DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Theorie und Praxis von Problemlöseaufgaben und ihr Einsatz im Mathematikunterricht

Verfasser

Christian Steiner

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 412
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik
Betreuer:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen Menschen bedanken, die das Gelingen dieser Arbeit und meines Studiums ermöglicht haben.

Allen voran sei Professor Humenberger für die Betreuung der Diplomarbeit gedankt. Durch sein Seminar *„Problemlösen“* hat er mir wieder in Erinnerung gerufen, welche Bedeutung ich diesem Thema auch für den Unterricht beimesse, und während der Arbeit war mir seine kompetente und engagierte Unterstützung eine große Hilfe.

Besonders zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben auch die Schulleitungen, die Lehrerinnen und Lehrer sowie die Schülerinnen und Schüler der beiden Schulen, in denen ich die empirische Untersuchung für diese Arbeit durchführen durfte.

Den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern aus meiner Schulzeit möchte ich hier ebenfalls meinen Dank aussprechen. Sie haben mein Interesse an Mathematik im Allgemeinen und an Problemlöseaufgaben im Besonderen geweckt und gefördert.

Auch meinen Studienkolleginnen und Studienkollegen, die mich während meines Studiums immer wieder unterstützt und bestärkt haben, gilt mein besonderer Dank. Ich blicke nicht zuletzt ihretwegen auf eine wundervolle Studienzeit zurück.

Und schließlich möchte ich noch meinen Eltern, Geschwistern und meiner Freundin danken. Sie haben mich während meines gesamten Studiums und darüber hinaus begleitet und unterstützt.

Vorwort

Schon in meiner Schulzeit haben mich Rätsel und Knobelaufgaben fasziniert. Aufgaben, bei denen nicht *„nur“* gerechnet wird, sondern wo das Finden des Lösungsweges im Vordergrund steht, stellen für mich seither den größten Reiz in der Mathematik dar. Deshalb habe ich auch Jahr für Jahr mit Begeisterung am *„Känguru der Mathematik“* in meiner Schule teilgenommen und in der Oberstufe die Mathematik-Olympiade besucht. Und immer schon habe ich mich gefragt, warum denn im Mathematikunterricht nicht mehr von diesen – für mich so motivierenden und begeisternden – Aufgaben vorkommen.

Im Zuge meines Studiums habe ich dann das Seminar *„Problemlösen“* bei Professor Humenberger besucht und mit Begeisterung jede Woche die dort gestellten Probleme bearbeitet. Mir ist dadurch wieder bewusst geworden, dass ich dieses Gebiet der Mathematik für sehr wichtig halte, auch für meinen zukünftigen Unterricht.

Und so kam mir schließlich die Idee, meine Diplomarbeit zu diesem Thema zu verfassen. Dadurch war es mir möglich, mich auch mit einem Aspekt des Problemlösens auseinanderzusetzen, der mir bisher noch kein Anliegen war – dem Vermitteln von Problemlösefähigkeiten.

Insgesamt hat mir das Verfassen der Arbeit trotz mancher Hürden viel Freude bereitet, und ich konnte im Zuge des Recherchierens und Schreibens viele Ideen und Erkenntnisse für meine Lehrtätigkeit sammeln.

Abstract

Diese Diplomarbeit befasst sich mit Problemlöseaufgaben und ihrem Einsatz im Mathematikunterricht.

Dazu wird zunächst erarbeitet, wann eine Aufgabe als Problemlöseaufgabe angesehen werden kann und was diese Aufgaben ausmacht.

Anschließend wird begründet, warum der Einsatz von Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht sinnvoll ist. Auch eine Verbindung zu den Lehrplänen und Bildungsstandards wird in diesem Teil der Arbeit hergestellt.

Dann werden einige Aspekte, die beim Lernen von Problemlösen wichtig sind, genannt. Unter anderem wird dabei auf einige im Unterricht sinnvoll einsetzbare Heurismen eingegangen.

In der folgenden Aufgabensammlung sind Probleme zusammengetragen, mit denen ebendiese Heurismen im Unterricht vorgestellt und trainiert werden können. Die einzelnen Aufgaben werden dabei näher analysiert und sowohl Lösungswege als auch Einsatzbereiche angegeben.

Die Arbeit schließt mit einer empirischen Untersuchung. Mit ihr soll einerseits festgestellt werden, welche verschiedenen Lösungswege die Schülerinnen und Schüler bei bestimmten Aufgaben wählen, andererseits wird auch ein Zusammenhang zwischen der Anzahl richtig gelöster Aufgaben und verschiedenen personenbezogenen Daten, wie Mathematiknote im Semesterzeugnis oder Motivation für Problemlöseaufgaben, überprüft.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Was ist unter Problemlöseaufgaben zu verstehen?

Der Begriff *Problemlösen* wird von verschiedenen Autoren und in verschiedenen Kontexten unterschiedlich verwendet. In diesem Kapitel sollen einige dieser Verwendungen und Definitionen angeführt werden. Außerdem wird angegeben, was im Zuge dieser Arbeit als Problemlöseaufgabe verstanden wird und was nicht, und wie Problemlöseaufgaben nach ihrer Schwierigkeit klassifiziert werden können.

1.1 George Polya

George Polya, der mit seinem Buch *Die Schule des Denkens* (Polya, 1995) sicherlich ein grundlegendes Werk zum Thema Problemlösen verfasst hat, definiert darin nicht explizit, von welchen Problemen er spricht. Der Untertitel *Vom Lösen mathematischer Probleme* lässt jedenfalls erkennen, dass es um mathematische Aufgabenstellungen geht. Im Verlauf des Buches werden *mathematisches Problem* und *mathematische Aufgabe* weitgehend synonym verwendet, Polya spricht also prinzipiell von jeglicher Art mathematischer Aufgaben. Dennoch kann hier eine Einschränkung gemacht werden, wenn man bedenkt, dass sein Buch insbesondere auf das Lösen dieser Aufgaben eingeht. Dies impliziert die Tatsache, dass Polya eigentlich nur dann von einem Problem spricht, wenn diese subjektiv als schwierig empfunden werden beziehungsweise wenn der oder die Lösende überhaupt auf die Idee kommt, beim Lösen Hilfestellungen wie die Tabelle *Wie sucht man die Lösung* (Polya, 1995, S. 270f) zu Rate zu ziehen.

1.2 Denkpsychologischer Ansatz

In denkpsychologischer Literatur findet man zum Beispiel eine Erklärung für Problemlösen wie diese (Hussy, 1984, S. 114):

> *„Unter Problemlösen versteht man das Bestreben, einen gegebenen Zustand (Ausgangs- oder Ist-Zustand) in einen anderen, gewünschten Zustand (Ziel- oder Soll-Zustand) zu überführen, wobei es gilt, eine Barriere zu überwinden, die sich zwischen Ausgangs-*

und Zielzustand befindet.“

Diese Erklärung von Problemlösen, die an sich noch nicht auf mathematische Probleme eingeschränkt ist, ist sonst recht allgemein gehalten. Abgesehen davon ist sie der Art, in der Polya den Begriff *Problemlösen* verwendet, sehr ähnlich. Es wird nicht nur eine gewisse Barriere vorausgesetzt, die es zu überwinden gilt, um ein Problem zu lösen, sondern es werden auch sonst keinerlei Einschränkungen gemacht. Alle Aufgaben, die für die Person, die sie lösen möchte, subjektiv mit gewisser Schwierigkeit verbunden sind, werden im Sinne dieser Definition als Problemlöseaufgaben bezeichnet. Damit erhält man jedoch eine Verwendung von *Problemlösen*, die in dieser Arbeit nicht zweckmäßig ist, weil sie zu viele Arten von Aufgaben enthält. Beispielsweise sollte das Lösen einer linearen Gleichung in einer Variablen für Schülerinnen und Schüler der achten Schulstufe nicht mehr als Problemlöseaufgabe im Sinne dieser Arbeit definiert sein. Es ist zwar eine gewisse Barriere zu überwinden, diese beschränkt sich jedoch im Normalfall auf das Anwenden bestimmter Schemata und Methoden, die bei Schülerinnen und Schülern diesen Alters bereits so gut eingeübt sein sollten, dass keine zusätzliche Denkleistung mehr notwendig ist. Das Lösen der genannten Aufgabe kann also nach der Definition von Hussy durchaus als *Problemlösen* angesehen werden, soll es aber in dieser Arbeit nicht sein.

1.3 Fachdidaktischer Ansatz

In der fachdidaktischen Literatur findet man Definitionen von Problemlösen folgender Art (Reiss und Hammer, 2012, S. 56):

> *„Unter einem Problem versteht man in der Mathematik eine Aufgabe, die es zu lösen gilt, bei der eine Lösung allerdings nicht offensichtlich ist. Problemlösen bedeutet also insbesondere die intensive Beschäftigung mit einer Aufgabe, ohne dass von Anfang an klar ist, welche Mechanismen, Algorithmen, Inhalte oder Sätze zum Erfolg führen.“*

Diese Definition ist schon weitaus passender für diese Arbeit, da sie kategorisch jene Arten von Aufgaben ausschließt, bei denen für die betroffene Person von vornherein der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Insbesondere fällt auf, dass es nicht hauptsächlich an der Aufgabe selbst liegt, ob sie ein *Problem* ist, sondern dass dies maßgeblich von der lösenden Person abhängt. Was für die eine so wenig neu ist, dass sie es sofort mit einem ihr wohl bekannten Mechanismus lösen kann, kann für die andere völlig unbekannt sein, sodass sie verschiedenste Techniken und Methoden ausprobieren und anwenden muss, ehe sie Erfolg hat. Ein und dieselbe Aufgabe kann also für manche Menschen Problemlöseaufgabe sein und für andere nicht. (Vgl. Reiss und Hammer, 2012, S. 57)

Bruder und Collet gehen sogar so weit, dass sie ein Problem im Mathematikunterricht ausschließlich durch die persönlich empfundene Schwierigkeit definieren (Bruder und Collet, 2011, S. 11):

> *„Ein Problem im Mathematikunterricht soll eine Anforderungssituation bezeichnen,*

die subjektiv als (kognitiv) schwierig erlebt wird. Diese Anforderungssituation erscheint den Lernenden nicht spontan bewältigbar, sie kann auch einfach nur ungewohnt sein und verlangt eine für das Individuum 'neue' Lösung. Das gilt auch dann, wenn das Problem als solches schon von vielen anderen Personen gelöst wurde."

Damit wird noch einmal die Grundidee formuliert, dass die Person, die eine Problemlöseaufgabe löst, den Lösungsweg erst finden muss. Dieses Finden des Lösungsweges ist also ein wesentlicher Bestandteil des Problemlösens.

1.4 Unterscheidung Routineaufgabe – Problemaufgabe

Die Tatsache, dass eine Aufgabe Problemlöseaufgabe sein kann oder auch nicht, macht es schwierig, in dieser Arbeit selbige Aufgaben zu sammeln und anzugeben, da man so die Entscheidung vorwegnehmen muss, ob Problemlösecharakter für bestimmte Zielgruppen vorliegt oder nicht. Deshalb wird bei den in dieser Arbeit zu findenden Beispielen von Problemlöseaufgaben immer vermerkt, in welcher Schulstufe diese eingesetzt werden können. Es muss allerdings bewusst sein, dass die angegebenen Schulstufen nur Richtwerte sind, und dass es immer Schülerinnen und Schüler geben wird, die sich vielleicht schon näher mit ähnlichen Aufgaben beschäftigt haben, und für die der Lösungsweg von vornherein klar ist, für die also eigentlich keine Problemlöseaufgabe vorliegt.

Ein wenig Hilfe kann eine Unterscheidung in Routineaufgabe und Problemaufgabe bieten:

Routineaufgabe	**Problemaufgabe**
• entschlüsselbar als Aufgabe eines bestimmten Typs	• Eine 'Barriere' verhindert das Entschlüsseln, die Aufgabe ist offen, mehrdeutig
• Abruf einer verfügbaren Lernprozedur möglich	• Suche nach einem Lösungsweg notwendig; man benötigt Einfälle, andere Sichtweisen, neuartige Verbindungen der Wissensbestände
• formales bis rituales Aufarbeiten der gespeicherten Prozedur möglich	• Inhaltliches Denken ist unverzichtbar zur Konstruktion eines Lösungsweges
• Erfolg auch ohne Verständnis möglich	• ohne Verständnis kein Erfolg möglich
• provoziert i. A. nicht zum Weiterdenken, Fortspinnen; wirkt abgeschlossen	• provoziert zum Weiterdenken, Variieren, Ausbauen; wirkt offen

Tabelle 1.1: *Routineaufgabe VS Problemaufgabe*, aus: Haas, 2000, S. 7

In diesem Vergleich sind einige weitere Aspekte ersichtlich, die charakteristisch für Problemlöseaufgaben sein können. Dabei wird davon ausgegangen, dass eine mathematische Aufgabe für eine bestimmte Person entweder Routineaufgabe oder Problemaufgabe ist.

Die Annahme, dass eine Routineaufgabe als Aufgabe eines bestimmten Typs entschlüsselbar sein muss, passt gut zu den bisherigen Definitionen, die dann nicht mehr von einer Problemaufgabe sprechen, wenn der Lösungsweg klar ersichtlich ist. Die gegenübergestellte Erklärung, die von einer Barriere spricht, welche das Entschlüsseln von Problemaufgaben verhindert, bekräftigt dies.

Dass eine Problemlöseaufgabe offen oder mehrdeutig sein muss, entspricht nicht den bisherigen Definitionen von Problemaufgaben. Die Aufgabe *„Welche Zahlen ergeben ihr Fünffaches, wenn man ihr Quadrat um 6 vergrößert?“* (Haas, 2000, S. 7) kann zum Beispiel sicherlich für manche Schülerinnen und Schüler, für die diese Art von Aufgaben neu sind, als Problemaufgabe nach den bisherigen Definitionen angesehen werden. Dennoch ist hier keine Mehrdeutigkeit zu finden, der Lösungsweg ist ganz im Gegenteil eher eindeutig, allerdings für manche Schülerinnen und Schüler eben nicht sofort ersichtlich. Da der neue Aspekt, der sich ergibt, wenn von Problemaufgaben gefordert wird, dass sie mehrdeutig oder offen sind, besser zu den in dieser Arbeit behandelten Aufgaben passt, soll er in etwas abgeänderter Form aufgenommen werden. Problemaufgaben sollen zumindest insoweit mehrdeutig sein, dass entweder mehrere Lösungswege möglich sind oder zumindest möglich erscheinen. Die oben genannte Aufgabe ist aber dennoch Problemaufgabe, da auch der Lösungsweg des (systematischen) Probierens möglich ist.

Dass die Suche nach einem Lösungsweg bei einer Problemaufgabe nötig ist, deckt sich mit den bisherigen Definitionen.
Ein relativ neuer Aspekt ist die Notwendigkeit von inhaltlichem Denken zur Konstruktion eines Lösungsweges. Zumindest bei einem Teil einer Problemlöseaufgabe muss sich die lösende Person inhaltlich mit dem Thema der Aufgabe auseinandersetzen, denn wenn die ganze Aufgabe mit bekannten Prozeduren gelöst werden könnte, so wäre diese nach den bisherigen Definitionen eine Routine- und keine Problemlöseaufgabe.

Ebenfalls bisher noch nicht angesprochen wurde die Anforderung von Haas an eine Problemaufgabe, dass für den Erfolg Verständnis nötig ist. Ähnlich wie schon beim inhaltlichen Denken kann man auch hier davon ausgehen, dass durch das nähere Beschäftigen mit der Aufgabe dieses Verständnis entweder benutzt oder aber neu erworben wird, da die Aufgabe sonst nicht gelöst werden kann.

Zudem sollen Problemaufgaben laut Haas zum Weiterdenken anregen und im Gegensatz zu Routineaufgaben nicht abgeschlossen sondern offen wirken. Dies geht wieder, wie schon die in einem der vorigen Punkte angesprochene Mehrdeutigkeit, in eine Richtung, die nicht ganz den bisherigen Definitionen entspricht. Das oben genannte Beispiel etwa regt kaum bis gar nicht zum Weiterdenken an. Im Sinne dieser Arbeit soll aber auch dieses Kriterium in die Charakterisierung von Problemaufgaben mit einbezogen werden, und zwar in der Form, dass Problemaufgaben im Allgemeinen neben ihrer Lösung noch einen oder mehrere andere Aspekte beinhalten, sei es die Möglichkeit einer Verallgemeinerung, einer Variation, oder einer näheren Beschäftigung mit dem thematischen Umfeld der Fragestellung.

1.5 Eigene Charakterisierung von Problemlöseaufgaben

Zusammenfassend kann nun eine eigene, für diese Arbeit geeignete Charakterisierung von Problemlöseaufgaben beziehungsweise Problemaufgaben vorgenommen werden.

Unter eine Problemaufgabe soll in dieser Arbeit eine *„Aufforderung zum Lernhandeln“* (Bruder und Collet, 2011, S. 12) aus dem Bereich der Mathematik verstanden werden, bei der ein gegebener Zustand in einen gewünschten Zustand übergeführt werden soll (Vgl. Hussy, 1984, S. 114), wobei für die die Aufgabe bearbeitende Person nicht von Anfang an klar ist, auf welchem von mehreren möglich scheinenden Wegen sie zum Ziel gelangen kann (Vgl. Reiss und Hammer, 2012, S. 56). Die Aufgabe soll zudem die Möglichkeit einer Verallgemeinerung, Variation oder näheren Beschäftigung mit dem thematischen Umfeld der Fragestellung zulassen oder anregen. (Vgl. auch Haas, 2000, S. 7)

Diese Charakterisierung beinhaltet, dass mit der Behauptung, eine Aufgabe sei eine Problemlöseaufgabe, immer auch angegeben werden muss, für welche Zielgruppe diese Aufgabe gedacht ist.

Um nun den Anforderungsgrad von Aufgaben näher zu beschreiben, können die vier von Bruder und Collet vorgestellten Parameter verwendet werden (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 13f): *Formalisierungsgrad F Komplexitätsgrad K*, *Bekanntheitsgrad B* und *Ausführungsgrad A*.

Der *Formalisierungsgrad F* beschreibt, ob die Aufgabe in eine mathematisch bearbeitbare Form umgewandelt werden muss und wie schwierig dies gegebenenfalls ist. Hier geht auch ein, ob Kenntnisse aus anderen Unterrichtsfächern oder Themengebieten benötigt werden.

Mit dem *Komplexitätsgrad K* wird beschrieben, wie kompliziert das Lösen der Aufgabe ist. Je nach gewähltem Lösungsweg kann dieser Parameter variieren. Welche Strategien können eingesetzt und auf welche bekannten Grundaufgaben kann die vorliegende Aufgabe zurückgeführt werden?

Der *Bekanntheitsgrad B* gibt an, ob die bearbeitende Person schon Aufgaben ähnlicher Art bearbeitet hat und inwieweit sie sich an die dabei angewandten Lösungswege und Strategien erinnern kann.

Mit dem *Ausführungsgrad A* schließlich wird angegeben, wie hoch der Aufwand bei der Ausführung des Lösungsweges ist. Damit werden auch die Fehleranfälligkeit beim Lösen und die eventuell vorhandenen Schwierigkeiten bei der Interpretation der mathematischen Ergebnisse klassifiziert.

An einem Beispiel sollen nun die eigene Charakterisierung von Problemlöseaufgaben und die vier Parameter von Bruder und Collet demonstriert werden.

Aufgabe 1 (Schlußverkauf) *(aus Loyd, 2003, S. 28)*
Smith berichtet von einem Geschäft, bei dem er in genau 30 Minuten die Hälfte seines Geldes ausgegeben hat, so daß er danach die gleiche Anzahl Cents besaß wie vorher Dollar und halb so viele Dollars wie vorher Cents. Wieviel Geld hatte er also ausgegeben?

Die Aufgabe ist für Schülerinnen und Schüler der 7. bis 8. Schulstufe gedacht. Zunächst einmal ist zu untersuchen, ob die Aufgabe eine Problemlöseaufgabe ist. Dies ist zweifelsfrei der Fall, mehrere Lösungswege (Probieren, Aufstellen einer Gleichung) sind möglich, für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I ist der Lösungsweg im Allgemeinen nicht von Anfang an klar. Auch eine Verallgemeinerung (Gibt es ähnliche Phänomene, bei denen der Betrag an Dollars vorher und Cents nachher beziehungsweise der von Cents vorher und von Dollars nachher in besonderem Zusammenhang steht?) ist möglich.

Der Formalisierungsgrad der Aufgabe beim Lösungsweg *Aufstellen einer Gleichung* ist mittelmäßig hoch, da doch mehrere Aspekte beim Aufstellen der Gleichung beachtet werden müssen. Der Komplexitätsgrad ist relativ gering, da nach dem Umwandeln in eine mathematisch bearbeitbare Form das Problem auf eine bekannte Grundaufgabe, nämlich das Lösen linearer Gleichungen, zurückgeführt werden kann. Der Bekanntheitsgrad ist je nach Klasse und Schülerin beziehungsweise Schüler sicherlich stark verschieden, es ist aber anzunehmen, dass Aufgaben von dieser Art doch recht unbekannt sind. Und der Ausführungsgrad schließlich ist recht gering, das Ausführen der eingeübten Methoden zum Lösen einer Gleichung sollte in besagten Schulstufen kaum fehleranfällig sein.

Kapitel 2

Gründe für den Einsatz von Problemlöseaufgaben im Unterricht

In diesem Kapitel werden die Gründe dafür erarbeitet, dass Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht behandelt werden sollen. Welche Vorteile bringt der Erwerb von Problemlösefähigkeiten mit sich? Was ist dadurch für den Mathematikunterricht, was für den Unterricht in anderen Unterrichtsfächern zu erhoffen? Wie können Problemlösekompetenzen im Alltag von Vorteil sein? Zudem wird auf die Verankerung von Problemlösen im Lehrplan und in den Bildungsstandards eingegangen.

2.1 Motivation und Erfolgserlebnisse

> *„Problemlösen macht Spaß und ist kreativ“* (Grieser, 2013, S. 2)

Ein wichtiges Ziel von Problemlöseaufgaben innerhalb des Mathematikunterrichts ist sicherlich das gute Gefühl, das sich einstellt, wenn man ein Problem, sei es eines aus dem außermathematischen Alltag oder ein mathematisches Rätsel, gelöst hat. Dieses positive Erlebnis motiviert und ermutigt, sich weiteren Problemen ähnlicher Art zu stellen. Dadurch kann Problemlösen Freude bereiten, die Lernmotivation und das Selbstwertgefühl werden positiv beeinflusst. (Vgl. Bruder, 2003, S. 34f)

Positive Lernmotivation ist, so auch Gerhard Roth im Buch „Was ist ’guter’ Unterricht?“, einer von fünf wesentlichen Faktoren, die beim Lehren und Lernen eine tragende Rolle spielen (Roth, 2010, S. 237f):

> *„Lehren und Lernen werden von einer ganzen Reihe sehr unterschiedlicher Faktoren bestimmt. Hierzu gehören vor allem:*
>
> 1. *die Motiviertheit und Glaubhaftigkeit des Lehrenden;*
> 2. *die individuellen kognitiven und emotionalen Lernvoraussetzungen der Schüler;*
> 3. *die allgemeine Motiviertheit und Lernbereitschaft der Schüler;*
> 4. *die spezielle Motiviertheit der Schüler für einen bestimmten Stoff, Vorwissen und*

der aktuelle emotionale Zustand sowie

5. *der spezifische Lehr- und Lernkontext"*

Durch den Einsatz von Problemlöseaufgaben können unter Umständen gleich mehrere dieser Faktoren in positivem Sinne beeinflusst werden.

Wenn man davon ausgeht, dass die Lehrkraft sich selbst gerne mit Problemlöseaufgaben beschäftigt, ist sie sicherlich motiviert und glaubhaft. Und auch wenn die persönliche Freude der Lehrkraft sich in Grenzen hält, so reicht meiner Meinung nach doch die Überzeugung aus, dass Problemlösen eine wichtige Fähigkeit ist, die die Schülerinnen und Schüler lernen sollten, um motiviert und glaubhaft zu unterrichten.

In Bezug auf die *„individuellen kognitiven und emotionalen Lernvoraussetzungen"* der Schülerinnen und Schüler ist es sehr schwierig, wenn nicht unmöglich, auf den Lernstil und die persönlichen Vorlieben aller Lernenden einzugehen. Aber gerade deshalb ist es sinnvoll, durch das gelegentliche Beschäftigen mit Problemlöseaufgaben eine Abwechslung zum sonst „üblichen" Mathematikunterricht zu bieten. (Vgl. auch Roth, 2010, S. 239)

Die „allgemeine Motiviertheit und Lernbereitschaft" der Schülerinnen und Schüler kann durch die im Idealfall häufigen Erfolgserlebnisse durch das Lösen von Problemaufgaben sicherlich ebenfalls gesteigert werden. Im Gehirn werden lernfördernde Stoffe wie Acetylcholin, Noradrenalin und Dopamin ausgeschüttet, wenn das bevorstehende Verhalten Belohnung verspricht. Dadurch erscheint die Lernsituation attraktiv und die Aufmerksamkeit wird erhöht. Besonders wichtig ist es in Zusammenhang mit diesem Aspekt, eine bestimmte Herausforderung durch die Aufgaben zu schaffen, ohne dabei starken Stress oder gar Versagensangst herbeizuführen. Oder, wie Roth es formuliert, *„leichter, anregender Stress"* ist *„generell lernfördernd"* (Roth, 2010, S. 240). Die Strategie, durch sehr einfache Aufgaben viele lernförderliche Erfolgserlebnisse herbeizuführen geht dabei im Allgemeinen nicht auf, denn das Gehirn stellt auch über ein spezielles System fest, ob eine Belohnung verdient oder unverdient ist. Bei zu kleiner Herausforderung kommt es also nicht zu einem gleichwertigen Erfolgserlebnis wie bei subjektiv als anspruchsvoll empfundenen Aufgaben. (Vgl. Roth, 2010, S. 240f)

2.2 Problemlösen als Grunderfahrung im Mathematikunterricht

Schon in dem im Jahr 1980 erschienenen Buch *„Problem Solving in School Mathematics"* bezeichnet Nicolas A. Branca Problemlösen als Ziel, Prozess und Grundfertigkeit. (Branca, 1980, S. 3–5) Besonders weist er darauf hin, dass Problemlösen, wenn es als Ziel angesehen wird, unabhängig von bestimmten Problemstellungen und auch unabhängig vom mathematischen Zusammenhang ist (Branca, 1980, S. 3):

> *„When problem solving is considered a goal, it is independent of specific problems, of procedures or methods, and of mathematical content. The important considerati-*

> *on here ist that learning how to solve problems is the primary reason for studying mathematics.“*

Er bezeichnet Problemlösen also nicht nur als ein Ziel des Mathematikunterrichts, sondern als den eigentlichen Grund für die Beschäftigung mit Mathematik schlechthin. Wenngleich diese Formulierung vielleicht etwas übertrieben ist, so wird doch deutlich, dass Problemlösenlernen ein wichtiger Aspekt des Mathematikunterrichts sein sollte.

Heinrich Winter spricht in seinem vielzitierten Artikel *„Mathematikunterricht und Allgemeinbildung“* von drei Grunderfahrungen, die miteinander vielfältig verknüpft sind und die der Mathematikunterricht zu ermöglichen anstreben sollte (Winter, 2003, S. 6f):

> *„Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:*
>
> (1) *Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*
>
> *(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,*
>
> *(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten), die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben.“*

Mit diesen drei Grunderfahrungen drückt Winter aus, inwieweit die Mathematik allgemeinbildenden Charakter hat. Er nennt drei wesentliche Bereiche. Einerseits können mit der Mathematik Erscheinungen aus dem Alltag in einer bestimmten Art wahrgenommen und verstanden werden, die Mathematik ist also in dieser Hinsicht alltagstauglich und deshalb ein Beitrag zur Allgemeinbildung. Außerdem sind die Struktur und der Aufbau der Mathematik, die eine in sich geordnete Welt darstellen und beschreiben, an sich schon Allgemeinbildung im Sinne von Winter.

Die dritte Grunderfahrung ist die wichtigste für diese Arbeit, da sie direkt anspricht, dass Mathematik deshalb zur Allgemeinbildung gehört, weil sie es ermöglicht, Problemlösefähigkeiten zu erwerben. Daraus wird schon die zentrale Bedeutung, die Winter Problemlösen und Problemaufgaben einräumt, ersichtlich. In späterer Folge weist Winter ausdrücklich darauf hin, dass die durch mathematische Aufgaben erworbenen Problemlösefähigkeiten nur auf die außermathematischen Bereiche des Alltags angewandt werden können, „falls *dabei die Reflexion auf die eigenen Tätigkeiten wesentlich und beständig mit einbezogen“* wird (Winter, 2003, S. 10).

Laut Winter sind es vor allem die vertiefenden Überlegungen während des Lösens und nach der Auflösung oder auch nach einem Misserfolg, mit denen der Gebrauch des Verstandes trainiert werden kann. Es kann überlegt werden, warum die Aufgabe schwierig ist, was die wesentliche Hürde beim Lösen der Aufgabe ist, welche Hilfsmittel (Probieren, Zeichnung, andere Bezeichnungsweise, ...) zielführend eingesetzt werden können, ob und wenn ja auf welche Weise die Lösung kontrolliert werden kann, ob die Lösung überraschend ist, welche ähnlichen Aufgaben nun überlegt beziehungsweise gelöst werden können oder was nun besser gekonnt wird als zuvor. (Vgl. Winter, 2003, S. 10f) All diese Überlegungen sind besonders bei Problemlöseaufgaben wichtig und sinnvoll.

Ein weiterer Aspekt, warum Winter die Mathematik und insbesondere das Problemlösen zur Allgemeinbildung zählt, ist die Tatsache, dass mathematische Aussagen eindeutig beweis- oder widerlegbar sind. Im Mathematikunterricht kann also gelernt werden, was ein stichhaltiger Schluss ist und was nicht, ohne dass Logik als eigenes Fach unterrichtet werden müsste. Dies geschieht, so Winter, vor allem bei der Reflexion und Hinterfragung von Problemaufgaben. (Vgl. Winter, 2003, S. 11) Ein weiterer Grund also, dass Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht eingesetzt werden.

Zudem macht mathematisches Problemlösen in bestimmten Situationen auf mathematische Theorien neugierig. Denn bei bestimmten Aufgaben liegt es geradezu auf der Hand, danach zu fragen, ob es für bestimmte Phänomene allgemeine Gesetzmäßigkeiten oder Theorien gibt, und was der Grund für bestimmte außergewöhnlich wirkende Resultate ist. Denn Theorien geben auf viele Fragen Antworten. Wenn man eine Theorie aber nicht lernt, um Antworten zu geben, sondern um eine ganz konkrete Frage zu beantworten, mit der man sich auseinandergesetzt hat, so wird es sicherlich leichter fallen, mit dieser Theorie auch andere interessante Fragen zu beantworten. (Vgl. Grieser, 2013, S. 2)

Ein Beispiel soll zeigen, wie eine Aufgabe neugierig auf zugrundeliegende Theorien machen kann:

Aufgabe 2 (Ein Problem mit Nullen) *(aus Grieser, 2013, S. 12)*
Mit wie vielen Nullen endet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$*?*

Um diese Aufgabe zu lösen, ist es wesentlich, festzustellen, dass die Anzahl der Nullen am Ende eines Produkts aus natürlichen Zahlen ausschließlich von der Anzahl der Faktoren 2 und 5 abhängt. Dies kann zum Beispiel am einfacheren Fall $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ herausgefunden werden. Denn miteinander bilden je ein Faktor 2 und 5 einen Faktor 10, der wiederum dafür sorgt, dass im Produkt eine Null am Ende zu finden ist. Die gefragte Zahl beinhaltet 24 mal den Faktor 5, nämlich in den 20 Zahlen $5, 10, 15, \dots 100$, und davon in den 4 Zahlen $25, 50, 75$ und 100 doppelt. Der Faktor 2 ist deutlich öfter enthalten, allein schon jeweils mindestens einmal in den 50 geraden Faktoren des Produkts. Die Anzahl der Nullen am Ende des Produkts $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$ ist also 24. (Vgl. Grieser, 2013, S. 15)

Die Lösung beinhaltet aber weit mehr, als nur die Anzahl der Nullen am Ende des gefragten Produkts. Anhand der Aufgabe wurde hier eine Theorie entdeckt, die nicht nur die in der Aufgabe gestellte Frage beantworten kann, sondern ganz allgemein eine Aussage über die Anzahl der Nullen am Ende eines Produkts natürlicher Zahlen tätigt. Wenn man nun diese Theorie selbst anhand einer Aufgabe wie dieser erarbeitet, so wird man ähnliche Probleme in Zukunft sicher wieder mit dieser Theorie lösen.

2.3 Problemlösen als Hilfsmittel in anderen Bereichen

> *„Alles Leben ist Problemlösen“*

ist der Titel eines Buches von Karl R. Popper (Popper, 2002). Er beschreibt darin unter anderem, dass eigentlich sowohl die Natur- als auch die Sozialwissenschaften immer von einem Problem ausgehen, das sie lösen wollen. Und er sieht zum Lösen dieser Probleme eigentlich nur eine grundlegende Methode, nämlich die von Versuch und Irrtum (Popper, 2002, S. 15):

> *„Die Naturwissenschaften sowie die Sozialwissenschaften gehen immer von* Problemen *aus; davon, daß etwas unsere* Verwunderung *erregt, wie die griechischen Philosophen sagten. Zur Lösung der Probleme verwenden die Wissenschaften grundsätzlich dieselbe Methode, die der gesunde Menschenverstand verwendet: die Methode von* Versuch und Irrtum.*“*

Und eigentlich ist ja auch mathematisches Problemlösen nichts anderes als eine Folge von versuchten Lösungswegen, sei es jetzt im Geiste oder auf dem Papier, die ausprobiert und, sofern sie nicht zum Ziel führen, wieder verworfen werden. Nicht nur im Mathematikunterricht ist also die Fähigkeit, Probleme zu lösen, von Bedeutung. Auch in den Wissenschaften werden ständig Probleme gelöst und so Fortschritt erreicht. Und dabei können Problemlösefähigkeiten, die im Mathematikunterricht erlernt werden, wichtige Hilfestellungen bieten.

Einerseits lernt man durch Problemlösen im Mathematikunterricht, dass es sich lohnen kann, sich auch mit einem zu Beginn unüberwindbar scheinendem Problem zu befassen. Denn oft sind die Dinge gar nicht so kompliziert, wie sie scheinen, und auch das eigene Können wird meist unterschätzt. Wenn man aber erst einige Probleme, beispielsweise im Mathematikunterricht, bewältigt hat, so geht man vielleicht schon mit mehr Selbstvertrauen an das nächste Problem, auch wenn dieses nicht notwendigerweise ein mathematisches ist. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 35)

Einige Problemstellungen aus anderen Themengebieten, besonders aus den Naturwissenschaften, haben einen starken mathematischen Anteil. Mit mathematischen Heurismen und Strategien, die man sich beim Problemlösenlernen aneignen kann, sind auch diese Aufgaben einfacher zu lösen. Oft ist auch der Charakter der Probleme ähnlich dem mathematischer Probleme, auch wenn nur wenig mathematischer Inhalt enthalten ist. Auch hier lassen sich Erfahrungen vom mathematischen Problemlösen gewinnbringend anwenden.

Die Wissenschaft lässt sich zudem in das von Popper vorgestellte Schema einordnen, in dem er Problemlösen in drei Stufen einteilt, nämlich in das Problem, die Lösungsversuche und die Elimination (Popper, 2002, S. 21):

> *„Mein dreistufiges Schema ist also in folgender Weise auf die Wissenschaftslogik oder Methodologie anwendbar:*
>
> 1. *Die Ausgangssituation ist immer ein* Problem *oder eine Problemsituation.*

2. *Dann folgen* Lösungsversuche. *Diese bestehen immer aus Theorien, und diese Theorien sind, da sie* Versuche *sind, sehr häufig irrig: Sie sind und bleiben immer Hypothesen oder Vermutungen.*

3. *Auch in der Wissenschaft lernen wir durch die* Elimination *unserer Irrtümer, durch die* Elimination *unserer falschen Theorien.“*

Auch in der Wissenschaft wird also eigentlich nichts anderes gemacht als beim mathematischen Problemlösen, daher ist es jedenfalls nützlich, Fähigkeiten dafür zu entwickeln.

Einige grundlegende Arbeitshaltungen können ebenfalls beim Problemlösenlernen vermittelt werden. So ist es zum Beispiel wesentlich, sich Notizen während des Bearbeitens einer mathematischen Aufgabe zu machen oder Skizzen anzufertigen. Diese Haltungen sind auch beim Bearbeiten anderer Problemstellungen eine wichtige Hilfe. Auch die in späterer Folge näher erläuterte Vorgehensweise von Polya beim Lösen von Problemen kann in vielen Problemsituationen hilfreich sein. Polya nennt vier Phasen: das *„Verstehen der Aufgabe“*, das *„Ausdenken eines Plans“*, das *„Ausführen des Plans“* und den *„Rückblick“* (Polya, 1995, Klappentext). Egal welches Problem man gerade zu lösen versucht, es kann in jedem Fall hilfreich sein, strukturiert vorzugehen und diese vier Phasen einzuhalten.

2.4 Problemlösen in Lehrplänen und Bildungsstandards

Schon im Lehrplan der AHS-Unterstufe wird Problemlösen an mehreren Stellen erwähnt. So wird etwa schon zu Beginn im Abschnitt *„Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule“* ähnlich den Winter'schen Grunderfahrungen klargestellt, dass der Mathematikunterricht den Erwerb von über die Mathematik hinausgehenden Problemlösefähigkeiten ermöglichen soll (BMBF, 2000, S. 1f):

> *„Der Mathematikunterricht soll folgende miteinander vielfältig verknüpfte Grunderfahrungen ermöglichen:*
>
> - *Erscheinungen der Welt um uns in fachbezogener Art wahrzunehmen und zu verstehen;*
> - *Problemlösefähigkeiten zu erwerben, die über die Mathematik hinausgehen.“*

Die erste und dritte Winter'sche Grunderfahrung sind also sinngemäß auch im Lehrplan zu finden, und damit auch das Problemlösen. Es ist also nicht nur aus den oben genannten Gründen wichtig und vorteilhaft, sich im Mathematikunterricht mit Problemlösen und damit mit Problemlöseaufgaben zu beschäftigen, es ist auch vom Gesetzgeber so vorgesehen und vorgeschrieben.

Der Unterstufenlehrplan liefert auch noch einen weiteren Vorteil des Problemlösens. Im Abschnitt *„Beiträge zu den Bildungsbereichen“* wird ausgedrückt, dass die Mathematik zum Bildungsbereich *„Mensch und Gesellschaft“* unter anderem dadurch beiträgt, dass sie den Schülerinnen und Schülern beibringt, Probleme und Situationen durch rationales Denken zu untersuchen. Auch im Bildungsbereich *„Kreativität und Gestaltung“* wird erwähnt, dass verschiedene Lösungswege zu mathematischen Fragestellungen entwickelt und heuristische Strategien genutzt werden sollen (BMBF, 2000, S. 2):

> „Mensch und Gesellschaft:
> *Untersuchen von Situationen und Problemen mit Hilfe rationalen Denkens; [...]*
> Kreativität und Gestaltung:
> *Entwickeln verschiedener Lösungswege zu mathematischen Fragestellungen;*
> *Nutzen heuristischer Strategien.*"

Auch im Lehrplan der AHS-Oberstufe ist schon in der *„Bildungs- und Lehraufgabe"* Problemlösen zu finden (BMBF, 2004, S. 1):

> *„[...] und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts."*

Hier muss allerdings angemerkt werden, dass nicht klar definiert ist, ob mit dem *„Lösen von Problemen"* tatsächlich Problemlösen im Sinne der oben genannten Definitionen gemeint ist. Später, im Abschnitt *„Beiträge zu den Bildungsbereichen"*, ist jedoch unmissverständlich zu finden, dass auch an neuen Aufgaben experimentiert werden soll (BMBF, 2004, S. 2):

> *„Kreativität und Gestaltung:*
> *Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren an neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden"*

In den Kompetenzbereichen der österreichischen Bildungsstandards, die wiedergeben, welche Kompetenzen die Schülerinnen und Schüler nach Abschluss der 4. beziehungsweise 8. Schulstufe erworben haben sollen, herrscht eine gewisse Uneindeutigkeit. In den Kompetenzbereichen für die 4. Schulstufe gibt es im Bereich *„Allgemeine mathematische Kompetenzen (AK)"* einen eigenen Kompetenzbereich *„Problemlösen (AK 4)"* mit folgenden Teilbereichen (BIFIE, 2011, S. 1):

> ***„4.1 Mathematisch relevante Fragen stellen***
> *Kompetenz:*
> *Die Schülerinnen und Schüler können*
>
> - *ein innermathematisches Problem erkennen und dazu relevante Fragen stellen.*
>
> ***4.2 Lösungsstrategien (er)finden und nutzen***
> *Kompetenzen:*
> *Die Schülerinnen und Schüler können*
>
> - *geeignete Lösungsaktivitäten wie Vermuten, Probieren, Anlegen von Tabellen oder Erstellen von Skizzen anwenden,*
> - *zielführende Denkstrategien wie systematisches Probieren oder Nutzen von Analogien einsetzen."*

Hier wird separat sowohl auf das Stellen mathematisch relevanter Fragen als auch auf das Finden und Erfinden von Denkstrategien und Lösungsaktivitäten eingegangen. In jedem Fall ist damit Problemlösen ein wesentlicher Bestandteil in den Bildungsstandards und damit auch im Unterricht in den ersten vier Schulstufen.

Im Gegensatz dazu findet man in den Bildungsstandards für die 8. Schulstufe keine explizite Erwähnung von Problemlösen mehr. Die vier Handlungsbereiche, die mit den allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards für die 4. Schulstufe vergleichbar sind, sind hier *„Darstellen, Modellbilden* (H1)“, *„Rechnen, Operieren* (H2)“, *„Interpretieren* (H3)“ und *„Argumentieren, Begründen* (H4)“. Eine Problemlöseaufgabe wäre zur Überprüfung der Bildungsstandards für die 8. Schulstufe nicht geeignet, weil das Modell vorsieht, dass jede Kompetenz nur aus einem Handlungsbereich, einem Inhaltsbereich und einem Komplexitätsbereich besteht. Problemlösen beinhaltet aber meist alle vier Handlungsbereiche, wenn auch in unterschiedlicher Intensität. Um die Lösung zu finden muss dargestellt und ein Modell gebildet werden (H1), zum Ausführen des Lösungsweges ist Rechnen beziehungsweise Operieren nötig (H2), und ohne Interpretation (H3) macht das Lösen einer Problemaufgabe keinen Sinn. Argumentieren und Begründen (H4) kann ebenfalls erforderlich oder hilfreich sein, um den Lösungsweg zu reflektieren und das angewandte Lösungsverfahren zu festigen. Jedenfalls ist Problemlösen nicht mit nur einem dieser Handlungsbereiche möglich. (Vgl. BIFIE, 2013, S. 1–4)

Ich finde es schade, dass so ein wesentlicher Bestandteil der Mathematik nicht auch als Bildungsstandard für die 8. Schulstufe festgelegt ist. Denn meiner Meinung nach kann und muss in den ersten vier Schulstufen natürlich der Grundstein für Problemlösekompetenzen gelegt werden, aber ohne eine Fortführung können diese nicht ausreichend weiterentwickelt werden. Vielleicht liegt das aber auch einfach daran, dass Problemlösekompetenzen ab einem bestimmten Niveau nicht mehr gut abgefragt werden können. Umso besser ist es, dass ohnehin im Lehrplan festgelegt ist, dass Problemlösen ein fester Bestandteil des Mathematikunterrichts sein soll.

Kapitel 3

Problemlösen Lernen

Wie aber kann nun Problemlösen im Mathematikunterricht gelehrt werden? Was sind die wichtigsten Aspekte, die vermittelt werden sollten? Welche Heurismen können im Unterricht erlernt werden? Mit diesen Fragen befasst sich das vorliegende Kapitel und gibt dabei auch Beispiele für Aufgaben, mit denen die entsprechenden Grundlagen und Strategien geübt werden können.

3.1 Wichtige Punkte beim Lösen eines Problems

Wenn man eine Problemaufgabe lösen möchte, steht man oft vor der Schwierigkeit, dass man nicht weiß, wie man anfangen soll. Gerade für Schülerinnen und Schüler, die sich noch wenig mit solchen Aufgaben auseinandergesetzt haben, stellt dies oft ein scheinbar unüberwindbares Hindernis dar. Dabei gibt es einige ganz allgemeine Strategien, wie Problemlösen strukturiert werden kann.

Kein anderer hat mathematisches Problemlösen so geprägt wie George Polya. Sein Buch *„Schule des Denkens“* ist sicherlich ein Meilenstein in dieser Thematik. Darin gibt er vier Phasen an, in denen das Lösen eines Problems erfolgt (Vgl. Polya, 1995, Klappentext und S. 18-29):

> **Erste Phase:** Verstehen der Aufgabe
> Der Lernende soll die Aufgabe von verschiedenen Standpunkten aus betrachten, bis er sie wirklich versteht. Eine Figur oder das Einführen passender Bezeichnungen können ebenfalls helfen.
> **Zweite Phase:** Ausdenken eines Plans
> Ziel dieser Phase ist es, zumindest in Umrissen zu wissen, welche Schritte nötig sind, um die Aufgabe zu lösen. Das Erinnern an ähnliche, schon gelöste Aufgaben kann hier ebenso hilfreich sein wie das Umformulieren der Aufgabe oder das Betrachten von Teilaufgaben.
> **Dritte Phase:** Ausführen des Plans
> Nach dem in der zweiten Phase entworfenen Plan muss der Lernende nun die einzelnen Schritte durchführen, die schließlich zum gewünschten Ergebnis führen. Hier gibt es noch einmal die Gelegenheit, während der Ausführung des Planes zu überprüfen, ob dieser keine möglichen Fälle außer Acht lässt. Jeder einzelne Schritt muss auf seine Richtigkeit überprüft werden.

> **Vierte Phase:** Rückschau
> Mit dem Lösen einer Aufgabe allein ist es noch nicht getan. Durch nochmaliges Überprüfen von Lösungsweg und Resultat können Wissen gefestigt und die Fähigkeit, ähnliche Aufgaben zu lösen, weiterentwickelt werden. Zudem kann man in dieser Phase versuchen, einen einfacheren, kürzeren Lösungsweg zu finden.

In dieser Zusammenfassung finden sich viele wichtige Anregungen, die dabei helfen können, Problemaufgaben zu lösen. Zunächst ist es ein wichtiger Schritt, die Aufgabe voll und ganz zu verstehen. In seinem Buch *„Mathematics as Problem Solving“* nennt Alexander Soifer gleich zu Beginn eine wichtige Lektion für die Leserinnen und Leser: Bevor man ein Problem nicht gelesen hat, sollte man nicht beginnen, es zu lösen. (Vgl. Soifer, 2009, S. 1) Er bringt dazu auch ein Beispiel:

Aufgabe 3 (Streetcar Story I) *(aus Soifer, 2009, S. 1)*
You enter a streetcar with six other passengers on the first stop of its route. On the second stop, four people come in and two get off. On the third stop, seven people come in and five get off. On the fourth stop, eight people come in and three get off. On the fifth stop, thirteen people come in and eight get off.
How old is the driver?

Anschließend merkt er an (Soifer, 2009, S. 1):

> *„Did you start counting passengers in the streetcar? If you did, here is your first lesson:* Do not start solving a problem before you read it!“

Auch das Sammeln aller Informationen kann schon viel zur Lösung des Problems beitragen. Dabei sind die Informationen nicht immer in der verständlichsten und einfachsten Form gegeben, sondern müssen manchmal erst aus dem Text herausgelesen oder aus dem Zusammenhang geschlossen werden. Auch dieser Sachverhalt soll an einem Beispiel erörtert werden:

Aufgabe 4 (Das Töchterproblem) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 74)*
Ein Student sucht dringend eine neue Wohnung. Dafür geht er die Wohnungsanzeigen in der Zeitung durch, bis er auf ein günstiges Angebot stößt. Nachdem alle Formalitäten bei der Besichtigung der Wohnung geklärt sind, fragt er die Vermieterin: „Eines würde mich aber noch interessieren: Wer wohnt denn noch alles in diesem Haus?“ Sie antwortet: „Mein Mann und meine drei Töchter.“ Er freut sich: „Oh, drei Töchter? Schön! Wie alt sind die denn?“ Sie:„Das Produkt ihrer Alter ist 36. Ihre Alterssumme ergibt die Hausnummer.“ Der Student denkt eine Weile nach. Dann aber bohrt er weiter: „Sie müssen mir schon noch eine Information geben!“ Sie: „Na gut, die älteste spielt Klavier.“ Student: „Ah, jetzt weiß ich's!“ Wie alt sind die Töchter?

Im ersten Moment hat mich diese Aufgabe sehr überrascht. Wie kann die Information über das Hobby der ältesten Tochter dazu führen, dass die Aufgabe lösbar wird? Doch bei genauerem Betrachten stellt sich heraus, dass diese Information nur durch den Zusammenhang sinnvoll wird. Überlegt man nämlich, welche Möglichkeiten es gibt, drei Zahlen so zu wählen, dass ihr Produkt 36 ist, so kommt man auf acht mögliche Tripel. Betrachtet man nun auch die Summen der drei

Zahlen, so stellt sich heraus, dass nur bei zwei der Tripel die Summe gleich ist, alle anderen Tripel haben verschiedene Summen:

Drei Zahlen mit Produkt 36	Summe der drei Zahlen
1, 1, 36	38
1, 2, 18	21
1, 3, 12	16
1, 4, 9	14
1, 6, 6	13
2, 2, 9	13
2, 3, 6	11
3, 3, 4	10

Tabelle 3.1: *Tabelle zur Lösung der Aufgabe „Das Töchterproblem"*

Die Tatsache, dass der Student, obwohl er die Summe der Zahlen kannte, nicht wusste, wie alt die einzelnen Töchter waren, lässt darauf schließen, dass diese entweder $1,6$ und 6 oder $2,2$ und 9 Jahre alt waren. Und nun ergibt die Information über das Hobby der ältesten Tochter plötzlich Sinn. Denn der wesentliche Teil dieser Information ist, dass es überhaupt eine älteste Tochter gibt und nicht zwei. Damit bleibt nur die Lösung, dass die Töchter $2,2$ und 9 Jahre alt sind und die Hausnummer 13 sein muss (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 74f)

Nicht immer sind die Informationen, die zum Lösen einer Aufgabe gebraucht werden, so ungewöhnlich formuliert wie hier, aber es kommt doch sehr oft vor, dass bestimmte Formulierungen oder Hinweise im Text zu finden sind, die zum Lösen der Aufgabe benötigt werden. Es ist also wesentlich, die Aufgabe einmal zu verstehen.

Die nächste Phase in Polyas Buch ist diejenige, die am schwierigsten zu erlernen ist. Denn einen für das Problem passenden Plan zu finden ist oft alles andere als einfach. Man kann allerdings sehr wohl einige Strategien und Techniken lernen und einüben, die bei vielen Problemen Anwendung finden. Auf diesen Aspekt möchte ich in einem eigenen Abschnitt weiter unten eingehen.

Außerdem ist es besonders bei der zweiten und der dritten, aber auch bei den anderen beiden Phasen wichtig, sich Notizen zu machen. In ihrem Buch *„Mathematisch Denken"* (Mason u. a., 2008) nennen die Autoren John Mason, Leone Burton und Kaye Stacey drei Dinge, die aufgezeichnet werden sollten (Mason u. a., 2008, S. 12):

> *„In erster Linie sollten Sie sich vornehmen, folgende drei Dinge aufzuzeichnen:*
>
> 1. *Alle wesentlichen Gedanken, die Ihnen bei einem Lösungsversuch eingefallen sind.*
> 2. *Alle Lösungsversuche, die Sie unternommen haben.*
> 3. *Wie Sie eine bestimmte Lösungsstrategie gefühlsmäßig einschätzen."*

Durch das Niederschreiben löst man eine Aufgabe deutlich bewusster, und wenn man an einer Stelle nicht mehr weiter weiß, hilft oft schon das Aufschreiben dabei, wieder weiterzukommen.

Wenn man exakt weiß, welcher Schritt der ist, den man nicht schafft, kann dies schon der erste Schritt in die richtige Richtung sein. Auch wenn man gut beim Lösen einer Aufgabe vorankommt, kann es sehr hilfreich sein, Notizen anzufertigen, um nicht den Faden zu verlieren. Besonders am Beginn von längeren Rechnungen sollte man außerdem niederschreiben, warum man diese macht. Denn es kann sehr ärgerlich sein, zu einem Zwischenergebnis zu gelangen, aber den Grund der Rechnung oder den bisherigen Weg vergessen zu haben. (Vgl. Mason u. a., 2008, S. 11f)

Außerdem geben Mason, Burton und Stacey einige Hinweise, wie man Schwierigkeiten überwinden kann, die sich beim Erarbeiten des Lösungsweges ergeben. Man sollte sich erneut die Fragen stellen, was bekannt ist, was das aktuelle Ziel ist und welche Hilfsmittel eingesetzt werden können. (Vgl. Mason u. a., 2008, S. 53) Konkret kann das bedeuten (Mason u. a., 2008, S. 53):

> *„Mögliche Reaktionen hierauf sind:*
>
> - *Fassen Sie sorgfältig zusammen, was bekannt ist und was gesucht wird.*
> - *Versuchen Sie, die Frage auf eine Ihnen vertraute Situation umzumünzen.*
> - *Nutzen Sie die Erkenntnisse aus Ihren bisherigen Untersuchungen aus.*
> - *Lesen Sie die Fragestellung noch einmal sorgfältig durch, um so möglicherweise andere Gesichtspunkte aufzudecken.“*

Es kann also hilfreich sein, noch einmal zusammenzufassen wo man eigentlich steht, und was man schon erreicht hat. Oft ändert sich durch Zwischenergebnisse die Situation, und wenn man diese gut kennt, ist ein weiteres Vorgehen einfacher. Auch ein Nachfragen, ob das erzielte Zwischenergebnis überhaupt zum Lösen des Problems beiträgt, kann helfen. Und beim erneuten Durchlesen werden oft Dinge klar, die vor den ersten Lösungsversuchen oder vor dem Betrachten der ersten Spezialfälle nicht ersichtlich waren. (Vgl. Mason u. a., 2008, S. 53f)

Die dritte Phase, die Polya nennt, in der der entwickelte Plan ausgeführt wird, sollte eigentlich kaum Schwierigkeiten beinhalten. Auch hier ist ein passendes Dokumentieren wichtig, zudem sollte man darauf achten, wirklich alle Aspekte oder Fälle eines Problems zu berücksichtigen.

Die vierte Phase wiederum ist eine sehr wertvolle, weil durch die Rückschau besonders viel von einer Aufgabe profitiert werden kann. Mason, Burton und Stacey teilen die Rückblickphase in drei Teile (Vgl. Mason u. a., 2008, S. 42f):

1. Test der Lösung
2. Nachdenken über die zentralen Ideen
3. Verallgemeinern der Lösung

Im ersten Teil der Rückblickphase sollen die rein rechnerischen Schritte kontrolliert und die logische Vorgehensweise überprüft werden. Auch Plausibilitätsüberlegungen sind hier angebracht. Wenngleich man all dies schon im Zuge der Lösungsfindung gemacht hat, so ist es doch einfacher, mit ein wenig Distanz und in Ruhe noch einmal alle Schritte zu überprüfen. Was Plausibilitätsüberlegungen angeht, so hängen diese natürlich von der Aufgabe ab. Beispielsweise kann man oft Grenzfälle betrachten und überlegen, ob die gefundene Lösung auch im Grenzfall sinnvoll ist. Im zweiten Teil der Rückblickphase kann man besonders viel lernen. Wenn man überlegt, was nun eigentlich die wichtigsten Ideen sind, und an welchen möglicherweise schwierigen Punkten welche Strategie zum Erfolg geführt hat, so kann man aus all diesen Informationen bei späteren Aufgaben profitieren. Wenn diese Punkte sorgfältig dokumentiert werden, dann kann noch dazu darauf zurückgegriffen werden, wenn die Erinnerung nicht mehr vollständig vorhanden ist. In der dritten Phase kann versucht werden, eine Aufgabe zu erweitern, indem Verallgemeinerungen gesucht werden. Diese können dann später dabei helfen, andere Aufgaben mit ähnlichem Prinzip zu lösen. Oft ergibt sich die Verallgemeinerung auch aus dem Lösungsweg und ist ohnehin Teil der Lösung, muss also nur mehr ausformuliert werden. (Vgl. Mason u. a., 2008, S. 42–44)

Auch Polya nennt noch einige Fragen zu seiner vierten Phase, die Lehrkräfte den Schülerinnen und Schülern stellen könnten beziehungsweise die sich diejenigen, die Problemaufgaben lösen, selbst stellen könnten (Polya, 1995, S. 28f):

> *„Kannst Du das Resultat kontrollieren?*
> *Kannst Du den Beweis kontrollieren?*
> *Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten?*
> *Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?*
> *Kannst Du das Resultat oder die Methode der Lösung für irgendeine andere Aufgabe gebrauchen?“*

Die meisten dieser Fragen betreffen Aspekte, die schon genannt wurden. Das Finden alternativer Beweise, die wenn möglich auch noch kurz und intuitiv sind, ist hier neu. Ein weiterer, vielleicht einfacherer Beweis kann einerseits vollends vom Resultat überzeugen, andererseits lernt man dadurch, verschiedene Methoden zu finden, um eine einzelne Aufgabe zu lösen. Wenn man nun eine ähnliche Aufgabe bearbeitet und die erste Methode funktioniert nicht, so kann man auf eine Alternative zurückgreifen. Zudem betont Polya noch einmal, dass man sich bewusst machen sollte, bei der Lösung welcher anderer Aufgaben die gerade verwendete Methode oder das Resultat hilfreich sein könnten. (Vgl. Polya, 1995, S. 28f)

3.2 Heurismen – Methoden zum Problemlösen

Es gibt Schülerinnen und Schüler, die beim Problemlösen oft innerhalb kurzer Zeit gute Einfälle haben und auch meist nicht genau erklären können, wie sie auf diese Einfälle gekommen sind. Bruder und Collet bezeichnen diese Menschen als *intuitive Problemlöser* und gehen davon aus, dass ein großer Anteil dieser Fähigkeiten von genetischer Veranlagung abhängt. Diese Schülerinnen und Schüler haben eine besonders hohe geistige Beweglichkeit, besonders im mathematischen Bereich. Sie haben von sich aus und ohne viel Übung die richtigen Ideen für Lösungsstrategien. Nun ist es aber auch möglich weniger geistig beweglichen Problemlösenden solche Strategien nahezubringen. Die zugehörige Wissenschaft, die sich allgemein mit Methoden schöpferischen Denkens, spezifisch mit Problemlösemethoden, befasst, heißt *Heuristik*. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 30–35)

Bruder und Collet vertreten in diesem Zusammenhang die folgende, mittlerweile empirisch belegte These (Bruder und Collet, 2011, S. 36):

> *„Wenn es den in Mathematik geistig weniger beweglichen Lernenden gelingt, geeignete Problemlösestrategien (Heurismen) zu erlernen und flexibel anzuwenden, können von ihnen in begrenzten Themenbereichen ähnliche Problemlöseergebnisse erzielt werden, wie von den intuitiven Problemlösern."*

Eine Übersicht über Heurismen findet sich ebenfalls bei Bruder und Collet, die diese in heuristische Strategien, Hilfsmittel, Prinzipien und Regeln unterteilen:

Heurismen
Heuristische Strategien • Systematisches Probieren • Vorwärtsarbeiten • Rückwärtsarbeiten • Analogieschluss • Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes
Heuristische Hilfsmittel • Veranschaulichungen durch informative Figuren • Tabellen • Wissensspeicher und umstrukturierte Wissensspeicher • Lösungsgraphen
Heuristische Prinzipien • Symmetrieprinzip • Extremalprinzip • Invarianzprinzip • Zerlegen und Ergänzen • Prinzip der Fallunterscheidung • Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen • Schubfachprinzip • Rekursionsprinzip • Transformationsprinzip
Heuristische Regeln • Allgemeine Regeln (Vorrangregeln u.a.) • Spezielle Regeln und Regelsysteme für bestimmte Aufgabenklassen (heuristische Programme)

Tabelle 3.2: *Übersicht über relevante heuristische Verfahren und Hilfsmittel in mathematischen Kontexten und Anwendungen*, aus: Bruder und Collet, 2011, S. 27

Einige dieser Heurismen, wie zum Beispiel das Rekursionsprinzip, eignen sich weniger gut für den Einsatz im Regelunterricht. Auch heuristische Regeln brauchen im allgemeinen nicht gesondert im Unterricht behandelt zu werden, denn die allgemeinen Regeln werden ohnehin thematisiert, und spezielle Regeln für bestimmte Aufgabenklassen würden den Rahmen des Mathematikunterrichts sprengen. Viele der anderen Heurismen jedoch sind sehr gut für den Unterricht geeignet und können unter anderem mithilfe der passenden Aufgaben unterrichtet werden. In Abb. 3.1 ist eine Übersicht der Heurismen zu finden, die im Unterricht besprochen werden könnten.

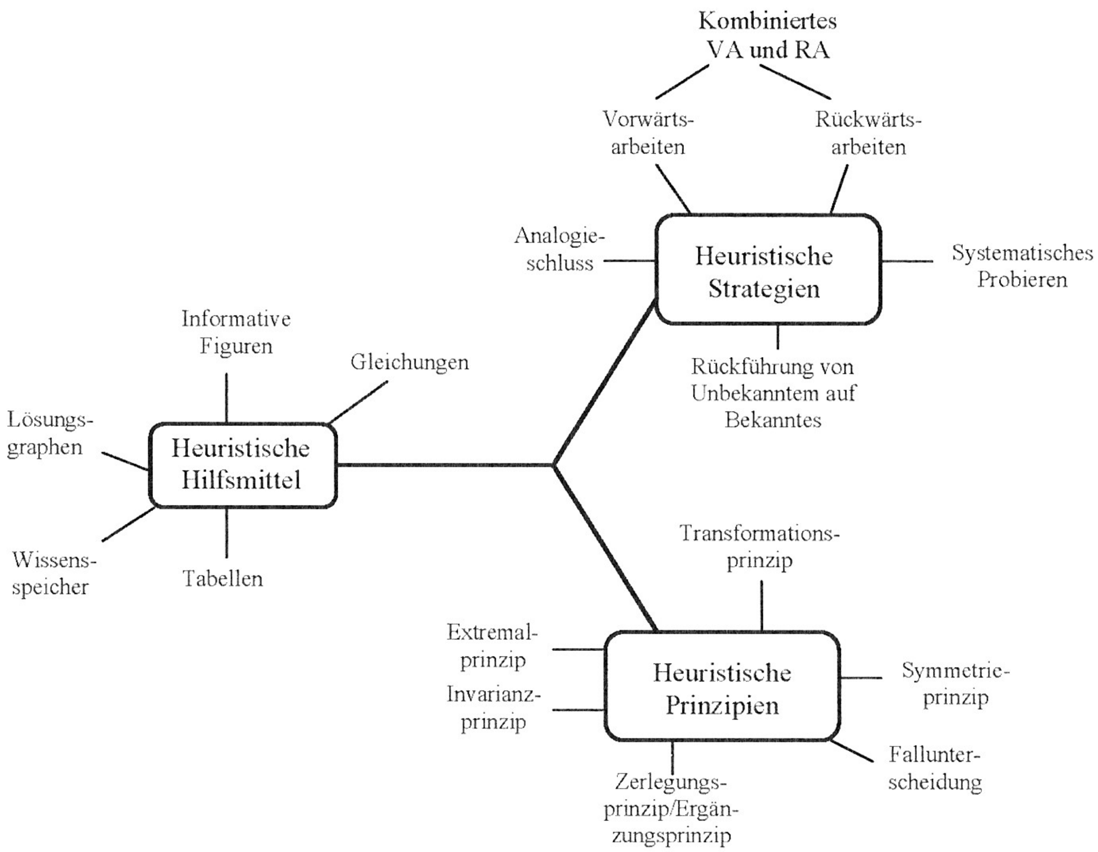


Abbildung 3.1: *Überblick über Heurismen für den Mathematikunterricht*, aus: Bruder und Collet, 2011, S. 45

Bruder und Collet begründen ihre Wahl damit, dass ohnehin nicht sehr viel Zeit im Mathematikunterricht zur Verfügung steht, und daher bei der Wahl auf einige Dinge wie etwa das Rekursions- und das Schubfachprinzip verzichtet werden muss. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 44)

Eines der heuristischen Prinzipien aus der Tabelle 3.2 ist allerdings nicht in Abb. 3.1 zu finden, obwohl es in meinen Augen sehr wichtig ist: das Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen. Deshalb wird es zusätzlich zu den in der Abbildung zu findenden heuristischen Prinzipien ebenfalls behandelt.

3.3 Heuristische Hilfsmittel

Im Vergleich zu den anderen Heurismen sind heuristische Hilfsmittel keine unmittelbaren Lösungsstrategien, sondern eher eine Hilfe dabei, ein Problem zu verstehen, zu visualisieren, zu strukturieren und Informationen zu reduzieren. Zudem kann man mit diesen Hilfsmitteln einen möglichen Lösungsverlauf für möglichst viele Schülerinnen und Schüler verständlich erklären. Die hier betrachteten heuristischen Hilfsmittel sind *informative Figuren*, *Tabellen*, *Wissensspeicher*, *Lösungsgraphen* und *Gleichungen*. Oft ist es für Schülerinnen und Schüler hilfreich, Heurismen mit einer geeigneten Fragestellung zu formulieren. Idealerweise sollten die Lernenden die für sie passende Formulierung dieser Fragestellung selbst finden. Für alle heuristischen Hilfsmittel ist *Wie kann ich die Problemstellung veranschaulichen oder anders darstellen?* eine mögliche Schlüsselfrage. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S.45f)

3.3.1 Informative Figuren

Informative Figuren, oft auch Skizzen genannt, können eine große Hilfe beim Lösen eines Problems sein. Und zwar nicht nur, wenn es sich um ein in irgendeiner Weise geometrisches Problem handelt. Oft wird durch die Veranschaulichung erst klar, dass man durch reines Rechnen möglicherweise einen Aspekt des Problems übersieht. Als Beispiel soll die folgende Aufgabe dienen:

Aufgabe 5 (Die Schnecke im Brunnen)
Eine Schnecke ist in der Früh in einen Brunnen gefallen, der 10 Meter tief ist. Jeden Tag klettert die Schnecke 4 Meter nach oben, rutscht aber in der Nacht wieder 2 Meter hinunter. Wie lange braucht die Schnecke, bis sie aus dem Brunnen geklettert ist?

Wenn man nun überlegt, dass die Schnecke damit nach einem Tag und einer Nacht 2 Meter weit kommt, so könnte man dem Irrtum unterliegen, die Schnecke bräuchte 5 Tage, um den Brunnenrand zu erreichen. Eine Skizze wie zum Beispiel Abb. 3.2 macht aber klar, dass die Schnecke schon am Ende des vierten Tages am Brunnenrand angekommen ist und dadurch in der vierten Nacht natürlich nicht mehr abrutschen kann.

Doch nicht alle Schülerinnen und Schüler können ohne Übung passende Skizzen zu Aufgaben anfertigen. Eine sinnvolle Skizze, die wirklich weiterhelfen kann, ist nicht immer leicht zu finden, aber durch einige Grundgedanken kann hier im Unterricht geholfen werden. Ein Beispiel dafür ist, dass alle Objekte, die

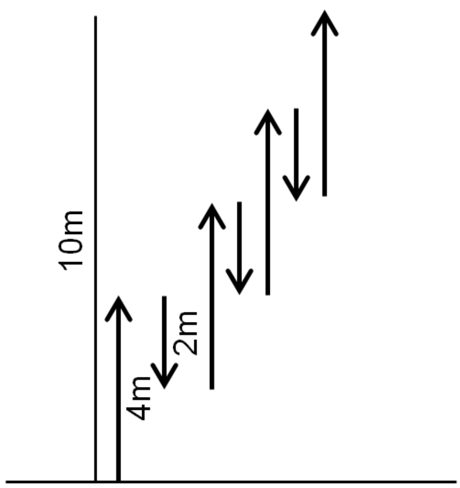


Abbildung 3.2: *Skizze zur Aufgabe „Die Schnecke im Brunnen“*

in einer Aufgabe aufgeteilt werden sollen, als Länge einer Strecke, Rechtecksfläche oder Kreisfläche (Torte beziehungsweise Pizza) dargestellt werden können. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 48) In der folgenden Aufgabe etwa kann diese Art der Skizze helfen:

Aufgabe 6 (Murmelaufgabe) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 50)*
Claudia nimmt die Hälfte der Murmeln aus ihrem Sack und behält sie für sich. Dann gibt sie zwei Drittel der Murmeln, die noch im Sack sind, Peter. Sie hat jetzt sechs Murmeln übrig. Wie viele Murmeln waren am Anfang im Sack?

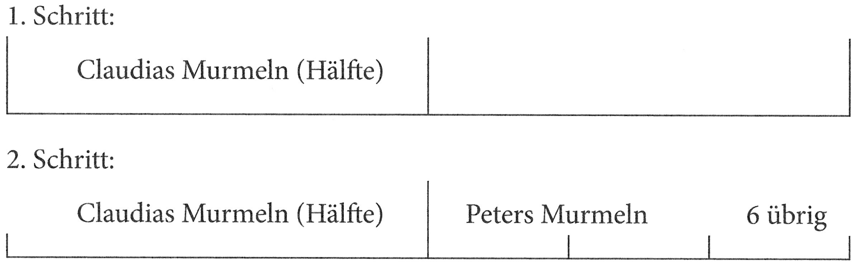


Abbildung 3.3: *Visualisierung der „Murmelaufgabe“*,
aus: Bruder und Collet, 2011, S. 50

Indem die Gesamtzahl der Murmeln als Strecke oder Fläche dargestellt wird, ist es einfacher, zu einer Lösung dieser Aufgabe zu gelangen. In Abb. 3.3 ist zu sehen, wie diese Skizze aussehen könnte. Dabei wird im ersten Schritt die noch unbekannte Anzahl der Murmeln, dargestellt als Strecke, in zwei Hälften geteilt. Anschließend wird die verbleibende Hälfte in drei gleich große Abschnitte aufgeteilt. Mit der Information, dass einer dieser Teile sechs Murmeln entspricht kann nun zunächst die Zahl der Murmeln in einer Hälfte, nämlich 18, berechnet werden. Daraus lässt sich die Gesamtzahl der Murmeln, die am Anfang im Sack waren, ermitteln – es sind 36 Stück.

Wenn die Aufgabe geometrischen Ursprungs ist, wie beispielsweise eine Vermessungsaufgabe oder eine Aufgabe mit Dreiecken, so ist meist eine Skizze der geometrischen Zusammenhänge angebracht. Hier ist es wichtig, eine möglichst allgemeine Figur anzufertigen, und nicht etwa ein allgemeines Dreieck rechtwinkelig zu zeichnen. Oft hilft auch das Zeichnen mehrerer, möglichst unterschiedlicher Skizzen, wie etwa ein spitzwinkeliges Dreieck und ein stumpfwinkeliges Dreieck mit sehr großem Winkel. Keinesfalls darf man sich dazu verleiten lassen, aufgrund einer Skizze eine Gesetzmäßigkeit anzunehmen, nur weil es in dieser Situation so wirkt, als wäre diese gültig. Dennoch können informative Figuren eine große Hilfe beim Finden von Lösungen sein, solange sie eben nicht als Begründung für diese herangezogen werden.

Eine ähnlich gute Hilfe bieten in manchen Fällen Modelle oder Gegenstände, mit denen manche Aufgaben ausprobiert werden können. Die Verwendung von beispielsweise einem Würfelmodell oder verschiedenfarbigen Würfeln bei folgender Aufgabe ist keineswegs kindisch oder zeigt von zu wenig Fähigkeit, abstrakt zu denken, sondern kann im Gegenteil eine wichtige Hilfe beim Lösen sein (Vgl. Mason u. a., 2008, S. 38).

Aufgabe 7 (Würfelbau) *(aus Mason u. a., 2008, S. 37)*
Ich besitze acht Würfel. Zwei davon sind rot, zwei sind weiß, zwei sind gelb und zwei sind blau. Abgesehen davon sind sie völlig identisch. Mein Ziel ist es, aus diesen Würfeln einen großen Würfel so zusammenzubauen, dass jede Farbe auf jeder seiner Seitenflächen zu sehen ist. Auf wie viele Arten kann dies geschehen?

Je nach Auffassung von *„verschieden“* gibt es dafür unterschiedlich viele Möglichkeiten. Wenn Drehungen und Spiegelungen außer Acht gelassen werden, gibt es zwei Arten, die Würfel anzuordnen. Wesentlich ist es hier allerdings, dass das Verwenden von Würfeln oder einem Modell wesentlich dabei helfen kann, auf die grundlegende Idee zu kommen, nämlich dass zwei gleichfarbige Würfel immer in zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken platziert werden müssen.

Auch Figuren in einem Koordinatensystem können helfen, sich eine Problemsituation besser vorzustellen und eventuelle Irrtümer zu vermeiden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Aufgabe 8 (Kerzenaufgabe) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 53)*
Zwei Kerzen brennen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ab: Kerze A ist 36 cm lang und brennt mit 3 cm pro Stunde ab, Kerze B ist 10 cm lang und brennt mit 1 cm pro Stunde ab. Wann sind beide Kerzen gleich lang?

Durch reines Aufstellen von Gleichungen für die momentane Höhe y der Kerzen in Abhängigkeit von der Zeit x in Stunden und Gleichsetzen dieser erhält man folgende Lösung:

Kerze A: $y = 36 - 3 \cdot x$ Kerze B: $y = 10 - x$ $\Rightarrow 36 - 3 \cdot x = 10 - x$ $\Rightarrow 26 = 2 \cdot x$ $\Rightarrow x = 13$

Man könnte also annehmen, dass die Kerzen nach 13 Stunden die gleiche Höhe erreicht haben, sofern man dieses Ergebnis nicht noch auf Plausibilität prüft. Betrachtet man nämlich eine passende Figur im Koordinatensystem wie zum Beispiel Abb. 3.4, so stellt sich heraus, dass die Kerzen nach 13 Stunden beide schon lange völlig abgebrannt sind. Kerze A ist nach 12 Stunden komplett abgebrannt, und damit sind 12 Stunden auch die Zeit, nach der beide Kerzen die gleiche Höhe erreicht haben. Eine informative Figur kann also auch vor Irrtümern schützen und helfen, eine Plausibilitätsüberprüfung des Ergebnisses durchzuführen.

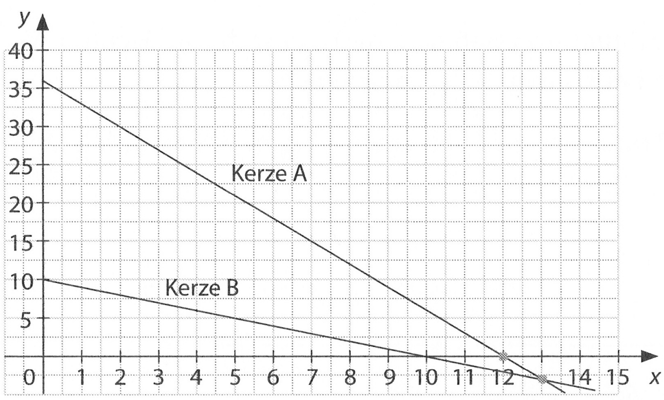


Abbildung 3.4: *Figur zur „Kerzenaufgabe“*, aus: Bruder und Collet, 2011, S. 53

3.3.2 Tabellen

Tabellen sind besonders dann eine Hilfe beim Lösen von Problemaufgaben, wenn sie bewusst zum Strukturieren von Informationen verwendet werden. Beispielsweise können bei systematischem Probieren alle möglichen Fälle übersichtlich dargestellt oder bei der Lösungsfindung verschiedene Ansätze und Möglichkeiten strukturiert notiert werden. Die im vorigen Abschnitt vorgestellte *Kerzenaufgabe* (Aufgabe 8, S. 24) kann ebenfalls mit einer Tabelle gelöst werden, in der die vergangene Zeit und die Länge der jeweiligen Kerzen zu dieser Zeit eingetragen wird. Auch dadurch kann der Irrtum, der beim reinen Gleichsetzen von zwei Funktionen möglicherweise auftritt, vermieden werden. Zudem sind Tabellen eine gute Hilfe, um beispielsweise systematisch alle Möglichkeiten für die Anordnung von Gegenständen oder das Bilden von Ziffern- oder Buchstabenfolgen aus vorgegebenen Zeichen zu finden. Auch bei einigen heuristischen Prinzipien wie dem *Extremalprinzip* oder dem *Invarianzprinzip* sind Tabellen hilfreich. In den entsprechenden Kapiteln wird noch einmal auf diese eingegangen. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 56–61)

Bei sogenannten Mischungsaufgaben können Tabellen ebenfalls zum Lösen eingesetzt werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

Aufgabe 9 (Wassermelonenaufgabe) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 60)*
Eine große Wassermelone wiegt 10 kg. Die Melone hat einen Wasseranteil von 99%. (1% sind feste Bestandteile). In einer Woche sinkt der Wasseranteil durch Verdunsten auf 98%. Wie viel kg wiegt die Melone jetzt?

Mit einer Tabelle kann hier die Lösungsfindung erleichtert werden, wobei zum Beispiel in den Spalten die Masse der Melone, der Wasseranteil und der feste Anteil sowie in den Spalten die Zeitpunkte zu Beginn und nach dem Verdunsten eingetragen werden können (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 60):

	Masse der Melone	**Wasseranteil**	**fester Anteil**
Beginn	10 kg	9,9 kg $\hat{=}$ 99%	100 g $\hat{=}$ 1%
nach dem Verdunsten	5 kg	5 kg $\hat{=}$ 98%	100 g $\hat{=}$ 2%

Tabelle 3.3: *Tabelle zum Lösen der „Wassermelonenaufgabe“*,
aus: Bruder und Collet, 2011, S. 60

3.3.3 Wissensspeicher

Wissensspeicher sind alle Formen von Informationsquellen, die man für das Lösen einer Aufgabe heranziehen kann. Dies können Mathematikbuch, Formelsammlung, Internetquelle oder auch Mitschrift sein. Jedenfalls ist es wichtig, herauszufinden, welche Informationen für die aktuelle Aufgabe benötigt werden und wo diese zu finden sind. Im Zusammenhang mit Problemlösen erfahren besonders die im Mathematikunterricht von den Schülerinnen und Schülern angelegten Wissensspeicher eine wichtige Erweiterung, denn nun können auch die Heurismen in den Mathematikheften notiert werden. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 61)

Ein Beispiel, wie so ein Wissensspeicher zum Thema Problemlösen aussehen könnte, geben Bruder und Collet in Form einer Tabelle:

Name der Problemlösestrategie und Hilfsmittel	**So kann man fragen:**	**Beispielaufgaben**	**Wo man die Strategie noch gebrauchen kann ...**
Informative Figur (die „bessere“ Skizze)	Wie kann ich das, was in der Aufgabe wichtig ist, veranschaulichen? (Strecke, Streifen, Torte ...)	Murmelaufgabe Kerzenaufgabe	Wenn man etwas besser verstehen will
Tabelle	Jede Eigenschaft bekommt eine Spalte, jeder neue Schritt eine neue Zeile	Alle Möglichkeiten aufschreiben bei Zahlen oder Buchstaben Mischungsaufgaben	Wenn man viel bedenken muss und nichts vergessen will; wenn man seine Arbeit planen will

Tabelle 3.4: *Heurismen-Wissensspeicher einer Schülerin (Kl. 7)*,
aus: Bruder und Collet, 2011, S. 61

In so einem Wissensspeicher kann je nach vorliegender Aufgabe nachgeschlagen werden, welche Strategie oder welches Hilfsmittel bei dieser Art von Aufgabe passend ist. Wenn eine solche Tabelle im Mathematikunterricht von den Schülerinnen und Schülern selbst angelegt und in eigenen Worten verfasst wird, ergibt sich daraus der Vorteil, dass durch die eigene Formulierung ein gewisser Bezug zu der Tabelle hergestellt wird und die Lernenden sich wahrscheinlich gut merken, wo sie das entsprechende Wissen nachschlagen können.

3.3.4 Lösungsgraphen

Bei Aufgaben mit mehrschrittigen Lösungen können Lösungsgraphen dabei helfen, den Lösungsweg zu planen und den Überblick zu behalten. Dabei kann er auch bei der Planung der Schritte helfen. Besonders bei den Strategien des Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens ist ein Lösungsgraph hilfreich. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 64)

An einem Beispiel wird die Verwendung dieses Hilfsmittels klar:

Aufgabe 10 (Metallwürfelaufgabe) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 64)*
Zwei Metallwürfel mit gegebenen Kantenlängen von 2 und 4 cm werden zu einem neuen Würfel zusammengeschmolzen. Welche Oberfläche wird dieser neue Würfel haben?

Ein Lösungsgraph wie in Abb. 3.5 erleichtert die Lösungsfindung bei dieser Aufgabe. Aus den gegebenen Seitenlängen der beiden Würfel können deren Oberflächen und Volumina berechnet werden. Auf ähnliche Art kann man bei vielen Aufgaben zunächst überprüfen, was man aus den gegebenen Daten ermitteln kann. Nun kann als nächster Schritt entweder schon vermutet werden,

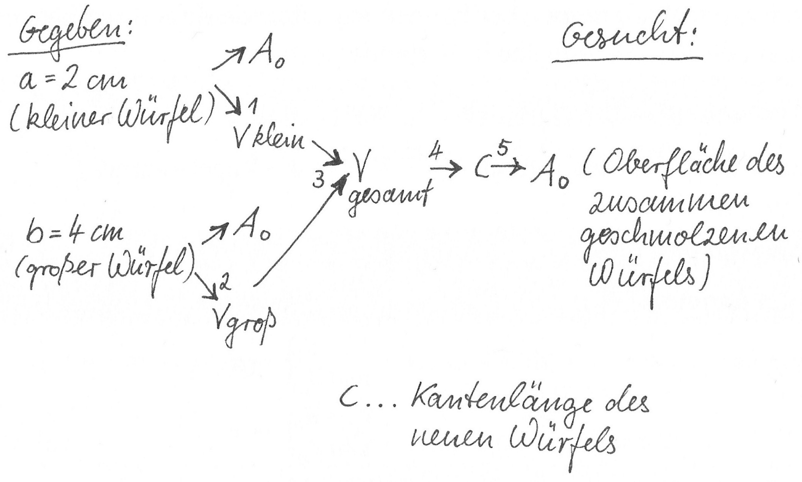


Abbildung 3.5: *Beispiel für einen Lösungsgraphen*, aus: Bruder und Collet, 2011, S. 64

dass aus den Volumina der alten Würfel das Volumen des neuen Würfels ermittelt werden kann. Alternativ dazu kann man ermitteln, was zum Erreichen des gewünschten Zieles nötig ist. In diesem Fall ist das die Seitenlänge des neuen Würfels. Diese wiederum kann man nur aus dem Volumen des neuen Würfels ermitteln, denn die Oberfläche ist ja gesucht. So kann man nun den Schritt des Addierens der beiden Volumina der Ausgangswürfel erkennen. Die hier angewandte Vorgehensweise ist eine Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten. Auch um Lösungswege für die Schülerinnen und Schüler übersichtlich darzustellen, denen sie nicht auf Anhieb klar sind, eignen sich Lösungsgraphen sehr gut. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 64–66)

3.3.5 Gleichungen

Gleichungen als heuristisches Hilfsmittel zu sehen mag etwas ungewöhnlich erscheinen, doch sie sind ein gutes Hilfsmittel, um Informationen auf das Wesentliche zu reduzieren. Bei der *Kerzenaufgabe* war zwar zu sehen, dass Gleichungen auch zu Irrtümern führen können, doch waren dort weniger die Gleichungen selbst das Problem, sondern vielmehr der zu schematische Umgang mit ihnen. Es ist aber wahr, dass Gleichungen hohe Abstraktionsleistungen erfordern und damit das anspruchsvollste heuristische Hilfsmittel sind. Schon der recht einfache Gleichungstyp $a \cdot b = c$ beschreibt zahlreiche Zusammenhänge, von der Fläche eines Rechtecks über den allgemeinen proportionalen Zusammenhang zweiter Größen bis hin zur Beschreibung des zurückgelegten Weges bei einer gleichförmigen Bewegung in Abhängigkeit von Geschwindigkeit und Zeit. Die Schwierigkeit beim Aufstellen einer Gleichung im Vergleich zur Verwendung einer informativen Figur oder eines Lösungsgraphen besteht darin, dass deutlich mehr Fachwissen und teilweise auch Strategiewissen verwendet werden muss. Andererseits haben Gleichungen den Vorteil, dass damit ganze Aufgabenklassen auf einer sehr allgemeinen Basis gelöst werden können. Außerdem ist eine Lösung mit Gleichungen oft sehr elegant und kurz. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 67f)

3.4 Heuristische Strategien

In diesem Abschnitt geht es um Vorgehensweisen, die unabhängig vom fachlichen Kontext eines Problems bei dessen Lösung helfen können. Dazu muss das Problem natürlich einmal verstanden worden sein. Diese Strategien erwecken möglicherweise den Eindruck, als müsste man sie gar nicht erwähnen, weil mindestens eine davon in der Lösung von praktisch jedem Problem zu finden ist. Aber gerade durch ein bewusstes Anwenden kann den Schülerinnen und Schülern geholfen werden, die weniger leicht einen intuitiven Lösungsansatz für ein Problem finden. Die heuristischen Strategien sind *systematisches Probieren*, *Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten* und eine Kombination der beiden, die *Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes* sowie das *Suchen nach Analogien* (Analogieschluss). Diese Strategien garantieren kein Ergebnis, sondern können nur Orientierung auf dem Weg zur Lösung bieten. Doch das ist meist schon genug, um dabei zu helfen, ein Problem zu lösen. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 68–70)

Auch Grieser nennt vier von ihm als *„Allgemeine Problemlösestrategien“* bezeichnete Strategien (Vgl. Grieser, 2013, S. 118):

- Habe ich ein ähnliches Problem schon gesehen?
- Vorwärtsarbeiten: Was kann ich mit den Daten anstellen?
- Rückwärtsarbeiten: Wie kann ich das Ziel erreichen?
- Kann ich sinnvolle Zwischenziele formulieren?

Drei dieser Strategien wurden bereits erwähnt und werden im Folgenden behandelt. Dies sind die von Grieser mit der ersten Frage gemeinte Suche nach Analogien, das Vorwärts- und das Rückwärtsarbeiten. Einzig der Aspekt der Zwischenziele ist neu, auf diese wird allerdings sowohl beim Vorwärts- als auch beim Rückwärtsarbeiten eingegangen.

3.4.1 Systematisches Probieren

Probieren im Sinne von Versuch und Irrtum ist die grundlegende Problemlösestrategie schlechthin. In allen Bereichen werden durch diese Methode Probleme verschiedenster Art gelöst, sei es in der Wissenschaft, der Technik oder gar der Natur. Auch wenn man versucht, einen passenden Lösungsweg für ein Problem zu finden, ist Probieren eine gute Methode. In diesem Abschnitt soll es jedoch nicht darum, sondern um Probieren als Lösungsweg gehen.

Um den Lösungsvorgang zu verkürzen und nicht überflüssig viele Versuche anstellen zu müssen, ist es sinnvoll, systematisch zu probieren. Das dabei sinnvollste System hängt stark von der zu bearbeitenden Aufgabe ab. Ein Beispiel gibt die folgende Aufgabe:

Aufgabe 11 (5-stellige Zahl) *(aus Roth-Sonnen u. a., 2005, S. 42)*
Für welche Ziffer a *ist die 5-stellige Zahl* 5aaaa *durch 6 teilbar?*

Der vielleicht nächstliegende Weg, diese Aufgabe mit systematischem Probieren zu Lösen, ist für die Ziffer a der Reihe nach alle möglichen Ziffern von 0 bis 9 durchzuprobieren. Ein effektiveres System kann man durch eine Vorüberlegung ausarbeiten: Wenn die fünfstellige Zahl durch 6 teilbar sein soll, so muss sie durch 2 teilbar, also gerade, sein. Daher muss die letzte Ziffer, und damit auch a, gerade sein. Es genügt also, die geraden Ziffern auszuprobieren.

Was aber ist der Unterschied zwischen systematischem Probieren und Probieren ohne System? Bruder und Collet beschreiben ihn wie folgt (Bruder und Collet, 2011, S. 71):

> *„Der Unterschied zwischen unstrukturiertem Herumprobieren und* ***systematischem Probieren*** *besteht darin, dass man sich über gewisse Kriterien bewusst wird, nach denen man weitere Berechnungen oder Darstellungen durchführt.“*

Das Probieren aller Ziffern der oben genannte Aufgabe 11 ist also nur im weitesten Sinne systematisches Probieren, weil die Aussage *„a muss eine Ziffer sein“* mehr eine grundlegende Voraussetzung als ein Kriterium ist. Bei der Methode des Probierens aller geraden Ziffern hingegen wendet man sehr wohl systematisches Probieren an, denn *„die Ziffer a muss gerade sein“* ist ein Kriterium, das zum Lösen der Aufgabe hilfreich ist.

Systematisches Probieren kommt aber nicht nur beim Lösen von Aufgaben vor, bei denen gewisse Größen variiert werden. Auch wenn Größen abgeschätzt werden, wird diese Strategie eingesetzt. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 75) Bei der folgenden Aufgabe beispielsweise würde ein bloßes Probieren aller Zahlen, die infrage kommen (alle natürlichen Zahlen) sehr viel Zeit in Anspruch nehmen, während man durch systematisches Probieren und eine vernünftige Abschätzung den Lösungsprozess abkürzen kann:

Aufgabe 12 (Kinorätsel) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 49)*
Im Kino sind nur ein Fünftel der Plätze von Erwachsenen belegt. 10 Plätze mehr werden von Jungen eingenommen. Außerdem sind 30 Mädchen hier. 20 Plätze sind frei. Wie viele Sitze hat das Kino?

Durch eine passende Abschätzung für die Plätze im Kino, etwa 50 oder 100, kann der Prozess des Probierens erheblich abgekürzt werden. Wenn man außerdem bedenkt, dass die Anzahl der Plätze durch 5 teilbar sein muss, kommt man recht bald auf die korrekte Lösung von 100 Plätzen. Denn selbst wenn man bei 50 Plätzen begonnen hat, müssen nur zehn weitere Fälle probiert werden.

Auch um Beispiele zu finden, mit denen man sich ein Problem verständlich machen kann, ist systematisches Probieren eine gute Methode. Ebenso ist es bei Problemen hilfreich, bei denen in verschiedene Fälle unterschieden wird. Ein Beispiel dafür ist die Aufgabe *„Das Töchterproblem“* (Aufgabe 4, S. 16). Bei deren Lösung wurden systematisch alle möglichen Fälle für das Alter der Töchter, deren Produkt 36 ist, ausgearbeitet. Dabei kann man beispielsweise systematisch zunächst die ersten beiden Faktoren möglichst klein wählen, um dann immer größere Zahlen auszuprobieren. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 74f)

Schließlich gibt es noch eine weitere Anwendungsmöglichkeit für systematisches Problemlösen, nämlich dann, wenn zeitabhängige Prozesse schrittweise nachvollzogen werden können. Ein Beispiel hierfür ist die *„Kerzenaufgabe“* (Aufgabe 8, S. 24). Diese kann beispielsweise mit einer Tabelle, in der der zeitliche Ablauf dargestellt wird, durch systematisches Probieren gelöst werden. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 75)

Zusammenfassend können also folgende Einsatzmöglichkeiten für systematisches Probieren genannt werden (Vgl. auch Bruder und Collet, 2011, S. 75):

- Aufgaben, bei denen bestimmte Größen unter gewissen Voraussetzungen variiert werden. Die Anzahl der Möglichkeiten muss endlich sein.
- Aufgaben, bei denen bestimmte Größen abgeschätzt werden müssen. Meist ist ein schrittweises „Herantasten“ an die Lösung möglich.
- Aufgaben, die man sich anhand selbst gewählter Beispiele verständlicher macht. Die zugehörigen Zahlenwerte, Situationen, etc. werden mit systematischem Probieren gewählt.
- Aufgaben, bei denen in verschiedene Fälle unterschieden wird.
- Aufgaben, bei denen zeitabhängige Prozesse schrittweise nachvollzogen werden.

Im Unterricht sollte man den Schülerinnen und Schülern außerdem klarmachen, dass die falschen Versuche, besonders wenn man verschiedene Lösungsansätze probiert, keineswegs negativ sind. Gerade durch diese kann man gute Ideen für das Lösen des Problems gewinnen. (Vgl. Paul, 1996, S. 141)

Fred Paul schlägt daher vor, das Probieren nicht als *„Versuch und Irrtum“* sondern als *„Versuch und Erfolg“* zu bezeichnen:

> *„It is essential that the so-called wrong paths in problem solving are treated not as errors but as often necessary steps towward a solution. They can give important clues and even provide insight, sometimes in totally unexpected directions that lead to an answer to a different queston which can be useful at another time. Why not, then, consider the process as one of ’trial and success’?“*

3.4.2 Vorwärtsarbeiten

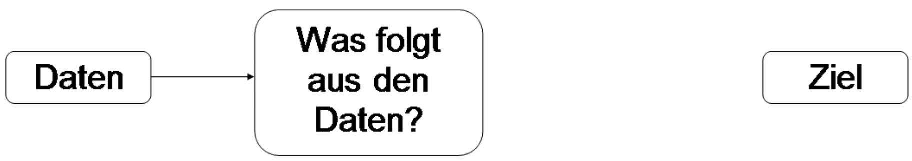


Abbildung 3.6: *Vorwärtsarbeiten*, nach: Grieser, 2013, S. 119

Vorwärtsarbeiten ist eine Strategie, bei der von den bekannten Ausgangsdaten Schritt für Schritt in Richtung des Zieles gearbeitet wird. Ein Beispiel aus dem Alltag ist das Packen eines Koffers: Aus den gegebenen Ausgangsdaten – dem Inhalt des Kleiderkastens, einem leeren Koffer und Vorstellungen dessen, was eingepackt werden soll – wird schrittweise auf ein gewünschtes Ziel – einen gepackten Koffer – hingearbeitet. Zwischendurch werden beim Vorwärtsarbeiten meist Teil- oder Zwischenziele – wie etwa ein Koffer, in den bereits die Unterwäsche gepackt wurde – erreicht (Vgl. Abb. 3.7). Wird diese Strategie bei mathematischen Problemen angewandt, so ist es meist nicht so offensichtlich, was mit den gegebenen Daten angefangen werden kann. Deshalb ist es sinnvoll, sich die Frage zu stellen, was man aus dem bereits Bekannten folgern kann. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 76)

Abbildung 3.7: *Lösungsschema mit einem Zwischenziel*, nach: Grieser, 2013, S. 119

Ein Beispiel dafür, wo die Strategie des Vorwärtsarbeitens in mathematischem Zusammenhang angewandt werden kann, ist die *„Metallwürfelaufgabe“* (Aufgabe 10, S. 26). Aus den gegebenen Kantenlängen von zwei Würfeln können die Volumina sowohl der beiden gegebenen als auch des neuen Metallwürfels berechnet werden. Mit dem Volumen des neuen Würfels kann nun die Seitenlänge ermittelt werden, aus der wiederum die Oberfläche bestimmt werden kann. Ausgehend von den Anfangsdaten wurden also Schritt für Schritt Teilziele erreicht, die der gesuchten Lösung immer näher kommen.

Bruder und Collet schlagen vor, in der fünften Schulstufe einmal Ideen dafür zu sammeln, welche Verwendungen für Zahlen (z. B. rechnen, Größen beschreiben, Rätsel raten, Zahlbereiche erweitern, etwas darstellen, etc.) schon bekannt sind, und wo noch Lücken geschlossen werden können. Auch dabei kann die Strategie des Vorwärtsarbeitens angewandt werden, weil ja überlegt wird, was aus den gegebenen Daten – in diesem Fall *„Zahlen“* ganz allgemein – alles gemacht werden kann. Beim Vorwärtsarbeiten besonders in dieser Art wird zudem die Kreativität gefördert, weil viele verschiedene Sichtweisen zu einem Sachverhalt eingenommen werden. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 77)

3.4.3 Rückwärtsarbeiten

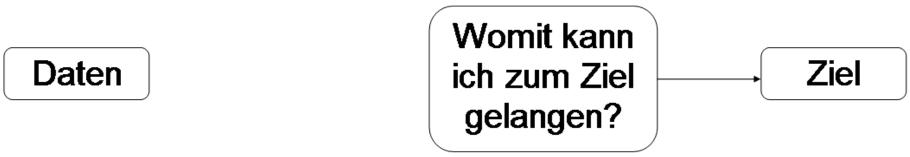


Abbildung 3.8: *Rückwärtsarbeiten*, nach: Grieser, 2013, S. 119

Beim Rückwärtsarbeiten geht man genau umgekehrt vor wie beim Vorwärtsarbeiten. Von der Behauptung oder dem Gesuchten ausgehend versucht man, meist wieder über Teilziele, zur Voraussetzung oder zum Gegebenen zu gelangen. Bei Beweisaufgaben ist die Lösung dann oft bereits gefunden. Denn meist sind die Schritte, mit denen die Behauptung auf etwas Bekanntes oder bereits Bewiesenes zurückgeführt wird, Äquivalenzumformungen. Wenn dies für mindestens einen der Schritte nicht zutrifft, muss ein anderer Weg gefunden werden. Denn der eigentliche Beweis kann nur von den Voraussetzungen zur Behauptung hin geführt werden, und nicht umgekehrt. Bei anderen Aufgaben kann über die durch Rückwärtsarbeiten gefundene Verbindung zwischen Ausgangsdaten und gesuchtem Ergebnis nun dieses berechnet werden. Im Alltag verwendet man die Strategie des Rückwärtsarbeitens beispielsweise, wenn man etwas verlegt hat. Durch Überlegen, wann und wo man den gesuchten Gegenstand zuletzt gesehen hat, kann man seinen momentanen Aufenthaltsort möglicherweise nachvollziehen. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 79)

Um diese Strategie nun zu trainieren, kann man Aufgaben heranziehen, bei denen eigentlich der Anfangszustand gesucht wird. Genau genommen wird hier also gar nicht rückwärts gearbeitet, sondern wieder von den gegebenen Daten zum Ergebnis. Doch da die gegebenen Daten hier den Endzustand wiedergeben und das gesuchte Ergebnis der Ausgangszustand ist, trainiert man dennoch das Rückwärtsarbeiten. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 79f) Ein Beispiel dafür ist die folgende Aufgabe:

Aufgabe 13 (Die sieben Tore) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 80)*
Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren.
An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr.
Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig. Wie viele hatte er am Anfang?

Die Lösung kann viel schneller gefunden werden, wenn von dem Zustand am Ende ausgegangen wird. Man kann also zunächst überlegen, wie viele Äpfel der Mann vor dem letzten Tor noch hatte, und sich dann Tor für Tor zum ersten hinarbeiten. Schließlich findet man heraus, dass der Mann zu Beginn 382 Äpfel hatte. Durch Veränderung der Anzahl der Tore kann bei dieser Aufgabe der Rechenaufwand verringert werden, wodurch sie sich für verschiedene Altersklassen eignet. Ganz allgemein kann man sich bei solchen Aufgaben und auch bei denen, die tatsächlich mit Rückwärtsarbeiten gelöst werden können, die Frage stellen, woraus sich das gesuchte Ergebnis folgern ließe. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 80f)

Ein Beispiel für eine Aufgabe, bei der tatsächlich Rückwärtsarbeiten – in Kombination mit Vorwärtsarbeiten – eingesetzt wird, ist im folgenden Abschnitt zu finden.

3.4.4 Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten

In der Praxis kommt es oft vor, dass Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten in Kombination verwendet werden, um eine Aufgabe zu lösen. Ein gutes Beispiel dafür ist die *„Metallwürfelaufgabe“* (Aufgabe 10, S. 26), bei der aus den gegebenen Seitenlängen von zwei Metallwürfeln die Oberfläche eines Würfels ermittelt werden soll, der aus dem geschmolzenen Material dieser beiden hergestellt wurde. Einige Schülerinnen und Schüler werden diese Aufgabe vermutlich zunächst so angehen, dass sie überlegen, was zum Feststellen der Oberfläche des neuen Würfels nötig ist. Dies ist die

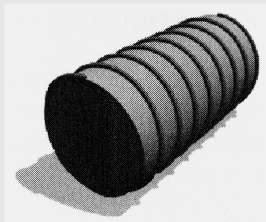
Seitenkante dieses Würfels. Dann kann man überlegen, wie diese ermittelt werden kann, wofür nur mehr das Volumen des Würfels übrig bleibt. Von den Seitenlängen der beiden gegebenen Würfel ausgehend können nur die Volumina ebendieser Würfel bestimmt werden, und damit auch das gesuchte Volumen des neuen Würfels. An diesem Punkt treffen sich die Überlegungen des Rückwärtsarbeitens mit denen des Vorwärtsarbeitens, und ein Arbeitsplan ist erstellt.

3.4.5 Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes

Indem man eine unbekannte Aufgabe auf Bekanntes zurückführt, wird sie lösbar. Häufig geschieht dies zum Beispiel durch eine Fallunterscheidung oder durch Zerlegung in Teilaspekte. Die einzelnen Fälle oder Teilaspekte sind weniger komplex als das Ausgangsproblem und unter Umständen schon bekannt. Mithilfe von Analogieschlüssen, die im nächsten Abschnitt noch näher besprochen werden, können Fälle oder Teilaspekte auch dann gelöst werden, wenn sie nur in ähnlicher Form schon einmal bearbeitet wurden und nicht in exakt derselben. Eine weitere Anwendung für die Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes ist das Verlagern räumlicher Berechnungsprobleme in die Ebene. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 84) Ein Beispiel gibt folgende Aufgabe:

Aufgabe 14 (Das Drahtproblem) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 84)*

„Aufgewickelter Draht“
Der Durchmesser der abgebildeten Rolle beträgt 45 mm und die Länge 125 mm. Wie lang ist der aufgewickelte Draht?



Diese Aufgabe ist in vereinfachter Form mit vier Wicklungen auch bei TIMSS 1995 (*„Third International Mathematics and Science Study“*, mittlerweile *„Trends in International Mathematics and Science Study“*) als Item *„K14“* zu finden. (Vgl. IEA, 1995, S. 93)

Wird diese Aufgabe auf die Ebene zurückgeführt (Abb. 3.9), so ist es recht einfach, die beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks zu bestimmen. Eine der Katheten ist ein Achtel der Rollenlänge, die andere der Kreisumfang, der wiederum aus dem Durchmesser ermittelt werden kann. Mit diesen Maßen kann nun die Länge einer Drahtwicklung berechnet werden, weil das unbekannte Problem der Drahtrolle auf ein bekanntes Problem, nämlich das Ermitteln der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit bekannten Katheten, zurückgeführt wurde. Mit dieser Länge einer Drahtwicklung kann die gesamte Drahtlänge ermittelt

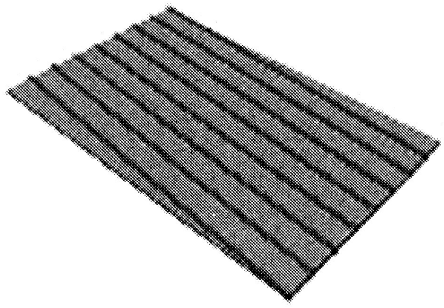


Abbildung 3.9: *Abgewickelte Drahtrolle*, aus: Bruder und Collet, 2011, S. 85

werden. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 85)

Eine Einsatzmöglichkeit für diese Strategie im Unterricht ist das Erarbeiten neuer mathematischer Inhalte. Wenn neue Gleichungstypen erarbeitet werden, sollen sie auf bekannte zurückgeführt und gelöst werden. Bei der Erweiterung der Zahlenbereiche sollen bekannte Rechengesetze weiterhin Gültigkeit haben. Bei der Berechnung von Flächen können neue Formeln auf bereits bekannte Flächenformeln wie etwa die von Dreieck oder Rechteck zurückgeführt werden. Auch um die Rechenregel für das Multiplizieren von Brüchen einzuführen, kann von dem bereits bekannten Multiplizieren von ganzen Zahlen, die als Brüche angeschrieben werden, auf die unbekannte neue Rechenregel geschlossen werden. Denn $\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1}$ muss jedenfalls $\frac{12}{1}$ ergeben. Und wenn man nun noch die naheliegende Behauptung, dass $2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$ gilt, hinzunimmt, kann eine Gesetzmäßigkeit vermutet werden. Dies kann natürlich weder als Begründung noch zum Bilden einer konkrete Vorstellung herangezogen werden, es gibt aber immerhin Anlass, zu überprüfen, ob diese Regel richtig ist und wenn ja welche Vorstellung damit verbunden werden kann. Beim Erarbeiten neuer Lerninhalte ist also das Schließen von Bekanntem auf Unbekanntes eine wichtige Strategie. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 87)

3.4.6 Suchen nach Analogien

Bei der Suche nach Analogien, oft auch als Finden von Analogieschlüssen bezeichnet, werden ähnliche Aufgaben wie die vorliegende gesucht, die schon einmal gelöst wurden. Mit ähnlichen Aufgaben sind hier solche gemeint, die einen vergleichbaren Lösungsweg, eine vergleichbare Darstellungsform oder analoge Fragestellungen aufweisen. Dabei kommt es stark auf die persönlichen Erfahrungen an, wie viele Lösungswege jemand schon beschritten hat und wie viel davon noch in Erinnerung geblieben ist. Besonders im Mathematikunterricht ist es schwierig, Analogieschlüsse gezielt einzusetzen. Denn die Aufgaben, die später bei Schularbeiten und Prüfungen gestellt werden, werden oft mehrmals mit verschiedenen Zahlen geübt, was den Schülerinnen und Schülern ein analoges Lösen geradezu aufdrängt. Manchmal wird sogar explizit gefordert, dass mit einer bestimmten Methode gerechnet wird. Dennoch ist es in diesen Situationen schwierig, Analogieschlüsse als eine Strategie zum Problemlösen zu reflektieren. Der einzige Punkt, an dem das im Mathematikunterricht sinnvoll möglich ist, ist das Erarbeiten neuer Lerninhalte. Dort kann nach Parallelen zu bereits Bekanntem gesucht und so die passende Frage – nämlich welche ähnlichen Probleme man schon gelöst hat und wenn ja wie – gestellt werden. Der wesentliche Nutzen, der aus dem Bewusstmachen von Analogieschlüssen im Hinblick auf das Problemlösen gezogen werden kann, ist, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, Heurismen auf andere Themengebiete zu transferieren. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 83)

Bruder und Collet empfehlen folgende Lernimpulse, mit denen man insgesamt die Heurismennutzung stärker bewusst machen kann (Bruder und Collet, 2011, S. 83):

- *„Wie sind wir in ähnlichen Situationen vorgegangen?*

- *Was kommt euch an dieser Aufgabe bekannt vor?*
- *Vergleicht die letzten Aufgaben(lösungen) miteinander – welche Gemeinsamkeiten gibt es?“*

Mit diesen Fragen können die Schülerinnen und Schüler darauf sensibilisiert werden, dass eine Lösungsmethode nicht nur für eine Aufgabe oder Aufgabenart hilfreich sein kann, sondern oft darüber hinaus weitgehende Anwendungen findet. Dies kann besonders beim Problemlösen hilfreich sein, wenn andere im Unterricht besprochene Heurismen bei verschiedenen Aufgaben angewendet werden sollen.

3.5 Heuristische Prinzipien

Heuristische Prinzipien sind das, was von vielen Autorinnen und Autoren als *„Heurismen“* schlechthin bezeichnet wird. Es handelt sich dabei um konkrete Methoden, die jeweils bei einer Vielzahl von Problemen einer bestimmten Art angewandt werden können. Sobald man also festgestellt hat, dass ein bestimmtes heuristisches Prinzip für das Lösen einer Aufgabe herangezogen werden kann, führt dies oft auch zum Erfolg. Garantie für eine Lösung bieten natürlich auch diese Heurismen nicht, dennoch sind sie deutlich konkreter als etwa heuristische Strategien.

Die hier getätigte Auswahl der heuristischen Prinzipien richtet sich nach Bruder und Collet, denen zufolge die in Abb. 3.1 zu findenden Prinzipien sich für den Einsatz im Mathematikunterricht eignen. Zusätzlich möchte ich noch das Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen betrachten. Dieses kann laut Bruder und Collet zwar schon mit Bearbeitung der heuristischen Strategie des systematischen Probierens abgedeckt werden, doch meiner Meinung nach besteht hier ein grundlegender Unterschied. Natürlich können diese beiden Heurismen im Unterricht auf einmal behandelt werden, doch das Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen ist eben kein Probieren verschiedener Möglichkeiten, von denen eine voraussichtlich zum Erfolg führt, sondern ein Mittel, um Aufgaben näher zu analysieren und neue Aspekte zu gewinnen. Demnach wäre es meiner Meinung nach sogar passend, diese Methode als ein eigenes heuristisches Hilfsmittel zu bezeichnen. (Vgl. auch Bruder und Collet, 2011, S. 87f)

Neben dem *Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen* werden die in Abb. 3.1 erwähnten Prinzipien, nämlich das *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip*, das Prinzip der *Fallunterscheidung*, das *Extremalprinzip*, das *Invarianzprinzip*, das *Transformationsprinzip* und das *Symmetrieprinzip* in diesem Abschnitt kurz erläutert.

3.5.1 Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen

Wie bereits erwähnt, halte ich das Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen weniger für ein heuristisches Prinzip, als für ein Hilfsmittel, um Probleme besser zu erfassen, anders darzustellen und näher zu studieren. Auch Mason, Burton und Stacey nennen in ihrem ersten Kapitel, *Das Anpacken* *von Problemen*, das Betrachten von Spezialfällen als allerersten Punkt. Von diesen ausgehend kann allein durch eine Abstraktion auf den allgemeinen Fall schon so manches Problem gelöst werden. (Vgl. Mason u. a., 2008, S. 2–4)

Beim Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen versucht man also, durch das Betrachten ganz bestimmter Teilaspekte eines Problems, tiefere Einsicht in dasselbe zu gewinnen. Dazu wird meist ein beispielhafter Wert für eine Unbekannte eingesetzt, oder aber es werden die möglichen Grenzen einer Unbekannten betrachtet. Bei sehr vielen geometrischen Aufgaben kann man praktisch nur mit Einzelfällen arbeiten – nämlich immer dann, wenn ein allgemeiner geometrischer Sachverhalt gezeigt werden soll. Denn sobald man eine Skizze von einer konkreten Situation macht und diese betrachtet, handelt es sich dabei schon um einen Einzelfall. Ein Beispiel dafür, wo das Arbeiten mit Spezialfällen das Finden der Lösung noch erleichtert, gibt die folgende Aufgabe:

Aufgabe 15 (Kaufhaus) *(aus Mason u. a., 2008, S. 2)*
In einem Kaufhaus bekommen Sie 20% *Rabatt, müssen aber* 15% *Umsatzsteuer zahlen. Was wäre für Sie günstiger: sollte man zuerst den Rabatt abziehen oder sollte man zuerst den Steueraufschlag vornehmen?*

Die wohl schnellste Variante, um bei dieser Aufgabe festzustellen, dass die Reihenfolge von Rabatt und Steuer keinen Einfluss auf den endgültigen Preis haben, ist es, Spezialfälle zu betrachten. Wenn die Ware beispielsweise 100 Euro kostet, so erhält man in beiden Fällen einen zu zahlenden Preis von 92 Euro. Davon ausgehend kann nun der Preis der Ware mit x Euro angenommen und eine allgemeine Begründung angegeben werden.

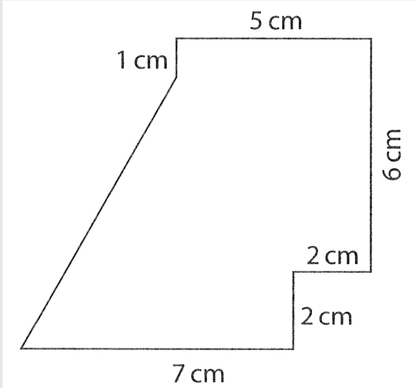
3.5.2 Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip

Diese beiden zueinander komplementären Vorgehensweisen haben sehr vielfältige Anwendungsmöglichkeiten. In verschiedener Form werden Aufgaben in Teile zerlegt, um besser bearbeitet werden zu können, wie etwa bei Teilbarkeitsüberlegungen, dem Aufteilen von Termen oder bei der Integralrechnung mit dem Riemann'schen Integralbegriff. Auch das Ergänzen findet vielfältige Anwendung im Unterricht, sei es bei der so genannten *„quadratischen Ergänzung“*, beim Entwickeln einer Lösungsformel für quadratische Gleichungen oder bei Flächen- oder Volumenberechnungen von Vielecken oder Körpern. Letztere sind auch das am besten geeignete Themengebiet, um sowohl das Zerlegungs- als auch das Ergänzungsprinzip im Unterricht bewusst zu machen. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 88–90)

Mit einem Beispiel wird klar, dass besonders bei diesen geometrischen Aufgaben sowohl das Zerlegungs- als auch das Ergänzungsprinzip bei ein und derselben Aufgabe angewandt werden können:

Aufgabe 16 (Zusammengesetzte Flächen) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 92)*

Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur.



Wie in Abb. 3.10 zu erkennen ist, kann die Aufgabe sowohl durch Zerlegen der Figur in zwei Rechtecke und ein Dreieck, als auch durch Ergänzen der Figur durch ein Dreieck und ein Quadrat auf zwei größere Rechtecke gelöst werden. In beiden Fällen müssen die Flächeninhalte von drei Figuren berechnet werden. Bei der Zerlegungs-Variante werden diese anschließend addiert, bei der Ergänzung wird der Flächeninhalt des Quadrates von dem des größeren Rechtecks subtrahiert und zum Ergebnis die Hälfte des Flächeninhalts des kleineren Rechtecks addiert.

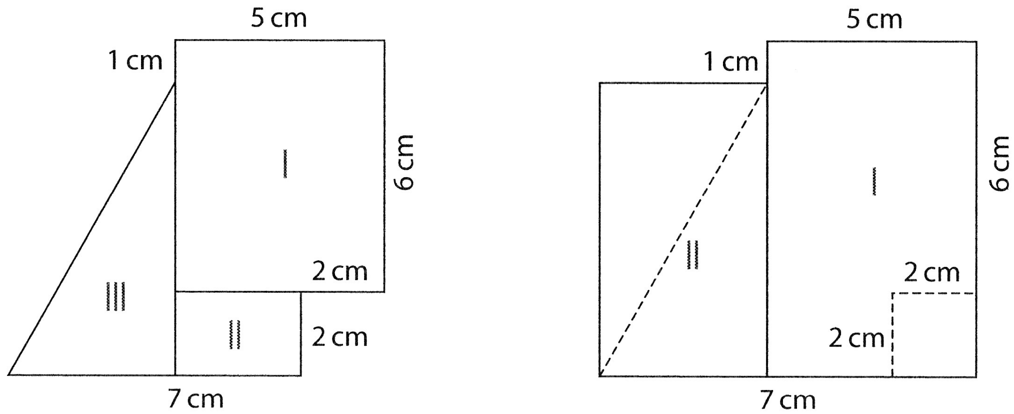


Abbildung 3.10: *Lösungsmöglichkeiten für die Aufgabe „Zusammengesetzte Flächen“*, aus: Bruder und Collet, 2011, S. 92

Bruder und Collet geben einen Vorschlag dafür, was Lernende in einem Wissensspeicher über Zerlegen und Ergänzen notieren könnten (Bruder und Collet, 2011, S. 94):

1. Sachtexte in Sinneinheiten zerlegen (Vorwärtsarbeiten!)
    - einzelne Teile in die Sprache der Mathematik übersetzen
    - Fragen stellen zu den einzelnen Sinneinheiten
    - Sachverhalt reduzieren – zunächst bestimmte Bedingungen auswählen
2. Fragen zu geometrischen Figuren auf Bekanntes zurückführen:

Hilfslinien einzeichnen:

- Höhen (Lote fällen)
- Diagonalen
- Teilfiguren abtrennen (z. B. rechtwinkelige Dreiecke)
- zu bekannten Figuren ergänzen

Gleichzeitig können diese Aspekte als Lernziele für den Unterricht von Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip gesehen werden.

3.5.3 Prinzip der Fallunterscheidung

Eigentlich handelt es sich bei Fallunterscheidungen um einen Spezialfall des Zerlegungsprinzips. Denn wenn eine Fallunterscheidung getroffen wird, so wird das Problem eigentlich in mehrere Einzelfälle zerlegt. Beispiele für Anwendungsgebiete sind die geometrische Interpretation der Lösungen von linearen Gleichungssystemen, das Feststellen der Lage einer Geraden zu einem Kreis, aber auch viele kombinatorische Probleme. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 95)

Wichtig bei der Anwendung dieses Prinzips ist es, keinen Fall auszulassen. Man muss sich also Gedanken darüber machen, welche Fälle es alle gibt, bevor man diese – meist einen nach dem anderen – abarbeitet.

3.5.4 Extremalprinzip

Eine allgemeine Formulierung des Extremalprinzips ist etwa folgende (Grieser, 2013, S. 196):

> *„Wo etwas extremal (größtmöglich, kleinstmöglich usw.) wird, entstehen besondere Strukturen."*

Diese Tatsache kann nun dazu verwendet werden, um bei Problemlöseaufgaben, bei denen nach Objekten mit besonderen Eigenschaften gesucht wird, diese durch Extrema zu beschreiben. Dies kommt vor allem bei Aufgaben vor, bei denen eine Menge an Elementen gegeben ist, die eine gewisse Eigenschaft haben können. Gezeigt werden soll nun, dass es mindestens ein Objekt gibt, dass diese Eigenschaft aufweist. (Vgl. Grieser, 2013, S. 202–204)

Ein Beispiel dazu ist folgende Aufgabe:

Aufgabe 17 (Ein Problem über Turniere) *(aus Grieser, 2013, S. 202)*
In einem Turnier spielt jeder gegen jeden ein Mal. Dabei gibt es kein Unentschieden. Am Schluss des Turniers fertigt jeder Spieler eine Liste an, auf der sowohl diejenigen Spieler stehen, gegen die er gewonnen hat, als auch die, gegen die diese gewonnen haben.
Zeigen Sie, dass es einen Spieler gibt, auf dessen Liste alle anderen Spieler stehen.

Zum Lösen dieser Aufgabe kann nun ein Extremfall betrachtet werden, nämlich ein Spieler, der die meisten Spiele gewonnen hat. Dieser Spieler sei mit A bezeichnet. Er hat schon sehr viele andere Spieler auf seiner Liste, da er ja die meisten Spiele gewonnen hat. Nun wird behauptet, dass es einen Spieler B gibt, der nicht auf der Liste von Spieler A steht. Dieser Spieler B muss dann gegen A siegreich gewesen sein. Außerdem hat B auch gegen alle Spieler gewonnen, gegen die A gewonnen hat. Hätte nämlich B gegen einen Spieler C, gegen den A gewonnen hat, nicht gewonnen, so würde B als Spieler, gegen den C gewonnen hat, auf der Liste von A stehen. Damit hat aber B mehr Spiele gewonnen als A (er hat ja sowohl alle Spieler, die A besiegt hat, als auch A selbst besiegt) – ein Widerspruch zu der Annahme, dass A ein Spieler ist, der die meisten Spiele gewonnen hat. Damit muss die Annahme, dass es einen Spieler B gibt, der nicht auf der Liste von A steht, verworfen werden, und die Aufgabe ist gelöst. (Vgl. Grieser, 2013, S. 203f)

Aber das Extremalprinzip kommt nicht nur bei dieser bestimmten Art von Aufgaben zum Einsatz, sondern kann auch bei vielen anderen Problemen herangezogen werden (Grieser, 2013, S. 211):

> *„In einer unübersichtlichen Situation betrachte Objekte mit einer extremen Eigenschaft.“*

An einem Beispiel kann auch bei diesem Einsatzgebiet für das Extremalprinzip sein Nutzen eingesehen werden:

Aufgabe 18 (Ein Problem über Mittelwerte) *(aus Grieser, 2013, S. 212)*
Entlang eines Kreises seien 1000 *Zahlen angeordnet. Jede ist der Mittelwert ihrer beiden Nachbarn. Zeige, dass alle Zahlen gleich sind.*

Um diese Aufgabe mit dem Extremalprinzip zu lösen, kann man davon ausgehen, dass eine der Zahlen, bezeichnet als x, eine kleinste ist. Die Nachbarn dieser Zahl müssen nun beide wieder x sein, denn da x der Mittelwert ihrer Nachbarn ist, können diese nur beide gleich x sein oder eine ist größer und eine ist kleiner als x. Die zweite Möglichkeit ist aber wegen der Annahme, dass x eine kleinste Zahl ist, nicht möglich. Die Nachbarn dieser Zahlen sind nun wieder gleich x, ebenso wie deren Nachbarn und damit auch alle anderen Zahlen in dem Kreis. (Vgl. Grieser, 2013, S. 212f)

Außerdem wird das Extremalprinzip bei Aufgaben eingesetzt, bei denen etwas optimiert werden soll, beispielsweise wenn mit einem Stück Zaun bekannter Länge ein möglichst großes Blumenbeet an einer Hauswand entlang abgesteckt werden soll. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 99)

3.5.5 Invarianzprinzip

Arthur Engel nennt in seinem Buch *Problem-Solving Strategies* das Invarianzprinzip gleich an erster Stelle. Dieses Prinzip kann immer dann angewandt werden, wenn eine bestimmte Veränderung wiederholt durchgeführt wird. Dabei wird nach den Elementen gesucht, die sich nicht verändern, die also invariant sind. (Vgl. Engel, 1998, S. 1)

In Kurzform kann dieses Prinzip mit folgendem Satz ausgedrückt werden (Engel, 1998, S. 1):

„If there is repetition, look for what does not change!“

Mögliche Aufgaben, die mit dem Invarianzprinzip gelöst werden können, sind demnach diejenigen, bei denen sich etwas ändert. Ein Beispiel dafür sind so genannte Unmöglichkeitsbeweise, bei denen gezeigt werden soll, dass eine bestimmte Situation nie eintreten kann. Die folgende Aufgabe zeigt, was gemeint ist:

Aufgabe 19 (Eine Münze zieht diagonal) *(aus Grieser, 2013, S. 230)*
Auf einem Feld aus 6×6 Quadraten liegt eine Münze in der linken unteren Ecke. Ein Zug besteht darin, sie von einem Feld in eines der schräg angrenzenden Felder zu verschieben. Zeigen Sie, dass man die Münze niemals in die rechte untere Ecke bringen kann, egal wie oft man zieht.

Zum Lösen dieser Aufgabe kann das Feld wie ein Schachbrett eingefärbt werden. Angenommen die linke untere Ecke sei schwarz. Dann ist die rechte untere Ecke weiß. Bei einem Zug mit der Münze ist nun eine Eigenschaft invariant, nämlich die Farbe des Feldes, auf dem die Münze liegt. Denn durch einen diagonalen Zug ändert sich diese nicht. Deshalb kann die Münze nie die rechte untere Ecke erreichen, die ja weiß ist. (Vgl. Grieser, 2013, S. 230)

Nicht immer müssen sich Bedingungen mehrmals ändern, um das Invarianzprinzip anzuwenden. Wenn beispielsweise das Alter eines Vaters, der 31 Jahre alt war als sein Sohn 8 Jahre alt war und der jetzt doppelt so alt ist wie sein Sohn, ermittelt werden soll, so ändert sich nur einmal der Betrachtungszeitpunkt. Dennoch ist die Altersdifferenz von Vater und Sohn immer gleich und damit invariant. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 97f)

3.5.6 Transformationsprinzip

Bei diesem Prinzip soll die Betrachtungsweise eines Problems verändert werden, indem andere mathematische Arbeitsweisen herangezogen werden. Ein Beispiel dafür ist das Auffassen des Lösens einer Gleichung als Nullstellenfinden einer Funktion. Aspektwechsel dieser Art erfordern zwar ein breiteres Fachwissen, doch sie führen auch oft zu neuen Erkenntnissen. Ein weiteres Beispiel für eine Transformation ist das grafische Lösen von Gleichungen und Ungleichungen. Will man etwa beweisen, dass das arithmetische Mittel von zwei nichtnegativen Zahlen, $\frac{a+b}{2}$, immer größer oder gleich dem geometrischen Mittel $\sqrt{a \cdot b}$ dieser Zahlen ist, so kann dies geometrisch geschehen, wie in Abb. 3.11 zu sehen ist. Über einer Strecke bestehend aus zwei Teilstrecken mit den Längen a und b wird dabei ein Halbkreis errichtet, dessen Radius

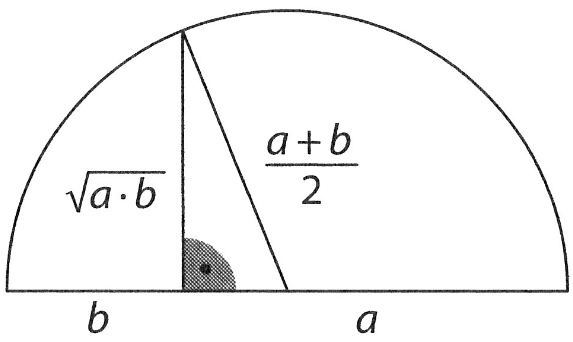


Abbildung 3.11: *Vergleich von arithmetischem und geometrischem Mittel*, aus: Bruder und Collet, 2011, S. 104

$\frac{a+b}{2}$ – also das arithmetische Mittel der beiden Zahlen – ist. Die Länge der Senkrechten von dem Punkt, an dem die beiden Teilstrecken einander berühren, zum Kreisbogen hin, ist laut Höhensatz das geometrische Mittel $\sqrt{a \cdot b}$ der beiden Zahlen. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 103f)

Folgende Impulse können beim Einsatz des Transformationsprinzips helfen (Bruder und Collet, 2011, S. 103):

- Suche nach anderen mathematischen Beschreibungsmöglichkeiten für das Gegebene und Gesuchte!
- Variiere die Bedingungen! Betrachte Gegebenes und Gesuchtes in verschiedenen Zusammenhängen!
- Zerlege, ergänze oder verknüpfe mit Neuem!

3.5.7 Symmetrieprinzip

Bruder und Collet beschreiben das Symmetrieprinzip wie folgt (Bruder und Collet, 2011, S. 100):

> *„Das Symmetrieprinzip als heuristisches Prinzip meint das Suchen nach Symmetrien (Identitäten, Musteranalogien) zwischen den Elementen der durch die Problemstellung gegebenen Informationsmenge.“*

Einerseits können solche Symmetrien natürlich in geometrischen Aufgaben gesucht werden. Beispielsweise kann das Finden von ähnlichen Dreiecken helfen, einige geometrische Probleme zu lösen. Auch das Spiegeln von Figuren kann helfen, neue Sichtweisen zu gewinnen. Andererseits ist auch bei anderen Aufgaben das Symmetrieprinzip oft hilfreich. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 101–103)

An der folgenden Aufgabe ist zu sehen, wie mit dem Symmetrieprinzip eine vergleichsweise schnelle und einfache Lösung gefunden werden kann:

Aufgabe 20 (Bruchgleichung) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 101)*
Es ist zu zeigen, dass für positive reelle a, b, c gilt:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}>\frac{3}{a+b+c}$$

Um nun eine Symmetrie zu erstellen, kann die rechte Seite der Gleichung auf drei Brüche mit jeweils 1 im Zähler aufgeteilt werden. Es ist einfach zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen jeder der drei Brüche auf der linken Seite der Ungleichung immer größer als $\frac{1}{a+b+c}$ ist. Hätte man die Aufgabe über das Bilden eines gemeinsamen Nenners gelöst, wäre dies deutlich aufwändiger und weniger einsichtig.

Kapitel 4

Aufgabensammlung

Dieses Kapitel ist eine Sammlung von Aufgaben, die im Unterricht besonders zum Erlernen und Einüben bestimmter Heurismen eingesetzt werden können. Deshalb sind die Aufgaben auch nach diesen geordnet, wobei es natürlich auch Aufgaben gibt, die zum Erlernen mehrerer Heurismen eingesetzt werden können.

Für die verschiedenen heuristischen Hilfsmittel werden keine eigene Abschnitte erstellt, da es meiner Meinung nach nicht unbedingt erforderlich ist, diese als separates Thema im Unterricht zu behandeln. Vielmehr sollte man zu dem Zeitpunkt, an dem eine Aufgabe gelöst wird, bei der sich ein bestimmtes Hilfsmittel gut eignet, näher auf dieses eingehen. Deshalb wird auch bei Aufgaben, die sich besonders für die Bearbeitung mit bestimmten Hilfsmitteln eignen, ein Hinweis darauf gegeben.

Die heuristischen Strategien und Prinzipien hingegen können meiner Meinung nach sehr wohl sinnvoll als eigenes Thema im Unterricht bearbeitet werden, und genau zu diesem Zweck sind zu ihnen auch Aufgaben angegeben, mit denen dies gemacht werden kann.

Außer den Einsatzbereichen werden das nötige Vorwissen, die Klassen, in denen die Aufgabe eingesetzt werden kann, mögliche Lösungswege und die vier Parameter *Formalisierungsgrad*, *Komplexitätsgrad*, *Bekanntheitsgrad* und *Ausführungsgrad* von Bruder und Collet (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 13f) zu jeder Aufgabe angegeben. Im Allgemeinen wird der *Bekanntheitsgrad* jedoch weggelassen, da er praktisch ausschließlich von der Vorgeschichte der lösenden Person abhängt.

Wo dies möglich ist, werden nicht nur einzelne Aufgaben angegeben und analysiert, sondern Aufgabengruppen. Dies bietet meist die Möglichkeit, selbst ähnliche weitere Aufgaben zu erstellen.

4.1 Aufgaben zu den heuristischen Strategien

4.1.1 Systematisches Probieren

Platzbelegungs-Aufgaben

Eine Aufgabe dieser Art, das *„Kinorätsel“* (Aufg. 12, S. 29), wurde bereits als Beispiel für die Verwendung von systematischem Probieren gegeben. Es gibt eine ganze Reihe von ähnlichen Aufgaben, von denen hier noch eine weitere angegeben werden soll:

Aufgabe 21 (Busplätzeaufgabe) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 49)*
In einem Bus ist ein Drittel der Plätze mit Kindern besetzt. 6 Plätze mehr werden durch Erwachsene belegt. 9 Plätze bleiben frei. Wie viele Plätze hat der Bus?

Mit relativ wenig Aufwand ist es zudem möglich, eigene Aufgaben dieser Art durch Abändern der Zahlenwerte und eventuell des Sachkontextes zu erstellen.

Einerseits können diese Aufgaben eingesetzt werden, um systematisches Probieren vor allem in den ersten Jahren der Sekundarstufe I zu trainieren. Andererseits bieten sie eine gute Gelegenheit, um informative Figuren einzusetzen, da diese besonders bei der Visualisierung sehr hilfreich sein können. Doch auch mit einer Gleichung lassen sich diese Aufgaben, besonders gegen Ende der Sekundarstufe I, gut lösen. Somit kann auch der Einsatz dieses Hilfsmittels trainiert werden. Und schließlich können im Zuge des Probierens Tabellen zum übersichtlichen Notieren der Fälle verwendet werden.

Diese Aufgaben sind ab der fünften Schulstufe geeignet, da die Schülerinnen und Schüler mit Angaben wie *„ein Drittel der Plätze“* etwas anfangen können sollten. Nach oben ist theoretisch keine Grenze gesetzt, doch sind diese Aufgaben meiner Meinung nach am besten bis in die sechste oder maximal siebente Schulstufe einsetzbar. Besonders wenn man damit das systematische Probieren trainieren möchte, werden die Aufgaben in höheren Klassen zu einfach und zudem ist dann eine Lösung mittels Gleichung schon deutlich näher liegend.

Gesamtplätze	Kinder	Erwachsene	frei
30	10	16	4 – zu wenig
33	11	17	5 – zu wenig
⋮	⋮	⋮	⋮
42	14	20	8 – zu wenig
45	15	21	9 – passt

Tabelle 4.1: *Tabelle zum Lösen der „Busplätzeaufgabe“ mit systematischem Probieren*

Ein möglicher Lösungsweg für diese Art von Aufgaben ist das systematische Probieren. Durch Analyse der Angabe kann fast immer herausgefunden werden, dass nur bestimmte Fälle probiert werden müssen, in diesem Fall durch drei teilbare Zahlen. Zudem sollte bei einer geeigneten Zahl begonnen werden, die als Lösung infrage kommt, damit nicht zu viele Fälle betrachtet werden müssen. Hier könnte man etwa die Anzahl der Plätze im Bus zunächst mit etwa 30 abschätzen und dann eine Tabelle wie Tab. 4.1 anfertigen.

Ein weiterer Lösungsweg ist das Aufstellen einer Gleichung, in der die Gesamtanzahl der Plätze als Variable gewählt wird:

$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + 6 + 9 \qquad \Rightarrow \frac{x}{3} = 15 \qquad \Rightarrow x = 45$$

Der *Formalisierungsgrad* dieser Aufgabe ist beim ersten Lösungsweg sehr gering, beim zweiten schon etwas höher, da die Gleichung aufgestellt werden muss. Der *Komplexitätsgrad* ist hingegen für den ersten Lösungsweg, insbesondere wegen der nötigen Teiblarkeitsüberlegung, höher. Der *Ausführungsgrad* ist beim ersten Lösungsweg nicht sehr hoch, beim zweiten etwas höher, weil das Lösen der Gleichung doch eine gewisse Fehleranfälligkeit beinhaltet.

Aufteilungs-Aufgaben

In dieser Kategorie sind diejenigen Aufgaben zusammengefasst, bei denen eine vorgegebene Zahl nach bestimmten Kriterien aufgeteilt werden soll. Meist geschieht dies mit einem bestimmten Geldbetrag, wie zum Beispiel bei der Briefmarken-Aufgabe der empirischen Untersuchung (siehe Abschnitt 5.1.1, S. 67), bei der mit genau einem Dollar Briefmarken bestimmter Werte gekauft werden sollen. Aber es gibt auch vielel Aufgaben, bei denen ein Gesamtalter auf verschiedene Personen *„aufgeteilt“* werden muss. Näher betrachtet wird hier die folgende Aufgabe, bei der ein Geldbetrag gewechselt werden soll:

Aufgabe 22 (Geldwechselaufgabe) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 59)*
Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Cent hinlegen, wenn du nur 10-Cent-, 5-Cent- und 2-Cent-Münzen zur Verfügung hast? Gib alle Möglichkeiten an!

Die Einsatzbereiche dieser Aufgaben neben dem Trainieren von systematischem Probieren sind das Üben des Arbeitens mit Tabellen, aber auch ein Kennenlernen des Extremalprinzips. Wenn nämlich wie bei Aufgabe 22 nach allen Möglichkeiten gefragt ist, wie dieser Betrag gezahlt werden kann, so hilft es beim Lösen, beispielsweise zunächst so viele 10-Cent-Münzen wie möglich zu wählen, und den noch fehlenden Geldbetrag mit den anderen beiden Münzarten aufzufüllen. (Vgl. Bruder und Collet, 2011, S. 59)

Aufgaben dieser Art können sicherlich ab der fünften Schulstufe, eventuell auch schon früher, eingesetzt werden. Der Vorteil zu den Platzbelegungs-Aufgaben besteht hier darin, dass kaum mathematisches Vorwissen erforderlich ist. Ich würde die Aufgaben jedoch nicht viel später als in der sechsten Schulstufe einsetzen, um die Schülerinnen und Schüler nicht zu unterfordern.

Wie schon bei den Platzbelegungs-Aufgaben können auch diese Aufgaben sehr gut mit systematischem Probieren gelöst werden, eine Tabelle ist ebenfalls hilfreich, um alle Fälle zu betrachten.

Dabei kann, wie bereits erwähnt, mit dem Extremalprinzip zunächst eine möglichst große Anzahl an 10-Cent-Münzen gewählt werden, die dann schrittweise verkleinert wird. Auch bei den 5-Cent-Münzen wählt man zunächst so viele wie möglich, um einen guten Überblick über die schon bearbeiteten Fälle zu behalten.

Ein zweiter möglicher Lösungsweg wäre beispielsweise, mit möglichst wenigen 10-Cent- und 5-Cent-Münzen zu beginnen und deren Anzahl dann schrittweise zu steigern. Ein Probieren ohne System ist zwar denkbar, aber wenig sinnvoll. Bei der Aufgabe geht es nämlich im Wesentlichen darum, ein System zu finden, um keinen Fall zu vergessen.

Der *Formalisierungsgrad* beim Lösen der Aufgabe ist sehr gering. Der *Komplexitätsgrad* ist etwas höher, denn die Überlegung, die Fälle nach Anzahl der 10-Cent-Münzen zu probieren, erfordert doch eine gewisse geistige Beweglichkeit. Der *Ausführungsgrad* wiederum ist gering.

Aufgaben mit schrittweisem zeitlichem Ablauf

Bei einigen Aufgaben, wie zum Beispiel der *„Kerzenaufgabe“* (Aufg. 8, S. 24), schreitet ein Prozess zeitlich voran, der in einzelne Schritte aufgeteilt werden kann. Bei der *„Kerzenaufgabe“* sind dies die Minuten, in denen die Kerze abbrennt. Ein weiteres Beispiel ist die Aufgabe *„Fuchs und Hund“*, die für die empirische Untersuchung in die nähere Auswahl genommen wurde (siehe Abschnitt 5.1.1, S. 67). In ihrer originalen Fassung lautet diese Aufgabe:

Aufgabe 23 (Fuchs und Hund) *(aus Hemme, 2007, S. 11)*
Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs neun Sprünge macht, macht der Hund sechs Sprünge, aber mit drei Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück wie der Fuchs mit sieben Sprüngen.
Mit wie vielen seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn der Jagd sechzig Fuchssprünge Vorsprung hat? Beide Tiere beginnen ihren ersten Sprung gleichzeitig.

Neben ihrem Einsatz als Beispiel für das systematische Probieren können Aufgaben dieser Art verwendet werden, um die Verwendung von Tabellen als Hilfsmittel zu trainieren. Auch das Anfertigen von informativen Figuren ist bei einigen dieser Aufgaben, wie etwa der *„Kerzenaufgabe“*, sinnvoll und kann thematisiert werden.

Diese Aufgaben können etwa ab der vierten bis fünften Schulstufe eingesetzt werden und eignen sich besonders für die sechste Schulstufe, da hier ein Zusammenhang mit Teilbarkeit hergestellt werden kann. Doch auch in höheren Schulstufen können sie noch verwendet werden, die Aufgabe *„Fuchs und Hund“* ist zum Beispiel wegen der nötigen Vorüberlegungen deutlich zu schwierig für Schülerinnen und Schüler der sechsten Schulstufe.

Der Lösungsweg des systematischen Probierens bei der Aufgabe *„Fuchs und Hund“* kann sehr gut mit einer Tabelle unterstützt werden. Dazu muss zunächst überlegt werden, dass sieben Fuchssprünge in der Entfernung drei Hundesprüngen entsprechen. Da der Hund aber in der Zeit, in der der Fuchs neun Sprünge macht, nur sechs Sprünge zurücklegt, ist es sinnvoll, die Aufgabe zunächst in Fuchssprüngen zu rechnen. Der Hund legt also in einer gewissen Zeit sechs Hundesprünge, das sind vierzehn Fuchssprünge, zurück, während der Fuchs in dieser Zeit neun seiner Sprünge macht. In Tab. 4.2 sind die Positionen von Hund und Fuchs in Fuchssprüngen angegeben. Zu Beginn hat der Fuchs 60 Sprünge Vorsprung. Der Hund holt den Fuchs also mit 168 Fuchssprüngen, das sind 72 Hundesprünge, ein.

Position Hund	**Position Fuchs**
0	60
14	69
⋮	⋮
140	150
154	159
168	168

Tabelle 4.2: *Tabelle zur Aufgabe „Fuchs und Hund"*

Mit den oben genannten Vorüberlegungen kann auch festgestellt werden, dass der Hund in jedem der oben beschriebenen Zeitintervalle den Fuchs um fünf Fuchssprünge aufholt. Folglich hat er die 60 Sprünge Vorsprung in $60 : 5 = 12$ solchen Intervallen überwunden. Diese zwölf Intervalle entsprechen 168 Fuchssprüngen, also 72 Hundesprüngen.

Alternativ dazu könnten in höheren Schulstufen auch die Bewegungen von Hund und Fuchs als lineare Funktionen dargestellt werden:

$$h(x) = 14 \cdot x \qquad f(x) = 60 + 9 \cdot x$$

Die Variable x repräsentiert dabei die seit Beginn der Jagd verstrichene Zeit. Als Einheit dient das oben erwähnte Intervall, in dem der Hund vierzehn und der Fuchs neun Sprünge zurücklegt. Durch ein Gleichsetzen der beiden Funktionen kann nun der Treffpunkt ebenfalls ermittelt werden:

$$14 \cdot x = 60 + 9 \cdot x \qquad \Rightarrow 5 \cdot x = 60 \qquad \Rightarrow x = 12 \qquad h(12) = f(12) = 168$$

Der *Formalisierungsgrad* bei dieser konkreten Aufgabe ist beim Lösungsweg des Probierens nicht sehr hoch, beim Lösungsweg mit Funktionen etwas höher. Der *Komplexitätsgrad* dieser Aufgabe ist, besonders wegen der nötigen Vorüberlegungen, in beiden Fällen recht hoch. Der *Ausführungsgrad* ist beim Lösungsweg des Probierens etwas geringer als beim Lösen mithilfe der Funktionen.

Aufgaben, bei denen alle Möglichkeiten gesucht sind

Nicht nur bei *Platzbelegungs-Aufgaben* kommt es vor, dass nach allen möglichen Belegungen gesucht wird. Eine ganze Reihe von Aufgaben verlangt, alle möglichen Anordnungen, Reihenfolgen, Kombinationen oder Ähnliches anzugeben. Ein Beispiel dafür ist die folgende Aufgabe:

Aufgabe 24 (Er lebe hoch!) *(aus Schmitt, 2004, S. 30)*
Zehn Freunde feiern Geburtstag. Florian macht den Vorschlag: „Wir wollen mit unseren Cola-Gläsern auf unsere Freundschaft anstoßen!“
Wie oft klingen die Gläser, wenn jedes Kind mit jedem anderen anstößt?

Auch die folgende Aufgabe fällt in diese Kategorie:

Aufgabe 25 (Von Tina und Nati) *(aus Schmitt, 2004, S. 28)*
Wie viele Möglichkeiten hat TINA, die Buchstaben ihres Namens in verschiedener, beliebiger Reihenfolge zu schreiben?

Einsatzgebiet dieser Art von Aufgaben ist einerseits das Üben von systematischem Probieren, andererseits die Stochastik in der Sekundarstufe II. Zudem kann das Extremalprinzip trainiert werden.

Diese Aufgaben können demnach sowohl in der fünften bis achten Schulstufe zum Üben des systematischen Probierens und des Extremalprinzips, als auch in der zehnten Schulstufe im Zusammenhang mit Permutationen eingesetzt werden.

Die Aufgabe *„Von Tina und Nati“* kann mit systematischem Probieren gelöst werden, indem der Reihe nach zunächst der erste Buchstabe nicht verändert wird. Hier gibt es die Möglichkeiten *TINA, TIAN, TNIA, TNAI, TAIN* und *TANI*. Auch innerhalb dieser ersten Kategorie wurde systematisch vorgegangen, indem für den zweiten Buchstaben in der Reihenfolge ihres Vorkommens in *TINA* die Buchstaben eingesetzt wurden. Da es also sechs Möglichkeiten gibt, die Buchstaben bei festgehaltenem T anzuordnen, gibt es auch für die anderen drei möglichen Anfangsbuchstaben je sechs Möglichkeiten. Insgesamt können diese vier Buchstaben also auf 24 verschiedene Arten angeordnet werden.

Will man diese Aufgabe mit dem Extremalprinzip lösen, so können die Buchstaben alphabetisch geordnet und zunächst der *„kleinste“* Buchstabe, also der erste im Alphabet, an der ersten Stelle festgehalten werden. Analog zum oben genannten Lösungsweg werden nun die anderen Buchstaben nach dem Extremalprinzip angeordnet.

Aus Sicht der Kombinatorik kann die Aufgabe mit etwas Vorwissen sehr rasch gelöst werden. Es geht nämlich um die Anzahl möglicher Anordnungen von vier Elementen. Die Anzahl möglicher Anordnungen von n Elementen ist $n!$, also können die vier Buchstaben auf $4! = 24$ verschiedene Arten angeordnet werden.

Der *Formalisierungsgrad* beim Lösungsweg des Probierens ist sehr gering, während bei der kombinatorischen Lösung schon einiges an Vorwissen erforderlich und daher der *Formalisierungsgrad* deutlich höher ist. Der *Komplexitätsgrad* ist in beiden Fällen nicht sehr hoch. Der *Ausführungsgrad* hingegen ist beim Lösungsweg des Probierens deutlich höher als bei den kombinatorischen Überlegungen.

4.1.2 Vorwärtsarbeiten

Es ist schwierig, konkrete Aufgaben für das Vorwärtsarbeiten zu nenen, da es sehr oft verwendet wird. Zum Erarbeiten und Trainieren dieser Strategie empfehlen Bruder und Collet das Finden von mathematischen Fragestellungen zu vorgegebenen Situationen (Bruder und Collet, 2011, S. 78f):

> *„Formuliere mathematische Fragestellungen, die für eine der folgenden Situationen von Iteresse sein könnten. Versuche dabei die Strategie des Vorwärtsarbeitens anzuwenden.*
>
> *a) Du bist bei einer Firma angestellt, die Schokowaffeln herstellt, und du sollst das Produkt verbessern.*
>
> *b) Du bist bei einer Firma tätig, die Orangensaft in Tetra-Packs herstellt und das Produkt soll sich besser verkaufen.*
>
> *c) Du hilfst zu Hause, das Badezimmer zu renovieren.*
>
> *d) Du willst eine Kerze gießen.*
>
> *e) Du entwirfst einen Swimmingpool für einen Garten.“*

Diese Aufgabe ist keine Problemlöseaufgabe im Sinne dieser Arbeit, weil kein gewünschter Zustand vorgegeben ist. Dennoch kann anhand von ihr sehr gut trainiert werden, möglichst viele Einsatzgebiete für gegebene Daten zu finden. Diese Fähigkeit ist von großem Nutzen beim Vorwärtsarbeiten, das ja genau darauf abzielt, aus den gegebenen Daten etwas zu folgern.

Ansonsten können sehr viele der erwähnten Aufgaben mit einer gewissen Form von Vorwärtsarbeiten gelöst werden. Beim *„Töchterproblem“* (Aufg. 4, S. 16) wird beispielsweise überlegt, was mit den Ausgangsdaten angefangen werden kann. Im Verlauf der Lösung werden dann immer mehr Aspekte der Angabe eingebaut. Auch bei *„Die Schnecke im Brunnen“* (Aufg. 5, S. 22) kann Schritt für Schritt überlegt werden, was aus den Ausgangsdaten folgt. Die *„Metallwürfelaufgabe“* (Aufg. 10, S. 26) kann durch reines Vorwärtsarbeiten, aber auch durch eine Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten gelöst werden.

Meiner Meinung nach ist es beim Vorwärtsarbeiten weniger wichtig, die Strategie mit speziellen Aufgaben zu üben, sondern es sollte nach erstmaliger Einführung dieser gelegentlich darauf hingewiesen werden, dass sie verwendet wird. Sie findet nämlich im Unterricht ohnehin viel Verwendung.

4.1.3 Rückwärtsarbeiten

Aufgaben mit gesuchtem Anfangszustand

Eine Art von Aufgaben zum Trainieren des Rückwärtsarbeitens sind diejenigen, bei denen der Endzustand gegeben ist und der Ausgangszustand gesucht wird. Ein Beispiel dafür ist die Aufgabe

„Die sieben Tore“ (Aufg. 13, S. 32). Auch die folgende Aufgabe ist ähnlich gestaltet:

Aufgabe 26 (Hundekekse) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 181)*
Gestern war ich mit unserem Hund Knecht Haberecht einkaufen. Auf dem Weg nach Hause war er so hungrig, dass er an jeder der 6 Straßenecken die Hälfte seiner Hundekekse und einen mehr aufgegessen hat. Am Ende war nur noch ein Keks übrig. Wie viele hatte ich denn jetzt gekauft?

Der hauptsächliche Einsatzbereich für diese Art von Aufgaben ist das Trainieren und Bewusstmachen des Rückwärtsarbeitens. Aber auch der Einsatz von Tabellen kann mit ihnen geübt werden. Und wie schon in Abschnitt 3.4.3 (S. 31) erwähnt, wird in einer gewissen Weise vorwärts gearbeitet, da von den gegebenen Daten aus Schritt für Schritt das gesuchte Ziel ermittelt wird.

Diese Art von Aufgaben kann ab der dritten bis vierten Schulstufe verwendet werden. Es ist nämlich relativ einfach, den *Ausführungsgrad* dieser Aufgaben anzupassen, indem etwa bei der Aufgabe *„Hundekekse“* die Anzahl der Hausecken variiert wird. Später als in der siebenten oder achten Schulstufe würde ich diese Aufgaben nicht einsetzen, da sie den Schülerinnen und Schülern sonst zu einfach und damit unterfordernd vorkommen könnten. Andererseits kann in der zehnten Schulstufe noch einmal im Zusammenhang mit Folgen auf diese Art von Aufgaben eingegangen werden, um einen neuen Aspekt und Lösungsweg zu betrachten.

Der wohl nächstliegende Lösungsweg bei dieser Art von Aufgaben ist derjenige, der stark an das Rückwärtsarbeiten erinnert. Gestützt mit einer Tabelle wird von der Situation am Ende ausgegangen und schrittweise zurückgerechnet. In Tab. 4.3 ist dargestellt, wie viele Kekse jeweils vor einer bestimmten Hausecke vorhanden waren.

Straßenecke	Hundekekse nachher
6	1
5	4
4	10
3	22
2	46
1	94
0	190

Tabelle 4.3: *Tabelle zur Aufgabe „Hundekekse“*

Besonders wichtig ist hier, darauf zu achten, dass es gewissermaßen auch eine *„nullte“* Straßenecke geben muss, nämlich das Geschäft. Denn wenn der Hund nach der sechsten Straßenecke nur noch einen Keks hatte, muss er vor dieser Ecke noch vier gehabt haben. In gleicher Weise muss er wenn er nach der ersten Straßenecke noch 94 Kekse hatte, vor der ersten Ecke 190 Kekse gehabt haben.

Ein alternativer Lösungsweg bei dieser Aufgabe ist das Aufstellen einer Folge für die Anzahl der Hundekekse, wobei es hier Sinn macht, die Straßenecken in der anderen Reihenfolge zu benennen. Die Anzahl der Kekse nach der letzten Ecke wird also mit $K(0)$ bezeichnet, während etwa die

Anzahl der Kekse nach der vierten Ecke $K(2)$ ist. So kann zunächst eine rekursive Darstellung angegeben werden:

$$K(n+1) = (K(n)+1) \cdot 2 \qquad K(0) = 1$$

Am besten ermittelt man nun die ersten sieben Folgenglieder und kommt so auf das Ergebnis. Das Finden einer expliziten Darstellung dieser Folge ist nämlich nicht gerade einfach und sprengt daher vielleicht den Rahmen des Unterrichts.

Beim Lösungsweg mit der Tabelle ist der *Formalisierungsgrad* der Aufgabe sehr gering, da direkt mit den gegebenen Zahlen gearbeitet wird. Der *Komplexitätsgrad* ist nicht sehr hoch. Der *Ausführungsgrad* dieser Aufgabe hängt von der Anzahl der Hausecken ab, ist im Fall von sechs Hausecken aber ebenfalls nicht sehr hoch.

Umfüllungsaufgaben

Bei dieser Art von Aufgaben ist ein Anfangs- und ein gewünschter Endzustand von Behältern mit Flüssigkeiten gegeben. Durch Umfüllen soll erreicht werden, dass der Zielzustand aus dem gegebenen Ausgangszustand hergestellt wird. Ein Beispiel dafür ist die folgende Aufgabe:

Aufgabe 27 (Rätsel für einen Milchmann) *(aus Loyd, 2003, S. 234)*
Der ehrliche John sagt: „Wenn es um Milch geht, kann mir keiner was vormachen", aber als ihn die beiden Damen eines Tages um 2 Quart (1 Gallone = 4 Quart) Milch anhielten, war er doch ziemlich verunsichert. Die eine Dame hatte einen 5-Quart-Kübel und die andere einen 4-Quart-Kübel. John hatte nur zwei 10-Gallonen-Kannen, die beide mit Milch gefüllt waren. Wie füllte er für jede Dame genau 2 Quart Milch ab?

Auch diese Art von Aufgaben gibt es mit verschiedener Schwierigkeit, es soll hier eine etwas einfachere Version näher betrachtet werden:

Aufgabe 28 (Eine Umfüllungsaufgabe) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 80)*
Seitdem Nico und sein Freund Tim im Knobelklub ihrer Schule sind, stellen sie sich ständig gegenseitig Aufgaben. Nach der Schule treffen sie sich bei Tim. Er drückt Nico zwei Eimer in die Hand und sagt: „Hier hast du einen 3-Liter- und einen 5-Liter-Eimer, aber beide ohne Maßeinteilungen. Du kannst so viel Wasser, wie du willst, so oft wie nötig hin- und herschütten. Ich wette mit dir um ein Eis, dass du es nicht schaffst, dass zum Schluss 4 Liter Wasser im 5-Liter-Eimer sind!" Welcher der beiden Jungen muss nachher das Eis bezahlen?

Diese Aufgaben eignen sich sowohl zum Üben des Rückwärtsarbeitens als auch dazu, den Einsatz von Hilfsmitteln wie Tabellen oder informativen Figuren zu trainieren. Ebenso können sie mit einer Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten gelöst werden.

Der Einsatzbereich dieser Aufgaben hängt stark von ihrer Schwierigkeit ab, die Aufgabe *„Rätsel für einen Milchmann"* würde ich nicht vor der siebenten oder achten Schulstufe einsetzen, während *„Eine Umfüllungsaufgabe"* sich durchaus auch für die vierte oder fünfte Schulstufe eignet.

Beim Lösen der *„Umfüllungsaufgabe“* ist es am besten, wenn vom Zielzustand ausgegangen wird. Mit der Überlegung, wie man vier Liter in den größeren Behälter füllen kann, ist es möglich den Zustand vor dem Zielzustand zu ermitteln. Dazu müssen nämlich der größere Behälter voll und der kleinere Behälter mit zwei Liter Wasser gefüllt sein. Davor wiederum muss der große Behälter leer und der kleine mit zwei Liter Wasser gefüllt sein. Um diesen Zustand zu erreichen, müssen im großen Behälter zwei Liter Wasser sein, während der kleine voll ist. Und dieser Zustand wiederum entsteht aus einem vollen großen und einem leeren kleinen Behälter. In Abb. 4.1 ist dargestellt, in welcher Reihenfolge die Behälter dann tatsächlich umgefüllt werden.

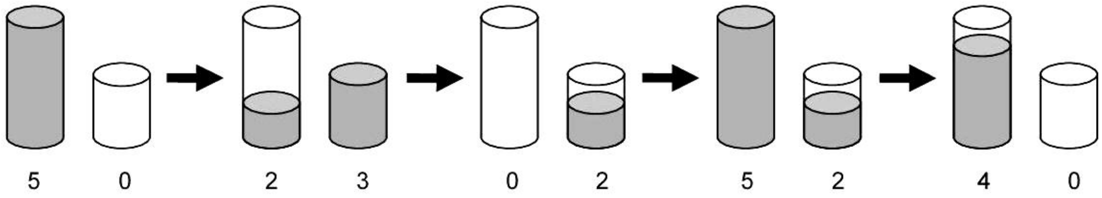


Abbildung 4.1: *Figur zur Lösung von „Eine Umfüllungsaufgabe“*, nach: Bruder und Collet, 2011, S. 81

Wenn nun beispielsweise der vorletzte Zustand in Abb. 4.1 in den letzten übergeführt werden soll, so wird aus den großen Behälter ein Liter in den kleinen geleert und dieser damit gefüllt. Anschließend wird der kleine Behälter entleert.

Alternativ könnte auch mit einer Tabelle gearbeitet werden, in der die einzelnen Zustände, ausgehend vom Zielzustand, in Zahlen dargestellt werden.

Der *Formalisierungsgrad* dieser Aufgabe ist sehr gering. Der *Komplexitätsgrad* ist bei dieser Art von Aufgaben nicht sehr hoch. Der *Ausführungsgrad* ist bei *„Eine Umfüllungsaufgabe“* ebenfalls nicht sehr hoch, da der jeweilige nächste Zustand immer nur durch einen vorigen Zustand erreicht werden kann. Bei der Aufgabe *„Rätsel für einen Milchmann“* hingegen ist dies nicht so, weshalb der *Ausführungsgrad* deutlich höher ist.

4.1.4 Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten

Aufgaben mit mehreren Schritten zur Lösung

Eine Kombination von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten kann nur dann angewandt werden, wenn mehrere Arbeitsschritte zum Ermitteln der Lösung einer Aufgabe nötig sind. Denn dann können einige davon durch Überlegungen, wie man das gewünschte Ziel erreichen kann (Rückwärtsarbeiten), und einige durch Überlegungen, was man aus den gegebenen Daten ermitteln kann (Vorwärtsarbeiten), gelöst werden. Ein Beispiel dafür ist die *„Metallwürfelaufgabe“* (Aufg. 10, S. 26). Auch die folgende weit verbreitete Aufgabe lässt sich auf diese Art lösen:

Aufgabe 29 (Ziege, Wolf und Kohlkopf) *(aus Hemme, 2003, S. 39)*
Ein Mann möchte mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf einen Fluss überqueren. Am Ufer liegt ein kleines Boot, das aber höchstens ihn und eines der Tiere oder den Kohlkopf trägt. Lässt der Mann den Wolf und die Ziege alleine, frisst der Wolf die Ziege. Lässt er hingegen die Ziege und den Kohlkopf alleine, frisst die Ziege den Kohlkopf.
Wie kann der Mann den Wolf, die Ziege und den Kohlkopf mit möglichst wenigen Bootsfahrten unbeschadet über den Fluss bekommen?

Mehrschrittige Aufgaben finden ein weites Anwendungsgebiet. Ihnen allen gemeinsam ist, dass sie sowohl zum Erlernen einer Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, als auch um jede der beiden Strategien einzeln zu erlernen eingesetzt werden können. Zudem ist bei den meisten dieser Aufgaben der Einsatz von Hilfsmitteln sinnvoll.

Was das Alter angeht so kann die Aufgabe *„Ziege, Wolf und Kohlkopf"* schon recht früh, etwa ab der dritten Schulstufe, eingesetzt werden. Wenn mit ihr die Kombination von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten bewusst gemacht werden soll, halte ich einen Einsatz in der fünften oder sechsten Schulstufe für am besten. Bei der *„Metallwürfelaufgabe"* hingegen müssen die Schülerinnen und Schüler sowohl Oberflächen als auch Volumina von Würfeln bestimmen können, sie ist also ab der fünften Schulstufe passend.

Ein möglicher Lösungsweg mit einer Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten könnte beginnen, indem überlegt wird, wie die erste Fahrt des Mannes aussehen kann. Nur Wolf und Kohlkopf können miteinander allein gelassen werden, also muss der Mann zunächst die Ziege ans andere Ufer bringen. Dann fährt er leer wieder zurück, denn nähme er die Ziege wieder mit, würde er nur wieder den Ausgangszustand herstellen. Dann kann überlegt werden, wie die letzte Fahrt des Mannes gestaltet sein muss. Auch hier können auf dem neuen Ufer nur Wolf und Kohlkopf stehen, also ist die letzte Fahrt des Mannes die mit der Ziege vom alten zum neuen Ufer. Die vorletzte Fahrt ist eine leere Fahrt vom neuen zum alten Ufer. Aus der Situation, dass Wolf und Kohlkopf am alten und die Ziege am neuen Ufer steht, soll nun der entgegengesetzte Zustand mit Wolf und Kohlkopf am neuen und Ziege am alten Ufer erreicht werden. Dies ist zum Beispiel dadurch möglich, dass der Mann zunächst den Kohlkopf hin-

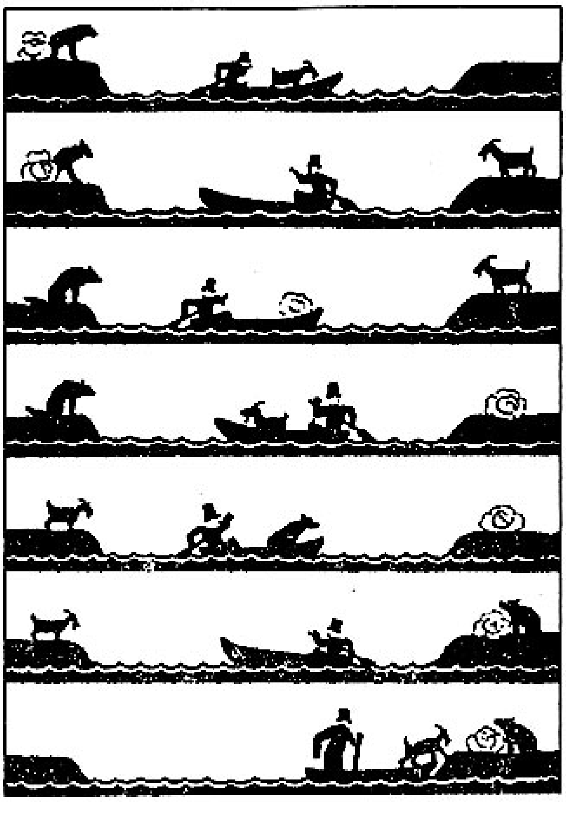


Abbildung 4.2: *Lösung von „Ziege, Wolf und Kohlkopf"*, aus: [1]

[1] `http://www.hirnwindungen.de/raetsel1/hirn_ziegeloes.html` (letzter Aufruf 08.05.2014)

über führt, gleich wieder mit der Ziege zurückkommt und dann sofort auch den Wolf zum Kohlkopf auf die andere Seite bringt. Die nun folgenden Schritte zur Lösung sind wegen der Überlegungen mit Rückwärtsarbeiten bereits festgelegt.

In Abb. 4.2 ist die Lösung der Aufgabe veranschaulicht. Auf dem eben genannten Lösungsweg wurden zunächst die ersten beiden Fahrten (Vorwärtsarbeiten) und die letzten beiden Fahrten (Rückwärtsarbeiten) erarbeitet. Dann wurde die noch bestehende Lücke durch Vorwärtsarbeiten geschlossen. Alternativ kann die Aufgabe auch durch reines Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten gelöst werden.

Der *Formalisierungsgrad* der Aufgabe ist sehr gering. Der *Komplexitätsgrad* ist etwas höher, weil zunächst erfasst werden muss, dass nur Wolf und Krautkopf gemeinsam oder die Ziege allein auf einer Seite zurückgelassen werden können. Der *Ausführungsgrad* ist nicht sehr hoch.

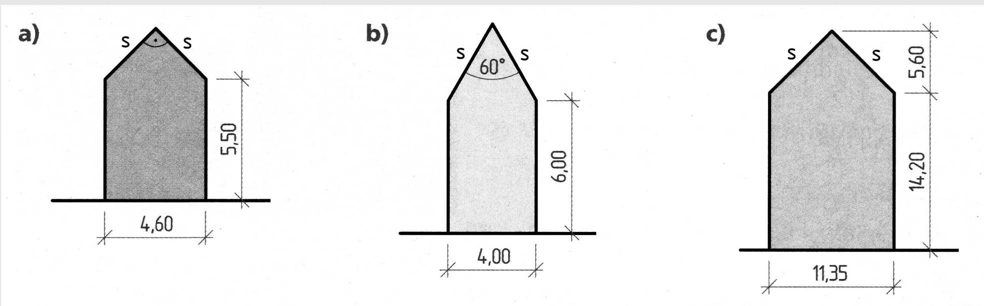
4.1.5 Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes

Berechnung von Flächeninhalten

Bei verschiedenen Aufgaben, bei denen Flächeninhalte berechnet werden, wird häufig die Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes verwendet. Ein Beispiel dafür ist die Aufgabe *„Zusammengesetzte Flächen“* (Aufg. 16, S. 37), bei der die gegebene Figur entweder durch Zerlegen oder durch Ergänzen so geteilt wird, dass die Berechnung ihres Flächeninhalts auf die Berechnung von Flächeninhalten bereits bekannter Figuren zurückgeführt werden kann. Auch die folgende Aufgabe aus einem Mathematik-Lehrbuch für die achte Schulstufe, passt in diese Kategorie:

Aufgabe 30 (Feuermauer) *(aus Litschauer u. a., 2010, S. 169)*

1. *Berechne die Länge s der schrägen Dachkante der gegebenen Feuermauer (Maße in Meter)!*
2. *Ermittle den Flächeninhalt der Feuermauer!*



Flächenberechnungen dieser Art können sowohl für das Üben der Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes, als auch um das Zerlegungs- oder Ergänzungsprinzip anzuwenden, eingesetzt werden.

Die Schulstufe, in der die Aufgaben eingesetzt werden können, hängt stark von der Fragestellung ab. Ist die Fläche lediglich aus Rechtecken zusammengesetzt, so können diese Aufgaben ab der fünften Schulstufe eingesetzt werden. In der sechsten Schulstufe werden Aufgaben dieser Art sogar explizit im Lehrplan unter *„Arbeiten mit Figuren und Körpern“* erwähnt (BMBF, 2000, S. 6):

> *„- Flächeninhalte von Figuren berechnen können, die sich durch Zerlegen oder Ergänzen auf Rechtecke zurückführen lassen, [...]“*

In der siebenten und achten Schulstufe kann dann auch mit Figuren gearbeitet werden, die sich in Dreiecke zerlegen lassen.

Wenn man vom ersten Teil der Aufgabe *„Feuermauer“* einmal absieht und davon ausgeht, dass s schon ermittelt wurde, kann sie sehr gut durch Rückführung auf Bekanntes gelöst werden. Im Teil *a)* beispielsweise kann die Feuermauer in ein Rechteck und ein rechtwinkeliges Dreieck zerlegt werden. Die Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte dieser beiden sind bereits bekannt, und so lässt sich der gesamte Flächeninhalt bestimmen:

$$s = \frac{4,6}{\sqrt{2}}\mathrm{m} \qquad A_{\text{ges}} = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Dreieck}} = 4,6 \cdot 5,5 + \left(\frac{4,6}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 25,3 + 5,29 = 30,59\mathrm{m}^2$$

Alternativ könnte die Fläche auf ein großes Rechteck mit den Seitenlängen $4,6$ m und $5,5 + \frac{4,6}{2} = 7,8$ m ergänzt und von dessen Flächeninhalt der Flächeninhalt der beiden kongruenten rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreiecke mit Kathetenlängen von je $2,3$ m abgezogen werden:

$$A_{\text{ges}} = A_{\text{Rechteck2}} - 2 \cdot A_{\text{Dreieck2}} = 4,6 \cdot 7,8 - 2 \cdot 2,3^2 \cdot \frac{1}{2} = 35,88 - 5,29 = 30,59\mathrm{m}^2$$

Der *Formalisierungsgrad* bei dieser Art von Aufgaben ist nicht sehr hoch. Der *Komplexitätsgrad* hängt davon ab, in wie viele Teile die Figur zerlegt werden muss und wie schwierig diese Zerlegung gegebenenfalls ist. Bei der Aufgabe *„Feuermauer“* ist er relativ gering, bei der Aufgabe *„Zusammengesetzte Flächen“* hingegen etwas höher. Der *Ausführungsgrad* ist bei diesen Aufgaben nicht sehr hoch, meist sind nur wenige Multiplikationen und Additionen beziehungsweise Subtraktionen erforderlich.

Teilbarkeitsaufgaben

Auch bei vielen Aufgaben zur Teilbarkeit wird von Unbekanntem auf Bekanntes zurückgeführt. Ist nämlich einmal bekannt, dass eine Zahl genau dann durch das Produkt von zwei teilerfremden Zahlen teilbar ist, wenn sie durch jede der beiden Zahlen teilbar ist, so können viele Fragen nach Teilbarkeit auf einige wenige Teilbarkeitsregeln zurückgeführt werden. Bei der Aufgabe *"5-stellige Zahl“* (Aufg. 11, S. 28) geht es zum Beispiel um die Teilbarkeit durch sechs, die mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln von zwei und drei überprüft werden kann. Auch die folgende Aufgabe kann auf ähnliche Weise gelöst werden:

Aufgabe 31 (Ziffern anhängen) *(nach Roth-Sonnen u. a., 2005, S. 41)*
Der Zahl 43 soll links und rechts je eine Ziffer so angehängt werden, dass die so erhaltene Zahl durch 45 teilbar ist.

Mit diesen Aufgaben kann das Rückführen von Unbekanntem auf Bekanntes trainiert werden. Oft kommt auch systematisches Probieren im Lösungsprozess vor, wie etwa bei der hier vorgestellten Lösung der Aufgabe *„Ziffern anhängen"*. Dabei werden manchmal auch Tabellen als Hilfsmittel eingesetzt.

Aufgaben dieser Art können ab der sechsten Schulstufe eingesetzt werden, sobald die Teilbarkeitsregeln erlernt wurden. Auch in der siebenten und achten Schulstufe ist der Einsatz sicherlich noch sinnvoll.

Eine Lösung für die Aufgabe *„Ziffern anhängen"*, bei der auf Bekanntes zurückgeführt wird, ist die Überlegung, dass die entstehende Zahl, um durch 45 teilbar zu sein, sowohl durch 5 als auch durch 9 teilbar sein muss. Die rechts angehängte Ziffer kann also nur entweder 0 oder 5 sein. Für die Teilbarkeit durch 9 muss die Ziffernsumme der Zahl durch 9 teilbar sein. Durch systematisches Probieren kann herausgefunden werden, welche Ziffern infrage kommen. Bei 0 als rechts angehängte Ziffer stellt sich heraus, dass nur, wenn links 2 angehängt wird, die Ziffernsumme durch 9 teilbar ist. Wird hingegen rechts die Ziffer 5 angehängt, so muss an der linken Seite 6 angehängt werden. Die beiden Zahlen, die der Bedingung entsprechen, sind also 2430 und 6435.

Der *Formalisierungsgrad* dieser Aufgaben ist relativ gering. Der *Komplexitätsgrad* kann, abhängig von der Schwierigkeit der Zerlegung des verlangten Teilers in Faktoren, gering oder etwas höher sein. Der *Ausführungsgrad* hingegen ist gering.

4.1.6 Suchen nach Analogien

Ähnlich wie beim Vorwärtsarbeiten ist es auch beim Suchen nach Analogien schwierig, Aufgaben anzugeben. Denn zu jeder Aufgabe, die mit Hilfe von Analogieschlüssen gelöst werden soll, müssen vorher von den konkreten Schülerinnen und Schülern schon einmal analoge Aufgaben gelöst oder zumindest bearbeitet worden sein. Auch das Lernen von Heurismen ermöglicht die Suche nach Analogien bei neuen Aufgaben. Wenn ein Lösungsweg nämlich bei einer neuen Aufgabe angewandt wird, ist das eigentlich auch schon ein Arbeiten mit Analogieschluss.

Um Analogieschlüsse zu üben, ist es meiner Meinung nach sinnvoll, Schülerinnen und Schülern öfters Aufgaben zu geben, denen sie selbst einen bestimmten Lösungsweg zuordnen können. Diese können nicht immer im Mathematiklehrbuch gefunden werden. Bei vielen Aufgaben in Mathematiklehrbüchern ist es nämlich so, dass diese im zugehörigen Kapitel zu finden sind (Vgl. z. B. Malle u. a., 2010, Müller und Hanisch, 2010). Beim Lösen einer Aufgabe, bei der dann beispielsweise eine quadratische Gleichung mit vorgegebenen Lösungen angegeben werden soll, braucht nur noch nachgeschlagen zu werden, welchem Thema die Aufgabe zugeordnet ist. In diesem Fall finden sich Aufgaben dieser Art im Kapitel zum Satz von Vieta (Vgl. Malle u. a., 2010, S. 75, Müller und

Hanisch, 2010, S. 86). Den Schülerinnen und Schülern wird dadurch die Möglichkeit genommen, selbst die Analogie zu schon mit diesem Satz gelösten Aufgaben zu finden. Andererseits ist es natürlich gerade beim Erarbeiten eines neuen Themas hilfreich, wenn die Aufgaben auf diese Art angeordnet sind. Und schließlich findet sich bei vielen Mathematikbüchern am Ende ein Kapitel, in dem verschiedene Aufgaben zu finden sind, bei denen der Lösungsweg wirklich nur durch Überlegungen zum Inhalt der Aufgabe selbst gefunden werden kann. Diese Kapitel können beispielsweise *„Kompetenzcheck“* (Vgl. Müller und Hanisch, 2010, S. 104f) oder *„Kontrolle: Grundwissen und Grundkompetenzen“* (Vgl. Malle u. a., 2010, S. 80f), in einem Unterstufenbuch auch zum Beispiel *„Vermischte Aufgaben“* (Vgl. Litschauer u. a., 2010, S. 69f), heißen. Mit Aufgaben aus solchen Kapiteln oder von anderen Quellen können die Schülerinnen und Schüler trainieren, Analogien zu suchen und den von ihnen verwendeten Lösungsweg selbst zu finden.

Auch Aufgaben verschiedener Art, bei denen konkret verlangt wird, dass sie auf mehrere verschiedene Arten gelöst werden, können die Suche nach Analogien trainieren. Bei diesen Aufgaben muss mehrmals überlegt werden, mit welcher Strategie sie gelöst werden können. Dadurch üben die Schülerinnen und Schüler entweder das Suchen eines für sie neuen Lösungsweges oder aber das Finden von Analogieschlüssen, wenn ähnliche Aufgaben schon bearbeitet worden sind.

4.2 Aufgaben zu den heuristischen Prinzipien

4.2.1 Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen

Geometrische Beweise

Das Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen ist in meinen Augen weniger ein heuristisches Prinzip als ein Hilfsmittel zum besseren Erfassen und anderen Darstellen von Aufgaben. Es ist daher schwierig, Aufgabengruppen zu finden, bei denen dieser Heurismus angewandt werden kann. Ein Beispiel sind jedoch geometrische Beweise, bei denen ein allgemeiner Sachverhalt gefragt ist. Bei manchen dieser Aufgaben kann das Arbeiten mit einem Spezialfall zumindest helfen, der allgemeinen Lösung näher zu kommen. Manchmal kann diese sogar aus dem Spezialfall abgeleitet werden, wie bei der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 32 (Peripheriewinkelsatz)
Ein Kreis werde von einer Geraden in den Punkten A und B geschnitten, die keinen Durchmesser des Kreises bilden. P sei ein Punkt auf dem Teil des Kreisbogens, der auf derselben Seite der Gerade liegt, wie der Mittelpunkt M des Kreises.
Zeige: Für jeden so gegebenen Punkt P ist der Winkel $\measuredangle APB$ halb so groß wie $\measuredangle AMB$.
(Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar, dass für jeden so gegebenen Punkt P der Winkel $\measuredangle APB$ gleich groß ist.)

Um diese Aufgabe zu lösen, kann ein Spezialfall betrachtet werden. Wählt man nämlich den Punkt P so, dass der Mittelpunkt M beispielsweise auf der Strecke AP liegt (siehe Abb. 4.3), so kann der gefragte Sachverhalt leicht nachgewiesen werden. Betrachtet man den Winkel $\measuredangle AMB$, so stellt sich heraus, dass dieser ein Außenwinkel des Dreiecks BMP ist. Folglich gilt $\measuredangle AMB = \measuredangle MPB + \measuredangle MBP$. Da das Dreieck PMB gleichschenkelig ist, folgt daraus unmittelbar $\measuredangle AMB = 2 \cdot \measuredangle APB$.

Dieser Beweis des Spezialfalles lässt sich sowohl für den Fall, dass M innerhalb, als auch für den Fall, dass M außerhalb des Dreiecks ABP liegt, verallgemeinern.

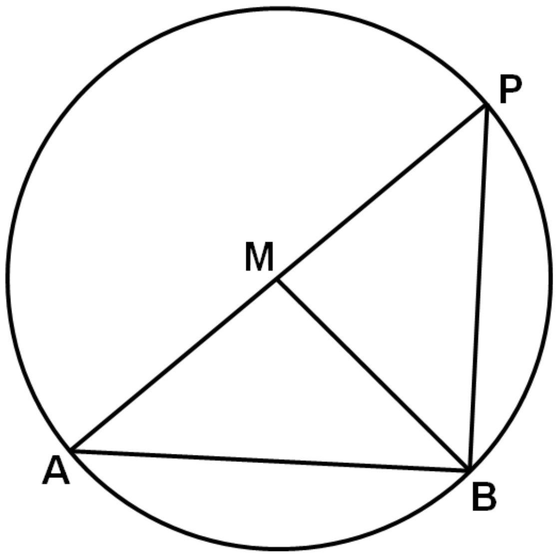
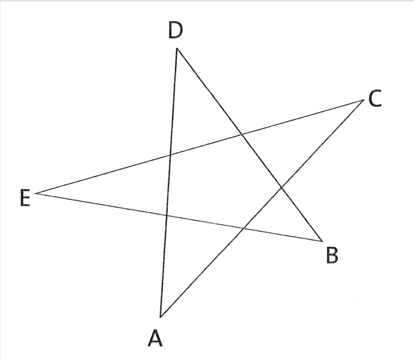


Abbildung 4.3: *Spezialfall der Aufgabe „Peripheriewinkelsatz“*

Auch bei der nächsten Aufgabe hilft ein Spezialfall dabei, das Problem zu lösen:

Aufgabe 33 (Sternfünfeck) *(aus Roth-Sonnen u. a., 2005, S. 24)*

Berechne die Winkelsumme im Sternfünfeck.



Die beschriebene Art von Aufgaben kann einerseits zum Üben des Einsatzes informativer Figuren verwendet werden. Auch das Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen kann trainiert werden. Ein Rückführen von Unbekanntem auf Bekanntes wird ebenfalls oft eingesetzt. Gelegentlich, wie beispielsweise bei der Aufgabe *„Peripheriewinkelsatz“*, wird auch mit Fallunterscheidung gearbeitet.

Der Einsatz der Aufgabe *„Sternfünfeck“* ist theoretisch ab der siebenten bis achten Schulstufe sinnvoll, wenn gewisse Grundkenntnisse über Dreiecke vorhanden sind. Außerdem sollte für diese Aufgabe der Umfangwinkelsatz (Peripheriewinkelsatz) behandelt werden, zum Beispiel wie in der Aufgabe *„Peripheriewinkelsatz“*. Dies wird meist nicht im Regelunterricht, sondern in Wahlpflichtfächern oder unverbindlichen Übungen möglich sein.

Betrachtet man zum Lösen der Aufgabe *„Sternfünfeck“* einen Spezialfall, nämlich einen Stern, bei dem alle Spitzen auf einem Kreis liegen, so kann für diesen die Lösung relativ einfach gefunden werden. Als Hilfslinien können noch die Radien zu den einzelnen Spitzen und die Kreissehnen, die jeweils zwei benachbarte Eckpunkte des Sternes verbinden, eingezeichnet werden (siehe Abb. 4.4). Mit dem Umfangwinkelsatz (Peripheriewinkelsatz) kann nun argumentiert werden, dass zum Beispiel der Winkel $\measuredangle ADB$ genau halb so groß ist wie der Winkel $\measuredangle AMB$. Die Summe der Winkel mit Scheitel im Mittelpunkt des Kreises ist $360°$, folglich beträgt die Winkelsumme in solchen Sternfünfecken $180°$.

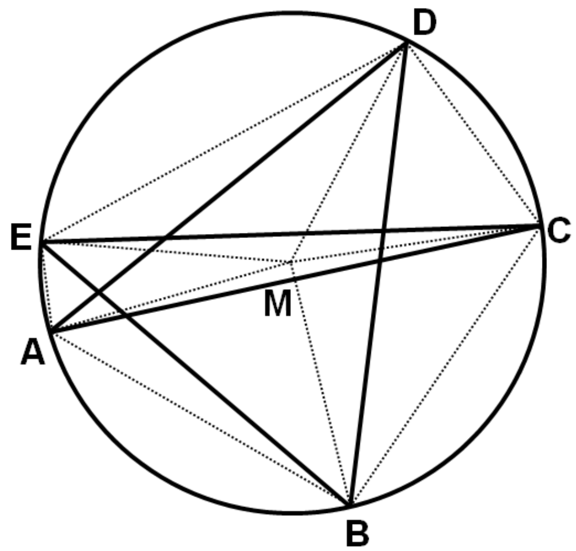


Abbildung 4.4: *Spezialfall der Aufgabe „Sternfünfeck“*

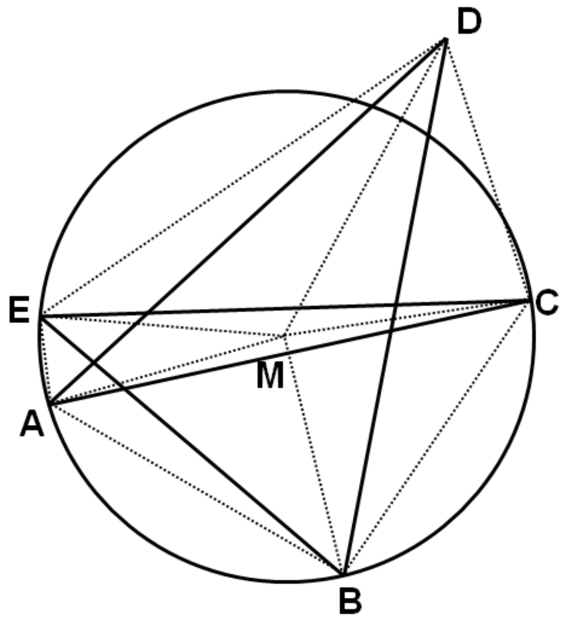


Abbildung 4.5: *Verallgemeinerung der Aufgabe „Sternfünfeck“*

Eine Lösung für alle Sternfünfecke kann aus der Lösung dieses Spezialfalles abgeleitet werden. Dazu betrachtet man einen Stern, bei dem einer der Punkte nicht mehr auf dem Kreisbogen liegt (siehe Abb. 4.5). Es ist für die weitere Argumentation unerheblich, ob dieser Punkt innerhalb oder, wie in Abb. 4.5, außerhalb des Kreises liegt. Im Vergleich zum vorigen Spezialfall sind die Winkel bei C und E gleich geblieben, die Winkel bei A, B und D haben sich jedoch verändert. Auch die Winkel $\measuredangle ABE$ und $\measuredangle CAB$ sind unverändert geblieben sind. Betrachtet man nun das Dreieck ABD, so stellt sich heraus, dass dessen Winkelsumme aus der Summe dieser beiden Winkel und der Winkel des Sternes bei A, B und D besteht. Somit hat sich die Summe der Winkel bei A, B und D nicht verändert, also ist auch die Winkelsumme im Sternfünfeck gleich geblieben.

Schritt für Schritt können nun noch zwei weitere Punkte des Sternfünfecks verschoben werden, sodass im Endeffekt ein allgemeiner Stern entsteht. Die Winkelsumme ändert sich dabei, wie eben gezeigt wurde, nicht.

Der *Formalisierungsgrad* dieser Aufgaben ist nicht sehr hoch, der *Komplexitätsgrad* hingegen schon. Das Finden eines Lösungsweges erfordert einiges an Aufwand. Der *Ausführungsgrad* ist gering.

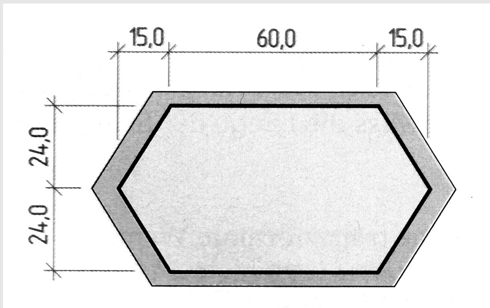
4.2.2 Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip

Flächeninhaltsberechnungen von zusammengesetzten Figuren

Bei dieser Art von Aufgaben, die meist sowohl mit dem Zerlegungs- als auch mit dem Ergänzungsprinzip gelöst werden können, sollen Flächeninhalte von Figuren ermittelt werden, die beispielsweise aus Recht- und Dreiecken zusammengesetzt sind. Ein Beispiel dafür ist die Aufgabe *„Zusammengesetzte Flächen“* (Aufg. 16, S. 37). Auch die folgende Aufgabe fällt in diese Kategorie:

Aufgabe 34 (Wandspiegel) *(aus Litschauer u. a., 2009, S. 199)*

Berechne den Flächeninhalt der rechts abgebildeten Spiegelfläche des sechseckigen Wandspiegels (Maße in Zentimeter)!



Aufgaben dieser Art können dem Erlernen des Zerlegungs- sowie des Ergänzungsprinzips dienen. Auch das Anfertigen von informativen Figuren kann bei einigen der Aufgaben, besonders bei denen, die noch keine Figur in der Angabe enthalten, geübt werden.

Eingesetzt werden können diese Aufgaben etwa ab der siebenten Schulstufe, sobald die Schülerinnen und Schüler den Flächeninhalt von Dreiecken und Rechtecken ermitteln können. Bei schwierigeren Figuren, beispielsweise mit Begrenzungslinien, die Teile von Kreislinien sind, muss der Einsatzbereich entsprechend angepasst werden.

Eine mögliche Lösung der Aufgabe *„Wandspiegel“* mit dem Zerlegungsprinzip ist das Zerlegen der Figur in zwei gleichschenkelige Dreiecke und ein Rechteck in der Mitte. Dazu werden zwei senkrechte Strecken ergänzt, die sowohl die kürzeren Seiten des Rechtecks als auch die längeren Seiten der beiden gleichschenkeligen Dreiecke sind. Aus der Abbildung können alle für die Berechnung nötigen Maße abgelesen werden. In der folgenden Berechnung bezeichnet A_{ges} den gesamten Flächeninhalt des Spiegels, A_R steht für den Flächeninhalt des Rechtecks und A_D für den jedes der beiden Dreiecke. Diese sind ja kongruent und haben damit auch den gleichen Flächeninhalt.

$$A_{\text{ges}} = A_R + 2 \cdot A_D = 60 \cdot 48 + 2 \cdot \frac{48 \cdot 15}{2} = 2880 + 48 \cdot 15 = 3600 \text{ cm}^2 = 36 \text{ dm}^2$$

Alternativ kann die Aufgabe auch mit dem Ergänzungsprinzip gelöst werden, wobei die Fläche des Wandspiegels durch Hinzufügen von vier kleinen rechtwinkeligen Dreiecken an den schrägen Kanten auf ein Rechteck ergänzt wird. Diese vier rechtwinkeligen Dreiecke sind kongruent, ihr Flächeninhalt wird in der folgenden Berechnung mit A_{D2} bezeichnet, während A_{R2} für den Flächeninhalt des großen Rechtecks und A_{ges} wiederum für den gesamten Flächeninhalt steht:

$$A_{\text{ges}} = A_{R2} - 4 \cdot A_{D2} = 90 \cdot 48 - 4 \cdot \frac{24 \cdot 15}{2} = 4320 + 2 \cdot 24 \cdot 15 = 3600 \text{ cm}^2 = 36 \text{ dm}^2$$

Der *Formalisierungsgrad* dieser Aufgaben ist mittelmäßig hoch, immerhin werden Kentnisse über die Flächeninhaltsformeln von Dreieck und Rechteck benötigt. Der *Komplexitätsgrad* ist nicht sehr hoch, obwohl die Überlegung des Zerlegens oder Ergänzens auch nicht selbstverständlich ist. Der *Ausführungsgrad* ist relativ gering, das Berechnen der Flächeninhalte ist nicht sehr fehleranfällig.

Volumenberechnung von zusammengesetzten Körpern

Auch bei Körpern, die aus Teilen zusammengesetzt sind, deren Volumina einfach berechnet werden können, ist ein Bestimmen des Volumens möglich. Hier kommt eher das Zerlegungs- als das Ergänzungsprinzip zum Einsatz, besonders, wenn spitz zulaufende Körper involviert sind. Bei Aufgaben mit Quadern, die quaderförmige Löcher haben, können hingegen sowohl das Zerlegungs- als auch das Ergänzungsprinzip eingesetzt werden.

Wegen der starken Ähnlichkeit zu den Flächeninhaltsberechnungen werden diese Aufgaben hier nicht näher erläutert.

4.2.3 Prinzip der Fallunterscheidung

Viele Problemlöseaufgaben beinhalten Fallunterscheidungen in ihrem Lösungsweg, sind jedoch schwierig zu kategorisieren. Bei einigen geometrischen Aufgaben im Zusammenhang mit Dreiecken etwa ist es sinnvoll, die Fälle des spitz- und stumpfwinkeligen Dreiecks zu unterscheiden. Bei vielen anderen Aufgaben kann ein bestimmter Parameter, der nur eine kleine Anzahl an Werten annehmen kann, jeweils bei einem dieser Werte festgehalten und so eine Fallunterscheidung getätigt werden. Zum expliziten Trainieren dieses Prinzips eignen sich außerdem noch die folgenden Aufgaben.

Kombinatorische Probleme

Eine Vielzahl kombinatorischer Probleme erfordert es, eine Fallunterscheidung vorzunehmen. Ein Beispiel dafür sind verschiedene Aufgaben, bei denen Kugeln unterschiedlicher Farbe, mit oder ohne Zurücklegen, aus einer Urne genommen werden. Diese finden im Unterricht oft Verwendung. Aber auch ein Brettspiel kann Thema solch einer Aufgabe sein:

Aufgabe 35 (Ein Brettspiel)
Bei einem beliebten Brettspiel ist jedes Spielfeld mit einem Zahlenkärtchen von 2 bis 12 belegt. Die Spieler können bei den Feldern Siedlungen bauen, um Rohstoffe zu erwirtschaften. Jede Runde wird dann mit zwei Würfeln gewürfelt, und alle Spieler erhalten Rohstoffe von den gewürfelten Feldern, neben denen sie gebaut haben.
Die Zahlenkärtchen von 2 bis 12 sind unterschiedlich gestaltet. Die Zahl 7 zum Beispiel ist rot gedruckt und relativ groß, während die Zahlen 2 und 12 ziemlich klein und schwarz gedruckt sind. Welche Bedeutung kann diese unterschiedliche Darstellung der Zahlen haben? Neben welchen Feldern sollte man eine Siedlung bauen, um möglichst viele Rohstoffe zu erwirtschaften? Welche Felder sollte man meiden?

Mit diesen Aufgaben kann einerseits das Prinzip der Fallunterscheidung trainiert werden, sie eignen sich andererseits auch gut zum Anfertigen von informativen Figuren, besonders in Form von Baumdiagrammen. Alternativ zu diesen können auch Tabellen hilfreich sein. Um alle Fälle zu finden ist meist systematisches Probieren erforderlich.

Einsetzen kann man diese Aufgaben am besten ab der sechsten Schulstufe, in der die Schülerinnen und Schüler im Unterricht zum ersten Mal mit relativen Häufigkeiten konfrontiert werden. Doch auch schon vorher können beispielsweise mit der Aufgabe *„Ein Brettspiel“* erste Überlegungen angestellt werden.

Um die Aufgabe *„Ein Brettspiel“* zu lösen, ist eine Fallunterscheidung notwendig. Die möglichen Ereignisse beim Werfen von zwei Würfeln müssen in irgendeiner Form dargestellt werden. Dies kann beispielsweise in Form eines Baumdiagramms erfolgen. Dort wird dann festgestellt, dass die Augensumme 7 in sechs der 36 Fälle gewürfelt wird, die Augensummen 2 und 12 jedoch beide nur in einem der 36 Fälle. Es ist daher auch ohne Wahrscheinlichkeitsbegriff klar, dass 7 öfter gewürfelt wird als beispielsweise 2.

Eine alternative Lösung kann mit einer Tabelle gefunden werden, bei der der erste Würfel zunächst immer 1 zeigen soll (Extremalprinzip), und der Reihe nach die Augensumme für die Möglichkeiten des anderen Würfels ermittelt wird. Dann wird auch die Augenzahl des ersten Würfels verändert. Anschließend wird abgezählt, welche Augensumme wie oft vorgekommen ist. Es ergibt sich folgende Reihung der Augensummen nach ihren Häufigkeiten, die in Klammern angegeben sind:

$$7(6), \quad 6 \text{ und } 8\ (5), \quad 5 \text{ und } 9\ (4), \quad 4 \text{ und } 10\ (3), \quad 3 \text{ und } 11\ (2), \quad 2 \text{ und } 12\ (1)$$

Der *Formalisierungsgrad* dieser Aufgaben ist niedrig, besonders dann, wenn nicht nach Wahrscheinlichkeiten oder relativen Häufigkeiten gefragt wird, wie bei der Aufgabe *„Ein Brettspiel“*. Der *Komplexitätsgrad* ist etwas höher, denn es muss ein System zum Betrachten aller Fälle angewandt werden, zudem gilt es, die gedankliche Hürde zu überwinden, dass beispielsweise die Augensumme 2 weniger häufig kommt als die Augensumme 3. Die Schülerinnen und Schüler könnten nämlich glauben, dass diese beiden Summen gleich häufig auftreten, weil sie ja beide aus genau einer Kombination von Würfeln gebildet werden. Dass jedoch die Kombinationen *„2 und 1“* sowie *„1 und 2“* verschiedene Fälle sind, kann für Probleme sorgen. Der *Ausführungsgrad* der

Aufgabe wiederum ist gering, das Abzählen der Fälle ist nicht sehr fehleranfällig.

4.2.4 Extremalprinzip

Das Extremalprinzip kommt an vielen Stellen vor. Bei Aufgaben, deren Ziel es ist, Maxima und Minima zu finden, wird zum Beispiel das Extremalprinzip angewandt. (Vgl. Grieser, 2013, S. 216) Diese Anwendung hat allerdings wenig mit dem Extremalprinzip als heuristischem Prinzip für Problemlöseaufgaben zu tun. Auch beim Lösen von Aufgaben, bei denen alle Möglichkeiten gefunden werden müssen, wird dieser Heurismus oft gemeinsam mit dem systematischen Probieren angewandt, was sich deutlich besser zum Trainieren dieses Prinzips eignet.

Aufgaben, bei denen bestimmte Eigenschaften von Objekten gezeigt werden

In diese Kategorie fallen alle Aufgaben, bei denen eine Menge an Objekten gegeben ist. Es soll dann zum Beispiel gezeigt werden, dass es mindestens ein Objekt mit einer ganz bestimmten Eigenschaft innerhalb dieser Menge gibt, wie etwa in der Aufgabe *„Ein Problem über Turniere“* (Aufg. 17, S. 38). Oder aber es soll gezeigt werden, dass alle Objekte eine bestimmte Eigenschaft aufweisen, wie es bei der Aufgabe *„Ein Problem über Mittelwerte“* (Aufg. 18, S. 39) der Fall ist. Bei der folgenden Aufgabe soll gezeigt werden, dass alle n Punkte eine bestimmte Eigenschaft erfüllen:

Aufgabe 36 (Dreiecke in der Ebene) *(aus Grinberg, 2004, S. 2)*
Es seien n Punkte in der Ebene gegeben. Je drei von ihnen bilden ein Dreieck, dessen Fläche kleiner oder gleich 1 ist. Beweisen Sie, dass es ein Dreieck gibt mit der Fläche 4, das alle n Punkte enthält.

Solche Aufgaben eignen sich in erster Linie dazu, das Extremalprinzip zu trainieren. Auch das Beweisen kann damit geübt werden.

Der Altersbereich, in dem sich diese Aufgaben einsetzen lassen, ist verschieden. Aufgrund der höheren Anforderungen sind die Aufgaben *„Ein Problem über Turniere“* und *„Dreiecke in der Ebene“* sicherlich eher für den Einsatz in einem Wahlpflichtfach oder einer Mathematikolympiade ab der zehnten oder elften Schulstufe geeignet. Die Aufgabe *„Ein Problem über Mittelwerte“* kann entweder auch in diesem Bereich als einfachere Einstiegsaufgabe oder aber ab der siebenten bis achten Schulstufe separat zum Demonstrieren oder Üben des Extremalprinzips eingesetzt werden.

Um die Aufgabe *„Dreiecke in der Ebene“* zu lösen, kann von allen Dreiecken, die aus drei der n Punkte gebildet werden, eines mit dem größten Flächeninhalt gewählt werden. Dieses Dreieck sei ABC und sein Flächeninhalt ist laut Angabe ≤ 1. Nun wird ein weiteres Dreieck $A'B'C'$ so konstruiert, dass seine Seiten parallel zu den Seiten von ABC und gleichzeitig durch die Punkte A, B und C verlaufen (siehe Abb. 4.6). Das Dreieck $A'B'C'$ besteht aus vier zu ABC kongruenten Dreiecken und hat daher einen Flächeninhalt ≤ 4.

Um nun zu zeigen, dass alle n Punkte innerhalb des Dreiecks $A'B'C'$ oder auf dessen Rand liegen, wird zunächst angenommen, dass ein Punkt X außerhalb von $A'B'C'$ liege. Angenommen X würde wie in Abb. 4.6 so liegen, dass die Gerade durch B' und C' zwischen X und A' liegt. Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks BCX jedenfalls größer als der des Dreiecks ABC, da diese beiden Dreiecke ja eine Seite gemeinsam haben, die dieser Seite zugehörigen Höhen jedoch verschieden sind. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass ABC ein Dreieck mit größtem Flächeninhalt unter den Dreiecken ist, die aus drei der n Punkte gebildet werden. Folglich muss die Annahme, dass X außerhalb von $A'B'C'$ liegt, verworfen werden. Alle n Punkte liegen also innerhalb des Dreiecks $A'B'C'$, dessen Flächeninhalt ≤ 4 ist. (Vgl. Grinberg, 2004, S. 2f)

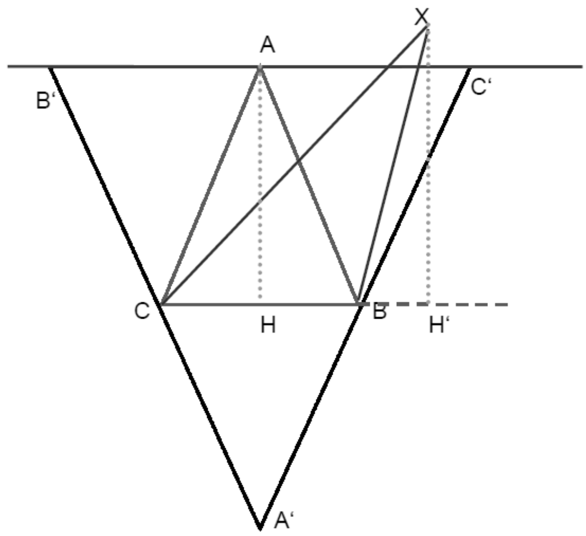


Abbildung 4.6: *Figur zur Aufgabe „Dreiecke in der Ebene“*, aus: Grinberg, 2004, S. 2

Der *Formalisierungsgrad* dieser Aufgaben ist nicht sehr hoch. Der *Komplexitätsgrad* hingegen ist besonders bei den Aufgaben *„Ein Problem über Turniere“* und *„Dreiecke in der Ebene“* sehr hoch, und auch die Aufgabe *„Ein Problem über Mittelwerte“* ist nicht gerade einfach. Der *Ausführungsgrad* hingegen ist wieder mäßig hoch, da bei gefundenem Lösungsweg das Anwenden desselben nicht sehr schwierig und fehleranfällig ist.

4.2.5 Invarianzprinzip

Altersbestimmungsaufgaben

Bei Altersbestimmungsaufgaben kann das Invarianzprinzip dadurch verwendet werden, dass der Altersunterschied zwischen zwei lebenden Personen immer gleich bleibt. Dafür werden Altersbestimmungsaufgaben vorausgesetzt, bei denen Informationen über mindestens zwei verschiedene Zeitpunkte angegeben sind, wie etwa bei den folgenden beiden Aufgaben. Mit wenig Aufwand können zudem ähnliche Aufgaben selbst erstellt werden.

Aufgabe 37 (Vater und Sohn) *(aus Schmitt, 2004, S. 41)*
Vater und Sohn sind zusammen 88 Jahre alt.
Wie alt ist jeder von ihnen, wenn der Vater bei der Geburt seines Sohnes 38 Jahre alt war?

Aufgabe 38 (Vater und ich) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 98)*
Als mein Vater 31 Jahre alt war, war ich 8 Jahre. Jetzt ist mein Vater doppelt so alt wie ich. Wie alt bin ich jetzt?

Aufgaben dieser Art können einerseits zum Üben des Invarianzprinzips eingesetzt werden, andererseits kann mit ihnen auch der Einsatz von Hilfsmitteln wie Figuren oder Gleichungen geübt werden.

Die Aufgaben können etwa ab der vierten oder fünften Schulstufe verwendet werden, was sich besonders deshalb anbietet, weil in diesen Klassen Gleichungen noch wenig oder gar nicht bekannt sind. Die Schülerinnen und Schüler kommen also im Allgemeinen gar nicht auf die Idee, hier Gleichungen aufzustellen, sondern müssen einen anderen Lösungsweg suchen. Damit kann das Invarianzprinzip trainiert werden. Will man hingegen den Einsatz von Gleichungen als heuristisches Hilfsmittel üben, so sollten diese Aufgaben in der sechsten oder siebenten Schulstufe verwendet werden.

Soll die Aufgabe *„Vater und ich“* mit dem Invarianzprinzip gelöst werden, so kann man von der Idee ausgehen, dass der Altersunterschied zwischen Vater und Sohn sich nicht ändert. Aus der ersten Angabe kann dieser leicht berechnet werden, er beträgt 23 Jahre. Zum zweiten Zeitpunkt ist der Vater doppelt so alt wie sein Kind, ihre Altersdifferenz ist aber immer noch 23 Jahre. Daher muss diese genau dem Alter des Kindes entsprechen, um die Bedingung zu erfüllen. Das Kind ist also 23 Jahre alt.

Die Lösung kann auch mithilfe einer Gleichung gefunden werden, in der das Alter des Kindes jetzt als x bezeichnet wird. Die Überlegung, dass der Altersunterschied zwischen Vater und Kind 23 Jahre beträgt, muss dennoch angestellt werden, allerdings kann der Rest der Aufgabe dann mit folgender Gleichung gelöst werden:

$$x + 23 = 2 \cdot x \qquad \Rightarrow x = 23$$

Der *Formalisierungsgrad* dieser Aufgaben ist bei beiden Lösungswegen nicht sehr hoch, wobei er beim Lösungsweg ohne Gleichung noch niedriger ist, als wenn diese verwendet wird. Auch der *Komplexitäts-* und der *Ausführungsgrad* dieser Aufgaben sind gering.

Anteile zu verschiedenen Zeitpunkten

Bei diesen Aufgaben sind beispielsweise Massenanteile zu verschiedenen Zeitpunkten gegeben, wie bei der *„Wassermelonenaufgabe“* (Aufg. 9, S. 25). Beim Lösen dieser Aufgabe kann die Tatsache ausgenutzt werden, dass die Masse der festen Anteile der Melone invariant ist. Auch die folgende Aufgabe passt in diese Kategorie:

Aufgabe 39 (Salat) *(aus Bruder und Collet, 2011, S. 134)*
Eine Köchin macht einen Salat mit Putenbruststreifen. Sie hat bereits 400 Gramm – davon 100 Gramm Fleisch und 300 Gramm Salatblätter. Wie viel Gramm Fleisch muss sie hinzugeben, damit das Fleisch 50 % des Ganzen wird?

Diese Aufgaben können eingesetzt werden, um das Invarianzprinzip bewusst zu machen. Oft sind auch Tabellen oder informative Figuren eine gute Hilfe beim Lösen dieser Aufgaben.

Ein Einsatz dieser Aufgaben ist ab der sechsten Schulstufe sinnvoll, sodass die Schülerinnen und Schüler mit Prozenten bereits etwas anfangen können. Besonders bei der *„Wassermelonenaufgabe“* ist dies nötig, die Aufgabe *„Salat“* könnte leicht umformuliert auch schon in der fünften Schulstufe behandelt werden.

Um einen Lösungsweg für die Aufgabe *„Salat“* zu finden, ist das Invarianzprinzip von großer Bedeutung. Die Größe, die sich bei dieser Aufgabe nicht ändert, ist nämlich die Menge der Salatblätter. Da diese, genau wie die Menge des Fleisches, am Ende die Hälfte des Salates ausmachen soll, müssen zu den 300 Gramm Salatblätter insgesamt 300 Gramm Putenfleisch gegeben werden. Die Köchin muss also noch 200 Gramm Putenfleisch kaufen.

Eine alternative Lösung kann mit einer Gleichung gefunden werden. Wird die Gesamtmenge des Putenfleisches als x angenommen, so gilt:

$$x = \frac{1}{2} \cdot (300 + x) \qquad \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x = 150 \qquad \Rightarrow x = 300$$

Daraus kann die noch zu kaufende Menge Fleisch leicht ermittelt werden.

Der *Formalisierungsgrad* dieser Aufgabe ist beim Lösungsweg mit dem Invarianzprinzip sehr gering. Wird hingegen die Gleichung verwendet, ist er mäßig hoch. Der *Komplexitätsgrad* ist bei beiden Lösungswegen mittelmäßig hoch. Der *Ausführungsgrad* hingegen ist wiederum bei der Lösung mittels Gleichung etwas höher als bei dem erstgenannten Lösungsweg.

4.2.6 Transformationsprinzip und Symmetrieprinzip

Beim Transformationsprinzip ist es schwierig, Aufgaben zum direkten Üben desselben anzugeben. Es hängt nämlich sehr vom persönlichen Standpunkt ab, ob es überhaupt nötig ist, die Aufgabe unter anderen Gesichtspunkten zu betrachten. Manche Schülerinnen und Schüler werden ein Problem möglicherweise gleich in den für die Lösung passenden Kontext stellen, während bei anderen die Transformation in eine andere Beschreibungs- oder Betrachtungsweise nötig ist. Daher kann das Transformationsprinzip als Grundlage für Hinweise an Schülerinnen und Schüler gesehen werden, muss meiner Meinung nach jedoch nicht eigens im Unterricht trainiert werden.

Auch Aufgaben zum Trainieren des Symmetrieprinzips sind schwer zu finden, weil dieser Heurismus nur selten bei in der Schule einsetzbaren Aufgaben vorkommt. Bei einzelnen Problemstellungen, sei es im Regelunterricht oder in einem Wahlpflichtfach, gibt es möglicherweise die Gelegenheit, durch Spiegelung das Finden einer Lösung zu erleichtern. In diesen Situationen kann dann auf das Symmetrieprinzip hingewiesen werden.

Kapitel 5

Empirische Untersuchung

5.1 Vorbereitungen, Vorüberlegungen

5.1.1 Wahl der Aufgaben

Bei der Wahl der Aufgaben wurde besonders darauf Wert gelegt, dass diese auf mehrere Arten zu lösen sind. Zudem sollte die Bearbeitung aller Aufgaben innerhalb einer Unterrichtsstunde möglich sein. In die nähere Auswahl wurden, nachdem einige andere wegen zu hoher Anforderungen weggelassen wurden, vier Aufgaben genommen, nämlich die *„5-stellige Zahl“*, die Aufgaben mit den *„Briefmarken“* und der *„Badewanne“* sowie die Aufgabe *„Hund und Fuchs“*. Diese vier Aufgaben sollen hier nun kurz besprochen werden. Die erstgenannten drei wurden schließlich in der Befragung verwendet.

5-stellige Zahl (Vgl. Aufgabe 11, S. 28)

Die erste näher betrachtete Aufgabe stammt aus einem Buch mit Knobel-Aufgaben für die 7. und 8. Schulstufe (Roth-Sonnen u. a., 2005). Es handelt sich um ein zahlentheoretisches Problem im weitesten Sinne, nämlich eine Frage nach der Teilbarkeit. Im Original lautet die Aufgabe wie folgt (Roth-Sonnen u. a., 2005, S. 42):

> *„Für welche Ziffer* a *ist die 5-stellige Zahl* 5aaaa *durch 6 teilbar?“*

Um eventuelle sprachliche Probleme auszuschließen wurde eine veränderte Formulierung gewählt, denn die Untersuchung soll nicht durch eventuelle mangelnde Lesekompetenz beeinträchtigt werden. Außerdem wurde durch die Verwendung von *„Ziffern“* anstatt *„Ziffer“* die Möglichkeit offen gelassen, dass es mehrere Lösungen gibt. Die veränderte Formulierung lautet wie folgt:

> *Bei einer 5-stelligen Zahl ist nur die erste Stelle, nämlich 5, bekannt. Alle anderen vier Stellen sind gleich. Die Zahl hat also folgende Gestalt:* 5aaaa*. Wählt man zum Beispiel* a = 0*, dann ist die Zahl 50000.*
> *Für welche Ziffern* a *ist diese 5-stellige Zahl* 5aaaa *durch 6 teilbar?*

Briefmarken

Diese Aufgabe stammt aus dem Buch *Mathematische Rätsel und Spiele* (Loyd, 2003). Es geht dabei darum, einen vorgegebenen Geldbetrag ohne Rest nach bestimmten Bedingungen auf drei Briefmarkenarten aufzuteilen. Im Original ist die Aufgabe wie folgt formuliert (Loyd, 2003, S. 85):

> *„Eine Dame gab dem Postbeamten am Schalter eine Dollarnote für Briefmarken und sagte: 'Geben Sie mir ein paar Marken zu 2 Cents, zehnmal so viel zu 1 Cent und für den Rest 5-Cent-Briefmarken.' Was tut der Beamte, um ihr diesen etwas verwirrenden Wunsch zu erfüllen?“*

Um Probleme durch fehlendes Vorwissen zu vermeiden, wurde noch angemerkt, dass ein Dollar 100 Cent entspricht.

Badewanne

Die dritte und letzte Aufgabe der Befragung wurde bei einem Beitrag von Johann Sjuts bei der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik gefunden (Sjuts, 2005). Hier geht es darum festzustellen, wie lange eine Wanne bei geöffnetem Stöpsel zum Füllen benötigt, wobei Zeiten für das Füllen bei geschlossenem Stöpsel und für das Leeren bei abgedrehtem Hahn angegeben sind. Im Originaltext lautet die Aufgabe wie folgt (Sjuts, 2005, S. 2):

> *„Man braucht zwei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und drei Minuten, um sie zu leeren.*
> *Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?“*

Um sprachliche Probleme zu vermeiden, wurde auch diese Aufgabe leicht umformuliert. Zudem wurde ein etwas stärkerer Alltagsbezug durch die Verwendung von *„Badewanne"* statt *„Wanne“* hergestellt:

> *Man braucht zwei Minuten, um eine Badewanne zu füllen. Wenn die Wanne voll ist, dauert es bei geöffnetem Stöpsel drei Minuten, um sie zu leeren. Wie lange dauert es, bis die Wanne voll ist, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?*

Fuchs und Hund (Vgl. Aufgabe 23, S. 45)

Die vierte zur Wahl stehende Aufgabe, die dann zugunsten der anderen drei nicht in die Befragung aufgenommen, sondern nur als Zusatzaufgabe ausgeteilt wurde, stammt aus einem Buch von Heinrich Hemme, in dem mathematische Rätsel mit Lösungen zu finden sind (Hemme, 2007). Die originale Formulierung lautet wie folgt (Hemme, 2007, S. 11):

„Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs neun Sprünge macht, macht der Hund sechs Sprünge, aber mit drei Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück wie der Fuchs mit sieben Sprüngen.
Mit wie vielen seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn der Jagd sechzig Fuchssprünge Vorsprung hat? Beide Tiere beginnen ihren ersten Sprung gleichzeitig."

Bei näherer Betrachtung wurde diese Aufgabe als zu schwierig für Schülerinnen und Schüler der siebenten Schulstufe empfunden und daher abgeändert. Die Strecken, die Fuchs und Hund mit einem ihrer Sprünge zurücklegen, wurden statt in Fuchs- und Hundesprüngen in Meter formuliert, ebenso wie der Vorsprung des Fuchses. Dadurch fällt ein schwieriger Aspekt der Aufgabe weg, bei dem man besonders darauf achten muss, mit Hunde- und Fuchssprüngen, die die Tiere in der gleichen Zeit zurücklegen, und mit den Sprüngen, die einander von der Distanz her entsprechen, nicht durcheinander zu kommen. Die neu formulierte Aufgabe lautet wie folgt:

Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge. Der Hund legt aber mit einem Sprung 2 Meter, der Fuchs jedoch nur 1 Meter zurück. Zu Beginn ist der Fuchs 60 Meter vor dem Hund. Mit wie vielen seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein?

5.1.2 Erwartete Lösungswege, mögliche Schwierigkeiten

Schon vor der Befragung wurde bei den drei den Schülerinnen und Schülern gestellten Aufgaben überlegt, welche Lösungswege die Lernenden möglicherweise wählen werden und welche Schwierigkeiten auftreten könnten.

5-stellige Zahl

Folgende Lösungswege könnten Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe wählen:

- Probieren: Alle Ziffern von 0 bis 9 werden für a eingesetzt und dann jeweils eine Division durch 6 durchgeführt. Bei einer der Ziffern hat diese Division keinen Rest.
- Probiern mit Vorüberlegung: Nur die geraden Ziffern werden für a eingesetzt, da die Zahl, wenn sie durch 6 teilbar sein soll, durch 2 teilbar, also gerade, sein muss.
- Teilbarkeitsüberlegungen: Die letzte Ziffer muss gerade sein, also muss a gerade sein. Außerdem muss die Ziffernsumme durch 3 teilbar sein, um für die ganze Zahl die Teilbarkeit durch 3 zu ermöglichen. Folglich muss $5+4\cdot a$ durch 3 teilbar sein, dies stimmt mit geradem a nur für $a=4$.

Schwierigkeiten werden bei dieser Aufgabe wahrscheinlich eher nicht auftreten. Möglicherweise kommen einzelne Schülerinnen und Schüler nicht auf die Idee, alle Möglichkeiten für a auszuprobieren, weil sie eine kompliziertere Lösung vermuten. Oder sie scheuen die Arbeit von zehn Divisionen.

Briefmarken

Bei der Briefmarken-Aufgabe könnten folgende Lösungswege auftreten:

- Systematisches Probieren: Mithilfe einer Tabelle, in der die Anzahl der 2 Cent- und 1 Cent-Marken sowie entweder die daraus errechnete Summe an Cent oder der auf 100 Cent noch fehlende Betrag oder die Anzahl der 5 Cent-Marken eingetragen ist, kann auch systematisch probiert werden. Trägt man beispielsweise in die dritte Spalte die Summe der Cent aus den bisherigen Marken ein, könnte so eine Tabelle folgendermaßen aussehen:

2 Cent-Marken	**1 Cent-Marken**	**Summe Cent**	**Fehlende Cent**	**5 Cent-Marken**
1	10	12	88	/
2	20	24	76	/
3	30	36	64	/
4	40	48	52	/
5	**50**	**60**	**40**	**8**
...	...	...	...	...

Tabelle 5.1: *Tabelle zum Lösen der Briefmarken-Aufgabe mit systematischem Probieren*

- Gleichung mit Probieren: Für die Gesamtsumme der Cent kann eine Gleichung in folgender Art aufgestellt werden: $2 \cdot x + 10 \cdot x + 5 \cdot y = 100 \;\Rightarrow\; 12 \cdot x + 5 \cdot y = 100$. Dabei steht x für die Anzahl der 2-Cent-Marken und y für die Anzahl der 5-Cent-Marken. Egal in welcher Form diese Gleichung vorliegt, kann eine ganzzahlige Lösung nun durch Probieren ermittelt werden, wobei entweder für x oder für y der Reihe nach Zahlen eingesetzt werden und dann versucht wird, für die andere Variable ebenfalls eine ganze Zahl zu finden, sodass die Gleichung erfüllt ist. Möglicherweise wird auch die Gleichung nach der anderen Variable explizit gemacht und diese berechnet. Das Probieren könnte noch von einer Tabelle gestützt sein.

- Gleichung mit Teilbarkeitsüberlegungen: Aus der oben genannten Gleichung könnte auch ersichtlich werden, dass beispielsweise sowohl die rechte Seite der Gleichung als auch $5 \cdot y$ durch 5 teilbar sind. Da 12 nicht durch 5 teilbar ist, muss also x durch 5 teilbar sein, was nur mehr die Lösung $x = 5,\ y = 8$ zulässt. Auch möglich ist die Überlegung, dass sowohl die rechte Seite als auch $12 \cdot x$ durch 4 teilbar sind, und folglich y durch 4 teilbar sein muss. Nun bleiben nur mehr die Fälle $y = 4$ und $y = 8$ zum Probieren übrig.

- Gleichung und intuitive Lösung: Wenn man die Gleichung betrachtet und ein gutes Gefühl für Zahlen hat, könnte man auch sofort auf eine mögliche Lösung ($x = 5,\ y = 8$) stoßen. Dass diese die einzige Lösung ist, muss hier nicht weiter überprüft werden, da nur nach einer Möglichkeit, den Wunsch der Dame zu erfüllen, gefragt ist.

Mögliche Schwierigkeiten beim Lösen dieser Aufgabe könnten sein, dass die Gleichung nicht aufgestellt werden kann und ein Probieren ohne System nicht zum Erfolg führt. Außerdem könnte es sein, dass die Schülerinnen und Schüler die Werte von y in der Gleichung durchprobieren, was erst später zu einer Lösung führt und daher fehleranfälliger ist.

Badewanne

Mögliche Lösungswege für die dritte Aufgabe sind (Vgl. auch Sjuts, 2005, S. 2f):

- Lösung in zwei-Minuten-Schritten: In den ersten zwei Minuten füllt sich die Wanne und gleichzeitig fließen $\frac{2}{3}$ des Wassers wieder ab. Daher ist die Wanne nach zwei Minuten zu $\frac{1}{3}$ voll, nach vier Minuten zu $\frac{2}{3}$ voll und nach sechs Minuten komplett gefüllt.
- Lösung in drei-Minuten-Schritten: In den ersten drei Minuten füllt sich die Wanne $1\frac{1}{2}$ mal und leert sich gleichzeitig ein mal völlig. Sie ist also nach drei Minuten zur Hälfte und nach sechs Minuten völlig gefüllt.
- Lösung mithilfe der Zu- und Abflussgeschwindigkeit: Die Wanne füllt sich in zwei Minuten, also fließt durch den Hahn $\frac{1}{2}$ Wanne pro Minute. Durch den Abfluss hingegen fließt $\frac{1}{3}$ Wanne pro Minute. Nun kann entweder mit einer Gleichung oder mit einer Tabelle herausgefunden werden, nach wie vielen Minuten insgesamt eine Wanne vorhanden ist. Die Gleichung sieht folgendermaßen aus: $\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot x = 1 \Rightarrow x = 6$. In einer Tabelle könnten etwa die Minuten und die Anzahl der Wannen nach diesen Minuten vermerkt werden, sodass nach einer Minute $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ Wanne, nach zwei Minuten $\frac{2}{6}$ Wanne, ... eingetragen wird. Obwohl die Angabe nicht vorgibt, dass die Lösung eine ganzzahlige Minutenanzahl ist, kann dennoch davon ausgegangen werden, dass die meisten Schülerinnen und Schüler einmal mit ganzen Minuten beginnen werden. Einige davon haben vielleicht auch die Absicht, einmal die beiden ganzen Zahlen zu finden, zwischen denen die Lösung liegt.
- Intuitiver Ansatz mit Erklärung: Auch hier kann die Lösung von *„intuitiven Problemlösenden“* möglicherweise direkt gefunden werden. Oder aber Schülerinnen und Schüler probieren einfach aus, nach wie vielen Minuten für Zu- und Abfluss eine ganzzahlige Anzahl an Wannen herauskommt und stoßen so auf die Lösung. Eine Begründung dafür könnte dann beispielsweise sein, dass in sechs Minuten drei Wannen zu- und zwei Wannen abfließen, also eine Wanne übrig bleibt.

Mögliche Schwierigkeiten beim Lösen dieser Aufgabe sind, dass ohne Vorüberlegungen ein reines Probieren keinen Erfolg mehr hat. Das hebt diese Aufgabe von der Schwierigkeit zumindest in diesem Punkt von den anderen ab. Außerdem fehlt bei vielen Schülerinnen und Schülern laut Sjuts die Vorstellung, dass sich die Wanne tatsächlich füllt, auch wenn der Stöpsel herausgezogen wurde. Anscheinend verhindert ein statisches Denken, dass der dynamische Vorgang von zwei Prozessen passend erfasst werden kann. (Vgl. Sjuts, 2005, S. 3)

Zudem ist noch anzumerken, dass Sjuts in einer Untersuchung diese und zwei anscheinend ähnliche – jedoch von der kognitiven Komplexität völlig unterschiedliche – Aufgaben Schülerinnen und Schülern der fünften bis siebenten Schulstufe vorgelegt hat. Die Lösungsquote war kaum davon abhängig, in welcher der drei Schulstufen befragt wurde, und betrug bei dieser Aufgabe auf alle Jahrgänge verteilt $15,7\%$. (Vgl. Sjuts, 2005, S. 3)

5.1.3 Wichtige Hinweise für die Befragung

Bei der Befragung sollten noch einige Dinge beachtet werden, die den Schülerinnen und Schülern zu Beginn mitgeteilt werden. Diese sind teils organisatorischer Natur, teils wichtig für eine sinnvolle Auswertung der Ergebnisse. Um sicherzustellen, dass diese Informationen allen Klassen in gleichwertiger Weise mitgeteilt werden, wurden sie als Checkliste formuliert:

- Zu Beginn sollen alle Teilnehmenden den Code aus drei Buchstaben auf ihrem Blatt ausfüllen. Dieser soll auch auf alle anderen Zettel geschrieben werden, um eine Zuteilung zu ermöglichen, falls etwas durcheinander gerät.
- Auch die restlichen Angaben zur Person sollen ausgefüllt werden, und zwar zu Beginn der Befragung. Nach dem Bearbeiten der Aufgaben sollen diese Angaben nicht mehr verändert werden.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen *alle* Ideen, die sie zu einer Aufgabe haben, notieren. Wenn ein Lösungsweg nicht zum Erfolg führt, soll er in Klammern gesetzt und nicht durchgestrichen werden.
- Mit jeder Aufgabe sollen sich die Teilnehmenden mindestens zehn Minuten lang beschäftigen. Wenn sie dann keinen Lösungsansatz gefunden haben, sollen sie das auf den Zettel schreiben.
- Die Schülerinnen und Schüler, die fertig sind haben die Gelegenheit, weitere dafür vorbereitete Aufgaben, die nicht untersucht werden, zu lösen, oder sich in anderer Form still zu beschäftigen ohne mit den Nachbarn zu kommunizieren. Ihre fertigen Aufgaben werden jedenfalls eingesammelt.
- Die Verwendung des Taschenrechners ist erlaubt.
- Es wird noch einmal besonders darauf hingewiesen, dass die Befragung keinen Einfluss auf die Mathematiknote hat, und dass es daher insbesondere nicht sinnvoll ist vom Nachbarn abzuschreiben. Dadurch werden nur die Ergebnisse beeinflusst und der Untersuchung geschadet.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen sich also eigenständig mit den Aufgaben beschäftigen und sich bemühen, diese zu lösen.

5.2 Durchführung

5.2.1 Zeitlicher Ablauf

Der zeitliche Ablauf war in allen fünf befragten Klassen ein ähnlicher und soll hier kurz geschildert werden.

Nach einer kurzen Einleitung der Klassenlehrkraft habe ich die Schülerinnen und Schüler begrüßt. Es folgte eine kurze Erläuterung der Aufgabenstellung, bei der besonders auf die Punkte in der oben genannten Checkliste eingegangen wurde. Dann wurde der Befragungsbogen (siehe Anhang A, S. 102) ausgeteilt und die Schülerinnen und Schüler begannen, zu arbeiten. Die reine Arbeitszeit betrug in jeder Klasse 35 bis 40 Minuten. Die Gelegenheit für 40 Minuten Arbeitszeit wäre in jeder Klasse gegeben gewesen, doch hatten manchmal alle Teilnehmenden schon früher ihre Fragebögen abgegeben.

All jene Schülerinnen und Schüler, die mit den Aufgaben fertig waren, konnten diese gleich abgeben und hatten die Möglichkeit, noch weitere, nicht bewertete Aufgaben (siehe Anhang B, S. 103) zu bearbeiten, was auch viele Kinder gemacht haben.

Die letzten 5 bis 10 Minuten der Unterrichtsstunde wurden in zwei Klassen dazu genutzt, die Lösungen der Aufgaben kurz zu besprechen. In einer Klasse wurde bis kurz vor Ende der Unterrichtsstunde gearbeitet, und in den verbleibenden beiden Klassen hatten die Klassenlehrer noch ein Anliegen, mit dem diese Zeit verbracht wurde.

5.2.2 Wichtige Erkenntnisse aus der ersten Befragung

Bei der ersten Klasse, die befragt wurde, sind mir einige Dinge klar geworden, die nicht ideal gelaufen sind. Um diese Fehler bei den folgenden Klassen zu vermeiden, wurden verschiedene Maßnahmen getroffen.

Zunächst ist mir aufgefallen, dass die Schülerinnen und Schüler nur selten einen Lösungsweg oder eine Begründung für ihre Lösung angegeben haben. Dies ist natürlich besonders im Hinblick darauf, dass die Lösungswege untersucht werden sollen, wenig erfreulich. Deshalb wurde bei allen anderen Klassen besonders betont, dass der Lösungsweg von großer Bedeutung für mich ist, und die Schülerinnen und Schüler wurden explizit gebeten, diesen anzugeben. Außerdem habe ich verlangt, dass die Aufgaben auf der Rückseite des Befragungsbogens oder auf einem separaten Blatt Papier gelöst werden sollten, und keinesfalls direkt zwischen oder neben den Angaben auf dem Zettel.

Eine weitere wichtige Erkenntnis für mich war, dass viele Schülerinnen und Schüler Fragen hatten, die das Erfassen und Verstehen der Angabe betrafen. Besonders bei der dritten Aufgabe (*„Badewanne“*) wurde oft die Frage gestellt, ob nun bei der dritten Situation der Wasserhahn aufgedreht sei. Deshalb wurde in weiterer Folge immer eine Skizze ähnlich Abb. 5.1 zur dritten Aufgabe an die Tafel gezeichnet, um hier Klarheit zu verschaffen.

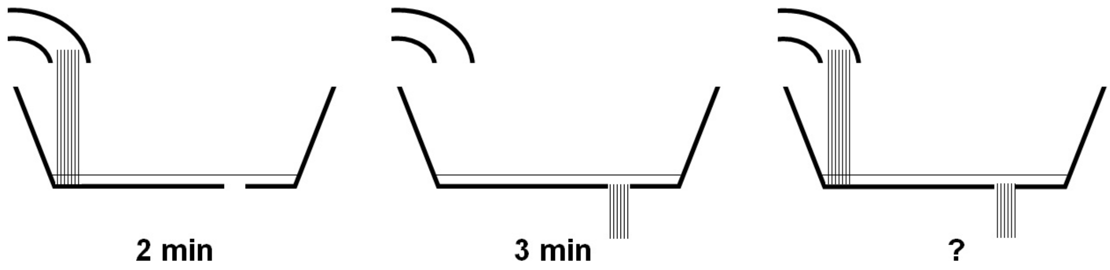


Abbildung 5.1: *Skizze zur Aufgabe „Badewanne“*

Abgesehen von diesen beiden Punkten ist die Befragung in besagter Klasse sehr gut gelaufen. Wesentlich zu erwähnen ist vor allem, dass mit einer Ausnahme alle Schülerinnen und Schüler in den etwa 40 Minuten, die nach der Erklärung noch von der Unterrichtsstunde übrig waren, die Aufgaben abgegeben haben. Während der Stunde habe ich den Eindruck gewonnen, dass alle Aufgaben bearbeitet werden und mir sind keine Lernenden aufgefallen, die nicht auch für die dritte von ihnen bearbeitete Aufgabe genügend Zeit gehabt hätten.

5.3 Auswertung

5.3.1 Stichprobe

Die Befragung wurde in fünf dritten Klassen (achte Schulstufe) an zwei verschiedenen Schulen durchgeführt, wobei an einer Schule zwei und an der anderen Schule drei Klassen befragt wurden. Da eine Untersuchung der Unterschiede zwischen den Klassen wegen fehlender Hintergrunddaten nicht sinnvoll und zudem ohnehin nicht Sinn und Zweck der Befragung ist, werden alle Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler gemeinsam, und nicht klassenweise, analysiert.

Insgesamt wurden 117 Schülerinnen und Schüler befragt, nämlich 58 Mädchen und 59 Burschen. Auch mögliche geschlechtsspezifische Unterschiede sind nicht Thema dieser Arbeit, deshalb werden diese in weiterer Folge außer Acht gelassen.

5.3.2 Selbsteinschätzung von Motivation und Lösungsfertigkeiten

Zu Beginn des Fragebogens wurden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, abgesehen von ihrer Mathematiknote im Semesterzeugnis anzugeben, wie gerne sie sich mit Problemlöseaufgaben (Formulierung am Fragebogen: *„Knobel- und Rätselaufgaben“*) beschäftigen und wie gut sie diese lösen können. In Abb. 5.2 und 5.3 sind die relativen Häufigkeiten der angekreuzten Antworten zu finden.

Besonders die Zahlen bei der Motivation sind für mich etwas erstaunlich, denn wenngleich fast

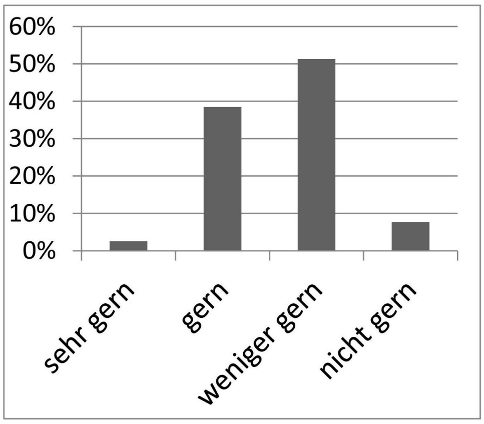


Abbildung 5.2: *Motivation für Problemlöseaufgaben*

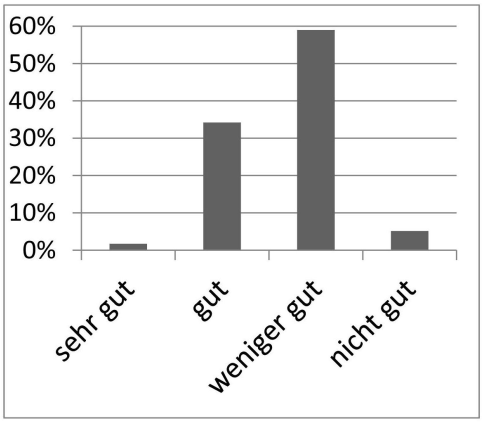


Abbildung 5.3: *Selbsteinschätzung der Problemlösefertigkeiten*

40% der Schülerinnen und Schüler sich sehr gern oder gern mit Problemlöseaufgaben beschäftigen, so hätte ich doch erwartet, dass es zumindest mehr als die Hälfte sind. Die Selbsteinschätzung der Kinder bezüglich ihres Könnens entspricht in etwa meinen Vermutungen.

5.3.3 Auswertungsschema

Die Aufgaben wurden auf den gewählten Lösungsweg hin untersucht. Dabei wurden bei jeder Aufgabe Kategorien für die verschiedenen möglichen Lösungswege eingeführt, die bei Bedarf auch während der Auswertung erweitert wurden. Von diesen Kategorien sind hier nur diejenigen angeführt, die tatsächlich bei den Arbeiten gefunden wurden.

Einige der Kategorien wurden bei allen drei Aufgaben verwendet, dies sind:

- **Begründung fehlt:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Entweder ist der Lösungsweg nicht angeführt oder die Begründung dafür, warum das genannte Ergebnis richtig ist, fehlt.
  Diese Kategorie wird zum Beispiel dann verwendet, wenn bei der zweiten Aufgabe als Lösung von einer Schülerin lediglich

  „5 Marken um 2 Cent
  50 Marken um 1 Cent
  8 Marken um 5 Cent"

  angegeben ist. Bei Beispielen aus den Arbeiten der Schülerinnen und Schüler werden diese jetzt und in weiterer Folge wörtlich angegeben, also auch mit eventuell vorhandenen Rechtschreib- und Grammatikfehlern.
- **unvollendete Bearbeitung:** Die Aufgabe wurde nicht richtig gelöst. Es wurde nur ein von den Teilnehmenden wieder verworfener, unvollendeter Ansatz verwendet. Auch gar nicht

bearbeitete Aufgaben fallen in diese Kategorie.

- **falsch gelöst:** Die Aufgabe wurde nicht richtig gelöst. Die Teilnehmenden haben eine Lösung angegeben, diese ist aber falsch. Außerdem entspricht diese Lösung keiner anderen der bei den einzelnen Aufgaben angegebenen Kategorien, die bei falsch gelösten Aufgaben angewandt werden.

Aufgabe 1 – 5-stellige Zahl

Bei dieser Aufgabe wurden folgende zusätzlichen Kategorien verwendet:

- **Probieren:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Alle Ziffern wurden für a probiert und das korrekte Ergebnis ermittelt. Dabei kann das Probieren sowohl händisch als auch mit Taschenrechner erfolgt sein.
  Ein Beispiel für diese Kategorie von einem der Fragebögen ist:

  > *„Lösung: 54444 ist teilbar durch 6. Denkweise: Ich habe alle Zahlen von 1 bis 9 eingesetzt und bei der Zahl (54444) ist kein Rest geblieben."*

  Dazu ist noch anzumerken, dass der Fall $a = 0$ bereits in der Angabe erwähnt und vermutlich deshalb von dieser Schülerin nicht mehr betrachtet wurde.

- **Teilbarkeit:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Mithilfe von Teilbarkeitsüberlegungen verschiedener Art konnte die korrekte Lösung ermittelt werden.
  Ein Beispiel für diesen Lösungsweg wäre etwa:

  > *„Ich habe nachgedacht welche Ziffernsumme durch 3 teilbar ist und dann geschaut ob sie durch 6 Teilbar ist*
  > $5+4+4+4+4:3=7 \qquad 5444:6=9074$"

  Wenngleich dieser Schüler grammatikalisch unklar formuliert hat, dass er mit *„sie"* die Zahl und nicht die Ziffernsumme meint, und obwohl er vergessen hat, eine Klammer bei seiner ersten Rechnung zu setzen, hat er die Aufgabe doch mithilfe von Teilbarkeitsüberlegungen richtig gelöst. Aufgrund der Formulierung wurde außerdem angenommen, dass der Schüler alle Fälle mit durch drei teilbarer Ziffernsumme überprüft hat, was nicht mit Sicherheit bestätigt werden kann.

- **Fälle fehlen:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Auf irgendeine Weise, die nicht unbedingt mathematisch richtig sein muss, wurde die Lösung $a = 4$ ermittelt. Diese wurde auch überprüft. Es ist aber nicht ersichtlich, dass auch andere Fälle überprüft wurden.
  Ein Beispiel dafür, das zweimal in ähnlicher Art bei Schülerinnen und Schülern gefunden wurde, ist:

  > *„In der Angabe findet man die Zahl 4. Durch die muss man dann durch 6 dividie-*

ren. Also $5444 : 6 = 9074$*“*

Der Schüler hat also die Tatsache, dass in der Angabe der Text *„Alle anderen vier Stellen sind gleich.“* zu finden ist zum Anlass genommen, die Ziffer vier für a auszuprobieren. Die dadurch entstandene Zahl hat er dann auf Teilbarkeit durch sechs überprüft, andere Fälle hat er jedoch nicht bearbeitet.

- **Probieren falsch:** Die Aufgabe wurde nicht richtig gelöst. Es wurden alle Ziffern durchprobiert, aber entweder wurde durch einen Rechenfehler angegeben, dass keine Ziffer die Bedingung erfüllt, oder es wurde ein falsches Ergebnis erreicht.

Besonders zu *„Fälle fehlen“* ist anzumerken, dass ja in der Angabe extra noch die Formulierung auf *„für welche Ziffern“* geändert wurde, sodass eben nicht nach dem Finden einer Lösung aufgehört werden kann, sondern eine Begründung für die Vollständigkeit der Lösung erforderlich wäre. Die Aufgabe wurde in diesem Fall dennoch als richtig bewertet, jedoch wird bei der Auswertung noch näher auf diese Kategorie eingegangen.

Aufgabe 2 – Briefmarken

Bei der zweiten Aufgabe wurden folgende Kategorien zusätzlich zu den allgemeinen verwendet:

- **Probieren:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Es ist eindeutig erkennbar, dass mindestens ein anderer Fall probiert wurde, oder das Probieren wurde von den Teilnehmenden explizit erwähnt. Dabei wurden keine Überlegungen zur Teilbarkeit angestellt.

- **Teilbarkeit:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Durch Überlegungen zur Teilbarkeit wurde entweder das Probieren eingeschränkt oder direkt die richtige Lösung gefunden.
  Ein Beispiel für diese Kategorie ist:

  „Um auszurechnen wieviele 5 cent Briefmarken man braucht muss die zahl mit Oo.5 enden. Ich hab so lange ausprobiert bis dass stimmt / passt.
  $5 \cdot 2c + 5 \cdot 10 \cdot 1c + y \cdot 5c$
  $10c + 50c + y \cdot 5c$
  $60c$
  $100 - 60 = 40 : 5 = 8$
  A: Der Beamte gibt 5×2 *cent* 50×1 *cent* 8×5 *cent“*

  Der Schüler hat also überlegt, dass die Summe der Werte von 2- und 1-Cent-Marken eine durch fünf teilbare Zahl ergeben muss. Dann hat er durch Probieren die richtige Lösung gefunden.

- **Voraussetzung:** Die Aufgabe wurde nicht richtig gelöst. Es wurde zwar eine Lösung angegeben, aber diese beachtet die Voraussetzung, dass zehn mal so viele 1-Cent-Marken wie 2-Cent-Marken gekauft werden, nicht.

Eine typische Lösung hier ist:

$$\begin{aligned} „5 \cdot 2 \; cent &= 10 \; cent \\ 14 \cdot 5 \; cent &= 70 \; cent \\ 20 \cdot 1 \; cent &= 20 \; cent \\ &= 100 \; cent \; = 1 \; Dollar“ \end{aligned}$$

Aufgabe 3 – Badewanne

Die dritte und letzte Aufgabe wurde nach folgenden Kategorien bewertet, die die allgemeinen ergänzen:

- **2 Minuten:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Dazu wurde in 2-Minuten-Schritten überlegt, wann wie viel Wasser in der Wanne ist.
  Ein Beispiel für diesen Lösungsweg ist:

  „2 min voll   3 min leer
  $= \frac{1}{3}$ *des Wassers bleibt drinnen = 2 min* $\cdot 3 =$ *6 min“*

  Der Schüler hat also überlegt, wie viel Wasser nach zwei Minuten noch in der Wanne ist, nämlich $\frac{1}{3}$ der Wanne.

- **3 Minuten:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Dazu wurde in 3-Minuten-Schritten überlegt, wann wie viel Wasser in der Wanne ist.

  Auch hier soll ein Beispiel zur Verdeutlichung dienen:

  „Ich glaube man braucht 6 min, weil es ja 3 min braucht bis die Wanne leer ist und wenn man das Wasser einfüllt, dann braucht es doppelt so lange! (Es kommt ja dazu, dass die Wanne keinen Stöpsel hat!)“

  DieSchülerin hat also überlegt, dass nach drei Minuten die Wanne erst zur Hälfte gefüllt ist und daher doppelt so viel Zeit, also sechs Minuten, zum Füllen der Wanne nötig sind.

- **Durchfluss:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Bei der Lösung wurden Überlegungen zur Durchflussrate oder -geschwindigkeit in irgendeiner Form angestellt. Es wurde also überlegt, wie viel Wasser pro Minute zu- und abfließt.
  Ein Beispiel für diese Kategorie ist:

  $$\begin{array}{ll} „100:2=50 & 1\,min = 50\% \\ 100:3=33,\dot{3} & 1\,min = 33,\dot{3}\% \\ 50-33,\dot{3}=16,\dot{6} & 1\,min = 16,\dot{6}\% \\ 100:16,\dot{6}=6 & \end{array}$$

A: Man braucht 6 min um die Badewanne zu füllen.“

Dieser Schüler hat überlegt, wie viel % des Wassers in einer Minute zu- und abfließen und damit die Aufgabe gelöst.

- **Begründung:** Die Aufgabe wurde richtig gelöst. Es ist zwar nicht ersichtlich, wie die Lösung gefunden wurde, aber diese ist ausreichend begründet. Das Finden der Lösung erfolgte zum Beispiel intuitiv. Ein Beispiel dafür ist:

  „In 6 minuten sind 3 Badewannen voll und in 6 minuten 2 davon leer also bleibt eine volle übrig“

- **Falsche Begründung:** Es ist nicht klar, ob die Aufgabe richtig gelöst wurde. Die richtige Lösung wurde zwar angegeben, allerdings ist sie mit einer falschen oder uneindeutigen Begründung wie „$3 \cdot 2 = 6$“ versehen.

- **Nicht möglich:** Die Aufgabe wurde nicht richtig gelöst. Der oder die Teilnehmenden behaupten, dass die Wanne nie gefüllt werden könne, weil das Wasser immer wieder abfließt.

- **Widerspruch:** Die Aufgabe wurde nicht richtig gelöst. Der oder die Teilnehmende behauptet einerseits, dass die Wanne nie gefüllt werden könne, gibt aber andererseits eine Dauer als mögliche Lösung an.
  Ein Beispiel dafür ist die Lösung einer Schülerin:

  „Macht keinen Sinn die Wanne kann nicht voll werden wenn der Stöpsel herausgezogen ist. Es kommt glaub ich darauf an wie stark der Wasserhahn aufgedreht ist.
  6 Minuten $\rightarrow$ Schätzung“

Diese Aufgabe ist, was die Auswertung angeht, außergewöhnlich. Eine nicht zu vernachlässigende Zahl der Bearbeitungen ist in die Kategorie *„Falsche Begründung“* einzuordnen. Ob diese als richtig gezählt werden können oder nicht, ist nur schwierig zu sagen, denn beispielsweise die Behauptung „$2 \cdot 3 = 6$“ kann in vielerlei Hinsicht gedeutet werden. Möglicherweise ist damit gemeint, dass zwei Schritte zu je drei Minuten nötig sind, um die Wanne zu füllen, weil in einem dieser Schritte die Wanne halb gefüllt wird. Dann würde die Kategorie *„2 Minuten“* zutreffen, und die Aufgabe sollte als richtig gezählt werden. Genauso kann für die Kategorie *„3 Minuten“* argumentiert werden. Oder aber die Schülerinnen und Schüler haben einfach die beiden zur Verfügung stehenden Zahlen multipliziert und sind ohne tiefere Einsicht in das Problem dadurch auf die richtige Lösung gestoßen. Aus diesem Grund wird bei der Auswertung dieser Aufgabe besonders auf diese Kategorie Rücksicht genommen.

5.3.4 Lösungsquoten und gewählte Lösungswege

Aufgabe 1 – 5-stellige Zahl

Die erste Aufgabe wurde von 90 der 117 Schülerinnen und Schüler richtig gelöst, das sind 76,9%. Die gewählten Lösungswege sind in Abb. 5.4 zu finden. Wird der Lösungsweg *„Fälle fehlen"* als falsch gewertet, so haben 83 Teilnehmende die Aufgabe richtig gelöst, also 70,9%. Jedoch lässt sich aufgrund der Tatsache, dass so gut wie alle Schülerinnen und Schüler ihren Taschenrechner zu Beginn der Stunde vorbereitet haben, vermuten, dass die anderen Fälle mit diesem überprüft wurden.

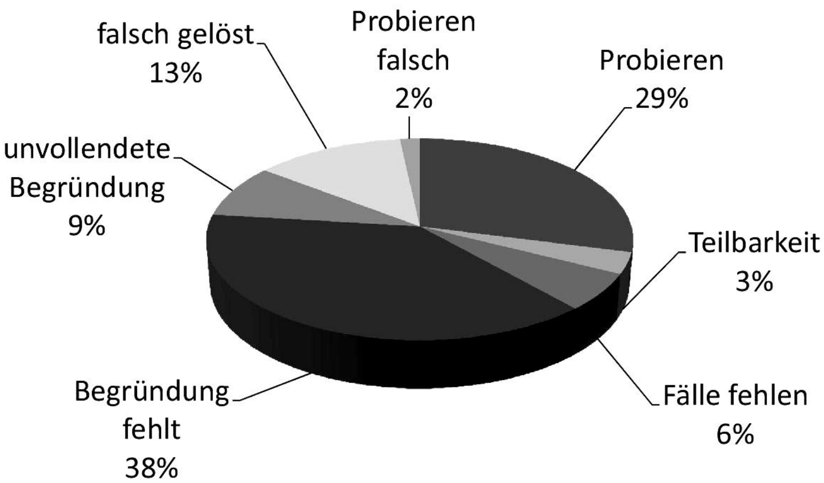


Abbildung 5.4: *Gewählte Lösungswege Aufgabe 1*

Die auffällig hohe Zahl der Arbeiten mit fehlender Begründung – es handelt sich um 45 der 117 Schülerinnen und Schüler – ist einerseits durch den Fehler bei der ersten befragten Klasse entstanden (16 Arbeiten mit fehlender Begründung). Andererseits haben aber auch in anderen Klassen, bei denen wirklich stark betont wurde, wie wichtig der Lösungsweg ist, viele Teilnehmende lediglich die Lösung ohne ersichtlichen Lösungsweg angegeben. Auch hier kann man aber davon ausgehen, dass, abgesehen von den 16 Kindern aus besagter Klasse, fast alle Arbeiten mit fehlender Begründung mit Probieren gelöst wurden, weil sehr viele Schülerinnen und Schüler mit Taschenrechner gearbeitet haben.

In jedem Fall ist das Probieren der klar favorisierte Lösungsweg bei dieser Aufgabe, was ich auch vermutet hatte. Nur sehr wenige Kinder haben Teilbarkeitsüberlegungen angestellt. Ein wenig verwunderlich finde ich, dass keine Arbeit die Idee enthält, nur die geraden Ziffern durchzuprobieren. Vielmehr wurde gelegentlich die Teilbarkeit durch 3 ins Spiel gebracht, nie aber die durch 2.

Einen besonders interessanten Lösungsweg einer Schülerin möchte ich noch erwähnen, die mithilfe von Teilbarkeitsüberlegungen zum richtigen Ergebnis gelangt ist:

„*Aufgabe 1:* $a = 4$
Begründung: Weil $54 : 6 = 9,\ 444 : 6 = 74,\quad 54444 : 6 = 9074$“

Hier ist die Schülerin vermutlich davon ausgegangen, dass sie wusste, dass 54 durch sechs teilbar ist. Ihr nächster Schritt war aber nicht, die ganze Zahl 54444 mit dem Taschenrechner auf Teilbarkeit durch sechs zu überprüfen, sondern sie wusste, dass wenn 54 durch sechs teilbar ist, dies auch für 54000 gilt, und hat nur mehr 444 überprüft.

Unter den falschen Lösungen, die in der Kategorie *„falsch gelöst“* eingeordnet sind, finden sich zum Beispiel Lösungsansätze mit Rechenfehlern, nicht beachteten Angaben (*„54000“* als Lösung) und Problemen beim Begriff der Teilbarkeit. Mit den Worten *„Für alle mit Kommastellen“* gab ein Schüler nämlich zu verstehen, dass alle Ziffern für a eingesetzt werden könnten, wenngleich bei manchen die Division einen Rest ergäbe. Dies zeigt ein Fehlverständnis des Begriffs der Teilbarkeit. Auch ein gescheiterter Versuch, die Teilbarkeitsregel durch 3 auf 6 auszuweiten, ist in dieser Kategorie auffindbar. Ein Schüler hat nämlich von allen möglichen Fällen die Ziffernsumme gebildet und anschließend überprüft, ob diese durch sechs teilbar ist, was bei 57777 der Fall ist.

Auch vorgekommen ist, wenn auch nicht so häufig wie bei der zweiten Aufgabe, dass Teilnehmende die Voraussetzungen nicht beachtet haben. Diese Arbeiten wurden ebenfalls in der Kategorie *„falsch gelöst“* eingeordnet. Ein Beispiel hierfür ist die folgende Lösung einer Schülerin:

„$57894 : 6 = 9649$
Ich bin auf dieses Ergebnis gekommen indem ich fast alles probiert habe.“

Hier wurde also nicht beachtet, dass die vier Ziffern nach der vorgegebenen Zehntausender-Ziffer alle gleich sein müssen, und die Schülerin hat so lange verschiedene mit 5 beginnende fünfstellige Zahlen probiert, bis sie eine durch 6 Teilbare gefunden hat.

Insgesamt kamen bei dieser Aufgabe alle vermuteten Lösungswege vor, bis auf ein Probieren mit Vorüberlegung, dass die Ziffer gerade sein muss. Es gab auch kaum unerwartete Schwierigkeiten und die meisten Schülerinnen und Schüler konnten die Aufgabe lösen, wie erwartet.

Aufgabe 2 – Briefmarken

Die zweite Aufgabe wurde von 37 der 117 Schülerinnen und Schüler richtig gelöst, das sind $31,6\%$. In Abb. 5.5 sind die gewählten Lösungswege dargestellt.

Auch hier haben wieder viele der Lernenden keine Begründung angegeben. Bei dieser Aufgabe vermute ich allerdings, dass dies bedeutet, dass sie im Kopf probiert haben, mit welchen Zahlen diese Aufgabe lösbar ist. Es könnte auch sein, dass sie intuitiv als erstes den richtigen Fall ausprobiert haben. Möglicherweise haben manche der Schülerinnen und Schüler, die keine Begründung notiert haben, auch Teilbarkeitsüberlegungen angestellt. Die Aufgabe erfordert nämlich, dass die Summe der Werte von 1- und 2-Cent-Marken durch fünf teilbar ist. Daher könnten einige der Lernenden bewusst oder intuitiv damit begonnen haben, fünf als Anzahl der 2-Cent-Marken zu probieren.

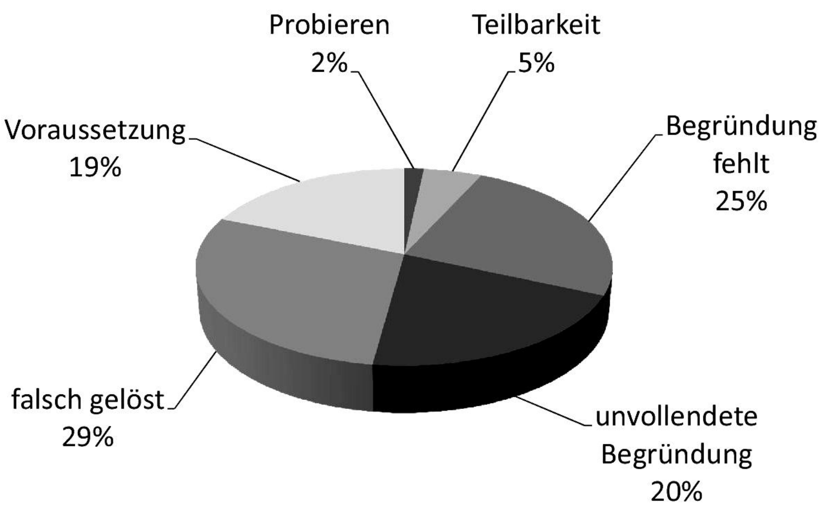


Abbildung 5.5: *Gewählte Lösungswege Aufgabe 2*

Dies führt dann auch zum richtigen Ergebnis. Die Aufgaben der Kategorie *„Begründung fehlt"* sind also je nachdem vermutlich in die Kategorien *„Probieren"* und *„Teilbarkeit"* einzuordnen.

Nur sehr selten war bei einer Aufgabe wirklich eindeutig zu erkennen, dass probiert wurde. Ein Beispiel dafür gibt die folgende Bearbeitung, bei der der erste Lösungsansatz eingeklammert war:

> *„Ein paar ist mehr als 1 muss also mind. 2 sein. Ich habe also 2 Briefmarken für insgesamt 4c 10 mal 2 ist 20, also 20 Briefmarken für insgesamt 20c.*
> *Sie hat bis jz 24c ausgegeben."*

An dieser Stelle vermute ich, dass die Schülerin gemerkt hat, dass eine durch fünf teilbare Zahl an Cent übrig bleiben muss, und daher auch der Wert der 1- und 2-Cent-Marken miteinander durch fünf teilbar sein muss, denn sie schreibt weiter:

> *„2 Cent* *5 Briefmarken kosten zusammen 10c.*
> *1 Cent* $5 \cdot 10 = 50$ *Briefmarke kosten zusammen 50c.*
> *5 Cent* $100 - (50 + 10) = 40c$ $40 : 5 = 8$
> *Sie kauft 5 2Cent, 50 10Cent und 8 5Cent Briefmarken."*

Bis auf den vermutlichen Schreibfehler am Ende hat die Schülerin also zunächst probiert, und ist schon bei ihrem zweiten Versuch auf die richtige Lösung gestoßen. Dabei hat sie möglicherweise Teilbarkeitsüberlegungen verwendet.

Auffällig ist außerdem die doch recht hohe Zahl der Arbeiten in der Kategorie *„Voraussetzung"*. 22 der 117 Schülerinnen und Schüler haben also nicht beachtet, dass es zehn mal so viele 1-Cent-Marken sein müssen wie 2-Cent-Marken.

Auch die Aufgaben der Kategorie *„falsch gelöst"* sind wieder recht viele, dabei gibt es verschiedene Fehler, die zu falschen Ergebnissen geführt haben. Darunter sind etwa einige Aufgaben, die eine korrekte Lösung für den Fall gefunden haben, dass die Dame Restgeld bekommen kann. Ein mehrfach gefundenes Problem war außerdem, dass Anzahl und Wert der Marken miteinander verwechselt wurden. Die folgende Bearbeitung zeigt dies:

„ 5 2 cent
50 1 cent
45 5 cent
100
Überlegung: welche kleine Zahl geht in 100, diese mal zehn und dann den Rest 5 cent“

Die Schülerin hat richtig begonnen, doch beim Ergänzen auf 100 hat sie statt des Geldwertes die Anzahl der Marken auf 100 ergänzt.

Bei dieser Aufgabe waren die von den Schülerinnen und Schülern gewählten Lösungswege deutlich anders als erwartet. Keine Teilnehmenden haben eine Tabelle zur Hilfe genommen, mit der sie verschiedene Möglichkeiten durchprobiert hätten. Relativ oft war auf den Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler der Ansatz für eine Gleichung zu finden, die manchmal auch richtig war. Dieser Ansatz wurde jedoch immer wieder verworfen. Die vermuteten Lösungswege wurden also allesamt nicht gewählt, stattdessen haben sehr viele Lernende, wie bereits erwähnt, keine Begründung angegeben, was bei vielen davon vermutlich darauf hindeutet, dass sie intuitiv zuerst den richtigen Lösungsfall ausprobiert oder aber im Kopf einige Fälle überlegt haben.

Aufgabe 3 – Badewanne

Die dritte Aufgabe wurde von 16 der 117 Schülerinnen und Schüler richtig gelöst, das sind $13,7\%$. Die gewählten Lösungswege sind in Abb. 5.6 zu finden. Bei dieser Aufgabe gibt es, wie bereits erwähnt, eine große Zahl an Schülerinnen und Schülern, die zwar die richtige Lösung, aber eine falsche Begründung angegeben haben. In den meisten Fällen war dies die Begründung „$3 \cdot 2 = 6$“. Zählt man diese Arbeiten als richtig, so haben 31 der 117 Schülerinnen und Schüler die Aufgabe richtig gelöst, also $26,5\%$. Die tatsächliche Lösungsquote liegt also vermutlich zwischen diesen beiden Werten.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit der Untersuchung von Sjuts (Sjuts, 2005), so findet man dort eine Lösungsquote von $15,7\%$ für diese Aufgabe. Dazu ist anzumerken, dass Sjuts Schülerinnen und Schüler der ersten, zweiten und dritten Klasse in gleichmäßiger Verteilung befragt hat, während in meinem Fall nur dritte Klassen befragt wurden. Dies gibt einen weiteren Hinweis darauf, dass zumindest ein Teil der Lösungen in der Kategorie *„Falsche Begründung“* richtig gemeint sein könnten. (Vgl. auch Sjuts, 2005, S. 3)

Auch Sjuts schreibt in seinem Artikel, dass *„die Vorstellung, dass sich die Wanne, auch wenn der Stöpsel herausgezogen ist, tatsächlich füllt“* (Sjuts, 2005, S. 3) häufig fehlt. Dies ist an den immerhin 26 Arbeiten aus der Kategorie *„Nicht möglich“* zu erkennen. Sjuts führt dies wie be-

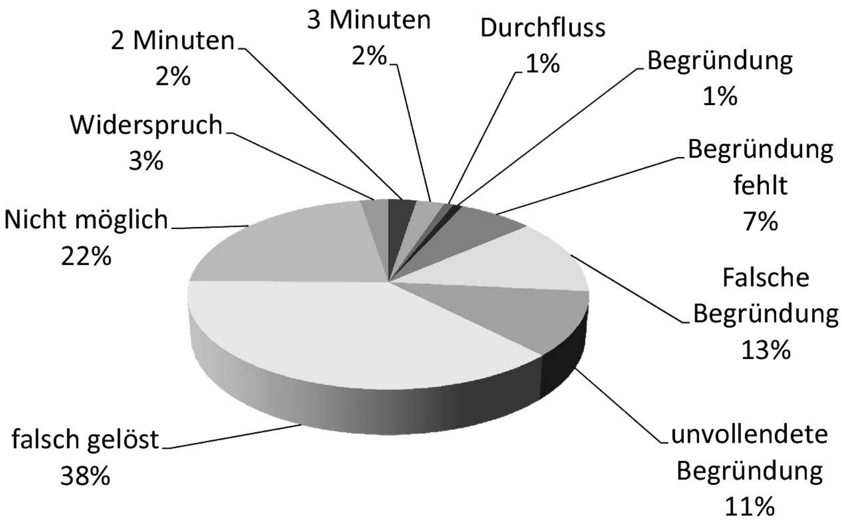


Abbildung 5.6: *Gewählte Lösungswege Aufgabe 3*

reits erwähnt auf ein statisches Denken zurück, welches das adäquate Erfassen des dynamischen Vorgangs von zwei Prozessen verhindert. (Vgl. Sjuts, 2005, S. 3)

Ansätze davon sind auch bei folgender Antwort zu finden:

> *„ewig, weil man es rein und wieder raus fließen lässt."*

Hier wurde vermutlich entweder der gleichzeitige Vorgang nicht erfasst, oder die betroffene Schülerin hat nicht erkannt, dass das Zufließen schneller vonstatten geht als das Abfließen.

Unter den eindeutig zuordenbaren Lösungswegen gab es bei dieser Aufgabe keinen klaren Favoriten, sowohl das Denken in 2- als auch in 3-Minuten-Schritten war bei gleich vielen Arbeiten zu finden, und eine kaum geringere Zahl an Teilnehmenden arbeitete mit der Durchflussrate.

Unter den Lösungen in der Kategorie *„falsch gelöst"* fanden sich einige mit der Antwort *„5 Minuten"*, die manchmal noch mit „$2+3=5$" begründet war. Aber auch diese Antwort, die noch einmal die Schwierigkeit des Erfassens dynamischer Prozesse deutlich macht, ist in dieser Kategorie zu finden:

> *„Eigentlich fließt das Wasser ja dauerhaft ab, aber 1 Minute (Wasser) bleibt in der Wanne.*
>
> $$\begin{matrix} \textit{2 min} \uparrow & & \textit{2 min} \uparrow & \\ & \rightarrow \textit{1 min} + & & \rightarrow \textit{1 min} \\ \textit{3 min} \downarrow & & \textit{3 min} \downarrow & \end{matrix}$$
>
> $2+3+2+3=x$
> $x=10$ *min A: Man braucht 10 Minuten, um die Wanne ohne Stöpsel zu füllen. "*

Die Schülerin, die diese Antwort gegeben hat, scheint zwar richtig verstanden zu haben, dass immer ein Teil des Wassers in der Wanne bleibt, doch im Endeffekt addiert sie die Dauer von zwei Zu- und zwei Abflussdauern so, als würden diese hintereinander und nicht gleichzeitig stattfinden. Bei einem Erfassen der gleichzeitigen Prozesse hätte sie nämlich innerhalb der Zeit der zwei Abflussvorgänge drei Zuflussvorgänge berücksichtigen müssen.

Auch einige Überlegungen, die von der Idee her sehr gut waren, aber dennoch an Rechenfehlern gescheitert sind, wurden ebenfalls in die Kategorie *„falsch gelöst"* eingeordnet, darunter auch die folgende Bearbeitung:

> *„2 Min bis voll*
> *3 Min bis leer*
> 100 : + 50 *l pro m.*
> \- 33, 3$\dot{3}$ *pro m.*
> \+ 17, 33 *l pro m.*
> 100 : 17, 33 = 5, 77 "

Eigentlich hat dieser Schüler sich in gewisser Weise die Durchflussrate überlegt. Er hat angenommen, die Badewanne beinhalte 100 Liter, und hat dann ausgerechnet, wie viel pro Minute zu- und abfließt. Leider ist ihm bei der Subtraktion ein Rechenfehler unterlaufen, wodurch das Ergebnis nicht stimmt.

Bei dieser Aufgabe wurden alle im Vorhinein vermuteten Lösungswege auch tatsächlich von Schülerinnen und Schülern gewählt, wenn auch in recht geringer Zahl. Auch die vorausgesagte Schwierigkeit damit, sich vorzustellen, dass die Wanne tatsächlich voll wird, war oft zu finden. Die Aufgabe hat den Teilnehmenden jedoch deutlich größere Schwierigkeiten bereitet, als ich vermutet hätte.

5.3.5 Statistischer Test

Bei der Analyse der erhobenen Daten wird immer wieder ein Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest zum Untersuchen der Unabhängigkeit zweier Merkmale in der Grundgesamtheit verwendet. An einem Beispiel soll dieser näher erläutert werden.

Dazu wird exemplarisch die Unabhängigkeit von der Anzahl richtig gelöster Aufgaben X und der Mathematiknote im Semesterzeugnis Y überprüft. Dabei wird die Nullhypothese

$$H_0: \qquad P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j) \qquad \forall i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots m$$

gegen

$$H_1: \qquad P(X=i, Y=j) \neq P(X=i) \cdot P(Y=j) \qquad \text{für mindestens ein Paar}(i, j)$$

getestet. (Vgl. Galata und Scheid, 2012, S. 366)

Dabei sagt die Nullhypothese aus, dass X und Y voneinander unabhängig sind, sich gegenseitig also nicht beeinflussen. Um nun den Test durchzuführen müssen zunächst die Häufigkeiten b_{ij}, $i = 1,\ldots,n$ $j = 1,\ldots m$ für die kombinierten Realisierungen der Merkmalsausprägung i von X mit der Ausprägung j von Y angegeben werden. Mit anderen Worten: Wie viele Schülerinnen und Schüler, die zwei Aufgaben richtig gelöst hatten, wurden im Semesterzeugnis mit *„befriedigend"* beurteilt? Diese Daten sind in Tab. 5.2 zu finden, wobei auch die Zeilensummen b_i und die Spaltensummen b_j angegeben sind. (Vgl. Tiede und Voß, 2000, S. 173f) Die drei Arbeiten, bei denen die Schülerinnen und Schüler keine Angabe zur Note gemacht haben, wurden dabei weggelassen. Die Kategorie *„falsche Begründung"* bei der dritten Aufgabe wurde dabei als richtig gezählt.

Anzahl ↓ | Note →	1	2	3	4	5	$b_i = \sum_{j=1}^m b_{ij}$
0 Aufg. richtig	1	4	3	1	3	12
1 Aufg. richtig	4	11	26	16	2	59
2 Aufg. richtig	4	12	8	11	1	36
3 Aufg. richtig	1	2	2	2	0	7
$b_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}$	10	29	39	30	6	114

Tabelle 5.2: *absolute Häufigkeiten: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Mathematiknote*

Aus den Summen der einzelnen Kategorien kann man nun die Häufigkeiten e_{ij} ermitteln, die erwartet werden, wenn X und Y unabhängig sind. Es gilt für die relativen Häufigkeiten $\frac{e_{ij}}{n} = \frac{b_i}{n} \cdot \frac{b_j}{n}$ und damit $e_{ij} = \frac{b_i \cdot b_j}{n}$. (Vgl. Tiede und Voß, 2000, S. 174f) Diese erwarteten Häufigkeiten sind in Tab. 5.3 auf eine Nachkommastelle gerundet eingetragen.

Anzahl ↓ | Note →	1	2	3	4	5
0 Aufg. richtig	1,1	3,1	4,1	3,2	0,6
1 Aufg. richtig	5,2	15,0	20,2	15,5	3,1
2 Aufg. richtig	3,2	9,2	12,3	9,5	1,9
3 Aufg. richtig	0,6	1,8	2,4	1,8	0,4

Tabelle 5.3: *erwartete Häufigkeiten: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Mathematiknote*

Um relevante Daten zu erhalten, sollten diese erwarteten Häufigkeiten nicht kleiner sein als 5. (Vgl. Tiede und Voß, 2000, S. 175) Um dies zu erreichen, können die Merkmalsausprägungen zu neuen Gruppen zusammengefasst werden. Dazu werden die Noten *„Sehr gut"* und *„gut"*, die Noten *„Genügend"* und *„Nicht genügend"*, keine und eine gelöste Aufgabe sowie zwei und drei gelöste Aufgaben zusammengefasst. Die neuen absoluten Häufigkeiten nach dieser Zusammenfassung sind in Tab. 5.4, die neuen erwarteten Häufigkeiten in Tab. 5.5 eingetragen.

Anzahl ↓ | Note →	1 oder 2	3	4 oder 5	$b_i = \sum_{j=1}^m b_{ij}$
0 oder 1 Aufg. richtig	20	29	22	71
2 oder 3 Aufg. richtig	19	10	14	43
$b_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}$	39	39	36	114

Tabelle 5.4: *absolute Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Mathematiknote*

Aus diesen Daten kann nun die Prüfvariable U ermittelt werden, die unter der Nullhypothese einer

Anzahl ↓ | Note →	1 oder 2	3	4 oder 5
0 oder 1 Aufg. richtig	24,3	24,3	22,4
2 oder 3 Aufg. richtig	14,7	14,7	13,6

Tabelle 5.5: *erwartete Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Mathematiknote*

Chi-Quadrat-Verteilung folgt. Die Anzahl der Freiheitsgrade dieser Verteilung ist $(n-1)\cdot(m-1)$, bei zwei Zeilen und drei Spalten also 2. Die Prüfvariable kann mit der folgenden Formel berechnet werden: (Vgl. Tiede und Voß, 2000, S. 175)

$$U = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

Es wird nun überprüft, ob U einen kritischen Wert K_α zu einem festgelegten Signifikanzniveau α überschreitet. Dieser kritische Wert kann in einer Tabelle nachgeschlagen werden (z. B. Kraft u. a., 2000, S. 48). Überschreitet U den kritischen Wert K_α, so ist die Nullhypothese abzulehnen und die Merkmale X und Y sind nicht voneinander unabhängig. Ist U hingegen kleiner als K_α, so sind X und Y voneinander unabhängig.

In diesem Fall wird als Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ gewählt. Der Kritische Wert K_α beträgt demnach $K_{0,05} = 5,99$ (Vgl. Kraft u. a., 2000, S. 48). Die Prüfvariable U hat den Wert $U = 4,45$. Die Anzahl richtig gelöster Aufgaben und die Mathematiknote sind also nicht voneinander abhängig.

In weiterer Folge werden nur noch die Ergebnisse der Chi-Quadrat-Tests angegeben. Die dabei erfolgten Zusammenfassungen und die sich damit ergebenden Tabellen sind im Anhang C zu finden (S. 104).

5.3.6 Zusammenhang zwischen Anzahl der richtig gelösten Aufgaben und Mathematiknote, Motivation beziehungsweise selbst eingeschätzten Lösungsfertigkeiten

Die Anzahl der Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler richtig gelöst haben, ist in Abb. 5.7 dargestellt. Dabei werden bei den linken Säulen Bearbeitungen der dritten Aufgabe in der Kategorie *„Falsche Begründung“* als falsch und bei den rechten Säulen als richtig gewertet.

In beiden Fällen haben die meisten Schülerinnen und Schüler eine Aufgabe richtig gelöst. Vielen ist es aber gelungen, zwei Aufgaben richtig zu lösen. Nur sehr wenige Teilnehmende haben alle drei Aufgaben oder keine Aufgabe richtig gelöst.

Diese Verteilung deckt sich auch mit der recht hohen Lösungsquote der ersten und den deutlich niedrigeren Lösungsquoten der beiden anderen Aufgaben.

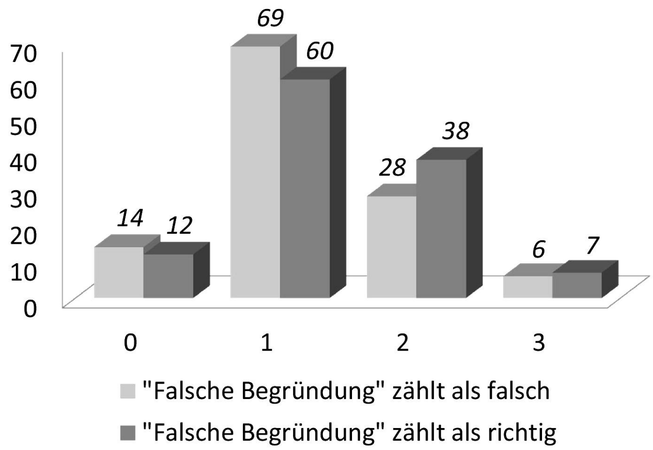


Abbildung 5.7: *Anzahl der richtig gelösten Aufgaben*

Zusammenhang mit der Mathematiknote

Nun soll überprüft werden, ob die Leistungen im Mathematikunterricht, näherungsweise repräsentiert durch die Mathematiknote im Semsterzeugnis, einen Einfluss auf die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben haben. Dazu sind in Abb. 5.8 sowohl die Verteilung der Mathematiknoten in der Stichprobe, als auch die Verteilungen der Noten unter den einzelnen Anzahlen gelöster Aufgaben dargestellt. Die Reihenfolge letzterer wurde der besseren Lesbarkeit halber angepasst. Einige wenige Teilnehmende haben keine Mathematiknote angegeben, deshalb gibt es unter den Noten eine Kategorie *„keine Angabe"*. Bei den Aufgaben werden jene der Kategorie *„Falsche Begründung"* hier und in weiterer Folge als richtig gewertet.

Die Verteilung der Bearbeitungen, bei denen eine Aufgabe richtig gelöst wurde, ist der allgemeinen Verteilung der Mathematiknoten in der Stichprobe sehr ähnlich. Lediglich die Schülerinnen und Schüler mit *„gut"* haben seltener genau eine Aufgabe richtig gelöst, als es der Verteilung entspräche.

Bei den Bearbeitungen mit zwei richtigen Aufgaben ist praktisch nur bei den mit *„befriedigend"* beurteilten Schülerinnen und Schülern ein wesentlicher Unterschied zu bemerken, da diese weniger Arbeiten zu dieser Gruppe beisteuern.

Auch bei den Arbeiten ohne richtig gelöste Aufgaben sind alle Mathematiknoten vertreten. Nur die Schülerinnen und Schüler, die im Semesterzeugnis mit *„nicht genügend"* beurteilt wurden, haben deutlich öfter keine Aufgabe lösen können, als es der allgemeinen Notenverteilung entspricht.

Die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die alle drei Aufgaben richtig gelöst haben, ist sehr klein, entspricht jedoch ungefähr der allgemeinen Verteilung der Noten.

Ein Zusammenhang zwischen Problemlösefähigkeiten und Leistungen im Mathematikunterricht kann also eigentlich nicht bestätigt werden. Sieht man sich nämlich beispielsweise die Verteilung der Arbeiten mit zwei richtigen Aufgaben an, so ist nicht etwa eine Verschiebung der Verteilung in

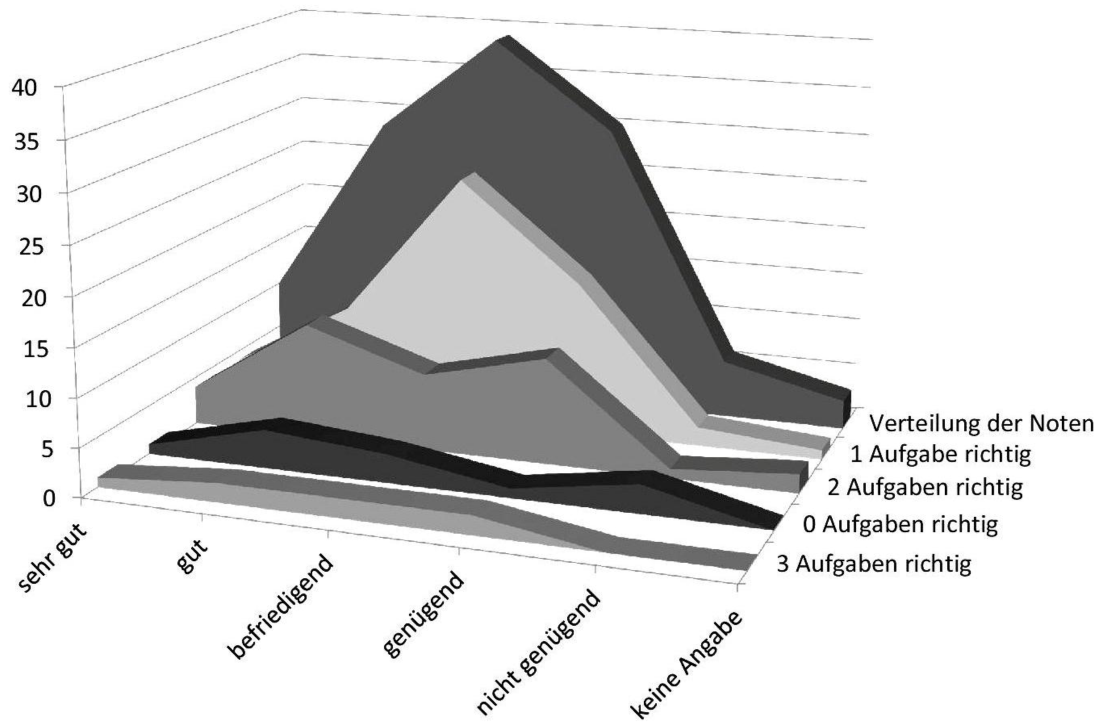


Abbildung 5.8: *Vergleich Anzahl gelöste Aufgaben – Mathematiknote*

Richtung der besseren Noten zu erkennen, sondern es haben auch viele Schülerinnen und Schüler mit der Note *„genügend“* zwei Aufgaben gelöst. Ähnliche Effekte sind bei den Arbeiten mit drei richtigen Aufgaben zu finden. Ein Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest bestätigt, dass die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben und die Mathematiknote nicht voneinander abhängig sind (siehe 5.3.5, S. 84). Folgende Kennzahlen wurden ermittelt:

$$K_{0,05} = 5,99 \qquad U = 4,45 \qquad U < K_{0,05}$$

Zusammenhang mit der Motivation

Auch der Zusammenhang von der Anzahl der richtig gelösten Aufgaben und der selbst angegebenen Motivation der Schülerinnen und Schüler soll untersucht werden. In Abb. 5.9 sind dazu analog zu Abb. 5.8 sowohl die allgemeine Verteilung der Motivation als auch die Verteilungen dieser für die entsprechenden Anzahlen der gelösten Aufgaben dargestellt.

Bei diesem Vergleich sind sowohl bei den Arbeiten mit einer als auch bei denen mit zwei richtig gelösten Aufgaben kaum nennenswerte Unterschiede zur allgemeinen Verteilung der Motivation zu erkennen. Lediglich bei den Arbeiten ohne richtig gelöste Aufgaben ist ein Trend in Richtung *„weniger gern“* und bei den Arbeiten mit drei richtig gelösten Aufgaben einer in Richtung *„gern“* zu erkennen.

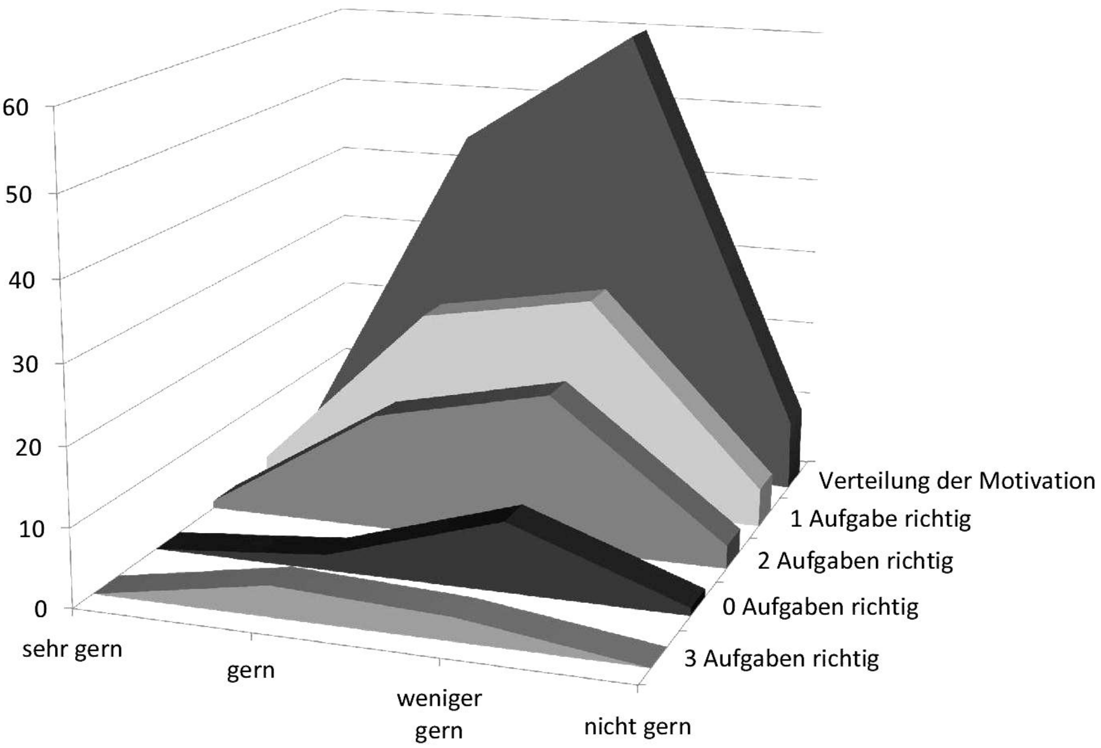


Abbildung 5.9: *Vergleich Anzahl gelöste Aufgaben – Motivation*

Auch zwischen der Motivation und den Leistungen im Matematikunterricht kann ein direkter Zusammenhang nicht bestätigt werden. Jedoch lässt sich erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler, die entweder alle oder keine Aufgabe gelöst haben, sehr wohl interessierter oder weniger interessiert an Problemlöseaufgaben sind. Auch der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest bestätigt, dass die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben nicht von der Motivation abhängig ist (siehe Anhang C, S. 104). Folgende Kennzahlen wurden ermittelt:

$$K_{0,05} = 3,84 \qquad U = 0,19 \qquad U < K_{0,05}$$

Zusammenhang mit den selbst eingeschätzten Lösungsfertigkeiten

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang mit den von den Schülerinnen und Schülern selbst angegebenen Lösungsfertigkeiten untersucht werden. Abb. 5.10 zeigt dazu analog zu Abb. 5.9 die entsprechenden Verteilungen.

Auch hier zeigt sich, dass die Verteilungen bei den einzelnen Anzahlen gelöster Aufgaben kaum von der Gesamtverteilung der Fertigkeiten abweicht. Lediglich bei den Schülerinnen und Schülern, die zwei Aufgaben richtig gelöst haben, ist ein Trend in Richtung *„gut“* zu erkennen. Der Chi-Quadrat-Abhängigkeitstest bestätigt ebenfalls, dass keine Abhängigkeit besteht (siehe Anhang C,

Abbildung 5.10: *Vergleich Anzahl gelöste Aufgaben – selbst eingeschätzte Lösungsfertigkeiten*

S. 105). Folgende Kennzahlen wurden ermittelt:

$$K_{0,05} = 3,84 \qquad U = 1,89 \qquad U < K_{0,05}$$

Ein Zusammenhang zwischen Selbsteinschätzung der Problemlösefähigkeiten und den tatsächlichen Fähigkeiten, die getesteten Aufgaben zu lösen, kann dennoch in gewisser Weise hergestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler schätzen sich nämlich nicht unbedingt schlecht ein, was auch in Abb. 5.11 deutlich wird. In ihr ist dargestellt, um wie viel die Schülerinnen und Schüler mit der Einschätzung ihrer Fertigkeiten daneben liegen, wenn davon ausgegangen wird, dass für *„sehr gut"* drei gelöste Aufgaben, für *„gut"* zwei, für *„weniger gut"* eine und für *„nicht gut"* keine gelöste Aufgabe eine Abweichung von „0" ergibt. Eine Abweichung von „-2" würde also bedeuten, dass entweder zwei Aufgaben richtig gelöst wurden und sich die Person als *„nicht gut"* eingeschätzt hat, oder

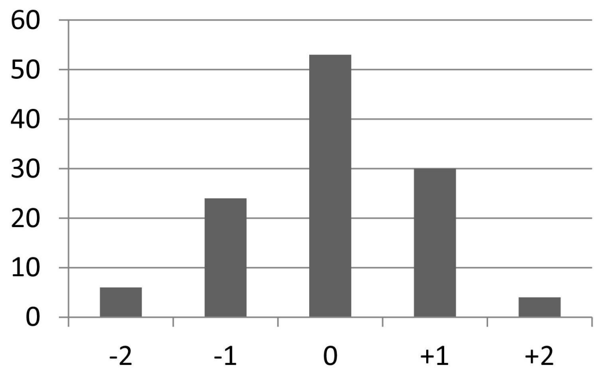


Abbildung 5.11: *Abweichung der Anzahl gelöster Aufgaben von der Selbsteinschätzung*

dass alle drei Aufgaben richtig gelöst wurden und die Einschätzung *„weniger gut“* war. Diese Person hat sich also als schwächer eingeschätzt, als die Anzahl richtig gelöster Aufgaben ihrer Arbeit vermuten lässt.

Es ist erkennbar, dass die meisten Schülerinnen und Schüler sich gut eingeschätzt haben, denn eine Abweichung von „-1“ oder „+1“ ist bei weitem noch keine Fehleinschätzung. Keine Teilnehmenden haben sich völlig falsch eingeschätzt, sodass die Abweichungen „-3“ und „+3“ gar nicht erst vorgekommen sind. Nur insgesamt 10 der 117 Lernenden, also 8,5%, haben um zwei Aufgaben mehr oder weniger gelöst, als ihrer Einschätzung entsprechen würde.

5.3.7 Zusammenhang zwischen Mathematiknote, Motivation und selbst eingeschätzten Lösungsfertigkeiten

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob die Mathematiknote im Semesterzeugnis etwas mit der Motivation für und den selbst eingeschätzten Lösungsfertigkeiten von Problemlöseaufgaben zu tun hat.

Zusammenhang zwischen Mathematiknote und Motivation

In Abb. 5.12 sind zunächst die Verteilung der Noten und die Verteilungen dieser auf die verschiedenen Motivations-Kategorien dargestellt.

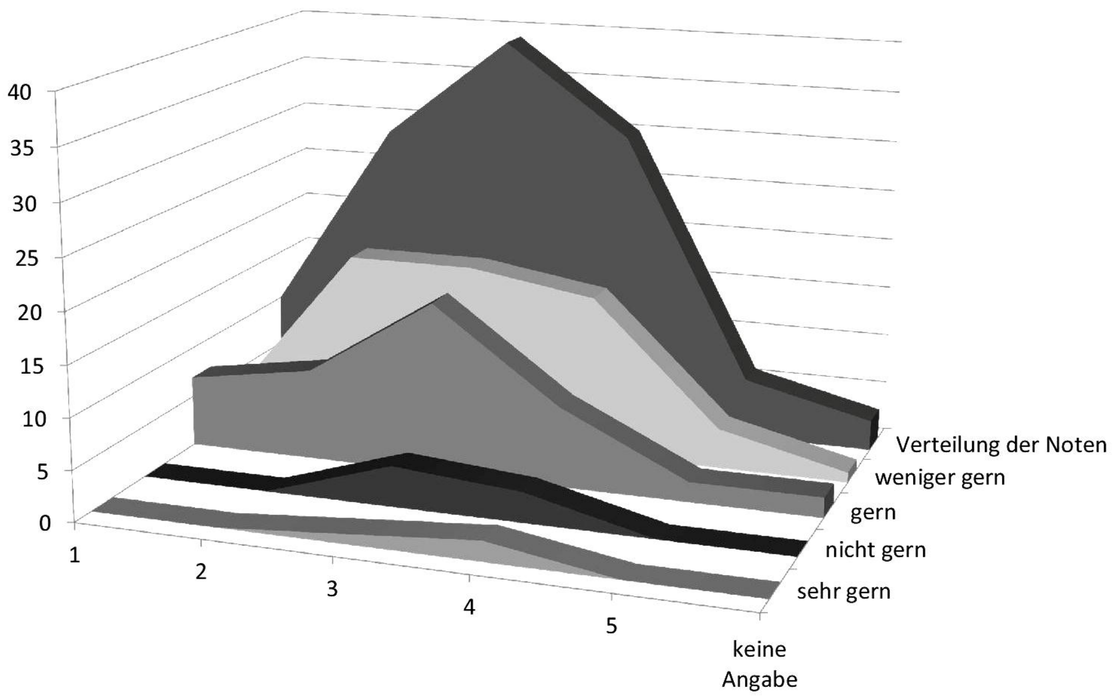


Abbildung 5.12: *Vergleich Mathematiknote im Semesterzeugnis – Motivation*

Die eventuelle These, dass Schülerinnen und Schüler mit besseren Noten auch eine größere Begeisterung für Problemlöseaufgaben zeigen, kann keinesfalls bestätigt werden. Denn es gibt sowohl eine Vielzahl an Lernenden, die sich *„sehr gern“* mit Problemlöseaufgaben beschäftigen und im Semesterzeugnis mit *„genügend“* beurteilt wurden, als auch vergleichsweise wenige Kinder mit der Mathematiknote *„gut“*, die *„weniger gern“* Problemlöseaufgaben lösen. Einzig bei den Schülerinnen und Schülern mit *„sehr gut“* im Halbjahreszeugnis ist erkennbar, dass die meisten von ihnen sich *„gern“* mit Knobel- und Rätselaufgaben auseinandersetzen.

Auch der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest bestätigt keinen Zusammenhang zwischen Mathematiknote im Semesterzeugnis und der Motivation (siehe Anhang C, S. 106). Folgende Kennzahlen wurden ermittelt:

$$K_{0,05} = 5,99 \qquad U = 0,80 \qquad U < K_{0,05}$$

Zusammenhang zwischen Mathematiknote und selbst eingeschätzten Lösungsfertigkeiten

In Abb. 5.13 schließlich sind die Verteilung der Noten und die Verteilung dieser innerhalb der einzelnen Gruppen der selbst eingeschätzten Lösungsfertigkeiten abgebildet.

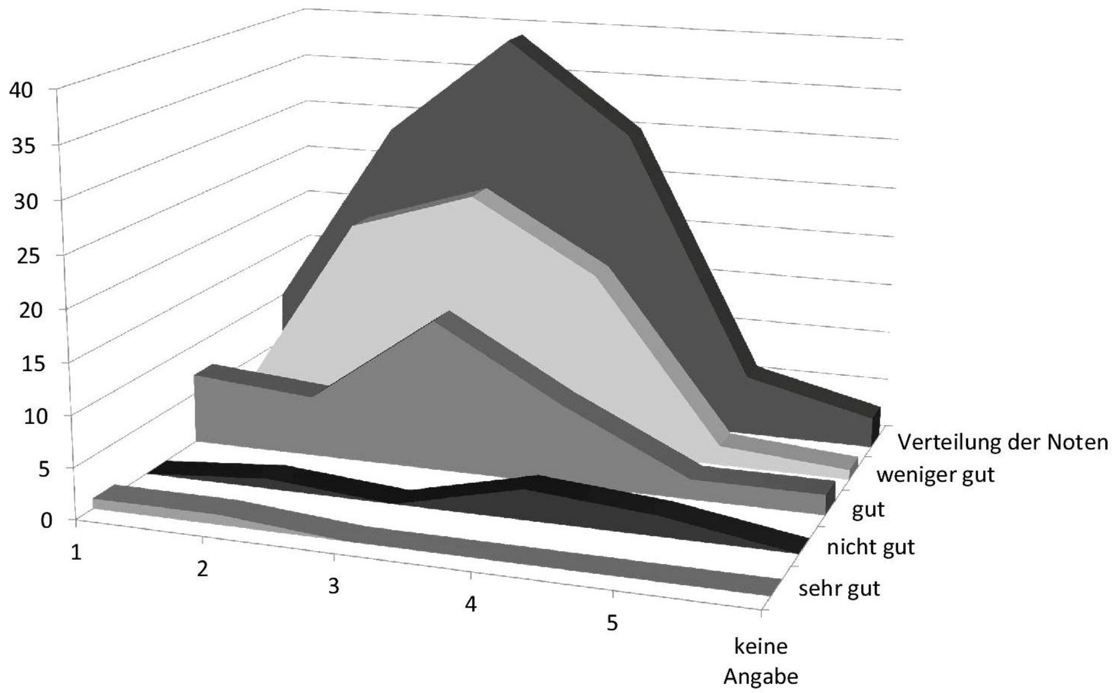


Abbildung 5.13: *Vergleich Mathematiknote – selbst eingeschätzte Lösungsfertigkeiten*

Auch hier kann nicht unbedingt ausgesagt werden, dass besser benotete Schülerinnen und Schüler sich besser einschätzen, aber ein gewisser Trend in die Richtung ist zu beobachten. Die Lernenden, die sich als *„nicht gut“* eingestuft haben wurden im allgemeinen im Semesterzeugnis eher mit Noten wie *„genügend“* oder *„nicht genügend“* beurteilt, während diejenigen, die sich für *„sehr gut“*

im Problemlösen halten, durchgehend die Noten *„gut“* oder *„sehr gut“* in ihrem Semesterzeugnis hatten. Bei den anderen beiden Fertigkeits-Kategorien finden sich vor allem bei den *„sehr gut“*-Schülerinnen und Schülern Abweichungen. Diese haben nämlich überdurchschnittlich oft *„gut“* und unterdurchschnittlich oft *„weniger gut“* bei der Problemlösefertigkeit angegeben.

Der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest ergibt auch hier, dass zwischen Mathematiknote im Semesterzeugnis und den selbst eingeschätzten Lösungsfertigkeiten kein Zusammenhang besteht (siehe Anhang C, S. 107). Folgende Kennzahlen wurden ermittelt:

$$K_{0,05} = 5,99 \qquad U = 0,95 \qquad U < K_{0,05}$$

5.4 Resümee

Zusammenfassend wurden bei der empirischen Studie folgende Erkenntnisse gewonnen:

- Die erste Aufgabe wurde von etwa drei Viertel der Schülerinnen und Schülern richtig gelöst, die meisten davon haben durch Probieren die richtige Lösung ermittelt.
- Bei der zweiten Aufgabe konnte nur noch etwa ein Drittel der Teilnehmenden eine richtige Lösung finden, hier wurden sowohl Probieren als auch Teilbarkeitsüberlegungen häufig angewandt.
- Die dritte Aufgabe schließlich wurde von etwa einem Viertel der Schülerinnen und Schüler richtig gelöst, wenn man annimmt, dass zumindest einem Teil der Arbeiten mit falscher Begründung der richtige Lösungsgedanke zugrunde liegt. Hier wurde die Lösung sowohl in 1- als auch in 2- oder 3-Minuten-Schritten gefunden.
- Die Mathematiknote im Semesterzeugnis kann nicht in direkten Zusammenhang mit der Anzahl der richtig gelösten Aufgaben gebracht werden.
- Das Interesse an Problemlöseaufgaben ist vor allem in den Extremfällen von Bedeutung für die Anzahl richtig gelöster Aufgaben. Denn die Teilnehmenden mit drei richtig gelösten Aufgaben zeigen erhöhtes Interesse, während die Schülerinnen und Schüler, die keine Aufgabe richtig gelöst haben, im Allgemeinen weniger Interesse zeigen. Ein allgemeiner Zusammenhang kann jedoch nicht hergestellt werden.
- Die Selbsteinschätzung der Lernenden ist relativ gut, nur sehr wenige Schülerinnen und Schüler haben sich beispielsweise als *„gut“* im Problemlösen eingeschätzt und dann keine der Aufgaben richtig gelöst.
- Weder zwischen Mathematiknote und Motivation noch zwischen Mathematiknote und Selbsteinschätzung der Lösungsfähigkeiten kann ein direkter Zusammenhang festgestellt werden.

Aufgefallen ist außerdem, dass kein einziges mal eine Tabelle eingesetzt wurde. Gerade bei der zweiten Aufgabe hätte sich dies meiner Meinung nach angeboten, doch anscheinend sind die Schülerinnen und Schüler mit diesem Hilfsmittel einfach nicht oder nur wenig vertraut. Denn im Unterricht kommen Tabellen erst ab der neunten Schulstufe im Zusammenhang mit Funktionen mit Sicherheit vor.

Ein Unterricht, in dem besonders auf Techniken und Methoden des Problemlösens eingegangen wird, könnte unter Umständen die Schülerinnen und Schüler dabei unterstützen, das Anwenden von Hilfsmitteln wie Tabellen zu erlernen und zu üben.

Literaturverzeichnis

BIFIE: *Kompetenzbereiche Mathematik 4. Schulstufe.* https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_vs_kompetenzbereiche_m4_2011-08-19.pdf (letzter Aufruf 13.03.2014). 2011

BIFIE: *Kompetenzbereiche Mathematik 8. Schulstufe.* https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_vs_kompetenzbereiche_m4_2011-08-19.pdf (letzter Aufruf 13.03.2014). 2013

BMBF: *Lehrplan AHS Unterstufe. Mathematik.* www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (letzter Aufruf 13.03.2014). 2000

BMBF: *Lehrplan AHS Oberstufe. Mathematik.* www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (letzter Aufruf 13.03.2014). 2004

BRANCA, Nicolas A.: *Problem Solving as a Goal, Process, and Basic Skill.* S. 3–8. In: KRULIK, Stephen (Hrsg.) ; REYS, Robert E. (Hrsg.): *Problem Solving in School Mathematics. 1980 Yearbook.* Reston, Virginia : National Council of Teachers of Mathematics, 1980

BRUDER, Regina: *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens.* nibis.ni.schule.de/~as-lg/Mathe2/Dokumente/probleme loesen.pdf (letzter Aufruf 24.01.2014). 2003

BRUDER, Regina ; COLLET, Christina: *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* 1. Auflage. Berlin : Cornelsen Verlag Scriptor, 2011

ENGEL, Arthur: *Problem-Solving Strategies.* Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag New York, Inc., 1998

GALATA, Robert ; SCHEID, Sandro: *Deskriptive und Induktive Statistik für Studierende der BWL. Methoden – Beispiele – Anwendungen.* München : Carl Hanser Verlag, 2012

GRIESER, Daniel: *Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik.* Wiesbaden : Springer Spektrum, 2013

GRINBERG, Natalia: *Schnupperkurs: Ausgewählte Methoden zur Aufgabenlösung. Vorlesung 4: Das Extremalprinzip, das Schubfachprinzip.* www.math.kit.edu/iag1/lehre/methloesung2005s/media/4.pdf (letzter Aufruf 13.05.2014). 2004

HAAS, Nicola: *Das Extremalprinzip als Element mathematischer Denk- und Problemlöseprozesse. Untersuchungen zur deskriptiven, konstruktiven und systematischen Heuristik.* Hildesheim, Berlin : Franzbecker, 2000

HEMME, Heinrich: *Die Quadrate des Teufels. 112 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 2003

HEMME, Heinrich: *Die Hölle der Zahlen. 92 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 2007

HUSSY, Walter: *Denkpsychologie. Ein Lehrbuch. Band 1. Geschichte, Begriffs- und Problemlöseforschung, Intelligenz*. Stuttgart : Kohlhammer, 1984

IEA: *Released Item Set for the Final Year of Secondary School*. The International Association for the Evaluation of Educational Achievement, `timss.bc.edu/timss1995i/TIMSSPDF/C_items.pdf` (letzter Aufruf 14.05.2014). 1995

KRAFT, Johann ; BÜRGER, Heinrich ; UNFRIED, Hubert ; GÖTZ, Stefan: *Mathematische Formelsammlung nach den Lehrplänen für die allgemein bildenden höheren Schulen zur Abfassung der schriftlichen Reifeprüfung*. 10. Auflage. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2000

LITSCHAUER, Dieter ; GROSS, Herbert ; AUE, Vera ; NEUWIRTH, Erich ; REICHEL, Hans-Christian (Hrsg.) ; HUMENBERGER, Hans (Hrsg.): *Das ist Mathematik 3. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 3. Klasse der allgemein bildenen höheren Schulen und der Hauptschulen*. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2009

LITSCHAUER, Dieter ; GROSS, Herbert ; AUE, Vera ; NEUWIRTH, Erich ; REICHEL, Hans-Christian (Hrsg.) ; HUMENBERGER, Hans (Hrsg.): *Das ist Mathematik 4. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der allgemein bildenen höheren Schulen und der Hauptschulen*. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2010

LOYD, Sam ; GARDNER, Martin (Hrsg.): *Mathematische Rätsel und Spiele. Denksportaufgaben für kluge Köpfe ; 283 Aufgaben und Lösungen*. 1. Auflage. Köln : DuMont Literatur und Kunst Verlag, 2003

MALLE, Günther ; KOTH, Maria ; WOSCHITZ, Helge ; MALLE, Sonja ; SALZGER, Bernhard ; ULOVEC, Andreas: *Mathematik verstehen 5*. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2010

MASON, John ; BURTON, Leone ; STACEY, Kaye: *Mathematisch denken. Mathematik ist keine Hexerei*. 5., verbesserte Auflage. München : Oldenbourg Verlag, 2008

MÜLLER, Robert ; HANISCH, Günter ; GÖTZ, Stefan (Hrsg.) ; REICHEL, Hans-Christian (Hrsg.): *Mathematik 5*. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2010

PAUL, Fred: *Trial and Success*. S. 141–148. In: POSAMENTIER, Alfred S. (Hrsg.) ; SCHULZ, Wolfgang (Hrsg.): *The Art of Problem Solving. A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, California : Corwin Press, Inc., 1996

POLYA, George: *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. 4. Auflage. Tübingen : A. Francke Verlag, 1995

POPPER, Karl R.: *Alles Leben ist Problemlösen. Über Erkenntnis, Geschichte und Politik*. 7. Auflage. München, Zürich : Piper, 2002

REISS, Kristina ; HAMMER, Christoph: *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. 1. Auflage 2013. 3. korr. Nachdruck 2013. Berlin : Springer DE, 2012

ROTH, Gerhard: *Die Bedeutung von Motivation und Emotion für den Lernerfolg*. S. 233 – 246. In: JÜRGENS, Eiko (Hrsg.) ; STANDOP, Jutta (Hrsg.): *Was ist 'guter' Unterricht? Namhafte Expertinnen und Experten geben Antwort*. Bad Heilbrunn : Verlag Julius Klinkhardt, 2010

ROTH-SONNEN, Nicole ; STEIN, Gunter ; STENGEL, Astrid ; MÄHLER, Bettina (Hrsg.) ; MEYER, Michael (Hrsg.): *Knobel-Aufgaben für die 7. und 8. Klasse*. Berlin : Cornelsen Scriptor, 2005

SCHMITT, Esther ; MÄHLER, Bettina (Hrsg.) ; MEYER, Michael (Hrsg.): *Knobel-Aufgaben für die 5. und 6. Klasse*. Berlin : Cornelsen Scriptor, 2004

SJUTS, Johann: *Empirische Studien zur Komplexität mathematischen Denkens*. Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, `http://hdl.handle.net/2003/30758` (letzter Aufruf 29.03.2014). 2005

SOIFER, Alexander: *Mathematics as Problem Solving*. Second Edition. New York : Springer Science + Business Media, 2009

TIEDE, Manfred ; VOSS, Werner: *Schließen mit Statistik – Verstehen*. München : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2000

WINTER, Heinrich: *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. S. 6–15. In: HENN, Hans-Wolfgang (Hrsg.) ; MAASS, Katja (Hrsg.): *ISTRON, Band 8. Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Hildesheim, Berlin : Verlag Franzbecker, 2003

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Anhang A

Befragungsbogen

Befragung zu Problemlöseaufgaben

Bitte trage als erstes diesen Code auf der Linie unten ein:

1) Erster Buchstabe des Vornamens deines Vaters (z. B. 'K' für Karl)
2) Letzter Buchstabe von deinem Geburtsmonat (z. B. 'R' für Jänner)
3) Letzter Buchstabe des Vornamens deiner Mutter (z. B. 'A' für Petra)

_ _ _

Bitte schreibe diese drei Buchstaben auch auf alle anderen Zettel, die du verwendest.

Geschlecht: ☐ männlich ☐ weiblich   Mathematiknote im Semesterzeugnis: __

Ich beschäftige mich mit Knobel- und Rätselaufgaben:

☐ sehr gern ☐ gern ☐ weniger gern ☐ nicht gern

Ich kann Knobel- und Rätselaufgaben lösen:

☐ sehr gut ☐ gut ☐ weniger gut ☐ nicht gut

Aufgabe 1:

Bei einer 5-stelligen Zahl ist nur die erste Stelle, nämlich 5, bekannt. Alle anderen vier Stellen sind gleich. Die Zahl hat also folgende Gestalt: $5aaaa$. Wählt man zum Beispiel $a = 0$, dann ist die Zahl 50000.
Für welche Ziffern a ist diese 5-stellige Zahl $5aaaa$ durch 6 teilbar?

Aufgabe 2: Briefmarken

Eine Dame gab dem Postbeamten am Schalter eine Dollarnote für Briefmarken und sagte: 'Geben Sie mir ein paar Marken zu 2 Cent, zehnmal so viel zu 1 Cent und für den Rest 5-Cent-Briefmarken.' Was tut der Beamte, um ihr diesen etwas verwirrenden Wunsch zu erfüllen?
(Hinweis: 1 Dollar = 100 Cent)

Aufgabe 3: Badewanne

Man braucht zwei Minuten, um eine Badewanne zu füllen. Wenn die Wanne voll ist, dauert es bei geöffnetem Stöpsel drei Minuten, um sie zu leeren. Wie lange dauert es, bis die Wanne voll ist, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

Anhang B

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden nicht untersucht, sondern sind für alle, die früher fertig werden gedacht. Natürlich darf auch zu Hause weitergerätselt werden. Viel Spaß :-)

Aufgabe 1: Geteilte Brote

Zwei Araber in der Wüste lassen sich zum Abendmahl nieder. Der eine hat drei, der andere zwei Brote. Bevor sie noch beginnen, taucht – völlig erschöpft – ein Fremder auf. „Ich habe zwar noch etwas Geld, aber nichts mehr zu essen“, berichtet er.
Die beiden Araber beschließen, den Essensvorrat gerecht zu teilen; jeder isst gleich viel und alle drei werden satt. Der Fremde gibt den beiden Arabern fünf Münzen und zieht weiter. Sie drehen die Münzen unschlüssig hin und her. Der mit den zwei Broten meint, man sollte das Geld entsprechend der beigesteuerten Brote aufteilen. Er behält daher zwei Münzen. Der andere protestiert. Der herbeigerufene Kadi gibt dem einen vier, dem anderen eine Münze.
Hat der Kadi Recht?

Aufgabe 2: Fuchsjagd

Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge. Der Hund legt aber mit einem Sprung 2 Meter, der Fuchs jedoch nur 1 Meter zurück. Zu Beginn ist der Fuchs 60 Meter vor dem Hund. Mit wie vielen seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein?

Aufgabe 3: Die Schnecke im Brunnen

Eine Schnecke ist in der Früh in einen Brunnen gefallen, der 10 Meter tief ist. Jeden Tag klettert die Schnecke 4 Meter nach oben, rutscht aber in der Nacht wieder 2 Meter hinunter. Wie lange braucht die Schnecke, bis sie aus dem Brunnen geklettert ist?
Vorsicht: Falle!

Anhang C

Statistische Daten

Anzahl der richtig gelösten Aufgaben – Motivation

Die ursprünglichen Daten lauten wie folgt:

Anzahl ↓ | Motivation →	sehr g.	gern	weniger g.	nicht g.	$b_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}$
0 Aufg. richtig	0	2	9	1	12
1 Aufg. richtig	2	24	28	5	59
2 Aufg. richtig	1	15	20	3	39
3 Aufg. richtig	0	4	3	0	7
$b_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$	3	45	60	9	117

Tabelle C.1: *absolute Häufigkeiten: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Motivation*

Anzahl ↓ | Motivation →	sehr g.	gern	weniger g.	nicht g.
0 Aufg. richtig	0,3	4,6	6,2	0,9
1 Aufg. richtig	1,5	22,7	30,3	4,5
2 Aufg. richtig	1,0	15,0	20,0	3,0
3 Aufg. richtig	0,2	2,7	3,6	0,5

Tabelle C.2: *erwartete Häufigkeiten: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Motivation*

Nach Zusammenfassen der Kategorien ergeben sich folgende Werte:

Anzahl ↓ | Motivation →	sehr g. oder gern	weniger oder nicht g.	$b_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}$
0 oder 1 Aufg. richtig	28	43	71
2 oder 3 Aufg. richtig	20	26	46
$b_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$	48	69	117

Tabelle C.3: *absolute Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Motivation*

Anzahl ↓ | Motivation →	sehr g. oder gern	weniger oder nicht g.
0 oder 1 Aufg. richtig	29,1	41,9
2 oder 3 Aufg. richtig	18,9	27,1

Tabelle C.4: *erwartete Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Motivation*

Damit ergeben sich folgende Kennzahlen:

$$K_{0,05} = 3,84 \qquad U = 0,19 \qquad U < K_{0,05}$$

Anzahl der richtig gelösten Aufgaben – selbst eingeschätzte Lösungsfertigkeiten

Die ursprünglichen Daten lauten wie folgt:

Anzahl ↓ | Fertigkeiten →	sehr g.	gut	weniger g.	nicht g.	$b_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}$
0 Aufg. richtig	0	3	9	0	12
1 Aufg. richtig	0	19	37	3	59
2 Aufg. richtig	1	16	19	3	39
3 Aufg. richtig	1	2	4	0	7
$b_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$	2	40	69	6	117

Tabelle C.5: *absolute Häufigkeiten: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Fertigkeiten*

Anzahl ↓ | Fertigkeiten →	sehr g.	gut	weniger g.	nicht g.
0 Aufg. richtig	0,2	4,1	7,1	0,6
1 Aufg. richtig	1,0	20,2	34,8	3,0
2 Aufg. richtig	0,7	13,3	23,0	2,0
3 Aufg. richtig	0,1	2,4	4,1	0,4

Tabelle C.6: *erwartete Häufigkeiten: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Fertigkeiten*

Nach Zusammenfassen der Kategorien ergeben sich folgende Werte:

Anzahl ↓ | Fertigkeiten →	sehr g. oder gut	weniger oder nicht g.	$b_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}$
0 oder 1 Aufg. richtig	22	49	71
2 oder 3 Aufg. richtig	20	26	46
$b_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$	42	75	117

Tabelle C.7: *absolute Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Fertigkeiten*

Anzahl ↓ | Fertigkeiten →	sehr g. oder gut	weniger oder nicht g.
0 oder 1 Aufg. richtig	25,5	45,5
2 oder 3 Aufg. richtig	16,5	29,5

Tabelle C.8: *erwartete Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Anzahl richtig gelöster Aufgaben – Fertigkeiten*

Damit ergeben sich folgende Kennzahlen:

$$K_{0,05} = 3,84 \qquad U = 1,89 \qquad U < K_{0,05}$$

Motivation – Mathematiknote im Semesterzeugnis

Die ursprünglichen Daten lauten wie folgt:

Motivation ↓ | Note →	1	2	3	4	5	$b_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}$
sehr gern	0	0	1	2	0	3
gern	7	9	17	8	2	43
weniger gern	3	19	19	16	4	61
nicht gern	0	0	4	3	0	7
$b_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$	10	28	41	29	6	114

Tabelle C.9: *absolute Häufigkeiten: Motivation – Mathematiknote*

Motivation ↓ | Note →	1	2	3	4	5
sehr gern	0,3	0,7	1,1	0,8	0,2
gern	3,8	10,6	15,5	10,9	2,3
weniger gern	5,4	15,0	21,9	15,5	3,2
nicht gern	0,6	1,7	2,5	1,8	0,4

Tabelle C.10: *erwartete Häufigkeiten: Motivation – Mathematiknote*

Nach Zusammenfassen der Kategorien ergeben sich folgende Werte:

Motivation ↓ | Note →	1 oder 2	3	4 oder 5	$b_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}$
sehr g. oder gern	16	18	12	46
weniger oder nicht g.	22	23	23	68
$b_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$	38	41	35	114

Tabelle C.11: *absolute Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Motivation – Mathematiknote*

Motivation ↓ | Note →	1 oder 2	3	4 oder 5
sehr g. oder gern	15,3	16,5	14,1
weniger oder nicht g.	22,7	24,5	20,9

Tabelle C.12: *erwartete Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Motivation – Mathematiknote*

Damit ergeben sich folgende Kennzahlen:

$$K_{0,05} = 5,99 \qquad U = 0,80 \qquad U < K_{0,05}$$

selbst eingeschätzte Lösungsfertigkeiten – Mathematiknote im Semesterzeugnis

Die ursprünglichen Daten lauten wie folgt:

Fertigkeiten ↓ | Note →	1	2	3	4	5	$b_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}$
sehr gut	1	1	0	0	0	2
gut	7	6	15	8	2	38
weniger gut	2	21	25	18	2	68
nicht gut	0	1	0	3	2	6
$b_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$	10	29	40	29	6	114

Tabelle C.13: *absolute Häufigkeiten: Fertigkeiten – Mathematiknote*

Fertigkeiten ↓ | Note →	1	2	3	4	5
sehr gut	0,2	0,5	0,7	0,5	0,1
gut	3,3	9,7	13,3	9,7	2,0
weniger gut	6,0	17,3	23,9	17,3	3,6
nicht gut	0,5	1,5	2,1	1,5	0,3

Tabelle C.14: *erwartete Häufigkeiten: Fertigkeiten – Mathematiknote*

Nach Zusammenfassen der Kategorien ergeben sich folgende Werte:

Fertigkeiten ↓ | Note →	1 oder 2	3	4 oder 5	$b_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}$
sehr g. oder gut	15	15	10	40
weniger oder nicht g.	24	25	25	74
$b_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$	39	40	35	114

Tabelle C.15: *absolute Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Fertigkeiten – Mathematiknote*

Fertigkeiten ↓ | Note →	1 oder 2	3	4 oder 5
sehr g. oder gut	13,7	14,0	12,3
weniger oder nicht g.	25,3	26,0	22,7

Tabelle C.16: *erwartete Häufigkeiten bei zusammengefassten Kategorien: Motivation – Mathematiknote*

Damit ergeben sich folgende Kennzahlen:

$$K_{0,05} = 5,99 \qquad U = 0,95 \qquad U < K_{0,05}$$

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Christian Steiner
Geburtsdatum:	18. Dezember 1989
Geburtsort:	Wien

Schubildung

September 1996–Juni 2000:	Volksschule Leystraße 34, 1200 Wien
September 2000–Juni 2008:	AHS Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium Franklinstraße 21, 1210 Wien, ab Sept. 2003 mit der unverbindlichen Übung „Mathematik Olympiade“
17. Juni 2008:	Reifeprüfung mit ausgezeichnetem Erfolg an dieser Schule mit einer Fachbereichsarbeit zum Thema „Verschiedene Mikrofontypen und deren Funktionsweise im Vergleich“

Präsenzdienst

Oktober 2008–April 2009:	Fernmeldetruppenschule, Starhemberg-Kaserne Wien

Studium

ab März 2009:	„Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik“ an der Universität Wien
19. September 2011:	Abschluss des ersten Studienabschnitts

Praktika und Weiterbildung

Juli 2008 und Juli 2009:	Betriebspraktikum bei SIEMENS AG Österreich
Juli 2010 und Juli 2012:	Ferialpraktikum bei der Merkur Warenhandels AG Österreich
Oktober 2011–Juni 2014:	Tutor an der Universität Wien bei der Lehrveranstaltung „Übungen zur Physik für Ernährungswissenschaften“
Juli 2013:	Tätigkeit als Leiter eines Workshops beim Sommerferiencamp der Volksschule der Stiftung Theresianische Akademie Wien
Dezember 2013:	Ausbildung zum Begleitlehrer einer Wintersportwoche für Skilauf des Universitätssportinstituts Wien

Persönliche Interessen

Informatik, Bücher, Rätsel- und Knobelaufgaben, Musizieren (Violine), Tanzen, Segeln, Schwimmen