



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

“Integralsätze der Analysis”

Verfasserin

Sarah Koschina

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im Juni 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramt: Mathematik, Psychologie & Philosophie

Betreuer: Prof. Dr. Hans Georg Feichtinger

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, am 28.04.2015



Sarah Koschina

Danksagung

Ich möchte mich bei allen Menschen herzlichst bedanken, die mich während meines Studiums unterstützt haben. Ein großer Dank gilt Professor Christoph Baxa, der mir bei der Suche nach einem geeigneten Diplomarbeitsthema geholfen hat. Ein besonderer Dank gilt auch meinem Betreuungsprofessor Hans Georg Feichtinger, der mich während der Diplomarbeit mit hilfreichen Informationen und Ratschlägen begleitet hat. Außerdem möchte ich mich noch meinen Eltern danken, die mich während des gesamten Studiums in jeglicher Hinsicht unterstützt und immer an mich geglaubt haben.

Abstract

Diese Arbeit setzt sich mit dem Thema der Integralsätze in der Analysis auseinander. Sie beschäftigt sich mit Spezialfällen des allgemeinen Satzes von Stokes. Es werden der Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^2 , der Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^3 und der Integralsatz von Stokes näher beschrieben. Zu Beginn der Arbeit werden mathematische Inhalte aufgearbeitet, die zum Verständnis der Integralsätze beitragen. Diese werden mithilfe von Beispielen und Graphiken illustriert. Anschließend werden die Integralsätze definiert und unterschiedliche Versionen der Sätze erläutert und deren Vorteile geschildert. Weiteres beschreibt diese Arbeit praktische Anwendungen dieser Sätze im Bereich der Physik. Explizit wird auf die Maxwell-Gleichungen eingegangen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Grundlagen	8
2.1	Skalar- und Vektorfelder	8
2.2	Partielle Ableitungen	14
2.2.1	Höhere partielle Ableitungen	14
2.3	Der Gradient	16
2.3.1	Richtungsableitung	16
2.4	Tangentenvektor von Kurven	20
2.4.1	Beispiel zum Tangentenvektor	22
2.5	Bogenlänge und Wegintegral	24
2.5.1	Bogenlänge	24
2.5.2	Wegintegrale	31
2.6	Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes	35
2.6.1	Divergenz eines Vektorfeldes	35
2.6.2	Rotation eines Vektorfeldes	38
2.7	Gradientenfelder	41
2.7.1	Integrabilitätsbedingungen	42
3	Integralsätze	45
3.1	Satz von Gauß in der Ebene	46
3.2	Satz von Gauß im Raum	55
3.3	Integralsatz von Stokes	60
4	Anwendungen	66
4.1	Elektromagnetisches Feld	66
4.2	Lorentzkraft	66
4.3	Ladungsdichte und elektrischer Strom	67
4.4	Die Maxwell-Gleichungen	69
4.4.1	Die Maxwell-Gleichungen in Differentialform	69
4.4.2	Die Maxwell-Gleichungen in Integralform	72
4.5	Reflexion	76
5	Literatur und Referenzen	77

1 Einleitung

Einer der bekanntesten Mathematiker ist Carl Friedrich Gauß. Beinahe jeder kennt die Geschichte, als er von seinem Lehrer aufgefordert wurde die Zahlen von 1-100 zu addieren und Gauß diese Aufgabe nach kurzer Zeit gelöst hatte. Gauß hat aber auch andere wichtige Beiträge zur Mathematik geleistet, so auch zum Thema Integralsätze. Ich habe mich in meiner Arbeit sowohl mit dem Integralsatz von Gauß in der Ebenen, dem Integralsatz von Gauß im Raum, als auch mit dem Stokesschen Integralsatz im Raum beschäftigt.

Die Integralsätze erleichtern bei komplizierten Integralen zum Teil den Rechenaufwand, oder machen manche Integrale überhaupt erst lösbar. Das Ziel meiner Arbeit ist es unter anderem, die Mathematik, welche man für die besagten Integralsätze benötigt zu erklären und anhand von ausgewählten Beispielen verständlich zu machen. Außerdem möchte ich auf diese drei Sätze eingehen und zeigen, wie das Berechnen von Integralen durch sie vereinfacht wird.

Bevor ich mich in meiner Arbeit mit Integralsätzen beschäftige, werden noch einige Begriffe, welche für das Thema wichtig sind erklärt und definiert. Dies soll dabei helfen, den Hauptteil der Arbeit besser zu verstehen und die darin vorkommenden Begriffe zu wiederholen bzw. kennen zu lernen falls sie noch nicht bekannt sind.

Zu Beginn werde ich auf die Eigenschaften von Skalarfeldern und Vektorfeldern eingehen, sowie auf den Begriff des Gradienten und der Richtungsableitung. Danach wird die Bogenlänge einer Kurve und deren Parametrisierung erklärt. Nachdem ich auch den Begriff des Kurvenintegrals erläutert habe, werde ich noch auf die Divergenz und die Rotation von Vektorfeldern eingehen. Bevor ich dann mit dem eigentlichen Thema meiner Arbeit, den Integralsätzen beginnen werde, wird noch erklärt, was ein Gradientenfeld ist.

Im Hauptteil der Arbeit werden dann die folgenden drei Integralsätze vorgestellt und analysiert:

- Integralsatz von Gauß in der Ebene
- Integralsatz von Gauß in drei Dimensionen
- Integralsatz von Stokes im Raum.

Die Vorteile dieser Sätze werden vor allem an Rechenbeispielen demonstriert und veranschaulicht.

Am Ende dieser Arbeit werde ich noch einen Einblick in ein Gebiet der Physik geben, indem die Integralsätze praktische Anwendungen finden.

2 Grundlagen

Im folgenden Kapitel werden einige Begriffe, welche man später für die Integralsätze benötigt, definiert und erklärt. Dies soll dabei helfen, die Integralsätze besser zu verstehen und darin vorkommende Begriffe zu wiederholen bzw. kennen zu lernen falls sie noch nicht bekannt sind.

2.1 Skalar- und Vektorfelder

In der reellen Analysis beschäftigt man sich mit reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dies ist in den Anwendungen zu wenig und deshalb beschäftigt man sich in der mehrdimensionalen Analysis mit Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, wobei X nicht leer ist. Man hat also einen Punkt im \mathbb{R}^n und bekommt einen Punkt im \mathbb{R}^p , und ein Punkt im \mathbb{R}^p ist ein Vektor.¹

Ziel ist es mithilfe von Vektoren Kurven, wie beispielsweise einen Kreis in der Ebene oder eine Schraubenlinie im Raum, zu beschreiben. Der Vektorpfeil, mit welchem man die Kurve beschreiben möchte, geht vom Ursprung des Koordinatensystems weg. Seine Spitze läuft dann entlang der Kurve.²

Eine Kurve ist nichts anderes als eine eindimensionale Menge von Punkten. Da die Position eines Punktes im Koordinatensystem durch seinen Ortsvektor gegeben ist, kann eine Kurve durch eine Menge von Ortsvektoren beschrieben werden. Auf dieser Menge bewegt man sich mit Hilfe eines Parameters.³

Dies funktioniert nicht nur für Kurven, sondern auch für Flächen. Man lässt einfach die Spitze eines Vektorpfeiles entlang einer Fläche laufen.

Beispiel 1 (Windströmung). *Man ordnet jedem Punkt p über Österreich, sagen wir bis zu einer Höhe von 8km, eine Windgeschwindigkeit $v(p)$ zu. $v(p)$ ist ein Vektor im \mathbb{R}^3 dessen Richtung die Windrichtung angibt. Seine Länge $\|v(p)\|$ gibt die Geschwindigkeit in m/s an. Also kann man schreiben:*

$$v : \mathbb{R}^3 \subseteq O \rightarrow \mathbb{R}^3$$

*$v(p)$ ist also die Windgeschwindigkeit in p und wir bekommen als Ergebnis drei Zahlen.*⁴

Das eben angeführte Beispiel ist ein Beispiel für ein **Skalarfeld**.

Definition 1. *Ein Skalarfeld f ist eine Funktion, die jedem Raumpunkt bzw. dem zugehörigen Ortsvektor eine Zahl zuordnet, also*

¹vgl. Kirchgessner/Schreck 2013: 15

²vgl. ebd.: 20

³vgl. ebd.: 33

⁴vgl. Steinbauer 2013, Link[1], S.118

$$f : \vec{r} \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(\vec{r}) \in \mathbb{R}^5$$

Man kann als Beispiel auch die Temperatur in einem Pool nehmen. Jedem Punkt im Raum, also in diesem Beispiel im Pool, wird ein Skalar zugeordnet.

Man betrachte nochmals die Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^p | n, p \geq 1$.

Es gibt nun drei Fälle zu unterscheiden:

- (i) Wenn gilt, dass $n = 1$ und $p = 2$ spricht man von Ebenen und Kurven. Das sind Funktionen der Form $r : \mathbb{R} \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}^2$. Diese Ebenen und Kurven kann man veranschaulichen, indem man ihr Bild $r(X) \in \mathbb{R}^2$ zeichnet.

Beispiel 2. $\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$ ⁶.

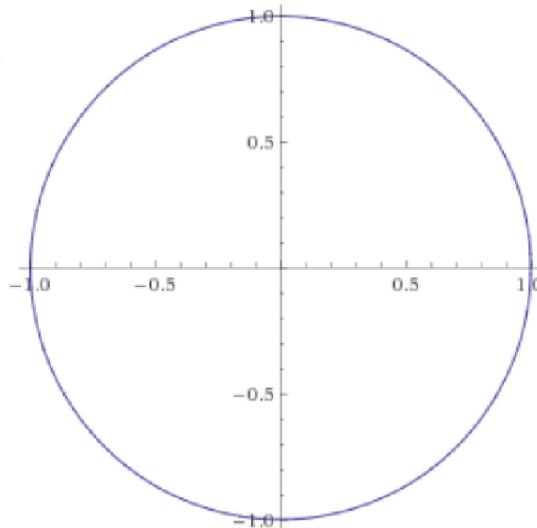


Abbildung 1: Kreis aus Bsp.2

Falls $p = 3$, dann spricht man von Raumkurven.

⁵Kirchgassner & Schreck 2013, S.33

⁶vgl. Steinbauer 2013, Link[1], S.123

Beispiel 3. $\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$ ⁷.

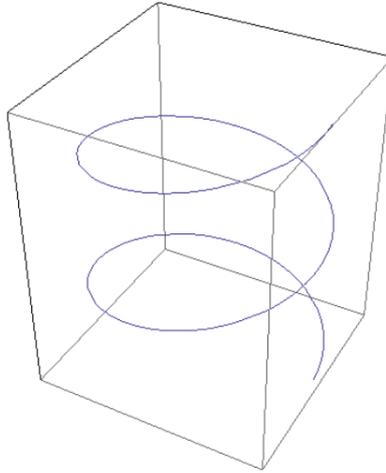


Abbildung 2: Schraubenlinie aus Bsp.3

- (ii) Wenn $n = 2$ und $p = 1$, also $f : \mathbb{R}^2 \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, kann der Graph von $f : G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in X\}$ als Landschaft oder Relief aufgefasst werden.

Beispiel 4. $f : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(x, y) = \sin(x) \cos(x)$

⁷vgl. Steinbauer 2013, S.124

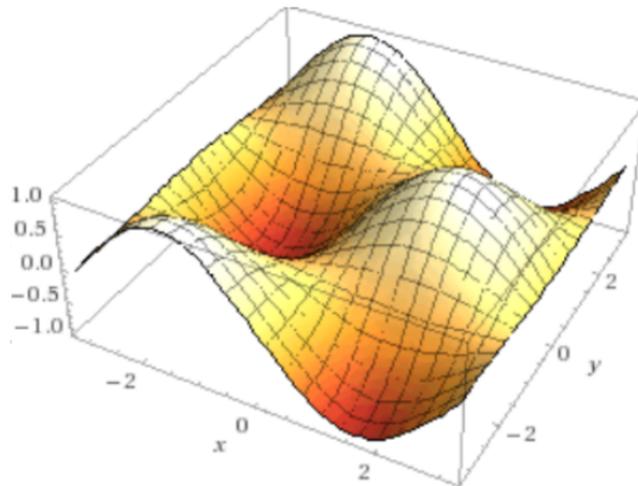


Abbildung 3: Landschaft aus Bsp.4

Da in unserem Fall $n = 2$, also größer als 1 ist, kann man die partiellen Funktionen von f betrachten:

- (1) $x \mapsto f(x, 0) = \sin(x) \cos(0) = \sin(x)$
- (2) $x \mapsto f(x, \pi/2) = \sin(x) \cos(\pi/2) = 0$
- (3) $y \mapsto f(\pi/2, y) = \sin(0) \cos(y) = 0$
- (4) $y \mapsto f(\pi/2, y) = \sin(\pi/2) \cos(y) = \cos(y)$ ⁸

(iii) Im Fall von $n = p$ spricht man von **Vektorfeldern**. ⁹

Definition 2. Ein Vektorfeld ordnet jedem Punkt im Raum bzw. jedem zugehörigen Ortsvektor einen Vektor zu. ¹⁰

⁸vgl. Steinbauer 2013, S.123

⁹vgl. ebd. S.123

¹⁰vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.35

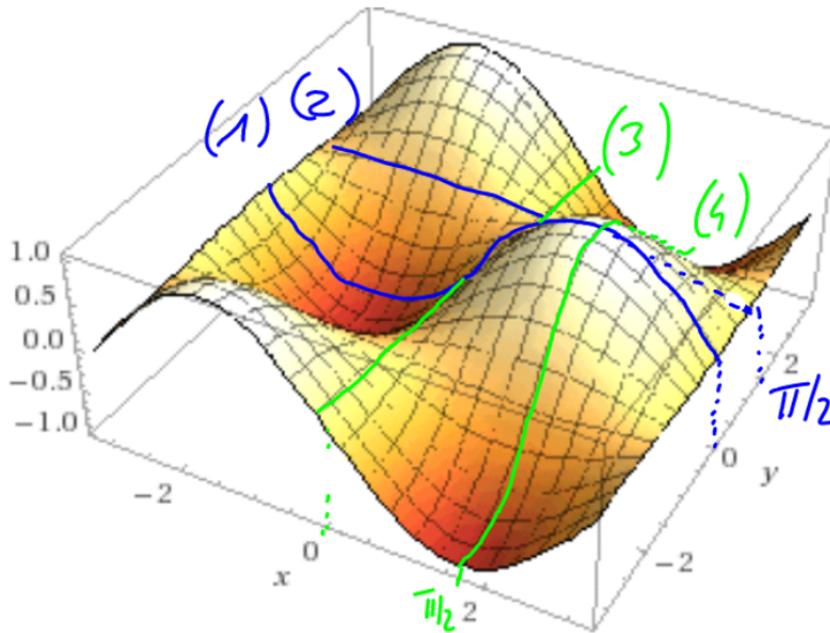


Abbildung 4: Höhenchnittlinien der Landschaft aus Bsp.4

Wenn das Vektorfeld zwei- oder dreidimensional ist, also $n = p = 2$ oder $n = p = 3$, kann man sich den Vektor $v(x)$ als einen am Punkt x des Raumes angehefteten Pfeil vorstellen.

Beispiel 5. $v : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$v(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{11}$$

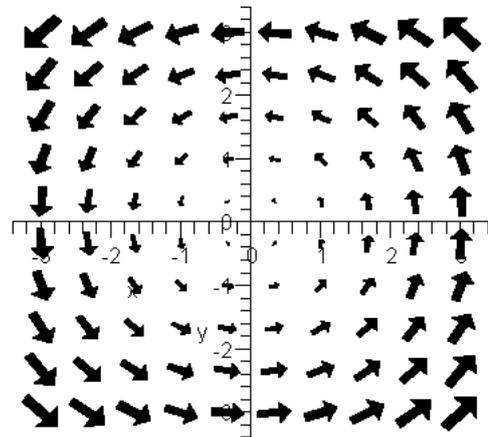


Abbildung 5: Vektorfeld $v : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

Beispiel 6. $w : [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$w(x, y, z) = (x, y, z) \quad \text{12}$$

¹¹vgl. Steinbauer 2013, Link[1], S.126

¹²vgl. ebd. S.126

Das ist das sogenannte Positionsvektorfeld. In jedem Punkt (x, y, z) wird ein Vektor angehängt. Jeder dieser Vektoren zeigt vom Ursprung $(0, 0, 0)$ weg und hat die Länge $\|(x, y, z)\|$.

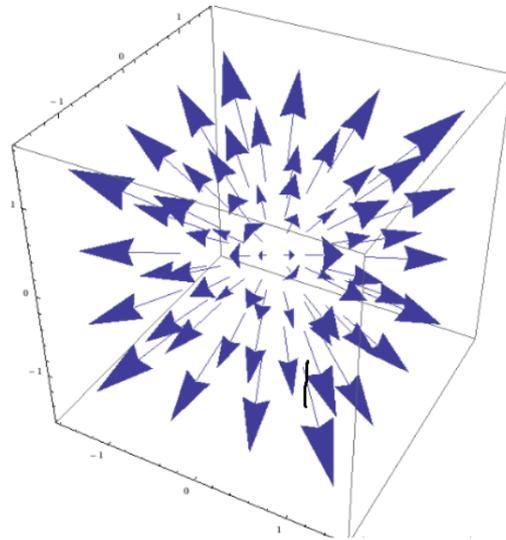


Abbildung 6: Positionsvektorfeld w

Wenn man nochmals an das Pool-Beispiel von vorhin denken, dann beschreibt das Vektorfeld die Wasserbewegung. Es wird also jedem Punkt im Pool ein Vektor zugeordnet.¹³

¹³vgl. Steinbauer 2013, Link [1], S.126

2.2 Partielle Ableitungen

Um zu untersuchen ob ein Skalar- oder Vektorfeld differenzierbar, ist benötigt man die sogenannte **partielle Ableitung**.

Definition 3. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X$

- (i) Falls die i-te partielle Funktion $(1 \leq i \leq n)x_i \mapsto f(\xi_1, \dots, x_i, \dots, \xi_n)$ im Punkt $x_i = \xi_i$ differenzierbar ist, so heißt f in ξ partiell nach x_i (bzw. der i-ten Koordinate) differenzierbar und wir schreiben:

$$D_j f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) = \partial_{x_j} f(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h e_j) - f(\xi)}{h}.$$

- (ii) Falls f in ξ in allen Variablen $x_i (1 \leq i \leq n)$ partiell differenzierbar ist, so heißt f partiell differenzierbar in ξ (in alle Richtungen).
- (iii) Falls f in allen Punkten $\xi \in X$ (in alle Richtungen) partiell differenzierbar ist, so heißt f partiell differenzierbar (auf X).¹⁴

Beispiel 7. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(s, t) = s e^t + \sin(st)$

$$D_1 f(st) = e^t + \cos(st) * t$$

$$D_2 f(s, t) = s e^t + \cos(st) * s$$

Bei der partiellen Ableitung leitet man also nach der jeweiligen Variablen ab (bei D_1 z.B. nach x) und betrachtet die übrigen Variablen als Konstanten.¹⁵

2.2.1 Höhere partielle Ableitungen

Sei X Teilmenge von \mathbb{R}^n offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}, \xi \in X$.

- (i) Falls f (auf X) partiell differenzierbar ist, so erhält man n -Stück Funktionen

$$D_1 f : G \rightarrow \mathbb{R}, \dots, D_n f : G \rightarrow \mathbb{R}.$$

Falls $D_i f$ in ξ partiell differenzierbar nach x_j ist, so kann man eine partielle Ableitung 2. Ordnung im Punkt X_i definieren:

$$D_j D_i f(\xi)$$

So erhält man n^2 -Stück partielle Ableitungen 2. Ordnung. n^2 Stück sind es deshalb, weil jede Funktion in jede Richtung partiell differenzierbar ist.

- (ii) Falls $D_j D_i f$ auf ganz X existiert und ξ partiell nach x_l differenzierbar ist erhält man

$$D_l D_j D_i f(X_i)$$

So geht das immer weiter.¹⁶

¹⁴Hörmann 2008, Link [2], S.101

¹⁵vgl. Steinbauer 2013, Link [1], S.137

¹⁶vgl. Hörmann 2008, Link [2], S.104

Eine Frage die sich nun stellt ist, ob man die partiellen Ableitungen vertauschen darf, also ob zum Beispiel $D_1 D_2 f(X_i) = D_2 D_1 f(X_i)$? Im Allgemeinen gilt dies nicht! Wenn man allerdings voraussetzt, dass die betroffenen Ableitungen stetig sind, dann schon. Diese Aussage wird im **Satz von Schwarz** formuliert.

Satz von Schwarz: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\xi \in X$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Falls $D_i D_j f$ und $D_j D_i f$ ($1 \leq i, j \leq n$) auf X existieren und in ξ stetig sind, so gilt:

$$D_i D_j f(\xi) = D_j D_i f(\xi).^{17}$$

2.3 Der Gradient

Nachdem man die Begriffe Skalarfeld und Vektorfeld definiert hat, möchte man nun Ableitungen finden, welche auf die eben genannten Felder wirken können. Zwei dieser Ableitungen sind der **Gradient** und die **Richtungsableitung**.

Definition 4. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Der Gradient von f ist definiert durch

$$\text{grad} f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \text{grad} f(x) := \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ D_2 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix}.$$

Oft wird anstatt $\text{grad} f(x)$ auch $\vec{\nabla} f(x)$ geschrieben. $\vec{\nabla}$ wird "Nabla-Operator" genannt.

Der Gradient eines Skalarfelds steht immer senkrecht auf den Höhenlinien und zeigt in die Richtung des größten Anstiegs.¹⁸

Beispiel 8. Um den Gradienten graphisch veranschaulichen zu können, beschränke ich mich in dem Beispiel auf Funktionen bzw. Skalarfelder, welche nur von zwei Unbekannten abhängen. Man hat eine Funktion $f(x,y) = x^2 \cdot y^2$ und den Punkt $P(1/2)$ gegeben. Um den Gradienten zu berechnen, muss man die partiellen Ableitungen bilden:

$$f_x = 2x$$

$$f_y = 2y$$

$$\text{Somit lautet der Gradient } \text{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}^{19}.$$

2.3.1 Richtungsableitung

Man hat bereits den Gradienten eines Skalarfeldes $\vec{\nabla} f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ D_2 f(x) \\ D_3 f(x) \end{pmatrix}$ definiert und

gezeigt, dass dieser einem Punkt im Skalarfeld einen Vektor zuordnet, der in die Richtung der stärksten Änderung des Skalarfelds zeigt. Man möchte aber nicht immer die größte Änderung wissen, sondern auch die Änderung in verschiedene Richtungen. Die Richtung ist dabei durch einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ gegeben, einem sogenannten Richtungsvektor. Das führt zur Definition der Richtungsableitung.

¹⁸Hörmann 2008, Link [2], S.103

¹⁹vgl. Link [3]

Definition 5. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$.

Falls der Grenzwert $D_v f(\xi) = \lim_{t \neq 0, t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t} \right)$ existiert und endlich ist, heißt $D_v f(\xi)$ Richtungsableitung von f in Richtung ξ .²⁰

Wenn $f(x_1, x_2, x_3)$ ein Skalarfeld ist und \vec{v} ein Vektor in dessen Richtung die Änderung geht, dann schreibt man für die Richtungsableitung auch:

$$D_v f(x_1, x_2, x_3) = (\vec{\nabla} f(x_1, x_2, x_3)) \vec{v}.$$

Zu beachten ist, dass wenn gilt $v = e_i$, also wenn v der Einheitsvektor ist, dann sind die Richtungsableitungen in Richtung der Koordinatenachsen, gerade die partiellen Ableitungen:

$$D_v f(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\xi + te_i) - f(\xi)}{t} \right) = D_i f(\xi)$$

Man kann aber auch die Richtungsableitungen aus den partiellen Ableitungen zusammensetzen.²¹

Proposition 1. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in ξ . Dann existieren alle Richtungsableitungen $D_v f(\xi)$ (d.h. $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$ und es gilt

$$D_v f(\xi) = \langle \text{grad} f(\xi), v \rangle.$$
²²

Bisher hat man nur vom Gradienten von Skalarfeld gesprochen. Man kann allerdings mithilfe des Gradienten auch Ableitungen von Vektorfeldern bilden. Das führt zu der Divergenz und der Rotation eines Vektorfeldes. Bevor darauf genauer eingegangen wird, wird noch der Zusammenhang zwischen Integralen über Skalarfeldern und Vektorfeldern erklärt. Das Integral über einer Kurve kennt man bereits. Deshalb beschäftigt man sich nun mit den Integralen über einer Flächen.²³ Dazu soll der Begriff des **Normalvektors** wiederholt werden. Einfach formuliert, ist der Normalvektor einer Fläche ein Vektor, der in jedem Punkt dieser Fläche senkrecht aus ihr herauszeigt.²⁴

Wie vorhin schon erwähnt, möchte man nicht nur Operationen auf einem Skalarfeld definieren, sondern auch auf einem Vektorfeld. Aufgabenstellungen, bei denen Vektorfelder eine wichtige Rolle spielen, verlangen es manchmal, dass man über Vektorfelder integriert. Wie dies funktioniert, wird im Folgenden beschrieben. Um die Integration über einem

²⁰Steinbauer 2013, Link [1], S.160

²¹ebd., S. 160

²²ebd. S.160

²³vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.96

²⁴ebd. S.47

Vektorfeld zu erklären, zu Beginn nun ein Beispiel: Wasser, welches durch ein Rohr fließt. Das Wasser hat eine Strömung, welche in jedem Punkt der innerhalb des Rohres liegt, durch eine Richtung und eine Stärke gekennzeichnet ist. Wenn man sich nochmals die Definition eines Vektorfeldes ins Gedächtnis ruft, sieht man, dass es sich hierbei um ein Vektorfeld handelt. Oft wird dieses Feld auch Strömungsfeld genannt.²⁵

In Abbildung 7 soll dieses Beispiel veranschaulicht werden.

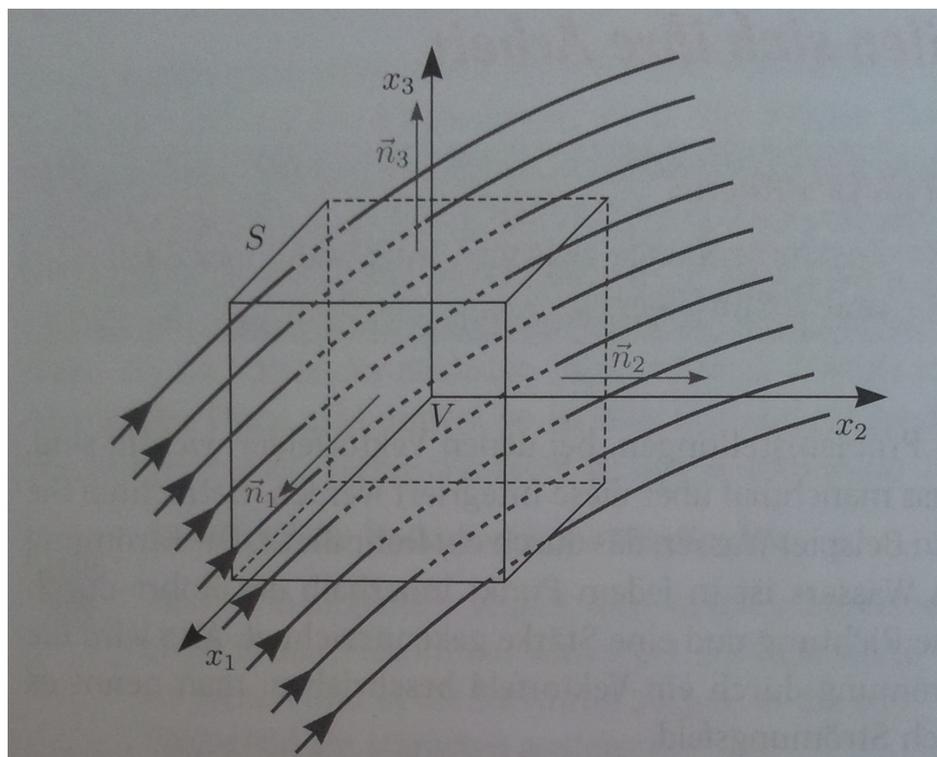


Abbildung 7: Strömung von Wasser durch einen Körper mit Volumen V und Oberfläche S

Unser Ziel ist es nun, einen gedachten Körper mit dem Volumen V und der Oberfläche S in das Strömungsfeld zu legen. Dann soll das Strömungsfeld über die geschlossene Oberfläche integriert werden. Der Vektor $d\vec{S}$ ist das Flächenelement bei dieser Integration. Somit ist das Ergebnis des Integrals eine Zahl.

Es stellt sich die Frage, was unter einem solchen vektoriellen Flächenelement zu verstehen ist. Man kann dieses Flächenelement so auffassen, dass man ein endlich kleines Flächendifferential $d\vec{S}$ hat, welches mit dem Normalvektor \vec{n} der Fläche multipliziert wird. Man erhält also: $d\vec{S} = \vec{n}dS$.

Der Normalvektor von einem Körper, der im Fall von Abbildung 7 ein Würfel ist, ist vom Ort

²⁵vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.47

abhängig. Das bedeutet: $\vec{n} = \vec{n}(r)$. Nun will man das Oberflächenintegral definieren:

$$\oint \vec{v}(r) d\vec{S} = \oint \vec{v} \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS.$$

\vec{v} beschreibt das Strömungsfeld des Wassers.²⁶

Man kann sich also vorstellen, dass das Integral über dem Strömungsfeld gleich 0 sein muss. Denn es kann kein Wasser dazu kommen und es kann auch kein Wasser verloren gehen. Auch das, was durch die Fläche in das Volumen übergeht, muss auch wieder aus dem Volumen hinausfließen. Da es sich hierbei aber nur um eine Vermutung handelt, ist es nötig diese Vermutung durch Berechnung zu beweisen.

Wenn man nun einen Körper hat, welcher keine einfache Form hat, kann eine solche Berechnung sehr kompliziert werden. Um dies zu vereinfachen ist es möglich, „*dass man das obige Integral eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ über die Oberfläche eines geschlossenen Körpers auf bestimmte Art und Weise*“ (Kirchgassner & Schreck 2013, S.49) umschreiben kann. Dabei wird das Integral über einer Fläche mit dem Volumenintegral verbunden und man kann das Integral als Integral über dem Volumen eines Körpers schreiben. Der Zusammenhang zwischen Flächenintegralen und Volumenintegralen führt zu den Integralsätzen.

„*Integralsätze sind nützliche Beziehungen zwischen Integralen über Skalar- oder Vektorfeldern, die entlang einer Kurve, über eine Fläche oder ein Volumen gegeben sind.*“ (Kirchgassner & Schreck 2013, S.49)

Bevor man sich mit den Integralsätzen beschäftigt, sind noch ein paar Begriffe zu definieren. Wie zu Beginn dieses Unterkapitels schon erwähnt, sind noch die Rotation und die Divergenz eines Vektorfeldes zu definieren. Auch Begriffe wie beispielsweise Tangentenvektor und Wegintegral sollen noch erläutert werden.

²⁶vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S. 49

2.4 Tangentenvektor von Kurven

Wenn man die Steigung der Tangente an einem bestimmten Punkt eines Graphen berechnen möchte, benötigt man dazu die erste Ableitung der Funktion. Wenn man es nun anstatt mit Kurven mit Raumkurven zu tun hat, berechnet man die Steigung der Tangente in einem Punkt der Raumkurve mithilfe des **Tangentenvektors**.

Die Funktion $\vec{r}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $t \rightarrow \vec{r}(t)$ ist eine differenzierbare Funktion, welche eine Kurve im \mathbb{R}^n ist. Man möchte den Tangentenvektor $\vec{T}(t)$ zur Kurve $\vec{r}(t)$ finden. Das wird in Abb. 8 veranschaulicht. t ist der Parameter der Kurve und mit ihm wird meistens die Zeit (time) beschrieben. Man kann die Kurve, ganz gleich in der Nähe welches Punktes der Kurve man sich gerade befindet, linear approximieren.²⁷

Man bildet also den Differentialquotienten und definiert den Tangentenvektor $\vec{T}(t)$ zur Kurve $\vec{r}(t)$ folgendermaßen:

$$\vec{T}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right)^{28}$$

Wie die Bestimmung des Tangentenvektors grafisch aussieht, wird in Abbildung 8 veranschaulicht.

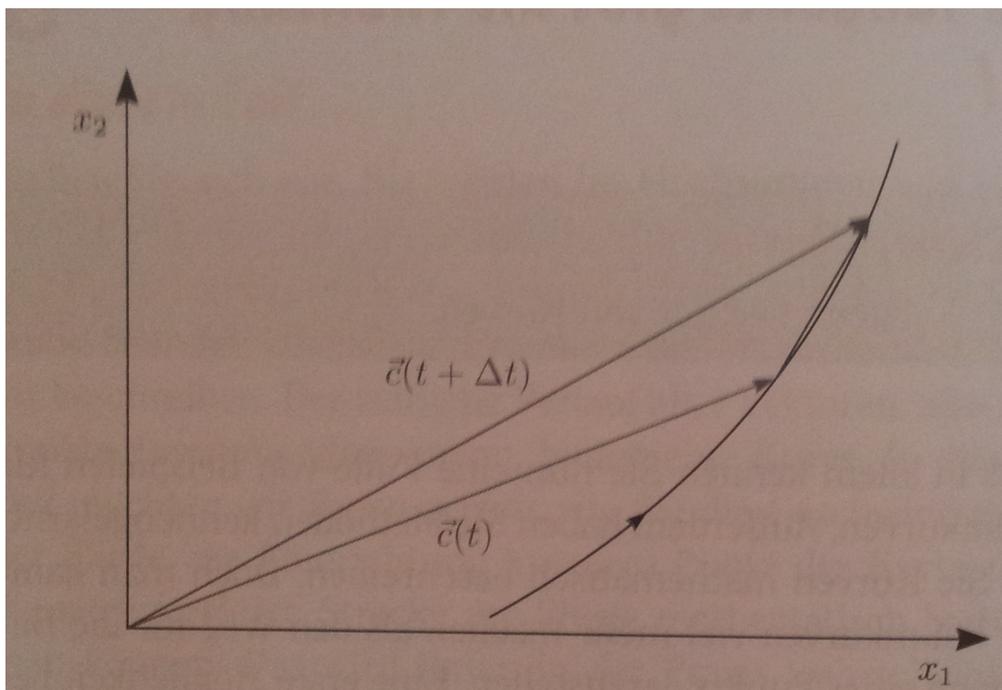


Abbildung 8: Bestimmung des Tangentenvektors an eine Kurve

²⁷vgl. Link [4]

²⁸vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.54

Den Tangentenvektor einer Kurve erhält man also indem man einmal nach dem Parameter der Kurve (im Fall oben nach t) ableitet. Das Ergebnis ist ein Vektor, der tangential zur Kurve an jedem Punkt liegt. Etwas genauer ausgedrückt: Wenn man eine Raumkurve in Parameterdarstellung angegeben hat, dann wird die Raumkurve nach dem Parameter abgeleitet, also nach jeder einzelnen Komponente und man erhält den Tangentenvektor dieser Raumkurve:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{r}_n(t) \end{pmatrix}$$

Der Tangentenvektor legt die Richtung einer Geraden fest, welche den Punkt berührt den man einsetzt. Man kann sich die Raumkurve auch als Weg vorstellen, welcher von einem Punkt der sich im Raum befindet zurückgelegt wird. In diesem Fall ist $\dot{\vec{r}}(t)$ ein Geschwindigkeitsvektor welcher tangential zur Kurve an jedem Punkt der Kurve liegt. Der Betrag dieses Vektors gibt an, mit welcher Geschwindigkeit der Punkt den Weg durchläuft.²⁹

²⁹vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S. 55

2.4.1 Beispiel zum Tangentenvektor

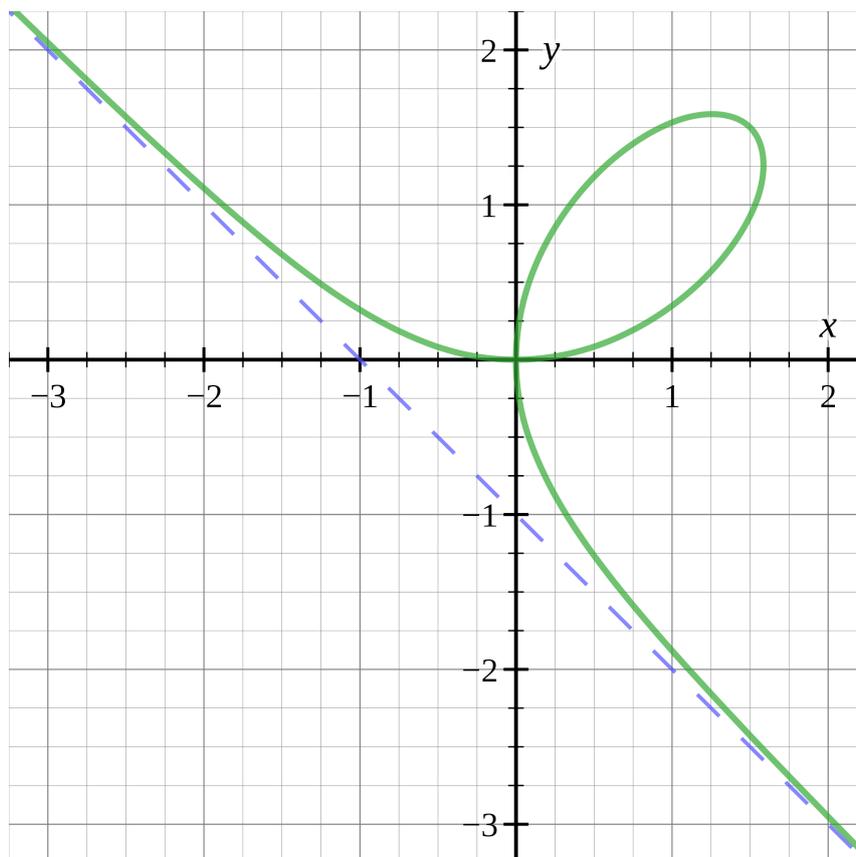


Abbildung 9: Kartesisches Blatt

Die in Abbildung 9 dargestellte Flächenkurve $\vec{r}(t)$ wird wie folgt beschrieben:

$$\vec{r}(t) = \frac{3at}{1+t^3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, a > 0, t > -1.$$

Diese Raumkurve wird als kartesisches Blatt bezeichnet, welche nach dem französischen Mathematiker und Philosophen René Descartes (1596-1650) benannt ist.³⁰

Bei $t = -1$ besitzt der oben angeführte Vektor eine Polstelle. Deshalb gilt:

$$\lim_{t \rightarrow -1} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\infty \\ \infty \end{pmatrix}, \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man überlegt sich jetzt, wie man sich auf dieser Kurve bewegt:

³⁰vgl. Link [5]

Die Kurve wird am Ursprung für zwei unterschiedliche Werte des Parameters erreicht und ist deshalb dort nicht eindeutig. Einmal wird der Ursprung mit dem Wert $t = 0$ und einmal mit dem Wert $t \mapsto \infty$. Wenn man von $t = -1$ herkommt, läuft man durch den zweiten Quadranten, durchschreitet für $t = 0$ den Ursprung, macht für Werte von t die ansteigen eine Schleife und läuft für $t \mapsto \infty$ zum Ursprung zurück.

Nun betrachtet man die zugehörigen Tangentenvektoren:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \end{pmatrix}, r_1(t) = \frac{3at}{1+t^3}, r_2(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

$$\dot{r}_1(t) = \frac{(1+t^3) \cdot 3a - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2},$$

$$\dot{r}_2(t) = \frac{(1+t^3) \cdot 6at - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Die Limiten des Tangentenvektors für die eben angeführten Werte von t sind:

$$\lim_{t \rightarrow -1} \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \infty \\ -\infty \end{pmatrix}, \dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix} 3a \\ 0 \end{pmatrix}, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} |\dot{\vec{r}}(t)| = \infty, |\dot{\vec{r}}(0)| = 3a, \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\vec{r}}(t)| = 0.$$

Man sieht, dass wenn man vom zweiten Quadranten herkommt, die Geschwindigkeit beim Durchlaufen der kartesischen Schleife immer kleiner wird. Nachdem man den Ursprung das erste Mal durchlaufen hat, wird man immer langsamer und braucht unendlich lange, bis man den Ursprung ein zweites Mal erreicht.³¹

³¹vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S. 55, 56

2.5 Bogenlänge und Wegintegral

2.5.1 Bogenlänge

Etwas was in Bezug auf Raumkurven noch wichtig ist, ist die Länge einer solchen Kurve. Man möchte wissen, welchen Weg ein bewegter Massenpunkt in einem gewissen Zeitintervall zurückgelegt hat, der die Kurve entlang wandert.

Definition 6. • Eine stetige Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Weg. Ist $I = [a, b]$ und $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = g$, dann heißt γ Weg von p nach g .

- Ein C^1 -Weg γ heißt regulär, falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t$.³²
- Ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt rektifizierbar, wenn es eine Konstante M gibt, so dass für alle Zerlegungen $Z := t_0, \dots, t_n$ des Intervalles $[a, b]$ stets

$$L(\gamma, Z) := \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \ll M$$

bleibt.³³

In Abbildung 10 ist der Weg γ von p nach g dargestellt.

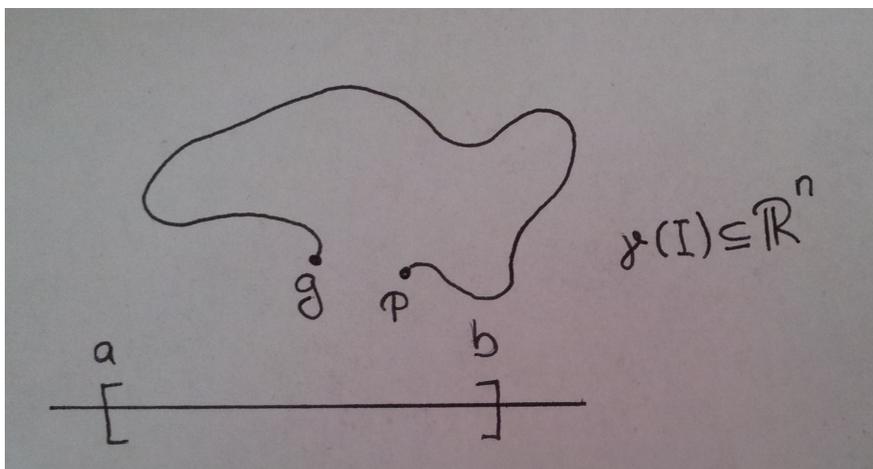


Abbildung 10: Weg γ von p nach g

Es werden jetzt noch ein Satz und eine Definition erläutert, die uns bei der späteren Formulierung des Satzes von Gauß helfen werden.

³²Steinbauer 2013, Link [1], S.179

³³Heuser 2008, S.350

Satz 1. Der Weg $\gamma := \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist genau dann rektifizierbar, wenn jede seiner

Komponentenfunktionen von beschränkter Variation auf $[a, b]$ ist.³⁴

Definition 7. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung $Z = z_0, \dots, z_n$ von $[a, b]$ gilt:

$$V(f, Z) := \sum_{k=1}^n |f(z_k) - f(z_{k-1})| \leq M.$$

Die Menge aller Funktionen beschränkter Variation auf $[a, b]$ bezeichnet man mit $BV[a, b]$.³⁵

Proposition 2. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ ein rektifizierbarer Weg im \mathbb{R}^p mit den Komponenten $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ und dem Bogen Γ . Außerdem sei die Funktion $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann setzt man

$$\int_{\gamma} F dx_k := \int_a^b F(\gamma(t)) d\gamma_k(t).$$

$\int_{\gamma} F dx_k$ ist nicht anderes als das Wegintegral $\int_{\gamma} \phi dx$, wobei $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^p$ das stetige Vektorfeld ist, dessen k -te Komponente mit F übereinstimmt, während alle anderen Komponenten verschwinden. Insbesondere gilt bei stetig differenzierbarem γ die Gleichung

$$\int_{\gamma} F dx_k = \int_a^b F(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) dt \quad ^{36}.$$

Nun interessiert man sich, wie schon erwähnt, für die Länge der Kurve und das führt zu dem Begriff der **Bogenlänge**. Bevor die Bogenlänge definiert wird, ein kurzes Beispiel um zu veranschaulichen, was genau gesucht ist.

Beispiel 9. Angenommen man fährt eine Strecke mit dem Auto entlang und möchte wissen, wie viel Weg man bereits zurückgelegt hat. Die Funktion $r(x)$, welche die gefahrene Strecke darstellt, wird in Abbildung 11 gezeigt.

Wenn man hier einfach die Funktion f integrieren würde, bekäme man die Fläche unter der Kurve. Aber wie schon gesagt interessiert man sich nicht für die Fläche unter der Kurve, sondern für die Länge der Kurve.

Angenommen man hat eine Geschwindigkeitskurve, also eine Kurve bei der man zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit kennt, physikalisch gesehen sind es Bewegungen. Zu jedem Zeitpunkt befindet man sich an einem bestimmten Ort. Diese Beschreibung wird in Abbildung 12 veranschaulicht. Nun möchte man die gesamte gefahrene Strecke wissen. Man sieht, dass

³⁴Heuser 2008, S.351

³⁵Mosch 2006, Link [6], S.1

³⁶Heuser 2008, S.495

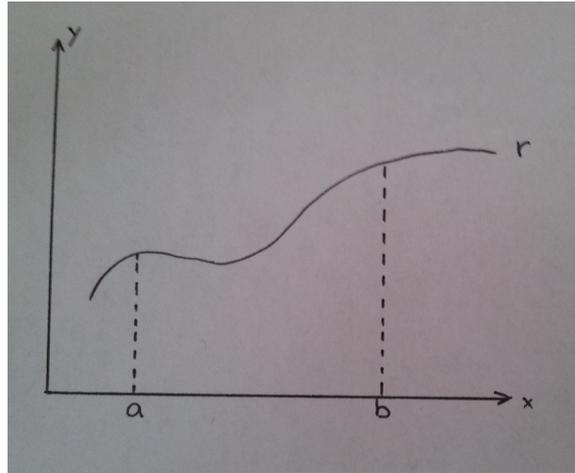


Abbildung 11: Schaubild der gefahrene Strecke $r(x)$

man in der ersten Stunde 25km/h zurückgelegt hat und das ist genau die Fläche unter der Geschwindigkeitskurve. Dasselbe gilt für die nächsten zwei Stunden. Es ergibt sich, dass die gesamte zurückgelegte Strecke genau die Fläche unter der Geschwindigkeitskurve ist. Das möchte man auch für die Kurve in Abbildung 11 machen. Man muss die Geschwindigkeit bestimmen und diese dann integrieren. Hier stellt sich nun die Frage, was die Geschwindigkeit in dieser Abbildung ist. Man möchte die Kurve so durchfahren, dass man gleichmäßige Zeitabstände hat und man möchte außerdem wissen, in welchem Verhältnis die Geschwindigkeit zu der Zeit x steht. Das wird in Abbildung 13 gezeigt.

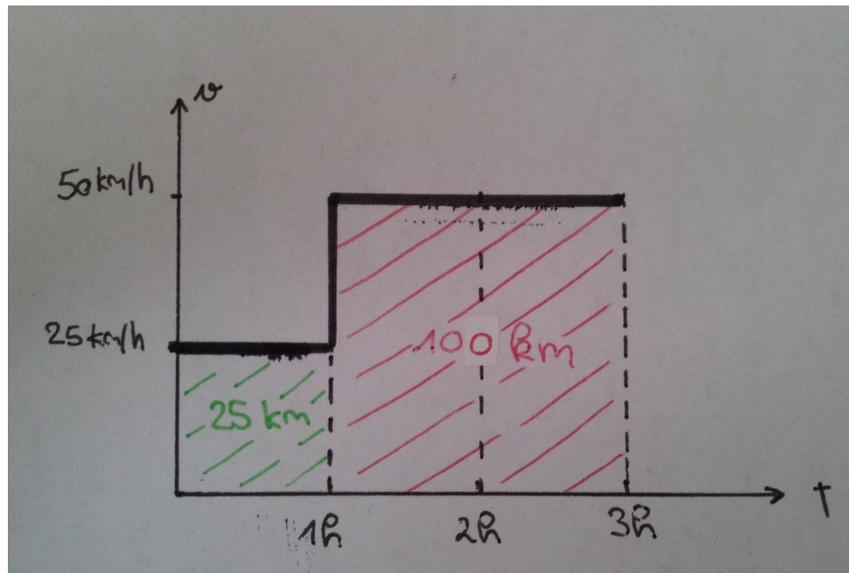


Abbildung 12: Grafische Darstellung der Integration bei einer Geschwindigkeitskurve

Es gilt $\Delta y = \gamma(x) \cdot \Delta x$.

Die Geschwindigkeit erhält man, indem man wie folgt vorgeht:

$$\frac{\text{Hypothenuse}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\gamma'(x)\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sqrt{1 + (\gamma'(x))^2}}{\Delta x} = \sqrt{1 + (\gamma'(x))^2}.$$

Wenn man die Geschwindigkeit integriert erhält man:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\gamma'(x))^2} dx.$$

Diese Länge ist eigentlich ein Spezialfall, weil es sich bei dem Beispiel um eine Funktion handelt, die in einem x-y-Koordinatensystem aufgetragen ist. Aber auch die Länge einer Raumkurve kann man berechnen, indem man unendlich kleine Weglängendifferentiale ds

integriert. ³⁷

Definition 8. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein regulärer Weg, dann heißt $L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ Bogenlänge bzw. Weglänge von γ . ³⁸

Die Bogenlänge einer Kurve entsteht also, wenn sich ein Punkt entlang dieser Kurve bewegt. Er legt dann eine bestimmte Bogenlänge zurück. Diese wird berechnet, indem man den Betrag des Tangentenvektors über den Kurvenparameter integriert. Außerdem gibt die Bogenlänge den Zusammenhang zwischen der Länge der Kurve und dem Kurvenparameter

³⁷vgl. Link [7]

³⁸Steinbauer 2013, Link [1], S.181

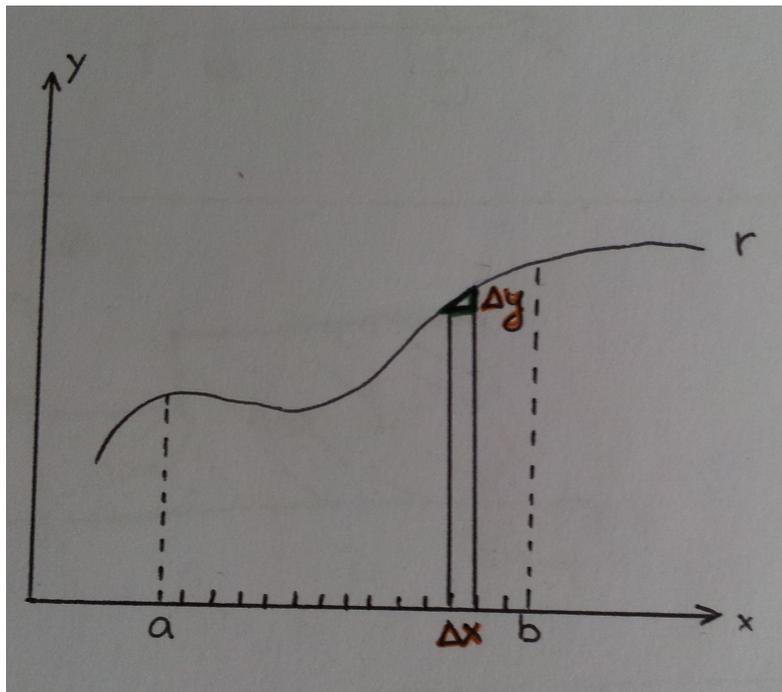


Abbildung 13: Verhältnis von der Geschwindigkeit zur Zeit x

an. Das heißt man kann schreiben $s = s(t)$ und da man die Gleichung nach t auflösen darf, kann man den Parameter einfach durch die Bogenlänge ersetzen. Dieser Vorgang wird im nächsten Unterpunkt „Parametrisierung einer Bogenlänge“ genauer erläutert.³⁹

Definition 9. Unter der Verbindungsstrecke \overline{yz} zweier Punkte y, z eines beliebigen Vektorraumes E versteht man die Menge $y + t(z - y) : 0 \leq t \leq 1$. Sie stimmt offenbar mit der Menge $\alpha y + \beta z : \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ überein. Sind die Punkte x_1, x_2, \dots, x_n aus E vorgegeben, so nennt man die Vereinigung der Verbindungsstrecken $\overline{x_1x_2}, \overline{x_2x_3}, \dots, \overline{x_{n-1}x_n}$ den Polygonzug durch x_1, x_2, \dots, x_n .⁴⁰

Man hat im vorherigen Beispiel gesehen, dass die Bogenlänge physikalisch gesehen die Fläche unter der durchschnittlichen Geschwindigkeit ist. Mathematisch gesehen ist die Bogenlänge $L(\gamma)$ der Limes der Gesamtlänge von den eingeschriebenen **Polygonzügen**.

Parametrisierung nach Bogenlängen

Definition 10. Wenn man eine Kurve $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachtet, bei der für alle Parameterwerte gilt

³⁹vgl. Kirchgssner & Schreck 2013, S. 58

⁴⁰Heuser 2008, S.242

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = 1, t \in X$$

dann heißt die Kurve $\gamma(t)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. ⁴¹

$\|\dot{\gamma}\|$ also die Norm der Ableitung von γ , ist der Geschwindigkeitsvektor, dessen Länge angibt, mit welcher Geschwindigkeit die Kurve durchlaufen wird. Nach Bogenlänge parametrisierte Kurven haben also die Eigenschaft, dass ihr Bild mit konstanter Geschwindigkeit zu durchlaufen, und zwar genau mit Geschwindigkeit 1.

Eine weitere besondere Form der Parametrisierung ist die Parametrisierung proportional zur Bogenlänge. Sie wird ganz ähnlich definiert wie vorher. ⁴²

Definition 11. Eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve ist eine reguläre parametrisierte Kurve $\gamma: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, für die $\|\dot{\gamma}\|$ konstant (aber nicht unbedingt 1) ist. ⁴³

Auch bei dieser Form der Parametrisierung wird die Kurve also mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen sie muss aber nicht 1 sein!

Jetzt stellt sich die Frage, ob es möglich ist, bei jeder Kurve eine Parametrisierung nach der Bogenlänge zu finden. Also: **existiert** so etwas und ist es dann auch **eindeutig**?

Proposition 3. Zu jeder regulären parametrisierten Kurve r gibt es eine Parametertransformation φ , so dass die Umparametrisierung $\gamma \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. ⁴⁴

Also existiert für jede Kurve eine solche Parametrisierung und sie ist auch fast eindeutig. Bei einer Parametrisierung nach der Bogenlänge muss ja die Geschwindigkeit, mit der das Intervall durchlaufen wird, gleich bleiben. Somit kann man es nur verschieben bzw. umdrehen.

Die Parametertransformation kann nur die Form $\varphi(t) = \pm t + t_0$.

Man kann die Länge einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ für jedes $s \in [a, b]$ so berechnen:

$$L[\gamma|_{[a, s]}] = \int_a^s 1 dt = s - a.$$

Das Zeichen = darf man schreiben, weil $\|\dot{\gamma}\| = 1$

⁴¹Bär 2010, S.31

⁴²Steinbauer 2013, Link [1], S.182

⁴³vgl. Bär 2010 S.32

⁴⁴vgl. ebd. S.32

Nach Bogenlänge parametrisiert bedeutet also, dass die Bogenlänge der Kurve genauso lang ist wie das Intervall, welches man für die Parametrisierung wählt.⁴⁵

Wozu man die Parametrisierung einer Bogenlänge braucht, wird am besten anhand eines Beispiels gezeigt.

Beispiel 10. Man betrachte folgende Schraubenlinie in Parameterform:

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ a\varphi \end{pmatrix}, R > 0, a > 0, \varphi \geq 0.$$

Zuerst bestimmt man den Tangentenvektor der Kurve. Dieser ergibt sich, wie in einem der vorherigen Abschnitten erklärt, durch das Differenzieren der Kurve nach dem Parameter φ :

$$\vec{r}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ a \end{pmatrix},$$

Nun berechnet man den Betrag von $\text{vecr}(\varphi)$, was ja die Geschwindigkeit ist mit welcher die Kurve durchlaufen wird:

$$|\text{vecr}(\varphi)| = \sqrt{(-R\sin\varphi)^2 + (R\cos\varphi)^2 + a^2} = \sqrt{R^2 + a^2}.$$

Man sieht nun, dass die Geschwindigkeit, mit welcher die Kurve durchlaufen wird, nicht mehr vom Kurvenparameter abhängt. Somit ist sie konstant.

Im nächsten Schritt berechnet man die Bogenlänge. Diese wird mithilfe eines Integrals berechnet, das folgendermaßen aussieht:

$$s(\varphi) = s_0 + \int^{\varphi} |\vec{r}'(\varphi')| d\varphi' = s_0 + \sqrt{R^2 + a^2}\varphi.$$

Die Integrationskonstante s_0 gibt den Startpunkt der Kurve an, in Bezug auf welchen die Bogenlänge berechnet wird. Für s_0 gilt, unter der Bedingung dass $s(0) = 0$, dass $s_0 = 0$ ist. // Nun möchte man die Parametrisierung der Schraubenlinie nach der Bogenlänge durchführen. Ziel ist es eine Umformung zu machen damit man dann eine Kurve hat, die nicht mehr vom Parameter φ abhängt. Um das zu erhalten, muss man die Gleichung $s = s(\varphi)$ nach φ auflösen. Somit hängt die Kurve dann nicht mehr von φ sondern von s ab.

$$s = \sqrt{R^2 + a^2}\varphi \Rightarrow \varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}.$$

⁴⁵vgl. Bär 2010, S.33

Wenn man das einsetzt erhält man:

$$\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} \\ R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} \\ \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} \end{pmatrix}.$$

Um es etwas übersichtlicher zu gestalten, kann man auch schreiben:

$$\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} R \cos \delta \\ R \sin \delta \\ a \delta \end{pmatrix}, \text{ mit } \delta = \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}. \quad 46$$

2.5.2 Wegintegrale

Etwas Wichtiges in der Vektoranalysis ist es, Kurven entlang von Vektorfeldern integrieren zu können. Um das zu können, braucht man ein Wegintegral 2. Art. Davor aber noch die Unterscheidung zwischen Kurvenintegrale 1. Art und Kurvenintegrale 2. Art.⁴⁷

Wegintegrale 1. Art

Bei Kurvenintegralen 1. Art ist die Funktion f eine Zahl.

Definition 12. Das Wegintegral einer Funktion $f(\vec{r}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ entlang eines stückweise differenzierbaren Weges $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ ist definiert als:

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \cdot |\vec{\gamma}'(t)| dt \quad 48$$

Diese Definition beschreibt, dass die Funktionswerte von $f(\vec{r})$ für alle Punkte des gegebenen Weges $\vec{\gamma}(t)$ integriert, also aufsummiert werden. Die Geschwindigkeit mit der $\vec{\gamma}(t)$ fortschreitet bzw. die Länge der Teilstücke von $\vec{\gamma}$ soll berücksichtigt werden.

Im Folgenden werden die Schritte beschrieben, die man durchführen muss um ein Kurvenintegral zu berechnen. Anschließend wird die Berechnung noch durch ein Beispiel veranschaulicht.

Die Berechnung eines Kurvenintegrals 1. Art kann so durchgeführt werden:

1. Die Parametrisierung der Kurve $\vec{\gamma}(t)$ bestimmen.

⁴⁶vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S. 59

⁴⁷Kurvenintegral ist gleichbedeutend mit Wegintegral.

⁴⁸Link [8]

2. Die Integrationsgrenzen a und b bestimmen, so dass $\vec{\gamma}(a)$ und $\vec{\gamma}(b)$ die Anfangspunkte und Endpunkte der Kurve beschreiben.
3. $\vec{\gamma}(t)$ soll nach t abgeleitet werden. Von diesem Ergebnis wird dann der Betrag berechnet.
4. Die Komponenten von $\vec{\gamma}(t)$ werden in die Funktion f eingesetzt.
5. Nun hat man alle Ergebnisse die man benötigt um das Integral zu berechnen. Der letzte Schritt besteht einfach darin, die Teilergebnisse in das Integral einzusetzen.⁴⁹

Beispiel 11. Gegeben ist ein Skalarfeld $f(x,y) = x^2 + 2y^2x$. Man möchte das Integral entlang der Kurve $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ 3t \end{pmatrix}$ zwischen den Punkten $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ berechnen. Graphisch wird die Problemstellung in Abbildung 14 veranschaulicht.

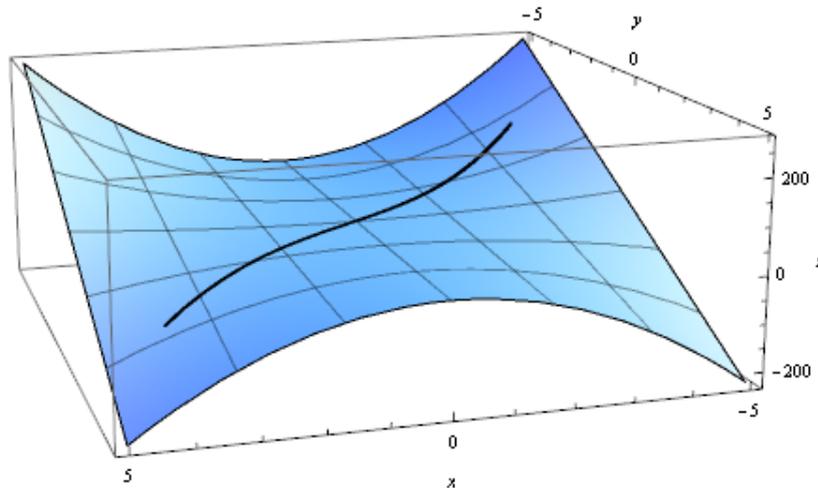


Abbildung 14: Skalarfeld $f(x,y)$ und die Kurve $\vec{\gamma}(t)$

⁴⁹vgl. Link [8]

Gesucht ist, wie man in Abbildung 14 sieht, die Fläche, welche die Kurve mit der z-Achse einschließt.

Da die Parametrisierung der Kurve bereits gegeben ist, startet man mit dem zweiten Punkt, der Bestimmung der Integrationsgrenzen.

1. Für den Punkt $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ muss gelten: $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 3t \end{pmatrix}$. Als Lösung erhält man also

$t = -1$. Analog erhält man für den Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$: $t = 1$. Also muss zwischen den Grenzen -1 und $+1$ integriert werden.

2. Die Ableitung von $\vec{\gamma}(t)$ lautet: $\vec{\gamma}'(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 4t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Außerdem ist

$$\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

3. $f(\vec{\gamma}(t)) = (4t)^2 + 2(3t)^2 4t = 16t^2 + 72t^3$.

4. Nun werden die berechneten Ergebnisse in das Integral eingesetzt und man erhält

$$\int_{-1}^1 (16t^2 + 72t^3) 5 dt = \frac{160}{3} \approx 53.3. \quad ^{50}$$

Wegintegrale 2. Art

Kurvenintegrale 2. Art sind Integrale über Vektorfeldern und werden wie folgt berechnet:

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \dot{\vec{\gamma}}(t) dt \quad ^{51}$$

Auch zum Kurvenintegral 2. Art ein Beispiel.

Beispiel 12. Gegeben ist ein Vektorfeld $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - x^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges

$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$. Man soll das Kurvenintegral vom Punkt A nach Punkt P berechnen, was in Abbildung 15 dargestellt wird.

Die Integrationsgrenzen liegen bei 0 und 1. Sie können aus Abbildung 15 abgelesen werden.

Nun leitet man $\vec{\gamma}'(t)$ nach t ab und erhält:

⁵⁰vgl. Link [8]

⁵¹vgl. Link [9]

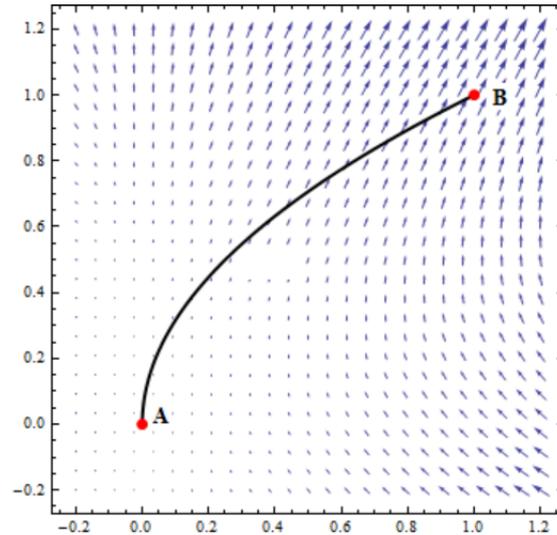


Abbildung 15: Schaubild des Vektorfelds $f(x, y)$ und des Weges $\vec{\gamma}(t)$

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt setzt man $\vec{\gamma}(t)$ in f ein:

$$f(\vec{\gamma}(t)) = \begin{pmatrix} 2 \cdot t^2 \cdot t - t^4 \\ t^2 + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^3 - t^4 \\ 2t^2 \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnet man noch das Skalarprodukt zwischen $f(\vec{\gamma}(t))$ und $\vec{\gamma}(t)$:

$$f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - t^4 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = 4t^2 - 2t^5 + 2t^2.$$

Zum Schluss wird das Skalarprodukt in das Integral mit den Integrationsgrenzen eingesetzt und das Integral wird wie folgt berechnet:

$$\int_0^1 4t^2 - 2t^5 + 2t^2 dt = \frac{17}{15}.^{52}$$

⁵²vgl. Link [9]

2.6 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

Bisher hat man vektorielle Ableitungen nur auf Skalarfeldern definiert, aber wie bereits erwähnt ist es auch möglich vektorielle Ableitungen auf einem Vektorfeld zu definieren. Es gibt zwei davon, die Divergenz und die Rotation. Auf diese soll in diesem Kapitel genauer eingegangen werden. Die Divergenz und die Rotation eines Vektorfeldes benötigt man bei der späteren Definition der Integralsätze.

2.6.1 Divergenz eines Vektorfeldes

Die Divergenz eines Vektorfeldes ergibt sich dadurch, dass man das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld $\vec{v}(x_1, x_2, x_3)$ bildet:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Das Ergebnis ist eine skalare Größe, nämlich die Summe die der Ableitungen jeweils einer Komponente des Vektorfeldes nach der Variablen mit demselben Index: $D_1 v_1 + D_2 v_2 + D_3 v_3$. Das Ergebnis ist ein Skalarfeld.⁵³

Nicht jedes Vektorfeld besitzt eine Divergenz, was im ersten der folgenden zwei Beispiele gezeigt werden soll.

Beispiel 13. *Es sei $\vec{w}_1(x_1, x_2, x_3)$ ein Vektorfeld. Wie in Abbildung 16 zu sehen ist, zeigen die Vektorpfeile radial vom Ursprung nach außen und haben in allen Punkten dieselbe Länge und es gilt: $|\vec{w}_1| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.*

⁵³vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S. 96

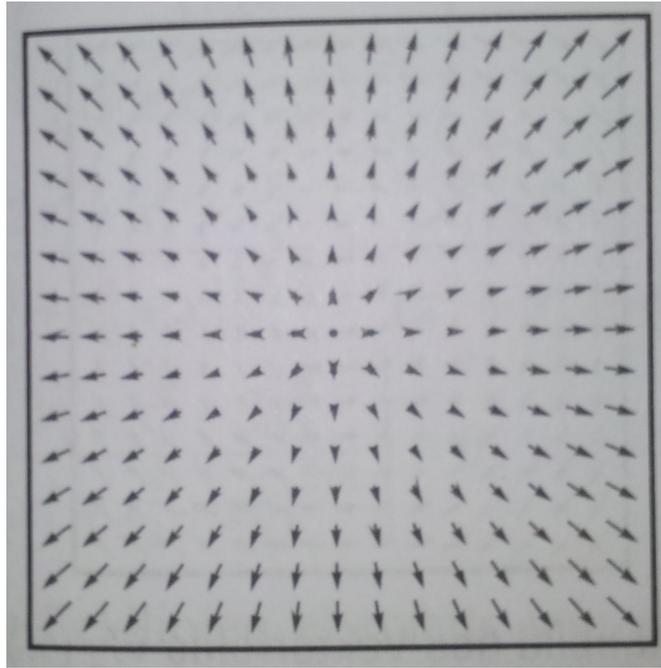


Abbildung 16: Schaubild des Vektorfelds $\vec{w}_1(\vec{x})$

Die Divergenz ergibt sich wie folgt:

$$\operatorname{div} \vec{w}_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Bei diesem Vektorfeld gehen alle Feldlinien, das sind Linien die von den Vektorpfeilen berührt werden, vom Ursprung aus. Einen solchen Punkt nennt man **Quelle** des Vektorfeldes. Wenn alle Feldlinien an einem Punkt enden, nennt man diesen Punkt **Senke** des Vektorfeldes.⁵⁴

Beispiel 14. Es sei $\vec{w}_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld. Die Divergenz ergibt:

$$\operatorname{div} \vec{w}_2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_2 = \frac{\partial(x_3 - x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_1 - x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(x_2 - x_1)}{\partial x_3} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Vektorfelder bei denen die Divergenz verschwindet nennt man *divergenzfrei* oder *quellen- und senkfrei*.

⁵⁴vgl. Kirchgassner und & Schreck 2013, S. 97

Jetzt möchte man eine Erklärung dafür warum das Vektorfeld $\vec{w}_2(x_1, x_2, x_3)$ divergenzfrei ist. Das Vektorfeld \vec{w}_2 reduziert sich in der $x_1 - x_2$ -Ebene, wo $x_3 = 0$ gilt, auf das Vektorfeld

$$\vec{w}_2^1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist in Abbildung 17 gezeigt und man sieht, dass es aus Pfeilen besteht die tangential zu Kreisen verlaufen und deren Mittelpunkt der Ursprung des Koordinatensystems ist.

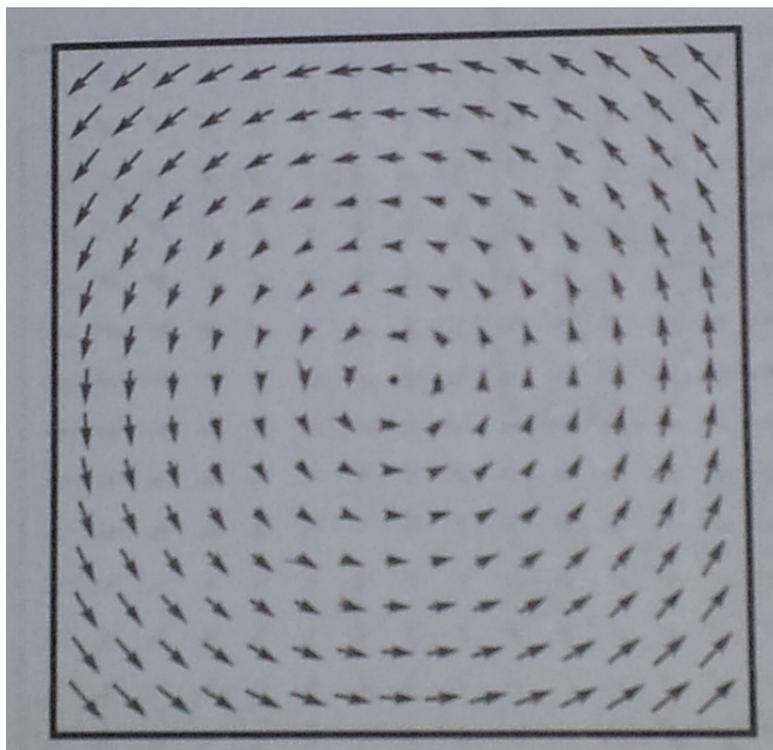


Abbildung 17: Schaubild des Vektorfelds $\vec{w}_2(\vec{x})$ in der $x_1 - x_2$ -Ebene

Die Pfeile haben an allen Punkten eines Kreises dieselbe Länge und liegen tangential zu Kreisen die um den Ursprung liegen. Die Feldlinien haben keinen Anfang und kein Ende. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist also charakteristisch für dessen Quellen und Senken. Wenn die Divergenz verschwindet kann man im Allgemeinen davon ausgehen, dass die Feldlinien nicht von einem Punkt ausgehen oder enden. Aber es gibt auch Ausnahmen! Es kann sein, dass die Feldlinien von einem Punkt ausgehen, aber die Divergenz mit den bisher bekannten Mitteln in diesem Punkt nicht gebildet werden kann. Wie man trotzdem erkennen

kann, ob sich in diesem Punkt eine Quelle befindet wird sich mithilfe dem Integralsatz von Gauß zeigen.⁵⁵

2.6.2 Rotation eines Vektorfeldes

Um die Rotation eines Vektorfeldes zu berechnen, muss man das Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld $\vec{v}(x_1, x_2, x_3)$ bilden:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis des Kreuzproduktes ist ein Vektor, also ist die Rotation ein Vektorfeld (vorhin hat man gesehen, dass die Divergenz ein Skalarfeld ist).⁵⁶

Wenn man nochmals die Vektorfelder von den beiden Beispielen aus dem vorherigen Kapitel hernimmt, ergibt sich Folgendes für deren Rotation:

$$\operatorname{rot} \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial x_2} - \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rot} \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x_2 - x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(x_1 - x_3)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(x_3 - x_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(x_2 - x_1)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(x_1 - x_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial(x_3 - x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 1 - (-1) \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bei dem Vektorfeld \vec{w}_1 verschwindet die Rotation. Beim Vektorfeld \vec{w}_2 , welches ja wie oben gezeigt wurde divergenzfrei ist, verschwindet die Rotation nicht. Um den Grund dafür zu finden, sollte man die Konstruktion des Vektorfeldes \vec{w}_2 genauer betrachten.

Das Vektorfeld \vec{w}_2 wurde mit Hilfe des Vektors $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$ konstruiert:

⁵⁵vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S. 99

⁵⁶vgl. ebd. S.100

$$\vec{w}_2 = \vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.^{57}$$

Dieses Feld gibt also in jedem Punkt \vec{x} den Vektor an, welcher senkrecht auf die Ebene steht, die von den Vektoren \vec{a} und \vec{x} aufgespannt wird. Abbildung 18 soll dies veranschaulichen.

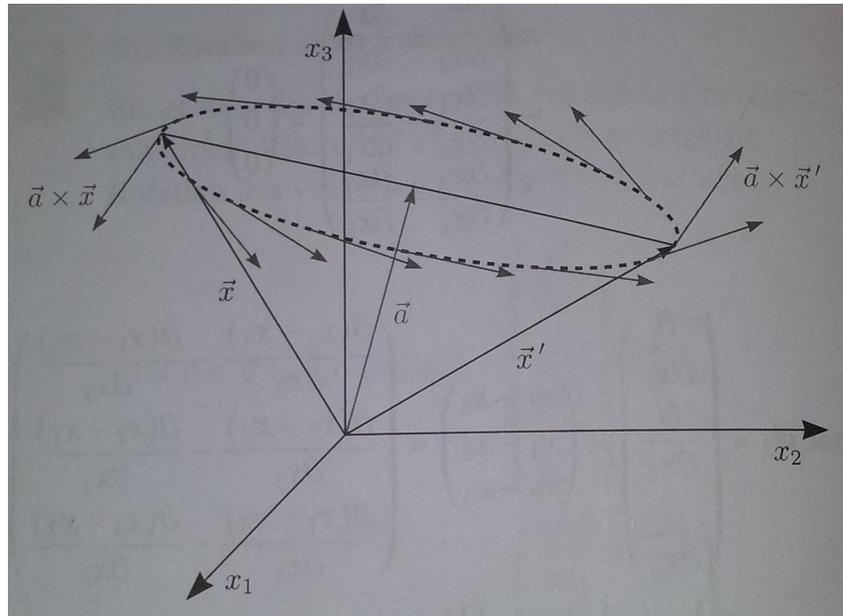


Abbildung 18: Zur Konstruktion des Vektorfelds \vec{w}_2

Man sieht, dass die Vektoren vom Vektorfeld \vec{w}_2 tangential an Kreisen liegen. Die Mittelpunkte der Kreise sind durch \vec{a} und der Radiusvektor der Kreise durch $\vec{x} - \vec{a}$ gegeben. Die Feldlinien bilden einen geschlossen Kreis, welcher als **Wirbel** aufgefasst werden kann. Wenn man nochmals an das Vektorfeld \vec{w}_1 zurück denkt, bei dem die Feldlinien vom Koordinatenursprung radial nach außen verlaufen, sieht man, dass dies keine Wirbel aufweist. Anschaulich kann man also sagen, dass eine verschwindende Rotation bedeutet, dass ein Vektorfeld Wirbel aufweist:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} \neq 0 \Rightarrow \text{Das Vektorfeld weist Wirbel auf.}^{58}$$

Der umgekehrte Schluss, also dass eine verschwindende Rotation bedeutet, dass es keine Wirbel gibt, ist nicht immer korrekt! Hierzu ein Beispiel.

⁵⁷vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.102

⁵⁸vgl. ebd. S. 104

Beispiel 15. Es sei $\vec{w}_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld. Die Rotation berechnet man

so:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{w}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot 0 - \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(x_1^2 + x_2^2) \cdot 1 - 2x_1 \cdot x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{(x_1^2 + x_2^2) \cdot 1 - 2x_2 \cdot x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Rotation für dieses Vektorfeld verschwindet also, aber wenn man dieses Feld in Abbildung 19 betrachtet sieht man, dass das Vektorfeld \vec{w}_3 trotzdem Wirbel aufweist.⁵⁹

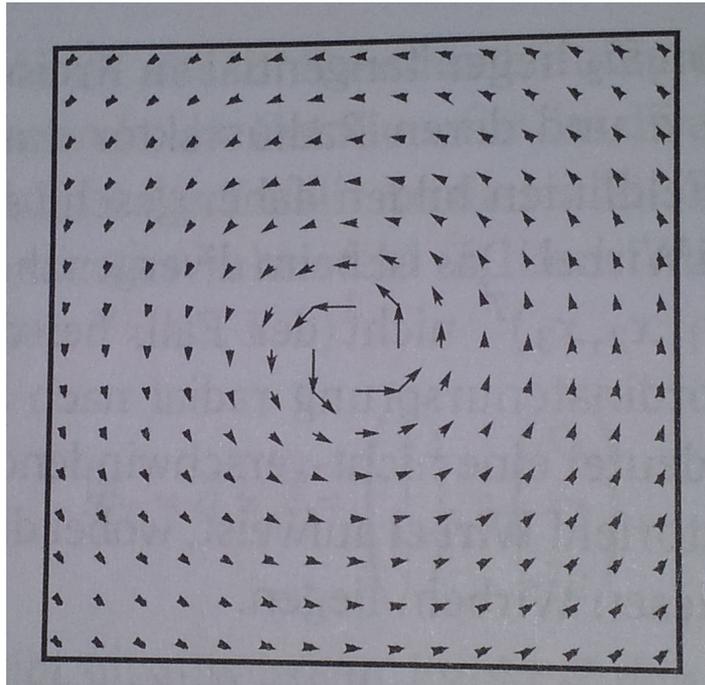


Abbildung 19: Schaubild des Vektorfelds $\vec{w}_3(\vec{x})$

⁵⁹vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.125

2.7 Gradientenfelder

Nachdem man mit Skalar- und Vektorfeldern umgehen kann, wird noch der Begriff des Gradientenfelds erläutert. Um dann weiter mit Gradientenfeldern rechnen zu können, wird zuerst noch erklärt, was ein **wegunabhängiges Integral** ist.

Definition 13. Ist f ein stetiges Vektorfeld auf dem Gebiet G und hat für je zwei Punkte $a, b \in G$ das Integral $\int_{\gamma} dx$ längs jedes ganz in G verlaufenden, stückweise stetig differenzierbaren Weges γ mit den Anfangspunkten a und dem Endpunkt b immer denselben Wert, so sagt man, das Integral über f sei **wegunabhängig**. In diesem Falle schreibt man, da es auf γ nicht ankommt, statt $\int_{\gamma} dx$ gelegentlich $\int_a^b f dx$.⁶⁰

Ein Gebiet ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes. Je zwei Punkte eines Gebietes G in einem normierten Raum können stets durch einen in G verlaufenden Polygonzug verbunden werden.⁶¹

Bald wird man sehen, dass ein Zusammenhang zwischen wegunabhängigen Integralen und Gradientenfeldern besteht. Nun zur Definition eines **Gradientenfelds**.

Definition 14. Lässt sich ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ als Gradient eines Skalarfeldes $f(\vec{x})$ schreiben, also

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

dann bezeichnet man das zugehörige Vektorfeld als **Gradientenfeld**.⁶²

Wie vorhin gesagt, hängen Gradientenfelder und wegunabhängige Integrale zusammen, was in folgendem Satz beschrieben werden soll.

Satz 2. Vektorfelder mit wegunabhängigen Integralen sind Gradientenfelder. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und v ein stetiges Vektorfeld auf G mit wegunabhängigen Integralen, dann $\exists \varphi : G \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ mit $\text{grad } \varphi = V$, d.h. V ist ein Gradientenfeld.⁶³

⁶⁰vgl. Heuser 2008, S.382

⁶¹vgl. ebd. S.244

⁶²vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.107

⁶³vgl. Heuser 2008, S.498

Hat man ein Vektorfeld gegeben und möchte überprüfen ob es sich dabei um ein Gradientenfeld handelt, muss man die Wegunabhängigkeit der Integrale prüfen. Dies kann rechnerisch sehr kompliziert und mühsam sein. Um die Überprüfung zu erleichtern, verwendet man die sogenannten Integrabilitätsbedingungen für Vektorfelder. Man wird versuchen neben dem „Integrationskriterium“ auch ein „Differentiationskriterium“ zu finden.

64

2.7.1 Integrabilitätsbedingungen

Die sogenannte Integrabilitätsbedingung lautet:

Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ auf der Menge $G \subseteq \mathbb{R}^p$ kann höchstens

dann ein Gradientenfeld sein, wenn seine Ableitung symmetrisch ist, wenn also auf G

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ für } j, k = 1, \dots, p \text{ ist. }^{65}$$

Diese Bedingung ist aber im Allgemeinen nicht hinreichend! Das ändert sich erst, wenn man zusätzliche Voraussetzungen über die Struktur von G macht. Zuerst aber ein Beispiel dafür, dass die Integrabilitätsbedingung nicht hinreichend ist.

Beispiel 16. Das stetig differenzierbare Vektorfeld $f(x, y) := \begin{pmatrix} -y \\ \frac{x^2 + y^2}{x} \\ \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R} \setminus (0, 0)$ genügt zwar den Integrabilitätsbedingungen, ist aber kein Gradientenfeld.

1. Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

2. f ist kein Gradientenfeld! Es gilt: $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow G, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Man erhält:

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow f$ ist kein Gradientenfeld. ⁶⁶

⁶⁴vgl. Heuser, 2008 S. 385

⁶⁵vgl. ebd. S. 385

⁶⁶vgl. ebd. S. 387

Jetzt werden die zusätzlichen Voraussetzungen für das Gebiet G erläutert, damit die Integrabilitätsbedingung hinreichend wird und das so etwas wie im oben angeführten Beispiel nicht mehr passieren kann. Man nennt eine Menge M von \mathbb{R}^p sternförmig, wenn es einen Punkt $a \in M$, einen Sternmittelpunkt gibt, so dass die Verbindungsstrecke zwischen a und jedem $x \in M$ ganz in M liegt. Eine sternförmige Menge ist bogenzusammenhängend, also auch zusammenhängend und außerdem ist jede konvexe Menge sternförmig. Ein wichtiger Satz in diesem Zusammenhang ist folgender.

Satz 3. Das Vektorfeld $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ sei auf der offenen und sternförmigen Menge $G \subset \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar. Unter diesen Voraussetzungen ist f genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Integrabilitätsbedingung auf G erfüllt ist.⁶⁷

Die folgenden zwei Grafiken, Abbildung 20 & Abbildung 21, sollen nochmals eine Zusammenfassung über dieses Kapitel geben.

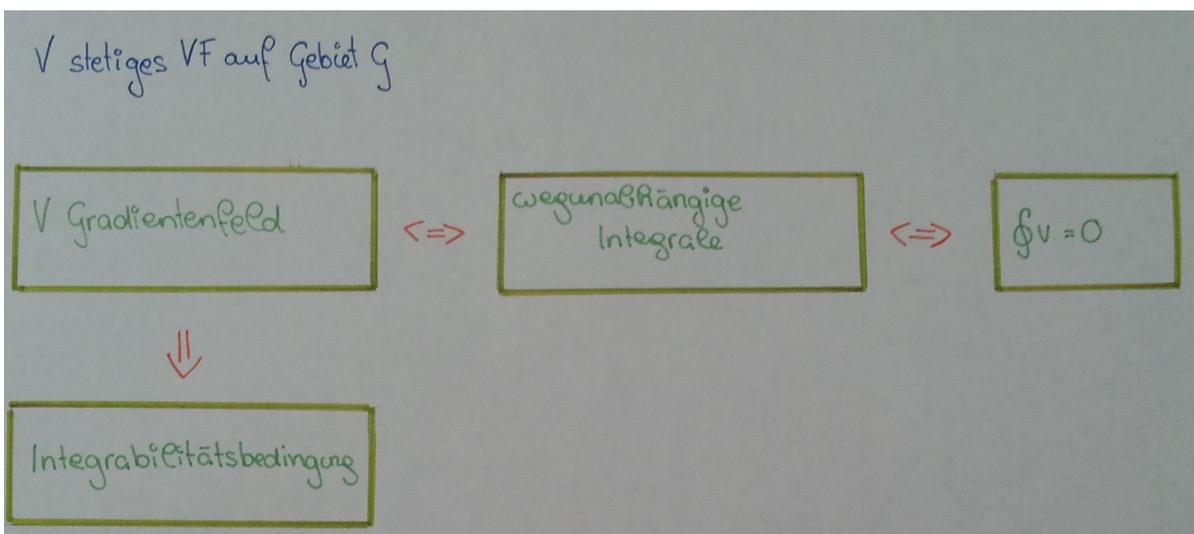


Abbildung 20: Überblick zu den Integrabilitätsbedingungen

⁶⁷vgl. Heuser 2008, S.386

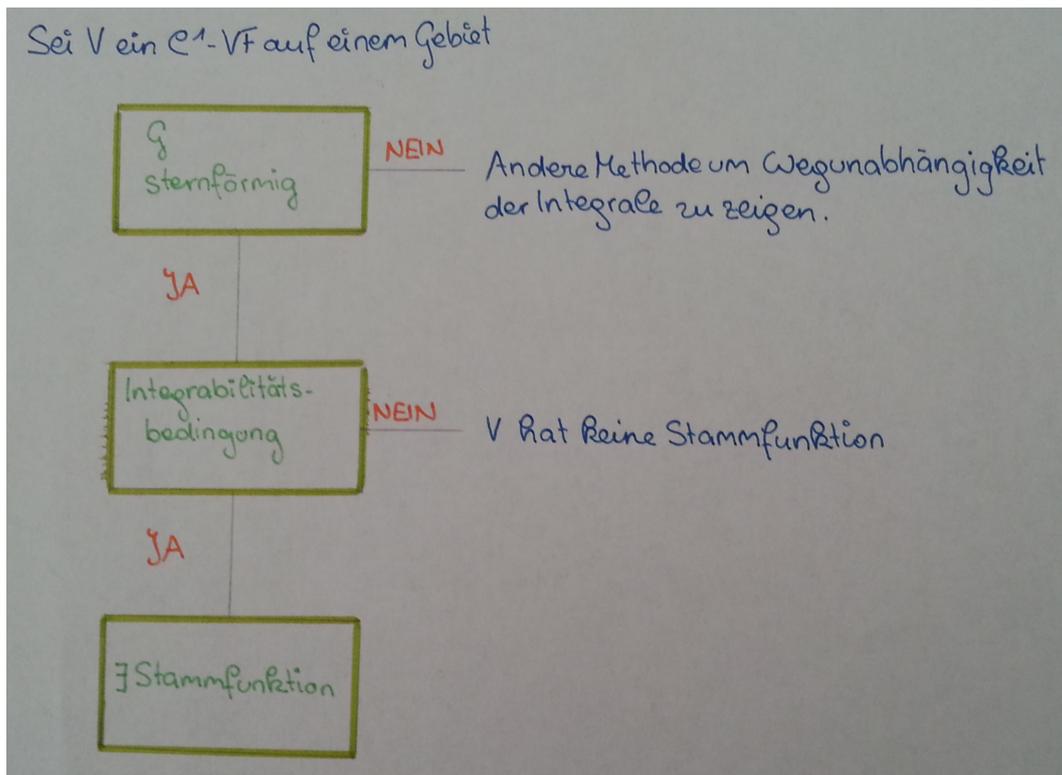


Abbildung 21: Bestimmung einer Stammfunktion mithilfe der Integrabilitätsbedingungen

3 Integralsätze

Ein wichtiges Ergebnis bzw. eine wichtige Erkenntnis aus der Analysis einer reellen Variablen ist der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**.

Satz 4. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall; Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b \in I$ beliebig.

- Die Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ist stetig differenzierbar auf $F' = f$. Insbesondere ist F eine Stammfunktion von f auf I .
- Sei F eine beliebige Stammfunktion von f auf I , dann gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad 68$$

Dieser Satz macht es möglich das Integral über einer Funktion f über ein beliebiges Intervall mithilfe von den Werten der Funktion F zu berechnen. Man würde nun gerne wissen ob etwas ähnliches auch im mehrdimensionalen Raum möglich ist. Ist es zum Beispiel möglich, dass man das Volumenintegral über eine Funktion f in einem Bereich B mithilfe von Werten einer Funktion, welche mit f im Zusammenhang steht, am Rand von B bestimmt? Gibt es überhaupt einen Zusammenhang zwischen dem Integral über einer Fläche und dem Linienintegral entlang einer Randkurve? Es bestehen Zusammenhänge! Diese werden mithilfe der Integralsätze ausgedrückt. Integralsätze sind in der Vektoranalysis ein sehr wichtiges Werkzeug. Mit ihnen kann man beispielsweise komplizierte Oberflächen oder Linienintegrale einfacher berechnen. Was mit einfacher gemeint ist, wird in einem späteren Beispiel gezeigt. ⁶⁹

Integralsätze spielen sowohl in der Mathematik als auch in der Physik eine tragende Rolle, wie man später noch anhand von Beispielen sehen wird. In dieser Arbeit wird man auf den Satz von Gauß (im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3) und den Satz von Stokes eingehen.

- Der Satz von Gauß macht es möglich, das Volumensintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes als Oberflächenintegral zu schreiben.
- Mithilfe des Satzes von Stokes kann man Integrale über geschlossenen Kurven mittels Oberflächenintegralen bestimmen. Das funktioniert natürlich auch umgekehrt.

Die Integralsätze, welche in dieser Arbeit behandelt werden und auch der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sind Spezialfälle des (**allgemeinen**) **Satzes von Stokes**.

⁶⁸Steinbauer 2012, Link [10], S.98

⁶⁹vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.133

Der allgemeine Satz von Stokes gilt nicht nur im \mathbb{R}^2 oder im \mathbb{R}^3 , sondern auch in höheren Dimensionen.⁷⁰

3.1 Satz von Gauß in der Ebene

Der Satz von Gauß stammt von dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855).

Im Folgenden werden zwei Versionen des Gaußschen Integralsatzes analysiert.

Mit S wird eine Oberfläche und mit V ein Volumen bezeichnet, über welches man integrieren möchte. Die Kurve, die entlang dem Rand der Fläche läuft, wird mit ∂S benannt und für die Fläche, welche den Rand des Volumens darstellt, verwendet man die Bezeichnung ∂V .

Die folgende Version des Gaußschen Integralsatzes beinhaltet:

- eine zweidimensionale Fläche S und deren Rand ∂S ,
- den Normalvektor \vec{n} , welcher senkrecht auf dem Rand ∂S steht,
- die Divergenz des Vektorfeldes.

Der Integralsatz von Gauß in der Ebene stellt also einen Zusammenhang zwischen dem Integral eines Vektorfeldes $\vec{v}(x_1, x_2)$ entlang eines Randes ∂S einer Fläche und dem Integral der Divergenz des Vektorfeldes über die Fläche S her:

$$\oint_{\partial S} \vec{v}(x_1, x_2) \cdot \vec{n} \, dl = \int_S \vec{\nabla} \vec{v}(x_1, x_2) \, dS. \quad 71$$

Wie vorhin schon erwähnt, sollen die Integralsätze das Rechnen erleichtern. In Beispiel 17 wird dies gut sichtbar.

Beispiel 17. *Abbildung 22 zeigt ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a . Das Dreieck wird durch folgende Eckpunktvektoren beschrieben:*

$$\vec{P}_1 = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^T, \quad \vec{P}_2 = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^T, \quad \vec{P}_3 = \left(0, \frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^T.$$

⁷⁰vgl. Forster 2012, S.175

⁷¹vgl. Kirchgassner & Schreck, S.103

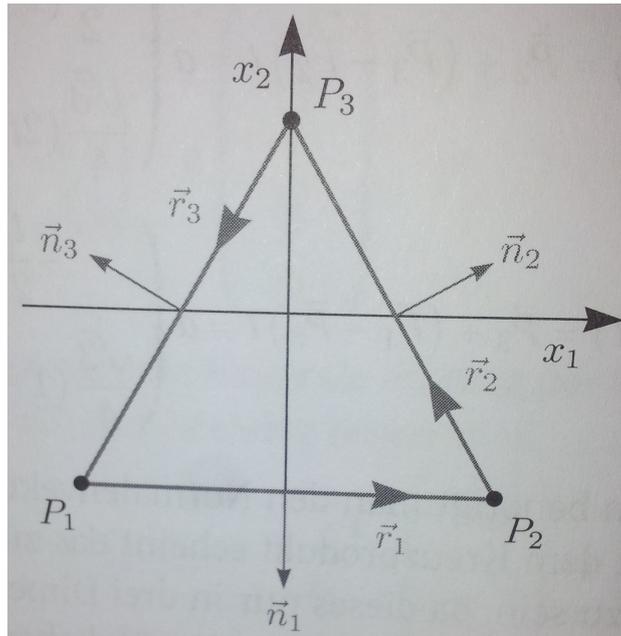


Abbildung 22: Gleichseitiges Dreieck in Bsp.17

Man möchte das Vektorfeld $\vec{v}(x_1, x_2)$ entlang dieses Dreiecks integrieren. Zuerst wird man die Integration gemäß der linken Seite des Gaußschen Integralsatzes und dann gemäß der rechten Seite ausführen. Man kann erahnen, dass man für beide Arten dasselbe Ergebnis erhält, aber wie schon gesagt soll das Rechnen ja erleichtert werden. Man wird schnell sehen, welche der beiden Vorgehensweisen schneller und einfacher zum Ziel führt. Um es übersichtlich zu gestalten wird das Beispiel in Schritte unterteilt.

1. Die Integration verläuft immer so, dass die Innenfläche des Dreiecks links liegt, wenn man sich vorstellt, dass man den Rand entlang läuft. Das heißt also gegen den Uhrzeigersinn.

Zuerst braucht man eine Parameterdarstellung des Dreiecks. Dazu berechnet man zuerst die Richtungsvektoren der Dreiecksseiten und stellt dann die Parameterformen der einzelnen Seiten auf:

$$\begin{aligned} \text{Richtung von } \vec{r}_1 : \vec{P}_2 - \vec{P}_1 &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{Richtung von } \vec{r}_2 : \vec{P}_3 - \vec{P}_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ \text{Richtung von } \vec{r}_3 : \vec{P}_1 - \vec{P}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun setzen wir die Richtungsvektoren in die Parameterform der Seiten des Dreiecks ein:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t) &= \vec{P}_1 + (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)t = a \cdot \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \vec{r}_2(t) &= \vec{P}_2 + (\vec{P}_3 - \vec{P}_2)t = a \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-t) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(2t-1) \\ \frac{t}{4} \end{pmatrix} \\ \vec{r}_3(t) &= \vec{P}_3 + (\vec{P}_1 - \vec{P}_3)t = a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(1-2t) \\ \frac{1-t}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Im zweiten Schritt berechnet man die Normalvektoren von den Seiten des Dreiecks. Die Normalvektoren können mit dem Kreuzprodukt berechnet werden. Um das Kreuzprodukt auch anwenden zu können, muss man den Richtungsvektor jeder Seite um eine Komponente, einer Null, erweitern. Das Kreuzprodukt wird dann mit dem Richtungsvektor der Seite und dem Vektor $(0,0,1)^T$ gebildet und erhält somit einen Vektor, der senkrecht auf die Dreiecksseite steht, also den Normalvektor:

$$\vec{n}_1 : a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Komponente verschwindet und kann deshalb gestrichen werden. Man erhält:

$$\vec{n}_1 = a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n}_2 : a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_2 = a \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\vec{n}_3 : a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Im dritten Schritt können nun die Integrale entlang den Dreiecksseiten $\partial S_1, \partial S_2$ und ∂S_3 berechnet werden:

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\partial S_1} \vec{v}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{n}_1 dt &= \int_0^1 a \cdot \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = a^2 \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4} dt = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \\ \bullet \int_{\partial S_2} \vec{v}(\vec{r}_2(t)) \cdot \vec{n}_2 dt &= \int_0^1 a \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-t) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(2t-1) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot a \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} dt = \\ a^2 \int_0^1 \frac{1}{2}(1-t) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}(2t-1) \frac{1}{2} dt &= a^2 \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{8} dt = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2, \\ \bullet \int_{\partial S_3} \vec{v}(\vec{r}_3(t)) \cdot \vec{n}_3 dt &= \int_0^1 a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(1-2t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot a \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} dt = \\ a^2 \int_0^1 \left(-\frac{t}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}(1-2t) \frac{1}{2} dt &= a^2 \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{8} dt = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2. \end{aligned}$$

Die eben durchgeführte Rechnung war zwar nicht schwer (da man einfache Integrale hat), allerdings war es schon etwas mühsam alles auszurechnen. Deshalb nimmt man nun die rechte Seite des Gaußschen Satzes um auf das gewünschte Ergebnis zu kommen. Die Berechnung gemäß der rechten Seite erfolgt in zwei Schritten.

1. Man benötigt die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}(x_1, x_2)$:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 1 + 1 = 2.$$

2. Da die Divergenz von $\vec{v}(x_1, x_2)$ eine Zahl ist, kann sie vor das Integral geschrieben werden. Was dann noch als Integrand übrig bleibt ist die 1:

$$2 \int_S 1 ds.$$

Da man über die Innenseite des Dreiecks integriert, ist das Ergebnis des Integrals die Fläche des Dreiecks. Zu Beginn wurde gesagt, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt, also beträgt die Fläche des gegebenen Dreiecks $\frac{a^2}{4} \sqrt{3}$. Die Berechnung des Integrals funktioniert wie folgt:

$$\int_S \vec{\nabla} \vec{v} \, dx_1 dx_2 = 2 \int_S dx_1 dx_2 = 2 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{a^2}{2} \sqrt{3}. \quad 72$$

Man sieht also, dass man sich mithilfe des Gaußschen Integralsatzes (im \mathbb{R}^2) die Rechenarbeit erleichtern kann. Aber die Integralsätze können die Rechnung nicht nur vereinfachen, es gibt auch Integrale die man ohne diese Sätze analytisch gar nicht mehr lösen könnte! Wie man im vorherigen Beispiel gemerkt hat, ist es beim Integrieren eines Vektorfeldes in der Ebene oft einfacher das Integral über die Fläche zu berechnen, anstatt entlang des Randes der Fläche zu integrieren. Vor allem wenn der Rand einer Fläche in mehrere Stücke unterteilt ist, ist das Flächenintegral von Vorteil. Sonst müsste man die Stücke alle einzeln integrieren, was eine lange, zum Teil auch komplizierte, Rechnung werden kann. Um eine andere Version des Satzes von Gauß in der Ebene zu zeigen, soll davor noch der Begriff **Normalbereich** erklärt werden.

Definition 15. Ein Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ bezüglich der x -Achse ist eine Menge der Form $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Es gilt dann:

$$\int_B f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx. \quad 73$$

Definition 16. Ein Normalbereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ bezüglich der x -Achse heißt *BV-Normalbereich*, falls $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und von beschränkter Variation sind. ⁷⁴

Der Rand von dem Bereich B besteht aus den vier Bögen von Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, welche in Abbildung 23 mit τ_1, \dots, τ_4 bezeichnet werden. Anstelle von γ_3 und γ_4 nimmt man die umgekehrt durchlaufenen Wege γ_3^- und γ_4^- und erhält im Gesamten:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= \begin{pmatrix} t \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix} \quad (a \leq t \leq b), \quad \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} b \\ \varphi_1(b) + t(\varphi_2(b) - \varphi_1(b)) \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1) \\ \gamma_3^-(t) &:= \begin{pmatrix} t \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \quad (a \leq t \leq b), \quad \gamma_4^-(t) := \begin{pmatrix} a \\ \varphi_1(a) + t(\varphi_2(a) - \varphi_1(a)) \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

⁷²vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.134-138

⁷³Heuser 2008, S.470

⁷⁴vgl. ebd., S.470

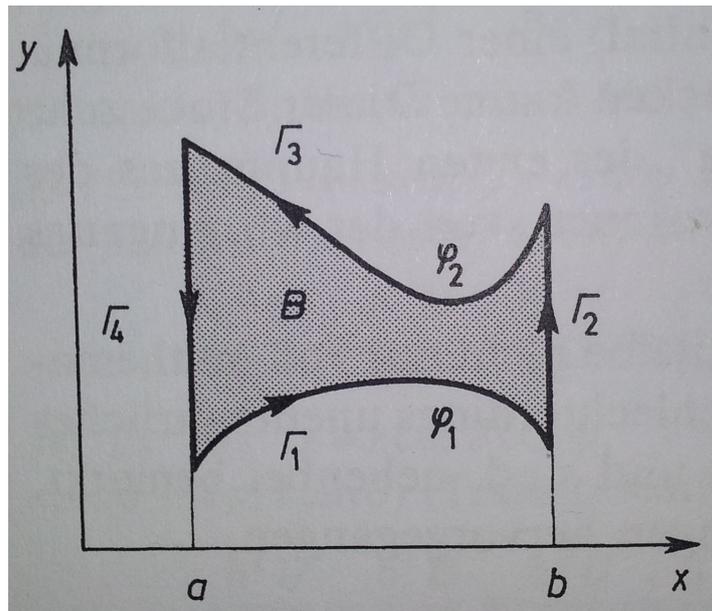


Abbildung 23: BV-Normalbereich bzgl. der x-Achse

Die Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ sind nach Satz 1 rektifizierbar. Sie werden, wie in Abbildung 17 durch Pfeilspitzen angedeutet wird, entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen. Dies wird durch die Redeweise ∂B ist positiv orientiert ausgedrückt.⁷⁵

Der letzte Schritt der Vorarbeit besteht aus einer Rechnung, deren Ergebnis dann in den Gaußschen Integralsatz einfließen wird. Ziel der folgenden Rechnung ist es, ein Bereichsintegral über die partielle Ableitung durch die Randwerte der Funktion auszudrücken.

G sei eine offene, B enthaltende Menge und die Funktion $P : G \rightarrow \mathbb{R}$ sei mitsamt der partiellen Ableitung $\frac{\partial P}{\partial y}$ auf G stetig. Dann erhält man:

$$\int_B \frac{\partial P}{\partial y} d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx.$$

Das Integral $\int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx$ kann man als Wegintegral auffassen und somit umschreiben als:

$$\int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx = \int_a^b P(\gamma_1(t)) dt = \int_{\tau_1} P dx.$$

Somit gilt auch:

⁷⁵vgl. Heuser 2008, S.498

$$\int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx = \int_a^b P(\gamma_3^-(t)) dt = - \int_{\tau_3} P dx.$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\int_B \frac{\partial P}{\partial y} d(x, y) = - \int_{\tau_3} P dx - \int_{\tau_1} P dx. \quad (1)$$

Die Integrale $\int_{\tau_2} P dx$ und $\int_{\tau_4} P dx$ verschwinden und somit ergibt sich:

$$\int_{\partial B} P dx = \sum_{j=1}^4 \int_{\tau_j} P dx = \int_{\tau_1} P dx + \int_{\tau_3} P dx.$$

Aus (1) folgt die Gleichung

$$\int_B \frac{\partial P}{\partial y} d(x, y) = - \int_{\partial B} P dx. \quad (2)$$

Diese Gleichung drückt das Bereichsintegral über die partielle Ableitung $\frac{\partial P}{\partial y}$ mithilfe des Wegintegrals, durch die Randwerte der Funktion P aus.⁷⁶

Definition 17. Sind ψ_1 und ψ_2 stetige Funktionen von beschränkter Variation auf dem Intervall $[c, d]$ und ist dort $\psi_1 \leq \psi_2$, so nennt man

$$C := \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$$

einen *BV-Normalbereich* bezüglich der y -Achse.⁷⁷

Die vier Teile des Randes ∂C werden wie schon beim *BV-Normalbereich* bezüglich der x -Achse parametrisiert, was in Abbildung 24 dargestellt wird:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= \left(\begin{array}{c} t \\ \psi_1(t) \end{array} \right) (c \leq t \leq d), \quad \gamma_2(t) := \left(\begin{array}{c} c \\ \psi_1(c) + t(\psi_2(c) - \psi_1(c)) \end{array} \right) (0 \leq t \leq 1) \\ \gamma_3^-(t) &:= \left(\begin{array}{c} t \\ \psi_2(t) \end{array} \right) (c \leq t \leq d), \quad \gamma_4^-(t) := \left(\begin{array}{c} d \\ \psi_1(d) + t(\psi_2(d) - \psi_1(d)) \end{array} \right) (0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

⁷⁶vgl. Heuser 2008, S.496/497

⁷⁷vgl. ebd. S.497

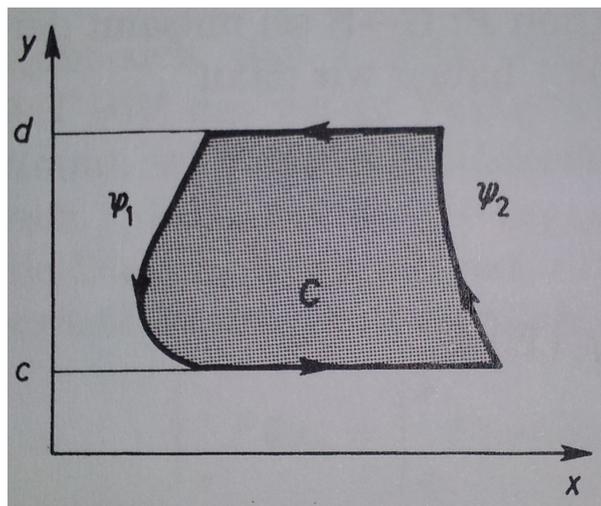


Abbildung 24: BV-Normalbereich bzgl. der y-Achse

Analog zum BV-Normalbereich gilt:

G sei eine offene, C enthaltende Menge, und die Funktion $Q : G \rightarrow \mathbb{R}$ sei mitsamt der partiellen Ableitung $\frac{\partial Q}{\partial x}$ auf G stetig. Dann erhält man:

$$\int_C \frac{\partial Q}{\partial x} d(x,y) = \int_{\partial C} Q dy \quad (3)$$

Nach diesen Erklärungen kommt man wieder zum Hauptthema dieses Kapitels, dem Satz von Gauß in der Ebene, zurück. Eine andere Version des Gaußschen Integralsatz im \mathbb{R}^2 als die bereits beschriebene, ergibt sich aus den Gleichungen (2) und (3):

Satz 5. B sei ein BV-Normalbereich bezüglich der x -Achse und der y -Achse und ∂B der positiv orientierte Rand von B . Die reellwertigen Funktionen P und Q seien mitsamt den partiellen Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial y}$ und $\frac{\partial Q}{\partial x}$ stetig auf einer offenen Menge $B \subseteq G$. Dann ist

$$\int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y) = \int_{\partial B} P dx + Q dy \quad (79)$$

Auch hier zwei Beispiele um den Satz verständlich zu machen.

Beispiel 18. Es sei ∂B ein positiv orientierter Rand. Das angegebene Wegintegral soll mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes berechnet werden:

⁷⁸vgl. Heuser 2008, S.498

⁷⁹vgl. ebd. S.498

$$\int_{\partial B} xy \, dx + (x-y) \, dy, \quad B \text{ Rechteck mit } 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3$$

$$\int_B \left(\frac{\partial(x-y)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right) d(x,y) = \int_B (1-x) \, d(x,y) = \int_0^1 \int_1^3 (1-x) \, dx \, dy = \int_1^3 \frac{1}{2} \, dy = \frac{1}{2} y \Big|_1^3 = 1. \quad {}^{80}$$

Beispiel 19. Es sei ∂B ein positiv orientierter Rand. Das angegebene Wegintegral soll mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes berechnet werden:

$$\int_{\partial B} 2y \, dx + 6x \, dy, \quad B \text{ Quadrat mit } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$\int_B \frac{\partial(6x)}{\partial x} - \frac{\partial(2y)}{\partial y} = \int_B 6 - 2 \, d(x,y) = 4. \quad {}^{81}$$

⁸⁰vgl. Heuser 2008, S.499

⁸¹vgl. ebd. S.499

3.2 Satz von Gauß im Raum

Nachdem man sich mit dem Satz von Gauß in der Ebene auseinandergesetzt hat, kommt man nun zum Satz von Gauß in drei Dimensionen. Dieser Satz besitzt dieselben Strukturen wie der Satz von Gauß in der Ebene, unterscheidet sich aber in folgenden Punkten:

- Die zweidimensionale Fläche, über welche integriert wird, wird durch ein dreidimensionales Volumen V ersetzt.
- Der Rand, entlang welchem integriert wird, ist nun keine eindimensionale Linie mehr, sondern die zweidimensionale Fläche die das Volumen umschließt.

Der Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^3 stellt einen Zusammenhang zwischen dem Integral eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{x})$ über einer geschlossenen Oberfläche ∂V und dem Integral der Divergenz von $\vec{v}(\vec{x})$ über dem Volumen V her, welches durch diese Oberfläche begrenzt ist. Somit erhält man die folgende Gleichung:

$$\oint_{\partial V} \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{n} \, dF = \int_V \vec{\nabla} \vec{v}(\vec{x}) \, dV.$$

Zu beachten ist, dass wenn es sich bei dem Volumen zum Beispiel um einen Zylinder handelt, sich dann seine geschlossene Oberfläche aus der Mantelfläche und den beiden Kreisen als Deckfläche zusammensetzt. Es muss dann über jede der drei Teilflächen integriert werden um den Gaußschen Integralsatz anwenden zu können. Würde man nur die Mantelfläche alleine betrachten, hätte man keine geschlossene Fläche.⁸²

Wieder soll der Integralsatz dabei helfen das Rechnen zu vereinfachen und wie auch schon beim Gaußschen Satz in der Ebene, wird dies auch hier an einem Beispiel demonstriert. Wenn man Vektorfelder im Raum integriert ist es oft einfacher das Integral über das Volumen zu berechnen, als das Integral über die Oberfläche. Wie in der Ebenen ist es auch im Dreidimensionalen vor allem dann von Vorteil das Volumsintegral zu berechnen, wenn sich die Oberfläche aus mehreren Stücken zusammensetzt (dies wird in Beispiel 20 gezeigt). Der Satz von Gauß hat außerdem den Vorteil, dass man die Divergenz eines Vektorfeldes in einem Punkt berechnen kann, in welchem es nicht definiert ist (dies wird in Beispiel 21 gezeigt).

Beispiel 20. *Man möchte das Integral*

$$\int \int_{\partial W} (x^2 + e^{(y^2 + z^2)}) \, dy \, dz + (y^2 + x^2 z^2) \, dz \, dx + (z^2 - e^y) \, dx \, dy$$

berechnen, wobei W der in Abbildung 25 gezeigte Einheitswürfel ist. Der Einheitswürfel ist jener Würfel, dessen Eckpunkte in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ und $(1,1,1)$ liegen.

⁸²vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.139

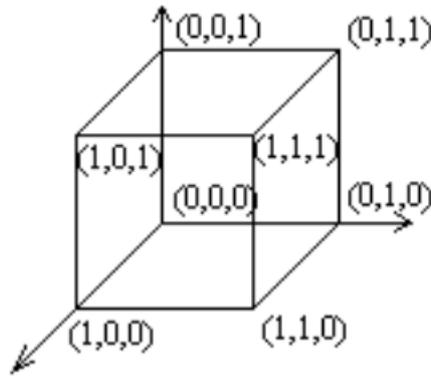


Abbildung 25: Einheitswürfel

Ohne den Satz von Gauß müsste man nun sechs Flächenintegrale berechnen. Obwohl es in diesem Beispiel noch gut möglich wäre, ist es trotzdem schon einiges an Rechenaufwand. Da es sich bei dem Würfel um eine geschlossene Fläche handelt, darf man den Satz von Gauß in drei Dimensionen zur Hilfe nehmen.

Das Vektorfeld über welches integriert werden soll lautet:

$$\vec{v}(\vec{x}) = x^2 + e^{(y^2 + z^2)}, y^2 + x^2 z^2, z^2 - e^y.$$

Die Divergenz von $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x})$ berechnet sich folgendermaßen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^{(y^2 + z^2)}) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + x^2 z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - e^y) = 2x + 2y + 2z.$$

Jetzt soll nur noch das Volumsintegral mithilfe des Satzes von Gauß berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int \int \int_W (2x + 2y + 2z) dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 2z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 1 + 2y + 2z dy dz = \\ &= \int_0^1 2 + 2z dz = 3^{83} \end{aligned}$$

Beispiel 21. Man möchte zeigen, dass das elektronische Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

eine Divergenz besitzt. Man berechnet diese wie folgt und erhält:

⁸³vgl. Link [11], S.3

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \right) = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2} - 3x_1^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{6/2}}$$

Wenn man diesen Ausdruck kürzt, ergibt sich:

$$\left[\frac{-2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} + \frac{x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \right] = 0$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x})$ gilt in allen Punkten außer im Ursprung, da das Vektorfeld dort nicht definiert ist. Wie vorhin erwähnt ermöglicht es der Satz von Gauß die Divergenz solcher Vektorfelder zu berechnen. Bei einer solchen Berechnung werden auch Punkte wie der Ursprung erfasst, in welchen das Vektorfeld unendlich große Komponenten hat. Diese müssen natürlich innerhalb des Integrationsvolumens liegen.

$\vec{F}(\vec{x})$ ist kugelsymmetrisch, also wählt man eine Kugeloberfläche, mit Radius R um den Ursprung, als geschlossene Fläche. Mit den Kugelkoordinaten erhält man Folgendes:

$$\vec{F}(R) = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Um weiter rechnen zu können muss man sich zuerst noch das vektorielle Flächenelement der Kugel berechnen.

Gegeben sei eine Kugel mit dem Radius R . Die Parameterdarstellung der Kugeloberfläche in Abhängigkeit des Polarwinkels ϑ und des Azimutalwinkels φ lautet:

$$\vec{x}(\vartheta, \varphi) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt werden die Tangentialvektoren an die ϑ -bzw. φ -Parameterlinien berechnet:

$$\frac{\partial \vec{x}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} = R \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \vec{x}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige vektorielle Flächenelement erhält man mithilfe des Kreuzproduktes:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \frac{\partial \vec{x}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{x}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} d\vartheta d\varphi = \\ &= R \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} \sin\vartheta^2 \cos\varphi \\ \sin\vartheta^2 \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi = \\ &R^2 \sin\vartheta \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Da der übrig gebliebene Vektor $\begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor der Kugelkoordinaten ist, der vom Ursprung aus radial nach außen zeigt, kann man ihn als \hat{e}_r schreiben. Somit gilt:

$$d\vec{F} = R^2 \sin\vartheta \hat{e}_r d\vartheta d\varphi.$$

Nun wieder zurück zum Hauptteil des Beispiels. Der vektorielle Flächeninhalt der Kugel lässt sich wie folgt schreiben:

$$\vec{n} dF = \hat{e}_r R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Der Polarwinkel läuft im Bereich $[0, \pi]$ und der Azimutalwinkel im Intervall $[0, 2\pi]$, also ist der Integrationsbereich $I_F = (\vartheta, \varphi) | 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Nun wird über die Oberfläche integriert und man erhält:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{F}(R) \cdot \vec{n} dF &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{1}{R^2} R^2 \sin\vartheta \hat{e}_r^z d\vartheta = \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta = 4\pi. \end{aligned}$$

Man sieht, dass das Ergebnis unabhängig vom Radius R ist.⁸⁴

An den zwei gerechneten Beispielen wurden die Vorteile des Satzes von Gauß im \mathbb{R}^3 gezeigt:

- Das Integral über dem Volumen zu berechnen ist, vor allem wenn sich die Oberfläche aus mehreren Stücken zusammensetzt, einfacher als die Integration über die Oberfläche.
- Die Divergenz in einem Punkt zu berechnen, indem das Vektorfeld nicht definiert ist.

⁸⁴vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.143

Wichtig ist beim Integralsatz von Gauß in drei Dimensionen folgendes zu beachten:

- Bei komplizierten Bereichen ist es wichtig den Rand zu beachten, denn es gibt Bereiche die Löcher haben.
- Bevor man den Satz von Gauß anwendet sollte man immer darauf achten, dass es sich bei dem Vektorfeld über das man integriert auch wirklich um ein stetig differenzierbares Vektorfeld handelt.⁸⁵

Nachdem der Satz von Gauß, sowohl in der Ebene und auch im Raum behandelt wurde, kommt man jetzt zu einem anderen wichtigen Integralsatz, dem Satz von Stokes.

⁸⁵vgl. Kirchgassner & Schreck, S.144

3.3 Integralsatz von Stokes

In diesem Kapitel soll der Integralsatz von Stokes behandelt werden. Bevor dieser Satz formuliert wird soll noch erläutert werden, was ein **stückweise stetig differenzierbarer Weg** ist.

Definition 18. Ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist differenzierbar, wenn die Ableitung $\dot{\gamma}(t)$ an jeder Stelle $t \in [a, b]$ existiert.⁸⁶

Definition 19. Ein Weg γ heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn er die Summe $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n$ stetig differenzierbarer Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ist.⁸⁷

Nun kommt die Formulierung des Satzes von Stokes, der es erlaubt gewisse Oberflächenintegrale durch Wegintegrale auszudrücken.

Satz 6. Es mögen die folgenden Voraussetzungen gelten:

- ϕ sei eine Fläche, deren Parameterbereich K ein BV-Normalbereich bezüglich beider Achsen ist. Darüber hinaus sei ϕ sogar eine C^2 -Funktion auf einer K enthaltenden offenen Menge;
- der positiv orientierte Rand ∂K von K sei mittels eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisierbar;
- das Vektorfeld $Pi + Qj + Rk$ sei stetig differenzierbar auf einer offenen Menge, die $\phi(K)$ enthält.

Dann ist:

$$\int_{\phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\phi \circ \gamma} P dx + Q dy + R dz$$
⁸⁸

Beweis:

Die Komponentenfunktionen von ϕ seien X, Y, Z und die von γ werden mit γ_1 und γ_2 bezeichnet. Man betrachte das Wegintegral $\int_{\phi \circ \gamma} P dx$.

Mit der Abkürzung

⁸⁶vgl. Heuser 2008, S. 353

⁸⁷vgl. ebd. S.355

⁸⁸vgl. ebd. S.512

$$p(u, v) := P(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

und der Ableitungsformel

$$\frac{dX(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial X(\gamma(t))}{\partial u} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial X(\gamma(t))}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \text{ (hier wurde die Kettenregel angewendet)}$$

erhält man, nach Prop. 2 folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_{\phi \circ \gamma} P \, dx &= \int_a^b p(\gamma(t)) \frac{dX(\gamma(t))}{dt} dt = \\ &= \int_a^b p(\gamma(t)) \left[\frac{\partial X(\gamma(t))}{\partial u} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial X(\gamma(t))}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \right] dt = \\ &= \int_{\gamma} p \frac{\partial X}{\partial u} du + p \frac{\partial X}{\partial v} dv. \end{aligned} \tag{4}$$

Nach dem Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^2 gilt:

$$\int_{\gamma} p \frac{\partial X}{\partial u} du + p \frac{\partial X}{\partial v} dv = \int_K \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) \right] d(u, v) \tag{5}$$

Nun formt man im letzten Integral den Integranden um. Da die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von X stetig sind gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) &= \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + p \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} - p \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} = \\ &= \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u}. \end{aligned}$$

Die Kettenregel liefert für $\frac{\partial p}{\partial u}$ und $\frac{\partial p}{\partial v}$ die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial u}, \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{\partial P}{\partial y} \left[\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right] + \frac{\partial P}{\partial z} \left[\frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right] = \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}. \end{aligned}$$

Also kann man schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}.$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) erhält man nun:

$$\int_{\phi \circ \gamma} P dx = \int_K \left[-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} \right] d(u,v),$$

anders ausgedrückt

$$\int_{\phi \circ \gamma} P dx = \int_{\gamma} -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx.$$

Auf dieselbe Weise erhält man die anderen Gleichungen, die dann wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} \int_{\phi \circ \gamma} Q dy &= \int_{\phi} -\frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy, \\ \int_{\phi \circ \gamma} R dz &= \int_{\phi} -\frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Wenn man die letzten drei Gleichungen zusammenzählt erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \\ \int_{\phi \circ \gamma} P dx + Q dy + R dz. \end{aligned} \quad ^{89}$$

Eine andere Schreibweise dieses Satzes ist jene, bei der der Integralsatz von Stokes das Integral eines Vektorfeldes entlang einer geschlossenen Randkurve einer Fläche mit dem Integral über die Rotation desselben Vektorfelds verbindet.

Es sei $\vec{v}(\vec{x})$ ein differenzierbares Vektorfeld und ∂S die geschlossene Randkurve der orientierbaren, stückweise glatten Fläche S über die integriert wird. Dann gilt:

$$\oint_{\partial S} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_S [\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x})] \cdot \vec{n} dF.$$

⁸⁹Heuser 2008, S.513

Beim Integralsatz von Stokes ist es wichtig darauf zu achten, in welche Richtung die Randkurve beim Integrieren durchlaufen wird, also die Orientierung der Randkurve. Es ist üblich den Normalvektor so zu wählen, dass er aus der Fläche herauszeigt. Die Integration entlang der Raumkurve muss mit dieser Wahl des Normalvektors übereinstimmen. Ansonsten erhält man auf einer der beiden Seiten des Integralsatzes ein falsches Vorzeichen.⁹⁰

Mit dem Satz von Stokes kann man ein Integral über eine Randkurve einer Fläche in ein (oft) einfacheres Oberflächenintegral umschreiben. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 22. *In diesem Beispiel soll der Integralsatz von Stokes auf das Vektorfeld*

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und das Ellipsoid mit den Seiterlänge a, b, c angewendet werden, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt

$$\partial V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Das Ellipsoid wird entlang der $x_1 - x_2$ -Ebene durchgeschnitten. Der Teil welcher entlang der negativen x_3 -Achse verluft, wird weggeworfen. Die Grundlagen dieses Beispiels werden in Abbildung 26 dargestellt.

Dabei bildet sich eine geschlossene Randkurve, die eine Elipse mit den Halbachsen a und b bildet, welche in der $x_1 - x_2$ -Ebene verläuft und deren Mittelpunkt im Ursprung liegt:

$$\vec{r}(\chi) = \begin{pmatrix} a \cos \chi \\ b \sin \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \chi \in [0, 2\pi].$$

Um zu zeigen, dass die Randkurve wirklich auf dem Ellipsoid verläuft, muss man in die implizite Darstellung des Ellipsoids

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

einsetzen. Die Orientierung verläuft im negativen Uhrzeigersinn und somit liegt der Winkel χ im Bereich von 0 bis 2π . Somit ergibt sich für das geschlossene Linienintegral:

⁹⁰vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S. 145

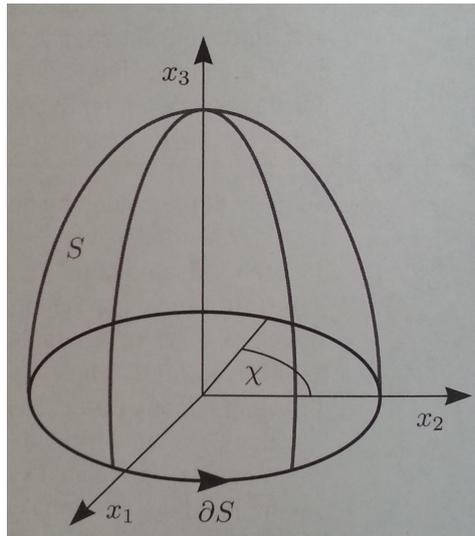


Abbildung 26: Halbes Ellipsoid S mit Randkurve ∂S und Winkel χ

$$\begin{aligned}
 \oint \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos \chi \\ b \sin \chi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin \chi \\ b \cos \chi \\ 0 \end{pmatrix} d\chi \\
 &= (b^2 - a^2) \int_0^{2\pi} \sin \chi \cos \chi d\chi \\
 &= (b^2 - a^2) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\chi d\chi \\
 &= \frac{b^2 - a^2}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\chi \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2 - b^2}{4} (1 - 1) = 0.
 \end{aligned}$$

Das Verschwinden des Integrals hat zur Folge, dass bei diesem Beispiel auch die rechte Seite des Stokesschen Integralsatzes gleich 0 ist, also dass das Integral über der Rotation verschwindet. Dies kann man ganz einfach ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial x_2} - \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x})) \cdot \vec{n} &= 0.
 \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Anwendung des Integralsatzes von Stokes dabei hilft eine komplizierte Integration durch eine einfachere zu ersetzen. Bei Vektorfeldern, bei denen die Rotation eine

*einfache Gestalt hat ist es meistens einfacher das Oberflächenintegral über der Rotation zu berechnen, als das Integral entlang der Kurve zu.*⁹¹

Der Satz von Stokes hat eine wichtige Bedeutung für die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen.

Wie bereits erwähnt sind Kurvenintegrale genau dann wegunabhängig, wenn das Integral über jedem geschlossenen Weg 0 ist. Wenn man jetzt nochmals den Satz von Stokes betrachtet fällt auf, dass dann auch das Integral des Rotors jeder Fläche gleich 0 sein muss. Das Integral des Rotors einer Fläche kann nur dann verschwinden, also gleich 0 sein, wenn auch der Rotor des Vektorfeldes überall 0 ist. Also gilt:

$$\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \int_S \vec{v} \, dS \text{ ist wegunabhängig.}^{92}$$

⁹¹vgl. Kirchgassner & Schreck 2013, S.148, 149

⁹²vgl. Link [11], S.6

4 Anwendungen

Nachdem man nun weiß wie die Integralsätze lauten und wie man mit ihnen rechnet, möchte man auch wissen wo sie angewendet werden.

Eine der bekanntesten Anwendungen kommt aus der Physik und zwar die Maxwell-Gleichungen. Zusammen mit der Lorentzkraft bilden die Maxwell-Gleichungen die Grundlagen der Elektrodynamik. Sie beschreiben das Zustandekommen und die Dynamik von elektromagnetischen Feldern.⁹³

Um die Maxwell-Gleichungen zu formulieren, werden noch die Begriffe **Elektromagnetisches Feld**, **Lorentzkraft** und **Ladungsdichte** kurz erläutert.

4.1 Elektromagnetisches Feld

In der Elektrodynamik gibt es zwei wichtige physikalische Felder:

- Das elektrische Feld, welches mit \vec{E} bezeichnet wird.
- Das Magnetfeld, welches mit \vec{B} bezeichnet wird.

Die Vektorpfeile zeigen schon, dass es sich bei diesen Feldern um Vektorfelder handelt. Mit dem, was man bereits über Vektorfelder weiß, kann man folgendes für das elektrische Feld und für das Magnetfeld sagen:

Zu jedem Zeitpunkt t ist an jedem Raumpunkt \vec{x} ein Vektor $\vec{E}(\vec{x}, t)$ bzw. ein Vektor $\vec{B}(\vec{x}, t)$ definiert.⁹⁴

Die beiden Felder werden gemeinsam als elektromagnetische Felder bezeichnet. In der Elektrodynamik werden zum Beispiel das Zustandekommen, die Dynamik und die Wirkung auf Materie von den elektromagnetischen Feldern untersucht.⁹⁵

4.2 Lorentzkraft

Das elektromagnetische Feld wirkt auf elektrisch geladene Teilchen. Es gibt die sogenannte Elementarladung $e = 1.602176487 \cdot 10^{-19} C$. In der Natur kommen die elektrischen Ladungen nur als Vielfache dieser Elementarladung vor. Jedes Proton besitzt die Ladung e

⁹³vgl. Embacher 2012, Link [12] S.13

⁹⁴vgl. ebd. S.8

⁹⁵vgl. ebd. S.8

und jedes Elektron die Ladung $-e$. Dann gibt es noch die Neutronen, welche elektrisch neutral sind, das heißt ihre Ladung ist gleich 0.

Aus dem Physik-Unterricht weiß man sicherlich noch, dass sich Ladungen mit den gleichen Vorzeichen abstoßen und Ladungen mit ungleichen Vorzeichen anziehen. Diese Kräfte werden in der Elektrodynamik auf das elektromagnetische Feld zurückgeführt. In der folgenden Gleichung wird beschrieben, wie sich das elektromagnetische Feld auf geladenen Teilchen auswirkt.⁹⁶

Wenn man also ein Teilchen hat, dessen Masse m und dessen Ladung q ist, dann wirkt durch das elektromagnetische Feld eine Kraft auf das Teilchen, die **Lorentzkraft**. Wenn diese Kraft die einzige ist die auf das Teilchen wirkt, dann kann seine Bewegung so beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} = q(\vec{E}(\vec{x}, t) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(\vec{x}, t)) \quad (*)$$

Wenn man die Felder $\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{x}, t)$ bereits kennt, dann handelt es sich bei (*) um ein System von Differentialgleichungen für die Funktionen $\vec{x} \equiv \vec{x}(t)$. Wenn die Anfangsbedingungen $\vec{x}(0)$ und $\dot{\vec{x}}(0)$ gegeben sind, dann bestimmen diese Funktionen, an welchem Ort sich ein Teilchen zu einem gegebenen Zeitpunkt t befindet.⁹⁷

4.3 Ladungsdichte und elektrischer Strom

Elektronen und Atomkerne sind die wichtigsten Ladungsträger in der Materie die uns umgibt und aus der wir selbst bestehen. Anzumerken ist, dass, wie bereits erwähnt, die Elektronen eine negative Ladung besitzen, während die Atomkerne eine positive Ladung haben. Wenn man in einem makroskopischen Körper (ein Festkörper mit einer gewissen Mindest-Ausdehnung) einen Überschuss an Elektronen oder einen Mangel an Ihnen hat, dann besitzt dieser Körper eine nicht verschwindende elektrische Nettoladung. Diese besteht in den meisten Fällen aus einer großen Anzahl von Elementarladungen. Um diese Ladungsverteilung zu beschreiben, wird das Konzept der elektrischen Ladungsdichte herangezogen. Sie wird mit $\rho \equiv \rho(\vec{x}, t)$ bezeichnet und ist dadurch definiert, dass sie in jedem Raumgebiet vom Voluminhalt d^3x , welches sich bei dem Punkt \vec{x} befindet, folgende Ladung besitzt:

$$d^3x \rho(\vec{x}, t).$$

⁹⁶vgl. Embacher 2012, Link[12], S.9

⁹⁷vgl. ebd. S.9

Die elektrische Gesamtladung, die zu einem gegebenen Zeitpunkt t in einem beliebigen Raumgebiet V enthalten ist, wird durch das Volumenintegral

$$Q(t) = \int_V d^3\rho(\vec{x}, t) \quad (6)$$

definiert.⁹⁸

Als **elektrischen Strom** bezeichnet man in der Elektrodynamik jene elektrische Ladung, die pro Zeitintervall durch eine gegebene Fläche hindurchtritt. Um Ladungsflüsse beschreiben zu können, benötigt man Vektoren, da die Bewegungen in unterschiedliche Richtungen gehen können und auch die Ausrichtung der Fläche im Raum beliebig sein kann. Ein infinitesimales Flächenelement kann man sich als Bereich auf einer glatten Fläche denken. Der Flächeninhalt dieses Elementes ist durch $d\vec{A}$ bestimmt und kann als Stück einer Ebenen gesehen werden, da es so klein ist. Deshalb besitzt das Flächenelement einen wohldefinierten Einheit-Normalvektor \vec{n} durch dessen Richtung die Fläche eine Orientierung hat. Der Vektor \vec{n} zeigt von der Unterseite der Fläche zur Oberseite. Der infinitesimale Vektor $d\vec{A} = \vec{n}dA$ definiert den Flächeninhalt und die Raumausrichtung des Flächenelementes.

Mithilfe eines Vektorfeldes $\vec{j} \equiv \vec{j}(\vec{x}, t)$ wird nun der der Ladungsfluss beschrieben, welcher zum Begriff des **Stromdichtevektors** führt.⁹⁹

Dieser Vektor wird dadurch charakterisiert, dass der elektrische Strom durch eine infinitesimale Fläche mit dem vektoriellen Flächenelement $d\vec{A}$, welche bei dem Punkt \vec{x} liegt, durch

$$d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t)$$

gegeben ist.

Der Strom der während einer bestimmten Zeit t durch eine Fläche S fließt wird somit durch das Flächenintegral

$$I(t) = \int_S d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t)$$

beschrieben.

Wenn ein Ladungsfluss durch die Bewegung von mehreren Ladungen entsteht, welche eine Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)$ bilden und sich nach einem kontinuierlichen Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x}, t)$ bewegen, dann ist der Stromdichtevektor gegeben durch

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t). \quad 100$$

⁹⁸vgl. Embacher 2012, Link [12], S.10

⁹⁹vgl. ebd. S.12

¹⁰⁰vgl. ebd. S.12

Durch die Ladungsdichte ρ und den Stromdichtevektor \vec{j} werden die Aspekte der elektrischen Ladung beschrieben, die bei elektromagnetischen Feldern als Quellen auftreten.¹⁰¹

4.4 Die Maxwell-Gleichungen

Wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, hängt eine Anwendung der Integralsätze eng mit den Maxwell-Gleichungen zusammen. Man kann diese Gleichungen sowohl als ein System von Differentialgleichungen schreiben, als auch in Integralform. Um von der einen Form zur anderen Form zu gelangen, nimmt man die Integralsätze zur Hilfe.

4.4.1 Die Maxwell-Gleichungen in Differentialform

Die Maxwell-Gleichungen bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen für das elektrische Feld $\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{x}, t)$ und das Magnetfeld $\vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{x}, t)$. Neben diesen beiden Feldern spielen auch die Ladungsdichte $\rho \equiv \rho(\vec{x}, t)$ und der Stromdichtevektor $\vec{j} \equiv \vec{j}(\vec{x}, t)$ eine Rolle in dem System. Die vier Gleichungen lauten:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10)$$

ϵ_0 ist die elektrische Feldkonstante und ist im SI-Einheitssystem mit

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.85418781762 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 / (\text{Nm}^2)$$

gegeben.

μ_0 ist die magnetische Feldkonstante und im SI-Einheitssystem mit

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Ns}^2 / \text{C}^2$$

definiert.¹⁰²

Diese vier Gleichungen beschreiben die Beziehung zwischen der Ladung und der Bewegung des elektrischen und magnetischen Feldes.

¹⁰¹vgl. Embacher 2012, Link[12], S.13

¹⁰²vgl. ebd. S.13

Ladungserhaltung

Wenn man die Maxwellgleichungen betrachtet fällt auf, dass die Felder \vec{E} und \vec{B} differenziert werden, während die Ladungsdichte ρ und der Stromvektor \vec{j} nicht abgeleitet werden. Wenn man annimmt, dass die beiden Felder \vec{E} und \vec{B} bekannt sind und die ersten beiden Gleichungen sind erfüllt, dann können wir die anderen zwei Gleichungen verwenden um ρ und \vec{j} zu berechnen.

In der Realität ist es aber meist umgekehrt. Denn die Ladungsdichte und die Stromdichte sind in einem elektromagnetischen Feld eindeutig bestimmt. Wenn man ρ und \vec{j} gegeben hat, dann stellen die Maxwellgleichungen ein System partieller Differentialgleichungen für \vec{E} und für \vec{B} dar.¹⁰³

Man möchte nun die Kontinuitätsgleichung herleiten und beschreiben, was diese aussagt. Außerdem wird man sehen, dass man um zu beschreiben, was diese Gleichung aussagt, die Integralsätze verwendet.

Wenn man die Maxwellgleichungen genauer betrachtet sieht man, dass ρ und \vec{j} nicht beliebig vorgegeben werden können. Denn wenn man die beiden Seiten der erste Maxwellgleichung (7) mit ϵ_0 multipliziert und dann partiell nach der Zeit differenziert erhält man:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (11)$$

Nun möchte man mithilfe der vierten Maxwell-Gleichung (10) $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ durch \vec{j} und $\operatorname{rot} \vec{B}$ ausdrücken. Wenn man das in (11) einsetzt erhält man:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Die Divergenz einer Rotation ist immer gleich 0 und deshalb verschwindet der letzte Term der eben angeführten Gleichung. Wenn man den Rest der Gleichung wie folgt umformt, erhält man die sogenannte **Kontinuitätsgleichung**:

$$\partial \rho \partial t + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad ^{104} \quad (12)$$

Um zu erklären was die Kontinuitätsgleichung aussagt, wird der Gaußsche Integralsatz wie folgt formuliert:

¹⁰³vgl. Embacher 2012, Link [12] S. 14

¹⁰⁴vgl. ebd. S.15

Für jedes Vektorfeld \vec{u} und für jedes Raumgebiet V gilt:

$$\int_V d^3x \operatorname{div} \vec{u} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{u} \quad 105$$

Angenommen V sei ein beliebiges Raumgebiet und man bildet das Volumsintegral über der Kontinuitätsgleichung (12), dann erhält man:

$$\int_V d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_V d^3x \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Im ersten Term wird die partielle Zeitableitung vor das Integral gezogen und im zweiten Term kann mithilfe des Integralsatzes von Gauß aus dem Volumsintegral ein Oberflächenintegral gemacht werden:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho + \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{j} = 0.$$

$d\vec{A}$ ist so orientiert, dass es aus dem Raumgebiet heraus zeigt. Das Integral, welches nach der partiellen Zeitableitung steht, hängt nur noch von t ab. Somit hat sich die partielle Zeitableitung in eine totale Zeitableitung geändert. Physikalisch betrachtet kann man über die Gleichung folgendes aussagen: Der erste Term beschreibt die zeitliche Änderung der elektrischen Gesamtladung Q die in V enthalten ist, $Q_{in V}$. Der zweite Term beschreibt den elektrischen Strom der aus V heraus fließt, $I_{aus V}$.¹⁰⁶

Somit erhält man folgende Beziehung:

$$\frac{dQ_{in V}}{dt} = -I_{aus V}.$$

Das bedeutet, dass jede Änderung der Ladung die in V enthalten ist, von einem Ladungsfluss durch die Randfläche von V wieder ausgeglichen werden muss. Somit sieht man auch was die Kontinuitätsgleichung aussagt: Durch sie wird die Ladungserhaltung ausgedrückt.¹⁰⁷ Wie bereits erwähnt, sind die eben beschriebenen Gleichungen nicht nur als System von partiellen Differentialgleichungen schreibbar, sondern auch in Integralform. Im nächsten Absatz wird man die Gleichungen mithilfe der Integralsätze von der Differential- in die Integralform bringen.

¹⁰⁵vgl. Embacher 2012, Link [12], S.7

¹⁰⁶vgl. ebd. S.12

¹⁰⁷vgl. ebd. S.15

4.4.2 Die Maxwell-Gleichungen in Integralform

In diesem Teil soll die Bedeutung der einzelnen Maxwell-Gleichungen erklärt werden. Dies macht man mithilfe der Integralsätze.

Die Gleichung $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ in Integralform

Es sei V ein beliebiges (zeitlich festgehaltenes) Raumgebiet. Nun wird das Volumenintegral über beide Seiten der ersten Maxwellgleichung (7) gebildet:

$$\int_V d^3x \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho.$$

Wenn man die rechte Seite betrachtet fällt auf, dass es sich dabei um die in V enthaltenen Ladung $Q_{in V}$ handelt. (Siehe Gleichung 6) Die linke Seite des Integrals kann man mithilfe des Integralsatzes von Gauß in ein Oberflächenintegral über der Randfläche ∂V umschreiben und man erhält insgesamt:

$$\oint \partial V d\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{in V}.^{108} \quad (13)$$

Aus der umgeformten Maxwellgleichung kann man erkennen, dass die Ladung, die ein Raumgebiet V enthält, eindeutig durch die Werte des elektrischen Feldes auf der Oberfläche ∂V bestimmt ist. Je nachdem ob gilt, $Q_{in V} > 0$ oder $Q_{in V} < 0$ kann man Aussagen über das Vektorfeld \vec{E} machen und seine Tendenz auf der Oberfläche von V nach außen (falls $Q_{in V} > 0$) oder nach innen (falls $Q_{in V} < 0$) zu zeigen.¹⁰⁹

Es kann beispielsweise der Massenstrom einer Flüssigkeit durch ein solches Oberflächenintegral ausgedrückt werden. Um sich besser vorstellen zu können, dass ein solches Integral eine Strömung oder einen Fluss misst, nennt man die linke Seite der Maxwellgleichung in Integralform (13) den elektrischen Fluss durch die Randfläche ∂V , welcher zu der in V enthaltenen Ladung proportional ist.¹¹⁰

Die Gleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ in Integralform

Es sei V ein beliebiges (zeitlich festgehaltenes) Raumgebiet. Nun wird das Volumenintegral über beide Seiten der zweiten Maxwellgleichung (8) gebildet:

$$\int_V d^3x \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

¹⁰⁸vgl. Embacher 2012, Link [12], S.16

¹⁰⁹vgl. ebd. S. 16

¹¹⁰vgl. ebd. S.17

Nun nimmt man wieder den Gaußschen Integralsatz zur Hilfe um die linke Seite der Maxwellgleichung in ein Oberflächenintegral umzuformen und erhält:

$$\int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0^{111} \quad (14)$$

Die Struktur der zweiten Maxwellgleichung in Integralform (14) ist ähnlich wie die der ersten Maxwellgleichung (13), mit dem Unterschied, dass in der Gleichung (14) die Quellstärke gleich 0 ist. Die linke Seite der Gleichung in Integralform (14) wird **magnetischer Fluss** durch die Randfläche ∂V genannt.¹¹²

Aus der zweiten Maxwellgleichung in Integralform (13) kann man erkennen, dass der magnetische Fluss durch eine geschlossenen Fläche immer verschwindet. Man kann sich magnetische Feldlinien als Kurven vorstellen, die zu einem gegebenen Zeitpunkt in jedem ihrer Punkte in die gleiche Richtung zeigen wie \vec{B} . Man kann also sagen, dass aus jedem Raumgebiet gleichviele Feldlinien herauskommen wie hineinfließen. Das gilt für jedes Raumgebiet. Somit ergibt sich, dass magnetische Feldlinien geschlossen sind. Die rechte Seite der Gleichung (14) ist gleich 0, woraus man schließen kann, dass die magnetische Quellstärke verschwindet. Somit gilt, dass es keine magnetische Ladung gibt.¹¹³

Da in den nächsten beiden Maxwellgleichungen nicht die Divergenz eine Rolle spielt, sondern die Rotation, benötigt man dieses Mal nicht den Integralsatz von Gauß, sondern den Integralsatz von Stokes. Um ihn im nächsten Abschnitt anzuwenden, soll er hier nochmals formuliert werden:

$$\text{Für jedes Vektorfeld } \vec{u} \text{ und für jede Fläche } S \text{ gilt: } \int_S d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{u} = \int_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{u}.$$

Das Flächenintegral der Rotation eines Vektorfeldes über die Fläche S entspricht also der Zirkulation dieses Vektorfeldes entlang dem Rand ∂S .¹¹⁴

Die Gleichung $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ in Integralform

Es sei S eine beliebige in den Raum gelegte Fläche. Nun bildet man das Flächenintegral über der dritten Maxwell-Gleichung (9) und erhält:

$$\int_S d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{E} = - \int_S d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

¹¹¹vgl. Embacher 2012, Link [12], S.19

¹¹²vgl. ebd. S.19

¹¹³vgl. ebd. S.19

¹¹⁴vgl. ebd. S.7

Auf der rechten Seite der Gleichung kann man die partielle Zeitableitung vor das Integral ziehen. Die linke Seite kann man mithilfe des Integralsatzes von Stokes in ein Linienintegral über dem Rand ∂S schreiben. Die dritte Maxwell-Gleichung (9) in Integralform lautet also:

$$\oint_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt} \int_S d\vec{A} \cdot \vec{B} \quad (15)$$

Die linke Seite der Gleichung ist ein Linienintegral des Magnetfeldes über dem Rand der Fläche S . Dieses Integral beschreibt die Tendenz des Vektorfeldes \vec{E} die Orientierung der Kurve beizubehalten bzw. die Gegenrichtung zu wählen wenn es die Kurve umläuft. Dieses Integral wird auch Zirkulation entlang der geschlossenen Kurve ∂S genannt. In der linken Seite der Gleichung (15) ist $d\vec{x}$ ein Vektor, der zu einer Verbindung zwischen zwei infinitesimalen benachbarten Kurven führt. Man erkennt, dass das Aufsummieren von Skalarprodukten der Form $d\vec{x} \cdot \vec{E}$ angibt wie groß die Übereinstimmung der Richtung von \vec{E} und ∂S ist. Somit stellt die dritte Maxwell-Gleichung in Integralform (15) eine Beziehung zwischen der elektrischen Zirkulation und der zeitlichen Änderungsrate des magnetischen Flusses durch die Fläche S dar. Wenn sich der magnetische Fluss durch eine Fläche ändert, löst das eine Zirkulation entlang der Randkurve dieser Fläche aus. ¹¹⁶

Die Gleichung $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ in Integralform

Es sei S eine beliebige in den Raum gelegte Fläche. Nun bildet man das Flächenintegral über der vierten Maxwell-Gleichung (10) und erhält:

$$\int_S d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \int_S d\vec{A} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \int_S d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Zuerst betrachtet man die rechte Seite der Gleichung: Im ersten Term wird der elektrische Strom, welcher durch die Fläche S fließt, $I_{\text{durch } S}$, mit μ_0 multipliziert. Beim zweiten Term der rechten Seite kann man die partielle Zeitableitung vor das Integral ziehen. Die linke Seite kann man mithilfe des Integralsatzes von Stokes in ein Linienintegral über dem Rand ∂S schreiben. Insgesamt erhält man:

$$\oint_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{durch } S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S d\vec{A} \cdot \vec{E} \quad (16)$$

Wie vorhin schon, betrachtet man zuerst die rechte Seite der vierten Maxwell-Gleichung in Integralform (16): Im ersten Term der rechten Seite kann man erkennen, wie der elektrische

¹¹⁵vgl. Embacher 2012, Link [12], S.20

¹¹⁶vgl. ebd. S.20

¹¹⁷vgl. ebd. S.21

Strom das Magnetfeld hervorbringt. Angenommen alle Größen wären zeitunabhängig, dann würde der zweite Term auf der rechten Seite wegfallen und die Gleichung würde eine Beziehung zwischen dem Linienintegral eines Magnetfeldes über dem Rand einer Fläche und dem elektrischen Strom, welcher durch eine Fläche fließt, darstellen. Das Integral auf der linken Seite nennt man auch die magnetische Zirkulation entlang der geschlossenen Kurve ∂S . Diese Zirkulation ist, im Fall der Zeitunabhängigkeit, proportional zum elektrischen Strom der durch die Fläche S fließt. Diese Aussage heißt das **Ampersche Gesetz**.¹¹⁸ Wenn man jetzt aber den allgemeinen Fall betrachtet, also keine Zeitunabhängigkeit voraussetzt, dann muss man auch den zweiten Term der rechten Seite der Gleichung (16) betrachten:

$$\epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S d\vec{A} \cdot \vec{E}. \quad (17)$$

Dieser Term heißt **Maxwellscher Verschiebungsstrom**. Er beschreibt, wenn man den Faktor ϵ_0 ausklammert, die zeitliche Änderungsrate des elektrischen Flusses durch die Fläche S . Für eine beliebige Fläche S kann man den elektrischen Fluss allgemein durch das Integral

$$\int_S d\vec{A} \cdot \vec{E}$$

beschreiben.¹¹⁹

Aus der vierten Maxwell-Gleichung in Integralform (16) kann man also folgendes ableiten: Der Maxwellsche Verschiebungsstrom (17) hat auf ein Magnetfeld dieselbe Wirkung wie ein Strom der aus bewegten Ladungen besteht. Die Summe des elektrischen Stromes und der zeitlichen Änderung des elektrischen Flusses durch die Fläche S , legt die magnetische Zirkulation entlang der Kurve ∂S fest.¹²⁰

¹¹⁸vgl. Embacher 2012, Link [12], S.21

¹¹⁹vgl. ebd. S.22

¹²⁰vgl. ebd. S. 22

4.5 Reflexion

Ich hoffe, dass meine Arbeit dabei helfen kann die darin vorkommenden Sätze, Definitionen etc. verständlich zu machen und einen Einblick in die Integralsätze der Analysis ermöglicht. In meiner Arbeit habe ich beim Integralsatz von Stokes eine abgeschwächte Version verwendet, also eine Version welche nur unter bestimmten Voraussetzungen gilt. Es gibt auch noch den allgemeinen Satz von Stokes, der bereits unter schwächeren Voraussetzungen gilt. Er lautet wie folgt:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$$

Dabei ist A ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$ -Form in einer Umgebung von A .

Auf diesen Satz möchte ich in dieser Arbeit nicht genauer eingehen, aber es ist wichtig zu wissen, dass die Integralsätze, die ich in meiner Arbeit dargestellt habe (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung, Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^3 , Integralsatz von Stokes) Spezialfälle des allgemeinen Satzes von Stokes sind.

Man hat anhand der ausgewählten Beispiele gesehen, dass die behandelten Integralsätze den Rechenaufwand minimieren können und somit ein wichtiges Werkzeug in der Analysis sind. Aber auch in anderen naturwissenschaftlichen Bereichen, wie zum Beispiel in der Physik, finden sie Anwendung.

Als ich mit den Recherchen zu meiner Arbeit begonnen habe, wollte ich zusätzlich zum mathematischen Teil einen Schulbezug herstellen. Es war mir von Anfang an klar, dass Integralsätze kein Thema für den Regelunterricht sind, deshalb wollte ich den Schulbezug auf Naturwissenschaftlichen Schulzweigen oder Mathe-Förderkurse aufbauen. Ich habe aber dann schnell festgestellt, dass die Mathematik hinter diesem Thema weit über das was man mit dem Schulstoff machen kann hinausgeht.

Deshalb habe ich mich dann doch darauf fokussiert die Arbeit für Menschen mit gewissen mathematischen Grundvoraussetzungen zu schreiben, d.h. Mathematikkenntnisse wie man sie beispielsweise nach dem Abschluss einer HTL hat.

Ich persönlich habe während dem Schreiben dieser Arbeit noch viel an mathematischen Kenntnissen dazugewonnen und einen tieferen Einblick in das Gebiet der Analysis, insbesondere der Vektoranalysis, bekommen.

5 Literatur und Referenzen

Bär, C. (2010). *Elementare Differential-Geometrie* (2. Auflage). Berlin, New York: Walter de Gruyter GmbH & Co.KG.

Forster, O. (2012). *Analysis 3: Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im \mathbb{R}^n und Anwendungen* (7.Auflage). Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, Springer Fachmedien.

Heuser, H. (2008). *Lehrbuch der Analysis Teil 2* (14. Auflage). Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag, GWV Fachverlage GmbH.

Kirchgassner, K. et al.(2013). *Vektoranalysis für Dummies* (1.Auflage). Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen für LAK. Abgerufen am 17. März 2015 von http://www.mat.univie.ac.at/~stein/lehre/SoSem13/VoRAimukAieVfLAK_2013-06-28.pdf

Link [2] Hörmann, G. (2008/2009). Vorlesung: Modul Analysis. Abgerufen am 20. Mrz 2015 von http://www.mat.univie.ac.at/~gue/lehre/0809an/modul_analysis.pdf

Link [3] Abgerufen am 17. März 2015 von <https://www.youtube.com/watch?v=y-fcdeiSXUc>

Link [4] Abgerufen am 30. März 2015 von <http://www.math.uni-frankfurt.de/~ferebee/analina0506/Vorlesung12b.pdf>

Link [5] Abgerufen am 30. März 2015 von http://de.wikiversity.org/wiki/Ebene_algebraische_Kurven/Kartesisches_Blatt/Beispiel

Link [6] Mosch, C. (2006). Kurvenintegrale. Abgerufen am 22. März 2015 von <http://www.uni-ulm.de/~cmosch/lehre-kurse/uebung-ss2006-mathe2-molmed-biochem/uebung-ss2006-mathe2-molmed-biochem-kurvenintegrale.pdf>

Link [7] Abgerufen am 17. März 2015 von
<https://www.youtube.com/watch?v=ZoXrQ-slv9s>

Link [8] Abgerufen am 20. März 2015 von
<http://www.virtual-maxim.de/kurvenintegral-1-art-berechnen/>

Link [9] Abgerufen am 20. März 2015 von
<http://www.virtual-maxim.de/kurvenintegral-2-art-berechnen/>

Link [10] Steinbauer, R. (2012/2013). Vorlesung: Analysis in einer Variablen für LAK.
Abgerufen am 17. März 2015 von
http://www.mat.univie.ac.at/~stein/lehre/WS1213/AieVfLAK_Vo_2013-02-08.pdf

Link [11] Abgerufen am 5. April 2015 von
<http://www.math.tugraz.at/~lichtenegger/intsatz.pdf>

Link [12] Embacher, F. (2012). Die Maxwellgleichungen. Abgerufen am 15. April 2015 von
<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/L1/ss2012/Maxwellgleichungen.pdf>

Abbildungsverzeichnis

1	Kreis aus Bsp.2	9
2	Schraubenlinie aus Bsp.3	10
3	Landschaft aus Bsp.4	11
4	Höhenschnittlinien der Landschaft aus Bsp.4	12
5	Vektorfeld $v : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$	12
6	Positionsvektorfeld w	13
7	Strömung von Wasser durch einen Körper mit Volumen V und Oberfläche S	18
8	Bestimmung des Tangentenvektors an eine Kurve	20
9	Kartesisches Blatt	22
10	Weg γ von p nach g	24
11	Schaubild der gefahrenen Strecke $r(x)$	26
12	Grafische Darstellung der Integration über einer Geschwindigkeitskurve	27
13	Verhältnis von der Geschwindigkeit zur Zeit x	28
14	Skalarfeld $f(x, y)$ und die Kurve $\vec{\gamma}(t)$	32
15	Schaubild des Vektorfelds $f(x, y)$ und des Weges $\vec{\gamma}(t)$	34
16	Schaubild des Vektorfelds $\vec{w}_1(\vec{x})$	36
17	Schaubild des Vektorfelds $\vec{w}_2(\vec{x})$ in der $x_1 - x_2$ -Ebene	37
18	Zur Konstruktion des Vektorfelds \vec{w}_2	39
19	Schaubild des Vektorfelds $\vec{w}_3(\vec{x})$	40
20	Überblick zu den Integrierbarkeitsbedingungen	43
21	Bestimmung einer Stammfunktion mithilfe der Integrierbarkeitsbedingungen	44
22	Gleichseitiges Dreieck in Bsp.17	47
23	BV -Normalbereich bzgl. der x -Achse	51
24	BV -Normalbereich bzgl. der y -Achse	53
25	Einheitswürfel	56
26	Halbes Ellipsoid S mit Randkurve ∂S und Winkel χ	64

Abb.1: Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen für LAK. S. 123

Abb.2: Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen für LAK. S.124

Abb.3: Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen für LAK. S.124

Abb.4: Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen für LAK. S.125

Abb. 5: Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen für LAK. S.126

Abb.6: Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen für LAK. S.126

Abb.7: Kirchgassner &Schreck 2013, S.48

Abb.8: Kirchgassner &Schreck 2013, S.54

Abb.9: Link [5]

http://de.wikiversity.org/wiki/Ebene_algebraische_Kurven/Kartesisches_Blatt/Beispiel

Abb.10: Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen fr LAK. S.179

Abb.11: vgl. Link [7] <https://www.youtube.com/watch?v=ZoXrQ-slv9s>

Abb.12: vgl. Link [7] <https://www.youtube.com/watch?v=ZoXrQ-slv9s>

Abb.13: vgl. Link [7] <https://www.youtube.com/watch?v=ZoXrQ-slv9s>

Abb.14: Link [8] <http://www.virtual-maxim.de/kurvenintegral-1-art-berechnen/>

Abb.15: Link [9] <http://www.virtual-maxim.de/kurvenintegral-2-art-berechnen/>

Abb.16: Kirchgassner &Schreck 2013, S.97

Abb.17: Kirchgassner &Schreck 2013, S.98

Abb.18: Kirchgassner &Schreck 2013, S.102

Abb.19: Kirchgassner &Schreck 2013, S.104

Abb.20: vgl. Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen für LAK. S.196

Abb.21: vgl. Link [1] Steinbauer, R. (2013). Vorlesung: Reelle Analysis in einer und komplexe Analysis in mehreren Variablen für LAK. S.196

Abb.22: Kirchgassner &Schreck 2013, S.135

Abb.23: Heuser 2008, S.496

Abb.24: Heuser 2008, S.498

Abb.25: Link [11] <http://www.math.tugraz.at/~lichtenegger/intsatz.pdf> S.3

Abb.26: Kirchgassner &Schreck 2013, S.148

6 Lebenslauf

PERSÖNLICHE DATEN

Name, Vorname: Koschina Sarah

Geburtsdatum: 20.09.1991

Geburtsort: Dornbirn

Geschlecht: Weiblich

SCHULBILDUNG

1998-2002 Volksschule Leopold Dornbirn

2002-2005 Bundesgymnasium Dornbirn

2005-2006 Realgymnasium Dornbirn Schoren

2006 2010 Bundesoberstufenrealgymnasium Dornbirn Schoren mit Schwerpunkt Musik

Juni 2010 Matura

STUDIUM

2011 2012 Lehramtsstudium Mathematik, Französisch an der Universität Wien

2011-2015 Lehramtsstudium Mathematik, Psychologie und Philosophie an der Universität Wien

2012 Studium der Mathematik an der Universität Wien (voraussichtliches Ende: Sommer 2016)

TÄTIGKEITEN

Sommerpraktikum bei der Firma Zumtobel Group

Sommerpraktikum bei der Firma Peek & Cloppenburg

Nachhilfetätigkeiten beim Lernquadrat

Seit 2015 Lernbetreuerin an der Volkshochschule (VHS) Wien