- URL: Vgl. http://wiki.zum.de/images/9/95/Drachenfalten_Mathetag.pdf, Stand 22.09.2013
- URL: <https://home.ph-freiburg.de/deisslerfr/programme/lindenmayer.pdf> Stand 23.10.2013
- <http://www.schulmodell.eu/unterricht/84-mathematik-ergaenzend/mathelexikon?start=140> Stand 03.11.2013

Abbildungsverzeichnis

- Abbildung 1: URL:
https://www.google.at/search?q=waclaw+sierpinski&source=Inms&tbm=isch&sa=X&ei=LuZzUtAYxoTgBPHAgfAK&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#facrc=_&imgrc=Vga-pfVbijmWwM%3A%3BcYJPaG0uuVzrmM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fde%252Fthumb%252F8%252F81%252FSierpinski.jpg%252F220px-Sierpinski.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252FWac%2525C5%252582aw_Sierpi%2525C5%252584ski%3B220%3B268
Stand 01.11.2013
- Abbildung 2: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 19)
- Abbildung 3: URL: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Koch.html>
Stand 01.11.2013
- Abbildung 4: eigene Darstellung (Vgl. Dufner et al., S. 29)
- Abbildung 5: URL:
https://www.google.at/search?q=georg+cantor&source=Inms&tbm=isch&sa=X&ei=nvpzUrn1Cc-qhQfoylHwAg&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#facrc=_&imgrc=wTDjXO_D6fsIVM%3A%3B8Zyjj5RgNfbyhM%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.math.tugraz.at%252F~predota%252Fold%252Fhistory%252Fmathematiker%252Fimg%252Fcantor1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.math.tugraz.at%252F~predota%252Fold%252Fhistory%252Fmathematiker%252Fcantor.html%3B268%3B326 Stand 01.11.2013
- Abbildung 6: eigene Darstellung (Vgl. Komorek et al., S. 74)
- Strecke: eigene Darstellung (Vgl. Reiter, S. 47)
- Quadrat: eigene Darstellung (Vgl. Reiter, S. 47)
- Würfel: eigene Darstellung (Vgl. Reiter, S. 47)
- Abbildung 7: URL:
https://www.google.at/search?q=felix+hausdorff&source=Inms&tbm=isch&sa=X&ei=l_I3UuWjAaOo4ATZk4DIBg&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722

#facrc=_&imgdii=_&imgrc=MqqBT_A6h4LFXM%3A%3B7lox7h0Z9Wk2xM%3
Bhttp%253A%252F%252Fwww-history.mcs.st-
and.ac.uk%252FBigPictures%252FHausdorff_2.jpeg%3Bhttp%253A%252F%
252Fwww-history.mcs.st-
and.ac.uk%252FPictDisplay%252FHausdorff.html%3B287%3B326 Stand
01.11.2013

- Strecke: eigene Darstellung (visualisierter Text von Reiter, S. 50)
- Quadrat: eigene Darstellung (Vgl. Reiter, S. 50)
- Würfel: eigene Darstellung (visualisierter Text von Reiter, S. 50)
- Abbildung 8: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 18)
- Abbildung 9: eigene Darstellung (Vgl. Dufner et al., S. 29)
- Abbildung 10: eigene Darstellung (Vgl. Dufner et al., S. 3)
- Abbildung 11: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 94)
- Abbildung 12: eigene Darstellung (Vgl. Scheid et al., S. 113)
- Abbildung 13: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 107)
- Abbildung 14: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 110)
- Abbildung 15: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 112)
- Abbildung 16: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 114f)
- Abbildung 17: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 134)
- Abbildung 18: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 136)
- Abbildung 19: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 138)
- Abbildung 20: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler et al., S. 138)
- Barnsley-Farn: URL:
https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#facrc=_&imgdii=_&imgrc=AINK5oIO7AwuJM%3A%3BimnzkqvTG_711M%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252FImages%252FGif%252Ffarngrau.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252Fnode80.html%3B200%3B271 Stand 03.11.2013

- Blumenkohl: URL:
https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=blumenkohl&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=Nb2JGMBPcbUMXM%3A%3Be-U7cclHONuwCM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252F7%252F78%252FBlumenkohl-1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252FBlumenkohl%3B2200%3B2000 Stand 03.11.2013
- menschliche Lunge: URL:
https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=lungenabbildung+fraktal&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=aXzSB0leCBLwdM%3A%3BaF2UGliMgR301M%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.cosmiq.de%252Fdata%252Fde%252Fffd%252F0a%252Fffd0ae8bdd16101c6ea449a698b4ce89_1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.cosmiq.de%252Fqa%252Fshow%252F3180209%252F1st-der-Mensch-ein-Fraktal%252F%3B295%3B264 Stand 03.11.2013
- Schildkröten: URL:
<http://www.google.at/imgres?imgurl=&imgrefurl=http%3A%2F%2Fwww.fotosearch.de%2Fillustrationen%2Fschildkr%25C3%25B6te.html&h=0&w=0&sz=1&tbid=Sx44eoWM6DMf2M&tbnh=128&tbnw=136&zoom=1&docid=5XoxZTbIN1zUpM&hl=de&ei=56c-UvP6Jc3LsgbJ2oHYCw&ved=0CAEQsCU> Stand 22.09.2013
- Sierpinski-Dreieck: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler, S. 19)
- Konstruktion des Sierpinski-Dreieckes: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler, S. 19)
- Faltanleitung: URL: http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/did_geo/dateien/tetraeder-1.pdf Stand 25.09.2103
- Sierpinski-Tetraeder: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler, S. 25)
- Faltung der Drachenkurve: eigene Fotos

- Drachenkurve: eigene Darstellung (Vgl. URL: <http://www.jgiesen.de/Divers/PapierFalten/Aufgaben/Loesungen.html> Stand 05.11.2013)
- Drachenkurve: eigene Darstellung (Vgl. URL: <http://www.jgiesen.de/Divers/PapierFalten/Aufgaben/Loesungen.html> Stand 05.11.2013)
- Grasähnliche Figur: eigene Darstellung (Vgl. Haftendorn, S. 92)
- Pythagorasbaum: eigene Darstellung (Vgl. URL: https://www.google.at/search?q=konstruktion+der+drachenkurve&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=7i16UtWvLoPc4wS5yYDIBw&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=pythagorasbaum&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=vGajQ_Kf6qkGEM%3A%3BTj2Gn0OCPbu3mM%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.pohlig.de%252FUnterricht%252FInf2005%252FAnhang%252FA4%252FBilder%252FPythagoras1.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.pohlig.de%252FUnterricht%252FInf2005%252FAnhang%252FA4%252FA.3.5_Pythagorasbaum.htm%3B319%3B235 Stand 05.11.2013)
- Pythagorasbau: URL: http://www.google.at/imgres?imgurl=http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/uploads/5/2_pythagorasbaum_gemalt.gif&imgrefurl=http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid%3D906&h=187&w=264&sz=14&tbid=BLUu6LEuSU3TPM:&tbnh=87&tbnw=123&zoom=1&usg=__fgsWuync3g-ITV1vqPNDA6qGpkM=&docid=AbQhWV_o7sSQwM&sa=X&ei=U-5PUo-vJojSsgazvIHoDQ&sqj=2&ved=0CDwQ9QEwBA Stand 03.11.2013
- Baum: URL: http://www.google.at/imgres?imgurl=http://euf.cc/media/baum.jpg&imgrefurl=http://euf.cc/pages/institut-euf/team.php&h=1130&w=1699&sz=866&tbnid=vliE1fdXn69TdM:&tbnh=74&tbnw=112&zoom=1&usg=__b9-pZTciokfio8V3mK6wEFsm0w=&docid=rjBJHfwcy5zRrM&sa=X&ei=kO5PUurZEcZEswwbdllDwCg&ved=0CD0Q9QEwAg Stand 03.11.2013
- Benoit Mandelbrot: URL: https://www.google.at/search?q=konstruktion+der+drachenkurve&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=7i16UtWvLoPc4wS5yYDIBw&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=benoit+mandelbrot&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=

RYGmNOE5xsbFSM%3A%3BPTar4h2cbYHnyM%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.foreignpolicy.com%252Ffiles%252Fimages%252FMandelbrot.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.foreignpolicy.com%252Fnode%252F29665%3B300%3B275 Stand 03.11.2013

- Ian Stewart: Verändertes Bild Vgl. URL:
https://www.google.at/search?q=konstruktion+der+drachenkurve&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=7i16UtWvLoPc4wS5yYDIBw&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=ian+stewart&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=mpvgOaxWB7vQTM%3A%3B_cEstnq0I9uJGM%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.guim.co.uk%252Fsys-images%252Feducation%252Fpix%252Fpictures%252F2009%252F06%252F08%252FIanStewartDavidSillitoe2.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.theguardian.com%252Feducation%252F2009%252Fjun%252F09%252FIan-stewart-academicexperts-mathematics%3B460%3B276 Stand 03.11.2013
- John Archibald Wheeler: Verändertes Bild Vgl. URL:
https://www.google.at/search?q=konstruktion+der+drachenkurve&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=7i16UtWvLoPc4wS5yYDIBw&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=John+Archibald+Wheeler:+&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=W11xbh76KSwc5M%3A%3BG_nyCS8AXctQM%3Bhttp%253A%252F%252Fgraphics8.nytimes.com%252Fimages%252F2008%252F04%252F14%252Fus%252F14wheeler.600.1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.nytimes.com%252F2008%252F04%252F14%252Fscience%252F14wheeler.html%253Fpagewanted%253Dall%3B600%3B280 Stand 05.11.2013
- Benoit Mandelbrot: URL:
https://www.google.at/search?q=konstruktion+der+drachenkurve&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=7i16UtWvLoPc4wS5yYDIBw&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=benoit+mandelbrot&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=RYGmNOE5xsbFSM%3A%3BPTar4h2cbYHnyM%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.foreignpolicy.com%252Ffiles%252Fimages%252FMandelbrot.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.foreignpolicy.com%252Fnode%252F29665%3B300%3B275 Stand 05.11.2013
- Koch-Kurve: eigene Darstellung (Vgl. Dufner, S. 29)
- Sierpinski-Dreieck: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler, S. 19)

- Blumenkohl: URL:
https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=Inms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=blumenkohl&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=Nb2JGMBPcbUMXM%3A%3Be-U7cclHONuwCM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252F7%252F78%252FBlumenkohl-1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252FBlumenkohl%3B2200%3B2000 Stand 03.11.2013
- Lupe: URL:
https://www.google.at/search?q=konstruktion+der+drachenkurve&source=Inms&tbm=isch&sa=X&ei=7i16UtWvLoPc4wS5yYDIBw&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=lupe&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=T1hjAblzAsWW7M%3A%3BGiwvcSqogCue3M%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.freepik.com%252Ffotos-kostenlos%252Flupe-clip-art_415495.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.freepik.com%252Fvektoren-kostenlos%252Flupe-clip-art_382233.htm%3B626%3B593 Stand 05.11.2013
- Menger-Schwamm: URL:
https://www.google.at/search?q=menger+schwamm&source=Inms&tbm=isch&sa=X&ei=hZt2UvKiB-qg4gTp6YCwCw&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=menger+schwamm&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=-fijLlqDB3MGJM%3A%3B83vrskA3ouf7GM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252F9%252F96%252FMenger-Schwamm-einfarbig.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252FKarl_Menger%3B3000%3B2250 Stand 03.11.2013
- Barnsley-Farn: URL:
https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=Inms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#facrc=_&imgdii=_&imgrc=AINK5oIO7AwuJM%3A%3BimnzkqvTG_711M%3

Bhttp%253A%252F%252Fwww-

lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252FImages%252FGif%
252Ffarngrau.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-

lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252Fnode80.html%3B20
0%3B271 Stand 03.11.2013

- Stickmuster: URL:

https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=stickmuster&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=1_AizSDPspZmZM%3A%3BH_Cw4KxkMDwySM%3Bhttp%253A%252F%252F3.bp.blogspot.com%252F-jrWFOI4Ru4M%252FTn7dVRUMP6I%252FAAAAAAAAAAAs%252FwSU6gKamYTM%252Fs1600%252FB%252525C3%252525A4uerlicher%252BBI%252525C3%252525BCentraum.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fhistorischestickmuster.blogspot.com%252F2011_09_01_archive.html%3B1600%3B1600 Stand

03.11.2013

- Pythagorasbaum: URL:

https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=pythagorasbaum&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=XvsZAtDp0o28M%3A%3BFDm3ono6ConSKM%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.inf-schule.de%252Fcontent%252Falgorithmen%252Falgorithmen%252Frekursion%252Fselbstaehnlichkeit%252Fuebungen%252Fpythagorasbaum.png%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.inf-schule.de%252Falgorithmen%252Falgorithmen%252Frekursion%252Fselbstaehnlichkeit%252Fuebungen%3B518%3B380 Stand

03.11.2013

- Escher: URL:

https://www.google.at/search?q=escher+fische&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=cP5jUt-UlpDwhQfrn4HoDg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=m.c.%20escher&revid=1688916848&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=hS_WeoXsnKJLGM%3A%3BDgE2DQHcF1BHnM%3Bhttp%253A%252F

UlpDwhQfrn4HoDg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=m.c.%20escher&revid=1688916848&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=hS_WeoXsnKJLGM%3A%3BDgE2DQHcF1BHnM%3Bhttp%253A%252F

252Fuploads7.wikipaintings.org%252Fimages%252Fm-c-escher%252Ffishes-and-scales.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.wikipaintings.org%252Fen%252Fm-c-escher%252Ffishes-and-scales%3B1280%3B1280 Stand 03.11.2013

- Buchenblatt: URL:

[https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=buchenblatt&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=DpaTrLZ2vGUvM%3A%3BAxaC66BE38T_fm%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.rohkostwiki.de%252Fimages%252Fthumb%252F7%252F7e%252FBuche%252C_Blatt.JPG%252F400px-Buche%252C_Blatt.JPG%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.rohkostwiki.de%252Fwiki%252FBuche%3B400%3B300)

[8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=buchenblatt&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=DpaTrLZ2vGUvM%3A%3BAxaC66BE38T_fm%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.rohkostwiki.de%252Fimages%252Fthumb%252F7%252F7e%252FBuche%252C_Blatt.JPG%252F400px-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=buchenblatt&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=DpaTrLZ2vGUvM%3A%3BAxaC66BE38T_fm%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.rohkostwiki.de%252Fimages%252Fthumb%252F7%252F7e%252FBuche%252C_Blatt.JPG%252F400px-Buche%252C_Blatt.JPG%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.rohkostwiki.de%252Fwiki%252FBuche%3B400%3B300)

[Buche%252C_Blatt.JPG%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.rohkostwiki.de%252Fwiki%252FBuche%3B400%3B300](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=buchenblatt&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=DpaTrLZ2vGUvM%3A%3BAxaC66BE38T_fm%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.rohkostwiki.de%252Fimages%252Fthumb%252F7%252F7e%252FBuche%252C_Blatt.JPG%252F400px-Buche%252C_Blatt.JPG%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.rohkostwiki.de%252Fwiki%252FBuche%3B400%3B300) Stand 03.11.2013

- menschliche Lunge: URL:

[https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=lungenabbildung+fraktal&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=aXzSB0leCBLwdM%3A%3BaF2UGliMgR301M%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.cosmiq.de%252Fdata%252Fde%252Fffd%252F0a%252Fffd0ae8bdd16101c6ea449a698b4ce89_1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.cosmiq.de%252Fqa%252Fshow%252F3180209%252F1st-der-Mensch-ein-Fraktal%252F%3B295%3B264)

[8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=lungenabbildung+fraktal&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=aXzSB0leCBLwdM%3A%3BaF2UGliMgR301M%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.cosmiq.de%252Fdata%252Fde%252Fffd%252F0a%252Fffd0ae8bdd16101c6ea449a698b4ce89_1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.cosmiq.de%252Fqa%252Fshow%252F3180209%252F1st-der-Mensch-ein-Fraktal%252F%3B295%3B264](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=lungenabbildung+fraktal&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=aXzSB0leCBLwdM%3A%3BaF2UGliMgR301M%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.cosmiq.de%252Fdata%252Fde%252Fffd%252F0a%252Fffd0ae8bdd16101c6ea449a698b4ce89_1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.cosmiq.de%252Fqa%252Fshow%252F3180209%252F1st-der-Mensch-ein-Fraktal%252F%3B295%3B264)

[CBLwdM%3A%3BaF2UGliMgR301M%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.cosmiq.de%252Fdata%252Fde%252Fffd%252F0a%252Fffd0ae8bdd16101c6ea449a698b4ce89_1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.cosmiq.de%252Fqa%252Fshow%252F3180209%252F1st-der-Mensch-ein-Fraktal%252F%3B295%3B264](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=lungenabbildung+fraktal&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=aXzSB0leCBLwdM%3A%3BaF2UGliMgR301M%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.cosmiq.de%252Fdata%252Fde%252Fffd%252F0a%252Fffd0ae8bdd16101c6ea449a698b4ce89_1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.cosmiq.de%252Fqa%252Fshow%252F3180209%252F1st-der-Mensch-ein-Fraktal%252F%3B295%3B264)

[Fraktal%252F%3B295%3B264](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=lungenabbildung+fraktal&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=aXzSB0leCBLwdM%3A%3BaF2UGliMgR301M%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.cosmiq.de%252Fdata%252Fde%252Fffd%252F0a%252Fffd0ae8bdd16101c6ea449a698b4ce89_1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.cosmiq.de%252Fqa%252Fshow%252F3180209%252F1st-der-Mensch-ein-Fraktal%252F%3B295%3B264) Stand 03.11.2013

- Konstruktion des Sierpinski-Dreieckes: eigene Darstellung (Vgl. Zeitler, S. 19)
- Cantor-Fläche: eigene Darstellung (Vgl. Komorek, S. 74)
- Grundprinzip der Lindenmayer-Systeme: eigene Darstellung (Vgl. Haftendorn, S. 89)

- Benoit Mandelbrot: URL:

[q=konstruktion+der+drachenkurve&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=7i16UtWvLoPc4wS5yYDIBw&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=benoit+mandelbrot&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=RYGmNOE5xsbFSM%3A%3BPTar4h2cbYHnyM%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.foreignpolicy.com%252Ffiles%252Fimages%252FMandelbrot.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww](https://www.google.at/search?q=konstruktion+der+drachenkurve&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=7i16UtWvLoPc4wS5yYDIBw&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=benoit+mandelbrot&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=RYGmNOE5xsbFSM%3A%3BPTar4h2cbYHnyM%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.foreignpolicy.com%252Ffiles%252Fimages%252FMandelbrot.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww)

.foreignpolicy.com%252Fnode%252F29665%3B300%3B275 Stand
03.11.2013

- Tuffstein: URL:
<http://www.google.at/imgres?imgurl=&imgrefurl=http%3A%2F%2Fcommunity.fachwerk.de%2Findex.cfm%2Ffly%2F1%2F0%2Fimage%2Fa%2FshowPicture%2F22255%24.cfm&h=0&w=0&sz=1&tbnid=z3b9tKJT3cZMVM&tbnh=194&tbnw=259&zoom=1&docid=57W8B5cRwvUPVM&ei=Lpx2UoK5A4bsswak54CICw&ved=0CAIQsCU> Stand 03.11.2013
- Menger-Schwamm: URL:
https://www.google.at/search?q=menger+schwamm&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=hZt2UvKiB-qg4gTp6YCwCw&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722#q=menger+schwamm&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=-fijLlqDB3MGJM%3A%3B83vrskA3ouf7GM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252F9%252F96%252FMeinger-Schwamm-einfarbig.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252Fkurl_Menger%3B3000%3B2250 Stand 03.11.2013
- fraktales Gebirge: eigene Darstellung
- Menger-Schwamm: URL:
https://www.google.at/search?q=menger+teppich&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=9vVjUqaDCsbTtAaErID4BQ&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#facrc=_&imgdii=_&imgrc=YlwgcqIWQS-rVM%3A%3BPbL2r9jmdORmHM%3Bhttp%253A%252F%252Fwwwu.uni-klu.ac.at%252Fgossimit%252Fiv%252Fusw00%252Fw%252Fg5%252Fk4allgr%252Fment Tepp.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwwwu.uni-klu.ac.at%252Fgossimit%252Fiv%252Fusw00%252Fw%252Fg5%252Fk4allgr.html%3B421%3B418 Stand 03.11.2013
- Sierpinski-Dreieck: URL:
https://www.google.at/search?q=menger+teppich&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=9vVjUqaDCsbTtAaErID4BQ&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=sierpinski-dreieck&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=4Q92c2agJbzVYM%3A%3Bk7vqAVwHgFqk5M%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.bjoernmuenstermann.de%2

52FFraktale%252FKursbeschreibung%252Fsierpinski_dreieck.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.bjoernmuenstermann.de%252FFraktale%252FKursbeschreibung%252Fkursbeschreibung.html%3B364%3B319 Stand 03.11.2013

- Barnsley-Farn: URL:

[https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#facrc=_&imgdii=_&imgrc=AINK5oIO7AwuJM%3A%3BimnzkqvTG_711M%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252FImages%252FGif%252Ffarngrau.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252Fnode80.html%3B200%3B271)

[8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#facrc=_&imgdii=_&imgrc=AINK5oIO7AwuJM%3A%3BimnzkqvTG_711M%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#facrc=_&imgdii=_&imgrc=AINK5oIO7AwuJM%3A%3BimnzkqvTG_711M%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252FImages%252FGif%252Ffarngrau.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252Fnode80.html%3B200%3B271)

[lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252FImages%252FGif%252Ffarngrau.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#facrc=_&imgdii=_&imgrc=AINK5oIO7AwuJM%3A%3BimnzkqvTG_711M%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252FImages%252FGif%252Ffarngrau.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252Fnode80.html%3B200%3B271)

[lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252Fnode80.html%3B200%3B271](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#facrc=_&imgdii=_&imgrc=AINK5oIO7AwuJM%3A%3BimnzkqvTG_711M%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252FImages%252FGif%252Ffarngrau.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fwww-lehre.inf.uos.de%252F~cg%252F2010%252Fskript%252Fnode80.html%3B200%3B271) Stand 03.11.2013

- Blumenkohl: URL:

[https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=blumenkohl&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=Nb2JGMBPcbUMXM%3A%3Be-U7cclHONuwCM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252F7%252F78%252FBlumenkohl-1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252FBlumenkohl%3B2200%3B2000)

[8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=blumenkohl&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=Nb2JGMBPcbUMXM%3A%3Be-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=blumenkohl&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=Nb2JGMBPcbUMXM%3A%3Be-U7cclHONuwCM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252F7%252F78%252FBlumenkohl-1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252FBlumenkohl%3B2200%3B2000)

[U7cclHONuwCM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252F7%252F78%252FBlumenkohl-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=blumenkohl&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=Nb2JGMBPcbUMXM%3A%3Be-U7cclHONuwCM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252F7%252F78%252FBlumenkohl-1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252FBlumenkohl%3B2200%3B2000)

[1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252FBlumenkohl%3B2200%3B2000](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=blumenkohl&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=Nb2JGMBPcbUMXM%3A%3Be-U7cclHONuwCM%3Bhttp%253A%252F%252Fupload.wikimedia.org%252Fwikipedia%252Fcommons%252F7%252F78%252FBlumenkohl-1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fde.wikipedia.org%252Fwiki%252FBlumenkohl%3B2200%3B2000) Stand 03.11.2013

- Julia-Menge: URL:

[https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=Julia-Menge&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=metx_vzS2MHNBM%3A%3Bd2I7I211WOR40M%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fpictures%252Fdewiki%252F74%252FJulia-Set_z2%25252Bc_-1_0.png%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fdic.nsf%252Fdewiki%252F720237%3B1600%3B960)

[8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=Julia-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=Julia-Menge&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=metx_vzS2MHNBM%3A%3Bd2I7I211WOR40M%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fpictures%252Fdewiki%252F74%252FJulia-Set_z2%25252Bc_-1_0.png%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fdic.nsf%252Fdewiki%252F720237%3B1600%3B960)

[Menge&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=metx_vzS2MHNBM%3A%3Bd2I7I211WOR40M%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fpictures%252Fdewiki%252F74%252FJulia-Set_z2%25252Bc_-](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=Julia-Menge&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=metx_vzS2MHNBM%3A%3Bd2I7I211WOR40M%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fpictures%252Fdewiki%252F74%252FJulia-Set_z2%25252Bc_-1_0.png%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fdic.nsf%252Fdewiki%252F720237%3B1600%3B960)

[1_0.png%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fdic.nsf%252Fdewiki%252F720237%3B1600%3B960](https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=Julia-Menge&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=metx_vzS2MHNBM%3A%3Bd2I7I211WOR40M%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fpictures%252Fdewiki%252F74%252FJulia-Set_z2%25252Bc_-1_0.png%3Bhttp%253A%252F%252Fde.academic.ru%252Fdic.nsf%252Fdewiki%252F720237%3B1600%3B960) Stand 03.11.2013

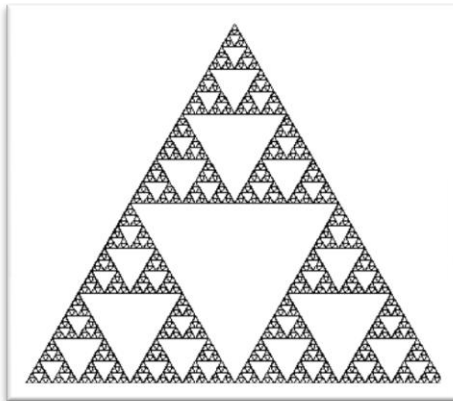
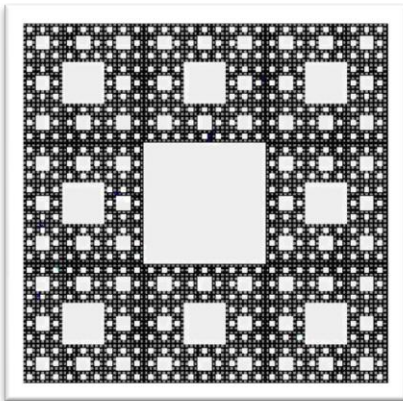
- Koch-Kurve: URL:
https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=kochkurve&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=Le1B3pv40agnYM%3A%3BHEdYuTtbxDS6kM%3Bhttp%253A%252F%252Fgiroresh.bplaced.net%252Finfo%252Fkoch%252Fkoch4.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fgiroresh.bplaced.net%252Finfo%252Fkoch%252Fkoch.php%3B725%3B247 Stand 03.11.2013
- Lungenabbildung: URL:
https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=lungenabbildung+fraktal&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=aXzSB0leCBLwdM%3A%3BaF2UGliMgR301M%3Bhttp%253A%252F%252Fstatic.cosmiq.de%252Fdata%252Fde%252Fffd%252F0a%252Fffd0ae8bdd16101c6ea449a698b4ce89_1.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.cosmiq.de%252Fqa%252Fshow%252F3180209%252F1st-der-Mensch-ein-Fraktal%252F%3B295%3B264 Stand 03.11.2013
- Pythagorasbaum: URL:
https://www.google.at/search?q=farnblatt&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=mvZjUr-8FIbAtQblyoGIBg&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1536&bih=722&dpr=1.25#q=pythagorasbaum&tbm=isch&facrc=_&imgdii=_&imgrc=XvsZAtdDp0o28M%3A%3BFDm3ono6ConSKM%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.inf-schule.de%252Fcontent%252Falgorithmen%252Falgorithmen%252Frekursion%252Fselbstaehnlichkeit%252Fuebungen%252Fpythagorasbaum.png%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.inf-schule.de%252Falgorithmen%252Falgorithmen%252Frekursion%252Fselbstaehnlichkeit%252Fuebungen%3B518%3B380 Stand 03.11.2013
- Cantor-Fläche: eigene Darstellung (Vgl. Komorek, S. 74)
- Landkarten: GoogleEarth

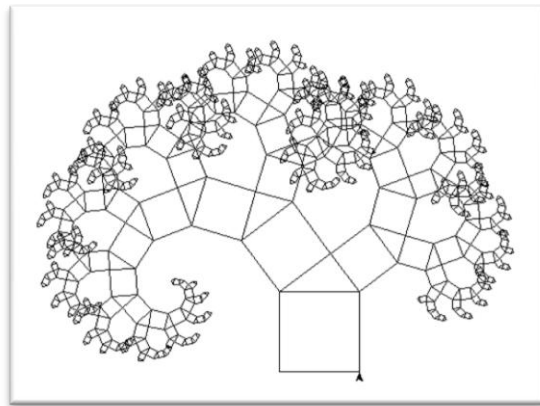
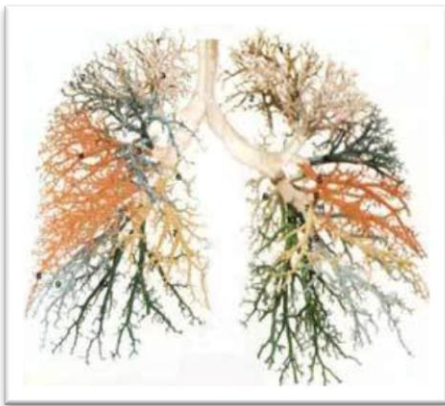
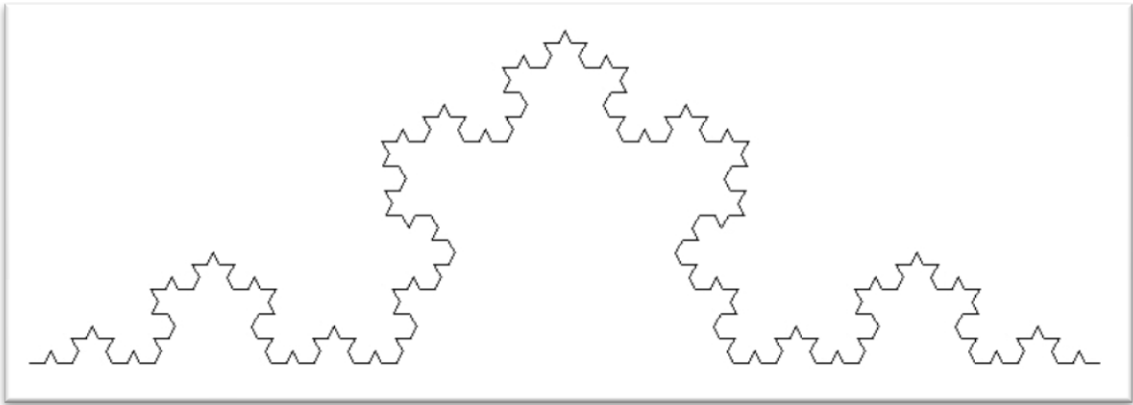
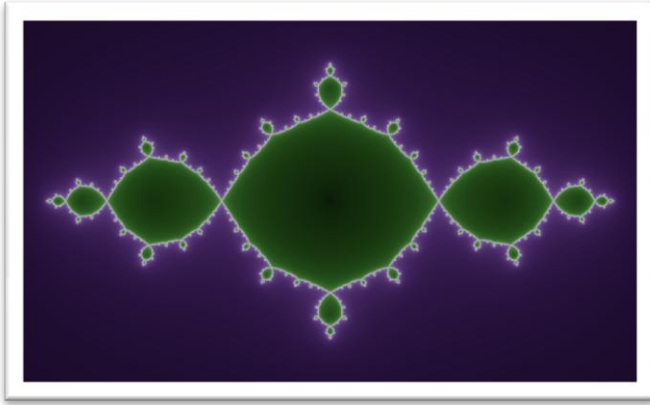
Tabellenverzeichnis

- Tabelle 1: eigene Darstellung (Vgl. Reiter, S. 50)
- Tabelle 2: eigene Darstellung (Vgl. Reiter, S. 51)
- Tabelle 3: eigene Darstellung (Vgl. Reiter, S. 51)

Anhang

Bilder für Gruppenarbeit 1. Stunde 7. Klasse

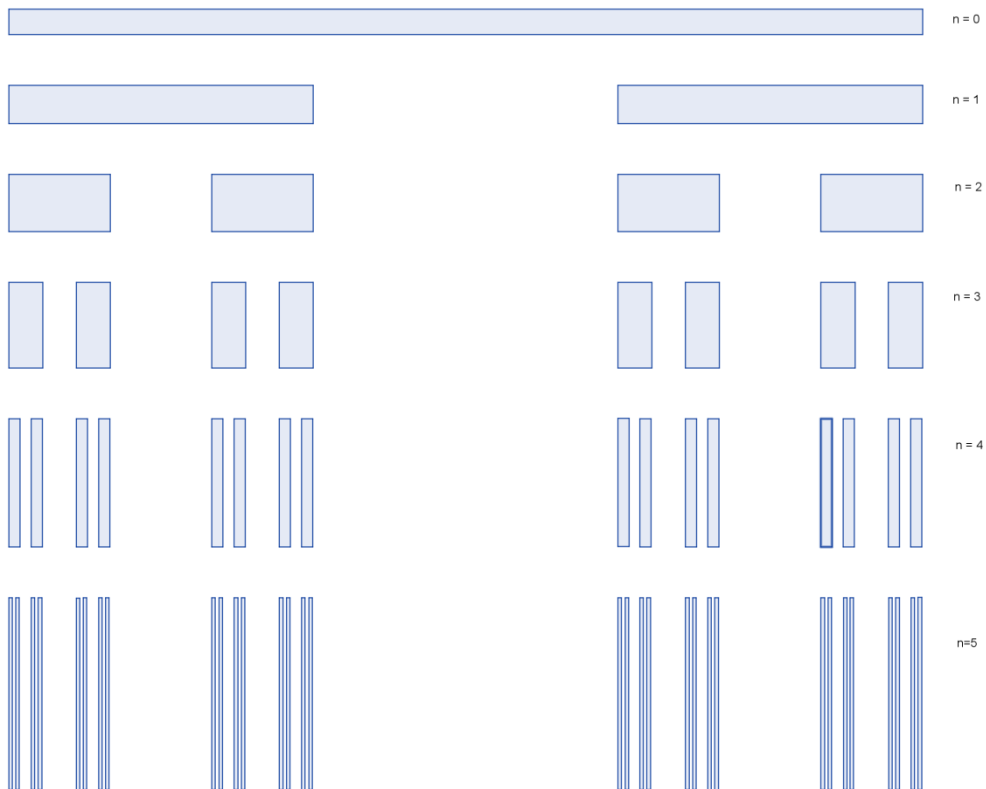




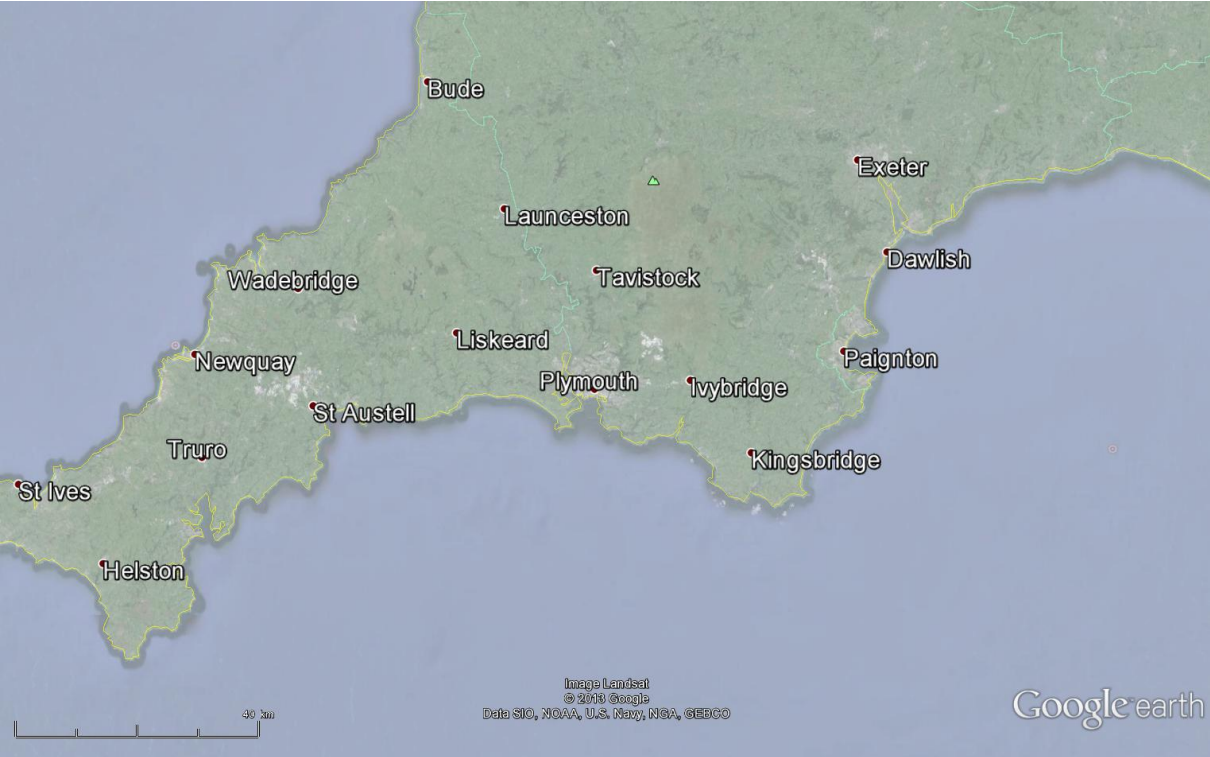
Lösung Selbstähnlichkeit

SELBSTÄHNLICH	NICHT SELBSTÄHNLICH
Menger-Teppich	Stickmuster
Barnsley-Farn	Zeichnung von M. C. Escher
Pythagorasbaum	Buchenblatt
Lungenabbildung	

Lösungsblatt Cantor-Fläche



Karten zur Station: Wie lang ist die Küste Englands?



Lebenslauf

ANGABEN ZUR PERSON

Name **SCHMÖGER MICHAELA**
E-mail a0906983@unet.univie.ac.at

SCHULBILDUNG

2009 – 2013
Universität Wien
Lehramt Mathematik sowie Geographie und Wirtschaftskunde

2001 – 2009
Bundesrealgymnasium Horn

1997 – 2001
Volksschule Reinprechtspölla

ARBEITSERFAHRUNG

September 2013 – HEUTE
BG Rechte Kremszeile

März 2012 – August 2013
Lernquadrat Horn (Geringfügige Beschäftigung)

Juli 2009 – September 2011
Cinemaplexx Horn (Geringfügige Beschäftigung)

2012(August), 2011 (August), 2010 (Juli)
Ferialpraktika - Agrarmarkt Austria

2010 (August), 2009 (Juli), 2008 (Juli), 2007 (Juli), 2006 (Juli)
Ferialpraktika - Pay Life

PERSÖNLICHE FÄHIGKEITEN UND KOMPETENZEN

MUTTERSPRACHE DEUTSCH

FREMDSPRACHEN ENGLISCH LATEIN

SACHERSCHLIESSUNG
der
Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien

Klassifikation

Aufstellungsort: HoA HoD

MSC2000:

BK:

Schlagwortketten nach RSWK

Funktionale Geometrie

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

12.11.2013
.....
Datum

[Signature]
.....
Unterschrift

