DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

**Optionen und Martingale
und deren Integration in einem
anwendungsbezogenen Mathematikunterricht**

Verfasserin

Lisa Maria Neitzel

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 456
Studienrichtung lt. Studienblatt:	UF Mathematik
	UF Geographie und Wirtschaftskunde
Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Walter Schachermayer

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Walter Schachermayer für seine ausgesprochen gute Betreuung und hervorragende Zusammenarbeit bedanken.
Ebenso möchte ich mich bei Frau Dipl.-Ing. Dr.sc. Christa Cuchiero bedanken, die eine große fachliche Unterstützung für mich war.
Der größte Dank gebührt meinen Eltern und Großeltern, ohne sie wäre dies nicht möglich gewesen. Sie haben mir das Studium finanziell ermöglicht und sind mir immer mit gutem Rat zur Seite gestanden.
Danken möchte ich auch noch meinem Freund Martin, der mich immer wieder ermutigt hat und mir bei der Diplomarbeit eine große persönliche Stütze war.
Ein besonderer Dank gilt außerdem meinen Studienkolleginnen Tabea und Christina und meinem Studienkollegen Stefan, die diese Studienzeit zu etwas Besonderem gemacht haben. Es sind wunderschöne Momente, Erinnerungen und Freundschaften entstanden, die ich für mein zukünftiges Leben mitnehmen kann.

'Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.'

Carl Friedrich Gauß

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Zitat von *Carl Friedrich Gauß* wird als Leitsatz für diese Arbeit verwendet. Diese Arbeit soll einen Einblick in die Finanzmathematik geben und Martingale und Optionen näher beschreiben. Ziel dieser Arbeit ist es, die Optionstheorie in einen anwendungsbezogenen und schülerInnenorientierten Mathematikunterricht einzubauen und SchülerInnen diese Materie anhand von Beispielen und Aufgaben näher zu bringen.
Diese Arbeit gliedert sich in drei große Bereiche, Martingale, Optionen und einen didaktischen Input, der Optionen im Unterricht behandelt.
Das 2. Kapitel gibt einen kurzen Einblick in die stochastischen Grundlagen diskreter Märkte. Es werden das n-Periodenmodell sowie das Wahrscheinlichkeitsmodell vorgestellt, die für die späteren Kapitel eine Basis bilden. Zusätzlich werden Filtration, adaptierte Prozesse und der bedingte Erwartungswert eingeführt.
Das Kapitel 3 beinhaltet Martingale und Spielsysteme. Die Martingaltheorie wurde durch Lévy (1937) und Doob (1949) bekannt. Martingale sind wichtige Instrumente der Wahrscheinlichkeitstheorie und darüber hinaus liegt ihr Anwendungsgebiet in der Finanzmathematik, da sie als Modelle für faire Spiele formalisiert werden können. Dieses Kapitel befasst sich außerdem mit Stoppzeiten und mit dem gestoppten Prozess.
Das 4. Kapitel handelt von Optionen. Es werden die verschiedenen Optionsbegriffe näher erläutert und die grundlegenden Merkmale von Aktienoptionen behandelt. Des Weiteren werden die Ober- und Untergrenzen der Optionspreise detailliert beschrieben, sowie die Put-Call-Parität. Die Put-Call-Parität beschreibt eine wichtige Beziehung zwischen europäischen Kaufoptionspreisen und europäischen Verkaufsoptionspreisen. Das Kapitel 4.5 dieser Arbeit widmet sich der Optionsbewertung anhand der Konstruktion eines Binomial-Baumes und der risikoneutralen Bewertung. Das Kapitel 4.6 beinhaltet den Maßwechsel und das Theorem von Girsanov, die für das einfache Preismodell im Kapitel 4.7 eine Grundlage bilden.
Das letzte Kapitel widmet sich der Finanzmathematik im Unterricht. In diesem Kapitel wird die Finanzmathematik als ein wichtiger Beitrag eines anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts vorgestellt. Zusätzlich werden einige Einblicke

in Optionen im Unterricht aufgezeigt und ein Unterrichtskonzept mit Aufgaben beziehungsweise Beispielen für den Mathematikunterricht vorgestellt. Den SchülerInnen soll anhand dieses Konzepts ermöglicht werden, einen Einblick in Optionen zu bekommen und das Interesse am eigenständigen finanziellen Handeln soll dadurch geweckt werden.

Kapitel 2

Stochastische Grundlagen diskreter Märkte

2.1 n-Perioden Modell

Das *n-Perioden Modell* beschreibt ein Finanzmarktmodell. Bei diesem Modell betrachten wir einen Finanzmarkt mit einem Finanzgut, in dem zu endlich vielen Zeitpunkten ($t = 0, ..., n$) Handel möglich sei.

Definition 2.1. *Ein n-Perioden Modell ist gegeben durch Zufallsvariablen*

$$\mathcal{S}_i : \Omega \to \mathbb{R}, \ \textit{mit } i = 0, ..., n.$$

Um dies zu veranschaulichen, eine kleine Skizze dazu:

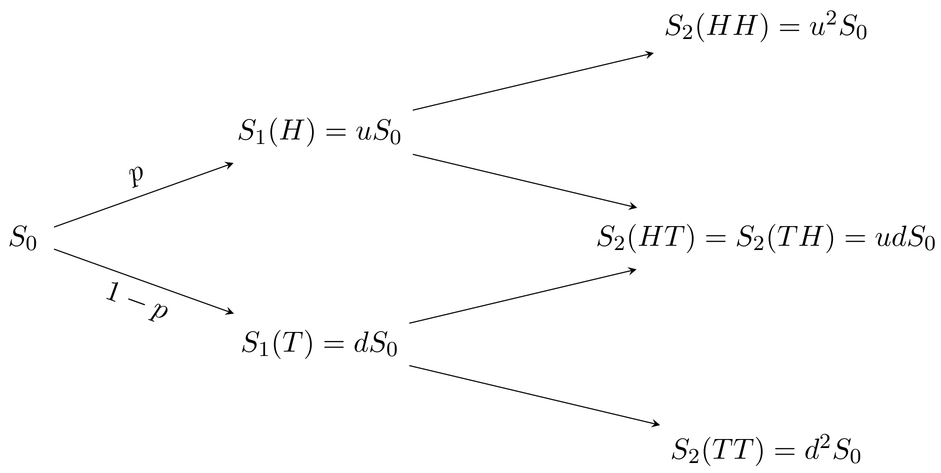

Abbildung 2.1: Perioden-Modell

In dieser Skizze ist ein Perioden Modell über 2 Handelsperioden zu sehen. S_0 ist der Anfangspreis der Aktie, also bevor der Finanzmarkt öffnet. $S_1(H)$ beschreibt den Wert der Aktie zum Zeitpunkt 1, wobei H und T für *head* und *tail* stehen. u wird als *Up factor* bezeichnet und d als *Down factor*. Wir stellen uns einen Münzwurf vor. Das Ergebnis, wenn eine Münze geworfen wird bestimmt also den Preis zum Zeitpunkt 1. Mit einer Wahrscheinlichkeit von p wird *head* eintreten und die Wahrscheinlichkeit für *tail* ist $1 - p$.

Anmerkung: Befinden wir uns in einem Zeitpunkt i, $i < n$, so wird das zukünftige Verhalten der Preise im betrachteten Modell $\mathcal{S}_{i+1}, ..., \mathcal{S}_n$ vom bisherigen Preisverlauf $\mathcal{S}_0, ..., \mathcal{S}_i$ und eventuell weiteren bis zum Zeitpunkt i eingetretenen Ereignissen abhängen.

Im n-Perioden Modell betrachten wir diskrete Zeitparamter, also die Menge $\mathcal{T} = \{0, ..., n\}$.

Zunächst gehen wir auf ein paar grundlegende Begriffe ein, die von großer Bedeutung für zeitlich veränderliche stochastische Prozesse sind. (vgl. [7], S. 39 f.)

2.2 Wahrscheinlichkeitsmodell

Für die Analyse der Ausgänge bildet ein *Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine grundlegende Basis. Die Menge Ω besteht aus den Elementen ω, die die möglichen Ausfälle des Zufallsvorgangs beschreiben. Ω wird als *Merkmalsraum* (Ereignisraum) bezeichnet und die Elemente von Ω nennt man *Merkmale*. Interessant bei einem Zufallsvorgang sind die *Ereignisse*, die als Teilmengen von Ω modelliert werden. Die Menge aller relevanten Teilmengen des Ereignisraums Ω fassen wir zum *Ereignissystem* $\mathcal{F}$ zusammen. Die Elemente von $\mathcal{F}$ sind dann die Ereignisse, denen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden.

Sinnvollerweise soll das Ereignissystem $\mathcal{F}$ mit einem Ereignissvorrat so ausgestattet sein, dass die Verknüpfung von Ereignissen durch herkömmliche mengentheoretische Operationen wiederum zu Ereignissen führt. Weiters soll auch der Merkmalsraum Ω ein Element von $\mathcal{F}$ sein. Deshalb verlangt man von $\mathcal{F}$ im Einzelnen folgende Forderungen:

Definition 2.2. *Als Algebra bezeichnet man ein Mengensystem, das folgende Eigenschaften erfüllt:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $F \in \mathcal{F} \rightarrow F^c \in \mathcal{F}$
3. $F_i \in \mathcal{F}, i = 1, ..., n \rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Weiters verlangt man vom Ereignissystem auch noch die Abgeschlossenheit gegenüber der Bildung abzählbarer Verknüpfungen von mengentheoretischen Operationen. Deshalb die Bedingung:

$$(3^*) F_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \mathbb{N} \to \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$$

Ein Mengen-System, das die Eigenschaften $(1), (2), (3^*)$ *erfüllt, heißt σ-Algebra.*

Da wir nur einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum ansehen, betrachten wir nur die Eigenschaften $(1), (2), (3)$. Für unseren Gebrauch modellieren σ-Algebren verfügbare Informationen. $(\Omega, \mathcal{F})$ bezeichnet im Folgenden einen endlichen Messraum.(vgl. [5], S. 19 f.)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein endlicher diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, wobei Ω eine endliche Menge sei. Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ beschreibt die Gesamtheit aller beobachtbaren Ereignisse. Zu einem Zeitpunkt i, sei durch eine Unter-σ-Algebra

$$\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$$

die Gesamtheit aller bis i beobachtbaren Ereignisse beschrieben. Wir erhalten zu einem späteren Zeitpunkt nicht weniger Informationen. Somit wird gefordert

$$\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_k \text{ für } 0 \leq i < k \leq n.$$

(vgl. [7], S. 40)

Für wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen spielen Abbildungen zwischen *Messräumen* eine zentrale Rolle. Bei einem Messraum handelt es sich um einen Merkmalsraum Ω mit einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf Ω. Seien $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(\Omega', \mathcal{F}')$ Messräume.

Definition 2.3. *Eine Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ heißt $\mathcal{F}$–$\mathcal{F}'$* messbar *falls $X^{-1}(\mathcal{F}') := \{X^{-1}(F') : F' \in \mathcal{F}'\} \subset \mathcal{F}$ ist, falls also*

$$X^{-1}(F') \in \mathcal{F} \quad \forall F' \in \mathcal{F}'.$$

Ist X messbar, so schreibt man auch: $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$.

Für unseren Gebrauch seien $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(B, \mathcal{P}(B))$ Messräume, wobei $B = \{1, .., n\}$. Sei eine Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (B, \mathcal{P}(B))$, dann heißt X messbar. (vgl. [5], S. 32)

2.2.1 Filtration und adaptierte Prozesse

Für diesen Abschnitt führen wir wieder $\mathcal{T} = \{0, ..., n\}$ ein.

Definition 2.4. *Ist $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ eine Familie von Unter-σ-Alegbren $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ mit*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \qquad \text{für } s < t$$

so heißt $\mathbb{F}$ Filtration.

Die Filtration $\mathbb{F}$ beschreibt den Verlauf der wachsenden Informationen. $\mathcal{F}_t$ ist die verfügbare Information zum Zeitpunkt t. Dass die Filtrierung $\mathbb{F}$ stets aufsteigend geordnet ist, bedeutet demnach, dass eine einmal verfügbare Information nicht mehr verloren geht. Weiters wollen wir, dass die Zufallsvariable X_t zum Zeitpunkt t vollständig beobachtbar ist, somit muss sie $\mathcal{F}_t$ messbar sein.
(vgl. [10], S. 302)

Definition 2.5. *Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ heißt* adaptiert *an die Filtration $\mathbb{F}$, falls X_t bezüglich $\mathcal{F}_t$ messbar ist für jedes $t \in \mathcal{T}$.*

Beispiel 2.1. *Jeder stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ist stets an die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ mit*

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$$

adaptiert. Diese Filtration heißt vom Prozess X erzeugte Filtration. Die erzeugte Filtration ist die kleinste Filtration, an die ein Prozess adaptiert ist. (vgl. [9], S. 193)

Eine wichtige stochastische Grundlage von Martingalen ist auch der *bedingte Erwartungswert*, den wir als nächstes ausführlicher beschreiben werden.

2.3 Bedingter Erwartungswert

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $B \in \mathcal{F}$ eine Menge mit $P(B) > 0$, dann wird durch

$$P[A|B] := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad A \in \mathcal{F},$$

ein Wahrscheinlichkeits-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ bzw. auf $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}})$ definiert, wobei

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}.$$

Der bezüglich P_B gebildete Erwartungswert einer Zufallsgröße X, heißt der *bedingte Erwartungswert* von X unter B, wenn

$$\mathbb{E}[X|B] = \int X dP_B$$

gegeben ist. (siehe [5], S. 285)

Definition 2.6. *(Bedingter Erwartungswert bezüglich einer σ-Algebra) Sei X eine integrierbare reelle Zufallsvariable auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Dann heißt eine reelle Zufallsvariable $\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(X)$, bedingter Erwartungswert von X gegeben $\mathcal{G}$, wenn folgende Anforderungen erfüllt sind:*

1. *$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ ist $\mathcal{G}$- messbar.*
2. *$\int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]dP = \int_G XdP, \forall G \in \mathcal{G}$.*

Anmerkung: $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ bezeichnet die bedingte Erwartung von X unter $\mathcal{G}$. Falls die Teil-σ-Algebra $\mathcal{G}$ von einer Zufallsgröße oder einer Menge von Zufallsgrößen erzeugt wird, schreiben wir auch $\mathbb{E}[X|Y]$ oder $\mathbb{E}[X|Y_1, ..., Y_n]$ statt $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, wenn $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ bzw. $\mathcal{G} = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$ ist. Weiters können wir $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ als erwartetes Mittel von X mit Hilfe der Information aus $\mathcal{G}$ auffassen. (vgl. [5], S. 287)

Beispiel 2.2. *Wir betrachten zwei Möglichkeiten $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Im ersten Fall, ohne irgendeine zusätzliche Information, ist das erwartete Mittel von X der Erwartungswert von X:*

$$\mathbb{E}[X|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}[X] \quad \textit{für alle } \omega \in \Omega.$$

Kennen wir hingegen das gesamte Experiment $\sigma(X) \subset \mathcal{G}$, so ist das erwartete Mittel der Messwert selbst:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = X(\omega) \quad \textit{für alle } \omega \in \Omega.$$

(siehe [10], S. 224)

Beispiel 2.3. *Würfelspiel: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Der Ereignisraum Ω ist gegeben durch $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), P$ beschreibt die Gleichverteilung auf den Elementen von Ω. Sei*
$\mathcal{G} = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$ und $X(\omega) = \omega, \quad \forall \omega \in \Omega$. Dann ist

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} 4, & \textit{falls } \omega \in \{2, 4, 6\} \\ 3, & \textit{falls } \omega \in \{1, 3, 5\}. \end{cases}$$

Die Auszahlung entspricht der Augenzahl $\omega = X(\omega)$ und der Spieler erfährt nichts über den Ausfall ω. Der Spieleinsatz beträgt 4 €.

In der ersten Runde des Spiels wird eine Münze geworfen, die über das 2. Spiel entscheidet. Wenn Kopf fällt, wird nur mit einem Würfel mit geraden Zahlen gespielt, wenn Zahl vorkommt, dann kommt ein Würfel mit ungeraden Zahlen zum Einsatz. Das heißt wiederum, dass die Zahlen $1, 3, 5$ auf dem ungeraden Würfel jeweils doppelt vorkommen.

In der zweiten Runde des Spiels bekommt der Spieler nur die in der σ*-Algebra* $\mathcal{G}$ *enthaltene Information, ob man mit einem Würfel mit geraden oder ungeraden Zahlen spielt.*

Ein schlauer Spieler entscheidet sich nur dann zu spielen, wenn mit einem Würfel mit geraden Zahlen gespielt wird, denn da ist der bedingte Erwartungswert gleich dem Spieleinsatz und garantiert somit ein faires Spiel. Entscheidet sich ein Spieler zu spielen, obwohl man mit einem Würfel mit ungeraden Zahlen für die 2. Runde würfelt, ist der bedingte Ewartungswert kleiner als der Spieleinsatz und das Spiel ist unfair.

Kapitel 3

Martingale

3.1 Submartingale, Supermartingale und Martingale

Die Charakteristik eines fairen Spiels ist, dass, wie auch immer die ersten $n-1$ Runden verlaufen, der zu erwartende Gewinn des Spielers nach der n-ten Spielrunde gerade das ist, was er schon bis zur $(n-1)$-ten Runde gewonnen hat. Das heißt, der zu erwartende Zugewinn ist 0, dann ist nämlich auch der zu erwartende Verlust seines Gegners 0 und das Spiel ist fair. Diese Situation eines fairen Spiels wird durch ein Martingal beschrieben. Unfaire Spiele können durch Super- bzw. Submartingale dargestellt werden.

Definition 3.1. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{T} = 0, ..., n$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ eine Filtration. Sei $M = (M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein reeller, adaptierter stochastischer Prozess so heißt M (bezüglich $\mathbb{F}$) ein*

- *Martingal, falls $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ für alle $s < t$*
- *Submartingal, falls $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s$ für alle $s < t$*
- *Supermartingal, falls $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s$ für alle $s < t$. (siehe [9], S. 196)*

Beispiel 3.1. *Ein Spieler nimmt an folgendem Glücksspiel teil: Er setzt eine Einheit pro Spielrunde und gewinnt eine Einheit mit der Wahrscheinlichkeit p dazu bzw. verliert er mit einer Wahrscheinlichkeit $1-p$ seinen Einsatz. Spielt man Roulette, kann der Spieler auf Schwarz mit $p = \frac{18}{37}$ setzen. Das Ergebnis des i-ten Spiels ist gegeben durch*

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad p \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad 1-p \end{cases}$$

$\mathcal{S}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ beschreibt den Gewinnstand nach n Spielen, wobei die Ergebnisse X_i der einzelnen Spiele stochastisch unabhängig betrachtet werden.

In diesem Beispiel setzen wir $\mathcal{S}_0 = 0$ *und*

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\mathcal{S}_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathcal{S}_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathcal{S}_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = \mathcal{S}_n + (2p-1) \end{aligned}$$

so erhalten wir 3 *Fälle, nämlich:*

$$\mathbb{E}[\mathcal{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] \begin{cases} < \mathcal{S}_n & \textit{im Falle von } p < \frac{1}{2} \\ = \mathcal{S}_n & \textit{im Falle von } p = \frac{1}{2} \\ > \mathcal{S}_n & \textit{im Falle von } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ein faires Spiel beschreibt der Fall $p = \frac{1}{2}$. *Dieser Fall liefert uns auch die Martingaleigenschaft. Der für den Spieler ungünstige Fall* $p < \frac{1}{2}$ *ist ein Supermartingal und im günstigen Fall* $p > \frac{1}{2}$ *liegt ein Submartingal vor.*

Wenn ein Submartingal vorliegt, steigt der bedingte Erwartungswert. Bei einem Supermartingal sinkt der bedingte Erwartungswert und wenn ein Martingal vorliegt, bleibt der bedingte Erwartungswert gleich. (vgl. [7], S. 48)

Beispiel 3.2. *Eine Aktie habe den Anfangskurs* A_0. *Bei einem Kurs* A_n *zur Zeit* $t = n$ *habe sie in* $t = n + 1$ *den Kurs*

$$A_{n+1} = \begin{cases} uA_n, & \textit{mit der Wahrscheinlichkeit } p \\ dA_n, & \textit{mit der Wahrscheinlichkeit 1-p} \end{cases}$$

Dies enstpricht einem Kursverlauf einer Aktie über mehrere Handelsperioden. Zur Modellierung seien $Y_1, Y_2...$ *stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit* $P(Y_i = u) = p = 1 - P(Y_i = d)$, *wobei* $0 < d < u$, $0 < p < 1$. *Es ist dann*

$$A_n = Y_n...Y_2Y_1A_0 = A_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i.$$

Sei $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[Y_{n+1}A_n|\mathcal{F}_n] = A_n\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= A_n\mathbb{E}[Y_{n+1}] = A_n(up + d(1-p)). \end{aligned}$$

Wir erhalten damit ein

- *Martingal im Falle von* $up + d(1-p) = 1$.
- *Supermartingal im Falle von* $up + d(1-p) < 1$,
- *Submartingal im Falle von* $up + d(1-p) < 1$.

(siehe [7], S. 48 f.)

3.2 Spielsysteme und Martingale

Wenn wir von Martingalen gesprochen haben, war bisher immer nur die Rede von fairen Spielen. Doch kann man durch eine geschickte Wahl des Einsatzes, den man von Runde zu Runde wählt, aus einem fairen Spiel ein unfaires machen?

Definition 3.2. *Sei $H = (H_n)_{n\in\mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess, $\mathcal{T} = 0, ..., n$ und $\mathbb{F}$ eine Filtration. H heißt (bzgl. $\mathbb{F}$) previsibel (vorhersehbar), falls gilt:*

$$H_n \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1} \text{ messbar für alle } n \in \mathcal{T}.$$

Ein previsibler Prozess kann als Spielsystem dienen, mit dem sich dann der Gesamtgewinn bestimmen lässt:

Definition 3.3. *Sei $(X_n)_{n\in\mathcal{T}}$ ein adaptierter Prozess, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ eine Filtration und $H = (H_n)_{n\in\mathcal{T}}$ ein previsibler Prozess. Dann heißt H ein Spielsystem (für X) und wir definieren den stochastischen Prozess $H.X$ durch*

$$(H.X)_n := X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}), \qquad n \in \mathcal{T},$$

und bezeichnen $H.X$ als stochastisches Integral von H bezüglich X. Falls X ein Martingal ist, heißt $H.X$ auch Martingaltransformierte von X.

Die obige Definition kann man so interpretieren:

$X_n - X_{n-1}$ bezeichnet den Gewinn pro € Einsatz in der n-ten Runde, wobei dieser auch negativ, also ein Verlust sein kann. Der Prozess H steuert den Einsatz. In der n-ten Runde setzen wir H_n ein. Da dies nach $n-1$ Runden passiert, insbesondere ohne das Wissen um die n-te Spielrunde X_n, darf H_n nur von $X_0, ..., X_{n-1}$ abhängen. H_n muss daher $\mathcal{F}_{n-1}$ messbar sein, das heißt H ist previsibel. Schließlich ist dann $H_n(X_n - X_{n-1})$ der Gewinn bzw. der Verlust in der n-ten Runde. Deren Summe $H.X$ beschreibt also den Gesamtgewinn bzw. Gesamtverlust im Verlauf des Spiels, also $(H.X)_n$ beschreibt die Bilanz nach n Spielrunden.

Der nächste Satz zeigt, dass für jedes Spielsystem mit X auch $H.X$ ein Martingal ist. Zum einen rechtfertigt dies den Namen Martingal-Transformierte und zum anderen folgt, dass für jeden Zeitpunkt n, also nach n Spielrunden, $\mathbb{E}[(H.X)_n - X_0] = 0$ ist. Da X_0 das Startkapital ist, gibt es bei einem fairen Spiel durch noch so geschickte Wahl des Einsatzes im Mittel nichts zu gewinnen. (vgl. [10], S. 306 f.)

Satz 3.1. *Sei H ein Spielsystem für X. Dann gilt:*

a) *Ist X ein Martingal, so ist auch $H.X$ ein Martingal.*

b) *Ist X_n ein Submartingal bzw. ein Supermartingal und $H \geq 0$, so ist $(H.X)$ ein Submartingal bzw. ein Supermartingal.*

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass $H.X$ adaptiert ist. Weiters gilt, da H_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(H.X)_n - (H.X)_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[H_n(X_n - X_{n-1}))|\mathcal{F}_{n-1}] = H_n\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &\begin{cases} = 0, & \text{falls } X \text{ ein Martingal ist.} \\ \geq 0, & \text{falls } H \geq 0 \text{ und } X \text{ ein Submartingal ist,} \\ \leq 0, & \text{falls } H \geq 0 \text{ und } X \text{ ein Supermartingal ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

□ (siehe [10], S. 307)

Beispiel 3.3. *Ist X ein stochastischer Prozess, so stellen wir uns für $n \geq 1$ die Differenz $X_n - X_{n-1}$ als unseren Gewinn in der n-ten Spielrunde pro 1€ Einsatz vor. Ist X ein Martingal, so gilt*

$$\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$$

das heißt, der erwartete Gewinn ist 0, und somit ist das Spiel fair. Ist X ein Supermartingal, so ist

$$\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq 0$$

das heißt, der erwartete Gewinn ist negativ, was das Spiel für uns ungünstig macht. (siehe [10], S. 303 f.)

3.3 Stoppzeiten

3.3.1 Stoppzeiten bezüglich einer Filtration

Definition 3.4. *Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ eine Filtration mit $\mathcal{T} = 0, ..., n$. Eine Abbildung*

$$\tau : \Omega \to \mathcal{T}$$

heißt Stoppzeit, *falls gilt:*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in \mathcal{T}.$$

Da wir nur den Fall des diskreten Zeitparameters betrachten, können wir folgern:

Sei $\tau : \Omega \to \mathcal{T}$ eine Abbildung. τ ist eine Stoppzeit genau dann, wenn $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ für alle $k \in \mathcal{T}$ gilt, denn

$$\{\tau = k\} = \{\tau \leq k\} \cap \{\tau \leq k-1\}^c,$$

$$\{\tau \leq k\} = \bigcup_{i\leq k} \{\tau = i\}.$$

(vgl. [7], S.43)

Die Idee einer Stoppzeit ist eine Strategie, ein Spiel zu einem bestimmten vom Zufall abhängenden Zeitpunkt zu beenden. Die Bedingung

$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$$

stellt sicher, dass dazu kein Wissen aus der Zukunft verwendet wird, sondern die Entscheidung nur auf Grund der bis zum Zeitpunkt t bekannten Information $\mathcal{F}_t$ getroffen wird. (vgl. [10], S. 314)

3.3.2 Der gestoppte Prozess

Ist τ eine endliche Stoppzeit und $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein adpatierter stochastischer Prozess mit den Werten in $\mathcal{X}$, so können wir die Abbildung

$$X_\tau : \Omega \to \mathcal{X}, \quad \omega \to X_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \text{für } \tau(\omega) \in \mathcal{T}$$

definieren. Diese ist nicht nur $\mathcal{F}$-messbar, sondern sogar messbar bezüglich einer kleineren σ-Algebra:

Definition 3.5. (Die σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$)
Ist $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ Filtration, $\mathcal{T} = 0, ..., n$ und τ eine Stoppzeit, so ist

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in \mathcal{T}\}$$

eine σ Algebra, die wir als σ-Algebra der τ-Vergangenheit bezeichnen. (siehe [10], S. 317)

Satz 3.2. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ eine Filtration mit $\mathcal{T} = 0, 1..., n$. τ sei Stoppzeit. Zu zeigen ist:*

a) *$\mathcal{F}_\tau$ ist eine σ-Algebra.*

b) *Sind σ, τ Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$ so gilt, $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.*

Beweis:

a) **(i)** *Es gilt $\Omega \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in \mathcal{T}$, also $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$.*

(ii) *Ist $A \in \mathcal{F}_\tau$, so gilt für jedes $t \in \mathcal{T}$*

$$A^c \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\tau \leq t\})^c \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

also $A^c \in \mathcal{F}_\tau$.

(iii) *Sind $A_m \in \mathcal{F}_\tau, m \in \mathcal{T}$, so gilt für jedes $t \in \mathcal{T}$*

$$(\bigcup_{m\in\mathcal{T}} A_m) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{m\in\mathcal{T}} (A_m \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

und somit

$$\bigcup_{m\in\mathcal{T}} A_m \in \mathcal{F}_\tau.$$

b) *Seien $\sigma \leq \tau$ Stoppzeiten. Sei $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Dann gilt für jedes $t \in \mathcal{T}$*

$$A \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

also $A \in \mathcal{F}_\tau$ □

(siehe [8], S. 29, 137 f.)

Sei τ eine Stoppzeit und $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ein adaptierter Prozess. Dann definieren wir einen Prozess, der sich bis zum Zeitpunkt τ wie X verhält und anschließend in X_τ verharrt.

Definition 3.6. (Gestoppter Prozess) *Sei (X_t) ein adaptierter Prozess und τ eine Stoppzeit. Der gestoppte Prozess $X^\tau = (X_t^\tau)_{t \in \mathcal{T}}, \mathcal{T} = 0, ..., n$ ist definiert durch*

$$(X_t^\tau) := X_{\tau \wedge t} \begin{cases} X_\tau, & \text{für } t \geq \tau \\ X_t, & \text{für } t < \tau. \end{cases}$$

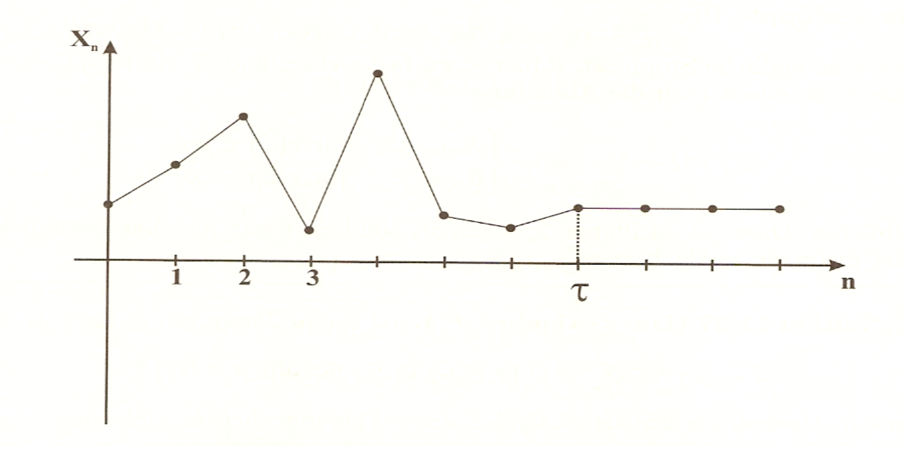

Abbildung 3.1: Pfad eines gestoppten Prozesses, (Quelle: [10], S. 316)

In der Definition (3.3) haben wir gezeigt, dass es nicht möglich ist, durch geschickte Wahl des Einsatzes aus einem fairen Spiel ein unfaires zu machen. Genauso erwarten wir, dass dies nicht durch geschickte Wahl einer Stoppzeit möglich ist. Der folgende Satz ist ein Teil des *Optional Stopping Theorems.*

Satz 3.3. *Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ eine Filtration und $M = (M_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ein adaptierter Prozess. Dann gilt:*
M ist ein Martingal genau dann, wenn für jede beschränkte Stoppzeit τ

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$$

gilt.

Beweis: Sei zunächst M als ein Martingal vorausgesetzt.
Sei τ Stoppzeit mit $\tau \leq N$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \sum_{t=0}^{N} \mathbb{E}[M_t 1_{\{\tau=t\}}] = \sum_{t=0}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_N|\mathcal{F}_t]1_{\{\tau=t\}}]$$

$$= \sum_{t=0}^{N} \mathbb{E}\mathbb{E}[M_N 1_{\{\tau=t\}}|\mathcal{F}_t] = \sum_{t=0}^{N} \mathbb{E}[M_N 1_{\{\tau=t\}}]$$

$$= \mathbb{E}[M_N] = \mathbb{E}[M_0].$$

Zum Nachweis der Umkehrung sei $s < t$. Zu zeigen ist

$$\int_A M_s dP = \int_A M_t dP \text{ für alle } A \in \mathcal{F}_s.$$

Dazu definiert man τ durch

$$\tau(\omega) = \begin{cases} s, & \omega \in A \\ t, & \omega \in A^c \end{cases}$$

τ ist eine Stoppzeit, denn es gilt $\{\tau = s\} = A \in \mathcal{F}_s, \{\tau = t\} = A^c \in \mathcal{F}_s$ und $\{\tau = k\} = \emptyset$ für $k \notin \{s, t\}$.
Wir erhalten also

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_\tau]$$
$$= \mathbb{E}[M_t 1_{\{\tau=t\}}] + \mathbb{E}[M_s 1_{\{\tau=s\}}]$$
$$= \int_{A^c} M_t dP + \int_A M_s dP$$
$$= \mathbb{E}[M_t] - \int_A M_t dP + \int_A M_s dP.$$

Aus $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ folgt die Behauptung. $\square$

(siehe [7], S. 49 f.)

Kapitel 4

Optionen

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel befinden sich viele Auszüge, die aus den Büchern *Prices in Financial Markets* von Micheal U. Dothan und *Einführung in Futures - und Optionsmärkte* von John C. Hull entnommen wurden.

4.2 Grundlagen

Unter *Finanzderivaten* oder *derivativen Finanzinstrumenten* (derivatives, derivative securities oder contigent claims) versteht man Anlageformen, die von einfacheren Finanzanlagen abgeleitet werden. Der Wert des Derivats hängt vom Wert des zugrundeliegenden Instruments (underlying) ab. Terminkontrakte und Optionen sind zwei verbreitete Formen von Finanzderivaten. *Optionen* sind Rechte, die gegen eine Prämie erworben werden. (vgl. [12], S. 1)
Der erste Handel mit Kauf- und Verkaufsoptionen begann in Europa und in den USA im 18. Jahrhundert. Erst mit den bahnbrechenden Arbeiten von Black, Scholes und Merton, die die Berechnung eines angemessenen Preises ermöglichten, wurden die abgeleiteten Finanzinstrumente immer populärer. Im Jahr 1973 gründete die Chicago Board of Trade eine neue Börse, die speziell für den Handel mit Aktienoptionen ausgelegt wurde. Die größte Börse, an der Aktienoptionen gehandelt werden, ist die Chicago Board of Exchange (CBOE) (siehe [6], S. 7). Der Optionsbegriff wird nun genauer erläutert.

4.3 Optionsbegriff

Definition 4.1. *(Kaufoption - Call, Verkaufsoption - Put) Eine* europäische Call-Option*, oder eine* europäische Kaufoption*, ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, der dem Käufer das Recht gibt, zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T > t$, dem Verfallszeitpunkt (maturity), ein Objekt zu einem, bei Vertragsabschluss vereinbarten*

Preis K, dem Ausübungspreis (Strike-Preis), zu kaufen. Übt er das Recht nicht aus, verfällt die Option zur Zeit T ohne weitere Konsequenzen.
Eine europäische Put-Option *oder eine* europäische Verkaufsoption *gibt dem Käufer das Recht, den Basiswert zur Zeit T zum vereinbarten Preis K zu verkaufen.*
Der Inhaber einer amerikanischen Call-Option *bzw. eines* amerikanischen Puts *kann sein Recht, das Objekt zu kaufen bzw. zu verkaufen, jederzeit vom Erwerb der Option bis zum Verfallszeitpunkt T ausüben. (siehe [4], S. 5)*

Dabei bezeichnen wir die europäischen Optionen mit den kleinen Buchstaben c, p und die amerikanischen Optionen mit den großen Buchstaben C, P.

Wir unterscheiden vier grundlegende Optionstypen, den europäischen Call und Put, sowie den amerikanischen Call und Put. In der Sprache der Finanzmärkte liegt beim Käufer einer Option eine *long position* vor, beim Verkäufer eine *short position.* (vgl. [7], S. 10)

Beispiel 4.1. Beispiel für eine Kaufoption.

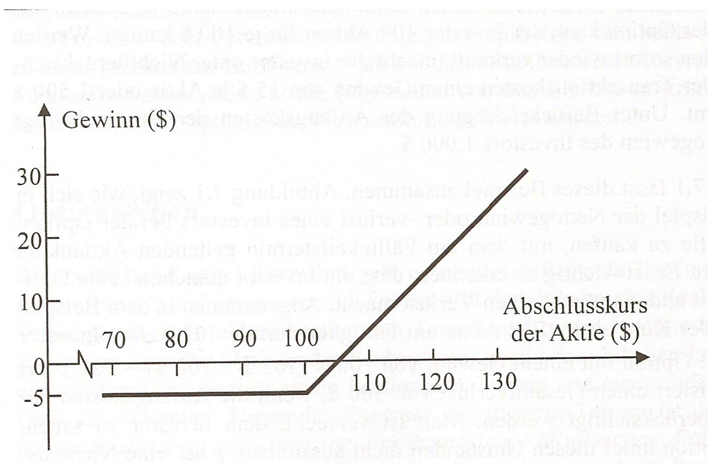

Abbildung 4.1: Gewinn aus dem Kauf einer europäischen Kaufoption (Quelle: [6], S. 252)

Ein Investor kauft eine europäische Kaufoption mit einem Basispreis von 100 € *auf* 90 *Voestalpine Aktien. Der aktuelle Kurs der Aktie liegt bei* 95 €*, der Fälligkeitstermin der Option ist in fünf Monaten und der Preis einer Option für den Kauf einer Aktie beträgt* 7 €*.*
Die Anfangsinvestition ist dann in einer Höhe von: 90×7 € $=$ 630 €*.*
Liegt der Aktienkurs am Fälligkeitstermin unter 100 €*, übt der Investor die Option nicht aus. In diesem Fall verliert der Investor seine Anfangsinvestition von* 630 €*, und die Option verfällt ohne weitere Konsequenzen.*

Angenommen, der Kurs der Aktie liegt am Fälligkeitstag allerdings über 100 €, *dann wird die Option ausgeübt. Der Kurs der Voestalpine Aktien liegt bei* 120 €. *Durch Ausüben der Option, kann der Investor* 90 *Aktien für je* 100 € *kaufen.*
Werden wiederum die Aktien sofort verkauft, macht der Investor unter Nichtberücksichtigung der Transaktionskosten einen Gewinn von 20 € *pro Aktie, also einen Gesamtgewinn von* 1800 €. *Der Nettogewinn der Option des Investors wäre dann in einer Höhe von:* 1800 € − 630 € = 1170 €. *(vgl.[6], S. 251 f.)*

Beispiel 4.2. Beispiel für eine Verkaufsoption

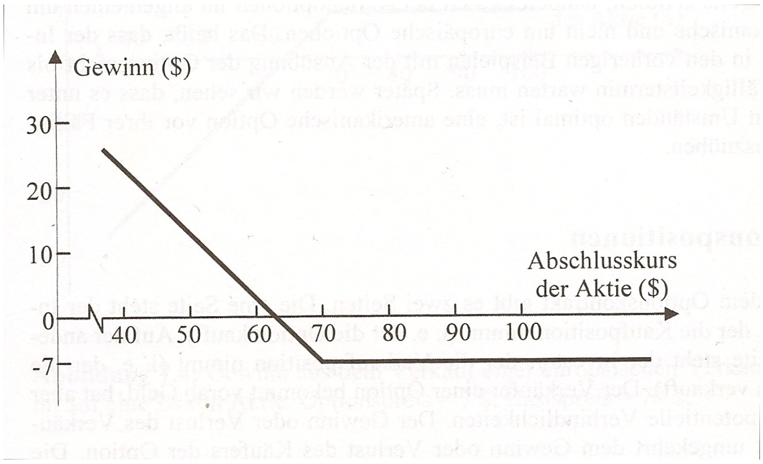

Abbildung 4.2: Gewinn aus dem Kauf einer europäischen Verkaufsoption (Quelle: [6], S. 253)

Während der Käufer einer Kaufoption hofft, dass der Aktienkurs steigt, hofft der Käufer einer Verkaufsoption auf einen sinkenden Kurs.
Ein Investor kauft eine europäische Verkaufsoption mit dem Basispreis von 70 € *auf den Verkauf von* 80 *Voestalpine Aktien. Der aktuelle Kurs der Aktie liegt bei* 60 €, *der Fälligkeitstermin ist in vier Monaten und der Optionspreis für den Verkauf einer Aktie beträgt* 8 € .
Die Anfangsinvestition wäre in einer Höhe von: 80 × 8 € = 640 €. *Da es sich um eine europäische Option handelt, übt der Investor sie nur aus, wenn der Kurs am Fälligkeitsdatum unter* 70 € *liegt.*
Angenommen, der Aktienkurs liegt bei 50 € *am Fälligkeitstermin. An diesem Tag kauft der Investor* 80 *Voestalpine Aktien, verkauft sie im Rahmen der Verkaufsoption für* 70 € *pro Aktie und macht einen Gewinn von* 20 € *je Aktie, also einen Gesamtgewinn von* 1600 €, *unter Nichtberücksichtigung der Transaktionskosten.*
Der Nettogewinn des Optionsinhabers wäre dann in einer Höhe von 1600 € − 640 € = 960 €. *(vgl. [6], S.251 f.)*

4.3.1 Optionspositionen

Jeder Optionskontrakt beinhaltet zwei Seiten:

1. den Investor, der die Option kauft.

2. den Investor, der die Option verkauft.

Der Verkäufer einer Option bekommt vorab Geld, hat aber später Verbindlichkeiten. Der Gewinn oder Verlust des Verkäufers ist die genaue Umkehrung des Gewinns oder Verlusts des Käufers der Option.

Zusammenfassend gibt es vier Optionspositionen:

1. Eine Kaufposition (Long Position) in einer Kaufoption (Call)

2. Eine Kaufposition (Long Position) in einer Verkaufsoption (Put)

3. Eine Verkaufsposition (Short Position) in einer Kaufoption (Call)

4. Eine Verkaufsposition (Short Position) in einer Verkaufsoption (Put)

(vgl. [6], S. 245 ff.)
Zusammenfassend können wir nun darstellen:

Das Auszahlungsprofil für einen Call ist gegeben durch:

$$\max\{S_T - K, 0\} = \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & \text{falls } S_T \geq K \\ 0 & \text{falls } S_T < K \end{array} \right\} =: [S_T - K]^+. \tag{4.1}$$

Das Auszahlungsprofil für einen europäischen Put:

$$\max\{K - S_T, 0\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } S_T \geq K \\ K - S_T & \text{falls } S_T < K \end{array} \right\} =: [K - S_T]^+. \tag{4.2}$$

(vgl. [12], S. 13 f.)

Diese Payoffs werden in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.

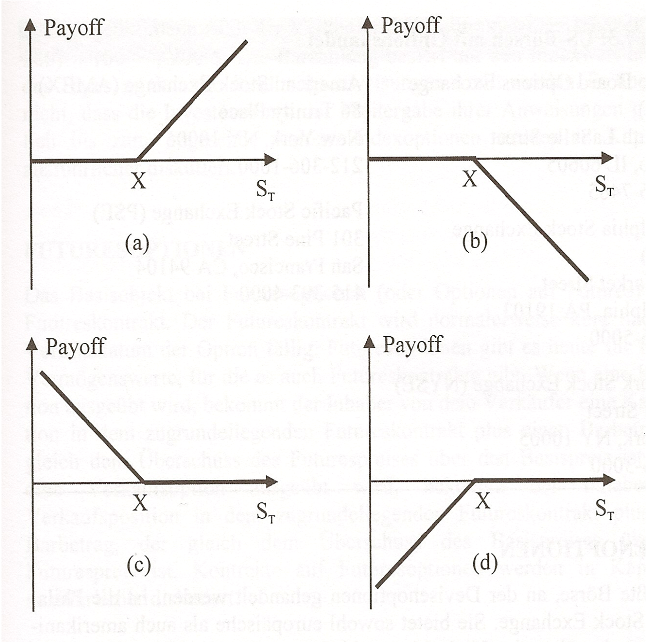

Abbildung 4.3: Payoffs einer europäischen Option: (a) Long Call, (b) Short Call, (c) Long Put, (d) Short Put; Basispreis=X; Preis des Vermögenswertes bei Fälligkeit= S_T, (Quelle: [6], S. 257)

4.4 Grundlegende Merkmale von Aktienoptionen

Gemäß den Annahmen in einem idealen Finanzmarkt gibt es im wesentlichen sechs Marktparameter, die den Aktienoptionspreis beeinflussen:

1. Der Tageskurs der Aktie, S
2. Der Basispreis bzw. Strikepreis, K
3. Die Laufzeit, T
4. Die Volatilität des Aktienkurses, σ
5. Der risikofreie Zins, r
6. Die für die Laufzeit der Option erwartete Dividende D (Barzahlung an den Besitzer einer Aktie)

(vgl. [6], S. 286)

4.4.1 Annahmen

Nun wird der Begriff der Arbitragefreiheit genauer erläutert. Dazu geben wir folgende Definition.

Definition 4.2. *Wir verstehen unter* Arbitrage *einen risikolosen Gewinn. (siehe [4], S. 13)*

In einem idealen Finanzmarkt, in dem unter anderem alle Investoren den selben Informationsstand haben und verzögerungsfrei handeln können, sollte es keine Möglichkeiten zur Arbitrage geben. Jeder Investor würde andernfalls versuchen, einen risikolosen Gewinn augenblicklich mitzunehmen. Die dadurch ausgelösten Transaktionen würden ebenfalls augenblicklich die Preise der involvierten Finanzinstrumente so verändern, dass die Arbitragemöglichkeit sofort verschwindet.

Annahme (perfekter Finanzmarkt) *Es gibt keine Arbitragemöglichkeiten, keine Transaktionskosten, keine Steuern und keine Einschränkungen beim Short-Selling. Die Geldeinlagen und Kredite haben die gleiche konstante Verzinsung r und alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.* (vgl. [4], S. 13)

Definition 4.3. *Unter einem* Short-Selling *bzw. Leerkauf versteht man eine Handelsstrategie, bei der der Investor Objekte, wie zum Beispiel Aktien, die ihm nicht gehören, verkauft und nach einer gewissen Zeit wieder zurück kauft.*
(vgl. [4], S. 11)

Notation

S : aktueller Aktienkurs

K : Basispreis bzw. Strikepreis der Option

T : Laufzeit der Option

S_T : Aktienkurs im Zeitpunkt T

r : kontinuierlich verzinster risikofreier Zins für eine Investition mit der Laufzeit T

C : Wert einer amerikanischen Kaufoption auf den Kauf einer Aktie

P : Wert einer amerikanischen Verkaufsoption auf den Kauf einer Aktie

c : Wert einer europäischen Kaufoption auf den Kauf einer Aktie

p : Wert einer europäischen Verkaufsoption auf den Verkauf einer Aktie

4.4.2 Ober- und Untergrenze der Optionspreise

Für Investoren gibt es Arbitragemöglichkeiten, wenn der Preis der Option über der Obergrenze oder unter der Untergrenze liegt.

Obergrenze

Da die Option nie mehr Wert sein kann, als die Aktie, bildet der Kurs der Aktie die Obergrenze des Optionspreises:

$$c \leq S \text{ und } C \leq S.$$

Der Inhaber einer amerikanischen oder europäischen Verkaufsoption hat das Recht, eine Aktie zu K zu verkaufen. Da die Option nie mehr Wert sein kann, als K, gilt:

$$p \leq K \text{ und } P \leq K.$$

Bei europäischen Optionen wissen wir, dass die Option zum Zeitpunkt T weniger Wert ist als K. Folglich muss sie nun weniger wert sein, als der Gegenwartswert von K:

$$p \leq Ke^{-rT}.$$

Würde dies nicht zutreffen, dann könnte ein Investor die Arbitragemöglichkeit ausnutzen, um einen risikofreien Gewinn zu machen, indem er die Option verkauft und den Erlös aus dem Verkauf zum risikofreien Zins investiert.
(vgl. [6], S. 292 f.)

Untergrenze für Kaufoptionen auf dividendenlose Aktien

Für den Preis einer europäischen Kaufoption auf eine dividendenlose Aktie ist die Untergrenze gegeben durch:

$$S - Ke^{-rT}$$

In diesem Zusammenhang betrachten wir folgende Portfolios:

- Portfolio A: eine europäische Kaufoption plus ein Geldbetrag in Höhe von Ke^{-rT}
- Portfolio B: eine Aktie

Wenn das Bargeld zum risikofreien Zins investiert wird, wächst es bei Portfolio A bis zum Zeitpunkt T auf den Betrag K an. Nun gibt es wieder Möglichkeiten, wie sich der Kurs des Objekts am Verfallstag der Option zum vorher festgelegten Ausübungspreis entwicklen kann. Ist $S_T > K$, wird die Kaufoption zum Zeitpunkt T ausgeübt und das Portfolio A hat den Wert S_T. Ist allerdings $S_T < K$, dann verfällt die Kaufoption und das Portfolio hat den Wert K. Daraus kann man folgern, dass das Portfolio A zum Zeitpunkt T den Wert

$$\max\{S_T, K\}$$

hat. Das Portfolio B hat den Wert S_T zum Zeitpunkt T. Daher ist das Portfolio zum Zeitpunkt T immer soviel wert, oder sogar manchmal mehr wert, als Portfolio

B. Wegen des No-Arbitrage-Prinzips muss das auch für den heutigen Tag gelten. Daher ist

$$c + Ke^{-rT} > S$$

oder

$$c > S - Ke^{-rT}.$$

Der schlimmste Fall für eine Kaufoption tritt dann ein, wenn sie ohne Wert ausläuft, deshalb muss ihr Wert positiv sein. Das bedeutet, dass $c > 0$ und folglich ist dann

$$c > \max\{S - Ke^{-rT}, 0\} \tag{4.3}$$

(vgl. [6], S. 291 ff.)

Beispiel 4.3. *Wir betrachten eine europäische Kaufoption auf eine dividendenlose Aktie. Der Kurs der Aktie beträgt* 71 €*, der Strike-Preis liegt bei* 70 €*, der Fälligkeitstermin ist in drei Monaten und der risikofreie Zins beträgt* 15% *per Annum. Wir erhalten dann für* $S = 71, K = 70, T = 0,25$ *und* $r = 0,15$*. Aus der Gleichung erhalten wir eine Untergrenze für den Optionspreis, nämlich*

$$71 - 70e^{-0,15\times 0,25} = 3,58 \text{ €}.$$

(vgl. [6], S. 295)

Untergrenze für europäische Verkaufsoptionen auf dividendenlose Aktien

Der Preis einer europäischen Verkaufsoption auf eine dividendenlose Aktie hat die Untergrenze

$$Ke^{-rT} - S.$$

Hier wiederum betrachten wir zwei Portfolios:

- Portfolio C: eine europäische Verkaufsoption plus eine Aktie
- Portfolio D: ein Geldbetrag in Höhe von Ke^{-rT}

Die Option in Portfolio C wird zum Zeitpunkt T ausgeübt, wenn $S_T < K$ ist. Sie hat dann den Wert K. Wenn allerdings $S_T > K$ ist, läuft die Verkaufsoption ohne Wert aus und das Portfolio hat den Wert S_T zum Zeitpunkt T. Folglich hat das Portfolio C zum Zeitpunkt T den Wert

$$\max\{S_T, K\}.$$

Wir nehmen an, dass das Bargeld zum risikofreien Zins angelegt wird. Dann hat das Portfolio D den Wert K zum Zeitpunkt T. Daraus können wir schließen, dass das Portfolio C immer mindestens genauso viel wert, oder manchmal sogar mehr wert ist, als Portfolio D zum Zeitpunkt T. Nach der Annahme, dass keine

Arbitragemöglichkeiten existieren, ist das Portfolio C heute immer mehr wert, als Portfolio D. Folglich ist

$$p + S < Ke^{-rT}$$

oder

$$p > Ke^{-rT} - S.$$

Der schlimmste Fall für eine Verkaufsoption tritt dann ein, wenn sie ohne Wert ausläuft, deshalb muss ihr Wert positiv sein. Das bedeutet, dass

$$p > \max\{Ke^{-rT} - S, 0\} \tag{4.4}$$

(vgl. [6], S. 296 ff.)

Beispiel 4.4. *Wir betrachten eine europäische Verkaufsoption auf eine dividendenlose Aktie. Der Kurs der Aktie liegt bei* 80 €*, der Basispreis ist* 90 €*, das Verfallsdatum ist in drei Monaten und der risikofreie Zins entspricht* 15% *per Annum. So erhalten wir dann für* $S = 80, K = 90, T = 0,25$ *und* $r = 0,15$*. Aus der Gleichung ergibt sich dann die Untergrenze des Optionspreises, nämlich*

$$90e^{-0,15\times 0,25} - 80 = 6,69 \text{ €}.$$

(vgl.[6], S. 298)

4.4.3 Put-Call-Parität

Durch die Annahme, dass es keine Arbitragemöglichkeiten gibt, können wir auf einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Wert c einer europäischen Kaufoption und dem Wert p einer europäischen Verkaufsoption herstellen. (Ausübungspreis K, risikofreier Zins r). Hierzu betrachten wir zwei Portfolios:

- Portfolio A: eine europäische Calloption plus ein Geldbetrag in Höhe von Ke^{-rT}
- Portfolio C: eine europäische Verkaufsoption plus eine Aktie

Satz 4.1. (Put-Call-Parität für europäische Optionen) *Beide Portfolios haben am Fälligkeitstermin der Option denselben Wert*

$$\max\{S_T, K\}.$$

Da wir von europäischen Optionen sprechen, können sie nicht vor dem Fälligkeitstermin ausgeübt werden. Durch das No-Arbitrage-Prinzip ergibt sich, dass beide Portfolios auch zum momentanen Zeitpunkt denselben Wert annehmen. Dies bedeutet, dass

$$c + Ke^{-rT} = p + S \tag{4.5}$$

Dieser Zusammenhang beschreibt die sogenannte Put-Call-Parität.
(vgl. [6], S. 298)

4.5 Bewertung von Optionen

4.5.1 Binomialbäume

Der Preis von Aktienoptionen kann durch die Konstruktion eines Binomialbaumes bestimmt werden. Das Binomialmodell besteht aus verschiedenen möglichen Pfaden, denen ein Aktienkurs während der Optionslaufzeit folgen könnte. Nun eine Darstellung dazu:

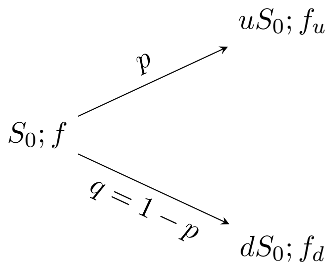

Abbildung 4.4: Binomialmodell (Quelle: [6], S. 346)

In dieser Abbildung ist ein Perioden-Modell über eine Handelsperiode zu sehen. S_0 ist der Anfangspreis der Aktie, also bevor der Finanzmarkt öffnet. u wird als *Up factor* bezeichnet und d als *Down factor*. Wir nehmen an, dass S der akutelle Aktienkurs ist und f beschreibt den Marktwert einer Option auf die Aktie. In einem Zeitintervall T kann der Aktienkurs entweder von S auf Su steigen, wenn $u > 1$ oder von S auf Sd fallen, wenn $d < 1$. Steigt der Kurs, beträgt die proportionale Zunahme des Aktienkurses $u - 1$; Fällt der Kurs, dann beträgt die proportionale Abnahme $1 - d$. Wir nehmen an, wenn der Kurs auf Su steigt, dass dann der Payoff aus der Option zum Zeitpunkt T f_u ist; Fällt der Kurs auf Sd, dann wird angenommen, dass der Payoff der Option f_d beträgt.

Wir interessieren uns für den Marktwert der Option, darum stellen wir uns ein Portfolio vor, das aus einer Long-Position, also einer Kaufposition in Δ Aktien und einer Short-Position (Verkaufsposition) in einer Option besteht. Es wird der Wert von Δ berechnet, der das Portfolio risikofrei macht. Bei einer Kurssteigerung hat das Portfolio am Ende der Optionslaufzeit den Wert

$$Su\Delta - f_u.$$

Wenn der Kurs allerdings fällt, dann entspricht der Wert

$$Sd\Delta - f_d.$$

Aus der Bedingung, dass das Portfolio risikofrei sein soll, erhalten wir Gleichheit

$$Su\Delta - f_u = Sd\Delta - f_d$$

oder wenn wir Δ herausheben

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{Su - Sd}. \tag{4.6}$$

In diesem Fall ist das Portfolio risikofrei und muss den risikofreien Zins abwerfen. In der Gleichung 4.6 ist das Verhältnis der Änderung des Optionspreises zur Änderung des Aktienkurses dargestellt, während man sich zwischen den Knoten bewegt.
Sei r der risikofreie Zins für die Laufzeit T, so ergibt sich der Barwert des Portfolios durch

$$[Su\Delta - f_u]e^{-rT}.$$

Die Kosten für die Einrichtung des Portfolios betragen

$$S\Delta - f.$$

Folglich ist

$$S\Delta - f = [Su\Delta - f_u]e^{-rT}.$$

Wir setzen in die Gleichung 4.6 für Δ ein und mit Vereinfachung erhalten wir

$$f = e^{-rT}[\tilde{p}f_u + (1-\tilde{p})f_d] \tag{4.7}$$

wobei

$$\tilde{p} = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \tag{4.8}$$

Die Gleichungen 4.7 und 4.8 ermöglichen eine Preisbestimmung der Option mittels des einstufigen Binomial-Modells. (vgl. [6], S. 343 ff.)

Beispiel 4.5. *Der Aktienkurs liegt derzeit bei* 20 €. *Es gibt zwei Möglichkeiten, wie sich der Kurs der Aktie nach drei Monaten entwickeln könnte, nämlich auf* 22 € *oder auf* 18 €. *Es soll nun eine europäische Calloption auf den Kauf der Aktie für* 21 € *in drei Monaten bewertet werden. Diese Option kann in drei Monaten einen von diesen zwei Werten annehmen. Die Option hat entweder einen Wert von* 1 €*, wenn der Kurs der Aktie auf* 22 € *gestiegen ist, oder einen Wert von* 0*, wenn der Kurs auf* 18 € *gesunken ist. Weiters nehmen wir an, dass der risikofreie Zins* 12% *per Annum beträgt. In diesem Fall ist* $u = 1,1$*,* $d = 0,9$*,* $r = 0,12$*,* $T = 0,25$*,* $f_u = 1$ *und* $f_d = 0$*. Eingesetzt in die Gleichung* 4.8 *ergibt das*

$$\tilde{p} = \frac{e^{0,12\times 0,25} - 0,9}{1,1 - 0,9} = 0,6523.$$

In die Gleichung 4.7 *eingesetzt kommen wir zu dem Ergebnis*

$$f = e^{-0,12\times 0,25}[0,6523 \times 1 + 0,3477 \times 0] = 0,633.$$

Gemäß des No-Arbitrage-Prinzips hat die Option den Marktwert von 0,633.
(vgl. [6], S. 343 ff.)

4.5.2 Risikoneutrale Bewertung

Führen wir die oben eingeführten Variablen $\tilde{p}$ und $(\tilde{p}-1)$ weiter, so entspricht die Variable $\tilde{p}$ in Gleichung 4.8 der Wahrscheinlichkeit einer Kurssteigerung. Die Variable $1-\tilde{p}$ kann dann als Wahrscheinlichkeit eines Kursabfalls interpretiert werden und der Ausdruck

$$\tilde{p}f_u + (1-\tilde{p})f_d$$

ist der erwartete Marktwert der Option. Wenn wir $\tilde{p}$ so bezeichnen, dann besagt die Gleichung 4.7, dass der Wert der Option heute der erwartete künftige Wert ist, abgezinst um den risikofreien Zins.

Als nächstes wird die erwartete Rendite der Aktie untersucht, wenn ein Kursanstieg mit der Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}$ angenommen wird. Der erwartete Kurs der Aktie im Zeitpunkt $T, E[S_T]$, ist gegeben durch

$$\tilde{E}[S_T] = \tilde{p}Su + (1-\tilde{p})Sd$$

oder

$$\tilde{E}[S_T] = \tilde{p}S(u-d) + Sd$$

Wenn man aus der Gleichung 4.8 für $\tilde{p}$ einsetzt, erhalten wir

$$\tilde{E}[S_T] = Se^{rT} \tag{4.9}$$

Die Gleichung zeigt, bei No-Arbitrage-Argumentation, dass der Erwartungswert des Aktienkurses zur Zeit T genau der Aufzinsung mit dem risikofreien Zins entspricht. In einer risikoneutralen Welt brauchen Investoren keinen Ausgleich für ein Risiko, und die erwartete Rendite aller Wertpapiere entspricht dem risikofreien Zins.

Dieses Ergebnis ist ein Beispiel für ein wichtiges Prinzip bei der Optionspreisbestimmung, das als *risikoneutrale Bewertung* bezeichnet wird. Den fairen Preis können wir im risikoneutralen Setting ermittlen. (vgl. [6], S. 347 ff.)

4.6 Maßwechsel

In diesem Kapitel behandeln wir die Bewertung von Optionen in allgemeineren Modellen für endliche Grundräume und diskreter Zeit. Da die erwartete Rendite des Aktienkurses nicht einen risikolosen Zins entspricht, benötigen wir einen Maßwechsel zum risikoneutralen Maß.

4.6.1 Quadratischer Kovariationsprozess

Definition 4.4. *Der quadratische Kovariationsprozess von $x = \{x_t\}$ und $y = \{y_t\}$, bezeichnet mit $\{[x, y]_t\}$, ist der Prozess*

$$[x, y]_0 = x(0)y(0),$$

$$[x, y]_t = x(0)y(0) + \sum_{s=1}^{t} [x(s) - x(s-1)][y(s) - y(s-1)] \text{ für } 1 \leq t \leq T.$$

Der quadratische Kovariationsprozess von x mit sich selbst, $\{[x, x]_t\}$, wird als quadratischer Kovarianzprozess von x bezeichnet. (vgl. [3], S. 94)

Definition 4.5. *Der vorhersehbare quadratische Kovariationsprozess von $x = \{x_t\}$ und $y = \{y_t\}$ bezüglich der Informationsstruktur $\mathcal{F}_t$ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß P, bezeichnet mit $\{\langle x, y\rangle_t\}$, ist der Prozess*

$$\langle x, y\rangle_0 = E_P[x(0)y(0)]$$

$$\langle x, y\rangle_t = E_P[x(0)y(0)] + \sum_{s=1}^{t} E_P\Big\{[x(s) - x(s-1)][y(s) - y(s-1)]|\mathcal{F}_{s-1}]\Big\}$$

für $1 \leq t \leq T$.
Den vorhersehbaren quadratischen Kovariationsprozess von x mit sich selbst, $\{\langle x, x\rangle_t\}$, nennt man auch den vorhersehbaren quadratischen Kovariationsprozess von x. (vgl. [3], S. 95)

4.6.2 Stochastisches Integral

Die Bedeutung des stochastischen Integrals liegt in der Theorie von Martingalen und Preismodellen für Finanzmärkte. Das stochastische Integral spielt eine besondere Rolle in einem Modell des Finanzmarktes, denn der Handelsgewinn wird durch eine vorhersehbare Handelsstrategie $\{\theta_{1t}, ..., \theta_{nt}\}$ zum Preis $\{p_{1t}, ..., p_{nt}\}$ durch $\sum_{n=1}^{N} \sum_{s=1}^{t} \theta_{ns}(p_{ns} - p_{n,s-1})$ bestimmt.

Definition 4.6. *Für die Prozesse $\{\alpha_t\}$ und $\{x_t\}$ ist das stochastische Integral definiert:*

$$\int_0^t \alpha_s dx_s = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t = 0 \\ \sum_{s=1}^{t} \alpha_s(x_s - x_{s-1}), & \text{wenn } 1 \leq t \leq T \end{cases}.$$

Das Integral $\int_0^t \alpha_s dx_s$ wird auch als Transformierte des Prozesses $\{x_t\}$ von dem Prozess $\{\alpha_t\}$ bezeichnet und wird angegeben mit $\{(\alpha \bullet x)_t\}$.

Für beliebige Prozesse $\alpha = \{\alpha_t\}$ *definieren wir den Prozess* $\alpha_- = \{\alpha_{t-}\}$ *und wir setzen* $\alpha_{t-} = \alpha_{t-1}$ *für* $1 \leq t \leq T$. *Das stochastische Integral* $\int_0^t \alpha_{s-} dx_s$, *bezeichnet mit* $\{(\alpha_- \bullet x)_t\}$, *ist dann*

$$\int_0^t \alpha_{s-} dx_s = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t = 0 \\ \sum_{s=1}^t \alpha_{s-1}(x_s - x_{s-1}), & \text{wenn } 1 \leq t \leq T \end{cases}.$$

Wir betrachten vier fundamentale Eigenschaften des stochastischen Integrals.
Als erste Eigenschaft bezeichnen wir die Rückwärtsdifferenz, also den Zuwachs von Zeitpunkt $t-1$ *auf* t *des Prozesses* $\{v_t\}$ *mit*

$$\Delta v_t = v_t - v_{t-} = v_t - v_{t-1}.$$

Dann ist $\Delta(\alpha_- \bullet x) = \alpha_- \Delta x$ *für beliebige Prozesse* α *und* x.
Die zweite Eigenschaft ist die Erhaltung des Martingalkriteriums.

Theorem 4.1. *Ist der Prozess* $\{\alpha_t\}$ *vorhersehbar und der Prozess* $\{x_t\}$ *ist ein Martingal, dann ist auch das Integral* $\int_0^t \alpha_s dx_s$ *ein Martingal.*

Beweis: Für beliebige $1 \leq t \leq T$

$$E_P\Big[\sum_{s=1}^{t} \alpha_s(x_s - x_{s-1})|\mathcal{F}t-1\Big] = E_P\big[\alpha_t(x_t - x_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}\big] + \sum_{s=1}^{t-1} \alpha_s(x_s - x_{s-1}).$$

Da α_t messbar auf $\mathcal{F}_{t-1}$ und $\{x_t\}$ ein Martingal ist, folgt

$$E_P[\alpha_t(x_t - x_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}] = \alpha_t E_P[x_t - x_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$$

□

(vgl. [3], S. 99 f.)

Die dritte Eigenschaft des stochastischen Integrals ist die Assoziativität.

Theorem 4.2. *Für beliebige Prozesse* α, β *und* x

$$\alpha_- \bullet (\beta_- \bullet x) = (\alpha_- \beta_-) \bullet x$$

Beweis: Wir setzen $y_t = (\beta_- \bullet x)_t$. Dann gilt

$$[\alpha_- \bullet (\beta_- \bullet x)]_t = \sum_{s=1}^{t} \alpha_{s-1}\beta_{s-1}(x_s - x_{s-1}) = [(\alpha_- \beta_-) \bullet x]_t$$

was das Theorem beweist. □

Die vierte fundamentale Eigenschaft des stochastischen Integrals ist die Assoziativität im Zusammenhang mit dem quadratischen Kovarianzprozess.

Theorem 4.3. *Für beliebige stochastische Prozesse α, x und y gilt*

$$[\alpha_- \bullet x, y] = \alpha_- \bullet [x, y]$$

Beweis: Für $t = 0$ gilt, dass beide Seiten des Objekts gleich 0 sind . Angenommen $t \geq 1$, dann

$$(\alpha_- \bullet x)_t = \sum_{s=1}^{t} \alpha_{s-1}(x_s - x_{s-1})$$

und folglich

$$[\alpha_- \bullet x, y]_t = \sum_{s=1}^{t} \alpha_{s-1}(x_s - x_{s-1})(y_s - y_{s-1}).$$

Auf der anderen Seite ist

$$[x, y]_t = x_0 y_0 + \sum_{s=1}^{t}(x_s - x_{s-1})(y_s - y_{s-1})$$

und daher

$$(\alpha_- \bullet [x, y])_t = \sum_{s=1}^{t} \alpha_{s-1}(x_s - x_{s-1})(y_s - y_{s-1}).$$

□

(vgl. [3] S. 100 f.)

Als nächstes berechnen wir das Integral $\int_0^t x_{s-} dx_s$.

Theorem 4.4. *Es gilt*

$$\int_0^t x_{s-} dx_s = \frac{1}{2}(x_t^2 - [x, x]_t).$$

Beweis: Der Beweis beruht auf der folgenden Identität,

$$2 \sum_{s=1}^{t} x_{s-1}(x_s - x_{s-1}) = \sum_{s=1}^{t}(x_s^2 - x_{s-1}^2) - \sum_{s=1}^{t}(x_s - x_{s-1})^2.$$

Das Theorem folgt wegen der Teleskopsumme und aus der Definition des quadratischen Varianzprozesses. (vgl. [3], S. 101)

4.6.3 Stochastisches Exponential

Ein stochastisches Exponential eines adapierten Prozesses w ist ein Produkt von entsprechend angepassten Schritten. Heuristisch, ist das stochastische Exponential $\{x_t\}$ von $\{\omega_t\}$ die Lösung der stochastischen Differntialgleichung

$$dx_t = x_{t-} d\omega_t$$

wobei $\frac{dx_t}{dw_t} = x_{t-}$. Im einfachsten Fall ist $w_t = t \ \forall t$, dann ergibt sich $f'(t) = f(t)$ und $f(0) = 1$ und $(1 + \frac{t}{r})^n \to e^t$. (vgl. [3], S. 103) Im nächsten Theorem ist das formuliert.

Theorem 4.5. *Sei $\{\omega_t\}$ ein adaptierter Prozess und x_0 eine beliebige Konstante. Dann existiert ein einziger adaptierter Prozess $\{x_t\}$ mit*

$$x_t = x_0 + \int_0^t x_{s-} d\omega_s$$

Für $1 \leq t \leq T$ ist der Prozess $\{x_t\}$ gegeben durch

$$x_t = x_0 \prod_{s-1}^{t} (1 + \omega_s - \omega_{s-1}).$$

Ist der Prozess $\{\omega_t\}$ ein Martingal, dann ist auch der Prozess $\{x_t\}$ ein Martingal.

Beweis: Setze $t = 1, ..., T$ in die Gleichung

$$x_t = x_0 + \int_0^t x_{s-} dw_s.$$

Dieses Verfahren definiert $x_1, ..., x_T$ als

$$x_1 = x_0(1 + \omega_1 - \omega_0)$$

$$x_2 = x_0(1 + \omega_1 - \omega_0)(1 + \omega_2 - \omega_1)$$

und so weiter. Ist $\{\omega_t\}$ ein Martingal, dann gilt für alle $1 \leq t \leq T$

$$E_P[x_t|\mathcal{F}_{t-1}] = x_{t-1} E_P[1 + \omega_t - \omega_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] = x_{t-1}$$

denn

$$E_P[w_t - w_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$$

und $\{x_t\}$ ist ein Martingal. (vgl. [3], S. 103 f.)

4.6.4 Maßwechsel und Girsanov's Theorem

Die nächste Definition beschreibt ein Martingal, das durch das Verhältnis der zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q erzeugt wird.

Definition 4.7. *Der Dichteprozess des Maßwechsels ist definiert durch*

$$z_t = E_P(\frac{Q}{P}|\mathcal{F}_t).$$

Dieser Prozess ist ein positives Martingal, weil $\frac{Q}{P}$ positiv ist. Die Aussage, dass der Prozess $\{z_t\}$ ein Martingal ist, folgt direkt aus der iterierten Erwartung. (vgl. [3], S. 105)

Theorem 4.6. *Für beliebige adaptierte Prozesse* $\{x_t\}$ *und beliebige* $0 \leq s \leq t \leq T$ *gilt:*

$$\frac{E_P(z_t x_t|\mathcal{F}_s)}{E_P(z_t|\mathcal{F}_s)} = E_Q(x_t|\mathcal{F}_s)$$

Beweis: Die bedingte Erwartung wird bezüglich einer σ-Algebra betrachtet. Im Beweis wird die bedingte Erwartung unter $\mathcal{F}_s$ als Erzeuger einer $\sigma - Algebra$ geschrieben.
Als erstes, wegen der Definition der bedingten Erwartung gilt:

$$E_P(z_t x_t|\mathcal{F}_s)(\omega) = \frac{\sum_{\xi \in \mathcal{F}_s(\omega)} P(\xi) z_t(\xi) x_t(\xi)}{\sum_{\xi \in \mathcal{F}_s(\omega)} P(\xi)}$$

$$E_P(z_t|\mathcal{F}_s)(\omega) = \frac{\sum_{\xi \in \mathcal{F}_s(\omega)} P(\xi) z_t(\xi)}{\sum_{\xi \in \mathcal{F}_s(\omega)} P(\xi)}$$

Daher

$$\frac{E_P(z_t x_t|\mathcal{F}_s)(\omega)}{E_P(z_t|\mathcal{F}_s)(\omega)} = \frac{\sum_{\xi \in \mathcal{F}_s(\omega)} P(\xi) z_t(\xi) x_t(\xi)}{\sum_{\xi \in \mathcal{F}_s(\omega)} P(\xi) z_t(\xi)}$$

Zweitens, wegen der Definiton des Dichteprozesses gilt:

$$z_t(\xi) = E_P\Big(\frac{Q}{P}|\mathcal{F}_t(w)\Big) = \frac{\sum_{\xi \in \mathcal{F}_t(w)} \frac{Q(\xi)}{P(\xi)}}{\sum_{\xi \in \mathcal{F}_t(w)} P(\xi)} = \frac{Q[\mathcal{F}_t(w)]}{P[\mathcal{F}_t(w)}$$

und wir erhalten:

$$z_t(\xi) = \frac{Q[\mathcal{F}_t(\xi)]}{P[\mathcal{F}_t(\xi)]}$$

$$\frac{E_P(z_t x_t|\mathcal{F}_s)(\omega)}{E_P(z_t|\mathcal{F}_s)(\omega)} = \frac{\sum_{j=1}^{u} \sum_{\xi \in \mathcal{F}_j} P(\xi) z_t(\xi) x_t(\xi)}{\sum_{j=1}^{u} \frac{Q(f_j)}{P(f_j)} P(f_j)}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{u} \frac{Q(f_j)}{P(f_j)} P(f_j) x_t(f_j)}{\sum_{j=1}^{u} Q(f_j)}$$

$$= E_Q(x_t|\mathcal{F}_s)(\omega)$$

□

(vgl. [3], S. 106 f.)

In diesem Abschnitt betrachten wir drei stochastische Integrale, die in Verbindung mit dem Dichteprozess stehen

$$\int_0^t \frac{dz_s}{z_{s-}}, \int_0^t \frac{d[x,z]_s}{z_s}, \int_0^t \frac{d\langle x,z\rangle_s}{z_{s-}}$$

Wegen der Definition des stochastischen Integrals, ist das Integral $\int_0^t \frac{dz_s}{z_{s-}}$ der Prozess

$$\int_0^t \frac{dz_s}{z_{s-}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t = 0 \\ \sum_{s=1}^t \frac{z_s - z_{s-1}}{z_{s-1}}, & \text{wenn } 1 \leq t \leq T \end{cases}.$$

Es folgt wegen Theorem 4.1 und der Aussage, dass der Prozess $\{z_t\}$ ein P-Martingal ist, dass das Integral $\int_0^t \frac{dz_s}{z_{s-}}$ ein P-Martingal ist. (vgl. [3], S. 107 f.)

Theorem 4.7. *Wenn $\{x_t\}$ ein P-Martingal ist, dann ist*

$$x_t - \int_0^t \frac{d\langle x, z\rangle_s}{z_{s-}}$$

ein Q-Martingal.

Beweis: Wir betrachten den Prozess $x_t - \int_0^t \frac{d\langle x,z\rangle_s}{z_{s-}}$. Für $1 \leq t \leq T$ der bedingte Erwartungswert

$$E_Q\Big(x_t - \int_0^t \frac{d\langle x, z\rangle_s}{z_{s-}} |\mathcal{F}_{t-1}\Big) = E_Q(x_t|\mathcal{F}_{t-1}) - \int_0^{t-1} \frac{d\langle x, z\rangle_s}{z_{s-}} - \frac{\langle x, z\rangle_t - \langle x, z\rangle_{t-1}}{z_{t-1}}.$$

Der letzte Ausdruck in der voherigen Gleichung ist

$$\frac{\langle x, z\rangle_t - \langle x, z\rangle_{t-1}}{z_{t-1}} = \frac{E_P[(x_t - x_{t-1})(z_t - z_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}]}{E_P(z_t|\mathcal{F}_{t-1})} =$$

$$= \frac{E_P[z_t(x_t - x_{t-1})(1 - \frac{z_{t-1}}{z_t})|\mathcal{F}_{t-1}]}{E_P(z_t|\mathcal{F}_{t-1})} = E_Q\Big[\ (x_t - x_{t-1})\Big(1 - \frac{z_{t-1}}{z_t}\Big)|\mathcal{F}_{t-1}\Big]$$

und

$$E_Q(x_t|\mathcal{F}_{t-1}) - x_{t-1} + z_{t-1}E_Q\Big(\frac{x_t - x_{t-1}}{z_t}|\mathcal{F}_{t-1}\Big) = E_Q(x_t|\mathcal{F}_{t-1}) - x_{t-1}$$

weil

$$E_Q\Big[\frac{x_t - x_{t-1}}{z_t}|\mathcal{F}_{t-1}\Big] = \frac{E_P[x_t - x_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]}{E_P[z_t|\mathcal{F}_{t-1}]} = 0$$

Dann folgt

$$E_Q\Big(x_t - \int_0^t \frac{d\langle x, z\rangle_s}{z_{s-}}|\mathcal{F}_{t-1}\Big) = x_{t-1} - \int_0^{t-1} \frac{d\langle x, z\rangle_s}{z_{s-}}$$

□

(vgl. [3], S. 110 f.)

4.7 Einfaches Preismodell für Optionen

Die Ergebnisse und Aussagen im Kapitel 4.6 benötigen wir, um weitere Ergebnisse in diskreten mehrperiodigen Systemen zu bekommen. In diesem Kapitel geht es um diskrete, mehrperiodige Systeme mit 2 Wertpapieren und einer Informationsstruktur $\mathcal{F}_t$. Beim ersten Wertpapier handelt es sich um eine Anleihe mit einem konstanten Zinssatz; die letzte Auszahlung und die Preise sind gegeben durch

$$d_1 = (1+r)^T,$$

$$p_t^1 = (1+r)^t.$$

Wir setzen voraus, dass der Preis des Wertpapiers 2, p_t^2, ungleich 0 ist für alle t und ω. Für alle $0 \leq t \leq T$ gilt $\mathcal{F}_t^{p2} = \mathcal{F}_t$, also der Preis des Wertpapiers 2 repräsentiert alle verfügbaren Informationen für die Investoren. Für $0 \leq t \leq T$, definieren wir

$$\mu_t = E_P\Big(\frac{p_t^2}{p_{t-1}^2}|\mathcal{F}_{t-1}\Big) - 1$$

$$w_t = w_{t-1} + \frac{p_t^2}{p_{t-1}^2} - E_P\Big(\frac{p_t^2}{p_{t-1}^2}|\mathcal{F}_{t-1}\Big),$$

wobei w_0 ist eine beliebige Konstante ist. Der vorhersehbare Prozess $\{\mu_t\}$ repräsentiert den bedingten Erwartungswert der Rendite des Wertpapiers 2 während des Zeitintervalls $[t-1,t]$. Dies wird als vorhersehbare Komponente bezeichnet. Der Prozess $\{w_t\}$ ist ein Martingal und steht für die neue Komponente der Rendite des Wertpapiers 2 während des Zeitintervalls $[t-1,t]$. Die verwirklichte Rendite des Wertpapiers 2 im Zeitintervall $[t-1,t]$ ist

$$\frac{p_t^2}{p_{t-1}^2} = 1 + \mu_t + w_t - w_{t-1}.$$

Aus der vorhergehenden Darstellung der Rendite des Wertpapiers 2 erhalten wir die folgende Darstellung des Preises, für $0 \leq t \leq T$ wobei

$$p_t^2 = p_0^2 \prod_{s=1}^{t} (1 + \mu_s + w_s - w_{s-1}).$$

Bemerkung: Diese Darstellung des Preises des Wertpapiers 2 kann verkürzt geschrieben werden

$$dp_t^2 = \mu_t p_{t-}^2 dt + \sigma_t p_{t-}^2 d\omega_t$$

mit $dt = 1$. Um die Existenz und die Eindeutigkeit des risikoneutralen Maßes in diesem Markt zu bestimmen, betrachten wir ein zweites Wahrscheinlichkeitsmaß Q der Ergebnismenge Ω, so dass $Q(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

$\{z_t\}$ bezeichnet den Dichteprozess für den Maßwechsel von Maß Q zu Maß P und wir definieren

$$v_t = w_t - \int_0^t \frac{d\langle w, z\rangle_s}{z_{s-}}.$$

Der Preis des Wertpapiers 2, bezüglich des Prozesses $\{v_t\}$, hat die Darstellung

$$p_t^2 = p_0^2 \prod_{s=1}^{t} \Big(1 + \mu_s + v_s - v_{s-1} + \frac{\langle w, z\rangle_s - \langle w, z\rangle_{s-1}}{z_{s-1}}\Big)$$

und

$$\frac{p_t^2}{(1+r)^t} = p_0^2 \prod_{s=1}^{t} \frac{1 + \mu_s + v_s - v_{s-1} + \frac{\langle w,z\rangle_s - \langle w,z\rangle_{s-1}}{z_{s-1}}}{1+r} \tag{4.10}$$

$$= p_0^2 \Big[\prod_{s=1}^{t-1} \Big(\frac{1 + \mu_s + v_s - v_{s-1} + \frac{\langle w,z\rangle_s - \langle w,z\rangle_{s-1}}{z_{s-1}}}{1+r}\Big)\Big] \frac{1 + \mu_t + v_t - v_{t-1} + \frac{\langle w,z\rangle_t - \langle w,z\rangle_{t-1}}{z_{t-1}}}{1+r}.$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist genau dann ein risikoneutrales Maß, wenn der Prozess $\left\{\frac{p_t^2}{(1+r)^t}\right\}$ ein Q- Martingal ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung ist, dass für alle $1 \leq t \leq T$ gilt

$$E_Q\Big(\frac{1 + \mu_t + v_t + v_{t-1} + \frac{\langle w,z\rangle_t - \langle w,z\rangle_{t-1}}{z_{t-1}}}{1+r} | \mathcal{F}_{t-1}\Big) = 1$$

wobei

$$E_Q\Big[\frac{v_t - v_{t-1}}{1+r} | \mathcal{F}_{t-1}\Big] = \frac{1}{1+r} E_Q[v_t - v_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

Das besagt, dass nun der Preis unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q ausgerechnet werden kann.

Wegen dem Theorem von Girsanov ist der Prozess $\{v_t\}$ ein Q-Martingal und so folgt, dass die vorherige Gleichung äquivalent ist zu

$$E_Q\Big(\frac{1 + \mu_t + \frac{\langle w,z\rangle_t - \langle w,z\rangle_{t-1}}{z_{t-1}}}{1+r} | \mathcal{F}_{t-1}\Big) = 1.$$

Da der Prozess in der Erwartung vorhersehbar ist, ist die vorhergehende Bedingung äquivalent zu

$$1 + \mu_t + \frac{\langle w, z\rangle_t - \langle w, z\rangle_{t-1}}{z_{t-1}} = 1 + r \tag{4.11}$$

oder, für alle $1 \leq t \leq T$ gilt

$$\frac{\langle w, z\rangle_t - \langle w, z\rangle_{t-1}}{z_{t-1}} = -(\mu_t - r).$$

Nach Definition 4.4 gilt :

$$E_Q\Big\{\frac{[w(t)-w(t-1)][z(t)-z(t-1)]|\mathcal{F}_{t-1}]}{z_{t-1}}\Big\} = -(\mu_t - r)$$

Wir definieren den Dichteprozess wie folgt:

$$z_t := \prod_{s=1}^{t}\Big(1 - \frac{\mu_s - r}{\sigma_t^2}(w_s - w_{s-1})\Big). \tag{4.12}$$

Wir setzen ein

$$z_t - z_{t-1} = z_{t-1}\Big[1 - \frac{\mu_t - r}{\sigma_t^2}(w_t - w_{t-1}) - 1\Big]$$

$$= z_{t-1}\frac{-(\mu_t - r)(w_t - w_{t-1})}{\sigma_t^2}$$

wobei $\sigma_t^2 = E_Q[(w_t - w_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}] = \langle w, w\rangle_t$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} &E_Q\Big\{\frac{[w(t)-w(t-1)][z(t)-z(t-1)]|\mathcal{F}_{t-1}]}{z_{t-1}}\Big\} \\ &\qquad = E_Q\Big[-(\mu_t - r)\frac{(w_t - w_{t-1})}{\sigma_t^2}(w_t - w_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}\Big] \\ &\qquad = -(\mu_t - r)\frac{E_Q[(w_t - w_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}]}{\sigma_t^2} = -(\mu_t - r). \end{aligned}$$

□

Für alle $1 \le t \le T$ folgt

$$\frac{\mu_t - r}{\sigma_t^2}(w_t - w_{t-1}) < 1.$$

Das risikoneutrale Preismaß Q existiert und ist gegeben durch

$$Q(\omega) = P(\omega)z_T(\omega) = P(\omega)\prod_{t=1}^{T}\Big[1 - \frac{\mu_t - r}{\sigma_t^2}(w_t - w_{t-1})\Big]$$

oder

$$Q = P\epsilon_T\Big(-\frac{\mu - r}{\sigma^2}\bullet w\Big). \tag{4.13}$$

Es gibt keine Arbitrage-Möglichkeiten und das Preissystem $\{p_t^1, p_t^2\}$ ist komplett. Als Ergänzung erwähnen wir, dass der Dichteprozess die Darstellung

$$z_t = \epsilon_t\Big(-\frac{\mu - r}{\sigma^2}\bullet w\Big) \tag{4.14}$$

besitzt. Ist Q ein risikoneutrales Preismaß, dann folgt aus der Gleichung 4.10 und 4.11, dass der diskontierte Preis des Wertpapiers 2 als stochastisches Exponential dargestellt werden kann

$$p_t^2 = p_0^2 \epsilon_t \Big(\frac{1}{1+r} \bullet v \Big).$$

Ausgestattet mit der Gleichung 4.13 für das risikoneutrale Preismaß Q, können wir nun eine Preisbestimmungsformel für das Wertpapier 2 definieren. Der Wert einer Calloption auf das Wertpapier 2 kann nun explizit ausgerechnet werden.

$$p_0^3 = \frac{E_P[f(p_T^2) z_T]}{(1+r)^T} \tag{4.15}$$

$$= \frac{E_P\big[\ f(p_T^2) \epsilon_T \big(-\frac{\mu - r}{\sigma^2} \bullet w \big)\ \big]}{(1+r)^T}. \tag{4.16}$$

(vgl. [3], S. 127 ff.)

Beispiel 4.6. *Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\omega) = \frac{1}{3}$ für alle ω, die Anzahl der Zustände $K = 3$, die Maturität $T = 2$, und die Anzahl der Wertpapiere $N = 3$, die Informationsstruktur geben wir als*

$$\mathcal{F}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}\}$$

vor. Sei $r = 0$ der Zinssatz und das Terminal-Payoff sei gegeben mit

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 22 \\ 10 & 16 & 6 \\ 10 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Preise des Wertpapiers 1 und 2 sind

p_1	ω_1	ω_2	ω_3
$t=0$	10	10	10
$t=1$	10	10	10
$t=2$	10	10	10

p_2	ω_1	ω_2	ω_3
$t=0$	16	16	16
$t=1$	24	24	12
$t=2$	32	16	12

Das Wertpapier 3 ist eine Calloption auf das Wertpapier 2 mit einem Ausübungspreis $a = 10$. Das Wertpapier 2 repräsentiert alle verfügbaren Informationen der Händler: $\mathcal{F}_0^{p_2} = \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1^{p_2} = \mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2^{p_2} = \mathcal{F}_2$. Die vorhersehbaren und neuen Komponenten der Rendite des Wertpapiers 2 sind

μ	ω_1	ω_2	ω_3
$t=0$	$\frac{p_0^2 - p_{-1}^2}{p_{-1}^2}$	$\frac{p_0^2 - p_{-1}^2}{p_{-1}^2}$	$\frac{p_0^2 - p_{-1}^2}{p_{-1}^2}$
$t=1$	$1/4$	$1/4$	$1/4$
$t=2$	0	0	0

ω	ω_1	ω_2	ω_3
$t=0$	0	0	0
$t=1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$t=2$	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$

Der Variationsprozess der Rendite ist gegeben mit

σ^2	ω_1	ω_2	ω_3
$t=0$	0	0	0
$t=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$t=2$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0

Aus der Gleichung 4.12 *des Dichteprozesses erhalten wir*

z	ω_1	ω_2	ω_3
$t=0$	1	1	1
$t=1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$t=2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

Anmerkung: μ *und* σ^2 *zum Zeitpunkt* $t=0$ *spielen für die Preisbestimmung keine Rolle.*

Das Wertpapier 3 *kann nun durch den Handel mit den Wertpapier* 1 *und* 2 *berechnet werden. Wegen der Gleichung* 4.16 *erhalten wir den Preis des Wertpapiers* 3, *nämlich*

$$p_0^3 = \frac{1}{3} \times 22 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = 6.$$

(vgl. [3], S. 131 ff.)

Kapitel 5

Finanzmathematik im Unterricht

"Finanzielle Allgemeinbildung ist die Vermittlung von Verständnis, Wissen und sozialer Handlungskompetenz beim Umgang mit den Dienstleistungen in Kredit, Anlage, Zahlungsverkehr und Versicherungen, die vor allem Banken und Versicherungen anbieten."

Reifner et. all, 2004.

In den neunziger Jahren hat sich herausgestellt, dass die meisten Menschen immer mehr für ihre eigene Altersvorsorge Verantwortung tragen müssen. Das gesellschaftliche System kann die Pensionsversorgung nicht mehr für jeden aufrecht erhalten. Dieses Ereignis führt zu einer erhöhten Individualisierung und zu zunehmenden Anforderungen an die persönlichen Entscheidungsprozesse. Des Weiteren ist es schwierig, einen guten Überblick über die Vielzahl der Finanzprodukte zu bewahren, da die Produkte immer komplexer und intransparenter werden. Aus diesem Grund werden von verschiedenen Organisationen - wie OECD oder IMF (International Monetary Fund) - Maßnahmen zur Verbesserung der finanziellen Ausbildung der Bevölkerung gefordert. Diese Forderungen zur Verbesserung der finanziellen Ausbildung sollten bereits in der Schule umgesetzt werden.
(vgl. [2], S. 61)

Da der Unterricht schülerInnenorientiert, kompetenzorientiert und alltagsorientiert sein soll, ist die Integration von praktischen Anwendungen und Beispielen wichtig und empfehlenswert. Für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht, der das Interesse der SchülerInnen wecken soll, sind fächerübergreifende Themen sehr gut geeignet. Dabei sind für die SchülerInnen insbesondere diejenigen Aspekte relevant, von denen sie im heutigen oder in ihrem zukünftigen Leben betroffen sind. Neben den Bereichen Politik, Technik, Ökologie oder den Naturwissenschaften können und werden auch Aufgaben aus dem Bereich der Finanzwelt und der Ökonomie für die SchülerInnen von Bedeutung sein. (vgl. [2], S. 65)

Ziel einer finanziellen Allgemeinbildung sollte es sein, SchülerInnen dabei zu unterstützen, kritsche, eigenverantwortlich handelnde VebraucherInnen zu werden, die in ihrer privaten wie beruflichen Sphäre in der Lage sind, ihr Leben finanziell zu meistern." (siehe [2], S. 66)

Die stochastische Finanzmathematik, die ein eher jüngeres Gebiet der angewandten Mathematik ist, befasst sich unter anderem mit verschiedenen Modellen zur Bewertung und Analyse von Optionen. In den letzten Jahren wurden viele neue Ansätze ausgearbeitet und weiterentwickelt. Daher können stochastische Grundlagen ein für den Mathematikunterricht geeignetes Themengebiet darstellen, um mit den SchülerInnen z.B. Optionen und Optionspreisberechnungen gemeinsam zu erarbeiten. Die SchülerInnen sollen ökonomische Grundlagen der Optionen kennen lernen. Des Weiteren sollen sie elementare stochastische Modelle der Optionspreistheorie im Zusammenhang mit fairen Spielen und das Binomialmodell auf Basis des No-Arbitrage-Prinzips analysieren und wichtige Kenntnisse dazu selbst entwickeln.

Leider gibt es für dieses Kapitel sehr wenig Literatur. Es scheint so, dass die Finanzmathematik im Unterricht eher wenig integriert ist und dieser wichtige Bereich noch weiter ausgebaut werden kann. Als Grundlage wird das Buch *'Finanzmathematik im Unterricht' von P. Daume, S. 191 - 229* herangezogen. Durch Beispiele und Aufgaben aus diesem Buch und mit eigenen Ideen ist ein Unterrichtskonzept enstanden. In diesem Kapitel wird eine andere Notation für den Wert einer Option eingeführt. (vgl. [2], S. 74)

5.1 Finanzmathematik als Beitrag zu einem anwendungsbezogenen Mathematikunterricht

Viele SchülerInnen haben Probleme beim abstrakten, stochastischen Denken, welches allerdings als Basis für das finanzielle Handeln gilt. Somit spielen praktisch-stochastische Situationen im Unterricht eine besondere Rolle, da sie die Ansätze des stochastischen Denkens der SchülerInnen fördern sollen.
Der Mathematikunterricht soll durch eine Vielfalt von Aufgaben und Beispielen aufzeigen, dass deterministische Ereignise durchaus zufällig sein können. Des Weiteren sollen die SchülerInnen im Stochastikunterricht erkennen, dass diese zufälligen Phänomene durch stochastische Methoden modelliert werden können. An dieser Stelle werden Aktien und Optionen eingeführt, da diese sich für diesen Zweck besonders gut eignen.

Würde man SchülerInnen fragen, ob sich Aktienkurse zufällig verhalten können, so würden viele diese Frage mit "Nein"beantworten, da die meisten SchülerInnen sich der Tatsache nicht bewusst sind, dass Aktienkurse von wirtschaftlichen, gesellschaftlichen und politischen Entwicklungen, sowie menschlichen Entscheidungen beeinflusst werden. Dass sich Aktienkurse zufällig bewegen ist ein bedeutender Aspekt, der im Unterricht gemeinsam mit den SchülerInnen entwickelt werden soll. Optionspreise sind somit auch zufällig, da sie von den Aktienkursverläufen abhängig sind. Ein wichtiges Ziel ist es, den SchülerInnen im Unterricht die Eigenschaft des Zufalls bei Finanzprodukten aufzuzeigen. Diese Erkenntnis ist gemeinsam mit der Modellierung der künftigen Aktienkurse bzw. Optionspreise ein wichtiger Aspekt für die geförderte Entwicklung des stochastischen Denkens und somit ein kleiner Schritt für die Förderung der finanziellen Allgemeinbildung. (vgl. [2], S. 100 f.)

5.2 Optionen im Unterricht

Dieses Kapitel beinhaltet einen Unterrichtsentwurf über Optionen. Der Unterricht wird nach verschiedenen Aspekten gegliedert und diese stellen einen chronolgischen Ablauf dar. Zuerst werden gemeinsam mit den SchülerInnen die ökonomischen Grundlagen von Optionen erarbeitet. Als Nächstes sollen die SchülerInnen Pay-Off - und Gewinn-Verlust-Diagramme kennen lernen und sich anschließend mit dem Erwartungswert und dem No-Arbitrage Prinzip auseinandersetzen. Des Weiteren sollen die SchülerInnen das Einperiodenmodell zur Bestimmung des Optionspreises analysieren. Diese Themen bilden die Basis des Unterrichts. Falls das Interesse der SchülerInnen geweckt worden ist, kann zusätzlich noch das Binomialmodell, die Binomialformel und das Black-Scholes-Modell in den Unterricht eingebaut werden. Dieser Unterrichtsentwurf kann fächerübergreifend mit Geographie und Wirtschaftkunde, im vertiefenden Mathematikunterricht, sowie im allgemeinen Mathematikunterricht umgesetzt werden.

Die Themen:

(1) Ökonomische Grundlagen

(2) Pay-Off und Gewinn-Verlust-Diagramme

(3) Erwartungswert und No-Arbitrage-Prinzip

(4) Einperiodenmodell zur Bestimmung des Optionspreises

werden anhand kompetenzorientierter Aufgaben und Beispielen mit den SchülerInnen gemeinsam erarbeitet. (vgl. [2], S. 193 ff.)

5.2.1 Ökonomische Grundlagen

Der Finanzbegriff *Option* ist für die meisten der SchülerInnen mit großer Wahrscheinlichkeit unbekannt. Aus diesem Grund eignet sich ein Unterrichtseinstieg mit einer Einführung in 'ökonomische Grundlagen'.

Lehrziele

Diese Unterrichtseinheit 'Ökonomische Grundlagen' wurde so konzipiert, dass die SchülerInnen folgende Lehrziele erreichen können:

- Die SchülerInnen sollen die wichtigsten ökonomischen Grundbegriffe zum Thema Optionen kennen.
- Die SchülerInnen sollen die verschiedenen Grundpositionen im Optionsgeschäft beschreiben können.
- Die SchülerInnen sollen den Ablauf eines Optionsgeschäfts erklären können.

Beispiel 5.1. Einstiegsbeispiel
Dein Vater ist ein leidenschaftlicher Oldtimer Fahrer. Da der Oldtimer nur in der Garage steht und nicht mehr ausgefahren wird, möchte er dir dieses Auto zum Geburtstag schenken. Du bist nicht wirklich ein Oldtimer-Fan und besitzt bereits ein eigenes Auto. Du erzählst deinem Freund von dem Vorhaben deines Vaters und er interessiert sich sofort für den Oldtimer.
Da die Preise für Oldtimer schwanken können und du und dein Freund Sicherheit über den Preis des Fahrzeuges haben möchtet, bietest du deinem Freund heute den Oldtimer für 9.000 € *an. Als Sicherheit für dieses Geschäft verlangst du von deinem Freund* 500 €*.*

Die 500 € *sind keine Anzahlung, sondern eine Garantie für deinen Freund, dass er dir den Wagen im nächsten Jahr für* 9.000 € *abkaufen kann. Dein Freund hat nun eine Option für den Oldtimer erworben und sich den Kauf des Fahrzeuges gesichert, selbst wenn er im nächsten Jahr* 10.000 € *wert sein sollte. Er wird damit zum Käufer der Option.*
Es gibt verschiedene Pflichten und Rechte des Verkäufers und des Käufers einer Option.

Als Verkäufer der Option ***musst*** *du dem Optionskäufer, also deinem Freund, den Wagen im nächsten Jahr zu einem bestimmten vorher festgelegten Zeitpunkt für* 9.000 € *verkaufen, sofern er das möchte. Dein Freund hingegen* ***kann*** *das Fahrzeug zu dem festgelegten Zeitpunkt erwerben. Möchte dein Freund in der Zwischenzeit den Oldtimer nicht mehr kaufen, z.B. weil er ein besseres Angebot entdeckt hat, so ist das legitim. Du hast dann zwar den Wagen nicht verkauft, allerdings* 500 € *eingenommen, die dir dein Freund für das Recht bzw. die Option das Fahrzeug zu kaufen gezahlt hat. Der Wagen ist in diesem Fall weiterhin in deinem Besitz und du kannst ihn jederzeit verkaufen.*

Beiden Seiten wurde mit diesem Geschäft geholfen. Du hast 500 € *bekommen und dein Freund hatte die Garantie den Oldtimer für* 9.000 € *kaufen zu können. (vgl. [13])*

Anhand dieses Einstiegsbeispiels können nun die wichtigsten Begriffe der Optionen erarbeitet werden. Dies kann auf verschiedene Arten erfolgen:

- Die SchülerInnen erarbeiten gemeinsam mit der Lehrperson die Grundlagen des Optionswesens anhand der Aufgabe 5.1.
- Die SchülerInnen erarbeiten in Gruppen die Aufgabe 5.1 mit Hilfe der Abbildung 5.1.
- Falls ein Computerraum zur Verfügung steht, können die SchülerInnen die Aufgabe 5.1 alleine mit Hilfe des Internets erarbeiten.

Aufgabe 5.1. *Es existiert eine Vielzahl von unterschiedlichen Finanzinstrumenten, wie z.B.: Sparbücher, Bausparverträge oder Aktien. Optionen gehören zu den weniger bekannten Finanzprodukten.*

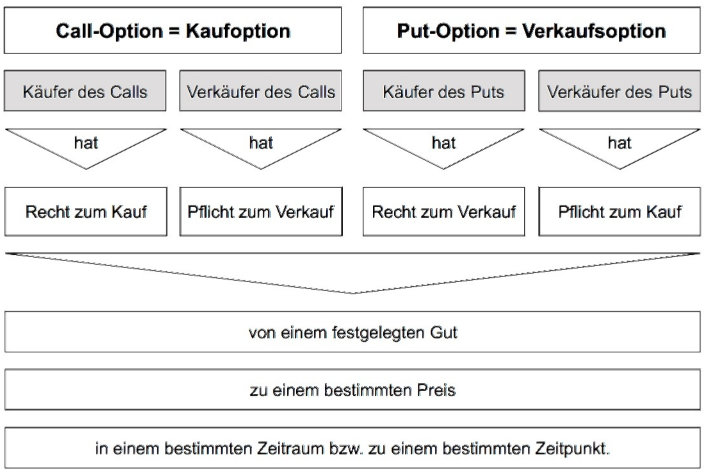

Abbildung 5.1: Die vier Grundpositionen im Optionsgeschäft (Quelle: [2], S. 193 aus [1])

a) *Beschreibe den Begriff Option mit Hilfe des Einstiegsbeispiels. Erkläre die Rechte und Pflichten im Zusammenhang mit Optionen sowie die Begriffe Ausübungspreis, Ausübungsfrist, Ausübungstermin, Kontaktgröße und Basiswert.*

(b) *Beschreibe eine Call-Option bzw. eine Put-Option. Fasse die vier Grundpositionen mit Hilfe der unten dargestellten Abbildung zusammen.*

(c) *Vergleiche eine amerikanische Option mit einer europäischen Option. Was für Unterschiede gibt es bei diesen Optionen?*

Die SchülerInnen sollen als Ergebnis diese Begriffe im Zusammenhang mit *Optionen* verstehen und erklären können:

Eine Option ist ein Vetrag zwischen zwei Parteien. Der Besitzer bzw. Käufer einer Option hat das Recht, aber nicht die Pflicht,

- zu einem festgelegten Zeitpunkt (Ausübungstermin)
- oder innerhalb eines bestimmten Zeitraums (Ausübungsfrist)
- zu einem festgelegten Preis (Ausübungspreis bzw. Strike-Preis)
- eine bestimmte Menge (Kontaktgröße)
- eines bestimmten Finanzguts (Basiswert)

zu kaufen (*Call-Option*) oder zu verkaufen (*Put-Option*).

Nimmt der Inhaber der Option sein erworbenes Recht in Anspruch, so übt der Optionskäufer die Option aus. Übt der Besitzer sie allerdings nicht aus, verfällt die Option am Ende ihrer Frist. Optionen, die das Recht zum Kauf eines Basisguts gewähren, bezeichnet man als *Call- bzw. als Kaufoptionen.* Optionen, die das Recht zum Verkauf eines Basisguts gestatten, heißen *Put - bzw. Verkaufsoptionen.*

Aus der Abbildung 5.1 kann man die vier verschiedenen Grundpositionen des Optionsgeschäft gut ablesen:

(1) Käufer einer Call-Option,

(2) Verkäufer einer Call-Option,

(3) Käufer einer Put-Option und

(4) Verkäufer einer Put-Option.

Bezüglich der Ausübungszeiten lassen sich folgende Arten unterscheiden:

- Amerikanische Optionen können jederzeit während ihrer Laufzeit, also an jedem Handelstag vor der Fälligkeit ausgeübt werden.
- Europäische Optionen hingegen können nur zum festgelegten Ausübungstermin, also zu einem festen Zeitpunkt, ausgeübt werden.

Die nächsten Aufgaben knüpfen an das bereits Erlernte an und sollen die Grundlagen des Optionsgeschäfts vertiefen.

Aufgabe 5.2. *Welche Annahmen müssen ein Optionskäufer und ein Optionsverkäufer über die Aktienkursentwicklung haben, damit das Optionsgeschäft überhaupt stattfindet? Beschreibe und vergleiche die beiden Standpunkte.*

Der Optionskäufer hofft auf einen Anstieg des Aktienkurses, denn durch den Erwerb der Option muss er höchstens den festgelegten Preis für eine Aktie zahlen. Der Optionsverkäufer hingegen spekuliert auf einen gleichbleibenden oder sinkenden Aktienkurs. In diesem Fall ist die Option wertlos und der Verkäufer hat den Optionspreis eingenommen.

Im Gegensatz dazu erwartet der Käufer einer Put-Option einen fallenden Kurs. Durch den Erwerb der Option sichert er sich mindestens den Strike-Preis beim Verkauf seiner Aktie. Der Verkäufer der Put-Option spekuliert auf steigenden oder gleichbleibenden Aktienkurs, wodurch die Option wertlos wird. Der Verkäufer hat somit den Optionspreis eingenommen.

Aufgabe 5.3. *In der Abbildung 5.2 ist der Ablauf eines Optionsgeschäftes am Beispiel einer europäischen Call-Option dargestellt. Beschreibe wie dieser Vertrag zwischen den beiden Parteien abläuft.*

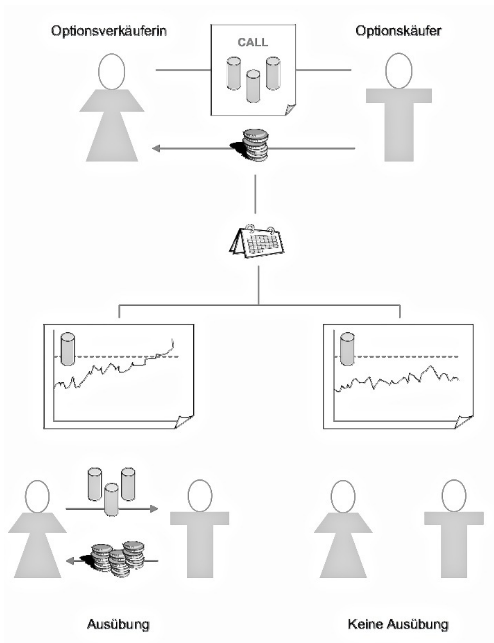

Abbildung 5.2: Ablauf eines Optionsgeschäftes (Quelle: [2], S. 195 aus [1])

Wie schon in der Aufgabe 5.1 erarbeitet, erwirbt der Optionskäufer einer Call-Option das Recht, eine bestimmte Menge des Basiguts, z.B.: Rohstoffe, zu einem festgelegten Strike-Preis, zu einem späteren Termin zu kaufen. Für den Erwerb dieses Rechts zahlt der Käufer der Verkäuferin den Optionspreis. Liegt der Aktienkurs des Basisguts zum festgelegten Zeitpunkt über dem Ausübungspreis, so wird die Option vom Optionskäufer ausgeübt. Die Optionsverkäuferin verkauft dem Optionskäufer zum Ausübungstermin das Basisgut zum festgelegten Preis. Liegt der Aktienkurs des Basisguts unter dem Strike-Preis, macht der Optionskäufer keinen Gebrauch von der Option, wodurch die Option verfällt. (vgl. [2], S. 193 ff.)

5.2.2 Pay-Off- und Gewinn-Verlust-Diagramme

In der Unterrichtseinheit **Pay-Off und Gewinn-Verlust-Diagramme** sollen die SchülerInnen folgendes Lehrziel erreichen:

Lehrziele

- Die SchülerInnen sollen die Auszahlungsprofile einer Put- bzw. einer Call-Option verstehen und im nächsten Schritt die Pay-Off und Gewinn-Verlust-Diagramme selbst erstellen können.

Zuerst werden gemeinsam mit den SchülerInnen die wichtigsten Grundbegriffe von Optionen wiederholt und somit gefestigt. Anschließend wird in einem SchülerInnen - LehrerInnen Gespräch geklärt, für welche Zeitpunkte bereits ohne weitere Kenntnisse ein fairer Preis für die Option festgelegt und wie dieser Preis bestimmt werden kann. Eventuell können dies die SchülerInnen schon beantworten, andernfalls muss genauer darauf eingegangen werden, wozu die nächste Aufgabe gedacht ist.

Es gibt genau einen derartigen Zeitpunkt, für den bereits ein fairer Preis berechnet werden kann, nämlich zum Zeitpunkt der letztmöglichen Ausübung, also zum Verfallstermin.

Aufgabe 5.4. *Der Preis einer Option zum Verfallstermin $t = T$ hängt vom Ausübungspreis K und vom Aktienkurs S_T des Basisguts zu diesem Zeitpunkt ab. Nimm an, dass du für die Option genau so viel zahlen möchtest, wie sie in diesem Moment noch wert ist, dann gilt für den Preis C_T einer Call-Option zum Zeitpunkt T:*

$$C_T = \begin{cases} S_T - K & \text{falls } S_T \geq K, \\ 0 & \text{falls } S_T < K. \end{cases} \tag{5.1}$$

Der Preis P_T einer Put-Option zum Verfallstermin lässt sich mit diesem Pay-Off folgendermaßen darstellen:

$$P_T = \begin{cases} 0 & \text{falls } S_T \geq K, \\ K - S_T & \text{falls } S_T < K. \end{cases} \tag{5.2}$$

Begründe diese beiden Formeln und ermittle die Werte des Pay-Offs der Optionen. [1]*(vgl. [2], S. 196 f.)*

[1] Für diesen Abschnitt wird eine andere Notation gewählt.

Als Ergebnis von den SchülerInnen könnte man sich erwarten:

Begründung für das Auszahlungsprofil einer Call-Option:
Der Optionskäufer wird die Option ausüben, wenn sich der Kurs der Aktie S_T zum Zeitpunkt T über dem Strike-Preis K befindet. Der Investor der Call-Option kauft eine Aktie zum festgelegten Preis K und verkauft diese sofort zum aktuellen Aktienkurs S_T am Markt wieder. Sein Gewinn beträgt $S_T - K$. Die Option ist wertlos, wenn der Kurs der Aktie unter dem Strike-Preis fällt.

Begründung für das Auszahlungsprofil einer Put-Option:
In diesem Fall übt der Käufer die Option aus, wenn sich der Kurs der Aktie S_T zum Zeitpunkt T unter dem Strike-Preis K befindet. Der Investor verkauft eine Aktie zum festgelegten Preis K und kauft sofort eine Aktie zum aktuellen Kurs S_T. Er nimmt also $K - S_T$ ein. Die Option ist wertlos, wenn sich der Kurs der Aktie über dem Ausübungspreis befindet.
Das *Pay-Off* der Optionen kann die Werte $S_T - K$, 0, und $K - S_T$ annehmen.

Den SchülerInnen soll durch diese Aufgabe bewusst werden, dass C_T bzw. P_T zum Zeipunkt $t = 0$ zufällig sind, da der zugrunde liegende Aktienkursverlauf zufällig ist.
Um dies besser zu veranschaulichen, werden als nächstes die Pay-Off - und Gewinn-Verlust-Diagramme besprochen und gleich anhand der nächsten Aufgabe erarbeitet.

Aufgabe 5.5. *Gegeben ist eine Call-Option auf Facebook-Aktien mit dem Strike-Preis von* 25 € *und einem Verfallsdatum im September 2013. Am 15.05.2013 betrug der Preis der Option* 11 €.

*(a) Der Preis C_T einer Call-Option zum Ausübungszeitpunkt $t = T$ hängt vom Kurs der Aktie S_T ab. Erstelle dazu eine Grafik. Diese graphische Darstellung bezeichnet man als **Pay-Off-Diagramm**.*

(b) Wird der Optionspreis vom Pay-Off abgezogen, dann erhält man den Gewinn bzw. Verlust für den Optionskäufer/ Optionsverkäufer. In diesen Diagrammen wird der Gewinn bzw. der Verlust in Abhängigkeit vom Aktienkurs S_T dargestellt. Zeichne das Gewinn-Verlust-Diagramm für diese Option, sowohl aus Sicht des Käufers, als auch als Sicht des Verkäufers.

(c) Bewerte die Chancen und Risiken eines Optionsgeschäfts.

Als Ergebnis sollten die SchülerInnen die drei Grafiken gezeichnet haben und die verschiedenen Chancen und Risiken eines Optionsgeschäfts analysiert haben.

Die Abbildung 5.3 stellt das gesuchte Pay-Off-Diagramm dar. Das Gewinn-Verlust-Diagramm mit den unterschiedlichen Ansichten ist in der Abbildung 5.4 dargstellt. Anhand dieser Graphen soll den SchülerInnen ermöglicht werden, die Verluste und Gewinne des Optionsgeschäfts besser zu verstehen.

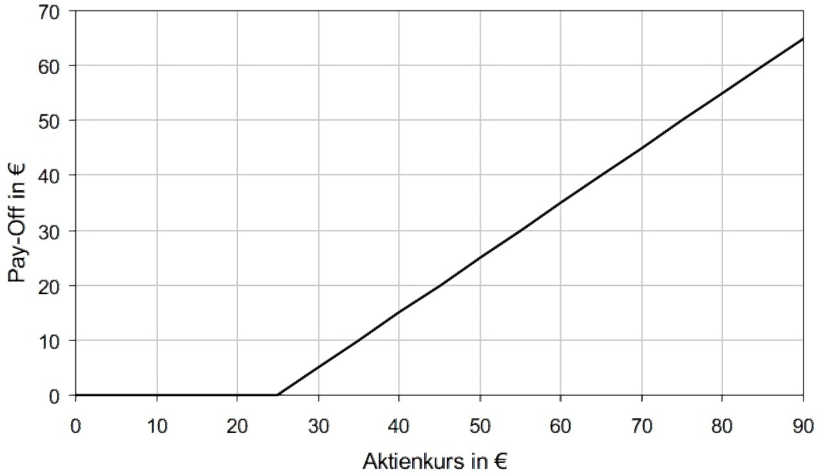

Abbildung 5.3: Pay-Off-Diagramm einer Call-Option (Quelle: [2], S. 198)

Die Gewinn-Verlust-Diagramme zeigen die Risiken und Gewinnmöglichkeiten der am Optionsgeschäft beteiligten Parteien auf. Die möglichen Verluste sind auf Seiten des Optionsverkäufers unbeschränkt, während der Optionskäufer maximal den Optionspreis verliert. Die möglichen Gewinne hingegen sind für den Optionskäufer unbeschränkt, während der Optionsverkäufer maximal den Optionspreis einnehmen kann.
Da Optionsverkäufe hohe Risiken mit sich führen, treten als Optionsverkäufer vor allem Institutionen auf, die über große finanzielle Mittel verfügen, wie z.B.: Banken und Versicherungen. (siehe [2], S. 198)

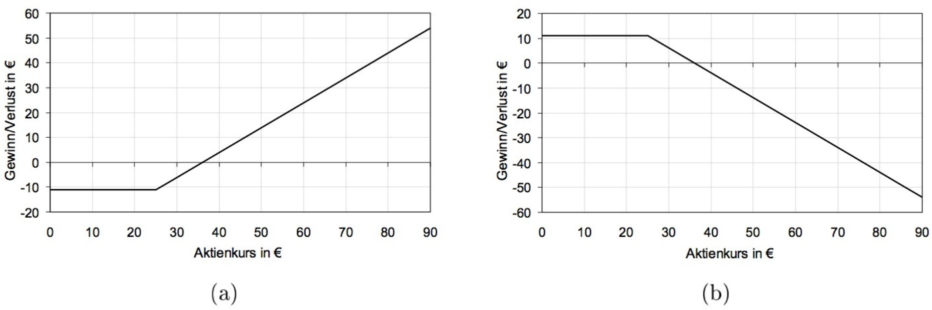

Abbildung 5.4: Gewinn-Verlust-Diagramm einer Call-Option aus Sicht (a) des Käufers und (b) aus Sicht des Verkäufers (Quelle: [2], S. 198)

Das Kapitel kann für den Unterricht noch ausgebaut werden, anhand von Aufgaben für Put-Optionen und Kombinationsmöglichkeiten von Optionen.
(vgl. [2], S. 196 ff.)

5.2.3 Erwartungswert- und No-Arbitrage-Prinzip

In dieser Unterrichtssequenz soll der 'faire' Preis für eine Option im Mittelpunkt stehen. Mit den SchülerInnen soll gemeinsam erarbeitet werden, ob es einen Preis einer Option gibt, mit dem sowohl der Käufer als auch der Verkäufer der Option zufrieden sind. Des Weiteren sollen die SchülerInnen den Optionswert zum Zeitpunkt des Kaufes bestimmen können.

Lehrziele

Diese Unterrichtseinheit 'Erwartungswert- und No-Arbitrage-Prinzip' ist so konzipiert, dass die SchülerInnen folgende Lehrziele erreichen sollen.

- Die SchülerInnen sollen die verschiedenen Einflussfaktoren für den Preis einer Call-Option bzw. einer Put-Option beschreiben können.
- Die SchülerInnen sollen 'Arbitrage' interpretieren und das Entstehen von Arbitragemöglichkeiten bei falschem Optionspreis analysieren können.
- Die SchülerInnen sollen Anlagestrategien kennen lernen.
- Die SchülerInnen sollen dass No-Arbitrage-Prinzip als Schlüssel für den richtigen Optionspreis verstehen und erklären können.

Ein Unterrichtseinstieg für dieses Kapitel könnte mit folgender Aufgabe beginnen:

Aufgabe 5.6. *Analysiere die unterschiedlichen Faktoren, die den Preis von Optionen beeinflussen können. Gehe dabei sowohl auf Call- als auch auf Put-Optionen ein.*

Diese Aufgabe soll eine Diskussion eröffnen und gemeinsam mit der Lehrperson und den SchülerInnen erarbeitet werden. Als Ergebnis sollten die SchülerInnen zu diesen Überlegungen kommen.

Einflussfaktor	Preis C_T einer Call-Option	Preis P_T einer Put-Option
Ausübungspreis K steigt	sinkt	steigt
Aktienkurs S_T sinkt	sinkt	steigt

Abbildung 5.5: Einflussgrößen des Optionspreises bei einer sich ändernden Größe, (Quelle: [2], S. 201)

Steigt der Ausübungspreis, so mindert dies die Chance, dass der Aktienkurs den Strike-Preis übersteigt. Aus Sicht des Käufers wird die Chance auch geringer, dass die entsprechende Call-Option ausgeübt wird. Dies beeinflusst auch den Preis der Option, er sinkt nämlich.
Sinkt der Aktienkurs, so ist die Chance gering, dass der Kurs der Aktie den Strike-Preis übersteigt. Damit fällt der Preis der Call-Option, während der Preis der Put-Option steigt.

Haben die SchülerInnen die verschiedenen Einflussfaktoren des Optionspreises erfasst, kann nun zur Entwicklung eines ersten Modells zur Bestimmung von Optionspreisen übergegangen werden. Zunächst wird den SchülerInnen die folgende Option anhand eines Beispiels vorgestellt.

Beispiel 5.2. *Betrachte eine Call-Option auf eine beliebige Aktie mit einem Strike-Preis von* $K = 110$ € *und einer Ausübungsfrist von einem Monat. Der heutige Aktienkurs liegt bei* 100 €. *Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs der Aktie steigt, liegt bei* $p = 0,6$ *und die Wahrscheinlichkeit für einen sinkenden Aktienkurs beträgt somit* $q = 0,4$. *Der erwartete Aktienkursverlauf und der Wert der Option zum Zeitpunkt der Ausübung ist in der nächsten Abbildung dargstellt.*

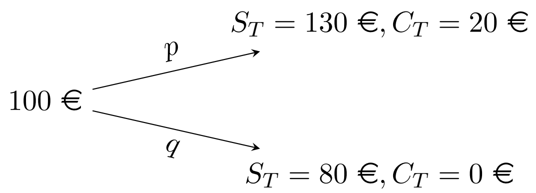

Abbildung 5.6: Modell für eine Kursentwicklung einer Aktie (Quelle: [2], S. 202)

Die SchülerInnen werden nun aufgefordert mit ihrem Sitznachbarn bzw. ihrer Sitznachbarin einen 'fairen' Preis für diese vorgestellte Option zu schätzen. Es wird von ihnen nicht erwartet, dass sie einen korrekten Preis ausrechnen. Vermutlich werden manche SchülerInnen den erwarteten Wert der Option C_T zum Zeitpunkt der Ausübung berechnen und fassen diesen Wert als fairen Preis auf. Das Ergebnis für den Erwartungswert wäre:

$$\mathbb{E} = 0,6 \times 20 \text{ €} + 0,4 \times 0 \text{ €} = 12 \text{ €}.$$

Dieses Ergebnis, unter Nutzung des sogenannten Erwartungswertprinzips entwickelte Modell zur Bestimmung eines Optionspreises, soll daraufhin hinterfragt werden und der Begriff Arbitrage daraus entwickelt werden.
Bei dieser Diskussion kann an das Vorwissen der SchülerInnen angeknüpft werden.

Sie wissen bereits, dass Verkäufer und Käufer von Optionen verschiedene Erwartungen vom Kursverlauf der zugrunde liegenden Aktien haben. Somit können die SchülerInnen daraus folgern, dass es schwierig ist, eine 'faire' Wahrscheinlichkeit für das Steigen bzw. Sinken des Aktienkurses anzugeben.

Der Käufer der Option wird voraussichtlich steigende Aktienkurse mit einer größeren Wahrscheinlichkeit bewerten, als der Optionsverkäufer. Ein Optionspreismodell, in das Wahrscheinlichkeiten für Aktienkursänderungen eingehen, würde daher sicherlich nicht akzeptiert werden. Den SchülerInnen soll anschaulich gemacht werden, dass die Integration von Wahrscheinlichkeiten als kritisch betrachtet werden soll.

Ein weiterer wichtiger Aspekt, den die SchülerInnen bisher nicht wissen können ist, dass durch das Erwartungswertprinzip die Möglichkeit für einen risikolosen Gewinn, auch *Arbitrage* genannt, entsteht.
Dieser, für die SchülerInnen neue Begriff, soll anhand der nächsten Aufgabe näher beschrieben und erarbeitet werden.

Aufgabe 5.7. *Betrachte erneut die Call-Option wie im Beispiel 5.2. Der Strike-Preis liegt bei* 110 €*. Der Aktienkurs zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt* 100 €*. Nach einem Monat kann die Aktie den Wert von* 130 € *oder den Wert von* 80 € *besitzen.*

Behauptung*:*
8 € *ist der einzig wahre Preis für die Option. Für alle anderen Preise hat der Investor die Chance, durch eine geschickte Anlagestrategie, ohne den Einsatz eines eigenen Kapitals einen risikolosen Gewinn, auch Arbitrage genannt, zu erlangen. Wäre der Optionspreis C_0 größer als* 8 €*, dann könnte der Optionskäufer die in der nächsten Tabelle dargestellte Strategie fahren.*

(a) Beschreibe die Anlagestrategie aus Sicht des Verkäufers für den Fall, dass der Optionspreis größer ist als 8€*. Welche Annahmen müssen für einen idealen Markt getroffen werden? Ermittle diese.*

(b) Für den Fall $C_0 < 8$ € sollst du zeigen, dass es eine geeignete Anlagestrategie für einen risikolosen Gewinn gibt. Beachte, dass kein eigenes Kapital eingesetzt werden muss und dass nach dem Handel die ursprüngliche Situation wieder gegeben ist. (vgl. [2], S.203)

In der Abbildung 5.7 ist die Anlagestrategie aus Sicht des Verkäufers einer Call-Option zu sehen.

Zeitpunkt des Optionsverkaufs		
Aktion		Geldfluss (€)
verkaufe Call-Option	+	C_0
nehme Kredit auf	+	32,00
kaufe 0,4 Aktien	−	40,00
Bilanz		$C_0 - 8,00$

Zeitpunkt der Ausübung					
falls $S_T =$ €130,00			falls $S_T =$ €80,00		
Aktion		Geldfluss (€)	Aktion		Geldfluss (€)
leihe 0,6 Aktien		0,00			
bediene Option (verkaufe 1 Aktie)	+	110,00	Option wertlos		0,00
tilge Kredit	−	32,00	tilge Kredit	−	32,00
kaufe 0,6 Aktien	−	78,00	verkaufe 0,4 Aktien	+	32,00
gebe 0,6 Aktien zurück		0,00			
Bilanz		0,00	**Bilanz**		0,00

Abbildung 5.7: Möglichkeit für einen risikolosen Gewinn bei einem falschen Optionspreis (Quelle: [2], S. 203)

Der Investor verkauft die Option für einen Preis von $C_0 > 8$ €, nimmt einen Kredit in Höhe von 32 € auf und kauft davon 0,4 Aktien. Daraus ergibt sich in der Bilanz: $C_0 - 8$ €, ohne eigenes Kapital verwendet zu haben.
Zum Zeitpunkt der Ausübung können zwei Fälle betrachtet werden:

1. Ist der Kurs der Aktie auf 130 € gestiegen, so wird die Option vom Käufer ausgeübt. Der Verkäufer leiht sich 0,6 Aktien aus und verkauft wiederum eine Aktie an den Optionskäufer. Er hat somit einen Gewinn von 110 € und kann so seinen Kredit tilgen. Er kauft sich 0,6 Aktien und gibt diese an den 'Aktienverleiher' zurück.

2. Bei diesem Fall ist der Kurs der Aktie auf 80 € gefallen und die Option ist wertlos. Der Optionsverkäufer tilgt seinen Kredit, indem er die zum Zeitpunkt des Optionsverkaufs gekauften 0,4 Aktien wieder verkauft.

In beiden Fällen ist durch das Geschäft des Verkäufers die Ausgangsituation zum Ausübungszeitpunkt wieder gegeben, ohne dass der Verkäufer eigenes Kaptital einsetzt. Szenarienunabhängig kommt es zu einem Gewinn in Höhe von $C_0 - 8$ € durch den falschen Optionspreis von $C_0 > 8$ €. (vgl. [2], S. 204)

Die Annahmen eines idealen Finanzmarkts wurden bereits im Kapitel der **Optionen** in 4.4.1 beschrieben. Im Unterricht sollen diese genau erläutert werden.

In der Aufgabe 5.7 wurde die Anlagestrategie aus Sicht des Verkäufers beschrieben, doch wie sieht eine geeignete Anlagestratgie aus Sicht des Optionskäufers für den Fall $C_0 < 8$ € aus?

Der Investor kauft eine Option zum Preis C_0, vergibt gleichzeitig einen Kredit in Höhe von 32 € und verkauft $0,4$ Aktien. Aus der Bilanz ergibt sich ein Gewinn in Höhe von 8 € $- C_0$. Hier kann man wieder zwei Fälle unterscheiden:

(1) Ist der Kurs der Aktie auf 130 € gestiegen, so wird auch in diesem Fall die Option ausgeübt. Der Optionskäufer kauft eine Aktie für 110 €, gleichzeitig erhält er seinen Kredit zurück und verkauft $0,6$ Aktien, womit die ursprüngliche Situation wieder gegeben ist.

(2) Ist der Kurs der Aktie auf 80 € gefallen, so ist die Option wertlos. Der Investor bekommt seinen Kredit zurück, kauft $0,4$ Aktien und stellt damit wieder die Ausgangssituation her.

Szenarienunabhängig kommt es zu einem Gewinn in Höhe von 8 € $- C_0$, ohne dass der Käufer eigenes Kapital eingesetzt hat. In der Abbildung 5.8 sind diese Szenarien zusammengefasst und dargestellt.

Zeitpunkt des Optionskaufs		
Aktion		Geldfluss (€)
kaufe Call-Option	$-$	C_0
vergebe Kredit	$-$	$32,00$
verkaufe 0,4 Aktien	$+$	$40,00$
Bilanz		$8,00 - C_0$

Zeitpunkt der Ausübung					
falls $S_T =$ €$130,00$			falls $S_T =$ €$80,00$		
Aktion		Geldfluss (€)	Aktion		Geldfluss (€)
übe Option aus (kaufe 1 Aktie)	$-$	$110,00$	Option wertlos		$0,00$
erhalte Kredit zurück	$+$	$32,00$	erhalte Kredit zurück	$+$	$32,00$
verkaufe 0,6 Aktien	$+$	$78,00$	kaufe $0,4$ Aktien	$-$	$32,00$
gesamt		$0,00$	**Bilanz**		$0,00$

Abbildung 5.8: Weitere Möglichkeit für einen risikolosen Gewinn bei einem falschen Optionspreis (Quelle: [2], S. 205)

Wegen dieser Überlegungen sollen die SchülerInnen auf folgendes Ergebnis kommen:
Wäre $C_0 \neq 8$ €, so könnte der Anleger mit einer geeigneten Anlagestrategie einen risikolosen Gewinn erzielen. Durch eine geschickte Skalierung können hohe Gewinne eingenommen werden, ohne auch nur das geringste Risiko einzugehen. Folglich ist $C_0 = 8$ € der einzig faire Preis.
Aufgrund der Arbitragemöglichkeiten ist das Erwartungswert-Prinzip kein passendes Modell zur Bestimmung eines fairen Optionspreises und in dem nächsten Modell sollte es keine Arbitragemöglichkeiten geben.
Anhand des nächsten Beispiels kann eine Arbitragemöglichkeit den SchülerInnen besser veranschaulicht werden.

Beispiel 5.3. *Eine Aktie in London hat einen aktuellen Kurs von* 30 € *und in Wien einen von* 25 €*. Da du ein geschickter Geschäftsmann beziehungsweise eine geschickte Geschäftsdame bist, kaufst du in Wien die Aktien und verkaufst sie in London wieder. Pro Aktie machst du einen risikolosen Gewinn in der Höhe von* 5 €*. Aber aufgrund der Transparenz der realen Märkte gibt es diese Möglichkeiten zum risikolosen Gewinn nicht beziehungsweise nicht lange. Die Nachfrage nach den billigeren Aktien würde steigen, im Gegenzug dazu werden die teureren Aktien weniger nachgefragt. Da die Preisbildung von Aktien durch das Prinzip 'Angebot und Nachfrage' geregelt wird, verschwindet die Arbitragemöglichkeit wieder.*
(vgl. [2], S. 206)

Damit ist das so genannte No-Arbitrage-Prinzip der Schlüssel zur 'richtigen' Bewertung von Optionen und es kann mit der nächsten Unterrichtssequenz fortgesetzt werden. (vgl. [2], S. 201 ff.)

5.2.4 Einperiodenmodell zur Bestimmung des Optionspreises

In dieser Unterrichtseinheit steht die Anwendung des No-Arbitrage-Prinzips zur Berechnung des Optionspreises im Mittelpunkt. Mit den SchülerInnen soll der Bergriff Arbitrage nochmals vertieft werden und die Schlussfolgerungen aus dem No-Arbitrage-Prinzip anhand von Beispielen und Aufgaben den SchülerInnen näher gebracht werden.

Lehrziele

Bei diesem Modul sollen die SchülerInnen die Möglichkeit haben, folgende Lehrziele zu erreichen.

- Die SchülerInnen sollen den Begriff Arbitrage interpretieren können.
- Die SchülerInnen sollen ihre Überlegungen aus dem No-Arbitrage-Prinzip zur Berechnung des Optionspreises sowohl für Call- als auch für Put-Optionen anwenden können.

Das No-Arbitrage-Prinzip bildet die Grundlage, einen 'fairen' Preis für die Option zu berechnen. Der Grundgedanke für die Berechnung folgt dabei unmittelbar aus dem No-Arbitrage-Prinzip und dessen Schlussfolgerung. Dieser wäre:
Es ist zu jedem Zeipunkt und bei jedem Aktienkurs möglich, ein Portfolio aus a Aktien und Geld in Höhe von b zusammenzustellen, das die gleiche Wertentwicklung wie die Option aufweist.

Wie ist der obige Satz zu interpretieren?
Ein Portfolio soll erzeugt werden, indem der Wert zum Zeitpunkt $t = T$ dem Optionspreis C_T entspricht. Aus den Schlussfolgerungen des No-Arbitrage-Prinzips stimmt der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $t = 0$ mit den Optionspreis C_0 überein.

Aufgabe 5.8. *Überprüfe den Optionspreis aus der Aufgabe 5.7, der 8 € betrug. Es ist eine Call-Option mit den Strikepreis $K = 110$ € und dem folgenden Verlauf gegeben.*

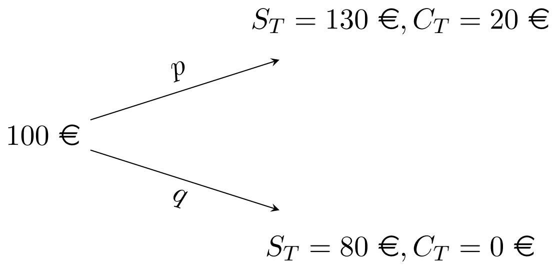

Abbildung 5.9: Weiteres Modell für eine Kursentwicklung einer Aktie (Quelle: [2], S. 207)

(a) *Erstelle ein Portfolio, das der gleichen Wertentwicklung wie der Option entspricht, unabhängig davon, ob der Kurs der Aktie fällt oder steigt.*

(b) *Bestimme die Anzahl der in diesem Portfolio erhaltenen Aktien und die Höhe des Geldbetrages.*

(c) *Bei dieser Aufgabe liegt der Preis der Option bei $C_0 = 8$ €. Beweise diese Aussage.*

(d) *Berechne den Preis der Option unter der Annahme, dass der Zinssatz, mit dem das Geld angelegt wurde, 3% pro Periode beträgt. Welche Annahme für einen idealen Markt muss hier getroffen werden?*

Als Ergebnis sollten die SchülerInnen folgendes präsentieren:

Das Portfolio soll zum Zeitpunkt $t = 0$ aus a Aktien und einen Geldbetrag in Höhe von b bestehen. Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt T soll dem Wert der Option zum selben Zeitpunkt entsprechen, unabhängig von der Kursentwicklung der Aktie. Die SchülerInnen sollten alleine auf das nächste Gleichungssystem kommen:

$$130a + b = 20,$$

$$80a + b = 0.$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $(a; b) = (0,4; -32)$. Das Ergebnis ist so zu interpretieren, dass der Optionskäufer sich 0,4 Aktien kaufen und sich 32 €

ausleihen muss. Dieses Portfolio hat zum Zeitpunkt T den gleichen Wert wie die Option. Nach dem No-Arbitrage-Prinzip hat dieses Portfolio auch zum Zeitpunkt $t = 0$ den gleichen Wert wie die Option. Somit folgt

$$C_0 = aS_0 + b$$

Der Preis der Option beträgt also $C_0 = 8$ €.
Unter Einbeziehung des Zinssatzes sollten die SchülerInnen folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$130a + 1,03b = 20,$$

$$80a + 1,03b = 0.$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $(a; b) = (0,4; -31,07)$. Hier liegt der Preis der Option bei $C_0 = 8,93$ €. Eine Annahme für einen perfekten Finanzmarkt bezieht sich auf eine konstante Verzinsung.

Den SchülerInnen soll bewusst werden, dass bei diesem Ansatz die Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$ der Kursentwicklung der Aktie nicht in den Optionspreis einfließen. Dies ist ein entscheidender Vorteil des No-Arbitrage-Prinzips. Um diesen Ansatz weiter zu vertiefen, ist die nächste Aufgabe gedacht, die die Berechnung des Preises einer Put-Option zum Ziel hat.

Aufgabe 5.9. *Betrachte eine Put-Option mit einem Strike-Preis von $K = 75$ €, einem Aktienkurs in Höhe von 80 € und einem Ausübungstermin in einem Monat. Nach einem Monat ist einer der beiden Fälle eingetreten:*

(a) Der Aktienkurs ist auf 85 € gestiegen oder

(b) der Kurs der Aktie ist auf 65 € gefallen.

Berechne den Optionspreis für diese Option bei einem Monatszinssatz von 0,3% mit Berücksichtigung des No-Arbitrage-Prinzips.

Die SchülerInnen sollten diese Aufgabe wie folgt lösen:
Wie schon beschrieben sind zwei Fälle des Aktienkursverlaufes möglich. Im ersten Fall, wo der Kurs der Aktie auf 85 € gestiegen ist, übt der Optionskäufer die Option nicht aus. Im zweiten Fall hingegen, wo der Kurs auf 65 € gesunken ist, wird die Option ausgeübt. Der Optionskäufer wird die Aktie in der Höhe von 75 € verkaufen. In diesem Fall ist die Option 10 € wert.
Aus diesen Informationen ist nun ein Portfolio (Aktien; Geld) $= (a; b)$ zu konstruieren, dessen Wert, unabhängig von der Aktienkursentwicklung, dem Wert der Option entspricht. Das nächste Gleichungssystem fasst die Überlegungen zusammen:

$$85a + 1,003b = 0,$$

$$65a + 1,003b = 10.$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $(a; b) = (-0,5; 42,37)$. Zum Zeitpunkt T ist das Portfolio genauso viel wert wie die Put-Option. Nach dem No-Arbitrage-Prinzip hat dieses Portfolio auch zur Zeit $t = 0$ den gleichen Wert P_0 wie die Put-Option. Es gilt

$$P_0 = aS_0 + b.$$

Mit $S_0 = 80$ € liegt der Preis der Put-Option bei $P_0 = 2,37$ €.
(vgl. [2], S. 207 ff.)

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Adelmeyer M., Call and Put, orell füssli, 2000

[2] Daume P., Finanzmathematik im Unterricht, Aktien und Optionen: Mathematische und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien, Vieweg+ Teubner — GWV Fachverlag GmbH, Wiesbaden 2009

[3] Dothan M.U., Prices in Financial Markets, Oxford University Press, 1990

[4] Franke J., Hafner C., Härdle W., Einführung in die Statistik der Finanzmärkte, Springer-Verlag Berlin Heidlberg, 2001

[5] Hesse C., Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie, Eine fundierte Einführung mit über 500 realitätsnahen Beispielen und Aufgaben, Friedr.Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft GmbH, Braunschweig/ Wiesbaden, 2003

[6] Hull J. C., Einführung in die Futures - und Optionsmärkte, R. Oldenbourg Verlag München Wien, 2001

[7] Irle A., Finanzmathematik, Die Bewertung von Derivaten, 2. Auflage, B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlag GmbH, Wiesbaden, 2003

[8] Irle A., Prelle C., Übungsbuch Finanzmathematik, Leitfaden, Aufgaben und Lösungen zur Derivatbewertung, B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlag GmbH, Wiesbaden, 2007

[9] Klenke A., Wahrscheinlichkeitstheorie, 2., korrigierte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[10] Meintrup D., Schäffler S., Stochastik, Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005

[11] Reifner U. et. al, Finanzielle Allgemeinbildung in Schulbüchern: Eine exemplarische inhaltliche und didaktische Analyse von zwanzig ausgewählten Schulbüchern der Sekundarstufe I in Mathematik, Wirtschafts- und Gesellschaftslehre, Insitut für Finanzleistungen e.V., 2004

[12] Sandmann K., Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999

[13] www.broker-test.de/finanzwissen/optionen/, Stand: 11.12.2013

Zusammenfassung

Der Begriff 'Martingal' bezeichnete bereits im 18. Jahrhundert eine Strategie im Glücksspiel. Die Martingaltheorie wird oft in der Finanzmathematik verwendet, die sich unter anderem mit der Bestimmung fairer Preise für Finanzgüter beschäftigt. Wegen ihrer besonderen Eigenschaften bilden Martingale eine geeignete Basis für die Untersuchung von Spielsystemen und sie spielen zusätzlich eine wichtige Rolle für die Optionspreistheorie. Diese Arbeit widmet sich der Optionsbewertung anhand der Konstruktion eines Binomial-Baumes und der risikoneutralen Bewertung. Des Weiteren wird ein einfaches Preismodell für Optionen eingeführt, unter Verwendung des Maßwechsels und dem Theorem von Girsanov. Ziel dieser Arbeit ist es, die komplexe Finanzmathematik beziehungsweise den Bereich der Optionstheorie in einen anwendungsbezogenen Mathematikunterricht zu integrieren.

Abstract

The term 'martingale' has already been used for gambling in the 18th century. The ‚martingale theory' is often used in financial mathematics and helps to determine fair prices for financial goods. Because of their extraordinary features martingales offer a suitable foundation for the investigation of game systems and play an essential role in the option pricing theory. This paper focuses on the assessment of options based on the construction of a binomial tree and a risk neutral valuation. Furthermore, a simple pricing model for options is introduced based on the application of the change of measure and the theorem of Girsanov. The aim of this paper is to integrate the complex branch of financial mathematics, more respectively the field of option theory in an application-oriented mathematical education.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Lisa Neitzel
Geburtsdatum:	18.09.1989
Geburtsort:	Steyr
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Familienstand:	ledig
Religion:	römisch-katholisch
Eltern:	Jürgen und Ursula Neitzel

Ausbildung

2000 - 2008:	Bundesrealgymnasium Steyr
10/2008 - /2013:	Studium Lehramt Mathematik und Wirtschaftskunde an der Universität Wien
10/2008 - 01/2012:	Bachelorstudium theoretische Mathematik an der Universität Wien
01/2012:	Abschluss Bachelor of Science in theoretischer Mathematik an der Universität Wien
Seit 01/2012:	Masterprogramm Finanz- und Versicherungsmathematik an der Technischen Universität Wien

Berufserfahrung

08/2013:	Praktikum bei Wiener Städtische Versicherung AG, Personenversicherungsmathematik
07/2012 - 09/2012:	Praktikum bei Robert BOSCH AG, Finanzabteilung, Statistische Datenerhebung
07/2011 - 08/2011:	Ferialarbeit bei BMW in Steyr, Fertigung
07/2010 - 08/2010:	Ferialarbeit bei BMW in Steyr, Montage
08/2008:	Ferialarbeit bei MAN, Logistik
07/2007 - 09/2007:	Ferialarbeit bei MAN, Logistik