universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Vergleich zwischen den Themen im österreichischen und englischen Schulsystem unter besonderer Berücksichtigung der Vorbereitung auf den GCSE“

Verfasserin

Iris Wolf

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 344
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik, UF Englisch
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. i.R. Dr. Günter Hanisch

Inhaltsverzeichnis

1 Abstract

1.1 Deutsch

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Vergleich zwischen den Themen im österreichischen und englischen Schulsystem unter besonderer Berücksichtigung der Vorbereitung auf den GCSE. Bevor auf dieses Thema speziell eingegangen wird, werden das englische Schulsystem, das Curriculum der *Key stage 4* und die Vorgaben für die Vorbereitung auf den *GCSE* näher behandelt. Anschließend werden die Themen im englischen Schulsystem besprochen, welche in Österreich von der 1. Klasse AHS (5. Schulstufe) bis zur 8. Klasse AHS (12. Schulstufe) auftreten. Dabei werden Unterschiede und Ähnlichkeiten herausgearbeitet, die sich bei der Erarbeitung der Stoffgebiete ergeben.
In dieser Arbeit, soll demonstriert werden, dass trotz ähnlicher Stoffgebiete in beiden Ländern, erhebliche Unterschiede in der Erarbeitung der Themen auftreten.

1.2 Englisch

This thesis deals with the comparison between the topics in the Austrian and the English school system concerning the GCSE. In the beginning the English school system, the key stage 4 curriculum and the GCSE curriculum are discussed. Then, the topics of the English school system are examined, which occur in Austria between the 1st class (5th grade) and the 8th class (12th grade). In doing so, differences and similarities while covering the topics are discussed. The aim of this thesis is to demonstrate that while the topics overlap in both countries, significant differences when dealing with them can be found.

2 Einleitung

Der folgende Text beschäftigt sich mit dem Vergleich zahlreicher Stoffgebiete, die im Zuge des *GSCE (General Certificate of Secondary Education)* in einer Schule in London besprochen wurden. Diese Themen werden anschließend mit den entsprechenden Inhalten im österreichischen Lehrplan verglichen.

Da mein Zweitfach Englisch ist, war es naheliegend ein Thema zu bearbeiten, das mit dem englischsprachigen Raum zusammenhängt. Daher beschloss ich mit Personen, die dort leben, Kontakt aufzunehmen, um Unterlagen von Schülerinnen bzw. Schülern zu erhalten. Nach längerer Suche wurden mir Unterlagen eines Schülers, der in London zur Schule ging, zur Verfügung gestellt. Diese Unterlagen stellten die erste Grundlage meiner Arbeit dar.

Um den Vergleich zu ziehen, wird zuerst auf das englische Schulsystem eingegangen, da sich dieses vom österreichischen wesentlich unterscheidet. Ein Vergleich der Stoffgebiete ist trotzdem möglich, da sich in den Lehrplänen zahlreiche Überschneidungen finden. Anschließend wird auf den englischen Lehrplan eingegangen und anhand von diesem werden die Themen bezüglich des *GCSE* besprochen. Hier geht es speziell um das Curriculum der *Key Stage 4*, da dieses den Stoff des 10. und 11. Schuljahres im englischen Schulsystem beschreibt. Dieser Zeitraum ist zugleich die Vorbereitungsphase auf den *GCSE*, der den Abschluss der Schulpflicht in England darstellt.

Die Vorbereitung auf den *GCSE* erstreckt sich über zwei Schuljahre, wobei in dieser Zeit der Stoff besprochen wird, der im österreichischen Schulsystem von der 1. Klasse AHS (5. Schulstufe) bis zur 8. Klasse AHS (12. Schulstufe) aufgeteilt ist. Im Vergleich zum englischen Schulsystem gibt es in Österreich keine Prüfung nach der Pflichtschule, deshalb ist es naheliegend, dass ein Unterschied im Aufbau der Stoffgebiete besteht. In Österreich finden jedoch im Abstand von drei Jahren Bildungsstandardüberprüfungen statt (BIFIE).

Der Stoff zur Vorbereitung auf den *GCSE* ist in verschiedene Zeitspannen unterteilt, wobei immer Themenbereiche aus Numerik *(Number)*, Algebra *(Algebra)*, Geometrie *(Shape)* und Wahrscheinlichkeit/Statistik *(Data)* besprochen wurden. Diese Arbeit vergleicht drei Zeitspannen und die darin durchgenommenen Stoffgebiete. Aufgrund des unterschiedlichen Aufbaues der beiden Schulsysteme sind Divergenzen in Bezug auf den Stoffaufbau, die Themen und die Unterrichtsziele zu erwarten.

Die Unterlagen, die verwenden werden, bestehen aus dem Schulübungsheft des englischen Schülers und dem Schulbuch *GCSE Mathematics Edexcel Modular*. Bezüglich der Themen im österreichischen Schulsystem wurden *Mathefit 1-4*, *Mathematik 5-7* und *Das ist Mathematik 2* und *4* als Vergleichsmaterial verwendet.
Abschließend wird darauf hingewiesen, dass im Vergleich zwischen England und Österreich die entsprechenden Vorgehens- und Schreibweisen berücksichtigt wurden. Dies bezieht sich besonders auf Rechengänge, Beschriftungen von Konstruktionen und Rechenzeichen.

3 Das englische Schulsystem

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit dem englischen Schulsystem, indem die Geschichte des englischen Schulsystems behandelt wird. Anschließend wird auf die Struktur der englischen Bildungseinrichtungen und auf die Sekundarschule eingegangen.

3.1 Historische Eckdaten

Im Vereinigten Königreich (UK) existiert keine alles umfassende Struktur aller Ausbildungsstätten, was sich auf die folgenden Gründe zurückführen lässt: Erstens, verfügen alle Länder, die das *United Kingdom* ausmachen, über ein landeseigenes Bildungswesen. Daher weisen die Schulsysteme von England, Wales, Schottland und Nordirland einige Unterschiede auf. Zweitens, entwickelte sich durch eine lokale Kontrolle eine Vielfalt im Angebot. Drittens, resultierte aus der Eigenständigkeit in Bildungsangelegenheiten ein mannigfaltiges Angebot. Im folgenden Text wird lediglich auf das englische Schulsystem Bezug genommen, da sich jene von Schottland und Nordirland in großem Maß davon unterscheiden. Das walisische Schulsystem gleicht dem englischen, jedoch nicht zur Gänze. In England und Wales sind die lokalen Schulbehörden, so genannte *local education authorities* oder *LEAs*, für die Bildungseinrichtungen zuständig. Ihre Gründung war eine Folge des Bildungsgesetzes *(Education Act)*, welches im Jahr 1902 verabschiedet wurde. Seitdem veränderten sich die *LEAs* bezüglich ihrer Form und ihrer Anzahl. Sie überließen es den Schulen in mehreren Gebieten autonom zu arbeiten. Ein Beispiel dafür ist, dass bis zum Bildungsreformgesetz von 1988, dem *Education Reform Act*, der Schulleiter und der Schulverwaltungsrat die verschiedenen Gegenstände, das Ausmaß und die Art des Unterrichts bestimmten (Phillips 2002: 115).

Im Bildungsgesetz von 1944 wurde festgelegt, dass die lokalen Schulbehörden den weltlichen Unterricht kontrollieren, wobei „die gemeinsame Andacht am Anfang des Schultages und der Religionsunterricht“ (ebenda: 115) beibehalten werden mussten (ebenda: 115). Dieses Gesetz wird *Butler Education Act* genannt (Schoolswork 2007: 1). Jedoch kamen die Behörden ihrer Kontrollaufgabe nicht nach, sondern gaben den Leitern der Schulen und dem Verwaltungsrat die Freiheit das Curriculum selbst zu gestalten (Phillips 2002: 115f).

Dies ist der Grund warum Staatsbedienstete im Bildungsministerium den Begriff „unterstütze Schulen“, *maintained schools*, anstatt „staatliche Schulen“, *state schools*, verwenden sollten. Insbesondere ist der Bildungsminister in England für das Bildungswesen zuständig (ebenda: 115f).
Neben den beschriebenen, existieren eine Vielzahl an privaten Schulen. In England werden Privatschulen von ungefähr 7% aller Schülerinnen und Schüler besucht, deren Eltern „zur Elite der vermögenden und einflussreichsten Führungspersonen“ (ebenda: 116) zählen (ebenda: 116).
Das allgemeine Schulsystem besteht in England seit 1870, wobei die Kontrolle des Staates vom Volk misstrauisch betrachtet wurde. Die vorherrschende Meinung war, „dass die Kirchen und die lokalen Behörden für die Schulbildung der Kinder zuständig sein sollten.“ (Ebenda: 116) Erst im Jahr 1944 wurde ein Bildungsgesetz erlassen, welches die lokalen Behörden für die kirchlichen Schulen zuständig machte. Außerdem wurde angenommen, dass drei Varianten der Intelligenz existieren, weshalb drei Sekundarschultypen in Betracht gezogen wurden. Dieses Modell wurde bald wieder verworfen. Im Jahr 1965 bat Bildungsminister Anthony Crosland die lokalen Schulbehörden um eine Orientierung am Beispiel der Gesamtschule. Er forderte, dass das System auf lediglich einen Sekundarschultyp reduziert werden sollte. Da sich einige lokale Schulbehörden weigerten dieser Bitte nachzukommen, gibt es heute noch „*Grammar Schools* (Gymnasien), *Technical Schools* (Technische Schulen) und *Secondary Modern Schools* (Hauptschulen).“ (Ebenda: 116) Jedoch wird die Gesamtschule, die *Comprehensive School*, von einer Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler im Sekundarschulbereich besucht. Schulpflichtig sind alle Kinder bzw. Jugendlichen im Alter von 5 bis 16 Jahren (ebenda: 116f). Seit März 2000 gibt es so genannte *Academies*. Diese werden staatlich gefördert und sind unabhängige Schulen. Durch ihre Freiheit haben sie die Möglichkeit die Qualität der Bildung zu erhöhen. *Academies* werden nicht von den *LEAs* kontrolliert, dürfen die Gehälter und Arbeitsbedingungen des Lehrpersonals selbst bestimmen, haben die Möglichkeit den Lehrplan auf ihre Weise zu gestalten und können die Länge des Schuljahres und die Unterrichtszeiten festlegen (UK Gouvernment 2014a: 2).

Der Grund für die Einführung dieser Schulen war der Ersatz von Bildungseinrichtungen, die die Lernenden unzureichend ausbildeten. Sie wurden von externen Sponsoren gegründet und geführt, um eine Änderung im Bildungsgeschehen herbeizuführen. Durch ein Gesetz im *Academies Act* 2010 wurde das *Academies Programme* erweitert, welches alle *Primary Schools*, *Secondary Schools* und andere Schwerpunktschulen ermächtigt eine *Academy* zu werden. Die erste Schule dieser Art öffnete im September 2010. Da solche Bildungsstätten keinen Sponsor haben, arbeiten sie mit Schulen mit niedrigem Ausbildungsstandard zusammen. Dadurch wird das Niveau genau solcher Schulen gehoben (ebenda: 2).
Eine Folge des *Education Reform Act* von 1988 war die Einführung eines nationalen Curriculums, welches 1992 eingeführt wurde (Schoolswork 2007: 1). Seitdem existieren für England und Wales auch neue Sekundarschultypen. Dadurch wurde es Schulen ermöglicht sich der Kontrolle der lokalen Schulbehörden zu entziehen, jedoch mussten sie gewisse Voraussetzungen erfüllen. Des Weiteren erfolgte die Einführung eines gemeinsamen Systems für den Schulabschluss mit 16 Jahren, der *General Certificate of Secondary Education (GCSE)*. Hier können die Schülerinnen und Schüler entscheiden in wie vielen Unterrichtsgegenständen sie den Abschluss machen möchten (Phillips 2002: 117). Im Februar 2005 wurde vom damaligen *Department of Education and Skills* eine Änderung des Lehrplans für die 14- bis 19-jährigen verlautbart. Das Ziel war, berufliche Qualifikationen als eine wertvolle Alternative zu akademischen anzusehen. Die Umgestaltung erfolgte 2002 im Zuge der Einführung von acht beruflichen *GCSEs*. Diese Vorschläge befinden sich noch in der Entwicklungsphase, jedoch scheint es, dass sich dadurch zwei Wege für die Lernenden ergeben: Entweder absolvieren sie eine Reihe von *GCSEs*, oder wählen einige davon ab und erwerben ein Diplom. Dabei können Hauptgegenstände, wie Mathematik, Englisch und ICT *(Information and Communication Technology)* nicht abgewählt werden. Durch die Diplome wird den Schülerinnen und Schülern mehr Einfluss auf ihr persönliches Lernen gegeben. Unter anderem bekommen sie einen umfassenden Überblick über die Arbeitswelt (Schoolswork 2007: 2).
Insbesondere führen die einzelnen Schulen keine kontinuierliche Leistungsbeurteilung durch, sondern die Lernenden werden automatisch in die nächste Klasse versetzt. Dabei ist ihr schulischer Erfolg nicht ausschlaggebend (Phillips 2002: 117).

3.2 Struktur

Die Schulpflicht beginnt in England, abhängig vom Geburtsdatum der Kinder, zwischen 4 und 5 Jahren. Die Schülerinnen und Schüler beginnen ihre schulische Ausbildung für gewöhnlich in der *Reception Class* im Zuge der *Infant* School. Anschließend besuchen sie die erste Klasse. Diese wird gemäß des Nationalen Curriculums unterrichtet. Der Besuch der *Junior School* erfolgt nach drei weiteren Jahren. Die Schülerinnen und Schüler wechseln auf eine Sekundarschule, wenn sie 11 Jahre alt sind. Der Großteil der Jugendlichen entscheidet sich für den Besuch einer Gesamtschule, welche den lokalen Schulbehörden untersteht. Jedoch gibt es in einigen Teilen Englands auch ein anderes System: die Erste Schule, genannt *First School*, die Mittelschule, die *Middle School*, und die Oberschule, oder *Upper School*. Innerhalb dieses Systems können die Schülerinnen und Schüler, die zwischen 7 und 14 Jahre alt sind, die Schultypen wechseln. Die Mittelschulen umfassen weder den gesamten Primärbereich, noch den Sekundärbereich (Phillips 2002: 118f).

Der überwiegende Teil der Schülerinnen und Schüler bekommt ihre schulische Ausbildung an einer Gesamtschule, an der keine standardisierten Auswahlverfahren existieren. Seit dem Bildungsgesetz von 1980 haben Eltern die Freiheit ihre Kinder in eine Schule ihrer Wahl zu schicken, die sie selbst auswählen. Die Voraussetzung dafür ist jedoch, dass es freie Plätze gibt, welches oft nicht der Fall ist. An den Sekundarschulen, die den lokalen Schulbehörden unterstehen, gibt es keine Aufnahmeprüfungen. Als Auswahlkriterium erhalten sie jedoch Berichte von den Primarschulkräften über den Lernfortschritt der betreffenden Schülerinnen und Schüler (ebenda: 119).

Seitdem das Nationale Curriculum eingeführt wurde, existieren drei veröffentlichte Fassungen. Dabei wurde festgelegt, dass der Lehrplan in vier Schlüsselphasen, so genannte *Key stages*, untereilt ist. Die ersten zwei umfassen die *Infant School* und die *Junior School*, die sich in den Primarschulbereich zusammenfassen lassen. Die *Key stages 3* und *4* umfassen den Sekundarschulbereich. Dieses Curriculum gilt jedoch nur während der Jahre der Schulpflicht und nicht für Privatschulen (ebenda: 119).

Weiters existiert die so genannte *sixth form*. Damit ist die Sekundaroberstufe gemeint, in der sich die Schülerinnen und Schüler spezialisieren, wobei sich die Anzahl ihrer Fächer im letzten Schuljahr meistens auf drei reduziert. Jedoch gab es eine Erweiterung des Lehrplans in der *lower sixth* (ebenda: 119).

Dabei müssen fünf Fächer auf *AS-Niveau* (*Advanced Supplementary*) belegt werden. Diese Änderung resultierte in Verwaltungsproblemen und verstärktem Druck auf Unterrichtende und Lernende, da letztere im Alter von 16 bis 18 anspruchsvolle öffentliche Prüfungen ablegen müssen (ebenda: 119).

Tabelle 1: Englisches Schulsystem (Quelle: Ludgerusschule)

Schulart	Key Stages	Klasse	Alter
Primary	1	1	5
		2	6
	2	3	7
		4	8
		5	9
		6	10
Secondary (Comprehensive School, Grammar School)	3	7	11
		8	12
	4	9	13
		10	14
		11	15
Further Education/ Sixth Form College		lower 6th	16
		upper 6th	17

3.3 Sekundarschule

Die Herausforderung bezüglich der Sekundarschule besteht darin, dass es keine Einigung gibt, ob Unterrichtsgruppen in Gesamtschulen aus heterogenen oder homogenen Lerngruppen, in denen die Schülerinnen und Schüler zwischen 11 und 16 Jahre alt sind, zusammengesetzt werden sollen. Erstere Meinung wird durch externe Personen vertreten. Die gängige Praxis ist jedoch die Lernenden zuerst in leistungsheterogene Lerngruppen einzuteilen, um deren Stärken und Schwächen festzustellen. Nach dieser Phase werden die Schülerinnen und Schüler in leistungsdifferenzierte Gruppen in den entsprechenden Fächern eingeteilt, welche je nach Unterrichtsgegenstand variieren können. Dieses Verfahren stellt die horizontale Differenzierung dar, genannt *Setting*. Die Anwendung der vertikalen Leistungsdifferenzierung, oder *Streaming*, welche sich durch eine fächerübergreifende Zuteilung der Schülerinnen und Schüler in einen A-, B- oder C-Zweig auszeichnet, findet immer weniger Anklang und ist bekannt als Auswahlverfahren der *Grammar Schools*. Die Lehrerinnen und Lehrer in den Gesamtschulen, die moderne Fremdsprachen oder Mathematik unterrichten, ziehen eine frühe Differenzierung der Lernenden vor; jene, die geisteswissenschaftliche Fächer unterrichten, heterogene Unterrichtsgruppen (Phillips 2002: 121f).

Aus verwaltungs- und betreuungstechnischen Gründen erfolgt die Zuteilung der Schülerinnen und Schüler in Tutorgruppen oder allgemeine Klassen, für die eine Betreuungslehrerin bzw. ein Betreuungslehrer die Verantwortung übernimmt. Am Beginn jedes Schultages wird vor versammelter Klasse die Anwesenheit überprüft und Verwaltungsangelegenheiten erledigt. Die Pflichten der Betreuungslehrkräfte sind erstens, eine umfassende Anteilnahme an der Klasse zu zeigen, zweitens, die Elternabende zu organisieren und durchzuführen, drittens, die Lernerfolgsberichte der Schülerinnen und Schüler zu koordinieren und zusammenzustellen und viertens, mit dem leitenden Schulverwaltungsteam in Zusammenhang mit der Betreuung der Lernenden zusammenarbeiten. Die Lehrerinnen und Lehrer im UK stellen eine Vertretung der Eltern dar, was *in loco parentis* genannt wird, und ihre Verpflichtungen übersteigen die Zuständigkeitsbereiche ihrer Kolleginnen und Kollegen in anderen europäischen Schulen (ebenda: 122).

Im Primärbereich ist es nicht vorgesehen eine moderne Fremdsprache und das Unterrichtsfach Staatsbürgerschaft zu unterrichten (seit 2002). Schülerinnen und Schüler wählen vermehrt die Fremdsprache Französisch. Dies ist auf die Geschichte des UK zurückzuführen, aber auch darauf, dass viele Lehrkräfte dieses Fach unterrichten. Zudem wird Deutsch oder Spanisch als Fremdsprache gewählt. Die Schulen haben bezüglich des Sprachenangebots lediglich die Auflage Sprachen anzubieten, die in den Mitgliedstaaten der europäischen Union und von ethnischen Minderheiten im UK gesprochen werden. Die Beurteilung der Leistung der Schülerinnen und Schüler ist weder kontinuierlich noch standardisiert. Die Ausstellung der Zeugnisse wird von den einzelnen Schulen selbstständig erledigt. Wenn die Lernenden 16 und 18 Jahre alt sind, erfolgt die Ablegung von öffentlichen externen Prüfungen. Dies stellt die Grundlage für die Erstellung der Abschlusszeugnisse dar. Die einzelnen Schulen geben keine Schulabgangszeugnisse aus, jedoch erstellen manche Ausbildungsstätten unterschiedliche Leistungsbescheinigungen, die nicht von Gesetzes wegen her vorgeschrieben sind. Vor allem für Schülerinnen und Schüler, die ihre schulische Ausbildung nicht abschließen und sich für Anstellungen bewerben, sind diese Unterlagen eine Hilfestellung (ebenda: 122).

4 Lehrpläne

4.1 Der Lehrplan im englischen Schulsystem

Wie bereits erwähnt, ist das Nationale Curriculum in England in vier *Key stages* unterteilt. Da in dieser Arbeit nur das 10. und 11. Schuljahr behandelt werden, bezieht sich der folgende Abschnitt nur auf die *Key stage 4*.

Der Lehrplan beginnt mit einem Inhaltsverzeichnis, das die Leserin bzw. den Leser über den nachfolgenden Inhalt informiert (UK Gouvernment 2014b: 2).

Der erste Punkt beschäftigt sich mit dem Zweck der Mathematik, der die Lösung von Problemen des täglichen Lebens darstellt. Dieser Vorgang hat sich seit Jahrhunderten nicht verändert (ebenda: 3).

Danach wird darauf eingegangen, inwiefern die Mathematik im täglichen Leben benötigt wird. Des Weiteren wird die Verbindung zur Ausbildung in der Schule hergestellt, indem kurz beschrieben wird, was den Lernenden vermittelt werden soll (ebenda: 3).

Daraufhin werden die Ziele, die mit dem Curriculum für Mathematik verfolgt werden, erklärt. Diese sind: Geläufigkeit, mathematisches Ziehen von Schlüssen und Problemlösen. Ein wichtiger Faktor der *Key stage 4* ist es zu Erkennen, dass die Mathematik eine Wissenschaft ist, die aus einzelnen, eng vernetzten Teilbereichen besteht. Zudem sollen die Schülerinnen und Schüler an ihr Wissen aus der *Key stage 3* anknüpfen, dieses erweitern und es in anderen Gegenständen und Finanzkontexten anwenden. Die Lernenden sollen gemeinsam in der Bearbeitung des Stoffes vorankommen. Dabei hat die Lehrperson die Möglichkeit den Stoff auf das Niveau und die Lerngeschwindigkeit der Schülerinnen und Schüler anzupassen.

Diejenigen Schülerinnen und Schüler, die ein Thema gut beherrschen, sollen mit herausfordernden Beispielen konfrontiert werden und jene, die bereits besprochene Kapitel nicht in ihrer Gänze verstanden haben, sollen ihr Wissen mit zusätzlichem Training festigen. Das Festigen der Inhalte sollte aber noch vor Beginn eines neuen Themas erfolgen. Der Lehrplan legt auch den Kernstoff fest, den alle Lernenden können müssen und enthält Vorschläge welche Themen als Vertiefung geeignet sind. Ferner gilt der Stoff der *Key stage 3* und der *Key stage 4* als Grundlage für den *GCSE* in Mathematik (ebenda: 3f).

Angepasst an den Lernfortschritt sollen die Schülerinnen und Schüler abschließend in der Lage sein, den gesamten Stoff zu beherrschen (ebenda: 3f).
Die nächsten beiden Punkte befassen sich mit dem Einsatz von technischen Hilfsmitteln und den Umgang mit der richtigen mathematischen Ausdrucksweise. Ersterer legt Wert darauf, dass Taschenrechner keinesfalls benutzt werden sollten, um Kopfrechnen und schriftliches Rechnen zu ersetzen. Hier wird es den Lehrkräften überlassen, wann technische Hilfsmittel benutzt werden. Bezüglich der Sprache wird darauf hingewiesen, dass der gesamte Lehrplan für Mathematik das gesprochene Wort als besonders wichtig erachtet. Die Qualität und die Art der Sprache, die die Lernenden hören, tragen erheblich zur Entwicklung des mathematischen Vokabulars und zur Präsentation mathematischer Begründungen, Argumente und Beweise bei. In diesem Prozess sind die Schülerinnen und Schüler auf die Hilfe der Lehrkräfte angewiesen. Durch diese wird sichergestellt, dass die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit bekommen an internen Diskussionen teilzunehmen, wodurch sie lernen die mathematische Sprache zu verstehen und in weiterer Folge anwenden zu können. Ferner wird darauf hingewiesen, dass der Stoff, der im Lehrplan in eckigen Klammern und mit dem Schriftzug *non-statutatory* gekennzeichnet ist, nicht per Gesetz als zu unterrichtender Stoff vorgeschrieben ist (ebenda: 4).

Nach dieser allgemeinen Einführung geht das Dokument noch einmal genauer auf das Erlernen der Faktoren Geläufigkeit, mathematisches Ziehen von Schlüssen und Problemlösen ein.

Bezüglich des erstgenannten Punktes sollen die Lernenden ihre numerischen und mathematischen Fertigkeiten, die sie in der *Key stage 3* erworben haben, festigen und ihr Verständnis des Zahlensystems erweitern. Dazu zählen Potenzen, Wurzeln und wahlweise Potenzen mit rationalen Exponenten. Des Weiteren sollen die Schülerinnen und Schüler erlernen angemessene Rechenstrategien auszuwählen und anzuwenden, um immer komplexer werdende Probleme zu lösen. Im Speziellen sind damit exakte Berechnungen mit Vielfachen von π, wahlweise mit Wurzeln, deren Ergebnisse irrational sind, sowie Gleitkommadarstellung, Anwendung und Interpretation der Genauigkeit von Grenzen gemeint. Außerdem sollen die Lernenden ihre algebraischen Fähigkeiten aus der *Key stage 3* und ihr Verständnis von algebraischer Vereinfachung und Handhabung festigen (ebenda: 5).

Der Stoffumfang umfasst quadratische Ausdrücke, wahlweise Wurzeln, deren Ergebnisse irrational sind, und Hauptnenner. Dazu sollen die Schülerinnen und Schüler die Geläufigkeit bezüglich Ausdrücken und Gleichungen aus der *Key stage 3* ausbauen, was quadratische Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen miteinbezieht. Des Weiteren sollen sie ohne Schwierigkeiten zwischen verschiedenen numerischen, algebraischen, grafischen und schematischen Darstellungen wechseln können in Bezug auf lineare und quadratische Funktionen, sowie Kehrwert, wahlweise Exponential- und trigonometrische Funktionen. Überdies sollen die Lernenden die mathematische Sprache und mathematischen Eigenschaften präzise anwenden können (ebenda: 5).

Bezüglich des Ziehens von Schlüssen in der Mathematik sollen die Lernenden beim Arbeiten mit Maßen und Geometrie, sowie beim Arbeiten mit algebraischen und grafischen proportionalen Relationen, ihr Wissen über Verhältnis und Anteil, einschließlich trigonometrischen Verhältnissen, erweitern und formell bekräftigen. Ferner sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten Variablen zu identifizieren und Beziehungen zwischen Variablen grafisch und algebraisch auszudrücken ausbauen. Darüber hinaus sollen sie lernen Vermutungen bezüglich Verallgemeinerungen, die einem Muster oder einer Beziehung unterliegen, aufzustellen bzw. zu überprüfen und Beweise und Gegenbeispiele zu finden. Außerdem sollen sie beginnen Algebra anzuwenden, um Argumente zu finden und diese zu untermauern. Wahlweise gilt dies auch für Beweise. Ferner sollen die Schülerinnen und Schüler in Geometrie, Numerik und Algebra deduktiv schlussfolgern, auch mithilfe von geometrischen Konstruktionen. Des Weiteren sollen sie lernen zu interpretieren, wenn die Struktur eines numerischen Problems zusätzliche additive, multiplikative oder proportionale Schlüsse zu ziehen erfordert. Die Lernenden sollen lernen ihre Argumente formal auszudrücken. Die Lernenden sollen selbstständig erforschen inwiefern man aus statistischen Problemen und Wahrscheinlichkeitsproblemen Schlüsse ziehen kann, wobei ihre Argumente formal ausgedrückt werden sollen. Des Weiteren sollen sie die Gültigkeit eines Arguments und die Genauigkeit einer gegebenen Art und Weise Information zu präsentieren einschätzen können (ebenda: 5f).

Bezüglich des Punktes Problemlösen sollen die Schülerinnen und Schüler lernen sich mathematisches Wissen anzueignen, teilweise durch Problemlösen und teilweise durch Bewertung der Ergebnisse (ebenda: 6).
Dazu zählen auch mehrstufige Probleme. Darüber hinaus sollen die Lernenden beginnen formelles mathematisches Wissen anzuwenden, um Probleme zu interpretieren und zu lösen. Dies gilt auch für finanzielle Kontexte. Des Weiteren sollen sie lernen Verbindungen zwischen verschiedenen Teilbereichen der Mathematik herzustellen und anzuwenden, um Probleme zu lösen. Darüber hinaus sollen die Schülerinnen und Schüler mithilfe einer Reihe von mathematischen Darstellungen Situationen mathematisch modellieren und die Ergebnisse ausdrücken, sowie dabei widerspiegeln wie ihre Lösungen durch die Veränderungen beeinträchtigt wurden. Zudem sollen sie angemessene Konzepte, Methoden und Techniken auswählen, um diese auf unvertraute und nicht routinemäßige Probleme anzuwenden, und ihre Lösungen im Kontext des gestellten Problems interpretieren (ebenda: 6).

Der folgende Teil beschäftigt sich mit dem Inhalt des Gegenstandes Mathematik. Die Themengebiete sind: Numerik, Algebra, Verhältnis, Anteil und Änderungsrate, Geometrie und Maße, sowie Wahrscheinlichkeit und Statistik.

Im Bereich Numerik wird an den Stoff aus der *Key Stage 3* angeknüpft, der jedoch noch gefestigt werden muss. Zudem sollen die Schülerinnen und Schüler eine systematische Aufzählungsstrategie entwickeln, wahlweise können sie dazu auch die Produktregel zum Zählen verwenden. Ein weiterer Vorschlag bezüglich der Erweiterung des Stoffgebietes ist das Schätzen von Potenzen und Wurzeln einer gegebenen positiven Zahl. Darüber hinaus sollen die Lernenden mit Wurzeln und mit ganzen Zahlen, wahlweise mit Bruchzahlen, rechnen. Ein weiterer Punkt ist das Rechnen mit Brüchen, wahlweise mit Wurzeln, deren Ergebnisse irrational sind, und Vielfachen von π. Wahlweise können Ausdrücke durch partielles Wurzelziehen vereinfacht werden. Ein Beispiel dafür ist: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$. Ferner kann das Rationalmachen des Nenners unterrichtet werden. Des Weiteren sollen die Schülerinnen und Schüler lernen die Gleitkommadarstellung $A \times 10^n$ anzuwenden, wobei $1 \leq A < 10$ und *n* eine ganze Zahl ist (ebenda: 7).

Wahlweise können sie lernen periodische Dezimalzahlen in ihre entsprechende Bruchdarstellung umzuwandeln, sowie die Umkehrung dieser Operation. Ferner sollen Brüche in Verhältnisfragen identifizieret werden, sodass damit gearbeitet werden kann. Des Weiteren sollen die Lernenden Genauigkeitsgrenzen beim Runden oder Abschneiden interpretieren und anwenden können. Ein Vorschlag zur Stofferweiterung ist das Arbeiten mit oberen und unteren Schranken (ebenda: 7).

Bezüglich Algebra soll das Wissen aus der *Key stage 3* gefestigt werden. Darüber hinaus wird erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler in den folgenden zwei Jahren algebraische Ausdrücke vereinfachen und bearbeiten. Darin inbegriffen sind Wurzeln, deren Ergebnisse irrational sind, und wahlweise Hauptnenner. Genauer ist damit gemeint, dass sie erstens quadratische Ausdrücke der Form von $x^2 + bx + c$ in Faktoren zerlegen, einschließlich dem Arbeiten mit der Binomischen Formel $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. Wahlweise kann unterrichtet werden, wie quadratische Ausdrücke der Form $ax^2 + bx + c$ in Faktoren zerlegt und Ausdrücke wie Summen, Produkte und Potenzen mit ihren Rechenregeln vereinfacht werden. Zudem sollen die Lernenden den Unterschied zwischen einer Gleichung und einer Identität erkennen, mathematisch argumentieren um die Äquivalenz mathematischer Ausdrücke zu zeigen und Algebra verwenden um Argumente, wahlweise Beweise, zu untermauern und aufzubauen. Des Weiteren wird erwartet, dass einfache Ausdrücke als Funktionen mit Input und Output interpretiert werden. Bei einer Funktion, wie beispielsweise $f(x) = x^3$, ist x der Input und x^3 der Output. Wahlweise kann auch der umgekehrte Prozess, die inverse Funktion, und die Folge von zwei Funktionen als eine zusammengesetzte Funktion interpretiert werden. Darüber hinaus sollen die Lernenden die Hauptform der Geradengleichung $y = mx + c$ verwenden, um parallele, wahlweise zueinander normale, Geraden zu erkennen. Des Weiteren soll die Geradengleichung einer Geraden mithilfe zweier gegebener Punkte oder durch einen Punkt mit einer bestimmten Steigung gefunden werden. Ferner soll unterrichtet werden, wie Nullstellen, Schnittpunkte und der Scheitelpunkt von quadratischen Funktionen zu erkennen und grafisch zu interpretieren sind und wie Wurzeln algebraisch hergeleitet werden können. Wahlweise kann der Scheitelpunkt verwendet werden, um ein Quadrat zu vervollständigen (ebenda: 7f).

Ferner sollen die Schülerinnen und Schüler Graphen von linearen Funktionen, quadratischen Funktionen, einfachen Kubikfunktionen und der inversen Funktion $y = \frac{1}{x}$, mit $x \neq 0$, erkennen und interpretieren können. Wahlweise kann dies auf die Exponentialfunktion $y = k^x$ für positive k und trigonometrische Funktionen (mit Angaben in Grad) $y = sinx,\ y = cosx,\ y = tanx$ für Winkel jeder Größe ausgeweitet werden (Ebenda: 7f).

Ein weiterer Vorschlag zur Erweiterung des Stoffes ist das Skizzieren von Parallelverschiebungen und Spiegelungen eines Graphen einer gegebenen Funktion. Darüber hinaus sollen die Lernenden Graphen, einschließlich Graphen von Umkehrfunktionen und wahlweise Exponentialfunktionen, und Graphen von unregelmäßigen Funktionen in realen Kontexten grafisch darstellen und interpretieren können, um näherungsweise Lösungen zu folgenden Problemen zu finden. Diese sind: einfache kinematische Probleme bezüglich Entfernung, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Ein weiterer Erweiterungsvorschlag des Stoffes ist das Berechnen und Schätzen von Steigungen von Graphen und Flächen unter den Graphen. Darin inbegriffen sind quadratische und andere nicht-lineare Graphen. Zudem können die Schülerinnen und Schüler lernen Ergebnisse von Weg-Zeit Diagrammen, Geschwindigkeit-Zeit Diagrammen und Graphen aus finanziellen Kontexten zu interpretieren. Ferner kann unterrichtet werden, wie die Kreisgleichung mit Mittelpunkt im Ursprung erkannt und angewandt und wie die Tangentengleichung an den Kreis in einem gegebenen Punkt aufgestellt werden kann. Des Weiteren sollen die Lernenden quadratische Gleichungen, wahlweise auch solche, die eine Umordnung erfordern, algebraisch durch Zerlegen in Faktoren lösen. Zudem kann unterrichtet werden, wie man diese mit Ergänzung auf ein Quadrat oder mit der quadratischen Lösungsformel löst. Des Weiteren sollen die Lernenden mithilfe eines Graphen näherungsweise Lösungen finden. Ferner sollen zwei Gleichungssysteme in zwei Variablen (linear/linear oder wahlweise linear/quadratisch) gelöst und näherungsweise Lösungen mithilfe des Graphen gefunden werden. Ein Stofferweiterungsvorschlag ist das Finden von näherungsweisen Lösungen von numerischen Gleichungen mithilfe von Iteration. Ferner sollen die Schülerinnen und Schüler einfache Situationen und Prozeduren in algebraische Ausdrücke oder Formeln umwandeln, eine Gleichung oder ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen herleiten, Gleichungen lösen und deren Lösungen interpretieren können (ebenda: 7f).

Zudem sollen sie lineare Ungleichungen in einer Variablen, wahlweise in zwei Variablen und quadratische Ungleichungen in einer Variablen, lösen und diese Lösungen auf einem Zahlenstrahl präsentieren können. Wahlweise kann die Mengenschreibweise oder ein Graph dazu verwendet werden. Des Weiteren sollen die Schülerinnen und Schüler Folgen von Dreieckszahlen, Quadratzahlen und Kubikzahlen, einfachen arithmetischen Folgen, Fibonacci Folgen, quadratischen Folgen und einfachen geometrischen Folgen (mit r^n, wobei n eine ganze Zahl und r eine positive rationale oder irrationale Zahl ist) berechnen. Wahlweise können dazu auch andere Folgen verwendet werden. Ferner sollen die Lernenden Ausdrücke erschließen, um den n-ten Term einer linearen, wahlweise einer quadratischen Folge, zu berechnen (ebenda: 7f).

Bezüglich Verhältnis, Anteil und Änderungsrate sollen die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen aus der *Key stage 3* festigen und zusätzlich lernen, Längen, Flächen und Volumina zu vergleichen, wobei sie diese als Verhältnisse und/ oder als Skalenfaktor anschreiben. Zudem sollen sie Verbindungen zu Ähnlichkeit, einschließlich trigonometrischen Verhältnissen, herstellen. Ferner sollen die Lernenden die Umrechnung zwischen Größen wie Geschwindigkeit, Zahlungssatz, Preis, Dichte und Druck in numerischen und algebraischen Kontexten beherrschen. Zudem soll verstanden werden, dass x ist invers proportional zu y, äquivalent zu x ist proportional zu $\frac{1}{y}$ ist und Gleichungen sollen bezüglich direkter und indirekter Proportionalität interpretiert, und nach Wahl, aufgestellt werden. Ferner sollen die Schülerinnen und Schüler lernen die Steigung einer Geraden als Änderungsrate zu interpretieren und Graphen, die direkte und indirekte Proportionalität darstellen, zu erkennen und zu interpretieren. Ein Erweiterungsvorschlag des Stoffes ist das Interpretieren der Steigung an einem Punkt einer Kurve als momentane Änderungsrate und die Anwendung von momentaner und mittlerer Änderungsrate (Steigung von Tangente und Sekante) in numerischen, algebraischen und grafischen Kontexten. Zudem sollen die Lernenden Wachstums- und Zerfallsprozesse aufstellen, lösen und deren Lösungen interpretieren können. Darin inbegriffen ist das Rechnen mit Zinseszins und wahlweise mit allgemeinen iterativen Prozessen (ebenda: 9).

Bezüglich Geometrie und Maßen, sollen die Lernenden ihr Wissen aus der *Key stage 3* festigen und zusätzlich lernen gebrochene, wahlweise negative Proportionalitätskonstanten, für ähnliche Figuren zu interpretieren und zu verwenden. Als Erweiterung des Stoffgebietes kann die Beschreibung von Veränderungen und Invarianz, die durch Zusammensetzung von Drehungen, Spiegelungen und Parallelverschiebung zustande kommen, unterrichtet werden. Des Weiteren sollen die Schülerinnen und Schüler Definitionen und Eigenschaften bezüglich des Kreises erkennen und anwenden können. Dazu zählen: Mittelpunkt, Radius, Sekante, Durchmesser, Umfang, Tangente, Kreisbogen, Kreissektor und Kreissegment. Ein Stofferweiterungsvorschlag ist das Unterrichten der Anwendung von Standardkreissätzen (ebenda: 9) (Peripheriewinkelsatz, Satz von Thales, Parallelwinkelsatz, Tangenten stehen im rechten Winkel auf den Radius, an den Kreis gelegte, einander schneidende Tangenten haben denselben Abstand vom Berührpunkt bis zum Schnittpunkt, Sehnentangentenwinkelsatz (*Alternate Segment Theorem)*, Sehnenviereck (*Cyclic Quadrilateral)*, Beziehung zwischen Fläche des Kreissektors und der Bogenlänge (Mathsrevision 2014)) bezüglich Winkel, Radien, Tangenten und Sekanten, sowie deren Überprüfung und Anwendung, um entsprechende Ergebnisse zu verifizieren. Ferner sollen die Lernenden Pläne und Ansichten von dreidimensionalen Figuren konstruieren und interpretieren, sowie mit Winkelmessungen im Uhrzeigersinn arbeiten und diese interpretieren können. Außerdem ist die Berechnung von Bogenlängen, Winkel und Flächen von Kreissektoren gefordert. Zudem sollen die Lernenden Oberflächen und Volumina von Kugeln, Pyramiden, Kegeln und zusammengesetzten Körpern berechnen. Eine weitere Anforderung ist das Anwenden von Kongruenz und Ähnlichkeit, einschließlich dem Herstellen von den Beziehungen zwischen Längen, wahlweise Flächen und Volumina, zwischen ähnlichen Figuren. Zudem sollen die Schülerinnen und Schüler lernen den Satz des Pythagoras und trigonometrische Verhältnisse anzuwenden, um Winkel und Längen zu finden. Dazu werden rechtwinklige Dreiecke, wahlweise allgemeine Dreiecke, verwendet und es wird mit zwei- bzw. dreidimensionalen Figuren gearbeitet. Darüber hinaus sollen die Lernenden die exakten Werte von $sin\theta$ und $cos\theta$ für $\theta = 0°, 30°, 45°, 60°$ und $90°$, bezüglich $tan\theta$ für $\theta = 0°, 30°, 45°$ und $60°$, wissen. Wahlweise können der Sinussatz ($\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$) und der Kosinussatz ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$) zum Finden von unbekannten Längen und Winkeln unterrichtet werden (UK Gouvernment 2014b: 9f).

Ein weiterer Erweiterungsvorschlag ist das Kennen und die Anwendung der Formel $A = \frac{1}{2}ab\ sinC$, um die Fläche, Seiten oder Winkel eines Dreiecks auszurechnen. Des Weiteren sollen die Lernenden Parallelverschiebungen als zweidimensionale Vektoren darstellen. Die letzte Anforderung in dieser Kategorie ist das Anwenden der Addition und der Subtraktion von Vektoren, die Skalarmultiplikation von Vektoren, sowie die grafische und spaltenweise Darstellung von Vektoren. Wahlweise kann die Verwendung von Vektoren zum Konstruieren von geometrischen Argumenten und Beweisen unterrichtet werden (ebenda: 9f).

Bezüglich Wahrscheinlichkeit soll wiederum das Wissen aus der *Key stage 3* gefestigt werden und zudem sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, dass die Wahrscheinlichkeiten einer vollständigen Menge von paarweise unabhängigen Ereignissen gemeinsam Eins ergeben. Außerdem ist die Verwendung eines Wahrscheinlichkeitsmodells gefordert, um Lösungen zukünftiger Ereignisse vorherzusagen und um zu verstehen, dass empirische objektive Stichproben mit wachsendem Stichprobenumfang gegen theoretische Wahrscheinlichkeits-verteilungen streben. Zudem sollen die Lernenden die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen von geordneten und ungeordneten Stichproben berechnen können, einschließlich der Verwendung von Baumdiagrammen und anderen Darstellungen. Zusätzlich sollen die zugrunde liegenden Annahmen gewusst werden. Ein Stofferweiterungsvorschlag ist das Berechnen und Interpretieren von bedingten Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Darstellungen von erwarteten Häufigkeiten durch Tabellen, Baum- und Venn-Diagramme (ebenda: 10).

Bezüglich Statistik soll eine Festigung des Stoffes aus der *Key stage 3* erfolgen. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, Eigenschaften von Grundgesamtheit und Verteilungen aus einer Stichprobe zu entnehmen, ohne dabei die begrenzten Möglichkeiten von Stichprobenerhebungen zu vergessen. Ferner sollen sie Tabellen und Kurvendiagramme für Zeitreihendaten interpretieren und erstellen können. Ein Stofferweiterungsvorschlag ist die Konstruktion und die Interpretation von Diagrammen für gruppierte diskrete und stetige Daten. Damit gemeint sind Histogramme mit gleichen oder unterschiedlichen Klassenintervallen und Graphen von kumulativen Häufigkeiten. Zudem soll das Wissen über ihre entsprechende Anwendung vermittelt werden (ebenda: 10).

Ferner sollen die Lernenden Verteilungen von Datenmengen von univariaten empirischen Verteilungen interpretieren, analysieren und vergleichen können. Dazu zählen erstens, die entsprechende grafische Darstellung diskreter, stetiger und gruppierter Daten, wahlweise Boxplots, und zweitens, entsprechende Maße von zentraler Tendenz, einschließlich Modalwert und Spannweite. Wahlweise können auch Quartile und Streuung besprochen werden. Des Weitern sollen die Schülerinnen und Schüler Statistik anwenden, um eine Grundgesamtheit zu beschreiben. Die letzte Anforderung in dieser Kategorie ist das Anwenden und Interpretieren von Streudiagrammen von bivariaten Daten, das Erkennen von Korrelation und das Wissen, dass sie nicht die Ursache angibt. Zudem sollen die Lernenden schätzungsweise Ausgleichsgeraden zeichnen, Vorhersagen machen und offensichtliche Tendenzen interpolieren und extrapolieren. Dabei darf das Wissen über die Gefahren bei diesem Verfahren nicht vernachlässigt werden (ebenda: 10f).

Mit diesem letzten Punkt endet der Lehrplan für Mathematik für die *Key stage 4*.
Der österreichische Lehrplan wird im Zuge dieser Arbeit nicht im Detail besprochen, da sich der besprochene Stoff von der 1. bis zur 8. Klasse AHS erstreckt.

4.2 Vorgaben für den GCSE

Neben dem Lehrplan für die *Key stage 4* existiert ein eigenes Dokument, das die Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler, die den *GCSE* in Mathematik ablegen, genau definiert. Der Inhalt orientiert sich am *National Curriculum* für die 10. und die 11. Schulstufe, jedoch finden sich darüber hinaus genauere Angaben zum geprüften Stoff. Der folgende Abschnitt beschreibt die Themen, die im Lehrplan nicht erwähnt werden oder im Zuge der Vorbereitung für den *GCSE* nicht verpflichtend sind.

Der Bereich Numerik ist in die Unterpunkte Struktur und Berechnung, Brüche Dezimalzahlen und Prozente, sowie Maße und Genauigkeit unterteilt.

Bezüglich des erstgenannten Themengebietes sollen die Lernenden Ganze Zahlen, Dezimalzahlen und Brüche ordnen und die Symbole $=, \neq, <, >, \leq, \geq$ verwenden. Zudem sollen sie die vier Grundrechnungsarten, einschließlich der offiziellen schriftlichen Methoden, auf Ganze Zahlen, Dezimalzahlen und einfache Brüche (Zähler $>$ Nenner, sowie Zähler $<$ Nenner) und gemischte Zahlen anwenden. Ferner sollen die Schülerinnen und Schüler die Plätze der Zahlen vor und nach dem Komma verstehen und anwenden (z.B. beim Arbeiten mit sehr großen oder sehr kleinen Zahlen und beim Rechnen mit Dezimalzahlen). Darüber hinaus sollen sie Beziehungen zwischen Operationen, einschließlich inverser Operationen (z.B. Kürzen, um Berechnungen und Ausdrücke zu vereinfachen), erkennen und anwenden können. Zusätzlich sollen sie die konventionelle Notation für Vorrangregeln, einschließlich Klammern, Potenzen, Wurzeln und Kehrwert anwenden. Außerdem sollen sie die Konzepte und das Vokabular für Primfaktoren, Faktoren (Nenner), Vielfache, gemeinsame Teiler, größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches, Primfaktorzerlegung, einschließlich Produktnotation und Polynomdivision, anwenden. Eine andere Erweiterung ist die Anwendung von positiven ganzzahligen Potenzen und entsprechenden echten Wurzeln (zweite, dritte Potenz und höher), sowie das Erkennen von Potenzen wie 2, 3, 4 und 5 (UK Gouvernment 2013: 4f).

Unter dem Punkt Brüche, Dezimalzahlen und Prozente gibt es folgende Erweiterungen: das abwechselnde Arbeiten mit exakten Dezimalzahlen und deren entsprechenden Brüchen (wie $3{,}25$ und $\frac{13}{4}$), sowie das Interpretieren von Brüchen und Prozenten als Operatoren (ebenda: 5).

Bezüglich Maßen und Genauigkeit sollen die Lernenden Standardeinheiten von Masse, Länge, Zeit, Geld und andere Maßen (einschließlich Maßen, die aus zwei oder mehreren anderen Maßen bestehen, z.B.: $s = v \cdot t$) anwenden. Dabei sollen vorzugsweise Dezimalzahlen verwendet werden. Darüber hinaus sollen sie Ergebnisse schätzen und Berechnungen unter der Verwendung von Näherung und Schätzung überprüfen. Darin inbegriffen sind Ergebnisse, die mithilfe von technischen Hilfsmitteln berechnet wurden. Zudem ist das Runden von Zahlen und Maßen zu einem angemessenen Grad von Genauigkeit vorgeschrieben (ebenda: 5).

Beispiele dafür sind: das Runden auf eine angegebene Anzahl von Dezimalstellen, sowie signifikante Stellen. Des Weiteren sollen die Lernenden Ungleichungen aufschreiben, um einfache Fehlerintervalle anzugeben, die auf Grund von Abschneiden oder Runden zu Stande kommen (ebenda: 5).

Bezüglich Algebra gibt es die Punkte Darstellung, Vokabular und Handhabung, Graphen, Lösen von Gleichungen und Ungleichungen, sowie Folgen.

Unter den ersten Punkt fallen das Anwenden und das Interpretieren von algebraischer Notation. Damit gemeint sind: ab statt $a \cdot b$, $3y$ statt $y + y + y$ und $3 \cdot y$, a^2 statt $a \cdot a$, a^3 statt $a \cdot a \cdot a$, a^2b statt $a \cdot a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ statt $a:b$ und Koeffizienten, die als Brüche statt Dezimalzahlen geschrieben werden. Zudem sollen die Lernenden numerische Werte in Formeln und Ausdrücke einsetzen, einschließlich wissenschaftlicher Formeln. Des Weiteren sollen sie das Prinzip und das Vokabular von Ausdrücken, Gleichungen, Formeln, Identitäten, Ungleichungen, Termen und Faktoren verstehen und anwenden können. Das Vereinfachen und Verwandeln von algebraischen Ausdrücken wird genauer beschrieben. Das sind: Rechnen mit Termen, Multiplizieren eines einzelnen Terms über eine Klammer, sowie Herausheben des gemeinsamen Teilers und Ausmultiplizieren von Produkten von zwei, wahlweise von mehreren, Binomen. Zudem sollen die Schülerinnen und Schüler übliche mathematischer Formeln verstehen und anwenden, sowie Formeln umformen, um die gefragte Größe auszutauschen (ebenda: 6).

Bezüglich Graphen sollen die Lernenden mit Koordinaten in allen vier Quadranten arbeiten. Außerdem sollen sie Graphen von Gleichungen zeichnen, die einem Liniendiagramm in der Koordinatenebene entsprechen. Darüber hinaus sollen sie Steigungen und Nullstellen von linearen Funktionen grafisch und algebraisch interpretieren können (ebenda: 6f).

Unter dem Punkt Lösen von Gleichungen und Ungleichungen sollen Gleichungen mit einer Unbekannten, die sich auch auf beiden Seiten der Gleichung befinden kann, algebraisch gelöst, sowie Lösungen unter Benützung eines Graphen näherungsweise gefunden werden.

Bezüglich dem Thema Folgen ist das Aufstellen von Termen einer Sequenz einerseits durch das Auffinden der Differenz zwischen den Gliedern einer Sequenz (*term-to term rule*) und andererseits durch das Aufstellen eines Produkts (*position-to-term rule*) (ebenda: 7f).

Bezüglich Verhältnis, Anteil und Änderungsrate sollen die Schülerinnen und Schüler mit zusammenhängenden Standardgrößen (z.B. Zeit, Länge, Fläche, Volumen/Inhalt, Masse) und mit Größen, die aus anderen zusammengesetzt sind (z.B. Geschwindigkeit, Lohnsätze, Preise, Dichte, Druck) ohne Schwierigkeiten in numerischen und algebraischen Kontexten umgehen können. Weiters soll das Anwenden von Skalenfaktoren, Skalendiagrammen und Plänen unterrichtet werden. Darüber hinaus sollen die Lernenden eine Menge als einen Bruch einer anderen ausdrücken, wenn der Bruch kleiner oder größer als 1 ist. Des Weitern sollen sie die Notation für Verhältnisse erlernen, einschließlich Kürzen. Weitere Anforderungen sind: eine gegeben Menge in zwei Teile zu teilen, unter der Berücksichtigung eines gegebenen Teil:Teil- oder Teil:Ganzes-Verhältnisses, die Teilung einer Menge in zwei Teile als Verhältnis auszudrücken und das Verhältnis zu realen Kontexten und Problemen anzuwenden (wie diese, die Umrechnung, Vergleich, Skalierung, Mischung und Konzentration miteinschließen). Darüber hinaus sollen die Lernenden eine multiplikative Beziehung zwischen zwei Mengen als Verhältnis oder als Bruch ausdrücken und Anteile ebenbürtig zu Verhältnissen verstehen und anwenden. Des Weiteren sollen sie Verhältnisse zu Brüchen und linearen Funktionen in Beziehung setzen. Zudem ist die Definition als ‚Anzahl der Teile pro Hundert', das Interpretieren von Prozentsätzen und Änderungen von Prozentsätzen als einen Bruch oder eine Dezimalzahl und das Vielfache zu unterrichten. Zudem sollen die Lernenden eine Menge als den Prozentsatz einer anderen ausdrücken, zwei Mengen mithilfe von Prozentsätzen vergleichen, mit Prozentsätzen arbeiten, die größer als 100 % sind und Probleme lösen, die Änderungen von Prozentsätzen beinhalten. Darin inbegriffen sind der Anstieg und der Abfall von Prozentsätzen, Anfangswertprobleme und die einfache Verzinsung auch in der Finanzmathematik (ebenda: 8).

Ferner sollen die Lernenden Probleme lösen, die direkte und indirekte Proportionalität betreffen, einschließlich grafischen und algebraischen Darstellungen. Zuletzt sollen sie Größen wie Geschwindigkeit, Zahlungsrate, Einheitspreise, Dichte und Druck verwenden (ebenda: 8). Der Punkt, der die Umwandlung zwischen verschiedenen Größen verlangt, wurde ausgelassen.

Bezüglich Geometrie und Maßen gibt es die Unterpunkte: Eigenschaften und Konstruktionen, Maße und Berechnung, sowie Vektoren. Erweiterungen finden sich jedoch nur in den ersten beiden Kategorien.

Unter dem erstem Punkt sollen die Schülerinnen und Schüler folgende gebräuchliche Ausdrücke und Notationen verwenden: Punkte, Geraden, Ecken, Kanten, Ebenen, parallele Geraden, senkrechte Geraden, rechte Winkel, Vielecke, reguläre Vielecke und Vielecke, die sich durch Spiegelung oder Drehung ergeben. Zudem sollen die Lernenden Standardkonventionen bezüglich der Beschriftung und Bezeichnung der Seiten und Winkel von Dreiecken benützen und grafische Darstellungen anhand vorgegebener Werte konstruieren. Darüber hinaus sollen sie Standardzeichnungen mit Zirkel und Lineal anfertigen (Streckensymmetrale eines Geradenabschnitts, Konstruktion einer Geraden im rechten Winkel auf eine andere Gerade von einem/ an einen gegebenen Punkt, Halbieren eines gegebenen Winkels) und diese verwenden um gegebene Figuren zu konstruieren und Ortsprobleme zu lösen. Zudem sollen sie wissen, dass der Normalabstand eines Punktes von einer Gerade der kürzeste Abstand zur Geraden ist. Darüber hinaus sollen die Lernenden die Eigenschaften von Winkeln in einem Punkt, Winkeln an einem Punkt einer Geraden und vertikal gegenüberliegenden Winkeln anwenden können. Außerdem sollen sie Parallelwinkel und übereinstimmende Winkel auf parallelen Geraden verstehen und anwenden können. Auch sollen sie die Winkelsumme in einem Dreieck herleiten und anwenden können (z.B. um auf die Winkelsumme rückzuschließen und sie zu benutzen, um die Winkelsumme in einem beliebigen Vieleck zu bestimmen und, um die Eigenschaften eines regelmäßigen Vieleck herzuleiten). Weitere Vorgaben sind das Herleiten und Anwenden von folgenden Eigenschaften und Begriffen: spezielle Arten von Vierecken, einschließlich Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Trapez, Deltoid, Raute, sowie Dreiecke und andere ebene Figuren. Dabei soll eine angemessene Sprache verwendet werden (ebenda: 9f).

Darüber hinaus sollen den Lernenden die grundlegenden Kongruenzsätze beigebracht werden (SSS, SWS, WSW, SSWg). Weiters sollen die Schülerinnen und Schüler Tatsachen bezüglich Winkeln, Kongruenz von Dreiecken, Ähnlichkeit und Eigenschaften von Vierecken anwenden um Ergebnisse bezüglich Winkeln und Seiten zu erahnen und herzuleiten. Darin inbegriffen sind der Lehrsatz des Pythagoras und dass die Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks gleich groß sind. Auch sollen die Lernenden die Ergebnisse benutzen, um einfache Beweise zu finden. Darüber hinaus soll das Erkennen, Beschreiben und Konstruieren von kongruenten und ähnlichen Figuren, einschließlich ihrer Anwendung im Koordinatensystem, unter Berücksichtigung von Rotation, Spiegelung, Parallelverschiebung und Streckung (darin inbegriffen sind gebrochene und wahlweise negative Skalenfaktoren) unterrichtet werden. Zudem sollen die Lernenden geometrische Probleme im Koordinatensystem lösen und Eigenschaften der Seitenflächen, Oberflächen, Ecken und Eckpunkte von Körpern, wie Würfeln, Quadern, Prismen, Zylindern, Pyramiden, Kegeln und Kugeln erkennen können (ebenda: 9f).

Bezüglich Maßen und Berechnung sollen die Schülerinnen und Schüler Standardmaßeinheiten und zugehörige Prinzipien, wie Länge, Fläche, Volumen/ Füllmenge, Masse, Zeit, Geld, etc. verwenden. Zusätzlich sollen sie Streckenabschnitte und Winkel in geometrischen Figuren messen können, einschließlich des Interpretierens von Plänen, gezeichneten Skalen und dem Umgang mit Winkeln im Uhrzeigersinn. Darüber hinaus sollen die Lernenden folgende Formeln, die sie zum Rechnen benötigen, wissen und anwenden können. Diese sind: Flächen von Dreiecken, Parallelogrammen, Trapezen, sowie Volumina von Quadern und anderen rechtwinkeligen Prismen (einschließlich Zylindern). Zudem sollen sie folgende Formeln wissen: Umfang eines Kreises $(u = 2\pi r = \pi d)$ und Fläche einer Kreises $(A = r^2\pi)$. Weiters sollen sie folgendes berechnen können: Umfang von zweidimensionalen Figuren, einschließlich Kreisen, Flächen von Kreisen und zusammengesetzten Figuren, sowie Oberfläche und Volumen von Kugeln, Pyramiden, Kegeln und zusammengesetzten Körpern (ebenda: 9f).

Bezüglich Wahrscheinlichkeit sollen die Lernenden die Häufigkeit der Ergebnisse von Wahrscheinlichkeitsexperimenten festhalten und diese unter der Verwendung von Tabellen und Häufigkeitsbäumen beschreiben und analysieren können. Des Weiteren sollen sie Konzepte wie Zufälligkeit, Gerechtigkeit und Ähnliches anwenden, um erwartete Ergebnisse von mehreren zukünftigen Experimenten zu berechnen. Außerdem sollen die Schülerinnen und Schüler relative erwartete Häufigkeiten in Beziehung zu theoretischer Wahrscheinlichkeit setzen, unter Verwendung der geeigneten Sprache und der Wahrscheinlichkeitsskala von Null bis Eins. Zudem sollen die Lernenden die Eigenschaft, dass die Wahrscheinlichkeiten einer erschöpfenden Menge von Ergebnissen in Summe Eins ergeben, anwenden können. Überdies sollen sie das systematische Aufzählen von Mengen und Verbindungen von Mengen unter der Verwendung von Tabellen, Rastern, Venn-Diagrammen und Baumdiagrammen beherrschen. Zuletzt sollen sie theoretische Wahrscheinlichkeitsabstände für einfache und kombinierte Experimente mit gleichwahrscheinlichen Ausfällen konstruieren und verwenden können, um theoretische Wahrscheinlichkeiten zu berechnen (ebenda: 11).

Der Themenbereich Statistik entspricht großteils der Beschreibung im Nationalen Curriculum. Lediglich der zweite Unterpunkt wurde bezüglich der grafischen Darstellung ausgebaut. Hier wird zusätzlich gefordert, dass die Schülerinnen und Schüler Tabellen, grafische Darstellungen und Diagramme einschließlich Häufigkeitstabellen, Balkendiagrammen, Tortendiagrammen, Piktogrammen für kategorische Daten und vertikale Balkendiagrammen für ungeordnete diskrete nummerische Daten anwenden (ebenda: 11f).

Danach folgen Benotungskriterien und ein Anhang, der mathematische Formeln enthält (ebenda: 13-16).

5 Vergleich England – Österreich

5.1 Ein Beispiel aus der Praxis

Der folgende Abschnitt beschreibt den Stoff der 10. Schulstufe von Juli bis Februar, der in einer Schule in England unterrichtet wurde. In weiterer Folge wird dieser mit dem entsprechendem Stoff im österreichischen Schulsystem verglichen. Gearbeitet wurde mit den Büchern *GCSE Mathematics Edexcel Modular*, sowie *MatheFit 2-4, Mathematik 5*-7, sowie *Das ist Mathematik 2* und *4*.

Am Beginn der zweijährigen Vorbereitungszeit auf den *GCSE* bekommen die Schülerinnen und Schüler einen Plan, der alle zukünftigen Themen auflistet. Diese Übersicht ist in Numerik *(Number)*, Algebra *(Algebra)*, Geometrie *(Shape)* und Wahrscheinlichkeit/Stochastik *(Data)* unterteilt. Des Weiteren sind genaue Zeitspannen angegeben, in denen die einzelnen Unterkapitel besprochen werden. Die Unterkapitel werden nicht geordnet nach der allgemeinen Einordnung bearbeitet, sondern in aufbauender Reihenfolge. Das Schuljahr wird dazu in acht Schwierigkeitsstufen unterteilt, die in bestimmten Zeitspannen erarbeitet werden sollen. Diese Zeitspannen sind Juli bis Oktober, November und Dezember, Januar und Februar, März und April, Mai, Juni und Juli, September bis Dezember und Januar bis Februar.

Legende zu Tabelle 2:

Number – Algebra – Shape – Data

Numerik – Algebra – Geometrie – Wahrscheinlichkeit/ Stochastik

Tabelle 2 : Arbeitsplan (Schulübungsheft)

Fractions	Brüche	Juli bis Oktober →
Converting into fractions	Umwandeln in Brüche	
Manipulation of algebra	Gleichungen lösen	
Expanding brackets	Klammern ausmultiplizieren	
Factorising	Linearfaktorzerlegung	
Algebraic fractions	Bruchterme	
Manipulating polynomials	Arbeiten mit Polynomen	
The factor theorem	Polynomdivision	
The remainder theorem	Polynomdivision mit Rest	
Symmetry	Symmetrie	
Reflection	Spiegelung	
Enlargement	Vergrößerung	
Rotation	Drehung	
Translation	Umrechnung	
Combined transformations	Vermischte Abbildungen	
Scale drawing	Konstruktion nach Maßstab	
Probability scale and language	Wahrscheinlichkeit – Zahlenstrahl und Sprache	
Relative frequency	Relative Häufigkeit	
Experimental probability	Experimentelle Wahrscheinlichkeit	
Sample space diagrams	Häufigkeitstabellen	
P(A)+P(A')=1	Wahrscheinlichkeit/ Gegenwahrscheinlichkeit	
Indices	Exponenten	November und Dezember →
Number vocabulary	Zahlenvokabular	
Types of number	Zahlenmengen	
Prime factor decomposition	Primfaktorzerlegung	
Reciprocal	Kehrwert	
* / negative numbers	Mal/Dividiert negative Zahlen	
Solving equations	Gleichungen lösen	
Simultaneous equations	Gleichungssysteme lösen	
Solving quadratics	Quadratische Gleichungen lösen	
Changing the subject	Umformungen	
Linear inequalities	Lineare Ungleichungen	
Completing the square	Quadrat vervollständigen	
Triangle constructions	Dreieckkonstruktionen	
Triangle Properties	Eigenschaften des Dreiecks	
Triangle proofs	Dreieck Beweise	
Pythagoras theorem	Satz von Pythagoras	
Congruent triangles	Kongruente Dreiecke	
Tree diagrams	Baumdiagramme	
AND/OR probability	UND/ODER Wahrscheinlichkeit	

Significant figures	Signifikante Stellen	Januar und Februar →
Standard index form	Gleitkommadarstellung	
Accuracy	Genauigkeit	
Upper and lower bounds	Obere und untere Schranke	
Convert measures	Maße/Einheiten umrechnen	
Compound measures	Zusammengesetzte Maße (s=v·t)	
Surds	Irrationale Zahlen	
Co-ordinates	Koordinaten (x|y)	
Midpoints	Mittelpunkte	
Lengths of lines	Längen von Geraden	
y=mx+c	y=kx+d	
Gradients	Steigung	
Real life graphs	Graphen im täglichen Leben	
Graphs of inequalities	Graphen von Ungleichungen	
Linear programming	Lineare Optimierung	
Angles in polygons	Winkel in Vielecken	
Circles	Kreise	
Averages	Durchschnitt	
Estimate of the mean	Arithmetisches Mittel	
Cumulative frequency	Kumulierte Häufigkeit	
Box plots	Box Plots	
Comparing distributions	Verteilungen vergleichen	
Percentages	Prozente	März und April →
Ratio	Verhältnis	
Quadratic graphs	Parabel	
Simultaneous equations – quadratic & linear	Gleichungssysteme lösen – quadratisch und linear	
Quadratic inequalities	Quadratische Ungleichungen	
The Binomial expansion	Binomischer Lehrsatz	
The Binomial distribution	Binomialverteilung	
Angles with parallel lines	Parallelwinkel	
Properties of quadrilaterals	Eigenschaften von Vierecken	
Proofs	Beweise	
Bearings	Winkelmessung im Uhrzeigersinn	
Area formulae for quadrilaterals	Flächenformeln von Vierecken	
Constructions	Konstruktionen	
Compound shapes	Zusammengesetze Figuren	
Units of areas	Flächeneinheiten	
Two way tables	Tabellen (2 Spalten, 2 Zeilen)	
Pie Charts	Tortendiagramme	
Line graphs (time series)	Kurvendiagramm	
Stem and leaf diagrams	Stamm-Blatt Diagramm	
Scatter graphs	Streudiagramm	
Frequency diagrams	Häufigkeitsdiagramme	
Histograms	Histogramme	
Correlation	Korrelation/gegenseitige Anhängigkeit	
Line of the best fit	Ausgleichsgrade	

Direct and Inverse Proportionality	Direkte und Indirekte Proportionalität	Mai →
Trial and improvement	Lösung erraten und angeben	
Substituting algebra	Mit Variablen rechnen	
Sequences	Folgen	
Similar triangles	Ähnliche Dreiecke	
Trigonometry	Trigonometrie	
Area triangles /ab sin c	Dreiecksfläche	
Sine and cosine rules	Sin/Cos Regeln	
Trigonometry for angles of any size	Trigonometrie für alle Winkel	
Sine, cos, tan graphs	Graphen von sin, cos, tan	
Trig. equations and identities	Trig. Gleichungen und Identitäten (sin^2+cos^2=1)	
3D co-ordinates	Koordinatensystem im Raum	
Triangle problems in 3D	Probleme mit Dreiecken im Raum	
Lines and places in 3D	Geraden und Ebenen im Raum	
Types of data	Arten von Daten	
Sampling	Stichproben	
Questionnaires and surveys	Fragebögen und Umfragen	
Bias	Erwartungstreue/ Erwartungswert	
Estimating answers	Lösung erraten	Juni und Juli →
Mental calculations	Kopfrechnen	
Calculator buttons	Tasten am Taschenrechner	
Rounding answers on a calculator	Ergebnisse runden am Taschenrechner	
Calculator buttons	Tasten am Taschenrechner	
Plotting and sketching graphs	Skizzieren und Zeichnen von Graphen	
Circle graphs and equations	Kreis und Kreisgleichungen	
Circle theorems	Kreissätze	
Dimensions	Dimensionen/Kugel	
Vectors	Vektoren	
Moving averages	Gleitende Mittelwerte	
Interpret diagrams and draw conclusions	Interpretieren von Diagrammen und Schlüsse ziehen	
Types of data	Arten von Daten	
Sampling	Stichprobenerhebung	
Revision for November module Unit 2 and December mocks Units 1 and 3		September bis Dezember →
Transformations of graphs	Umwandlung von Graphen/Verschiebung von Graphen	
Revision for November module Unit 2 and December mocks Units 1 and 3		
Volume of cuboids, prisms, compound solids, cylinders	Volumen von Quadern, Prismen, zusammengesetzten Körpern, Zylindern	
Units of volume	Volumseinheiten	
Plans and elevations	Pläne und Ansichten (3D)	
Surface area	Oberfläche	

Revision for November module Unit 2 and December mock Units 1 and 3		
Revision for December mock Unit 1		
Revision for Units 1 and 3		Januar bis März →
Revision for Units 1 and 3		
Calculus: Differentiation, Integration, Application to kinematics	Infinitesimalrechnung: Differenzieren, Integrieren, Anwendung von Kinematik	
Revision for Units 1 and 3		
Revision for Unit 1		

5.2 Juli bis Oktober (England) – 2. Klasse bis 6. Klasse (Österreich)

5.2.1 Wahrscheinlichkeit/ Stochastik (Data)

5.2.1.1 England

Die englische Lehrkraft begann zuerst mit dem Kapitel *Wahrscheinlichkeit/ Statistik*. Zuerst werden der *Zahlenstrahl* und die *Sprache in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Probability Scale and Language)* eingeführt. Am Beginn wird erklärt, dass sich *Wahrscheinlichkeiten* immer zwischen 0 und 1 befinden und diese mithilfe von *Brüchen* oder *Dezimalzahlen* ausgedrückt werden. Weiters bedeutet eine *Wahrscheinlichkeit von* 0, dass ein Ereignis sicher nicht eintritt und eine *Wahrscheinlichkeit von* 1, dass etwas mit Sicherheit eintrifft. (Anm.: Diese Aussage ist inkorrekt, findet sich jedoch genau so in der entsprechenden Quelle.) Danach folgt eine Aufgabe, in der ein *Zahlenstrahl* (*Probability Scale)* vorgestellt wird, auf dem die Lernenden *Wahrscheinlichkeiten* für das Eintreffen eines bestimmten *Ereignisses* eintragen sollen. Diese sind: Kopf beim Werfen eines *10p* Stücks zu erhalten, einen roten Ball aus einem Sack zu ziehen, der zwei rote und einen grünen Ball enthält, die Zahl 5 zu würfeln und eine Briefmarke aus Guatemala aus einem Sack zu ziehen, der 60 britische und 40 französische Briefmarken enthält. Danach folgt eine Aufgabe, bei der die Gewinnchance bei einem Gewinnspiel berechnet werden soll (Parsons 2010: 8)

Danach wird die Kurzschreibweise der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* erklärt. Dafür wird $P(x) = 0{,}25$ angegeben, womit gemeint ist, dass die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein *Ereignis* x eintritt, $0{,}25$ beträgt. Als Beispiel ist $P(würfelt\ 6)$ angegeben, womit die *Wahrscheinlichkeit*, dass die *Zahl* 6 gewürfelt wird, angegeben wird. Danach sind Aufgaben zu den beschriebenen Punkten angegeben, mit denen die neuen Erkenntnisse eingeübt werden sollen (ebenda: 8).

In weiterer Folge werden *Häufigkeitstabellen (Sample Space Diagrams)* anhand von Aufgaben besprochen. Des Weiteren wird die *OR rule* eingeführt, die wie folgt lautet: $P(A\ or\ B) = P(A) + P(B)$. (Anm.: Mit passenden Zusätzen entspricht dies dem Additionssatz.) Diese wird mithilfe gegebener Aufgaben eingeübt (ebenda: 8f).

Darauf wird der Begriff der *relativen Häufigkeit (Relative Frequency)* eingeführt. Dazu wird folgende Erklärung gegeben: *Wenn man eine Wahrscheinlichkeit basierend auf einigen Daten berechnen soll, dann ist es eine relative Häufigkeit* (ebenda: 9).

Im Zuge der Aufgaben wird auch die *experimentelle Wahrscheinlichkeit (Experimental Probability)* anhand eines Beispiels bezüglich des Werfens eines Würfels eingeführt. Die angeführte Regel dazu wird folgendermaßen formuliert: $erwartete\ Anzahl = Wahrscheinlichkeit \cdot Gesamtheit$ (Schulübungsheft).
Als letzter Punkt in diesem Block wird die *Gegenwahrscheinlichkeit* angesprochen und hervorgehoben, dass $P(A) + P(A') = 1$. Der Trick für eine Aufgabe, bei der ein sechsseitiger Würfel geworfen wird, lautet: $P(mindestens\ ein\ 6er = 1 - P(kein\ 6er)$ (Parsons 2010: 11).

5.2.1.2 Österreich

Im österreichischen Schulsystem schreibt der Lehrplan das Unterrichten der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der 6. Klasse AHS (10. Schulstufe) vor.
Zu Beginn dieses Kapitels wird erklärt wie der *Wahrscheinlichkeitsbegriff* mit der *relativen Häufigkeit* zusammenhängt. Zuerst wird der *Wahrscheinlichkeitsbegriff* anhand von Beispielen aus dem Alltag eingeführt, wobei speziell auf das Werfen von zwei Münzen eingegangen wird. Dabei treten drei *Ereignisse* auf, nämlich *Kopf-Kopf, Kopf-Adler* und *Adler-Adler*, wobei das zweite *Ereignis* öfter auftritt als die beiden anderen. Dieser Umstand kann mithilfe der Mathematik leicht erklärt werden, da eigentlich vier verschiedene *Ereignisse* auftreten können. Somit ändert sich die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein bestimmtes Ereignis auftritt. Das Teilgebiet in der Mathematik, das sich mit diesem und ähnlichen Problemen beschäftigt, wird *Kombinatorik* genannt. Zudem wird der *statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff* eingeführt, der die *relative Häufigkeit* als bestmöglichen Schätzwert für eine bestimmte Wahrscheinlichkeit sieht. Dazu wird die *beschreibende Statistik* verwendet, die bereits teilweise in der Unterstufe besprochen wurde. (Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2010b: 169) In dieser Arbeit wird in einem späteren Kapitel genauer darauf Bezug genommen, da dieses Thema im englischen Schulsystem zu einem späteren Zeitpunkt durchgenommen wird.
Des Weiteren wird die Kurzschreibweise für *Wahrscheinlichkeit* erläutert. Danach werden die *absolute* und *relative Häufigkeit* anhand eines Beispiels besprochen. Dieses beschäftigt sich mit 30 Reisnägeln, die teilweise mit der Spitze nach oben und teilweise mit der Spitze nach unten liegen (ebenda: 169).

In weiterer Folge wird erklärt, dass mithilfe der *Wahrscheinlichkeit* subjektives Vertrauen, ob ein Ereignis eintritt oder nicht, gemessen werden kann. Diese Erklärung wird mithilfe eines Beispiels genauer erklärt. Hier wettet eine Frau beim Würfeln mit der Quote 2:1. Gefragt ist, ob es sich um ein faires Spiel handelt. Nach dieser Einführung folgen Aufgaben, die sich mit dem Werfen einer Münze, Folgen, Wettquoten und *relativer Häufigkeit* beschäftigen (ebenda: 170).
Darauf folgen *Laplace'sche Zufallsexperimente*, die *mengentheoretisch* beschrieben werden. Dazu wird die *Ergebnismenge* Ω des entsprechenden Experiments als „die Menge aller bei diesem Experiment *möglichen* Versuchsergebnisse (Versuchsgänge, Versuchsausfälle) ω" (ebenda: 171) definiert. Danach wird die *Ergebnismenge* Ω des Werfens einer Münze, eines Reißnagels, eines Würfels und von 3 verschiedenfärbigen Kugeln angegeben. Daraus wird geschlossen, dass zusätzlich die *Wahrscheinlichkeit*, mit der die einzelnen *Ereignisse* auftreten, benötigt wird um das *Zufallsexperiment* beschreiben zu können (ebenda: 171). Abschließend führt diese Einführung zu folgender *Definition*:

> Ein Zufallsexperiment, bei dem jedes der $n\,(n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$ möglichen Versuchsergebnisse ω mit der *gleichen* Wahrscheinlichkeit $P(\omega) = 1/n$ auftritt, heißt **LAPLACE'sches (Zufalls-)Experiment.** Das zugehörige Zufallsgerät heißt **Laplace-Gerät**.
>
> (Ebenda: 171)

Nachdem die benötigten Begriffe eingeführt wurden, wird nun zur Berechnung der *Wahrscheinlichkeit von Ereignissen* mithilfe der *Laplace'schen Regel* übergegangen. Um diese zu erhalten sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst selbstständig nachforschen, ob das Drehen eines Glücksrades ein *Laplace-Experiment* darstellt. Zusätzlich wird angegeben, dass mit dem Begriff *Ereignis* jede *Teilmenge von* Ω gemeint ist (ebenda: 172). Folgende Regel wird danach eingeführt:

> **LAPLACE'sche Wahrscheinlichkeitsregel:** Lässt sich ein Ereignis A aus den Versuchsergebnissen ω eines LAPLACE'schen Experiments mit der Ergebnismenge Ω bilden (ist also $A \subseteq \Omega$), so gilt:
>
> $$P(A) = \frac{Anzahl\ der\ f\ddot{u}r\ A\ \boldsymbol{g}\ddot{u}nstigen\ Versuchsergebnisse}{Anzahl\ der\ \boldsymbol{m}\ddot{o}glichen\ Versuchsergebnisse} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{g}{m}$$
>
> Bemerkung:
> Ist $A=\{\,\}$, so heißt A **unmögliches Ereignis:** $P(\{\,\})=0$
> Ist $A=\Omega$, so heißt A **sicheres Ereignis:** $P(\Omega)=1$
>
> (Ebenda: 172)

Darauf folgt ein Beispiel, das sich mit dem Würfeln eines fairen Würfels beschäftigt und bei dem die vorherige Regel angewendet werden soll (ebenda: 172).
Danach wird die *Gegenereignisregel* eingeführt und zur Anwendung gebracht. Diese wird wieder anhand des vorherigen Beispiels eingeführt und lautet: „**Gegenereignisregel: P(A')=1-P(A)**" (ebenda: 172).
Anschließend folgt die Simulation von *stochastischen* Vorgängen, wobei mit *Zufallsgeräten* und *Zufallszahlen* gerechnet wird. Zuerst sollen die Schülerinnen und Schüler eine Simulation am *Urnenmodell* durchführen. Danach sind weitere Anwendungsbeispiele angegeben, die sich mit dem Ziehen von Kugeln aus einer Urne, dem Würfeln mit einem fairen Würfel, dem Werfen mit Würfeln, die die Form eines Ikosaeders bzw. eines Pentagondodekaeders bzw. eines Tetraeders haben, dem Werfen von Reißnägeln und mit Anwendungen aus der Technik beschäftigen (ebenda: 173f).

5.2.1.3 Unterschied England - Österreich

Dieses Stoffgebiert überschneidet sich zum größten Teil in beiden Ländern, jedoch wird im englischen Schulsystem nicht genau auf die zugrundeliegende Theorie eingegangen. Insbesondere finden sich in den wenigen theoretischen Informationen inkorrekte Aussagen. Es ist falsch zu sagen, dass eine *Wahrscheinlichkeit* von 1 einen absolut sicheren Eintritt des Ereignisses vorhersagt und die Regel $P(A\ or\ B) = P(A) + P(B)$ ist ohne entsprechende Zusätze ebenfalls unbrauchbar. Außerdem werden nur kurz die Techniken vorgestellt, die zum Lösen der Aufgaben benötigt werden. Daraus kann geschlossen werden, dass es hier nicht um das Verstehen der Hintergründe, sondern lediglich um das Lösen der gestellten Aufgaben geht.
Im österreichischen Schulsystem wird sehr viel Wert auf den Aufbau des Stoffes und die zugrundeliegende Theorie gelegt. Diese soll von den Schülerinnen und Schülern mithilfe von Aufgaben selbstständig erarbeitet und hergeleitet werden. Im nächsten Schritt wird die entsprechende Regel exakt dargestellt und anhand von Aufgaben eingeübt. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass hier nicht erwähnt wird, dass sich eine Wahrscheinlichkeit immer zwischen 0 und 1 befindet, und dass nicht mit dem Zahlenstrahl gearbeitet wird. Des Weiteren werden *Häufigkeitstabellen* und die Regel $\mathrm{P(A\ oder\ B) = P(A) + P(B)}$ nicht besprochen.

Abschließend kann zu diesem Thema gesagt werden, dass in Österreich ein logischer Aufbau des Stoffes nachvollzogen werden kann, wobei viel Wert auf die zugrundeliegende Theorie gelegt wird. Im Gegensatz dazu wird in England das Lösen der Aufgaben als zentral angesehen. In beiden Ländern wird auf eine große Auswahl an Aufgaben mit unterschiedlichen Themen Wert gelegt.

5.2.2 Algebra (Algebra)

5.2.2.1 England

Dieser Themenblock beschäftigt sich mit *Termen* und mit dem *Lösen von Gleichungen (Algebraic Manipulation)*.
Als Einführung in das Thema sollen die Schülerinnen und Schüler *Terme* addieren. Ein Beispiel dafür ist „$3x^2 + 4x + 12x^2 - 5x$" (Parsons 2010: 49). Danach sind Aufgaben gegeben, bei denen *Faktoren mit einer Klammer multipliziert* werden sollen, wie zum Beispiel „$4(x + y + z)$" oder „$4x^2(x + 2 + \frac{1}{x})$" (ebenda: 49). In weiterer Folge werden *zwei Klammerausdrücke miteinander multipliziert (Expanding Brackets)*, wie in „$(x - 3)(x + 1)$" (ebenda: 49). Dazu wird die *FOIL-Regel (First – Outside – Inside – Last)* angewendet, womit die *Reihenfolge des Multiplizierens* gemeint ist. Die Rechenschritte mit Anwendung der *FOIL-Regel* bezüglich des vorhergehenden Beispiels sind: $x \cdot x,\ x \cdot 1,\ -3 \cdot x,\ -3 \cdot 1$. Das Ergebnis kann auch durch eine Tabelle erreicht werden:

Tabelle 3: Ausmultiplizieren von Klammern

	x	-3
x	x^2	$-3x$
1	x	-3

(Schulübungsheft)

Danach wird die *Umkehroperation*, das *Aufspalten in Linearfaktoren (Factorising)*, eingeführt. Der Beginn dieses Kapitels erfolgt mit der Einführung des *Heraushebens*. *Herausgehoben* wird aus Ausdrücken, wie "$a^2b + a^2c$" (Parsons 2010: 49), „$2a^2x + 3a^2y + 4a^2z$" (ebenda: 49) und „$8xy + 16x^2yz$" (ebenda: 49). Danach wird mit der *Binomischen Formel* $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ gearbeitet, indem Aufgaben wie „$x^2 - 9$" (ebenda: 50), $x^4 - 36$" (ebenda: 50) oder „$49x^4y^4 - 1$" (ebenda: 50) gestellt sind, von denen die Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse angeben sollen.

Anschließend wird das *Vereinfachen von Rechenausdrücken* mithilfe von *Kürzen* eingeführt. Aufgaben dafür sind „ $\frac{27x^4y^2z}{9x^3yz^2}$" (ebenda: 50), „$\frac{4p^3q^3}{(2pr)^2}$" (ebenda: 50), „$\frac{2x}{y^2} \times \frac{y^3}{4x^3}$ " (ebenda: 50) und „$\frac{70f^3}{g} \div \frac{10f^4}{g}$" (ebenda: 50). Zudem sollen Ausdrücke *nach einer Variable gelöst*, auf *gemeinsamen Nenner* gebracht *(Algebraic Fractions)* und *vereinfacht*, sowie vermischte Aufgaben gelöst werden. Folgende Aufgabentypen werden dazu verwendet: „$\frac{20x^4y^2z^3}{7xy^5} \times \frac{14y^3}{40x^2z^3} = 5$" (ebenda: 50), „$\frac{zx}{4} + \frac{x+z}{y}$" (ebenda: 50), „$\frac{10+x^2}{4x} - \frac{x^2+11}{4x}$" (ebenda: 50), „$(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}) \times \frac{ac}{bd}$" (ebenda: 50), „$\frac{m^2n}{p} + \frac{mn}{p^2}$ " (ebenda: 50) und „ $\frac{1}{4pq} \div \frac{1}{3pq}$ " (ebenda: 50). Darauf folgend werden *quadratische Gleichungen in Linearfaktoren aufgespalten* und anschließend gelöst *(Factorising Quadratic Expressions)*. Folgende Aufgaben werden zum Einüben dieses Stoffgebiete verwendet: „$x^2 + 3x - 10 = 0$" (ebenda: 51), „$x^2 - 4x - 5 = 0$" (ebenda: 51), „$x^2 + 36 = 13x$ " (ebenda: 51) und „ $x + 5 - \frac{14}{x} = 0$ " (ebenda: 51). Schließlich sollen diese *Gleichungen* anhand von *Textgleichungen* aufgestellt werden. Eine Aufgabe ist beispielsweise: *Die Fläche eines rechteckigen Swimmingpools ist 28 m². Die Breite ist x m. Der Unterschied zwischen der Länge und der Breite beträgt 3 m. Finde den Wert von x*. Zusätzlich ist neben der Aufgabe eine Skizze gegeben (ebenda: 51).

Das folgende Kapitel befasst sich mit dem Umgang mit *Polynomen (Manipulating Polynomials)*. Zuerst wird geklärt, was mit dem Ausdruck *Polynom* gemeint ist: *Ein Polynom ist die Summe von einem oder mehreren Termen, von denen jeder eine Potenz oder eine Zahl ist*. Zuerst wird die *Addition von Polynomen (Adding Polynomials)* anhand des folgenden Beispiels besprochen: $(1x^{12} + 12x^2 - 6) + (6x^4 + 17x^2) = 1x^{12} + 6x^4 + 29x^2 - 6$ (Schulübungsheft).

Danach erfolgt die Besprechung der *Subtraktion von Polynomen (Subtracting Polynomials)*, die sich von der *Addition* nur dadurch unterscheidet, dass die *Rechenoperationen in der Klammer* umgekehrt werden müssen. Das folgende Beispiel illustriert dieses Vorgehen: $(12x^5 - 2x + 1) - (5x^5 - 3x + 2) = 7x^5 + x - 1$.

Die *Multiplikation von Polynomen (Multiplying Polynomials)* wird mithilfe einer *Tabelle* durchgeführt. Ausgegangen wird vom anschließenden Beispiel: $(3x^3 - 4x + 2) \times (2x^3 - 3x)$ (Schulübungsheft).

Folgende Tabelle wird danach aufgestellt:

Tabelle 4: Multiplikation von Polynomen

	$\mathbf{3x^3}$	$\mathbf{-4x}$	$\mathbf{+2}$
$\mathbf{2x^3}$	$6x^6$	$-8x^4$	$4x^3$
$\mathbf{-3x}$	$-9x^4$	$12x^2$	$-6x$

Folglich ergibt sich: $6x^6 - 17x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 6x$
(Schulübungsheft).

Das *Dividieren von Polynomen (Dividing Polynomials)* wird anhand von zwei Beispielen besprochen. Zuerst wird die *Polynomdivision ohne Rest (The Factor Theorem)* besprochen. Die Berechnung wird mit folgendem Beispiel realisiert: $(2x^4 - 8x^3 + 4x^2 - x + 3) \div (x - 1)$. Die Berechnung wird mit folgendem Rechengang realisiert, wobei die Zeilen unter der Angabe die Ergebnisse der Rechnung darstellen:

$$(2x^4 - 8x^3 + 4x^2 - x + 3) \div (x - 1)$$

	$\underline{2x^3 - 6x^2 - 2x - 3}$
$x - 1$	$\vert 2x^4 - 8x^3 + 4x^2 - x + 3$
$2x^3(x - 1)$	$\underline{2x^4 - 2x^3}$
subtract	$-6x^3 + 4x^2 - x + 3$
$-6x^2(x - 1)$	$\underline{-6x^3 + 6x^2}$
subtract	$-2x^2 - x + 3$
$-2x(x - 1)$	$\underline{-2x^2 + 2x}$
subtract	$-3x + 3$
$-3(x - 1)$	$\underline{-3x + 3}$
subtract	0

Somit erhält man: $2x^3 - 6x^2 - 2x - 3$.
(Schulübungsheft)

Das zweite Beispiel lautet:
Teile $(2x^3 - x^2 - 5x + 10)$ durch $(x + 2)$.

Dieses wurde wie folgt gelöst:

	$2x^3 - x^2 - 5x + 10 \div (x + 2)$
	$\underline{2x^2 - 5x + 5}$
$x + 2$	$\vert 2x^3 - x^2 - 5x + 10$
$2x^2(x + 2)$	$\underline{2x^3 + 4x}$
subtract	$-5x^2 - 5x + 10$
$-5x(x + 2)$	$\underline{-5x^2 - 10x}$
subtract	$5x + 10$
$5(x + 2)$	$\underline{5x + 10}$
subtract	0

Somit erhält man: $2x^2 - 5x + 5$.
(Schulübungsheft)

Anschließend wird die Notation von *Funktionen* besprochen, um auf das nachfolgende *Factor Theorem* eingehen zu können. Das Beispiel dazu ist $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Darauf folgt die Erklärung, dass $f(x)$ mit f *von* x bezeichnet wird. Im nächsten Schritt werden zwei Werte gewählt, die in die *Funktion* eingesetzt werden. Diese sind 1 und 6: $f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$ und $f(6) = 216 + 12 - 1 = 227$ (ebenda).
Nach dieser Einführung wird das *Factor Theorem (Polynomdivision)*, welches ein Spezialfall des *Remainder Theorems (Polynomdivision mit Rest)* ist, besprochen. Dieses besagt: *Wenn* $x + a$ *ein Teiler von* $f(x)$ *ist, dann ist* $f(-a) = 0$. *Wenn* $f(a)$ *nicht Null ist, so ist der Rest* $(x - a)$. Dazu wird das folgende Beispiel besprochen: *Geht* $(x + 2)$ *in* $2x^3 + x^2 - 5x - 4$ *?, das heißt ist* $x + 2$ *ein Teiler von* $2x^3 + x^2 - 5x - 4$*?*. Um diese Frage zu beantworten wird $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x - 4$ definiert und $f(-2) = -6$ berechnet. Da $f(-2) \neq 0$ ist $f(x)$ nicht durch $(x + 2)$ teilbar (ebenda).

5.2.2.2 Österreich

Im österreichischen Schulsystem wird das *Arbeiten mit Termen* in der 3. Klasse AHS (7. Schulstufe) eingeführt. Dieses knüpft an das *Addieren und Subtrahieren von Variablen* aus der 2. Klasse AHS (6. Schulstufe) an. Nachdem dieses Thema kurz wiederholt wird, wird auf das *Multiplizieren von Variablen* eingegangen. Hier wird erklärt, dass statt $a \cdot b$ auch ab geschrieben werden kann, dass man aus dem *Vertauschungsgesetz der Multiplikation* schließen kann, dass gleiche *Vorzeichen* zu einem *positiven* und unterschiedliche *Vorzeichen* zu einem *negativen Ergebnis* führen, sowie dass eine alphabetische Ordnung der *Terme* hilfreich ist. Um diese Theorie einzuüben finden sich folgende Aufgabentypen: Die Schülerinnen und Schüler sollen Ausdrücke wie „$2x \cdot 3y =$“ (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2010: 104), „ $(2a) \cdot (-5b) =$ “ (ebenda: 104), „ $5a \cdot 3b - 2a \cdot 3b =$ “ (ebenda: 104), „ $(-4g) \cdot 3h - 3g \cdot (-3h) =$ “ (ebenda: 105) und „$2ab - 2bc + ac - ab - bc + 3ac =$“ (ebenda: 105) berechnen und eine *Probe* mit vorgegebenen Zahlenwerten durchführen (ebenda: 99-105).
Danach wird die *Potenzschreibweise* eingeführt, wobei wiederum *Terme addiert* und *subtrahiert* werden. Dabei wird darauf hingewiesen, dass nur *Potenzen*, die in *Basis* und *Exponent* übereinstimmen, *addiert* bzw. *subtrahiert* werden dürfen. Bei den folgenden Aufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler Ausdrücke wie „$x \cdot x \cdot x \cdot x$" (ebenda: 106) in der *Potenzschreibweise* angeben und Aufgaben wie „$5a^2 + 2a + 4 - 4a^2 - 3a - 1 =$“ (ebenda: 106) bzw. „$\frac{3a^2}{2} + \frac{5a}{2} - \frac{7}{2} + \frac{5a^2}{2} - \frac{3a}{2} + \frac{5}{2} =$“ (ebenda: 106) *vereinfachen* und eine *Probe* mit einem vorgegebenen Zahlenwert durchführen (ebenda: 105f).
Darauf folgt die Einführung der Regeln zur *Auflösung von Klammerausdrücken*. Diese sind: $a + (b + c) = a + b + c$ und $a - (b + c) = a - b - c$. Hervorgehoben wird hier, dass *Klammerregeln* bei dem *Durchführen der Probe* hinderlich sein können und dass *Klammern* von der innersten bis zur äußersten aufgelöst werden (ebenda: 106-110). (Anm.: Diese Aussage wurde in der folgenden Auflage verändert. Hier wird geraten von innen nach außen vorzugehen. (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2015)) Aufgabenbeispiele zu diesem Thema sind: *Verneinfachen* und *Durchführen einer Probe mit einem vorgegebenen Zahlenwert* anhand von Aufgaben wie „ $3a - 2b + (4a + 3b) =$ “ (ebenda: 107), „ $5r - (6s + 4t) - (3r + 6s - 2t) =$ “ (ebenda: 110) und „$9i + 8k - [(4i - 2k) - (2i - 3k)] =$“ (ebenda: 110).

Des Weiteren wird die *Multiplikation von Monomen* besprochen, wobei das *Vertauschungsgesetz der Multiplikation* hilfreich ist. Darauf folgt die *Multiplikation von einem Binom mit einem Monom*. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$ bzw. $a \cdot (b - c) = (b - c) \cdot a = a \cdot b - a \cdot c$. Da auch *Binome miteinander multipliziert* werden können, folgt darauf die Regel $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$. Der Rechengang wird zusätzlich mithilfe von bunten Pfeilen und unterstrichenen *Monomen* veranschaulicht (ebenda: 111-113). Diese Regeln können anhand folgender Aufgabentypen eingeübt werden: *Vereinfachen* und *Durchführen einer Probe mit vorgegebenen Zahlenwerten* von Aufgaben wie „$2a \cdot (-3b) \cdot 4c =$" (ebenda: 111), „$3a \cdot (2a + 3b) =$" (ebenda: 112) und „$(3k - 1)(2k - 1)$ [sic]" (ebenda: 113).

Danach werden die eingeführten Regeln mit *Potenzen* eingeübt. Dazu dienen Aufgabentypen wie das *Berechnen und Durchführen einer Probe mit vorgegebenen Zahlenwerten* von Aufgaben wie „ $3a^2 - a^2 =$ " (ebenda: 114), „ $3a^2 + b - (2a^2 - 2b) =$ " (ebenda: 114) und längeren Ausdrücken wie „$(3k - 2) \cdot (4k + 2) + (2k + 1) \cdot (k - 1) =$" (ebenda: 114).

Das *Multiplizieren und Dividieren von Potenzen* wird anhand folgender Regeln besprochen: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ und $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$. Diese Vorgangsweise ist jedoch nur möglich, wenn die *Potenzen* dieselbe *Basis* haben (ebenda: 115-119). Bezüglich dem *Multiplizieren von Potenzen* können folgende Aufgabentypen zum Einüben dieser Regeln verwendet werden: Berechnungen von „$4a^3 \cdot a^4 =$" (ebenda: 115), „$(-2a^2b^3) \cdot 5a^4b^2 =$" (ebenda: 115) und Aufgaben, die mithilfe der vorher gelernten Regeln zu lösen sind. Aufgabentypen bezüglich dem *Dividieren von Potenzen* sind Berechnungen von „$a^6 : a^4 =$" (ebenda: 117), „$20x^3y : 4x^2 =$" (ebenda: 117), „ $\frac{8x^6y^3}{16x^2y} =$ " (ebenda: 118) und „ $\frac{5a^5b^3}{10a^3b} \cdot \frac{4a^5b^4}{2a^4b} =$ " (ebenda: 118). Um die vorhergehende Regel anwenden zu dürfen wird zusätzlich eingeführt, dass $a^0 = 1$. Aufgabentypen zum *Potenzieren von Potenzen* und zur Regel, dass $(a^r b^s)^t = (a^r)^t (b^s)^t = a^{rt} b^{st}$ sind Berechnungen von „ $(2a^3)^3$ " (ebenda: 119), „$(6x^4y^2)^2$" (ebenda: 119), „$(-5z^4y)^2 \cdot 2zy^3$" (ebenda: 119), „$4y^2 + 5 \cdot (-3y)^2 =$" (ebenda: 119), sowie Textbeispiele, die sich mit der Blätterteigherstellung und der Herstellung eines Klingenstahls beschäftigen (ebenda: 119). Diese Rechenregeln werden im englischen Schulsystem erst im folgenden Block (November und Dezember) unter dem Punkt *Numerik (Number)* besprochen.

Darauf folgt die Vorstellung der *Binomischen Formeln* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (ebenda: 120). Diese werden anhand folgender Aufgabentypen eingeübt: *Berechnung und Durchführung einer Probe mit vorgegebenen Zahlenwerten* von Aufgaben wie „$(a+3)^2 =$" (ebenda: 121), „ $(4a-1)^2 =$ “ (ebenda: 121), „ $(2x^3 + 3y^3)^2 =$ “ (ebenda: 121) und „ $(2x^3 - y^2)^2 =$ “ (ebenda: 121), sowie Berechnungen von Aufgaben wie „$(2x+3y) \cdot (2x-3y) =$“ (ebenda: 121), „$(4a^3 + 5b^2) \cdot (4a^3 - 5b^2) =$“ (ebenda: 121), „ $(\frac{a}{2} + \frac{b}{4})^2 =$ “ (ebenda: 121), „ $(\_\_ + 11b)^2 = \_\_ + 88ab + \_\_$ “ (ebenda: 121), „ $(49x^2 - \_\_ + 1 = (\_\_\_\_\_\_)^2 =$“ (ebenda: 121), „ $(\_\_ - 4y) \cdot (\_\_ + 4y) = 9z^2 - \_\_$“ (ebenda: 121), „ $(5x-4)^2 - (12-x)^2 + (8-3x) \cdot (8+3x) =$“ (ebenda: 122) und Textaufgaben, die sich mit Rechentricks beschäftigen (ebenda: 122).

Danach wird das *Herausheben* anhand eines Beispiels erklärt. Hier muss der *größte gemeinsame Teiler* der entsprechenden Zahlen gefunden werden, der dann aus dem Rechenausdruck *herausgehoben* werden kann. Außerdem wird dieser Vorgang zum *Vereinfachen von Bruchtermen* durchgeführt. Dabei wird darauf hingewiesen, dass aus *Summern* und *Differenzen* nicht *gekürzt* werden darf. Aufgabentypen zu diesem Thema sind Berechnungen von „ $24u - 16v =$ “ (ebenda: 124), „ $12a^4b^2 - 9a^2b^2 + 27a^3b =$ “ (ebenda: 124), längeren Ausdrücken wie „ $(46+37) \cdot (-29-38) - (-46+32) \cdot (46+37) =$ “ (ebenda: 124), „ $\frac{3a^2b - 6b}{3b} =$ “ (ebenda: 125), „$\frac{12a^2b^3 - 18a^2b^2}{6a^2b^2 - 9a^2b} =$“ (ebenda: 125) und Textaufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler *Terme* und *Bruchterme* aufstellen sollen (ebenda: 125). Zuletzt werden die eingeführten Regeln mit *binomischen Formeln* angewendet (ebenda: 126).

Im Lauf der 4. Klasse AHS (8. Schulstufe) wird der vorher besprochene Stoff kurz wiederholt und es wird mit dem *Dividieren durch ein Monom* fortgesetzt (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2011: 135). Aufgabentypen sind dafür Berechnungen von „ $(+28a^4 + 14a^2) : (-7a^2) =$ “ (ebenda: 135) und „$(49x^2y^6z^5 + 63xy^4z^4 - 693x^4y^5z^5) : (-7xy^4z^4) =$“ (ebenda: 136).

Danach wird das *Dividieren durch ein Binom oder Polynom* mit dem *Dividieren durch eine mehrziffrige* Zahl verglichen und anhand von folgendem Beispiel erklärt:

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 12x + 15) : (x^2 - 3) = x^3 - 2x^2 + 4x - 5 \\
\pm x^5 \qquad \mp 3x^3 \qquad \text{Wegen } x^5 : x^2 = x^3 \; und \; (x^2 - 3) \cdot x^3 \\
\quad -2x^4 + 4x^3 + x^2 \qquad \text{Ergebnis der Subtraktion (Vorzeichenwechsel)} \\
\quad \underline{\mp 2x^4 \qquad + 6x^2} \\
\qquad 4x^3 - 5x^2 - 12x \\
\qquad \underline{\pm 4x^3 \qquad \mp 12x} \\
\qquad\quad -5x^2 \qquad + 15 \\
\qquad\quad \underline{\mp 5x^2 \qquad \pm 15} \\
\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}
$$

(Ebenda: 136)

Danach folgen einige Aufgaben um diesen Rechengang einzuüben (ebenda: 136).

Um die Schülerinnen und Schüler auf das Arbeiten mit *Bruchtermen* vorzubereiten sind einige Aufgaben gegeben, die mithilfe von *Herausheben* oder der *Binomischen Formeln* vereinfacht werden können (ebenda: 137).

Im nächsten Schritt wird das *Rechnen mit Bruchtermen* auf das *Bruchrechnen* zurückgeführt. Zunächst sind Aufgaben gegeben, bei denen die Schülerinnen und Schüler die *Definitionsmenge des Bruchterms* berechnen und *Bruchterme durch Kürzen und Erweitern vereinfachen* sollen. Aufgaben dafür sind die Bestimmung der *Definitionsmenge* von „$\frac{3x+4}{x-4}$ “ (ebenda: 138), Berechnungen von „$\frac{16x^2y+28xy^2}{8xy} =$“ (ebenda: 138), „$\frac{9a^2-30ab+25b^2}{3a-5b} =$ “ (ebenda: 139), „$\frac{\frac{4x}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{4}} =$ “ (ebenda: 140) und *Erweiterungen* mit vorgegebenen Zahlenwerten von „$\frac{x-8a^2}{4y^2} =$“ (ebenda: 139).

Darauf wird das *Addieren* und *Subtrahieren von Bruchtermen* anhand von folgenden Aufgabentypen erklärt: Berechnungen von „$\frac{2a-3}{3} + \frac{2a-3}{3} =$ “ (ebenda: 140), „$\frac{a-b}{4} + \frac{3a-2b}{3} - \frac{3a-4b}{6} =$“ (ebenda: 141), „$\frac{3x+4}{2y} - \frac{x-6}{8y} =$“ (ebenda: 141), „$\frac{x}{4x+2} - \frac{x}{2x+1} =$“ (ebenda: 142) und „$\frac{x}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2xy} - \frac{x-y}{2xy} =$“ (ebenda: 142).

Danach folgt das *Multiplizieren* und *Dividieren von Bruchtermen*. Zum Einüben dieser Berechnungen dienen folgenden Aufgabentypen: „$\frac{4xy^2}{3a} \cdot \frac{6a^2b}{5y} =$ " (ebenda: 143), „ $\frac{3xy}{3x+2y} \cdot \frac{12x+8y}{9xy} =$ " (ebenda: 143), „ $\frac{4a-8b}{3a^2-3ab} : \frac{8a-16b}{a^2-2ab} =$ " (ebenda: 144), „ $\frac{8a-2b}{3a+3b} : \frac{16a^2-b^2}{a^2-b^2}$ [sic]" (ebenda: 144), „ $\left(\frac{1}{r-s} - \frac{3}{4r}\right) : \frac{2r+6s}{4r^2-4s^2} =$ " (ebenda: 144) und „$\left(\frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right) =$" (ebenda: 144).

Zuletzt folgen einige Textaufgaben, bei denen *Formeln aufgestellt* und *interpretiert* werden sollen. Die Themen dieser Aufgaben sind: Taschengeld, Bremsweg, Schule, *Binomische Formel*, Passagierflugzeug, Autoparkplatz, Differenz aus $\mathbb{Q}$, Muster legen, Rechteck, Autovermietung, *Terme* und Eintrittspreise (ebenda: 145-147).

5.2.2.3 Unterschied England – Österreich

Wiederum überschneiden sich die besprochenen Themen, jedoch gibt es einige Unterschiede im Aufbau.

Im englischen Lehrplan werden kurz die anzuwendenden Techniken besprochen, welche danach anhand einiger Aufgaben eingeübt werden. Die zugrundeliegende Theorie wird zum größten Teil außer Acht gelassen. In diesem Kapitel wird lediglich die *FOIL-Regel* besprochen, alle anderen Aufgaben werden ohne theoretische Kenntnisse berechnet.

Im österreichischen Kontext werden die besprochenen Themen ausführlicher und mit detailreicherer Theorie durchgenommen. Es gibt eine große Auswahl an Aufgaben, die einem logischen Stoffaufbau entsprechen. Des Weitern sind die besprochenen Themen auf zwei Schuljahre aufgeteilt und es steht mehr Zeit und Material zum Erarbeiten des Stoffes zur Verfügung. Es wird viel mehr Wert auf das Arbeiten mit *Textaufgaben* und auf das *Aufstellen von Termen* anhand von beschriebenen Situationen gelegt. Somit steht das mathematische Beschreiben von (Alltags-) Situationen im Vordergrund. Weitere Unterschiede sind, dass das *Multiplizieren von Polynomen* nicht mit einer Tabelle durchgeführt wird und dass es in Österreich keine äquivalente Regel zur *FOIL-Regel* gibt. Hier wird es den Schülerinnen und Schülern freigestellt die Reihenfolge der Multiplikationen zu wählen. Statt der Tabelle wird in Österreich mit Bögen gearbeitet, die die Rechenschritte illustrieren. Trotz der unterschiedlichen Vorgehensweise steht das Sichtbarmachen von Rechenschritten in beiden Ländern im Vordergrund.

Außerdem wird das *Dividieren von Polynomen* nicht mithilfe von Funktionen, sondern mit der *Division mit mehrziffrigen Zahlen* erklärt. Im österreichischen Schulsystem werden Funktionen in der 4. Klasse (8. Schulstufe) eingeführt, doch erst in der Oberstufe genauer behandelt. Das könnte ein Grund sein, warum man zu dieser Zeit von der Erklärung der *Polynomdivision mit Funktionen* Abstand nimmt und auf eine andere Erklärung zurückgreift. Weiters unterscheidet sich der Rechengang bei der *Polynomdivision*, da dieser nur *ohne Rest* berechnet wird. In Österreich wird dieses Thema mit der *Division von Potenzen mit gleicher Basis* zurückgeführt, was im englischen Schulsystem nicht explizit betont wird.

Da in Österreich mehr Zeit für das Erarbeiten der Themen zur Verfügung steht, ist es naheliegend, dass die Stoffgebiete genauer besprochen werden und es mehr Raum zum Üben gibt. Im englischen Schulsystem wird die zugrundeliegende Theorie nur angesprochen, wenn diese direkt als *Formel* verwendet werden kann. Ansonsten beschränkt man sich auf das erfolgreiche Lösen der Aufgaben.

5.2.3 Numerik (Number)

5.2.3.1 England

Unter den Punkt *Numerik* fällt das *Arbeiten mit Brüchen*. Zuerst wird das Erweitern von Brüchen *(Equivalent Fractions)* besprochen. Das erste Beispiel erklärt, dass die folgenden Brüche denselben Wert haben, auch wenn sie eine unterschiedliche Form aufweisen: „$\frac{4x}{7y} = \frac{8x}{14y} = \frac{4x^2}{7xy} = \frac{8x^2}{14xy} = \frac{16x^2y}{28xy^2}$“ (Schulübungsheft). Die Darstellungen des ursprünglichen Bruchs ergeben alle $\frac{4x}{7y}$, da „$\frac{8x}{14y} = \frac{2\times4x}{2\times7y}$, $\frac{4x^2}{7xy} = \frac{x\times4x}{x\times7y}$, $\frac{8x^2}{14xy} = \frac{2x\times4x}{2x\times7y}$“ (ebenda) und „$\frac{16x^2y}{28xy^2} = \frac{4xy\times4x}{4xy\times7y}$“ (ebenda). Ebenso stimmt, dass „$\frac{24a}{x+y} = \frac{48ab}{2b(x+y)}$“ (ebenda), da hier der ursprüngliche *Bruch* einfach mit $2b$ erweitert wurde (ebenda).

Danach wird das *Addieren und Subtrahieren von Brüchen* (*Adding and Subtracting Fractions*) erklärt. Dazu dienen die folgenden Beispiele: „$\frac{3}{x} + \frac{4}{x} = \frac{7}{x}$“ (ebenda) und „$\frac{2a}{xy} - \frac{b}{xy} = \frac{2a-b}{xy}$“ (ebenda).

Der nächste Punkt beschäftigt sich mit dem *Addieren von Brüchen mit unterschiedlichen Nennern (Adding Fractions with Different Denominators)*. Dieses wird anhand des folgenden Beispiels erläutert: „$\frac{5}{7} + \frac{4}{9}$“ (ebenda). Hier muss der erste *Bruch* mit *9* und der zweite *Bruch* mit *7* erweitert werden um den *gemeinsamen Nenner 63* zu erhalten. Demnach folgt: „$\frac{45}{63} + \frac{28}{63} = \frac{73}{63} = 1\,\frac{10}{63}$“ (ebenda).

Derselbe Vorgang wird bei *Bruchtermen* durchgeführt: „$\frac{3}{a} + \frac{5}{a-1}$“ (ebenda). Hier ist der *gemeinsame Nenner* „ $a \times a - 1 = a^2 - a$ “ (ebenda) und es folgt „$\frac{3(a-1)}{a(a-1)} + \frac{5a}{a(a-1)} = \frac{3(a-1)+5a}{a(a-1)} = \frac{8a-3}{a(a-1)}$“ (ebenda).

Danach wird das *Vereinfachen von Bruchtermen (Simplifying Algebraic Fractions)* erklärt. Auch dazu wird ein einfache Merksatz gegeben: *Wir können den Zähler und den Nennen durch denselben Faktor dividieren*. Dieser wird anhand des folgenden Beispiels veranschaulicht: „$\frac{4p^2+2pq}{16p^3} = \frac{2p(2p+q)}{16p^3} = \frac{2p+q}{8p^2}$“ (ebenda). Im ersten Schritt wurde im *Zähler* $2p$ *herausgehoben* und anschließend durch diesen *Faktor gekürzt*. Das folgende Beispiel wurde nach demselben Prinzip gelöst: „$\frac{3xy^2-1x^2y}{9xy} = \frac{xy(3y-1x)}{9xy} = \frac{3y-1x}{9}$“ (ebenda).

Schließlich wird auf das *Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen (Multiplying and Dividing Algebraic Fractions)* eingegangen. Hier müssen *Zähler* und *Nenner* miteinander *multipliziert* und das *Ergebnis* anschließend durch denselben *Faktor dividiert* werden: „$\frac{9}{a^2} \times \frac{3a}{8} = \frac{27a}{8a^2} = \frac{27}{8a}$“ (ebenda). Das folgende Beispiel wurde mit demselben Prinzip gelöst: „$\frac{x+3}{5} \times \frac{x^2}{2x+6} = \frac{(x+3)x^2}{5(2x+6)} = \frac{(x+3)x^2}{5 \times 2(x+3)} = \frac{x^2}{10}$“ (ebenda).

Abschließend wird das Thema *periodische Dezimalzahlen (Recurring Decimals)* eingeführt. Zuerst wird geklärt, dass man mit dem Zeichen $\dot{}$ eine *periodische Zahl* kennzeichnet ($\dot{}$ = *recurring*). Folgende Zahlen sind Beispiele für *periodische Dezimalzahlen*: $0.\dot{1} = {}^{1}/_{9}$ und $0.\dot{2} = {}^{2}/_{9}$. Darauf folgt die Regel: *Jede einzelne periodische Zahl ist äquivalent zu der Zahl über der 9*. Dieser wird mit folgenden Beispielen illustriert: $0.343434 \ldots = 0.\dot{3}\dot{4} = \frac{34}{99}$ und $0.128128128 \ldots = 0.\dot{1}\dot{2}\dot{8} = \frac{128}{999}$. Schließlich folgen drei „Beweise“ für diese Tatsachen. Der erste zeigt $0.\dot{3}\dot{4} = \frac{34}{99}$: $x = 0.\dot{3}\dot{4} \Leftrightarrow 100x = 34.\dot{3}\dot{4} \Leftrightarrow 100x - x = 34 \Leftrightarrow 99x = 34 \Leftrightarrow x = \frac{34}{99}$. Der zweite folgert $0.8141414 \ldots = 0.8\dot{1}\dot{4} \Leftrightarrow 10x = 8.\dot{1}\dot{4} \Leftrightarrow 10x = 8\frac{14}{99} \Leftrightarrow 10x = \frac{792+14}{99} \Leftrightarrow 10x = \frac{806}{99} \Leftrightarrow x = \frac{806}{990}$. Eine andere Möglichkeit ist: $0.8\dot{1}\dot{4} = 0.8 + 0.0\dot{1}\dot{4} \Leftrightarrow 0.8\dot{1}\dot{4} = \frac{8}{10} + \frac{14}{990} \Leftrightarrow 0.8\dot{1}\dot{4} = \frac{8 \times 99}{990} + \frac{14}{990} \Leftrightarrow 0.8\dot{1}\dot{4} = \frac{806}{990}$ (ebenda). (Anm: Diese Beweise sind jedoch nicht allgemeingültig.)

5.2.3.2 Österreich

Das *Erweitern* und *Kürzen von Brüchen* findet sich im österreichischen Lehrplan in der 2. Klasse AHS (6. Schulstufe). Zuerst wird anhand von *Tortendiagrammen* erklärt, dass unterschiedliche *Brüche* dieselbe *Bruchzahl* darstellen können. Danach folgt eine *Definition des Erweiterns*, die durch den Vergleich mit einem Mädchen, das unterschiedliche Kleidung trägt, aber immer dieselbe Person bleibt, illustriert wird. Des Weiteren werden der Unterschied zwischen den Ausdrücken *Bruch* und *Bruchzahl* bzw. *rationale Zahl* hervorgehoben (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2009: 81f). Folgende Aufgabentypen dienen zum Einüben dieser Theorie: Markierungen am *Zahlenstrahl* von einigen *Brüchen* (ebenda: 82), Berechnungen von „$\frac{3}{7} | \cdot 2$“ (ebenda: 82), „$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$" (ebenda: 82) und „$\frac{}{12} = \frac{21}{36}$“ (ebenda: 82). Bezüglich dem *Kürzen von Brüchen* stehen folgende Aufgabentypen zu Verfügung: *Kürzen von verschiedenen Brüchen*, Auffinden der Zahlen, durch die gekürzt wurde, und Textaufgaben, die sich mit Kindern und *Bruchteilen von Stunden* beschäftigen. (ebenda: 83f). Nach den vorhergehenden Erklärungen folgt folgende Gegenüberstellung:

Erweitern und Kürzen

Multipliziert | Dividiert
man den Zähler z und den Nenner n eines Bruchs
mit derselben Zahl a , | durch dieselbe Zahl a $(\neq 0)$,
so ändert sich der Wert des Bruches nicht!
Diesen Vorgang nennt man
„erweitern“ | „kürzen“

$\frac{z}{n} = \frac{a \cdot z}{a \cdot n}$ | $\frac{z}{n} = \frac{z : a}{n : a}$

(Ebenda: 85)

Anschließend wird das *Vergleichen von Brüchen* erklärt, wobei in den Aufgaben grafisch und rechnerisch gezeigt werden soll, welcher gegebene *Bruch* größer als ein anderer ist, *Brüche* der Größe nach geordnet werden und Textaufgaben, die Fußball, Flaschen und Eigenschaften von Tieren zum Thema haben, gelöst werden sollen. Hier werden *Brüche* auch als *Dezimalzahlen* dargestellt (ebenda: 85-88).
Darauf wird das *Addieren und Subtrahieren von Brüchen* besprochen.

Dabei wird an das Wissen aus der 1. Klasse (9. Schulstufe) angeknüpft, dass die *Addition und Subtraktion von Brüchen* nur mit *Brüchen*, die einen *gemeinsamen Nenner* haben, durchgeführt werden kann. Hervorgehoben wird, dass nur die *Zähler*, und nicht die *Nenner*, miteinander *addiert* bzw. voneinander *subtrahiert* werden. Daran anknüpfend sind Aufgaben gegeben, bei denen *Brüche mit gleichem Nenner addiert* bzw. *subtrahiert* werden. Schließlich wird erklärt, dass man *Brüche* durch *Erweitern* auf den *gleichen Nenner bringen* kann, was danach anhand von passenden Aufgaben eingeübt wird (ebenda: 89-94). Diese sind Aufgabentypen wie: *Vereinfachungen* von „$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$ [sic]" (ebenda: 90), „$\frac{5}{6}+\frac{12}{9}-\frac{7}{12}$ [sic]" (ebenda: 91), „$\frac{13}{24}+\frac{29}{36}+\frac{17}{14}+\frac{5}{12}+\frac{17}{18}=$" (ebenda: 92), Informationen in eine Tabelle eintragen bezüglich des *Nenners* einer *Summe von Brüchen*, des entsprechenden *Erweiterns* und des *Kürzens*, Eintragen von *Brüchen* in eine Tabelle, sodass waagrechte, senkrechte und diagonale Reihen die Zahl 1 ergeben, Eintragen von Ergebnissen von vorgegebenen Rechengängen in eine Tabelle und Textbeispiele, in denen es um Erbschaft, Würfeln eines verschiedenfärbigen Würfels und die Aufteilung von Äpfeln und Zuckerln geht (ebenda: 93f).

Darauf folgt die Information, dass man *Brüche*, deren Wert größer als 1 ist, als *gemischte Zahl* anschreiben kann, womit in der Folge *Additionen* und *Subtraktionen* durchgeführt werden (ebenda: 95-97). Diese sind *Vereinfachungen* von „$2\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}=$" (ebenda: 96), „$2\frac{2}{5}+3\frac{3}{5}-\left(2\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)=$" (ebenda: 96), Eintragen von *gemischten Zahlen* in eine Tabelle, sodass alle waagrechten, senkrechten und diagonalen Reihen eine vorgegebene Zahl ergeben und Textaufgaben, die das Alter von Geschwistern und Einkaufslisten zum Thema haben (ebenda: 96f).

Darauf wird der Zusammenhang zwischen *Brüchen* und *Dezimalzahlen* besprochen. In den vorgegebenen Aufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler *Brüche in Dezimalzahlen* und *Dezimalzahlen in Brüche* umwandeln (ebenda: 97). Danach folgt folgende *Definition* von *periodischen Dezimalzahlen*:

> Man nennt Dezimalzahlen mit Zifferngruppen, die sich wiederholen, **periodische Dezimalzahlen**. Die sich dabei wiederholenden Zifferngruppe nennt man **Periode** und kennzeichnet sie durch darüber stehende Punkte:
>
> $\frac{2}{3}=2:3=0,\dot{6}$ und $\frac{3}{7}=3:7=0,\dot{4}2857\dot{1}$
>
> (Ebenda: 98)

Anschließend finden sich wiederum Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler *Brüche in periodische Dezimalzahlen* und *periodische Dezimalzahlen in* Brüche umwandeln sollen (ebenda: 98).

Danach wird erklärt wie *Brüche multipliziert* und *dividiert* werden. Zuerst wird besprochen, wie ein *Bruch mit einer natürlichen Zahl multipliziert* wird. Hier wird nur der *Zähler* des *Bruchs* mit der *natürlichen Zahl* multipliziert: $a \cdot \frac{z}{n} = \frac{a \cdot z}{n} = \frac{z \cdot a}{n} = \frac{z}{n} \cdot a.$ Hierbei wird darauf hingewiesen, dass $2\frac{1}{2} \neq 2 \cdot \frac{1}{2}$ und dass eine *gemischte Zahl* beim *Multiplizieren* in einen *unechten Bruch* umgewandelt werden muss. Aufgabentypen für dieses Thema sind: Berechnungen von *Multiplikationen von Brüchen* mit vorgegebenen *natürlichen Zahlen* (ebenda: 106), Berechnungen von „$3\frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2}$“ (ebenda: 106), „$2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{5}{12} \cdot 6$“ (ebenda: 106), „$\frac{7}{8} kg \cdot 24 =$“ (ebenda: 107), Ablesen des Wertes eines *Bruchs* anhand eines *Tortendiagramms* und Textbeispiele, die Schnitten, Schulmilchpackerl, Computer, Erbschaft, Wanderung, Quadrat, Körper, Autobus, Molkereilieferung, Kleidergeschäftsauflösung, Straßensanierung, zurückgelegten Weg und Wandertag zum Thema haben. Dabei wird darauf hingewiesen, dass die Wörter *zu* und *von* auf eine *Multiplikation* hinweisen (ebenda: 107f).

Danach wird das *Dividieren eines Bruchs durch eine natürliche Zahl* erklärt. Hier muss der *Nenner* des *Bruchs* mit der natürlichen Zahl multipliziert werden: $\frac{z}{n} : a = \frac{z}{n \cdot a}$. Aufgabentypen sind Berechnungen von „ $\frac{17}{3} : 5$ [sic]“ (ebenda: 110), Herausfinden des Wertes eines *Bruchs* anhand von *Tortendiagrammen* (ebenda: 110) und Textaufgaben, die sich mit Training, Orangen, Schwimmen und der Futtermenge für Seehunden beschäftigen (ebenda: 110).

Des Weiteren wird die *Multiplikation von zwei Brüchen* erklärt. Dabei werden die *Zähler* und *Nenner* miteinander multipliziert: $\frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1 \cdot z_2}{n_1 \cdot n_2}$. Danach folgen einige Aufgaben, bei denen zwei *Brüche* miteinander *multipliziert* werden. Außerdem besteht die Möglichkeit *Brüche* kreuzweise zu *kürzen* um die folgende *Multiplikation* zu vereinfachen. Dies kann danach anhand von einigen Aufgaben mit *Brüchen* und *gemischten Zahlen* eingeübt werden. Im nächsten Schritt wird auf den Unterschied zwischen dem *Addieren* und dem *Multiplizieren von Brüchen* aufmerksam gemacht und es folgen Textaufgaben, die ein Grillhuhn, Anteile von Maßen, den Preis einer Waschmaschine, fehlerhafte Rechengänge und die Erklärung eines Sonderfalls einer Formel zum Thema haben (ebenda: 111f).

Danach folgt die Erklärung der *Division von Brüchen*, welche mit dem *Kehrwert des zweiten Bruchs* durchgeführt wird: $\frac{z_1}{n_1} : \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{n_2}{z_2} = \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot z_2}$. Darauf kann diese Regel wiederum anhand von Aufgaben mit gegebenen *Brüchen* und Textaufgaben, die Marmeladegläser, Saftflaschen und Milchprodukte zum Thema haben, eingeübt werden. Anschließend wird der Begriff *Doppelbruch* eingeführt und erklärt wie man diesen auflöst: $\frac{\frac{z_1}{n_1}}{\frac{z_2}{n_2}} = \frac{z_1}{n_1} : \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{n_2}{z_2} = \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot z_2}$. Diese Regel kann anhand von Aufgaben mit Brüchen und Textaufgaben eingeübt werden, die sich mit Lotteriegewinn, Turnunterricht, Lauftraining, Apfelsaft für eine Party, Bodenbelag, Zustellungen von Kisten, Orangensaft für eine Feier, einem Buch und *Bruchteilen von Bruchteilen* beschäftigen (ebenda: 113-115). Die Besprechung dieses Themas folgt im englischen Schulsystem erst im Zuge des folgenden Themenblocks.

Abschließend wird die *Klapustri (Klammer vor Punkt vor Strich)-Regel* in Zuge des *Bruchrechnens* erklärt. Folgende Aufgabentypen dienen zum Einüben des Stoffes: Berechnungen von „$(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{4}{17}$“ (ebenda: 116), „$(3 \cdot \frac{2}{5} - 1) \cdot (3 \cdot \frac{2}{5} + 1)$“ (ebenda:116), „$(1\frac{1}{5} + \left(1\frac{2}{15} + 5\frac{2}{15} : 1\frac{2}{5}\right) - 1\frac{5}{6} \cdot 2\frac{2}{5}$“ (ebenda: 116) und „$\frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{7}{10}}$ “ (ebenda: 116).

Außerdem wird erklärt wie periodische Dezimalzahlen in einen Bruch umgewandelt werden können:

> Wandle $0,\dot{6}$ in Bruchschreibweise um!
> Da wir das Ergebnis nicht kennen, nennen wir es x und schreiben die Gleichung auf:
>
> $$x = 0,\dot{6} \quad | \cdot 10 \text{ Wir erweitern mit 10}$$
> $$10x = 6,\dot{6}$$
>
> Nun subtrahieren wir die obere Gleichung von der unteren:
>
> $$10x - x = 6,\dot{6} - 0,\dot{6}$$
> $$9x = 6 \quad | :9$$
> $$x = \frac{6}{9}$$
> $$x = \frac{2}{3}$$
>
> (Ebenda: 176)

Daran anschließend wird darauf hingewiesen, dass bei einer Periode, die mehr Ziffern hat, eine Multiplikation mit einer größeren dezimalen Einheit erfolgen muss. Dadurch verschwindet die Periode beim Abziehen. Darauf folgen Aufgaben, anhand derer diese Theorie geübt werden kann (ebenda: 176).

5.2.3.3 *Unterschied England – Österreich*

Wiederum überschneiden sich die besprochenen Themen in beiden Ländern.

Im englischen Schulsystem wird das Lösen der Aufgaben der zugrundeliegenden Theorie vorgezogen und es werden Beweise durchgeführt, die nicht allgemeingültig sind.

Im österreichischen Schulsystem wird viel Wert auf Details und den Aufbau des Stoffes gelegt. Hier steht das Verständnis von *Brüchen* und die Vorstellung des *Erweiterns* viel mehr im Vordergrund als in England. Dieses wird zuerst entwickelt und vertieft bevor Aufgaben dazu gestellt und gelöst werden. Auch bei den Aufgaben wird das tiefere Verständnis miteinbezogen, was sich beispielsweise beim *Ordnen von Brüchen* zeigt. Außerdem werden *Brüche* auf bereits bekannte *Dezimalzahlen* zurückgeführt. Dadurch ergibt sich ein besseres Erfassen von *Brüchen*. Der Nachteil dabei besteht jedoch darin, dass die Schülerinnen und Schüler im Arbeiten mit *Dezimalzahlen* verhaftet bleiben. Viele sind der Meinung, dass es sich mit *Dezimalzahlen* leichter rechnen lässt und dass diese „schöner" sind. Um diese Meinung zu vermeiden werden *Brüche* in *Dezimalzahlen* und *Dezimalzahlen* in *Brüche* umgewandelt. Darüber hinaus wird das *Dividieren und Multiplizieren von Bruchzahlen* viel langsamer und systematischer als im englischen Schulsystem erklärt. Zuerst erfolgt der *Umgang mit natürlichen Zahlen* und dann erst wird der *Umgang mit Bruchzahlen* erklärt. Im Gegensatz zum englischen Schulsystem werden *Bruchterme* laut dem österreichischen Lehrplan erst in der 4. Klasse (8. Schulstufe) besprochen. Deshalb werden diese hier noch nicht mit dem Bruchrechnen in Verbindung gebracht.

Obwohl eine Überschneidung der einzelnen Themen erkennbar ist, ergeben sich Unterschiede bezüglich des Aufbaues und dem Verfolgen der Ziele. Im englischen Schulsystem werden die Stoffgebiete meist anhand von Aufgaben vorgestellt, wobei in Österreich die zugrundeliegende Theorie eine maßgebliche Rolle spielt.

5.2.4 Geometrie (Shape)

Laut dem Plan werden in diesem Kapitel *Symmetrie (Symmetry)*, *Spiegelung (Reflection)*, *Vergrößerung (Enlargement)*, *Drehung (Rotation)*, *Umrechnung (Translation)*, *Vermischte Aufgaben (Combined Transformations)* und Zeichnen nach Maßstab *(Scale Drawing)* besprochen. In den Unterlagen finden sich jedoch keine Aufzeichnungen dazu. Diese Themen werden im österreichischen Schulsystem ebenso besprochen. Da jedoch kein Vergleich möglich ist, wird auf die Besprechung dieser Stoffgebiete verzichtet.

5.3 November und Dezember (England) – 2. Klasse bis 7. Klasse (Österreich)

5.3.1 Numerik (Number)

5.3.1.1 England

In diesem Block, wird die *Numerik (Number)* mit dem Thema *Exponenten (Indices)* begonnen. Zuerst werden die Regeln bezüglich dem *Arbeiten mit Potenzen* wiederholt. (Anm.: Zwischen Definitionen uns Sätzen wird nicht unterschieden.) Folgende Aufgaben dienen dazu: *Vereinfachungen* von „$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$" (Parsons 2010: 43), „$m \times m \times m =$" (ebenda: 43) und „$10^2 \times 10^3 =$" (ebenda: 43). Danach werden die Regeln bezüglich *Multiplizieren*, *Dividieren* und *Potenzieren von Potenzen mit gleicher Basis* anhand folgender Aufgaben eingeführt: „$5^6 \times 5^3 = 5^3$" (Schulübungsheft), „$16^8 \div 16^5 = 16^3$" (ebenda) und „$(7^2)^3 = 7^6$" (ebenda). (Anm.: Die Verfasserin ist der Meinung, dass diese Regeln allgemein formuliert werden sollten.) Daraufhin wird besprochen, dass jeder Ausdruck, der mit Null potenziert wird, 1 ergibt. Diese Regel wird mit folgenden Aufgaben illustriert: „$6^5 \div 6^5 = 6^0$" (ebenda) und „$\frac{6^5}{6^5} = 1$" (ebenda). Anschließend werden folgende Aufgaben gelöst um die Schreibweise von negativen *Exponenten* einzuführen: „$6^5 \div 6^7 = 6^{-2}$" (ebenda) und „$\frac{6^5}{6^7} = \frac{6\times6\times6\times6\times6}{6\times6\times6\times6\times6\times6\times6} = \frac{1}{6\times6} = \frac{1}{6^2}$" (ebenda). Somit ergibt sich die Regel $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Danach folgen Aufgaben zum Einüben der vorgestellten Regeln *(Practice Questions)*: „$5^{-2} = \frac{1}{25}$" (ebenda), „$6^{-1} = \frac{1}{6}$" (ebenda), „$12^0 = 1$" (ebenda), „$2^{-5} = \frac{1}{32}$" (ebenda) und „$3^{-4} = \frac{1}{81}$" (ebenda). Diese Aufgaben werden anschließend verglichen und bei einem richtigen Ergebnis abgehakt (ebenda).

Danach wird besprochen, dass ein *Bruch im Exponent* mit *Wurzelziehen* gleichzusetzen ist. Zuerst wird geklärt, dass „$1^{1/2} \times 1^{1/2} = 1$" (ebenda) bzw. „$\sqrt{1} \times \sqrt{1} = 1$" (ebenda), weil „$x^{1/2} = \sqrt{x}$" (ebenda). Des Weiteren ist „$4^{1/3} \times 4^{1/3} \times 4^{1/3} = 4$" (ebenda) wegen „$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$" (ebenda). Darauf wird diese Art zu rechnen mit dem *Potenzieren von Potenzen* in Verbindung gebracht.

Aufgaben dazu sind: „$27^{2/3} = (27^{1/3})^2 = (3)^2 = 9$“ (ebenda), „$16^{5/4} = (16^{5/4})^5 = (2)^5 = 32$“ (ebenda), „$81^{3/4} = (81^{1/4})^3 = (3)^3 = 21$“ und „$125^{-2/3} = \frac{1}{125^{2/3}} = \frac{1}{(125^{1/3})^2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$“ (ebenda). Zuletzt wird die folgende Gleichung gelöst: „$64^x = 4 \Rightarrow 64^{1/3} = 4, because\ 4 \times 4 \times 4 = 64 \Rightarrow\ x = {}^1/_3$“ (ebenda). (Anm.: Die Verfasserin dieser Arbeit ist der Meinung, dass diese Aufgaben zusätzlich mithilfe von allgemeingültigen Regeln besprochen werden sollten.)

Im Folgenden werden spezielle Begriffe eingeführt, die die Schülerinnen und Schüler für das weitere Kapitel benötigen. Diese sind: (Number Vocabulary), die die Schülerinnen und Schüler für das folgende Thema benötigen sind: Quadrat- (Square), Kubik- (Cube), Dreiecks- (Triangular) und Primzahlen (Prime Numbers), sowie Potenzen (Powers), ungerade (Odd) und gerade Zahlen (Even Numbers) (Parsons 2010: 39).

Darauf folgen Aufgaben bezüglich unterschiedlicher *Zahlenmengen (Types of Number)*. Diese beschäftigen sich mit *Wurzelziehen*, *Ganzen Zahlen*, 1 als erste *ungerade Zahl*, erste *Quadrat*- bzw. *Kubikzahl* und darauffolgende Zahlen dieser Art, sowie das Aufschreiben von *Folgen* bestehend aus *Prim*- und *Quadratzahlen*. Danach wird darauf hingewiesen, dass 1 keine *Primzahl* ist. Die weiteren Aufgaben beschäftigen sich mit *Primzahlen*. Die Schülerinnen und Schüler sollen aus den *Ziffern* 1, 2, 5 und 9 eine *Primzahl*, die größer als 20 ist, eine *Primzahl*, die zwischen 10 und 20 liegt, zwei *Primzahlen*, deren *Summe* 21 ist und eine Zahl, die keine *Primzahl* ist, bilden. Dabei können einzelne oder mehrere verwendet werden. Danach ist ein *Quadrat* mit 10×10 Feldern gegeben, in denen alle *Primzahlen* eingekreist werden sollen. Unter den *Primzahlen*, die zwischen 10 und 100 liegen sollen jene gefunden werden, die bei vertauschten *Ziffern* immer noch *Primzahlen* sind und es soll ein Grund angegeben werden, warum 27 keine *Primzahl* ist. Bei den letzten beiden Aufgaben soll die größte *Primzahl*, die kleiner als 120 ist gefunden werden und es soll beantwortet werden, wie viele *Primzahlen gerade* sind (ebenda: 39).

Das nächste besprochene Thema ist die *Primfaktorzerlegung (Products of Prime Factors/ Prime Decomposition)*. Folgende Aufgaben werden dazu gerechnet:

Schreibe 426 als ein Produkt von Primfaktoren

426
/\\
3 *142*
/\\
2 71

426=3×2×71

(Schulübungsheft)

Schreibe 234 als ein Produkt von Primfaktoren

234
/\\
2 *117*
/\\
3 *34*
/\\
3 13

234=2×3×3×13

(Ebenda)

Danach wird der *größte gemeinsamer Teiler* oder *ggT (Highest Common Factor* or *HCG)* definiert, der die größte *Zahl*, die zwei *Zahlen* teilt, darstellt. Das folgende Beispiel illustriert diese Regel: „$426 = \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times 71, 234 = 3 \times \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times 13$“ (ebenda) ⇒ „$3 \times 2 = \mathbf{6}$“ (ebenda). Des Weiteren wird das *kleinste gemeinsame Vielfache* oder *kgV (Lowest Common Multiple* or *LCM)* definiert als die kleinste *Zahl*, die zwei *Zahlen* teilt. Folgendes Beispiel wird dazu aufgeschrieben: z.B. ist das kgV von 7 und 12 gleich 84. Danach wird folgende Aufgabe gelöst: „$426 = \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times 71, 234 = \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 3 \times 13$“ (ebenda) ⇒ „$6 \times 3 \times 13 \times 71 = 16614$“ (ebenda).
Laut Plan folgen zusätzlich die Berechnung des *Kehrwerts (Reciprocal)* und das *Dividieren* und *Multiplizieren* von *negativen Zahlen* *($\times/\div$ Negative Numbers)* (ebenda). Darüber finden sich jedoch keine Aufzeichnungen bzw. Erklärungen im Schulbuch. Deshalb wird darauf im weiteren Verlauf nicht eingegangen.

5.3.1.2 Österreich

Das *Multiplizieren*, *Dividieren* und *Potenzieren von Potenzen* ist im österreichischen Schulsystem an einer anderen Stelle vorgesehen, weshalb dieses Thema schon im vorherigen Abschnitt besprochen wurde. *Gerade* und *ungerade Zahlen* werden im österreichischen Schulsystem in der AHS nicht explizit besprochen, da diese bereits in der Volksschule behandelt werden.

Kubikzahlen und *Dreieckszahlen* sind im österreichischen Lehrplan nicht vorgesehen. Jedoch werden *Primzahlen* in der 2. Klasse AHS (6. Schulstufe), *Quadratzahlen* in der 3. Klasse AHS (7. Schulstufe) und *Kubikwurzeln* in der 4. Klasse AHS (8. Schulstufe) eingeführt. *Potenzen* mit *rationalen Exponenten* werden in der 6. Klasse AHS (10. Schulstufe) durchgenommen.

Das Thema *Primzahlen* wird zuerst mit einer Textaufgabe eingeführt. Dabei geht es um ein Mädchen und einen Jungen, die zu einer Rätselrallye eingeladen werden. Es soll eine Gruppe von 12 Mitgliedern gebildet werden. Wenn es 11 oder 13 Mitglieder sind, gibt es Probleme bei der Gruppenbildung. Die Schülerinnen und Schüler sollen dann selbst die Eigenschaften von 11 und 13 herausfinden und andere Zahlen finden, die dieselben Eigenschaften aufweisen. Danach werden *Primzahlen* definiert: „Natürliche Zahlen, die genau 2 Teiler haben – nur 1 und sich selbst, heißen **Primzahlen**. Die Zahl 1 ist daher keine Primzahl.“ (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattelberger 2009: 59). Darauf wird erklärt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt und dass man sich mit *Primzahlen* schon im Altertum beschäftigte. Anschließend folgt eine Aufgabe, in der es um eine Leichtathletikgruppe geht, die in Teilgruppen aufgeteilt werden soll und es werden *echte* und *unechte Teiler* besprochen: „Von den Teilern einer Zahl heißen 1 und die Zahl selbst unechte Teiler, alle anderen Teiler heißen echte Teiler.“ (Ebenda: 60) Danach kann diese Theorie anhand von Aufgaben eingeübt werden und das *Sieb des Eratosthenes* wird besprochen. Damit sollen alle Primzahlen von 1 bis 100 gefunden werden (ebenda: 59-61).

Danach werden *Primfaktoren* anhand folgender *Definition* besprochen:

> Primzahlen werden manchmal als „Bausteine der natürlichen Zahlen“ bezeichnet. Denn mit Ausnahme von 0 und 1 lassen sich alle natürliche Zahlen, die selbst keine Primzahlen sind, durch Multiplikation von Primzahlen erzeugen.
>
> Beispiele: $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
>
> Da die Zahlen als Produkte von Primzahlen dargestellt werden, heißen die Faktoren **Primfaktoren**.
>
> (Ebenda: 62)

Danach folgen Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler Zahlen finden sollen, die sich aus unterschiedlichen *Primfaktoren* ergeben und herausfinden aus welchen *Primfaktoren* vorgegebene Zahlen bestehen (ebenda: 62). Darauf wie die *Primfaktorzerlegung* anhand von folgender Aufgabe erklärt.

> Primfaktorzerlegung für 140:

140	2	
70	2	
35	5	
7	7	Auf der rechten Seite lassen sich nun die
1		Primfaktoren von 140 ablesen: $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$

> (Ebenda: 62)

Danach kann dieser Rechengang anhand von einigen Aufgaben eingeübt werden (ebenda: 62). Außerdem werden *Teilbarkeitsregeln* besprochen, auf die jedoch nicht eingegangen wird, da diese im englischen Schulsystem nicht besprochen wurden (ebenda: 63-67).

In weiterer Folge werden das *kleinste gemeinsame Vielfache* und der *größte gemeinsame Teiler* besprochen. Zuerst ist ein Beispiel gegeben, in dem es um einen Putzplan für ein Aquarium geht. Danach folgt die *Definition* des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen*: „Das kleinste gemeinsame Vielfach (kgV) von mehreren Zahlen ist die kleinste Zahl, die ein Vielfaches all dieser Zahlen ist.“ (Ebenda: 68)

Anschließend folgen Aufgaben, die zum Einüben dieser Theorie dienen und eine Textaufgabe, die sich mit dem Zählen von Bäumen neben einer Straße beschäftigt. Darauf folgt ein Beispiel, das sich mit dem Aufstellen eines Zauns beschäftigt und zur *Definition* des *größten gemeinsamen Teilers* überleitet. Diese lautet: „Der größte gemeinsame Teiler (ggT) von mehreren Zahlen ist die größte Zahl, die ein Teiler all dieser Zahlen ist.“ (Ebenda: 69). Danach folgen Aufgaben, die sich mit diesem Thema beschäftigen. Außerdem wird erklärt, dass das *kleinste gemeinsame Vielfache* und der *größte gemeinsame Teiler* mithilfe der *Primfaktorzerlegung* berechnet werden können:

> Das **kleinste gemeinsame Vielfache** (kgV) von zwei Zahlen muss alle Primfaktoren enthalten, die notwendig sind, um die beiden Zahlen zu bilden. Mehr Primfaktoren darf es nicht enthalten, sonst ist es nicht das *kleinste* gemeinsame Vielfache.
>
> **kgV(18,60)**

60	2	18	2
30	2	9	3
15	3	3	3
5	5	1	
1			

> Zu den Primfaktoren der großen Zahl $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ wird der Faktor 3 ergänzt, sodass auch $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ gebildet werden kann.
> $\mathrm{kgV}(18,60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$
>
> Der **größte gemeinsame Teiler** (ggT) ist aus jenen Primfaktoren zusammengesetzt, die in beiden Zahlen enthalten sind.
>
> **ggT(18,60)**

60	2	18	2
30	2	9	3
15	3	3	3
5	5	1	
1			

> $ggT(18,60) = 2 \cdot 3 = 6$
>
> (Ebenda: 69)

Danach folgen Aufgaben, mit deren Hilfe das *kgV* und der *ggT* berechnet werden sollen und Textaufgaben, die sich mit Reitstunden, Fußballtraining, Schifffahrtsplänen, einem Projekttag, der Verkleidung einer Wohnzimmerdecke und einem Wettrechnen beschäftigen (ebenda: 68-72).

In der 3. Klasse (7. Schulstufe) werden *Quadratzahlen* eingeführt, indem einige Aufgaben gegeben sind, die die *Konstruktion von Quadraten* verlangen. Im nächsten Schritt werden der *Umfang* und die *Fläche des Quadrats* vorgestellt. Anschließend folgen einige Aufgaben, bei denen diese Theorie angewendet werden soll. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler, dass es am Taschenrechner eine x^2-Taste gibt, mit deren Hilfe die *Quadratzahl* berechnet werden kann. Des Weiteren folgen Berechnungen von *Quadratzahlen* und *Umkehraufgaben*. Zusätzlich wird die *Quadratwurzel* eingeführt. Dabei wird darauf hingewiesen, dass das *Wurzelziehen* die *Umkehroperation des Quadrierens* ist und dass die *Zahl unter der Wurzel* nicht *negativ* sein darf (ebenda: 152f).
Darüber hinaus werden einige Fachbegriffe eingeführt: *Wurzelzeichen*, *Radikand (Zahl unter der Wurzel)* und *(Wert der) Quadratwurzel*. Weiters wird erklärt, dass sich das *Wurzelzeichen* aus dem Buchstaben *r* entwickelte, da das lateinische Wort für *Wurzel radix* lautet. Darauf folgen einige Aufgaben, bei denen *Wurzeln* gezogen und Textaufgaben gelöst werden sollen. Diese beschäftigen sich mit dem Verwenden des Taschenrechners und dem Wert von *Wurzeln*. Im Anschluss daran folgen *Umkehraufgaben*, bei denen der *Flächeninhalt eines Quadrats* gegeben ist und die *Seite a* berechnet werden soll, und *Rechenregeln für Wurzeln* (ebenda:153f). Diese lauten:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq b; b \geq 0)$

da z.B.: $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$ bzw. $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0; b > 0)$ da z.B.: $\sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ bzw. $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

(Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2010: 154)

Anhand der darauffolgenden Aufgaben können diese Regeln angewendet werden (ebenda: 154).
In der 4. Klasse (8. Schulstufe) erfolgt die Besprechung der *Kubikwurzel* anhand des *Volumens des Würfels* (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2011: 78f). Darauf wird nicht näher eingegangen, da kein Vergleich mit dem englischen Schulsystem möglich ist.

Potenzen mit rationalen Exponenten werden in der 6. Klasse (10. Schulstufe) besprochen. Zu Beginn werden die Schülerinnen und Schüler gebeten folgende *Rechenausdrücke* in ihre Taschenrechner einzugeben: $9^{0,5}, 16^{0,5}$ und $25^{0,5}$. Daraus wird geschlossen, dass aus diesen Zahlen die *Quadratwurzel* gezogen wird. Diese Überlegung wird anhand des folgenden Ausdrucks erläutert: „$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = 9 = 9^1 = 9^{(0,5+0,5)} = 9^{0,5} \cdot 9^{0,5}$" (Götz, Reichel, Müller und Hanisch 2010b: 81). Diese Erkenntnis wird dann durch die folgende *Definition* auf das *Ziehen von beliebigen Wurzeln* erweitert.

> Die n-te Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl a ist jene nichtnegative Zahl b, deren n-te Potenz gleich a ist: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}^*$
>
> Dabei heißt a Radikand, n Wurzelexponent und b Wurzel(wert):
>
> $$\sqrt[Wurzelexponent]{Radikand} = Wurzel(wert)$$
>
> (Ebenda: 81)

Ergänzend wird erwähnt, dass man diesen Vorgang als *Wurzelziehen* bezeichnet und der *Satz*, dass diese *Gleichung genau eine Lösung* hat, eingeführt. Danach folgen Bemerkungen, die sich mit den *Lösungen von Gleichungen* wie $x^2 = a$ $(a < 0)$ und dem *Ziehen von Wurzeln aus negativen Zahlen* beschäftigen. Dabei wird darauf hingewiesen, dass es vorkommen kann, dass es keine Lösung für eine Gleichung gibt (ebenda: 81).

Diese führen zur Einführung von *Potenzen mit rationalen Exponenten*: „$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ [,] $a \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$ " (ebenda: 82). Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler $\sqrt[5]{1024}$ mit und ohne Taschenrechner berechnen und es wird darauf hingewiesen, dass *Potenzieren* und *Wurzelziehen Rechenoperationen* darstellen, die *zueinander invers* sind, d.h. einander aufheben. Darauf folgend werden der *Satz* „ $\sqrt[r]{a^s} = a^{s/r}$ [,] wenn $\frac{s}{r} \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ * " (ebenda 82) und die *Definition* „$a^{s/r} = \sqrt[r]{a^s}, a \in \mathbb{R}_0^+, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, s \in \mathbb{Z}$" (ebenda 82) eingeführt. Darüber hinaus folgt die Herleitung der Regel für das *Multiplizieren von beliebigen Wurzeln*: „$\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[s]{a} = a^{1/r} \cdot a^{1/s} = a^{1/r+1/s} = a^{(s+r)/(r \cdot s)} = \sqrt[r \cdot s]{a^{s+r}} = \sqrt[r \cdot s]{a^{r+s}}$" und der Beweis.

Dieser wird folgendermaßen geführt:

> Wir setzen $a = x^{rs}$; dann ist $\sqrt[r]{a} = \sqrt[r]{x^{rs}} = x^s$ und $\sqrt[s]{a} = \sqrt[s]{x^{rs}} = x^r$. Somit ist $\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[s]{a} = x^s \cdot x^r = x^{s+r}$.
>
> Weiters ist $\sqrt[rs]{a^{s+r}} = \sqrt[rs]{(x^{rs})^{s+r}} = \sqrt[rs]{x^{rs(s+r)}} = \sqrt[rs]{(x^{s+r})^{rs}} = x^{s+r}$, was zu beweisen war.
>
> (Ebenda: 82)

Darauf werden folgende Regeln besprochen: „$p \cdot \sqrt[r]{a^s} + q \cdot \sqrt[r]{a^s} = (p+q) \cdot \sqrt[r]{a^s}$" (ebenda: 83), „$\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[s]{a} = \sqrt[rs]{a^{s+r}}$" (ebenda: 83), „$\frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[rs]{a^{s-r}}$" (ebenda: 83), „$\sqrt[r]{a \cdot b} = \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b}$" (ebenda: 83), „$\sqrt[r]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}$" (ebenda: 83), „$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[rs]{a}$" (ebenda: 83) und „$\sqrt[n \cdot r]{a^{n \cdot s}} = \sqrt[r]{a^s}$" (ebenda: 83). Dazu passend soll darauf „$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}}$" (ebenda: 83) mit und ohne *rationalen Exponenten* berechnet werden (ebenda 83). Außerdem werden *partielles Wurzelziehen* und die *Winkelfunktion* besprochen (ebenda: 83f), worauf an dieser Stelle jedoch nicht Bezug genommen wird, da diese Themen im englischen Schulsystem nicht besprochen wurden.

Darauf folgen eine Fülle von Aufgaben, mit deren Hilfe das *Umformen zwischen Potenz- und Wurzelschreibweise* und das *Rechnen mit Potenzen und Wurzeln,* eingeübt werden können. Zu dem zweitgenannten Punkt werden außer Aufgaben mit gegebenen Werten auch Textaufgaben gestellt, die sich mit *Vielecken*, *Körpern*, der Geschwindigkeit des Schalls und der Schwingungsdauer eines Pendels beschäftigen. Zusätzlich sind Angaben zum *Begründen* und *Beweisen* bezüglich dem *Rechnen mit Wurzeln* und der *Wurzelfunktion* verfügbar (ebenda 85-88).

5.3.1.3 Unterschied England – Österreich

In diesem Kapitel besteht der größte Unterschied im Aufbau des Stoffes.

Im englischen Schulsystem werden die Regeln für das *Rechnen mit Potenzen* zu einem gänzlich anderen Zeitpunkt eingeführt als im österreichischen Schulsystem. Hier genügt es das gesamte Thema in der 10.Schulstufe zu besprechen. Die entsprechenden Rechengengänge werden lediglich anhand von Aufgaben mit Zahlen besprochen. Dieses Vorgehen ist einerseits schülerfreundlich, anderseits im Hinblick auf die Allgemeingültigkeit fragwürdig. In Österreich werden die einzelnen Themen von der 6. bis zur 10. Schulstufe aufgeteilt und detaillierter besprochen. Die Aufgaben werden mithilfe von allgemein formulierten Regeln erklärt, was im englischen Schulsystem nicht der Fall ist. Des Weiteren wird in Österreich auf den Umgang mit *Dreieckszahlen*, sowie *geraden* und *ungeraden Zahlen* in der AHS nicht eingegangen. Außerdem sind die Themen *Primzahlen*, *Quadratzahlen* und *Kubikzahlen* auf drei Schuljahre aufgeteilt. Im englischen Schulsystem wird nicht erwähnt, das es unendlich viele Primzahlen gibt und das *Sieb des Eratosthenes* wird nicht explizit hervorgehoben bzw. benannt. Stattdessen sollen die Schülerinnen und Schüler selbst auf ein ähnliches System kommen. Zusätzlich wird die *Primfaktorzerlegung* in Österreich anders realisiert als in England. In Österreich wird diese mithilfe einer *Tabelle*, in England mithilfe eines *Baumdiagramms* veranschaulicht. Eine *Tabelle* hat den Vorteil, dass die Werte leichter abgelesen werden können, bei einem *Baumdiagramm* können die Schülerinnen und Schüler intuitiver vorgehen. Die Berechnung von *kgV* und *ggT* werden in beiden Ländern gleich berechnet. Jedoch werden *Primzahlen*, *ggT* und *kgV* im österreichischen Schulsystem gleich handlungsorientiert mit Hilfe von Textaufgaben eingeführt. Das heißt, es wird nutzungs- und problemorientiert vorgegangen. In England steht die Berechnung im Vordergrund. Zuletzt wird der Umgang mit *Potenzen mit rationalen Exponenten* erst in der 6. Klasse AHS (10. Schulstufe) gelehrt, wobei dabei zur *Wurzelfunktion* übergeleitet wird. Dieses Thema wird wiederum genauer als in England durchgenommen. Es finden sich mehr Erklärungen Regeln und Beweise.

Zusammengefasst kann gesagt werden, dass sich die Handhabung der Themen in England und Österreich maßgeblich unterscheidet. Zusätzlich überschneiden sich nicht alle der besprochenen Themen.

5.3.2 Geometrie (Shape)

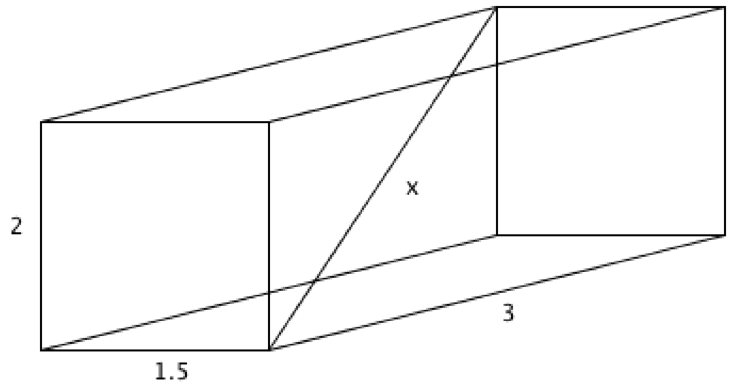
5.3.2.1 England

Das erste Thema in diesem Block beschäftigt sich mit *Dreieckskonstruktionen (Triangle Constructions)*, wobei darauf nicht Bezug genommen werden kann, da sich darüber nichts in den Unterlagen findet.

Danach folgen *Eigenschaften von Dreiecken (Triangle Properties).* Zuerst wird besprochen, dass die *Summe der Innenwinkel im Dreieck* $180°$ beträgt, dass die *Addition der Winkel in einem allgemeinen Viereck* $360°$ beträgt und dass die Winkel um einen Punkt zusammen $360°$ ergeben. Hier werden die Winkel mit a, b, c bzw. a, b, c, d bezeichnet. Danach folgt die Einführung des *Parallelwinkelsatzes.* Dieser lautet: *Wenn eine Linie zwei parallele Linien schneidet, so sind zwei Winkel der Strahlenbüschel gleich groß.* Weiters wird besprochen, dass *Winkel* auf einer *Linie* einander auf $180°$ ergänzen und dass ein *gleichschenkliges Dreieck* zwei gleiche *Seiten* und zwei gleiche *Winkel* hat. Als letzte Regel wird angeführt, dass ein *Außenwinkel* gleich groß ist wie die gegenüberliegenden *Innenwinkel* („$d = a + b$“ (ebenda: 56)). In den folgenden Aufgaben sollen diese Regeln angewendet werden. Dabei sollen *Winkel* bezüglich einer geraden *Linie* und *Strahlen*, die von einem *Punkt* ausgehen, anhand von gegebenen gefunden werden. Danach folgen Aufgaben zu *Dreiecken*, bei denen die Größe der einzelnen *Innen-* bzw. *Außenwinkel* herausgefunden werden sollen. Darauf sind die Größen der *Innen-* bzw. *Außenwinkel* in Vierecken zu bestimmen. Zuletzt wird der *Strahlensatz* in einigen Aufgaben angewendet (ebenda: 56f).

Das nächste Thema beschäftigt sich mit *Beweisen* mithilfe von *Dreiecken (Triangle Proofs)*, wobei darüber keine Aufzeichnungen gefunden werden konnten. Deshalb ist das nächste zu besprechende Thema der *Satz des Pythagoras (Pythagoras Theorem)*. Zuerst wird diese *Formel* aufgeschrieben: „ $A^2 + B^2 = C^2$ “ (Schulübungsheft). Danach sind einige *rechtwinklige Dreiecke* gegeben, von denen zwei *Seiten* bekannt sind, und die dritte berechnet werden soll. Des Weiteren sollen Textaufgaben berechnet werden. In der ersten geht es um ein quadratisches Tischtuch, dessen *Diagonale* 130 *cm* lang ist und die *Länge einer Seite* gefragt ist. Die zweite beschäftigt sich mit einem Baumeister, der einen Dachbalken austauschen möchte, dessen *Länge* er aber nicht weiß. Diese soll berechnet werden, wobei der Balken der Hausbreite entspricht und die Längen der Dachschräge, die Höhe des Hauses und die Höhe bis zur Dachschräge gegeben sind (ebenda: 88f).

Daran anschließend folgt die Skizze eines Quaders.



(Schulübungsheft)

Danach wird anhand des besprochenen Satzes folgende Gleichung aufgestellt „$3^2 + 1.5^2 + 2^2 = x^2$“ (ebenda) ⇔ „$15.25 = x^2$“ (ebenda) ⇔ „$x = 3.91$“ (ebenda). Eine weitere Aufgabe dazu beschäftigt sich mit einem Geschäft, in dem drei unterschiedlich große Geschenkkartons verkauft werden. Katie möchte die günstigste Box kaufen, in die eine 10 cm lange Füllfeder passt. Neben der Aufgabe sind die drei Schachteln in der Form von *Quadern* abgebildet, wobei die *Längen der Grundkanten*, die *Längen der Höhen* und die Preise der Kartons angegeben sind. Die Schülerinnen und Schüler sollen nun berechnen für welche Box Katie sich entscheiden soll (Parsons 2010: 92).

In weiterer Folge werden *ähnliche Dreiecke (Similar Triangles)* besprochen. Dazu werden zwei *ähnliche Dreiecke* skizziert und drei Regeln besprochen wie *Ähnlichkeit* nachgeprüft werden kann. Diese lauten:

1) *Alle drei Seiten haben denselben Skalierungsfaktor.*
2) *Zwei Seiten haben denselben Skalierungsfaktor und der eingeschlossene Winkel ist gleich groß.*
3) *Alle drei Winkel sind gleich groß.*

(Schulübungsheft)

Außerdem folgt die Besprechung von *kongruenten Dreiecken (Kongruent Triangles)*. Dazu werden vier Regeln besprochen, mit denen *Kongruenz* nachgewiesen werden kann.

1) *Alle Seiten sind gleich (SSS).*
2) *Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SAS).*
3) *Der rechte Winkel, die Hypotenuse und eine weitere Seite sind gleich (RHS).*
4) *Zwei Winkel und eine Seite sind gleich (AAS).*

   (Ebenda)

Bei den Aufgaben zum Einüben dieser Theorie sind drei *Dreiecke* gegeben, wobei die Schülerinnen und Schüler die zwei *kongruenten Dreiecke* finden und eine Begründung für ihre Wahl geben sollen. Außerdem ist eine Zeichnung gegeben, bei der wiederum die *Ähnlichkeit der Dreiecke* erklärt werden und die *Länge von zwei Seiten* gefunden werden soll. Des Weiteren ist ein *Dreieck* gegeben, das eine Verbindung von mehreren *Punkten* darstellt. Der gesamte Bereich besteht aus 9 Punkten, die in der Form eines *Quadrats* gegeben sind. Dabei sollen *kongruente Dreiecke* gezeichnet werden, indem diese *Punkte* ebenfalls verbunden werden müssen. Zuletzt ist die *Skizze* einer *symmetrischen Figur* gegeben, die ein Junge aus Metallstangen gebaut hat. Dabei sollen zwei *ähnliche Dreiecke* zu einem weiteren *Dreieck* gefunden, eine Länge und Flächen der *ähnlichen Dreieck* berechnet werden (ebenda: 101).

5.3.2.2 Österreich

Das Thema *Dreiecke* wird in der 2. Klasse AHS (6. Schulstufe) zum ersten Mal besprochen. Als Einführung dient eine kurze Geschichte, in der eine Familie einen Ausflug mit dem Fahrrad unternimmt. Die geplante Route ergibt ein Dreieck auf der Landkarte. Danach folgt die Besprechung der *Eigenschaften* anhand der vorherigen Geschichte und einem Lückentext. Zuerst sollen die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen *Streckenabschnitte* abmessen und die Länge der gesamten Route angeben. Anhand des Lückentextes wird geklärt, dass die Beschriftung der *Eckpunkte* mit Großbuchstaben, der *Seiten* mit Kleinbuchstaben, der *Winkel* mit griechischen Buchstaben und von *geometrische Figuren* gegen den Uhrzeigersinn erfolgen. Danach folgen zwei Aufgaben, bei denen *Dreiecke* beschriftet bzw. gezeichnet und beschriftet werden sollen (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2009: 119f).

Darauf folgen drei Aufgaben zur *Summe der Innenwinkel in einem Dreieck*. Bei der ersten Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler vier verschiedene *Dreiecke* zeichnen, ihre Innenwinkel abmessen und deren *Summe* berechnen. Bei der zweiten Aufgabe ist die Vorgabe ein *Dreieck* zu zeichnen. Dieses soll beschriftet und ausgeschnitten werden. Danach sollen die Ecken abgetrennt und das Dreieck zusammengelegt werden um die *Winkelsumme im Dreieck* zu illustrieren. Bei der dritten Aufgabe soll die *Seite a* durch den *Eckpunkt A* parallel verschoben werden und die neu entstandenen *Winkel* mit den *Winkeln* β und γ in Verbindung gebracht werden. Auf diese Weise wird zur Einführung der *Winkelsumme im Dreieck* übergeleitet. Diese lautet: „Die Winkel α, β und γ werden als Innenwinkel des Dreiecks bezeichnet. Die Summe der Innenwinkel beträgt 180° " (ebenda: 121). Danach folgen Aufgaben, bei denen zwei *Innenwinkel* angegeben sind und der dritte ausgerechnet werden soll (ebenda: 121).
Weiters werden die *Außenwinkel* anhand von zwei Aufgaben eingeführt. Bei der ersten sind eine *Skizze* und mehrere Behauptungen gegeben, wobei die zutreffenden Aussagen anzukreuzen sind. Bei der zweiten Aufgabe soll ein beliebiges *Dreieck* mit seinen *Außenwinkeln* gezeichnet und danach zwei *Außenwinkel* verschoben werden, sodass alle drei denselben *Scheitel* besitzen (ebenda: 121f). Diese Aufgaben sind die Überleitung zu der folgenden Erklärung:

> Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck beträgt 180°
>
> $$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$$
>
> Jeder Außenwinkel ist supplementär zum anliegenden Innenwinkel:
>
> $\alpha_1 = 180° - \alpha$
> $\beta_1 = 180° - \beta$
> $\gamma_1 = 180° - \gamma$
>
> Die Summe der Außenwinkel in einem Dreieck beträgt 360°
>
> $$\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$$
>
> (Ebenda: 122)

Darauf folgen Aufgaben, bei denen einige *Innen- und Außenwinkel* gegeben sind und die fehlenden berechnet und in eine Skizze eingezeichnet werden sollen (ebenda: 121f).

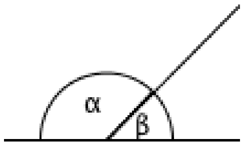
Dazu passend folgt ein Verweis auf *Euklid*, der nachwies, dass die *Summe der Innenwinkel im Dreieck* $180°$ beträgt. Außerdem verfasste er ein Werk namens „Die Elemente“, indem das damalige mathematische Wissen zusammengefasst war (ebenda 123).

Daran anschließend folgen Aufgaben, bei denen Abbildungen von *Dreiecken* gegeben sind, deren *Seiten* und *Winkel* gemessen und in eine Tabelle einzutragen sind. Danach sollen die längste *Seite* und der größte *Winkel* unterstrichen, sowie daraus Schlüsse gezogen werden. Weiters sollen drei beliebige *Dreiecke* gezeichnet und es soll untersucht werden, ob der *längsten Seite* wirklich der *größte Winkel* gegenüberliegt. Dies führt zu der *Definition*, dass der *längsten Seite* tatsächlich der *größte Winkel* gegenüberliegt. Dazu sind zusätzlich ein Beispiel und eine zugehörige *Skizze* gegeben. Darauf folgen Aufgaben, bei denen *Größer*- bzw. *Kleinerzeichen* bezüglich der *Größen von Winkeln* und *Seiten* eingesetzt werden sollen und eine Begründung gefordert wird, warum es unmöglich ist, dass in einem *Dreieck* zwei *stumpfe Winkel* auftreten (ebenda: 123f).

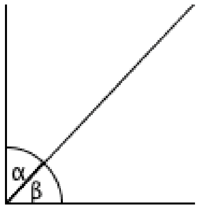
Daran anschließend folgt eine Tabelle, die Informationen zur *Einteilung der Dreiecke nach Winkeln* bzw. nach *Seiten* angibt, wobei einige Wörter von den Schülerinnen und Schülern selbst eingetragen werden müssen. Weitere Aufgaben beschäftigen sich mit der *Dreiecksart des Geodreiecks*, *Arten von Dreiecken*, die nicht existieren, einer Tabelle, in die verschiedenen *Arten von Dreiecken* eingezeichnet werden sollen, sowie Überlegungen, wo *Dreiecke* im Alltag vorkommen. In abschließenden Aufgaben sollen *Skizzen* von vorgegebenen *Dreiecksarten* angefertigt werden (ebenda: 124f).

Zur Einführung *besonderer Winkel* finden sich Aufgaben, die *sich wiederholende Winkel* in Dachziegeln, zwei *Winkel*, deren *Summe* einen *gestreckten Winkel* ergibt, sowie die Größe von *Scheitelwinkeln* zum Thema haben und zwei Textaufgaben, die sich mit der Konstruktion eines Bilderrahmens und dem Zuschneiden von Leisten beschäftigen (ebenda: 37).

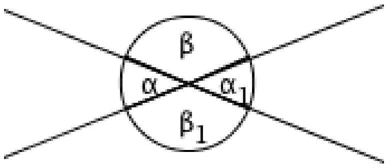
Darauf werden *Supplementär-, Komplementär- und Scheitelwinkel* eingeführt:



Wenn sich zwei Winkel auf 180° ergänzen, so spricht man von Nebenwinkeln oder Supplementärwinkeln.



Wenn sich zwei Winkel auf 90° ergänzen, so spricht man von Komplementärwinkeln.

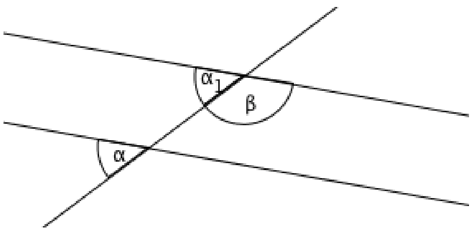


Wenn zwei Geraden einander schneiden, dann nennt man die gegenüberliegenden Winkel Scheitelwinkel. Sie sind gleich groß.

(Ebenda: 38)

Darauf sollen die Größen von *Supplementärwinkeln* bzw. *Komplementärwinkeln* ergänzt und ein Satz vervollständigt werden. In weiterer Folge sollen dann fünf *Winkel* aufgeschrieben und deren *Supplementärwinkel* bzw. *Komplementärwinkel* von der/dem Nachbarin/Nachbar berechnet werden. Außerdem sind zwei *einander schneidende Geraden* zu zeichnen, von denen ein *Winkel* bekannt ist. Die anderen drei Winkel müssen herausgefunden und durch Messen überprüft werden. Außerdem müssen *Scheitelwinkel* in eine Zeichnung eingetragen werden (ebenda: 138f).

Des Weiteren werden *Parallelwinkel* definiert:



Werden parallele Geraden von einer Geraden geschnitten, so entstehen Parallelwinkel. Sie sind gleich groß oder sie ergänzen einander auf 180°.
$\alpha = \alpha_1 \; oder \; \alpha + \beta = 180°$

(Ebenda: 39)

Danach folgt eine Aufgabe, bei der *Parallelwinkel* in eine Zeichnung eingezeichnet werden sollen und eine Textaufgabe, bei der eine Lösung zu einem Problem zu finden ist. (ebenda: 39).

Außerdem werden *Normalwinkel* besprochen (ebenda: 39f), worauf jedoch nicht näher eingegangen wird, da kein Vergleich mit dem englischen Schulsystem möglich ist.

Das Thema *Kongruenzsätze* beginnt mit *Konstruktionsaufgaben*, bei denen die Schülerinnen und Schüler herausfinden sollen, wie viele Bestimmungsstücke benötigt werden, um ein *Dreieck* eindeutig zu konstruieren und es ist ein *Konstruktionsprotokoll* anzufertigen (ebenda 126).

Anschließend leitet die folgende Aufgabe zum *Seiten-Seiten-Seiten–Satz (SSS-Satz)* über. Hier soll ein *Dreieck* in dreifacher Ausführung konstruiert werden, wobei jedes Mal mit einer anderen *Seite* begonnen werden soll. Danach erfolgt die Überprüfung, ob diese *Dreiecke kongruent* sind. Darauf folgt die Einführung des *SSS-Satzes*: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen drei Seitenlängen übereinstimmen.“ (Ebenda 127)

Danach finden sich Aufgaben, bei denen Überlegungen angestellt werden müssen, die zur *Dreiecksungleichung* führen. Diese lautet: „Wenn drei Seiten gegeben sind, kann nur dann ein Dreieck daraus entstehen, wenn die Summe zweier Seitenlängen stets größer ist als die Länge der dritten Dreiecksseite!“ (ebenda: 127) Darauf folgen Aufgaben, bei denen entschieden werden soll, ob die gegebenen *Dreiecke* konstruierbar sind. Wenn dem nicht so ist, wird eine Begründung dafür verlangt. Des Weiteren finden sich Textaufgaben, die eine dreieckige Wiese, eine Flugroute, Schiffsrouten und einen Schüler, der eine Aufgaben lösen will, zum Thema haben (ebenda: 127f).

Anschließend bereiten Aufgaben auf den *Seiten-Winkel-Seiten-Satz (SW-Satz)* vor. Dabei ist ein Tipp bezüglich der *Konstruktion eines Dreiecks* mithilfe des *SWS-Satzes* gegeben, der den Schülerinnen und Schülern helfen soll ein *Dreieck* mit vorgegebenen Maßen zu zeichnen. Danach soll ein *Dreieck* konstruiert, die nicht-gegebenen Größen abgemessen und daraus Schlüsse bezüglich der *Kongruenz* gezogen werden. Schließlich wird der *SWS-Satz* eingeführt: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seitenlängen und dem von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.“ (ebenda:129) Danach finden sich *Konstruktionsaufgaben* und Textaufgaben, die sich mit der Umzäunung eines dreieckigen Grundstücks, einer Flussüberquerung mit einem Ruderboot, einem Mann, der einen See durchschwimmen möchte, zwei Geländepunkten, die durch ein Moor getrennt sind, und einer *Dreieckskonstruktion* beschäftigen (ebenda: 129-131).

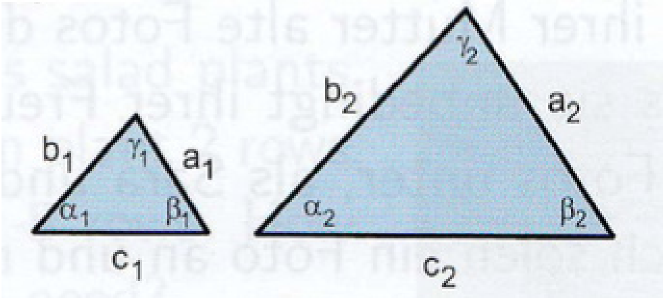
Daran anknüpfend findet sich eine *Konstruktionsanleitung*, die zur Erklärung des *Winkel-Seiten-Winkel-Satzes (WSW-Satz)* führt. Diese lautet: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seitenlänge und in den dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen." (ebenda: 131) Anschließend sind Aufgaben gegeben, bei denen *Dreiecke* konstruiert werden sollen, und *Vermessungsaufgaben*, die sich mit dem direkten Weg zwischen zwei Orten, dem Bau einer Brücke und einer *Dreieckskonstruktion* beschäftigt. Danach folgt ein Tipp, wie ein *Dreieck* konstruiert wird, bei dem entweder der *WSW-Satz* angewendet oder ein *Hilfspunkt* konstruiert und die entsprechende Seite dann *parallelverschoben* wird. Danach finden sich Aufgaben, mit deren Hilfe die vorhergehende Theorie eingeübt werden kann (ebenda: 131-134).

Schließlich folgen Aufgaben, die zum *Seiten-Seiten-Winkel-Satz (SSW)* hinführen. Zuerst ist eine Anleitung gegeben, wie ein *Dreieck* mithilfe des *SSW-Satzes* konstruiert wird. Danach findet sich eine Aufgaben, bei der zwei unterschiedliche *Dreiecke* trotz einer einzigen Angabe konstruiert werden können. Daraus sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Schlüsse ziehen. Daran anknüpfend finden sich zwei weitere Aufgaben, die sich mit diesem Thema beschäftigen. Des Weiteren sollen die erarbeiteten Informationen in einen Lückentext eingetragen und die *Kongruenz* von *Dreiecken* überprüft werden, die mithilfe des *SSW-Satzes* konstruiert wurden. Dieser *Satz* lautet: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seitenlängen und in dem Winkel, der der längeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen" (ebenda: 135).

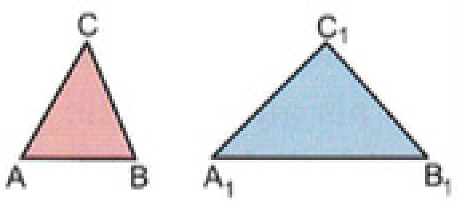
Daran anknüpfend finden sich *Konstruktionsaufgaben* und *Maßstabberechnungen* (ebenda: 134-136).

Das Thema *ähnliche Dreiecke* wird im österreichischen Schulsystem in der 3. Klasse AHS (7. Schulstufe) unterrichtet. Zuerst wird anhand verschiedener Aufgaben geklärt, was im Alltag unter *ähnlich* verstanden wird. Diese haben die *Ähnlichkeit* unter Familienmitgliedern, Fotos und Abbildungen zum Thema. Danach sind zwei *Dreiecke* gegeben, wobei die Länge der *Seiten* und die Größe der *Winkel* gemessen werden sollen, um *Ähnlichkeit* in der Mathematik zu definieren (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2010: 207f).

Dazu wird Folgendes besprochen:

> Figuren, die gleiche Gestalt haben, aber unterschiedliche Größe, bezeichnet man als ähnliche Figuren.
>
> In ähnlichen Figuren sind die entsprechenden Winkel gleich groß.
>
> $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2, \ldots$
>
> 
>
>
> Die entsprechenden Seitenlängen stehen im selben Verhältnis:
>
> $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = \ldots$
>
> Für ähnliche Dreiecke schreibt man: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
>
> (Ebenda: 208)

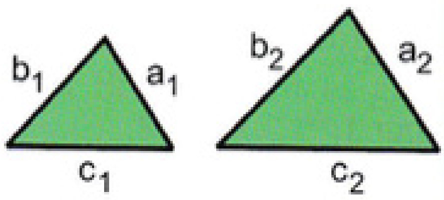
Danach folgen zwei Aufgaben, bei denen die *ähnlichen Dreiecke* gefunden und Begründungen dafür angegeben werden sollen. Der Grund dafür ist, dass es auch *Dreiecke* gibt, die nicht *ähnlich* sind. Dies wird wie folgt erklärt:

> Wenn Figuren nicht ähnlich sind, so wird das Ähnlichkeitszeichen durchgestrichen: $\nsim$
>
> Beispiel: $\Delta ABC \nsim \Delta A_1B_1C_1$
>
> 
>
>
> (Ebenda: 209)

Daran anschließend findet sich eine Aufgaben, bei der die Ähnlichkeit von *Dreiecken* überprüft werden soll (ebenda: 107-209).

Anschließend wird *Ähnlichkeit* bezüglich *Vierecken* bzw. *Vielecken* besprochen und es folgen vermischte Aufgaben zur *Ähnlichkeit von Dreiecken* und *Vierecken* (ebenda: 209-212). Darauf wird jedoch nicht eingegangen, da dieses im englischen Schulsystem nicht besprochen wurde.

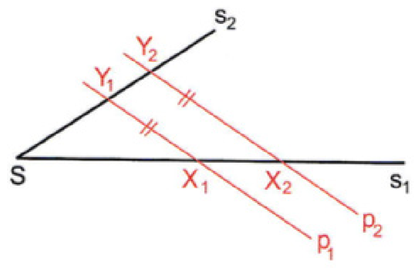
Schließlich findet sich eine Aufgabe, bei der die Schülerinnen und Schüler *Seitenlängen von Dreiecken* berechnen und die *Umfänge von ähnlichen Dreiecken* analysieren sollen. Das führt zu folgendem *Merksatz*:

> Die Umfänge von zwei ähnlichen Dreiecken stehen im selben Verhältnis wie die Längen der Seiten.
>
> $u : u_1 = a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$ [sic]
>
> 
>
>
> (Ebenda: 213)

Daran anschließend folgen Aufgaben, bei denen dieser *Merksatz* bezüglich *Dreiecken* und *Vierecken* angewendet wird (ebenda: 212-214).

In weiterer Folge finden sich Aufgaben, die zur Erarbeitung des *Strahlensatzes* dienen. Zuerst ist eine kurze Anekdote gegeben, in der ein Mädchen eine Schnur in vier gleich lange Teile teilen möchte und sich dann überlegt, wie dieser Vorgang bezüglich einer Strecke möglich ist. Dann folgt ein Beispiel, bei dem mithilfe des *Strahlensatzes* eine Strecke in drei gleich lange Teile geteilt wird. Darauf sollen die Schülerinnen und Schüler erklären, warum die entstandenen Figuren *ähnliche Dreiecke* sind und diverse *Strecken* in gleich lange Teile teilen. Außerdem wird der *Goldene Schnitt* eingeführt, auf den jedoch in dieser Arbeit nicht weiter Bezug genommen wird, da auf diesen im englischen Schulsystem verzichtet wird (ebenda: 215-217).

Schließlich folgt der *Strahlensatz*:



Zwei Strahlen s_1 und s_2, die im selben Punkt S beginnen, werden von zwei parallelen Geraden p_1 und p_2 geschnitten.

Es gilt:

(1) Die Längen zweier Strecken auf dem ersten Strahl verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Strecken auf dem zweiten Strahl.

$\overline{SX_1}:\overline{SX_2} = \overline{SY_1}:\overline{SY_2}$ oder $\overline{SX_1}:\overline{X_1X_2} = \overline{SY_1}:\overline{Y_1Y_2}$

(2) Die Längen der Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Strecken auf den von S ausgehenden Strahlen.

(3)

$\overline{X_1Y_1}:\overline{X_2Y_2} = \overline{SX_1}:\overline{SX_2}$ oder $\overline{X_1Y_1}:\overline{X_2Y_2} = \overline{SY_1}:\overline{SY_2}$

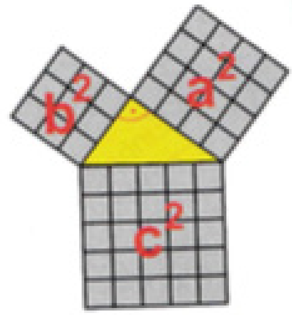
Diese beiden Aussagen bilden den sogenannten Strahlensatz!

(Ebenda: 218)

Darauf folgen Aufgaben, bei denen *Proportionen* aufgestellt und bestimmte *Längen* berechnet, *Strecken* konstruiert, *Teilungen* als *Verkleinerung* und *Vergrößerung* interpretiert und angewendet, sowie *Strecken* in einem vorgegebenen *Verhältnis* geteilt werden sollen (ebenda: 218-221).

Der *Lehrsatz des Pythagoras* wird ebenfalls in der 3. Klasse AHS (7. Schulstufe) besprochen. Als Einführung wird mithilfe der *Knotenschnur* ein *rechtwinkliges Dreieck* erstellt und dessen *Eigenschaften* wiederholt. Darauf folgen Fakten über das Leben des *Pythagoras* und der *Lehrsatz*:

> In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Die Summe der beiden Kathetenquadrate ist flächengleich mit dem Hypotenusenquadrat.
>
> Allgemein gilt: $a^2 + b^2 = c^2$
>
> Drei natürliche Zahlen a, b und c, die diese Gleichung erfüllen, werden als pythagoräisches Zahlentripel bezeichnet.
>
> (Ebenda: 156)



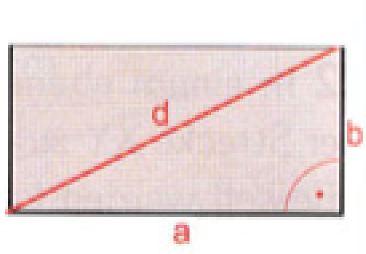
Anschließend folgen Aufgaben, bei denen *rechtwinklige Dreiecke* gegeben sind, wobei *rechte Winkel* eingezeichnet und der *Lehrsatz des Pythagoras* mit den angegebenen Variablen angegeben werden soll. Außerdem findet sich eine Anleitung zu einem Beweis des *Lehrsatzes des Pythagoras*. Des Weiteren ist dieser mit vorgegebenen Werten zu überprüfen und der *Umfang* und der *Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks* zu berechnen. In weiterer Folge werden die benötigten *Formeln* wiederholt, *rechtwinklige Dreiecke* konstruiert, der *Umfang* und der *Flächeninhalt* berechnet und theoretische Fragen bezüglich des *rechtwinkligen Dreiecks* beantwortet. Danach wird die Umformung des *Lehrsatzes des Pythagoras* erklärt und anhand von Aufgaben werden diese Informationen angewendet. Anschließend folgen Textaufgaben, die eine *Tabellenkalkulation*, ein offenes Fenster, die Beziehung zwischen dem *Flächeninhalt* und den *Katheten* im *rechtwinkligen Dreieck*, einer zusammengesetzten Figur und *Vermessungsaufgaben* zum Thema haben (ebenda: 155-159).

Daran wird anschließend darauf eingegangen, wie der *Lehrsatz des Pythagoras* im *Rechteck* und im *Quadrat* angewendet werden kann. Zuerst sollen die Schülerinnen und Schüler die *Diagonalen* im *Rechteck* und im *Quadrat* berechnen und durch Messen überprüfen. Darauf folgt kommender *Merksatz*:

Rechteck:

Die Diagonale teilt ein Rechteck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Daher gilt:

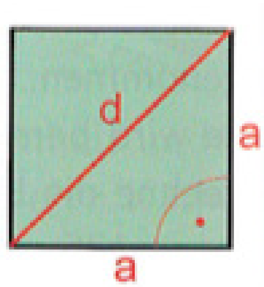
$d^2 = a^2 + b^2$



Quadrat:

Die Diagonale teilt ein Quadrat in zwei rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke. Daher gilt:

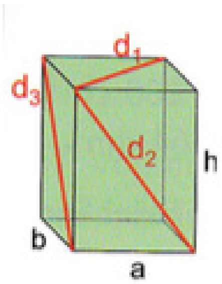
$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow$
$d^2 = 2 \cdot a^2 \Rightarrow$
$d = \sqrt{2 \cdot a^2} \Rightarrow$
$d = a \cdot \sqrt{2}$



(Ebenda: 160)

Darauf finden sich Textaufgaben, die sich mit einem Weg in einem Grundstück, der Berechnung der *Diagonale* und des *Umkreisradius* eines *Rechtecks*, der Berechnung des *Umfang* und des *Flächeninhalts* eines *Rechtecks*, von dem die *Längen der Breite* und *der Diagonale* gegeben sind und der Richtigstellung eines Rechenirrtums beschäftigen. Weitere Themen sind: Spazierwege durch einen Park, die Berechnung der *Diagonale*, des *Umfangs* und des *Flächeninhalts* eines *Quadrats*, die Berechnung der *Diagonale* eines *Quadrats*, wobei der *Flächeninhalt* angegeben ist, und die der Berechnung der *Umfänge* und der *Flächeninhalte* zweier *Quadrate*, wobei die *Seitenlänge* des einen *Quadrats* die *Länge* der *Diagonale* des anderen *Quadrats* ist. Außerdem geht es um die Berechnung der *Seitenlänge* eines *Quadrats*, wobei die *Länge* der *Diagonale* gegeben ist, die Länge des Weges, die ein Schüler auf einem Sportplatz zurücklegt, die Montage von Brettern an einem Zaun und die Berechnung der *Seitenlänge* eine *Quadrats*, wobei die *Länge des Umkreisradius* bekannt ist (ebenda: 160f).

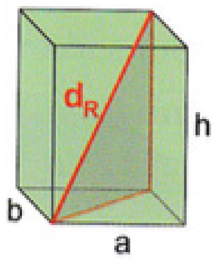
Die Besprechung der *Flächendiagonalen* von *Quader* und *Würfel* erfolgt das erste Mal in der 3. Klasse AHS (7. Schulstufe) (ebenda: 299f) und wird in der 4. Klasse AHS (8. Schulstufe) wiederholt und mit der *Raumdiagonale* ergänzt. Der Merksatz zu den *Flächendiagonalen* und der *Raumdiagonale* im *Quader* lautet:



Die Diagonale der Grundfläche wird mit d_1 bezeichnet. Die Diagonalen der Seitenflächen werden mit d_2 bzw. d_3 bezeichnet [...].

Für die Längen dieser Flächendiagonalen gilt:

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$d_2 = \sqrt{a^2 + h^2}$$
$$d_3 = \sqrt{b^2 + h^2}$$



Die Raumdiagonale wird mit d_R bezeichnet.

Für die Länge der Raumdiagonale gilt:

$$d_R = \sqrt{{d_1}^2 + h^2} \text{ oder}$$
$$d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$$

(Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2011: 111)

Daran anschließend finden sich Aufgaben, bei denen die *Diagonalen* zu berechnen sind, eine Denkaufgabe, bei der überlegt werden soll, welche *Diagonale* die längste sein muss und eine *Seite* und die *Oberfläche* bzw. das *Volumen* eines *Quaders* gegeben sind und die *Länge* der fehlenden *Seite* und die *Diagonalen* berechnet werden sollen. Weitere Themen sind: die Erarbeitung der Frage, warum die *Raumdiagonalen* eines *Quaders* dieselbe *Länge* haben, das Finden eines Denkfehlers bei einer Aufgabe, die *Diagonalen* eines *Quaders* mit *quadratischer Grundfläche* zu berechnen, wobei das *Volumen* und die *Körperhöhe* gegeben sind, die Berechnung der *Schnittkante*, da der *Quader* entlang der *Diagonale* d_2 durchgeschnitten wurde und die Berechnung der *Schnittfläche* eines Holzklotzes, der entlang der *Diagonale* d_1 durchgeschnitten wurde. Nach der Besprechung der *Diagonalen* im *Würfel* und einigen Aufgaben dazu, folgt noch eine Aufgaben, bei der die Masse einer *quaderförmigen* Tischplatte berechnet werden soll (ebenda: 111-113). Auf den *Würfel* wird nicht eingegangen, da dieser im englischen Schulsystem nicht besprochen wurde.

5.3.2.3 Unterschied England – Österreich

Wiederum finden sich zahlreiche Unterschiede in der Handhabung des besprochenen Stoffes.

In Österreich werden die unterschiedlichen Themengebiete auf mehrere Jahre aufgeteilt. Das Thema *Diagonalen im Quader* wird in der 3. Klasse AHS (7. Schulstufe) und in ausgebauter Form in der 4. Klasse AHS (8. Schulstufe) wiederholt. Des Weiteren wird die *Winkelsumme* im *Viereck* im Zuge der *Winkel im Dreieck* im österreichischen Schulsystem nicht angesprochen. Außerdem wird das Thema *Winkel im Dreieck* in Österreich genauer als in England durchgenommen, nur die Tatsache, dass ein *Außenwinkel* durch die *Summe* der nichtanliegenden *Innenwinkel* berechnet werden kann, wird nicht angesprochen. Bezüglich des Themas *Dreiecke* werden die *Kongruenzsätze* in Österreich viel spielerischer und erforschender eingeführt als im englischen Schulsystem. Auf die Theorie folgt immer ein erklärendes Beispiel, das die Schülerinnen und Schüler selbstständig bearbeiten sollen. Das gilt auch für alle sonstigen Regeln, die das Thema *Dreiecke* betreffen. Außerdem wird der *Parallelwinkelsatz* im österreichischen Schulsystem ausführlicher behandelt. Zudem ist die Begriffserklärung von *Ähnlichkeit* genauer dargestellt als in England und die entsprechenden *Eigenschaften* werden wirklich als solche vorgestellt, nicht als *Definitionen*. Darüber hinaus wird der *Strahlensatz* als direkte Weiterführung bzw. Anwendung von *ähnlichen Dreiecken* behandelt. Außerdem ist die *Bezeichnung der Winkel* in beiden Ländern unterschiedlich. In Österreich werden griechische Buchstaben, in England werden arabische Buchstaben verwendet. Weiters wird der *Lehrsatz des Pythagoras* in Österreich mit Kleinbuchstaben und in England mit Großbuchstaben bezeichnet. Im englischen Schulsystem fehlt der Hinweis, dass der *Satz des Pythagoras* ausschließlich im *rechtwinkligen Dreieck* gilt. Hier wird lediglich die betreffende *Formel* eingeführt ohne die zusätzliche Theorie zu besprechen. Zusätzlich wird hier die Ausweitung dieses Themas auf *Rechtecke* und *Quadrate* ausgelassen und es wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler diesen Zusammenhang kennen bzw. selbstständig herausfinden.

In diesem Kapitel kann man erkennen, dass in England und in Österreich unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt werden, obwohl dieselben Themen besprochen werden.

5.3.3 Algebra (Algebra)

5.3.3.1 England

Diese Kapitel beginnt mit dem *Lösen von Gleichungen (Solving Equations)*. Dazu werden folgende Aufgaben gerechnet:

$$\begin{array}{ll} & 5x - 3 = 31 \\ +3 & 5x = 34 \\ \div 5 & x = \frac{34}{5} = 6.8 \end{array}$$

(Schulübungsheft)

$$\begin{array}{ll} & \frac{x+3}{4} = 12 \\ \times 4 & x + 3 = 48 \\ -3 & x = 45 \end{array}$$

(Ebenda)

$$\begin{aligned} &5(3x - 4) = 12 \\ &15x - 20 = 12 \\ &15x = 32 \\ &x = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15} \end{aligned}$$

(Ebenda)

$$\begin{aligned} &15x = 8x + 141 \\ &7x = 141 \\ &x = 20\frac{1}{7} \end{aligned}$$

(Ebenda)

Danach folgen Gleichungen wie „$2(x + 2) + 3(x + 4) = 31$“ (Parsons 2010: 72) und „$\frac{2z}{5} - 3 = -5$“ (ebenda: 72). Die Textaufgaben beschäftigen sich mit Zahlenrätseln, Autoservice, Lotteriespiel, *Winkel* einer zusammengesetzten Figur aus *Vierecken*, Zimmerrenovierung, Alter von Familienmitgliedern, Zugfahrzeiten und *Längen von Dreiecksseiten* (ebenda: 72)

Daran anschließend folgt das *Lösen von Gleichungssystemen (Simultaneous Equations)*. Dazu werden fünf verschiedene Arten besprochen, wie *Gleichungssysteme*, bestehend *zwei Gleichungen und in zwei Variablen*, gelöst werden können. Die erste Art ist das *Addieren (Adding)* von zwei Gleichungen. Dazu wird folgende Aufgabe gelöst:

$$\begin{array}{ll} 2x - y = 2 & ① \\ \underline{x + y = 7} & ② \\ 3x + 0 = 9 & \\ x = 3 & \\ y = 4 & \end{array}$$

(Ebenda)

Danach folgt das *Subtrahieren (Subtracting)* von zwei Gleichungen. Die folgende Aufgabe illustriert diese Vorgehensweise.

$$\begin{array}{ll} ① & x + 7y = 13 \\ ② - & \underline{x + 3y = 9} \\ & 0 + 4y = 4 \\ & y = 1 \\ & x = 6 \end{array}$$

(Ebenda)

Die dritte Art ein *Gleichungssystem aus zwei Gleichungen* zu lösen ist das *Multiplizieren* und *Addieren (Multiply and Add)*. Die nachfolgende Aufgabe beschreibt, wie dabei vorzugehen ist.

$$\begin{array}{lll} ① & & 3x + y = 13 \\ ② & & 5x - 2y = 7 \\ \hline ③ & ① \times 2 & 6x + 2y = 26 \\ ②+③ & & 11x = 33 \\ & & x = 3 \\ & & y = 4 \end{array}$$

(Ebenda)

Die vierte Art stellt das *Multiplizieren und Subtrahieren (Multiply and Subtract) von zwei Gleichungen* dar. In der folgenden Aufgabe findet sich der zugehörige Rechenvorgang.

①		$2x + 5y = 31$
②		$x + 6y = 33$
③	② $\times 2$	$2x + 12y = 66$
③-①		$7y = 35$
		$y = 5$
		$x = 3$

(Ebenda)

Zuletzt kann ein Gleichungssystem durch das *Multiplizieren beider Gleichungen (Multiply both)* gelöst werden, was bei der folgenden Aufgabe gezeigt wird.

①		$3x + 5y = 22$
②		$4x - 7y = 2$
③	① $\times 4$	$12x + 20y = 88$
④	② $\times 3$	$12x - 21y = 6$
		$41y = 82$
		$y = 2$
		$x = 4$

(Ebenda)

Anschließend folgen Aufgaben, die sich mit einem Bauern, der Tiere kauft, Katzen, die in den Hühnerstall einbrechen, einem Mädchen, das Süßigkeiten kauft, *Seitenlängen von Rechtecken* und einem Einkauf von Milch und Cornflakes beschäftigen (Parsons 2010: 75).

Das nächste Thema ist das *Lösen von quadratischen Gleichungen durch Aufspalten in Linearfaktoren (Solving Quadratic Equations by Factorising)*. Ohne weitere Erklärung werden dazu folgende Aufgaben gelöst:

$x^2 + 7x + 12 = 0$
$(x + 3)(x + 4) = 0$
$x = -3\ or - 4$

(Schulübungsheft)

$x^2 + 3x - 10 = 0$
$(x + 5)(x - 2) = 0$
$x = -5\ or + 2$

(Ebenda)

Daran anschließend wird das *Lösen von Gleichungssystemen mit quadratischen Gleichungen (Simultaneous Equations with Quadratics)* anhand von folgender Aufgabe besprochen.

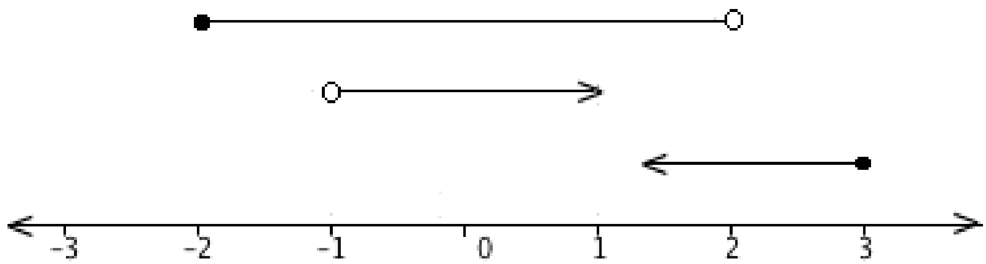
①	$x^2 + y^2 = 20$
②	$x + 2y = 10$
rearrange ②	$x = 10 - 2y$
substitute into ①	$(10 - 2y)^2 + y^2 = 20$ ③
	$100 - 40y + 4y^2 + y^2 = 20$
	$5y^2 - 40y + 80 = 0$
③÷ 5	$y^2 - 8y + 16 = 0$
	$(y - 4)(y - 4) = 0$
	$y = 4$
from ①	$x^2 + 16 = 20$
	$x^2 = 4$
	$x = 2\ or - 2$

(Anm.: Hier ist nur 2 eine Lösung. Es fehlt der Schluss, dass -2 keine Lösung ist.)
(Ebenda)

Danach folgen *Umformungen nach einer vorgegebenen Variablen (Changing the Subject)*. Erste Aufgaben dazu sind: Umformen von „$g = 10 - 4h$“ (Parsons 2010: 78) nach der Variable *h* und „$a = \frac{2b}{3}$“ (ebenda: 78) nach der Variable *b*. Danach folgen Textaufgaben, die sich mit dem Ansparen einer Geldsumme für eine Reise und dem Mieten eines Autos beschäftigen. Darauf folgen Aufgaben wie „$y = x^2 - 2$“ (ebenda: 78), „$y = \sqrt{(x + 3)}$“ (ebenda: 78) und „$r = (\frac{s}{2})^2$“ (ebenda: 78), wobei wieder nach vorgegebenen Variablen umgeformt werden soll.

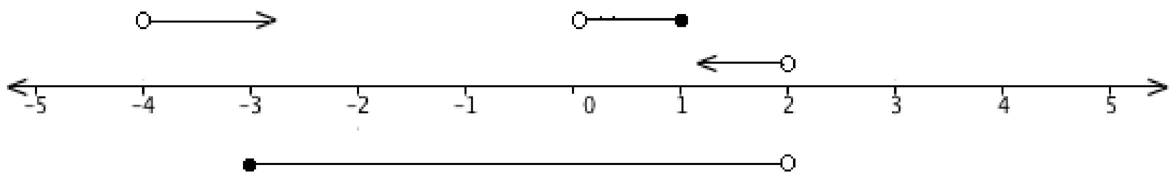
Anschließend folgt eine Textaufgabe, deren Thema eine Website ist, die das Entwickeln von Fotos anbietet. Zuletzt finden sich noch Aufgaben wie „$xy = z - 2x$“ (ebenda: 79), „$3y(x + z) = y(2z - x)$“ (ebenda: 79), „$\sqrt{hk^2 - 14} = k$“ (ebenda: 79), „$\sqrt{\frac{(d-e)}{e}} = 7$“ (ebenda: 79) und „$x = \frac{2y^2+1}{3y^2-2}$“ (ebenda: 79).

Das nächste Thema in diesem Kapitel ist das *Lösen von Ungleichungen (Inequalities)*. Zuerst wird das Darstellen von *Ungleichungen* auf einer *Zahlengerade (Number Line)* erklärt. Zuerst sollen „$x > -1$“ (Schulübungsheft), „$x \leq 3$“ (ebenda) und „$-2 \leq x < 4$“ (ebenda) dargestellt werden.



(Ebenda)

Außerdem folgen Darstellungen von „$x > -4$“ (ebenda), „$x < 2$“ (ebenda), „$0 < x \leq 1$“ (ebenda) und „$-3 \leq x < 2$“ (ebenda) auf der *Zahlengerade*.



(Ebenda)

Danach wird erklärt, dass man mögliche Werte für eine *Variable* x *(Lists)* angeben kann. In der folgenden Aufgabe soll dies gelöst werden, wobei x eine ganze Zahl und „$-3 \leq x < 4$" (ebenda) ist. Die möglichen Werte für x sind: „-3 -2 -1 0 1 2 3 " (ebenda). Zuletzt kann eine *Ungleichung* gelöst werden *(Solve)* um Werte für die *Variable* x zu bestimmen: „$3x + 1 \geq 6$" (ebenda) ⇔ „$3x \geq 5$" (ebenda) ⇔ „$x \geq \frac{5}{3}$" (ebenda). Im Buch finden sich zusätzlich Textaufgaben, die sich mit Zahlenrätseln, dem Neubau einer Schule, einer Hochzeitsplanung, einem Graphen, von dem drei Ungleichungen abgelesen werden sollen, Angaben bezüglich des Zeichnens eines Graphen und einem Einstellungsgespräch beschäftigen (Parsons 2010: 81).

Zuletzt folgt das *Ergänzen auf ein Quadrat (Completing the Square)*. Dazu werden folgende Aufgaben gerechnet.

$$
\begin{array}{ll}
 & (x-3)^2 - 25 = 0 \\
+25 & (x-3)^2 = 25 \\
\sqrt{} & x - 3 = 5\ or - 5 \\
 & x = 8\ or\ x = -2
\end{array}
$$

(Ebenda)

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 6x + 10 = 0 \\
& (x+3)^2 - 9 + 10 = 0 \\
& (x+3)^2 + 1 = 0 \\
& (x+3)^2 = -1 \text{ NO SOLUTION}
\end{aligned}
$$

(Ebenda)

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 7x + 22 = 10 \\
& (x+3.5)^2 - 12.25 + 12 = 0 \\
& (x+3.5)^2 - 0.25 = 0 \\
& (x+3.5)^2 = 0.25 \\
& x + 3.5 = 0.5\ or - 0.5 \\
& x = -3\ or - 4
\end{aligned}
$$

(Ebenda)

5.3.3.2 Österreich

Das Thema *Lösen von Gleichungen* beginnt in der 2. Klasse AHS (6. Schulstufe). Dabei wird eine *Gleichung* mit einer Waage verglichen, da auf beiden Seiten immer dasselbe passieren muss. Außerdem wird erklärt, wie die einzelnen Schritte beim *Lösen* angeschrieben werden, welches dann mit der *Addition* und *Division* wiederholt wird und anhand von ähnlichen Aufgaben eingeübt werden kann. Weiters folgt ein Beispiel, bei dem mehrere Schritte kombiniert werden:

$$\begin{gathered}3x-6=9 \quad |+6\\ 3x-6+6=9+6\\ 3x=15 \quad |:3\\ 3x:3=15:3\\ x=5\end{gathered}$$

(Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2009: 164)

Ebenso ist es möglich, dass die Variable auf beiden Seiten der *Gleichung* auftritt:

$$\begin{gathered}8x=5x+6\\ 8x=5x+6 \quad |-5x\\ 8x-5x=5x+6-5x\\ 3x=6 \quad |:3\\ 3x:3=6:3\\ x=2\end{gathered}$$

(Ebenda: 165)

Darauf folgen Aufgaben, mit deren Hilfe dieser Vorgang eingeübt werden kann und es wird darauf hingewiesen, dass einige Schritte im Kopf gerechnet werden können. Da die Schülerinnen und Schüler in dieser Schulstufe ausschließlich mit *natürlichen Zahlen* rechnen, folgt ein Tipp, der an das *Vertauschungsgesetz der Addition* erinnert, falls von einer kleineren *natürlichen Zahl* eine größere abgezogen werden soll. Wiederum folgen Aufgaben, die zum Einüben dieser Theorie dienen, eine Aufgabe, bei der die Lösungen der Gleichungen in ein Kreuzworträtsel eingetragen werden sollen und Aufgaben, bei denen *Gleichungen* gelöst und die zugehörige *Probe* durchgeführt werden soll. Anschließend finden sich Textaufgaben, die eine Fülle an Zahlenrätseln, das Aufteilen von Zuckerln, Säcke mit Erdäpfeln, Kisten mit Äpfeln, Sitzplätze in einem Autobus bzw. einem Kinosaal, das Kaufen von Waren, Rechnen mit Variablen, Bleistifte, Murmeln, Fahrzeuge auf einem Parkplatz, Modellautos, Hundefutter, Taschengeld, Preise von Bällen, Karotten als Hasenfutter, eine Waage mit Obst, Vögel auf Bäumen und die Geschwindigkeit eines Radfahrers zum Thema haben (ebenda: 163-171).

In weiterer Folge wird das *Umformen von Formeln* eingeführt. Dabei wird die *Formel* für den *Flächeninhalt* von *rechtwinkligen Dreiecks* wiederholt und umgeformt:

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Da du dir sicher leichter tust, wenn keine Brüche vorkommen, multiplizierst du beide Seiten mit dem Nenner:

$$A = \frac{a \cdot b}{2} \quad | \cdot 2$$
$$2A = a \cdot b$$

Nun brauchst du nur durch a oder durch b dividieren und du hast die beiden anderen Formeln:

$$2A = a \cdot b \quad |: b \quad |: a$$

$$a = \frac{2 \cdot A}{b} \text{ oder } b = \frac{2 \cdot A}{a}$$

(Ebenda: 171)

Darauf folgen einige Aufgaben, bei denen *Formeln* für den *Umfang des Quadrats*, den *Umfang des gleichseitigen Dreiecks*, die *Geschwindigkeit*, die *Arbeit*, den *Flächeninhalt des Rechtecks*, den *Umfang des Rechtecks* umzuformen und die Länge einer Schnur zu berechnen ist (ebenda: 171f).

Dieses Thema wird dann in der 3. Klasse AHS (7. Schulstufe) fortgesetzt. Hier wird begonnen, indem *Gleichungen mit Klammern* gelöst und die zugehörigen *Proben* durchgeführt werden (ebenda: 133f). Aufgabenbeispiele dazu sind: „$5x - (x - 6) = 26$“ (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2010: 133), „ $4 \cdot (a + 1) - 7 \cdot (a + 2) = 11 \cdot (a - 6)$ “ (ebenda: 133), „ $2 \cdot (3x + 8) - [2x + 3 \cdot (4x - 7)] = 45$ “ (ebenda: 134) und „ $(x + 2)^2 + (x + 3)^2 = (x + 5)^2 + (x - 2)^2$“ (ebenda: 134).

Anschließend folgen *Gleichungen mit Brüchen*. Diese werden wiederum gelöst und die zugehörigen *Proben* werden durchgeführt. Aufgabenbeispiele dazu sind: „$\frac{x}{5} - 7 = x - 15$“ (ebenda: 135), „$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{12-x}{6}$“ (ebenda: 136), „$\frac{9x+5}{4} - \frac{7x+6}{6} = \frac{2+x}{8}$“ (ebenda: 136) und „$3 \cdot (x - 4) - \frac{x+2}{6} = \frac{x+8}{12} - \frac{7x-12}{8}$“ (ebenda: 136). In diesem Schuljahr werden ebenfalls *Textgleichungen* gelöst und *Formeln* umgeformt. (ebenda: 135-145).

Das *rechnerische Lösen von linearen Gleichungssystemen* erfolgt in der 4. Klasse AHS (8. Schulstufe). Hier wird an das *grafische Lösen linearer Gleichungssysteme* angeknüpft und mit der Erklärung des *Einsetzungsverfahrens* bzw. *Substitutionsverfahrens* begonnen:

I: $3x + 4y = 24$
II: $x + \ \ y = 7$

1. Drücke in einer der beiden Gleichungen x durch y aus!
   (Du kannst auch umgekehrt y durch x ausdrücken. Mach das, was einfacher ist!)

   Gleichung II: $x = 7 - y$

2. Durch **Einsetzen** des Terms in die andere Gleichung erhältst du *eine* Gleichung mit einer Variable:

   Gleichung I: $3 \cdot (7 - y) + 4y = 24$

3. Löse die Gleichung!

   $21 - 3y + 4y = 24$
   $y = 3$

4. Setze die Lösung in den Term ein und ermittle die zweite Variable!

   $x = 7 - 3 = 4$
   $\Rightarrow L = \{(4|3)\}$

Probe:

I: $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24$
II: $4 + 3 = 7$

(Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2011: 218)

Danach folgen Aufgaben, die dem Musterbeispiel entsprechen (ebenda: 217f).
In weitere Folge wird das *Gleichsetzungsverfahren* bzw. *Komparationsverfahren* erklärt. Die Erklärung gleicht der des *Einsetzungsverfahrens*, mit dem Unterschied, dass beide Gleichungen nach derselben *Variable* umgeformt und dann *gleichgesetzt* werden müssen. Darauf folgen wieder Aufgaben, anhand derer dieses System eingeübt werden kann (ebenda: 219).

Zuletzt wird das *Additionsverfahren* vorgestellt:

1. Multipliziere die Gleichungen mit geeigneten Faktoren so, dass bei einer Variable entgegengesetzt gleiche Koeffizienten entstehen:

   I: $3x + 4y = 24$
   II: $x + y = 7 \quad | \cdot (-4)$

2. Durch **Addieren** der beiden Gleichungen erhältst du *eine* Gleichung mit einer Variable:

   I: $3x + 4y = 24$
   II: $-4x - 4y = -28$
   $-x = -4$

3. Löse die Gleichung!

   $x = 4$

4. Setze die Lösung in einer der beiden Gleichungen ein und berechne die zweite Variable!

   $4 + y = 7$
   $y = 3 \Rightarrow L = \{(4|3)\}$

Vergiss die Probe nicht [...]!

(Ebenda: 220)

Anschließend folgen Aufgaben, mit deren Hilfe dieses Vorgehen eingeübt werden kann (ebenda: 220). Darauf finden sich Textaufgaben, aus denen *lineare Gleichungssysteme* erstellt und gelöst werden sollen. Die Themen dieser Aufgaben sind: der Eintrittspreis zu einer Greifvogelschau, Eintrittskartenpreise einer Schultheateraufführung, zurückgelegte Kilometer bei einem Langstreckenflug, Warmwasser, die Wassertemperatur in einem Aquarium, Zahlenrätsel, geometrische Aufgaben bezüglich *Dreiecken* und *Vierecken* und der Kauf von Erdbeeren (ebenda: 221-225).

Das *Faktorisieren von quadratischen Gleichungen* erfolgt in der 5. Klasse AHS (9. Schulstufe), wobei dieses Thema im Zuge des *Satzes von Vieta* zur Anwendung kommt. Dabei wird zusätzlich die *Lösungsformel für quadratische Gleichungen* verwendet. Für das folgende Beispiel wird der *Term* $3x^2 + 3x - 18$ verwendet:

Wir heben zunächst 3 heraus

$$3(x^2 + x - 6)$$

und bestimmen anschließend die Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= 0 \\ x_{1,2} &= -1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} \\ &= 1/2 \pm 5/2 \\ x_1 = -3, x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich daher:

$$3x^2 + 3x - 18 = 3(x + 3)(x - 2)$$

(Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2010a: 85)

Das *Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat* wird ebenfalls in der 5. Klasse AHS (9. Schulstufe) besprochen. Dazu ist folgendes Beispiel gegeben:

$3x^2 - 18x - 48 = 0$	$\vert : 3$	
$x^2 - 6x - 16 = 0$	$\vert + 16$	
$x^2 - 6x = 16$	$\vert + 9$	Ergänzen der linken Seite zu einem *vollständigen Quadrat*
$x^2 - 6x + 9 = 16 + 9$	$\vert$	linke Seite als Quadrat anschreiben
$(x - 3)^2 = 25$	$\vert \sqrt{}$	Wurzelziehen unter Beachtung *beider* Vorzeichen
$x - 3 = \pm 5$	$\vert + 3$	x isolieren (**explizite Form** herstellen)
$x = 3 \pm 5$	$\vert$	beide möglichen Fälle auswerten
$x = 8 \vee x = -2$	$\vert$	liefert *zwei* Lösungen
$x_1 = 8 \quad x_2 = -2$		

(Ebenda: 81)

Gleichungssysteme mit *quadratischen* und *linearen Gleichungen* werden im österreichischen Schulsystem auf diese Weise nicht besprochen. Im Zuge der *nichtlinearen analytischen Geometrie* wird dieser Rechengang benutzt, welcher in der 7. Klasse AHS (11 Schulstufe) besprochen wird (Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2011: 172-234). Darauf wird an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen, da es keine genaue Überschneidung mit dem Thema im englischen Schulsystem gibt.

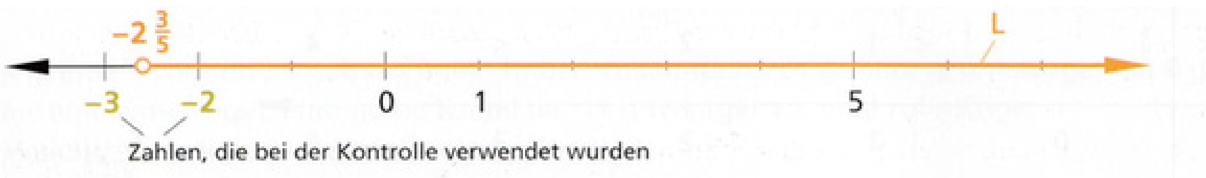
Das *Lösen von Ungleichungen* wird erstmals in der 4. Klasse AHS (8. Schulstufe) besprochen. Am Beginn wird der Begriff *Ungleichung* eingeführt, der sich ergibt, wenn „zwischen zwei Termen eines der Zeichen ‚<', ‚>', ‚≤', ‚≥', ‚≠'" (Reichel, Humenberger, Litschauer, Groß & Neuwirth 2012: 65) steht. Danach wird anhand von Beispielen erprobt, ob beim *Lösen von Ungleichungen* dieselben Regeln wie beim *Lösen von Gleichungen* gelten. Die entsprechenden Ergebnisse werden auf einer *Zahlengeraden* eingetragen. Darauf folgt eine Zusammenfassung, die die gefundenen Erkenntnisse wiedergibt und darauf hinweist, dass bei der *Division durch eine negative Zahl* und bei der *Multiplikation mit einer negativen Zahl* das *Ungleichheitszeichen* in die entgegengesetzte Richtung gedreht wird. Darauf folgt ein Beispiel, das illustriert, wie mit *Ungleichungen* gerechnet wird:

Für welche reellen Zahlen x gilt $\frac{x+3}{2} > \frac{x+2}{-3}$?

$$\frac{x+3}{2} > \frac{x+2}{-3} \quad |\cdot(-6)$$
$$-3(x+3) < 2(x+2)$$
$$-3x - 9 < 2x + 4 \quad |+3x$$
$$-9 < 5x + 4 \quad |-4$$
$$-13 < 5x \quad |:5$$
$$-\frac{13}{5} < x$$
$$x < -2\frac{3}{5} \qquad L = \{x \in \mathbb{R} | x > -2\tfrac{3}{5}\}$$

(Ebenda: 66)

In weiterer Folge werden die zugehörigen Kontrollen durchgeführt und die Lösungsmenge auf einer Zahlengerade eingezeichnet:



(Ebenda: 66)

Darauf folgen Aufgaben, bei denen *Lösungen von Ungleichungen* berechnet, die Kontrollen durchgeführt und die *Lösungsmenge* auf einer Zahlengerade eingezeichnet werden sollen. Des Weiteren finden sich *Textaufgaben*, mit deren Hilfe *Ungleichungen* aufgestellt, gelöst, die *Kontrollen* durchgeführt und die *Lösungsmenge* auf einer *Zahlengerade* eingetragen werden sollen.

5.3.3.3 Unterschied England-Österreich

Hier finden sich abermals einige Unterschiede bezüglich des Umgangs mit den besprochenen Themen.

Im österreichischen Schulsystem werden die Stoffgebiete wiederum in unterschiedlichen Schuljahren besprochen und dementsprechend ausgebaut. Bezüglich des Umgangs mit Gleichungen wird hier viel mehr in die Tiefe gegangen als in England und es wird vermehrt mit Textaufgaben gearbeitet. Des Weiteren überschneiden sich die Vorgehensweisen beider Länder beim *Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen*, jedoch werden im englischen Schulsystem das *Substitutions*- und das *Komparationsverfahren* nicht besprochen und das Additionsverfahren nicht benannt. Außerdem erfolgt das *Faktorisieren quadratischer Gleichungen* im österreichischen Schulsystem mit der *quadratischen Lösungsformel* in Verbindung mit dem *Satz von Vieta*, welche im englischen Lehrplan an dieser Stelle nicht vorgesehen ist. Darüber hinaus wird das *Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat* mithilfe einer *Tabelle* sehr anschaulich dargestellt. Zuletzt werden *Gleichungssysteme mit quadratischen Gleichungen* in Österreich besprochen. Diese werden aber in England nicht in der gleichen Form durchgenommen.

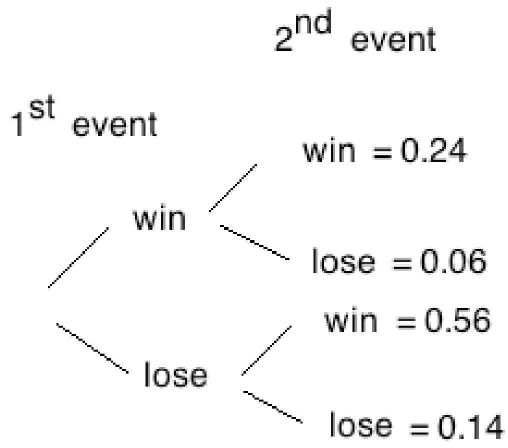
Hier ist zu erkennen, dass im österreichischen Schulsystem genauer auf die einzelnen Stoffgebiete eingegangen wird, vor allem bezüglich der anschaulichen Erklärung und dem Umgang mit ausgewählten Aufgaben. Außerdem finden sich in Österreich einige Erweiterungen, die in England nicht vorgesehen sind, beispielweise im Umgang mit *quadratischen Gleichungen* und *Gleichungssystemen*.

5.3.4 Wahrscheinlichkeit (Probability)

5.3.4.1 England

Dieses Thema beginnt mit der Einführung von *Baumdiagrammen (Tree Diagrams)*. Dazu dienen die folgenden Aufgaben:

> The probability that Peter wins at Snooker is 0.3. The probability that he wins at table tennis is 0.8.
>
> a) Show this on a tree diagram.
>
> b) What is the probability he wins both?
>
> [Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter beim Snooker gewinnt, beträgt 0,3. Die Wahrscheinlichkeit, dass er beim Tischtennis gewinnt, beträgt, 0,8.
>
> a) Veranschauliche das anhand eines Baumdiagramms.
>
> b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er beide?]



If he wins one and loses one [Wenn er eines gewinnt und eines verliert]

$P(win\ one + lose\ one) = 0.7 \times 0.8 + 0.3 \times 0.2 = 0.56 + 0.06 = 0.62$

(Schulübungsheft)

I have a bag of sweets: 5 red, 4 blue, 6 green. I take a sweet at random and eat it. I then take another at random.

a) Show on a probability tree.

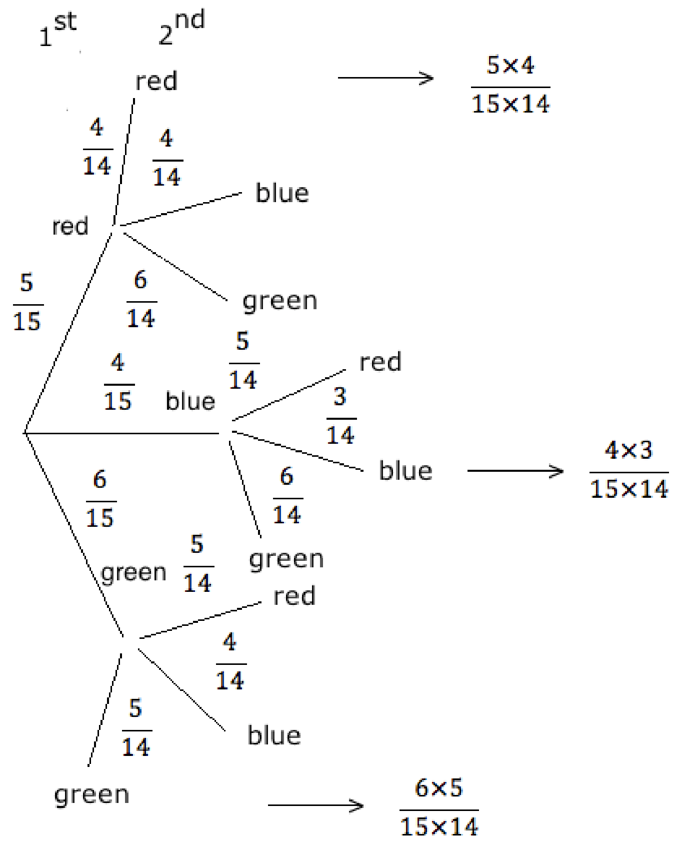
b) What is the probability they were 2 different colours?

[Ich habe einen Sack voll Bonbons: 5 rote, 4 blaue, 6 grüne. Ich nehme ein Bonbon willkürlich heraus und esse es. Dann nehme ich ein anderes willkürlich heraus.

a) Veranschauliche das anhand eines Baumdiagramms!

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sie zwei unterschiedliche Farben?]

(Ebenda)



$$\frac{20+12+30}{15\times14}=\frac{62}{15\times14}$$

$$1-\frac{62}{15\times14}=\frac{148}{210}=\frac{74}{105}$$

(Ebenda)

5.3.4.2 *Österreich*

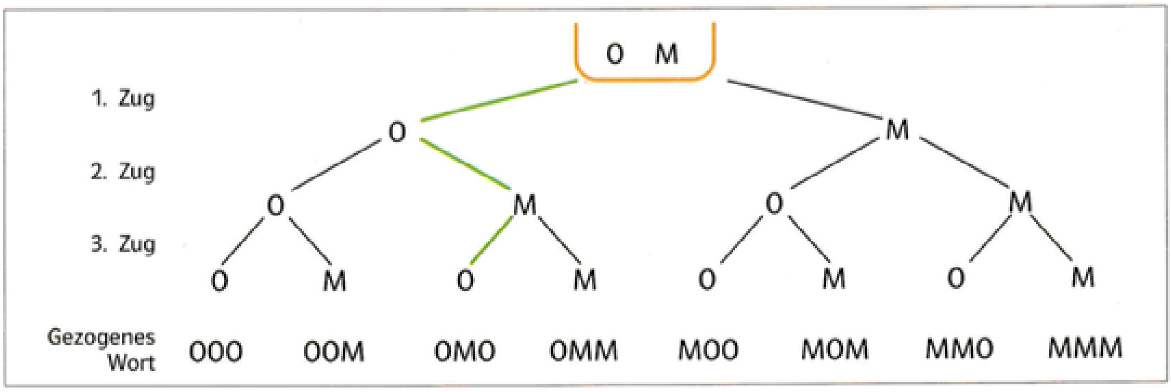
In Österreich werden *Baumdiagramme* unter anderem beim *Ziehen von geordneten* bzw. *ungeordneten Stichproben* verwendet. Diese Vorgehensweise wird auch *1.* bzw. *2. Pfadregel* genannt (Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2010b: 175).

Zuerst wird mit der *1. Pfadregel* begonnen und erklärt:

> Die verschiedenen Möglichkeiten des Ziehens einer **Stichprobe** vom Umfang n aus einem **Kollektiv** vom Umfang N [...] werden besonders durchsichtig, wenn man das Urnenmodell zugrunde legt und die Ziehungsverläufe in so genannten **Baumdiagrammen** veranschaulicht. In diesem ist die Baumwurzel stets oben, die Krone zeigt nach untern. Jeder einzelnen Ziehung (= Elementarereignis) aus dem Kollektiv (= Ergebnismenge) entspricht ein Aststück, jedem Ziehungsverlauf ein bestimmter Pfad (Ast) durch das Geäst, jedem Ziehungsergebnis (= Ereignis) letztlich ein Blatt am Ende dieses Pfades.
>
> (Ebenda: 175)

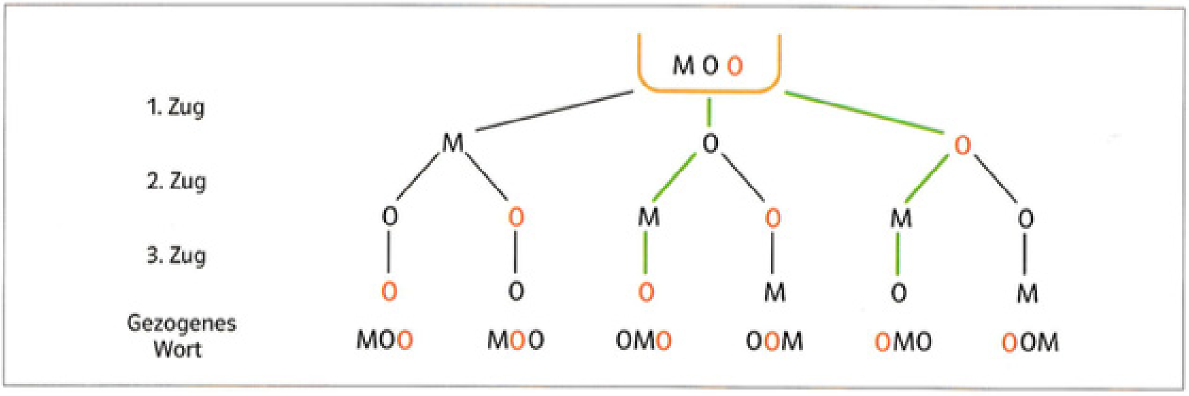
Darauf wird folgendes Beispiel zum „Ziehen geordneter Stichproben *mit* Zurücklegen“ (ebenda: 175) gerechnet:

> Im Zuge einer Werbeaktion für ein Waschmittel wird in einem Kaufhaus folgendes Gewinnspiel angeboten: In einer Urne sind 2 Kugeln, die sich nur in der Beschriftung unterscheiden: O und M. Man zeiht eine Kugel, notiert den gezogenen Buchstaben und legt die Kugel wieder in die Urne zurück. Dies wiederholt man dreimal. Entsteht dabei das Wort „OMO“, so erhält man eine Packung des Waschmittels gratis. Wie groß ist die Gewinnchance für den Kunden? [...]
>
> *Lösung:*
> Einen Überblick über alle möglichen Ziehungsabläufe gibt das folgende Diagramm:



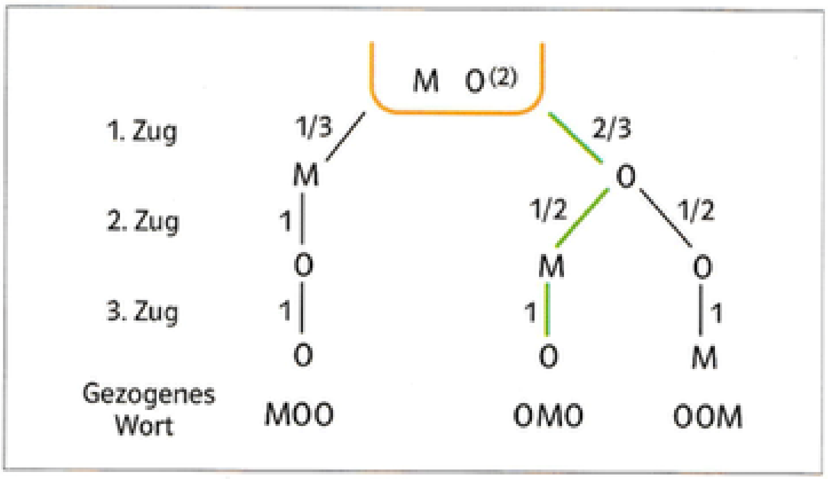
(Ebenda: 175)

Anschließend wird ein ähnliches Beispiel ohne Zurücklegen in einem Baumdiagramm dargestellt. Die Aufgabenstellung bleibt gleich, jedoch gibt es drei Kugeln:



(Ebenda: 176)

In dem vorhergehenden Beispiel wurden die Buchstaben O getrennt behandelt. Da dies nicht relevant ist, kann dieser Umstand durch eine entsprechende Gewichtung der Pfade ausgeglichen werden.



(Ebenda: 176)

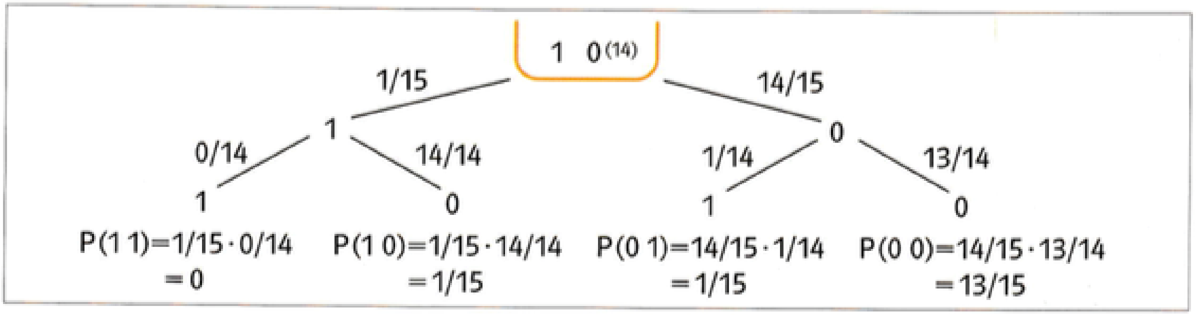
In Folge dessen sollen die Schülerinnen und Schüler ein *gewichtetes Baumdiagramm* für das erstgenannte Beispiel in diesem Kapitel finden (ebenda 175-177).

Darauf wird die *1. Pfadregel* besprochen. Diese lautet: „Die Wahrscheinlichkeit einer *geordneten* Stichprobe (Zufallsfolge) ist das *Produkt* aller Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.“ (Ebenda: 177)

Dazu passend folgen Textaufgaben, die eine Werbeaktion für Mundwasser, eine Werbeaktion von einem Fast Food Produkt, die Gewinnchance beim Toto, das Erraten eines Passworts, das Knacken eines PIN-Codes einer Kreditkarte, eine bestimmte Geburtenwahrscheinlichkeit, eine Maschine, die Produkte herstellt, Elfmeterschießen, eine Klassensprecherwahl, ein Spiel auf einem Schulfest, Gewinnchancen beim Ziehen von Kugeln und eine Tastenkombination, die ein Affe drückt, zum Thema haben (ebenda: 177f).

Darauf wird „[d]as Ziehen ungeordneter Stichproben *ohne* Zurücklegen“ besprochen und folgendes Beispiel gerechnet:

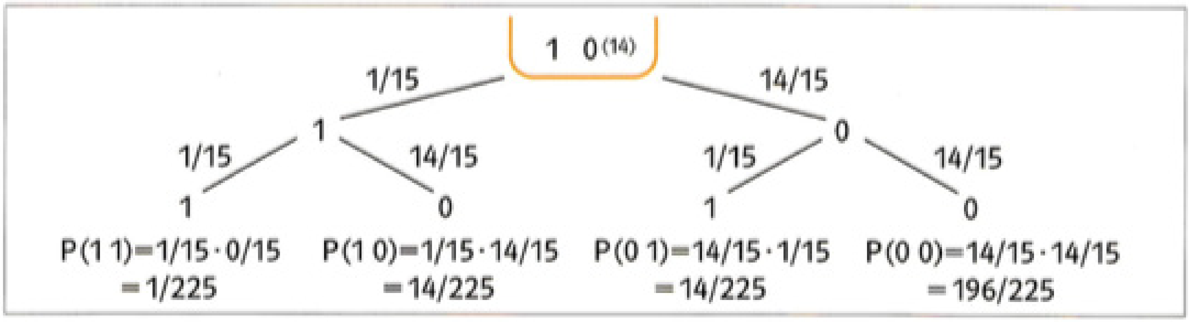
> Paul Faul hat sich wieder einmal nicht für die Mathematikwiederholung vorbereitet. Er weiß, dass dafür jede Stunde zwei Schüler zufällig ausgewählt werden. Wie groß ist für ihn die Chance, zur Stundenwiederholung gerufen zu werden, wenn noch 14 andere Schüler anwesend sind?
>
> *Lösung:* Paul entwirft das folgende gewichtete Baumdiagramm, wobei er für „komme dran“=1 und für „komme nicht dran“=0 schreibt.



> (Ebenda: 179)

In weiterer Folge wird die *2. Pfadregel* angegeben: „Die Wahrscheinlichkeit einer *ungeordneten Stichprobe* ist die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten.“ (Ebenda: 179) Außerdem wird „[d]as Ziehen ungeordneter Stichproben *mit* Zurücklegen“ anhand von folgendem Beispiel besprochen.

> Paul Faul hat sich weder für die Deutsch- noch für die Mathematikwiederholung vorbereitet. In jedem Fach wird (unabhängig vom anderen) jeweils ein Schüler geprüft. Wie groß ist die Chance, dass Paul Faul (mindestens einmal) drankommt?
>
> *Lösung:* Paul entwirft das folgende gewichtete Baumdiagramm, wobei er für „komme dran“=1 und für „komme nicht dran“=0 setzt:



(Ebenda: 180)

Daran anschließend finden sich Textaufgaben, die sich mit den Gewinnchancen beim Toto, bei „6 aus 45“ und „6 aus 49“, einer Rundfunkwerbung, Schnapsen, Urlaubsmitbringsel, einem Fragebogen, dem Auslosen für ein Team, einer Stundewiederholung in Mathematik, einer Hausübungskontrolle, dem Einteilen von Klassenordnern und dem *Beweis der 2. Pfadregel* beschäftigen.

5.3.4.3 Unterschied England Österreich

In diesem Kapitel finden sich nur geringe Unterschiede in der Bearbeitung des Stoffes.

Die einzelnen Themengebiete überschneiden einander fast gänzlich. Es besteht jedoch ein Unterschied im Umgang mit der zugrundeliegenden Theorie. In Österreich werden die *Pfadregeln* besprochen, welche in England nur angewendet werden. Anschließend folgt immer ein Beispiel, dass zum besseren Verständnis der Theorie dient.

Zusammenfassend kann abermals gesagt werden, dass die Theorie im englischen Schulsystem enorm vernachlässigt wird. Hier wird mehr Wert auf das Lösen der Aufgaben als auf das Grundverständnis hinter den Aufgaben gelegt.

5.4 Januar und Februar (England) – 1. Klasse bis 8. Klasse (Österreich)

5.4.1 Numerik (Number)

5.4.1.1 England

In diesem Kapitel wird mit *oberen* und *unteren Schranken (Upper* and *Lower Bounds (Limits))* begonnen. Zuerst ist die folgende Aussage gegeben: *Das kommende Thema gibt uns Auskunft über den möglichen Maximal- bzw Minimalwert, wobei eine Messung mit einer gegebenen Genauigkeit vorhanden ist* (Schulübungsheft). Dazu werden zwei Aufgaben gerechnet:

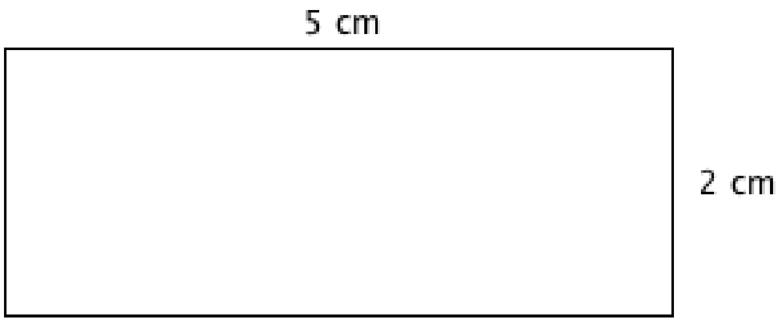
12 cm to the nearest cm [12 cm zu den nächstgelegenen cm]

$lower\ limit = 11.5\ cm$ [untere Schranke = 11,5 cm]
$upper\ limit = 12.5\ cm$ [obere Schranke = 12,5 cm]

1.5 cm to decimal place [1,5 cm zur Zehntelstelle]

$ll = 1.45\ cm$
$ul = 1.55\ cm$
(Ebenda)

In weiterer Folge wenden *obere* und *untere Schranken (Combining Upper and Lower Bounds)* verbunden (ebenda). Dieses wird anhand von folgender Aufgabe besprochen.



These lengths are correct to the nearest cm.
What are the maximum and the minimum value for the perimeter?
[Diese Längen sind bis auf den nächstgelegenen cm genau.
Was sind der Maximal- und Minimalwert für den Umfang?]

max: $5.5 + 5.5 + 2.5 + 2.5 = 16\ cm$
min: $4.5 + 4.5 + 1.5 + 1.5 = 12\ cm$

max and min of areas are
[Maximum und Minimum des Flächeninhalts sind]

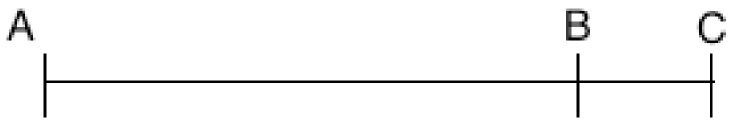
max: $5.5 \times 2.5 = 13.75\ cm^2$
min: $4.5 \times 1.5 = 6.75\ cm^2$

(Ebenda)

Außerdem finden sich Textaufgaben, die die Maße eines Teppichs, ein Wettrennen, eine Fahrt mit einem LKW und Laufzeiten von drei Jugendlichen zum Thema haben (Parsons 2010: 71).

Weiters wird das *Subtrahieren* und *Dividieren von Strecken* und *Größen* bezüglich *oberer* und *unterer Schranke (Subtracting and Dividing)* anhand von folgenden Aufgaben besprochen.

Subtracting



Length AB is 11 cm to the nearest cm.
Length AC is 18 cm to the nearest cm.
What are the maximum and minimum values for length BC?
[Die Länge AB beträgt 11 cm zum nächstgelegenen cm.
Die Länge AC beträgt 18 cm zum nächstgelegenen cm.
Wie lauten die Maximal- und Minimalwerte für die Länge BC?]

max: $18.5 - 10.5 = 8\ cm$
min: $17.5 - 11.5 = 6\ cm$

Dividing

$S = \frac{D}{T}$

If distance = 5 m to the nearest m and time = 4 secs to nearest second, what are the max and min speeds?
[Wenn der Weg = 5 m zum nächstgelegenen m und die Zeit = 4 s zur nächsten Sekunde betragen, wie lauten die Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten?]

max: $5.5 \div 3.5 = 1.57\ m/s$
min: $4.5 \div 4.5 = 1\ m/s$

(Schulübungsheft)

In weitere Folge werden *irrationale Zahlen (Surds)* besprochen, wobei mit folgender Aussage begonnen wird: *Eine irrationale Zahl ist die Wurzel jeder ganzen Zahl, die keine Quadratzahl ist* (ebenda). Darauf werden Aufgaben von *Vereinfachungen* gerechnet.

1. $\sqrt{5}\sqrt{15} = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
2. $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} - \sqrt{2} = \sqrt{4}\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$
3. $3\left(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right) - 2\left(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{2} - 9\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 10\sqrt{3} = \sqrt{3}$
4. $\left(\sqrt{7} - 3\right)\left(2\sqrt{7} + 3\right) = \sqrt{7} \times 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 6\sqrt{7} - 9 =$
   $2 \times 7 + 3\sqrt{7} - 6\sqrt{7} - 9 = 5 - 3\sqrt{7}$

(Ebenda)

Des Weiteren wird das *Rationalmachen des Nenners (Rationalising the Denominator)* besprochen. Dafür werden folgende Aufgaben gerechnet:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+3} \times \frac{-\sqrt{2}+3}{-\sqrt{2}+3} = \frac{1(-\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}+3)(-\sqrt{2}+3)} = \rightarrow (\sqrt{2}+3)(-\sqrt{2}+3) =$

$-2 + 9 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 7$

$\frac{7(-\sqrt{2}+3)}{7} = -\sqrt{2} + 3$

(Ebenda)

Im Schulbuch wird auf den Unterschied zwischen *rationalen* und *irrationalen Zahlen* hingewiesen, indem erstgenannte als *ganze Zahl* oder *Bruch* geschrieben werden können, welches für die *irrationalen Zahlen* nicht möglich ist. Darauf folgt eine Aufgabe, bei der Zahlenwerte für *Terme* eingesetzt sollen und zu berechnen ist, ob sich *rationale* oder *irrationale Zahlen* ergeben. Die weiteren Aufgaben beschäftigen sich mit Vereinfachungen von Termen wie „$\sqrt{5} \times \sqrt{3}$" (Parsons: 48), „$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$“ (ebenda: 48), „$\sqrt{4} - \sqrt{1}$“ (ebenda: 48), „$(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}})^2$ “ (ebenda: 48) und „$(\sqrt{x})^2$ “ (ebenda: 48). Darauf soll wieder entschieden werden, ob die Ausdrücke „$(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$“ (ebenda: 48) und „$\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$“ (ebenda: 48) *rational* oder *irrational* sind und die *Nenner* von Ausdrücken wie „$\frac{2}{\sqrt{8}}$“ (ebenda: 48), „$\frac{2}{1+\sqrt{6}}$“ (ebenda: 48), $\frac{x}{\sqrt{xy}}$“ (ebenda: 48) und „$\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$“ (ebenda: 48) sollen *rational gemacht* werden. Zuletzt folgt der Tipp, dass das *Wurzelzeichen* vom *Nenner* entfernt werden muss, um diesen *wurzelfrei* zu machen (ebenda: 48).

Das nächste behandelte Thema ist die *Gleitkommadarstellung*. Im Schulübungsheft wird festgehalten, dass die *Gleitkommadarstellung* für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet wird (Schulübungsheft). Danach wird eine Gegenüberstellung mithilfe einer Tabelle veranschaulicht:

ordinary form [Festkommadarstellung]	standard form [Gleitkommadarstellung]
$141\,000\,000\,000$	1.41×10^{11}
0.000000000532	5.32×10^{-10}

(Ebenda)

Darauf wird besprochen, wie Rechenvorgänge der *Gleitkommadarstellung* ohne Taschenrechner *(Standard Form Non-Calculator)* aussehen. Zuerst wird geklärt, dass $0.6 \times 10^5 = 6 \times 10^4$ und $0.6 \times 10^5 \neq 6 \times 10^6$. Darauf wird vermerkt, dass das Erhöhen der Zahl 0.6 eine Verminderung des *Exponenten* der *Zehnerpotenz* zur Folge hat. Zusätzlich werden folgende Aufgaben gerechnet:

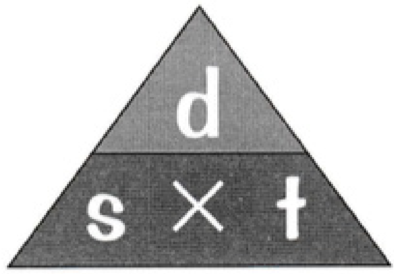
1. $4 \times 10^5 \times 3 \times 10^2 = 12 \times 10^7 = 1.2 \times 10^8$
2. $(6.5 \times 10^6) \div (5 \times 10^4) = (65 \times 10^5) \div (5 \times 10^4) = 13 \times 10^1 = 130 = 1.3 \times 10^2$
3. $(2 \times 10^7) \div (8 \times 10^3) = 0.25 \times 10^4 = 2.5 \times 10^3$

(Ebenda)

Im Schulbuch folgen zusätzlich Aufgaben wie die Umwandlung von „3.56×10^{-1}“ (Parsons 2010: 45) in die *Festkommadarstellung* und die Umwandlung von „2.46“ (ebenda: 45), „0.000952" (ebenda: 45) und „9183×10^2“ (ebenda: 45) in die *Gleitkommadarstellung*. Dann finden sich Textaufgaben, die den durchschnittlichen *Durchmesser* eines Zellkerns, *Lichtjahre*, eine zurückgelegte Strecke der Nautilus, Zellen eines Taschentuchs, und Entfernungen von Planeten bezüglich der Sonne zum Thema haben (ebenda: 45). Darüber hinaus wird erklärt, wie die Berechnungen der *Gleitkommadarstellung* mithilfe des Taschenrechners durchgeführt werden können. In Folge dessen finden sich Aufgaben, anhand derer der beschriebene Vorgang eingeübt werden kann, Aufgaben wie „42.32×10^{-4}“ (ebenda 66), die in die *Gleitkommadarstellung* gebracht werden sollen, und Textaufgaben, dich sich mit dem Erdradius, der *Atommasse*, *Lichtjahren* und der Erdoberfläche beschäftigen. Außerdem wird darauf hingewiesen, dass Zahlen der Form $4.76 \times 10^{23} \neq 4.76^{23}$ sind (ebenda: 66).

Bei dem Thema *Einheiten umwandeln (Convert Measures)* geht es um das Umwandeln von *metrischen* und *englischen Maßen*. Zuerst sind die Umwandlungen folgender *Maße* gegeben: kg – lbs, litre – pints, inch – cm, gallon – litres, foot – cm und mile – km. Darauf folgen Aufgaben, bei denen verschiedene *Umwandlungen von Längen-, Flächen- und Massenmaßen* gefordert sind (ebenda: 64).

Außerdem finden sich Textaufgaben, die sich mit der Trinkmenge eines Pferdes, dem Körpergewicht eines Mädchens, einem Ziegelstapel, einer Radroute, dem Arbeitspensum einer Schneiderin, den Maßen einer griechischen Statue, Wackelpudding und Gewichtheben beschäftigen (ebenda: 64).
Das Thema *zusammengesetzte Maße (Compound Measures)* beschäftigt sich mit *Geschwindigkeit, Weg* und *Zeit*. Zuerst ist die *Formel* dafür gegeben: $Average\ speed = \frac{Total\ distance}{Total\ time}$ " (ebenda: 65), wofür auch ein *Formeldreieck* gezeichnet werden kann:



(Parsons 2010: 65)

Darauf folgen Textaufgaben, die eine Zugfahrt, eine Autofahrt, eine Fahrt mit dem Fahrrad, die Vervollständigung einer Tabelle, die Laufgeschwindigkeit eines Athleten, einen Flug mit einem Flugzeug, eine Reiseplanung und die Fahrt mit einer Yacht bzw. mit einem Motorrad zum Thema haben (Parsons: 2010: 65).
Zu den Themen *Signifikante Zahlen (Significant Figures)* und *Genauigkeit (Accuracy)* konnten keine Aufzeichnungen gefunden werden.

5.4.1.2 Österreich

Das *Rechnen mit Näherungswerten* wird im österreichischen Schulsystem in der 5. Klasse AHS (9. Schulstufe) besprochen. Hier wird mit einem Beispiel über ein Grundstück in Form eines *rechtwinkligen Dreiecks* begonnen, das den Umgang mit *oberen* und *unteren Schranken* erläutert. Dabei wird eine *Extremfalltafel* erstellt, um die *obere* und *untere Grenze* zu finden. Jedoch wird darauf hingewiesen, dass diese durch Überlegen gefunden werden können. Ebenfalls wird besprochen, dass „[e]in Produkt [...] umso größer (kleiner) [wird], je größer (kleiner) die Faktoren sind; also nimmt der Flächeninhalt als Produkt der Seiten seinen größten (kleinsten) Wert an, wenn beide Seiten möglichst groß (klein) sind" (Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2009: 44).

Dieses gilt analog für „die Summe, die Differenz, sowie [...][den] Quotient[en] zweier Größen" (ebenda: 44). Textaufgaben zu diesem Thema beschäftigen sich mit einer Glaskugel, einem Parlamentsbeschluss, dem Hohen Markt in Wien und den *Seiten eins Würfels* (ebenda: 46).

Das Thema *irrationale Zahlen* wird im österreichischen Schulsystem *partielles (teilweises) Wurzelziehen* genannt. Dazu wird Folgendes besprochen:

> Manchmal können Zahlen unter einer Wurzel so in ein Produkt zerlegt werden, dass (zumindest) ein Faktor eine Quadratzahl ist. Dann kann mit Hilfe der Rechenregeln für Wurzeln teilweise (partiell) die Wurzel gezogen werden.
>
> Z.B $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot \sqrt{2}$
>
> Um die entstehende Zahl übersichtlicher darzustellen, schreibt man den Wurzelausdruck am Schluss.
>
> (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2011: 69)

Darauf folgen Aufgaben, anhand derer diese Theorie eingeübt werden kann. Beispiele dafür sind: „$\sqrt{363} =$" (ebenda: 69), „$\sqrt{1{,}28} =$" (ebenda: 69) und „$\sqrt{405} =$" (ebenda: 69). Außerdem wird erklärt, dass das *partielle Wurzelziehen* mit *Variablen* auf dieselbe Art durchgeführt wird. Dieses wird wiederum anhand von Aufgaben eingeübt, wie beispielsweise „$\sqrt{4y^2}$" (ebenda: 70), „$\sqrt{x \cdot y^2}$" (ebenda: 70) und „$\sqrt{144 \cdot b}$ (ebenda: 70). In weiterer Folge wird besprochen, wie Faktoren unter die Wurzel gebracht werden. „Dazu quadriert man die Faktoren außerhalb der Wurzel und bringt sie gleichzeitig unter die Wurzel, damit sich der Wert nicht ändert." (ebenda: 70) Dieses gilt ebenso für das Rechnen mit *Variablen*. Treten gleiche *Faktoren* auf, so werden diese zusammengefasst. Dazu finden sich wiederum einige Aufgaben, wie „$x\sqrt{10}$" (ebenda: 70), „$5y\sqrt{10}$" (ebenda: 70), „$\sqrt{5y^3} \cdot \sqrt{10y}$" (ebenda: 70) und „$\sqrt{8x^9y^5} : \sqrt{2x^5y} =$" (ebenda: 70).

Das *Rationalmachen des Nenners* erfolgt in der 6. Klasse (10. Schulstufe). Dazu wird folgendes Beispiel vorgerechnet:

a Vereinfache $\sqrt{54} - \sqrt{216} + \sqrt{24}$ durch teilweises Wurzelziehen!
b Vereinfache **1** $1/\sqrt{2}$, **2** $2/\sqrt[3]{5}$ durch Wurzelfreimachen des Nenners!

Lösung: **a** $\sqrt{54} - \sqrt{216} + \sqrt{24} = \sqrt{9 \cdot 6} - \sqrt{36 \cdot 6} + \sqrt{4 \cdot 6} = 3 \cdot \sqrt{6} - 6 \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{6} = -\sqrt{6}$
b Wir erweitern geeignet: **1** $\frac{1}{2^{1/2}} \cdot \frac{2^{1/2}}{2^{1/2}} = \frac{2^{1/2}}{2^{1/2+1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2^1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, **2** $\frac{2}{5^{1/3}} \cdot \frac{5^{2/3}}{5^{2/3}} = \frac{2 \cdot 5^{2/3}}{5^{1/3+2/3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{5^1} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

(Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2010a: 84)

Die *Gleitkommadarstellung (Standard Index Form)* wird in der 3. Klasse AHS (7. Schulstufe) besprochen. Hier wird ein Beispiel gegeben, in dem Zahlen von Eigenschaften des Jupiters besprochen werden. Darauf folgt folgende *Definition*:

> Potenzen mit der Basis 10 heißen Zehnerpotenzen.
> Man verwendet sie zur Darstellung großer Zahlen.
>
> $$2\,000\,000 = 2 \cdot 1\,000\,000 = 2 \cdot 10^6$$
> $$780\,000\,000 = 78 \cdot 10\,000\,000 = 78 \cdot 10^7 = 7{,}8 \cdot 10^8$$
>
> Diese Darstellung – Vorzahl mal Zehnerpotenz – nennt man **Gleitkommadarstellung**.
>
> Die Vorzahl liegt dabei zwischen 1 und 10.
>
> (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2010: 92)

Anschließend folgen Aufgaben wie „$100\,000$" (ebenda: 92) als *Zehnerpotenz* darzustellen, „10^5" (ebenda: 92), „$9 \cdot 10^4$" (ebenda: 93), „$3\ Millionen$" (ebenda: 93) und „$6{,}75 \cdot 10^6$" (ebenda: 93) ohne *Zehnerpotenz* darzustellen, Zahlen in *Gleitkommadarstellung* darzustellen und Textaufgaben, die eine Gewitterbeobachtung, Wale, Planeten, Zahlen am Taschenrechner, eine defekte Waschmaschine, eine Bakterienkultur, Lichtgeschwindigkeit, die Andromeda-Galaxie, das Einrichten eines Aquariums, das Richtigstellen einer Aufgabe und das Berechnen von *Produkten* bestehend aus *Zehnerpotenzen* zum Thema haben (ebenda: 93-95).

Die *Umrechnung von Maßen und Einheiten* wird in der 1. Klasse AHS (5. Schulstufe) besprochen. Das erste Thema ist die *Vorstellung von Längenmaßen*, welche dann anhand von Aufgaben angewendet werden kann. Diese befassen sich mit der Überlegung, welche Dinge den *Maßen* entsprechen, dem Messen von vorgegebenen *Längen*, dem Ordnen von vorgegebenen *Längen*, dem Zeichnen und Schätzen von Längen, dem Zeichnen von *Strecken* und dem Zeichnen von *Geraden* (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2007: 88f).

In weiterer Folge wird die Bedeutung der Vorsilben der *Längenmaße* erläutert und anhand von Textaufgaben, die Weitsprungergebnisse und Schularztuntersuchungen zum Thema haben, werden diese Informationen angewendet. Darauf folgen Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler die vorgegebenen *Maße* in gemischten Einheiten (z.B. „$9\mathrm{m}\ \ 3\ \mathrm{dm}\ \ 4\mathrm{cm}\ \ 8\mathrm{mm}\ =$" (ebenda: 136)), und gemischte *Maße* als *Dezimalzahl* angeben sollen. Außerdem sollen *Strecken* und verschiedene Gegenstände abgemessen werden (ebenda: 135-137).

Darauf folgt eine Grafik, die die *Umrechnungszahlen der Längenmaße* angibt, worauf dann *Umrechnungen* von vorgegebenen *Längen* vorgenommen und eine Textaufgabe, die sich mit dem Bau eines Schwimmbades beschäftigt, gerechnet werden (ebenda: 138).

Des Weiteren werden *Massenmaße* besprochen, wobei eine Anekdote über die *Maße* eines Säuglings als Einführung dient. Darauf werden die entsprechenden *Umrechnungszahlen* besprochen, worauf einige Aufgaben bezüglich des Einübens dieser Informationen gegeben sind. Außerdem finden sich Textaufgaben, die sich mit dem Geburtsgewicht eines Säuglings, dem Gewicht einer Schultasche, Nährwerttabellen von Lebensmitteln, der *Masse* von Pferderassen und Ausstoß von Treibhausgasen beschäftigen (ebenda: 139-142).

Anschließend werden *Flächenmaße* $(mm^2 - km^2)$ besprochen und es folgen Textaufgaben, die die Erklärung der *Umrechnungszahl* 100 bei Flächenmaßen, das Zeichnen eines *Quadrats*, das Auffinden von vorgegebenen *Flächeninhalten* im Alltag, das Schätzen von *Flächeninhalten*, das Schätzen der Anzahl an Personen, die auf einem Quadratmeter stehen können, ein Rockkonzert, das Schätzen des *Flächeninhalts* eines Klassenzimmers, das Zuordnen von *Flächeninhalten* und das Unterscheiden von *Längen*-und *Flächenmaßen* zum Thema haben. Anschließend folgen verschiedene *Umrechnungen von Flächenmaßen* und Textaufgaben, die das Aufwischen von Klassenräumen, Wohnungsaufteilungen, das Verfliesen einer Badezimmerwand und das Pflastern eines Hofes zum Thema haben (ebenda: 196-200).

In weiterer Folge werden die *Flächenmaße* auf a, ha und km^2 erweitert, wobei wieder verschiedene Umrechnungsaufgaben gegeben sind. Anschließend finden sich Textaufgaben, die sich mit dem *Flächeninhalt* der einzelnen Bundesländer Österreichs, dem *Addieren* und *Subtrahieren von Flächeninhalten* mit verschiedenen *Einheiten*, dem *Flächeninhalt* eines Baugrundes, dem Richtigstellen einer Aufgabe, der *Gesamtfläche* einer Gemeinde, der Größe einiger Äcker, einer Reihenhaussiedlung, der Umwidmung von Grünland in Bauland, dem Verkauf von Gemeindegebiet und einem Messegelände beschäftigen (ebenda: 200-202).

Weiters wird die *Umwandlung von Raummaßen* besprochen. Als Einführung dienen unterschiedliche Alltagsgegenstände und das Zusammenbauen eines Würfels, die die unterschiedlichen Raummaße veranschaulichen. Darauf folgen Aufgaben, bei denen Raummaße zugeordnet und verschiedene *Umwandlungen* durchgeführt werden sollen. Zuletzt werden *„Raummaße für Flüssigkeiten und Gase"* besprochen. Anschließend folgen Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler *Einheiten* zuordnen, eine Aufgabe richtigstellen und verschiedene *Umwandlungen* durchführen sollen. Außerdem stehen Textaufgaben zur Verfügung, die das Richtigstellen einer Aufgabe, das Füllen einer Flasche, ein Weinfass, ein Wasserbecken, ein Messgefäß, ein Parfümfläschchen, das Abfüllen von Wasser und das Erfinden eigener Aufgaben zum Thema haben (ebenda: 249-253).
Das *Berechnen der Geschwindigkeit* wird in der 2. Klasse AHS (6. Schulstufe) besprochen. Hier wird erklärt, dass „ $Weg = Geschwindigkeit \cdot Zeit$ " (Reichel, Humenberger, Litschauer, Groß & Aue 2011: 88) bzw. „$s = v \cdot t$" (ebenda: 88). Anschließend sollen für die *Variablen* selbstgewählte *Werte* eingesetzt, die *Gleichung* gelöst und jede *Variable* durch die jeweils anderen ausgedrückt werden. Bei einer weiteren Aufgabe soll der zurückgelegte *Weg* in eine Tabelle eingetragen werden, wobei die *Fahrtdauer* und die *Geschwindigkeit* angegeben sind (ebenda: 88).

5.4.1.3 Unterschied England – Österreich

In diesem Kapitel überschneiden einander die besprochenen Themen in ihrer Erarbeitungsweise. In England beziehen sich die zu bearbeitenden Aufgaben eher auf wissenschaftliche Themen, in Österreich befassen sie sich vielfach mit Geographie. Dadurch wird also versucht einen Landesbezug herzustellen. In Österreich wird Wert auf die zugrundeliegende Theorie gelegt, die am Beginn jedes Themas bzw. Unterpunktes genau erläutert wird. Darauf folgen dann eine Fülle an Aufgaben bzw. Textaufgaben, wodurch diese Theorie gefestigt werden kann. Im englischen Schulsystem wird ohne theoretische oder erklärende Einführung gleich zum Lösen der Aufgaben übergangen.
Unterschiede ergeben sich, da in England mit *englischen Maßen* gearbeitet und ein *Formeldreieck* verwendet wird. Im österreichischen Schulsystem wird jedoch mit speziellen Flächenmaßen, wie ha oder a, gearbeitet. Des Weiteren sind die einzelnen Themen in Österreich auf mehrere Schulstufen aufgeteilt.

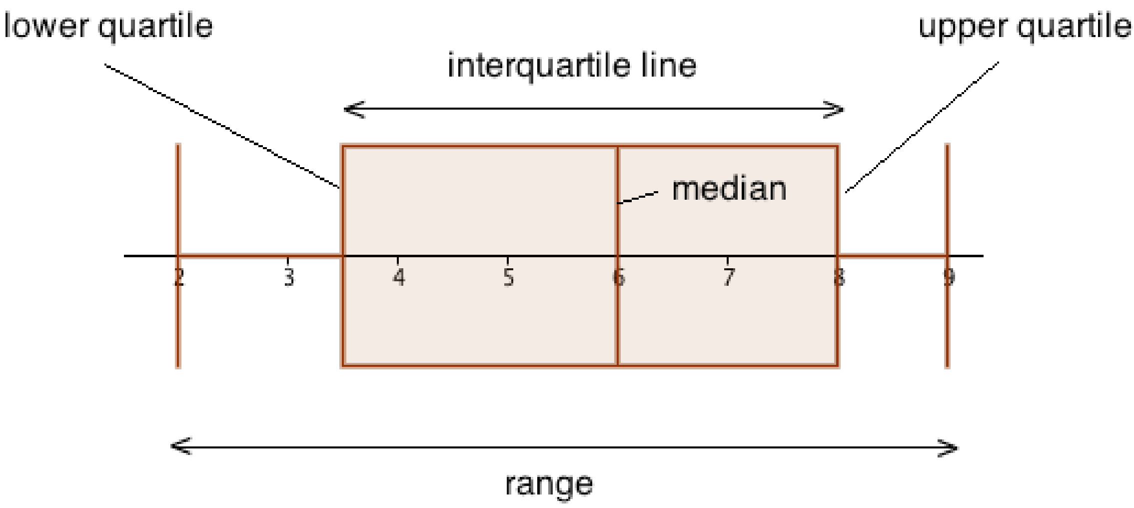
5.4.2 Wahrscheinlichkeit (Probability)

5.4.2.1 England

Im Schulbuch findet sich ein Kapitel, das sich mit dem Berechnen von *Mittelwert*, *Median*, *Modalwert* und *Spannweite* beschäftigt. Zuerst wird darauf hingewiesen, dass es bei der Berechnung von *Modalwert* und *Median* hilfreich ist, die Daten der Größe nach zu ordnen. Darauf folgen Datenreihen, bei denen *Mittelwert*, *Median*, *Modalwert* und *Spannweite* berechnet werden sollen. Außerdem finden sich Aufgaben, die sich mit dem Verdienen von Provisionen, Verspätungen von Bussen, dem *Durchschnittsgewicht* von Fußballern, dem *Gewicht* von Kartoffeln, sowie dem Durchschnitt von Testergebnissen, einer Nummernliste, Fernsehzeiten und Weihnachtskarten beschäftigen. Außerdem finden sich Multiple Choice Fragen bezüglich des *Durchschnitts* (Parsons 2010: 18f).

Im Anschluss daran finden sich Aufgaben zu *Quartile* und *Interquartilsabstand*, die das Gewicht von Eiern, Autos in einem Parkhaus und *ganze Zahlen* zum Thema haben (ebenda: 20).

Danach werden *Box Plots* besprochen. Dazu wird eine Skizze gezeichnet und beschriftet:

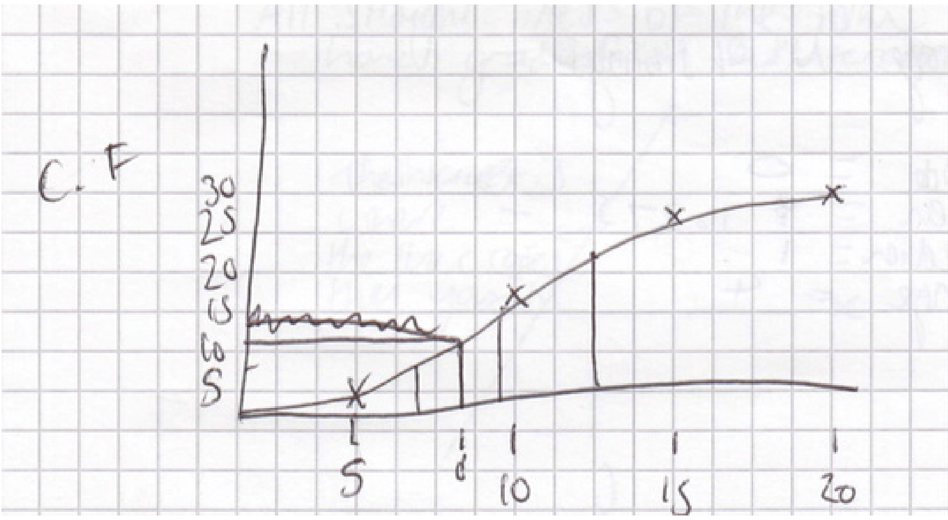


(Schulübungsheft)

Darauf wird die *Kumulierte Häufigkeit (Cumulative Frequency)* besprochen.

Dazu wird folgende Aufgabe gerechnet (Anm: Diese Aufgabe wurde unvollständig im Schulübungsheft gefunden.):

Ages of visitors [Alter der Besucher]	frequency [Häufigkeit]	Cumulative frequency Kumulative Häufigkeit
0-5	5	
6-10	12	
11-15	10	
16-20	3	



Median = 9
LQ = 7
UQ = 3

How many visitors were over 8 years old?
30-12=18. (Ebenda)

Außerdem finden sich im Schulbuch Textaufgaben, die das Ablesen der einzelnen Werte von einer *Häufigkeitskurve*, das Ablesen bestimmter Werte von einem *Box Plot*, die Anzahl von Passagieren in einem Bus, Testergebnisse, ein Brettspiel, Glühbirnen und die Zeitspanne bis zum Siedepunkt des Wassers zum Thema haben (Parsons 2010: 24f).

In weiterer Folge wird das *Auffinden vom Durchschnitt für Häufigkeitstabellen (Finding Averages for Frequency Tables)* besprochen. Dazu wird folgende Tabelle erstellt.

N° of siblings [Anzahl der Geschwister]	Frequency [Häufigkeit]
0	8
1	6
2	5
3	3
4	2

Average of N° of siblings [Durchschnitt der Anzahl der Geschwister]
$mode = 0$ [Modalwert]
$mean = 1.375$ [Mittelwert]
$median = 1$ [Median]
$range = 4$ [Spannweite]

(Schulübungsheft)

Des Weiteren finden sich Textaufgaben, die sich mit der Jahresleistung einer Firma, einem Stundenplan, Gartenlängen, dem Gewicht von Busfahrerinnen, Torstatistiken beim Fußball, Häuserschäden nach einem Tornado und dem Warenbestand eines Schuhgeschäftes beschäftigen (Parsons 2010: 21).
Zum *Vergleich von Verteilungen (Comparing Distributions)* konnten keine Aufzeichnungen gefunden werden.

5.4.2.2 Österreich

Hier werden *Mittelwert (arithmetisches Mittel)*, *Maximum*, *Minimum*, *Modalwert* und *Median* in der 3. Klasse AHS (7. Schulstufe) besprochen. Als Einstiegsbeispiel wird eine *Tabelle* mit Umfrageergebnissen besprochen. Anschließend folgen Textaufgaben, die die Stundenanzahl bezüglich Sport pro Woche zum Thema haben.

In weiterer Folge werden die Begriffe zusammengefasst dargestellt:

Mittelwert oder arithmetisches Mittel

Den Mittelwert $\bar{x}$ erhält man durch Dividieren der *Summe* der Einzelwerte durch die *Anzahl* der Einzelwerte:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sind Einzelwerte.
n ist die Anzahl der Einzelwerte.

Maximum, Minimum und Spannweite

Der größte Einzelwert einer Datenmenge heißt **Maximum** x_{max}.
Der kleinste Einzelwert einer Datenmenge heißt **Minimum** x_{min}.
Den Abstand zwischen Maximum und Minimum bezeichnet man als **Spannweite**: $r = |x_{max} - x_{min}|$

Modalwert und Median

Der Modalwert ist jener Wert einer Datenmenge, der am häufigsten vorkommt. Eine Liste kann auch zwei oder mehrere Modalwerte haben. Tritt kein Wert mehr als einmal auf, hat die Liste keinen Modalwert.
Der Median oder Zentralwert ist jener Wert, der in einer geordneten Liste genau in der Mitte liegt.
Hat die Liste eine gerade Anzahl von Einzelwerten, so ist der Median das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte.

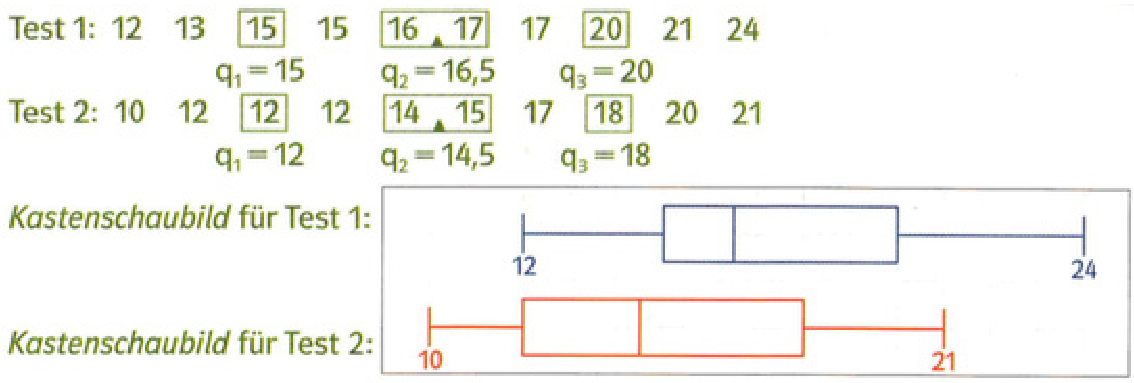
(Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt Sattelberger 2010: 269)

Anschließend finden sich Textaufgaben, die einen Leichtathletik-Teamwettbewerb, das Ergänzen einer *Zahlenreihe*, einen Weitsprungwettbewerb, einen Schikurs, die Auslastung einer Fluglinie und eine Umfrage zum Thema haben (ebenda: 266-271).

In der 6. Klasse AHS (10. Schulstufe) werden diese Begriffe wiederholt und anschließend werden *Quartile* und *Kastenschaubilder (Boxplots)* besprochen. Erstgenannte baut auf der Idee des *Medians* auf:

> Die **Quartile** q_1, q_2 und q_3 ‚vierteln' die geordnete Liste in dem Sinn, dass von den Listenwerten $25\% \leq q_1$, $50\% \leq q_2$ und $75\% \leq q_3$ sind. Demgemäß ist q_2 der Zentralwert z der Liste, q_1 der Zentralwert der ‚unteren' und q_3 der Zentralwerte [sic] der ‚oberen' Listenhälfte. Gemeinsam mit dem Minimum und dem Maximum der Liste legen sie das so genannte **Kastenschaubild** fest.
>
> (Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2010b: 166)

Anschließend wird diese Theorie anhand von folgendem Beispiel besprochen:



(Ebenda: 166)

Der *Interquartilabstand* wird ebenso in dieser Schulstufe besprochen, jedoch findet sich dazu lediglich ein Hinweis im Schulbuch der folgenden Schulstufe. Darin wird wiederholt, dass der *Interquartilabstand* mit „$q_1 - q_3$" (Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2011: 242) berechnet wird und den inneren Kasten des *Kastenschaubilds* darstellt (ebenda: 242).

Zu den Themen *kumulierte Häufigkeit* und *Auffinden vom Durchschnitt für Häufigkeitstabellen* konnten keine Aufzeichnungen gefunden werden.

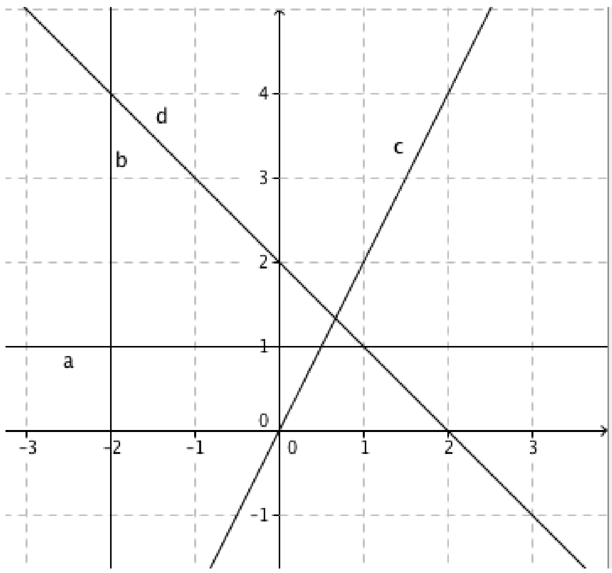
5.4.2.3 Unterschied England – Österreich

In diesem Kapitel überschneiden einander die Themengebiete fast zur Gänze. Der Unterschied bezüglich des englischen Schulsystems besteht darin, dass hier *Maximum* und Minimum nicht angesprochen werden. Außerdem werden die Themen *kumulierte Häufigkeit* und *Auffinden vom Durchschnitt für Häufigkeitstabellen* im österreichischen Schulsystem nicht besprochen.

5.4.3 Algebra

5.4.3.1 England

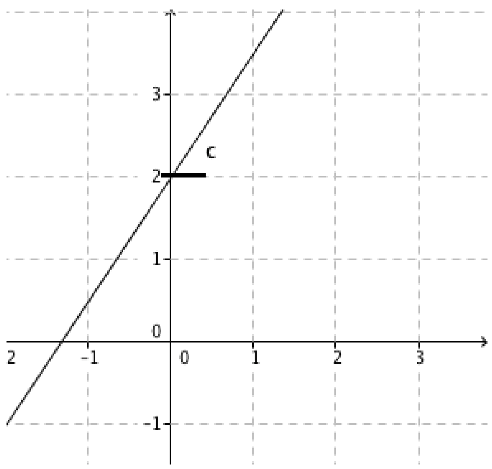
Hier wird zuerst die *Hauptform der Geradengleichung* $y = kx + d$ ($x = mx + c$) besprochen. Dazu werden folgende *Geraden* gezeichnet.



a: y = 1
b: x = -2
c: y=2x
d: y = -x+2

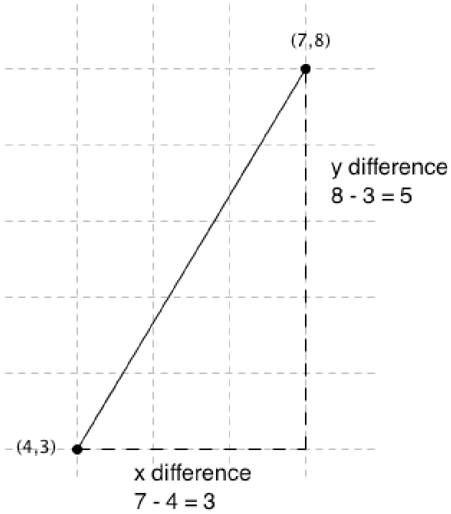
(Schulübungsheft)

Darauf wird Folgendes festgehalten: *Alle Geraden der Form* $y = mx + c$ *haben die Steigung* m *und den Achsenabschnit* c. Anschließend wird veranschaulicht, wo die *Verschiebung auf der y-Achse* abgelesen werden kann.



(Ebenda)

Dazu wird erklärt, dass sich die *Verschiebung auf der y-Achse* dort befindet, wo die *Gerade* die *y-Achse* schneidet (ebenda).
In weiterer Folge wird erklärt, wie die *Steigung (Gradient)* abgelesen werden kann. Dazu werden eine Strecke und das zugehörige *Steigungsdreieck* gezeichnet.



$$gradient = \frac{5}{3} = \frac{y\ diference}{x\ difference} \quad [\ Steigung = \frac{5}{3} = \frac{y\ Differenz}{x\ Differenz}\ ]$$

(Ebenda)

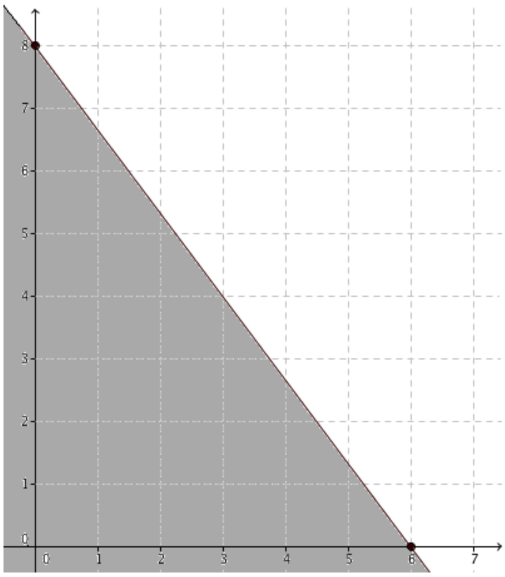
Zusätzlich wird erklärt, dass die *Steigung* abgelesen wird, indem eine *Einheit* nach rechts gerückt und so weit noch oben gerückt wird, bis die *Gerade* berührt wird (ebenda). Im Schulbuch finden sich Aufgaben, bei denen der *Achsenabschnitt* bzw. *Geradengleichungen* zu gegebenen *Geraden* gefunden und *Geradengleichungen* erstellt werden, wobei ein *Punkt* und die *Steigung* bzw. zwei *Punkte* angegeben sind (Parsons 2010: 54).
Im Anschluss daran werden *normale Geraden (Perpendicular Lines)* besprochen, wobei darauf hingewiesen wird, dass die *Geraden* im *rechten Winkel* zueinander stehen *(at right angles)*. Weiters wird erklärt, dass das Produkt der Steigungen zweier normaler Geraden -1 ergibt. Dazu werden folgende Beispiele besprochen:

$$y = 2x + 5$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 12$$

$$y = \frac{3}{4}x - 6$$
$$y = -\frac{4}{3}x - 18$$

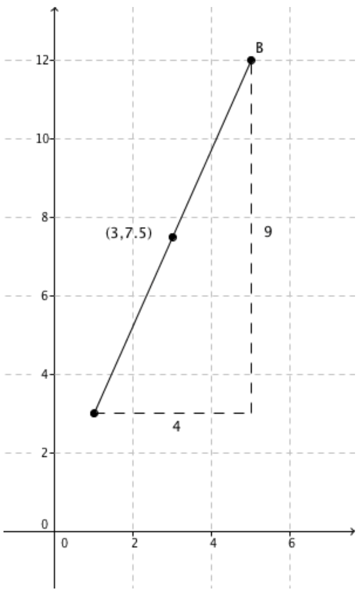
(Schulübungsheft)

Im nächsten Schritt wird das *Zeichnen einer Geraden* besprochen. Dazu ist die *Gerade* $4x + 3y = 24$ gegeben und die Punkte $(0|8)$ und $(6|0)$ werden berechnet. Darauf wird folgender *Graph* gezeichnet.



(Ebenda)

Hinzugefügt wird noch, dass für den eingefärbten Bereich $4x + 3y > 24$ gilt (ebenda). Anschließend werden *Längen und Mittelpunkte von Geradenabschnitten (Lengths and Midpoints of Line Segments)* besprochen. Dazu sind die Punkte $(1|3)$ und $(5|12)$ gegeben, die die *Strecke* begrenzen.



(Ebenda)

Anschließend wird der *Mittelpunt der Strecke* berechnet, indem beide *Koordinaten* einzeln behandelt werden: „x: $\frac{1+5}{2} = 3$“ (ebenda) und „y: $\frac{3+12}{2} = 7{,}5$“ (ebenda). Daher ergibt sich für den Mittelpunkt $(3|7.5)$. In weiterer Folge wird die *Länge der Strecke* berechnet: „$\sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{97} = 9.8$“ (ebenda). Im Schulbuch finden sich zusätzlich Aufgaben, bei denen die *Mittelpunkte von Strecken zwischen zwei Punkten* berechnet werden sollen und eine Textaufgabe, die eine Küchenplanung zum Thema hat (Parsons 2010: 53).

Zum Thema *Graphen im täglichen Leben (Real Life Graphs)* sind im Schulbuch Textaufgaben gegeben, die sich mit einem Busfahrplan, einem Motor, einem Wettrennen und einem *Graphen* mit *inhomogenen linearen Funktionen* beschäftigen (ebenda: 55).

Zu den Themen *Graphen von Ungleichungen (Graphs of Inequalities)* und Lineare Optimierung (*Linear Programming)* konnten keine Aufzeichnungen gefunden werden.

5.4.3.2 Österreich

Die *Geradengleichung* wird zum ersten Mal in der 4. Klasse AHS (8. Schulstufe) eingeführt. Zuerst wird mit einem Beispiel begonnen, welches sich mit der Zimmereinteilung bezüglich einer Abschlussreise von zwei Schulklassen beschäftigt. Diese Einführung führt zu dem Thema *lineare Gleichungen mit zwei Variablen*, wobei auch auf die *Lösungs-* und die *Grundmenge* dieser *Gleichungen* Bezug genommen wird. In weiterer Folge wird erklärt, dass die *Lösungsmenge grafisch interpretiert* werden kann, wobei diese den *Graphen* einer *linearen Funktion* mit der *Gleichung* $kx + d$ darstellt. Dies führt zu folgender *Definition*:

> Eine Gleichung mit zwei Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ der Gestalt
>
> $$ax + by = c \qquad mit\ a, b, c\ \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$
>
> heißt **lineare Gleichung**.
>
> a und b heißen Koeffizienten von x bzw. y.
> Jede lineare Gleichung kann man durch Umformen auch in der Gestalt
>
> $$y = kx + d$$
>
> darstellen.
>
> Die Lösungsmenge der Gleichung besteht aus allen geordneten Zahlenpaaren $(x|y), x, y \in \mathbb{R}$, welche die Gleichung erfüllen.
> Grafisch dargestellt ergeben diese Zahlenpaare eine Gerade.
>
> (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2011: 209)

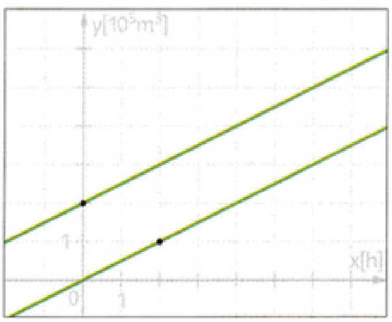
Darauf folgen Textaufgaben, die eine Zimmeraufteilung, eine Erklärung, eine Tombola eines Schulfestes, einen Laufwettbewerb, die *Lösungsmenge*, das Erfinden eines Textes zu vorgegebenen Werten, einen Veranstaltungssaal und das *Aufstellen einer Gleichung* zum Thema haben (ebenda: 206-210).
Anschließend folgt das *grafische Lösen linearer Gleichungssysteme*. Darauf wird an dieser Stelle nicht explizit eingegangen, da dieses Thema im englischen Schulsystem nicht besprochen wurde. Der Grund für die Erwähnung ist, dass hier kurz auf die *Steigung* k und den *Achsenabschnitt* d eingegangen wird. Dazu ist ein *Koordinatensystem* mit zwei *Gerade* gegeben, von denen die *Steigung* und der *Achsenabschnitt* abgelesen und die zugehörigen *Geradengleichungen* in der *Hauptform* und in der *allgemeinen Form* aufgestellt werden sollen. Außerdem findet sich eine Aufgabe, bei der gegebene *lineare Gleichungen* von der *allgemeinen Form* in die *Hauptform* umgeformt werden sollen (ebenda: 211-213).
Eine Fortsetzung dieses Themas findet in der 5. Klasse AHS (9. Schulstufe) statt. Hier wird mit folgender *Definition* begonnen

> Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = kx + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ heißt reelle **lineare Funktion**. Im Fall $d = 0$ heißt die Funktion **homogen**, im Fall $d \neq 0$ **inhomogen**.
> Im Fall $k = 0$ heißt sie **konstante Funktion**.
>
> (Götz, Reichel, Müller & Hanisch: 2010a: 129)

Anschließend wird das folgende Textbeispiel besprochen:

Wir betrachten das Füllen eines Speichers bei einem (als konstant vorausgesetzten) Zufluss von **a** $0{,}5 \cdot 10^5\ m^3/h$. Durch welche Funktion y(x) wird die Abhängigkeit des Speicherinhalts y von der Zeit x beschrieben, wenn der Speicher zum Zeitpunkt $x = 0$ **1** $0 \cdot 10^5\ m^3$, **2** $2 \cdot 10^5\ m^3$ Wasser enthielt? Beschreibe die Funktionen mit Hilfe von Wertetabellen, Funktionsgleichungen und Graphen!
b Verallgemeinere: Welche *Typen* von Funktionsgleichungen erhält man bei einem Zufluss von k m^3/h und einem Startinhalt y(0) von **1** 0, **2** d m^3?
Lösung:

	Zeit (h)	**1** Menge ($10^5\ m^3$)		**2** Menge ($10^5\ m^3$)	
a	0	$y = 0$	$= 0$	$y = 2$	$= 2$
	1	$y = 0{,}5$	$= 0{,}5$	$y = 0{,}5 + 2$	$= 2{,}5$
	2	$y = 0{,}5 \cdot 2$	$= 1$	$y = 0{,}5 \cdot 2 + 2$	$= 3$
	3	$y = 0{,}5 \cdot 3$	$= 1{,}5$	$y = 0{,}5 \cdot 3 + 2$	$= 3{,}5$
	...	...		...	
	x	$y = 0{,}5 \cdot x$		$y = 0{,}5 \cdot x + 2$	
b	x	$y = k \cdot x$		$y = k \cdot x + d$	
		homogene lineare F.		*inhomogene* lineare F.	



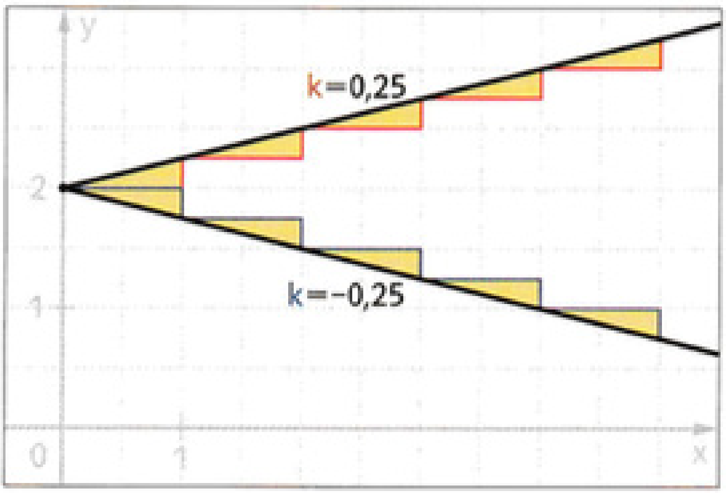
(Ebenda: 129)

Danach wird gezeigt, dass eine *Gerade* tatsächlich der *Graph* einer *linearen Funktion* ist und es folgen Textaufgaben zu *homogenen* und *inhomogenen Funktionen*. Diese haben die *Geschwindigkeit* eines Radfahrers, die Kosten einer Ware, einen Brennstoff, die Gesamtgebühr von Wasser-, Strom- und Gasverbrauch, Temperatur und einen Speicherinhalt zum Thema (ebenda: 129f).

Anschließend wird die *Konstruktion von Geraden* erklärt. Dazu findet sich ein Beispiel, in dem es um zufließendes und abfließendes Wasser geht. Die zugehörigen *Graphen* stellen *steigende* bzw. *fallende Geraden* dar. Dann folgen die *Stufenformel* und die *verallgemeinerte Stufenformel*. Erstgenannte lautet:

> Wächst in einer linearen Funktion $y = k \cdot x + d$ das Argument x um 1 (die Stufenbreite), so verändert sich der Funktionswert y um eine konstante Größe **k** (die Stufenhöhe), genannt **Steigung**.
>
> $$y(x+1) = y(x) + k \qquad x \in \mathbb{R}, beliebig; k, d \in \mathbb{R}, fest$$
>
> (Ebenda: 131)

In weiterer Folge wird dieser *Satz* bewiesen und mit folgendem *Graphen* veranschaulicht.



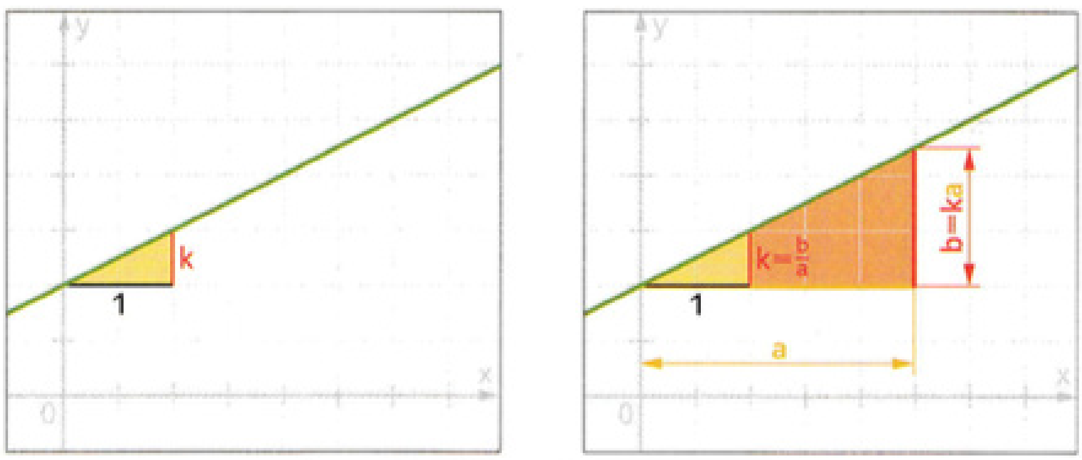
(Ebenda: 131)

Die *verallgemeinerte Stufenformel* lautet:

> Wächst in einer linearen Funktion $y = k \cdot x + d$ das Argument x um Δx (die Stufenbreite), so verändert sich der Funktionswert y um $\Delta y = k \cdot \Delta x$ (die Stufenhöhe).
>
> $$y(x + \Delta x) = y(x) + k \cdot \Delta x \qquad x \in \mathbb{R}; k, d \in \mathbb{R}, fest$$
>
> (Ebenda: 131)

Dieser *Satz* soll von den Schülerinnen und Schülern mit einer analogen Skizze des vorhergehenden *Satzes* veranschaulicht werden (ebenda: 131).

Danach wird erklärt, dass es zwei Möglichkeiten gibt, um eine *lineare Funktion* anhand der zugehörigen *Funktionsgleichung* zu konstruieren. Erstens, können zwei *beliebige Punkte* verbunden werden, deren *Koordinaten* zuvor berechnet wurden und zweitens wird x *nullgesetzt*, wobei sich der *Achsenabschnitt* d ergibt. Anschließend wird die *Steigung* k anhand eines *Steigungsdreiecks* eingezeichnet, was sich aus der *Stufenformel* ableiten lässt. Dazu wird eine *Einheit* nach rechts gerückt und die entsprechenden *Einheiten* der *Steigung* nach oben bzw. unten eingezeichnet. Falls $k = \frac{b}{a}$ wird a *Einheiten* nach rechts gerückt und $b = k \cdot a$ eingezeichnet (ebenda: 132). Folgende *Graphen* veranschaulichen diese Vorgänge:



(Ebenda: 132)

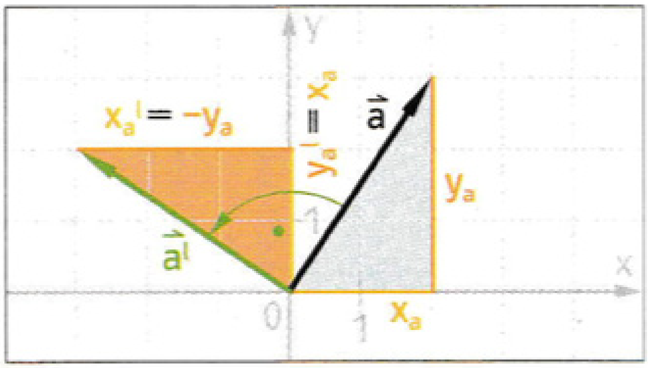
In weiterer Folge wird erklärt, dass die *Steigung* k und der *Achsenabschnitt* d vom *Graphen* abgelesen werden oder berechnet werden können. Zum Berechnen wird zuerst der *Differenzenquotient* definiert: „$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = k$“ (ebenda: 132). Außerdem können die *Koordinaten* zweier vorgegebener *Punkte* in die *allgemeine Form der Geradengleichung* eingesetzt und ein *Gleichungssystem aus zwei Gleichungen* aufgestellt werden. Dessen *Lösung* ergibt die *Steigung* k und den *Achsenabschnitt* d.

Danach finden sich Aufgaben, bei denen die fehlende *Kathete* des *Steigungsdreiecks* ergänzt, die *Steigung* berechnet, beide *Katheten* des *Steigungsdreiecks* und *Graphen* gezeichnet werden sollen, wobei *Funktionsgleichungen* in der *Hauptform der Geradengleichung* und die *Koordinaten* zweier *Punkte* angegeben sind (ebenda: 132).

Anschließend folgen Aufgaben mit den Themen: *Herausfinden der Funktionsgleichungen* der *1.* und *2. Mediane* bzw. der *x-* und *y-Achse*, Überlegungen bezüglich der *Lage der Geraden,* bei denen die *Steigungen* bzw. die *Achsenabschnitte* gleich sind und die *Steigungen* größer bzw. kleiner als *Null* sind, die Begründung der *Umkehrung eines Satzes* hinsichtlich einer *linearen Funktion*, sowie die Illustration und das Beweisen von *Sätzen* bezüglich *inhomogener linearer Funktionen* (ebenda: 132f).

Die folgenden Themen werden im Zuge der *Vektorrechnung* im gleichen Schuljahr besprochen.

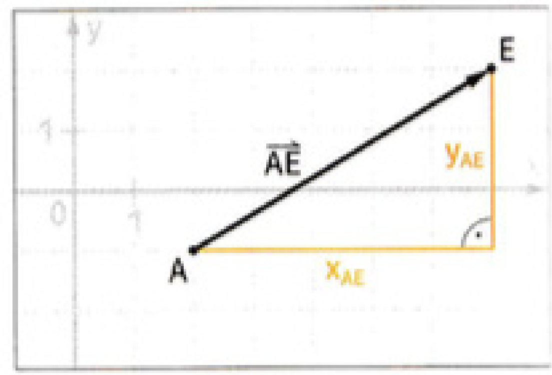
Das *Bilden eines Normalvektors* wird anhand eines *Graphen* erklärt, der das *Drehen des Vektors* um 90° veranschaulicht:



(Ebenda: 240)

Anschließend werden die „**Links-Kipp-Regel:** $\overrightarrow{AE} = \binom{x_{AE}}{y_{AE}} \Rightarrow \overrightarrow{AE^l} = \binom{-y_{AE}}{x_{AE}}$ $bzw.$ $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a} \Rightarrow \vec{a^l} = \binom{-y_a}{x_a}$ “ (ebenda: 240) und die „**Rechts-Kipp-Regel:** $\overrightarrow{AE} = \binom{x_{AE}}{y_{AE}} \Rightarrow \overrightarrow{AE^r} = \binom{y_{AE}}{-x_{AE}}$ $bzw. \vec{a} = \binom{x_a}{y_a} \Rightarrow \vec{a^r} = \binom{y_a}{-x_a}$“ (ebenda: 240) eingeführt. Anschließend kann diese Theorie anhand von Aufgaben eingeübt werden, bei denen *links-* bzw. *rechtsgekippte Normalvektoren* berechnet, *Koordinaten* von *Normalvektoren* ergänzt, *Eckpunkte von Quadraten* gefunden und Überprüfungen bezüglich der Art der *Vielecke* durchgeführt werden sollen (ebenda: 243).

Bezüglich der *Berechnung der Länge einer Strecke* wird zuerst der *Bezug* zum *Lehrsatz des Pythagoras* anhand des *Steigungsdreiecks* hergestellt, woraus danach geschlossen wird:



$$d(A,E) = \overline{AE} = |\overrightarrow{AE}| = \left|\begin{pmatrix} x_{AE} \\ y_{AE} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{{x_{AE}}^2 + {y_{AE}}^2} = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}$$

(Ebenda: 228)

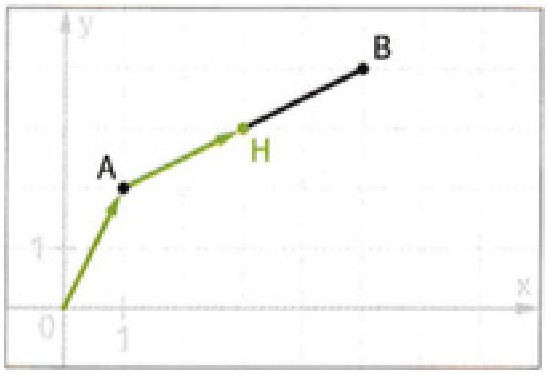
Anhand einer Aufgabe, bei der die *Umfänge von Vielecken* berechnet werden sollen, kann diese Theorie eingeübt werden (ebenda: 229).
Ebenso wird der *Mittelpunkt einer Strecke* im Zuge dieses Themas besprochen. Zuerst wird dies anhand eines Beispiels erklärt, indem eine Strecke *grafisch* und *rechnerisch halbiert* werden soll:

> Man kann die Länge der Strecke AB berechnen und gemäß [...][nebenstehendem Graphen] deren *halbe* Länge von A in Richtung des Vektors $\overline{AB}$ abtragen:

$$\overrightarrow{AB} = \binom{4}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

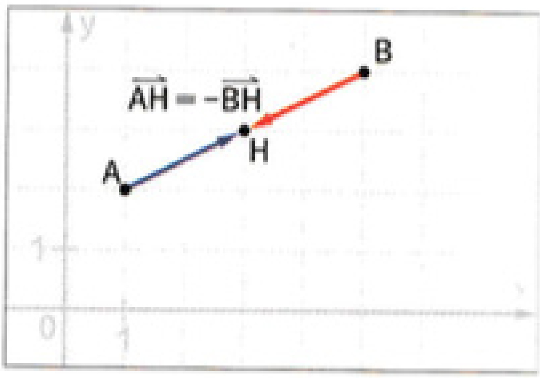
$$\overrightarrow{AB_0} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \binom{4}{2}$$

$$H = A + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \overrightarrow{AB} = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \binom{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \binom{4}{2} = \binom{3}{3}$$



(Ebenda: 245)

In weiterer Folge werden die „**1. Halbierungsformel:** $H = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$“ (ebenda: 245) und die „**zweite Halbierungsformel:** $H = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$“ (ebenda: 245) besprochen. Außerdem wird darauf hingewiesen, dass die *2. Halbierungsformel* auch anhand des Verhältnisses „ $\overline{AH} : \overline{BH} = 1:1$ “ (ebenda: 246) hergeleitet werden kann. Aus „ $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BH}$ “ (ebenda: 246) folgt „$H - A = -(H - B)$“ (ebenda: 246) und durch Umformen von „ $H - A = -H + B$ “ (ebenda: 246) $\Leftrightarrow$ „ $2 \cdot H = A + B$ “ (ebenda: 246) erhält man „$H = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$“ (ebenda: 246).



5.4.3.3 Unterschied England – Österreich

In diesem Kapitel gibt es einige Überschneidungen, jedoch auch zahlreiche Unterschiede.

Zuerst unterscheiden sich die *Variablen* bei der *Hauptform der Geradengleichung* voneinander. In England lautet diese $y = mx + c$ und in Österreich üblicherweise $y = kx + d$. Die Handhabung dieser Größen ist dieselbe. Des Weiteren fallen im österreichischen Schulsystem die Besprechung des *Normalvektors*, des *Mittelpunkts einer Strecke* und die *Länge einer Strecke* in den Bereich der *Vektorrechnung*, welches im englischen Schulsystem nicht explizit betont wird, in Österreich jedoch ein eigenes Themenfeld darstellt. Außerdem wird der Bereich unter einer *Funktion* in Österreich erst in der 8. Klasse (12. Schulstufe) in der *Integralrechnung* (Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2013: 32-84) thematisiert, welches in England anders behandelt wird. Hier wird ein Graph gezeichnet und die zugehörige Ungleichung aufgeschrieben. Weitere Erklärungen fehlen.

Insgesamt werden die Themen hier unter unterschiedlichen Gesichtspunkten behandelt. Wiederum ist erkennbar, dass in England auf Theorie wenig Wert gelegt wird. Dieser Umstand lässt sich speziell dabei erkennen, dass Themen der *Vektorrechnung* kurz angesprochen, jedoch nicht im Zuge dieses Themas bearbeitet werden. Ausschlaggebend ist das Lösen der Aufgaben, ohne die zugrundeliegenden Überlegungen und Theorien zu besprechen.

5.4.4 Geometrie (Shape)

5.4.4.1 England

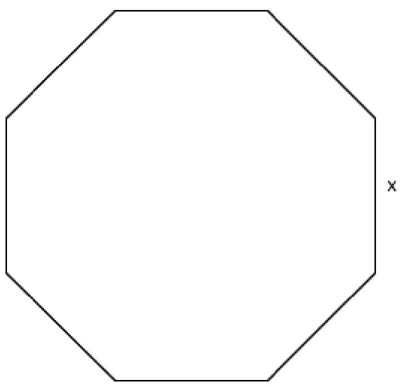
Hier wird mit dem Thema *Winkel in Vielecken (Angles in Polygons)* begonnen. Dazu wird eine Tabelle erstellt, die die *Anzahl der Seiten* und die *Größe der Innenwinkel* gegenüberstellt:

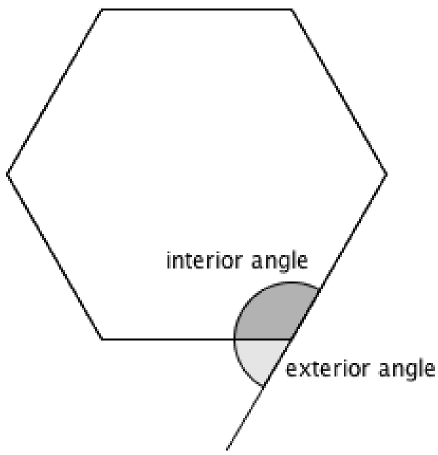
Number of Sides [Anzahl der Seiten]	Total of Interior Angles [Summe der Innenwinkel]
3	180°
4	360°
5	540°
12	1800°

(Schulübungsheft)

Daran anschließend wird festgehalten, dass die *Summe der Innenwinkel* mit „$(n-2) \times 180°$" (ebenda) angegeben werden kann (ebenda).

Darauf folgt die Besprechung von *regelmäßigen Vielecken*. Dazu werden ein *Achteck* und ein *Sechseck* skizziert, wobei letzteres den Zusammenhang zwischen *Innen-* und *Außenwinkeln* veranschaulicht.

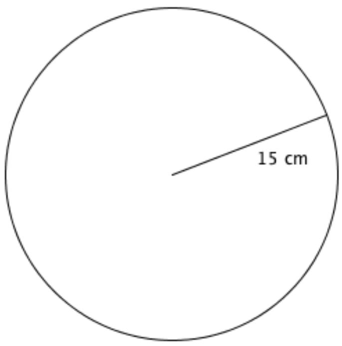




(Ebenda)

In weiterer Folge wird erklärt, dass $Außenwinkel \cdot Anzahl\ der\ Seiten = 360°$ und dass die *Summe* von *Innenwinkel* und zugehörigem *Außenwinkel* 180° ergibt (ebenda).

Im Schulbuch wird definiert, dass ein *Vieleck* eine Figur mit mehreren Seiten ist und dass beim *regelmäßiges Vieleck* alle *Seiten* gleich lang und alle *Winkel* gleich groß sind. Darauf folgen Aufgaben, die sich mit *regelmäßigen Vielecken*, einem *gleichseitigen Dreieck*, einem *regelmäßigen Sechseck*, zusammengesetzten *Fünfecken*, einer zusammengesetzten Figur aus einem *Quadrat* und einem *Sechseck*, *unregelmäßigen Vielecken*, *Innen-* und *Außenwinkeln*, einem *regelmäßigen Fünfeck*, das in einen Kreis eingeschrieben ist, und einem *regelmäßigen Sechseck* beschäftigen (Parsons 2010: 58f).
In weiterer Folge wird der *Kreis* besprochen. Dafür wird folgende Aufgabe gerechnet.



$Circumference = 2\pi r = 94.2\ cm$ [Umfang]
$Area = \pi r^2 = 706.9\ cm^2$

(Ebenda)

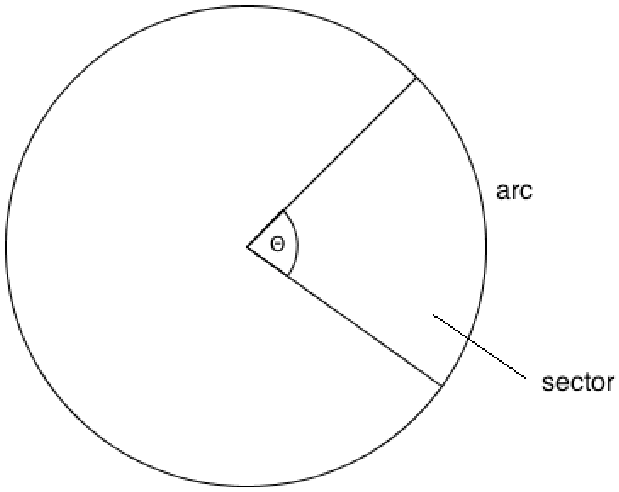
In weiterer Folge stellt sich die Frage, wie der *Radius* berechnet wird, wenn der *Flächeninhalt des Kreises* gegeben ist. Die anschließende Aufgabe illustriert diesen Vorgang.

If $Area = 24\ cm^2$, what is r?
[Wenn die Fläche = 24 cm^2, wie groß ist r?]

$r = \sqrt{24 \div \pi} = 2.8\ cm$

(Ebenda)

Die letzten Themen sind *Kreisbogen* und *Kreissektor (Arcs and Sectors)*. Dazu werden die folgende *Skizze* gezeichnet und die dazugehörigen *Formeln* notiert.



$$length\ of\ arc = \frac{\theta}{360°} \times \pi D$$

[Länge des Kreisbogens]

$$area\ of\ sector = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$$

[Fläche des Kreissektors]

(Ebenda)

Im Schulbuch findet sich eine *Skizze* eines Kreises, mit einem *Kreissektor*, einer *Sekante* und einer *Tangente* (Parsons 2010: 60) und Textaufgaben, die einen Plastikstreifen und einen Waschmittelball zum Thema haben (ebenda: 104).

5.4.4.2 Österreich

Im österreichischen Schulsystem erfolgt die Besprechung der *Vielecke* in der 2. Klasse AHS (6. Schulstufe). Als Einführung dient ein Gedicht über ein *Fünfeck*, worauf zwei Aufgaben folgen, die sich mit einem Fußball und einer Stopp-Tafel beschäftigen. Dieses führt zu der *Definition* von *regelmäßigen Vielecken*: „Ein Vieleck mit n Ecken ($\mathrm{n} = 3,4,5,6,\ldots$) heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich lang sind.“ (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2009: 201) Anschließend finden sich Aufgaben, die sich mit *Parkettierungen*, dem Einzeichnen von *Symmetrieachsen* und der *Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks* beschäftigen. Daraufhin wird den Schülerinnen und Schülern erklärt, dass ein *regelmäßiges Sechseck* konstruiert wird, indem man den *Radius* auf der *Kreislinie* abschlägt (ebenda: 201f).

Anschließend folgen Aufgaben zum regelmäßigen *Sechseck.* Dabei sollen *regelmäßige* Sechsecke konstruiert, die *Diagonalen*, die die Figur in sechs kongruente, gleichseitige Dreiecke teilen, eingezeichnet und die Dreieckseigenschaften beschrieben werden. Weiters sollen die *Summe der Innenwinkel* angegeben und die *Konstruktion mit dem Zirkel* erklärt, sowie ein *regelmäßiges Achteck* konstruiert werden. In weiterer Folge wird beschrieben, wie letzteres gemacht wird: Zuerst werden zwei Linien, deren Länge dem *Durchmesser* des zu konstruierenden *Achtecks* entspricht, zueinander *orthogonal* eingezeichnet. In einem zweiten Schritt werden *Winkelsymmetralen* konstruiert, wodurch die *Kreislinie* acht *Schnittpunkte* mit diesen *Strecken* aufweist. Diese werden verbunden um ein *regelmäßiges Achteck* zu erhalten. Darauf folgen Aufgaben, die die *Konstruktion eines regelmäßigen Achtecks*, das *Einzeichnen von gleichschenkligen Dreiecken* in ein *Achteck*, das Beschreiben der *Eigenschaften der gleichschenkligen Dreiecke*, die Angabe der *Größe der Innenwinkel* im *regelmäßigen Achteck*, dieselbe Aufgabe bezüglich eines *regelmäßigen Fünfecks* und *Parkettierungen* zum Thema haben. Hinzu kommen noch Aufgaben, die sich mit *unregelmäßigen Vielecken*, dem *Zeichnen von Sternen* und dem Erkennen von *Vielecken* beschäftigen (ebenda: 202-204).

Außerdem findet sich im Schulbuch für die 5. Klasse AHS (9. Schulstufe) eine Aufgabe, bei der *bewiesen* werden soll, dass „die Variable d in der Formel $d = n \cdot (n-3)/2$ für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ Werte aus $\mathbb{N}$ annimmt“ (Götz, Reichel, Müller & Hanisch 2010a: 119), „dass die Formel $d = n \cdot (n-3)/2$ tatsächlich die Anzahl d der Diagonalen eines **regelmäßigen n-Ecks** angibt“ (ebenda: 119) und angegeben werden soll, ob für *nicht-regelmäßige n-Ecke* diese Formel ebenfalls erfüllt ist (ebenda: 119).

Der *Kreis* wird das erste Mal in der 1. Klasse AHS (5. Schulstufe) besprochen. Hier werden die Begriffe *Kreislinie, Kreisfläche, Kreisteile (Mittelpunkt, Radius, Durchmesser), Kreis, Kreissegment* und *Kreissektor* bearbeitet (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2014: 104-109).

Berechnungen folgen erst in der 4. Klasse AHS (8. Schulstufe). Zuerst wird die *Kreiszahl* π und der *Umfang des Kreises* anhand von Aufgaben besprochen, die sich mit einer Einradfahrerin, *Kreisen* im Lauf der Geschichte und dem Abrollen einer Münze beschäftigen (Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2011: 230).

Im Anschluss daran wird die *Kreiszahl* π besprochen:

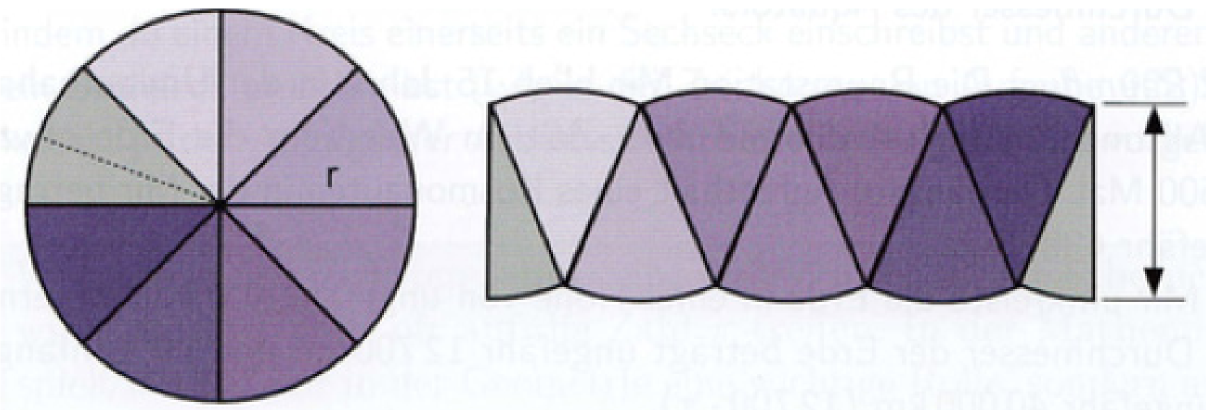
> Alle Kreise sind zueinander ähnlich. Da das Verhältnis entsprechender Längen ähnlicher Figuren konstant ist, muss das Verhältnis $\frac{u}{d}$ konstant sein. Diese Konstante wird π (sprich: **pi**) genannt.
>
> (Ebenda: 230)

Anschließend wird zusammengefasst:

> In allen Kreisen ist das Verhältnis von Umfang *(u)* und Durchmesser *(d)* gleich. Es gilt:
>
> $$u:d = \frac{u}{d} = \pi$$
>
> Die Zahl π ist irrational (unendlich viele Nachkommastellen, aber nicht periodisch [...]).
>
> $\pi = 3{,}14159265359 \ldots \approx 3{,}14$
>
> Für den Umfang des Kreises gilt daher:
>
> $$u = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$$
>
> (Ebenda: 230)

Anschließend folgen Aufgaben die sich mit dem *näherungsweisen Bestimmen der Kreiszahl* π *und dem Kreisumfang* beschäftigen. Dabei geht es um die *Berechnung* des *Kreisumfangs* mit $d = 1$ und die *Näherung von Archimedes von Syrakus.* Außerdem befassen sich zwei Aufgaben mit einem *Kreis*, dem ein *Quadrat* bzw. ein *regelmäßiges Sechseck* eingeschrieben und umgeschrieben wird. Nach dem Hinweis, dass die *Kreiszahl* π in der Mathematik und in anderen Wissenschaften essentiell ist, folgen Aufgaben, die die Berechnung des *Kreisumfangs*, das Richtigstellen einer Aufgabe, dem *Umformen der Umfangsformel*, ein *kreisförmiges* Blumenbeet, einen Kran, den Äquator und einen Raumflug zum Thema haben (ebenda: 228-233).

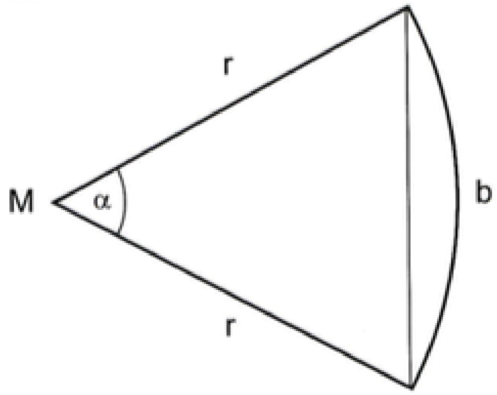
In weiterer Folge wird der *Flächeninhalt des Kreises* besprochen. Zuerst wird mit einem Beispiel begonnen, das sich mit einem Gerät, das eine Wühlmaus verjagen soll, beschäftigt. Darauf folgen zwei Aufgaben, anhand derer der *Flächeninhalt des Kreises* näherungsweise berechnet werden kann. Bei der ersten Methode wird ein *Kreis* in *Kreissektoren* unterteilt, welche anschließend aneinandergelegt werden.



(Ebenda: 234)

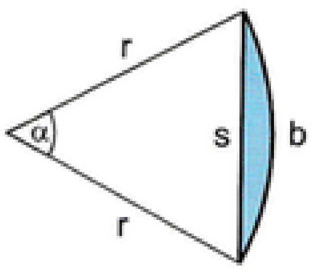
Die zweite Möglichkeit ist das *Ein- bzw. Umschreibens eines Kreises mit n-Ecken*, wobei die *Flächeninhalte der Quadrate untere bzw. obere Schranken* für *den Flächeninhalt der Kreises* darstellen. Anschließend werden die Formeln $A = r^2 \cdot \pi$ und $A = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$ für den *Flächeninhalt des Kreises* eingeführt. Darauf folgen Aufgaben, bei denen die vorhergehenden *Formeln* angewendet und *Umkehraufgaben* berechnet werden können. Textaufgaben beschäftigen sich mit dem Vertreiben einer Wühlmaus, einem Brunnen, runden und ovalen Tischen, Zusammenhängen zwischen *Größen* von *Quadraten* und *Kreisen*, Veränderungen eines *Radius* und den Auswirkungen auf den entsprechenden *Umfang* bzw. *Flächeninhalt*, dem Berechnen von fehlenden *Größen*, einem Kreisverkehr und einem Schmuckanhänger. Außerdem finden sich Aufgaben zur *Berechnung von zusammengesetzten Figuren* und ein Textbeispiel bezüglich der Fassade einer Kirche (ebenda: 234-239).

Der *Kreissektor* und der *Kreisbogen* werden gemeinsam besprochen, wobei letzterer zu Beginn dieses Themas mit einer Hängematte verglichen wird. Anschließend findet sich die Skizze eines *Kreissektors*, wobei die *Bogenlänge b*, der *Radius r*, der *Mittelpunkt M* und der *Zentriwinkel* α eingezeichnet sind.



(Ebenda: 242)

Darauf folgen Aufgaben, bei denen eine *Tabelle* und ein *Lückentext* gegeben sind, wobei Informationen bezüglich des *Zentriwinkels* und dem *Flächeninhalt des Kreissektors* erarbeitet werden können. Anschließend folgen die Besprechung der *Formeln* für die *Bogenlänge*: $b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$ und des *Flächeninhalts des Kreissektors* $A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ und Aufgaben, bei denen diese *Formeln* angewendet, *Formeln* hergeleitet und umgeformt, sowie *Umkehraufgaben* gerechnet werden können. Außerdem soll bewiesen werden, dass $A = \frac{b \cdot r}{2}$ für den *Flächeninhalt der Kreissektors* gilt. Außerdem wird das *Kreissegment* anhand einer Aufgabe besprochen (ebenda: 242-244).



(Ebenda: 244)

5.4.4.3 Unterschied England – Österreich

Hier überschneidet sich die grundlegende Besprechung der Stoffgebiete größtenteils. In Österreich wird nicht explizit auf die *Innen*- bzw. *Außenwinkel in Vielecken* eingegangen, wobei sich die besprochenen Themen jedoch über mehrere Klassen erstrecken. Dadurch ist eine genauere Besprechung möglich. Außerdem wird sehr genau auf die Konstruktion von *Vielecken* mit ihren entsprechenden *Eigenschaften* eingegangen. Auch auf die Besprechung der *Diagonalen* der entsprechenden *Vielecke* wird viel Wert gelegt. Darüber hinaus können die einzelnen Themengebiete mit einer Fülle von Aufgaben und Textaufgaben eingeübt und erforscht werden. Außerdem wird der Besprechung des *Flächeninhalts des Kreises* viel Raum gegeben und es wird gezeigt wie die entsprechende *Formel* zustande kommt. Diese Punkte werden im englischen Schulsystem außer Acht gelassen. Außerdem wird in Österreich zusätzlich das *Kreissegment* besprochen.

In England wird auf die genaue Besprechung der *Kreiszahl* π gänzlich verzichtet. Diese wird lediglich in den entsprechenden *Formeln* verwendet und ohne weitere Kommentare verwendet.

Wiederum ist erkennbar, dass im österreichischen Schulsystem viel Wert auf den Aufbau des Stoffes, die Theorie und die entsprechenden Aufgaben gelegt wird. Beim Stoffaufbau im englischen Schulsystem wird der Eindruck erweckt, dass nur das Nötigste besprochen wird um dem Lehrplan zu entsprechen.

6 Resümee

In dieser Arbeit wurde zuerst das englische Schulsystem bezüglich seiner Geschichte, der Struktur und der Sekundarschule behandelt. Hier ist bereits zu erkennen, dass sich das englische Schulsystem vor allem hinsichtlich der beiden letzten Punkte vom österreichischen Schulsystem unterscheidet. In England beginnen die Kinder im Alter von fünf Jahren in die Schule zu gehen. Die Schulpflicht endet mit der Ablegung des *GCSE* im Alter von 16 Jahren.

Danach wurde auf den Lehrplan der *Key stage 4* eingegangen, die sich über die 10. und 11. Schulstufe erstreckt. Diese Schuljahre sind zugleich die Vorbereitungszeit auf den *GCSE.* Für diesen gibt es einen gesonderten Lehrplan, der ebenfalls vorgestellt wurde. Zwischen den beiden Curricula bestehen geringe Unterschiede, die hervorgehoben wurden.

Anschließend wurden die Themengebiete, die in England in der 10. Schulstufe von Juli bis Februar besprochen wurden, mit den entsprechenden Themen im österreichischen Lehrplan verglichen. Dabei wurden die entsprechenden Zeitspannen in die Themengebiete Numerik *(Number)*, Algebra (*Algebra)*, Geometrie *(Shape)* und Wahrscheinlichkeit/Stochastik *(Data)* unterteilt und gesondert besprochen.

Insgesamt lässt sich anhand dieses Vergleichs feststellen, dass trotz großer Ähnlichkeit der Stoffgebiete, erhebliche Unterschiede bestehen. Dieser Umstand könnte sich einerseits dadurch ergeben, dass die entsprechenden Themen in England in zwei Jahren besprochen werden müssen, wofür in Österreich acht Jahre zur Verfügung stehen. Die Stoffgebiete sind aufbauend und werden im österreichischen Schulsystem oft in unterschiedlichen Schulstufen vertieft. Andererseits, wird in Österreich mehr Wert auf die zugrunde liegende Theorie gelegt, wodurch sich ein besseres Verständnis der Themengebiete ergibt. Hier werden die Themen anhand von Aufgaben, jedoch auch anhand von zahlreichen *Merksätzen*, *Sätzen* und *Beweisen* erarbeitet. Diese stellen nicht nur ein „Rezept“ dar, dessen Anwendung zu einem erfolgreichen Lösen einer Aufgabe dient, sondern geben den Schülerinnen und Schülern auch eine theoretische Grundlage, mit der die Aufgaben leichter bearbeitet werden können. Im englischen Schulsystem scheint es, als ob der *Rechengang* das Hauptziel ist, wobei lediglich das Minimum an Theorie besprochen wird.

Teilweise wird diese sehr vereinfacht dargestellt, wodurch sich inexakte bzw. teilweise inkorrekte Aussagen ergeben. Das lässt dich speziell beim Thema *Wahrscheinlichkeit* beobachten.
Des Weiteren scheint der Aufbau der Themengebiete im österreichischen Schulsystem logischer und durchsichtiger zu sein als im englischen Schulsystem. Ersteres versucht Schritt für Schritt vorzugehen, wobei letzteres die vorzubereitenden Themen oft sprunghaft aneinanderreiht. Es scheint, als ob in den Vorgaben für den *GCSE* die geforderten Themengebiete ausgewählt wurden, ohne auf einen sinnvollen Aufbau Rücksicht zu nehmen. Der Stoff wird den Schülerinnen und Schülern in zwei Jahren beigebracht, damit sie die Prüfung bestehen. Hierbei wird offenbar außer Acht gelassen, dass beim Arbeiten mit Mathematik in erster Linie nicht das Bestehen einer Prüfung, sondern das logische Denken, das Erkennen von Zusammenhängen und das Argumentieren im Vordergrund stehen.
Außerdem steht in Österreich für jede Schulstufe ein eigenes Buch zur Verfügung, wobei die einzelnen Themen klar angeordnet sind. Außerdem findet sich eine Fülle von Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler in jeder Hinsicht fordern. Hier können die Lernenden die zugrundeliegende Theorie erforschen, üben und vertiefen. Darüber hinaus gibt es ein großes Angebot an Textaufgaben, die in ihrer Themenvielfalt variieren und den Lernenden einen Einblick in das große Anwendungsgebiet der Mathematik geben. In England wird nur ein einziges Schulbuch verwendet, worin der gesamte Stoff für den *GCSE* zu finden ist. Die vorzubereitenden Themen werden sehr kurz dargestellt, wobei es sich vorwiegend um Aufgaben ohne zugrundeliegende Theorie handelt. An manchen Stellen finden sich aufbauende Kommentare, die sich an die Schülerinnen und Schüler richten. Hier findet sich jedoch kein Zusammenhang mit der Mathematik.
Bei der Bearbeitung der Themen finden sich trotz Überschneidungen erhebliche Unterschiede. Neben der fehlenden Theorie in England fehlt oft ein logischer Aufbau der Stoffgebiete. Des Weiteren werden beispielsweise Themen der *Vektorrechnung* besprochen, ohne auf dieses Thema explizit einzugehen oder es zu benennen. Es scheint, dass lediglich das erfolgreiche Lösen von Aufgaben und nicht die zugrundeliegenden Themen das vordergründige Ziel ist. Darüber hinaus ergeben sich Unterschiede in der Darstellung der Rechengänge. Diese finden sich beispielsweise bei der Durchführung der *Polynomdivision* und der *Primfaktorzerlegung*.

Des Weiteren wird in Österreich großer Wert auf das Erlernen von unterschiedlichen Kompetenzen gelegt. Das heißt, dass hier keinesfalls das alleinige Lösen der Aufgaben, sondern der Weg dorthin im Vordergrund steht. Beim Vergleich der Vorgehensweisen in beiden Schulsystemen wurde erkannt, dass jedoch in England das Lösen von Aufgaben das Ziel ist. Hier wird den Schülerinnen und Schülern oft ein Rechengang präsentiert, den sie sich einprägen müssen ohne auf die zugrundeliegende Motivation und Legitimation einzugehen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass beide Schulsysteme unterschiedliche Schwerpunkte bezüglich der mathematischen Ausbildung setzen. In Österreich steht das Verständnis der mathematischen Hintergründe und Grundlagen im Vordergrund, während in England das erfolgreiche Berechnen von Aufgaben das vorherrschende Ziel zu sein scheint. Die entsprechende Theorie wird großteils außer Acht gelassen und aufgrund von Vereinfachung inkorrekt dargestellt. Bezüglich der einzelnen Themen unterschieden sich die beiden Länder nur geringfügig voneinander, wobei im österreichischen Schulsystem aufgrund der unterschiedlichen Zeiteinteilung viel weiter in die Tiefe gegangen wird.

7 Quellenverzeichnis

7.1 Textquellen

BIFIE. 2015. *https://www.bifie.at/standardueberpruefung* (2. 5.2015).

Götz, Stefan (Hrsg.); Reichel, Hans-Christian (Hrsg.); Müller, Robert; Hanisch, Günter. 2010a. *Mathematik 5.* Wien: Öbv.

Götz, Stefan (Hrsg.); Reichel, Hans-Christian (Hrsg.); Müller, Robert; Hanisch, Günter. 2010b. *Mathematik 6.* Wien: Öbv.

Götz, Stefan (Hrsg.); Reichel, Hans-Christian (Hrsg.); Müller, Robert; Hanisch, Günter. 2011. *Mathematik 7.* Wien: Öbv.

Götz, Stefan (Hrsg.); Reichel, Hans-Christian (Hrsg.); Müller, Robert; Hanisch, Günter. 2013. *Mathematik 8.* Wien: Öbv.

Hanisch, Günter; Benischek, Isabella; Hauer-Typpelt, Petra; Sattlberger, Eva. 2014. *MatheFit 1 Lehrer/innenausgabe*. Wien: Besseres Buch.

Hanisch, Günter; Benischek, Isabella; Hauer-Typpelt, Petra; Sattlberger, Eva. 2009. *MatheFit 2 Lehrer/innenausgabe*. Wien: Besseres Buch.

Hanisch, Günter; Benischek, Isabella; Hauer-Typpelt, Petra; Sattlberger, Eva. 2010. *MatheFit 3 Lehrer/innenausgabe*. Wien: Besseres Buch.

Hanisch, Günter; Benischek, Isabella; Hauer-Typpelt, Petra; Sattlberger, Eva. 2015. *MatheFit 3 Lehrer/innenausgabe*. Wien: Besseres Buch.

Hanisch, Günter; Benischek, Isabella; Hauer-Typpelt, Petra; Sattlberger, Eva. 2011. *MatheFit 4 Lehrer/innenausgabe*. Wien: Besseres Buch.

Mathsrevision. http://www.mathsrevision.net/gcse-maths-revision/shape-and-space/circle-theorems (04.11.2014).

Parsons, Richard. *GCSE Mathematics Edexcel Modular The Workbook Higher Level*. Broughton-In-Furness: CGP.

Phillips, David. 2002. „England und Wales“. In Döbert, Hans (Hrsg.); Hörner, Wolfgang (Hrsg.).; von Knopp, Botho (Hrsg.).; Mitter, Wolfgang (Hrsg.).. *Die Schulsysteme Europas : Albanien, Andorra, Armenien, Belgien, Bosnien-Herzegowina, Bulgarien, Dänemark, Deutschland, England und Wales, Estland, Färöer Inseln, Finnland, Frankreich, Georgien, Griechenland, Irland, Island, Italien, Kroatien, Lettland, Liechtenstein, Litauen, Luxemburg, Malta, Makedonien, Moldawien, Monaco, Niederlande, Norwegen, Österreich, Polen, Portugal, Rumänien, Russische Föderation, San Marino, Schweden, Schweiz, Serbien, Slowakische Republik, Slowenien, Spanien, Tschechische Republik, Türkei, Ukraine, Ungarn, Weißrussland, Zypern.* (2. Aufl). Baltmannsweiler: Schneider-Verl. Hohengehren, 115-129.

Reichel, Christian; Humenberger, Hans; Litschauer, Dieter; Groß, Dieter; Aue, Vera. 2011. *Das ist Mathematik 2.* Wien: Öbv.

Reichel, Christian; Humenberger, Hans; Litschauer, Dieter; Groß, Dieter; Aue, Vera; Neuwirth, Erich. 2012. *Das ist Mathematik 4.* Wien: Öbv.

Schoolswork. 2007. http://www.schoolswork.co.uk/media/files/Undestanding_the_UK_education_system.pdf (29.10.2014).

UK Gouvernment . 2013. https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/254441/GCSE_mathematics_subject_content_and_assessment_objectives.pdf (29.20.2014).

UK Gouvernment . 2014a. https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/219167/v01-2012ukes.pdf (29.10.2014).

UK Gouvernment . 2014b. https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/331882/KS4_maths_PoS_FINAL_170714.pdf (29.10. 2014).

7.2 Bildquelle

Ludgerusschule. http://www.ludgerusschule.de/content/projekte/eurorap/grossbr/schule.htm (27.10.2014).

8 Anhang

8.1 Lebenslauf: Iris Wolf

Persönliche Daten	***Sprachkenntnisse***	***EDV-Kenntnisse***	***Spezielle Qualifikationen***
Geburtsdatum: 18. 6. 1986 Geburtsort: Villach Nationalität: Österreich Familienstand: ledig	English Italienisch Latein	MS-Word (Windows) MS-Excel Geogebra	ausgebildete Schauspielerin Führerschein A und B

Ausbildung

1992 – 1996	Volksschule in Villach
1996 – 2003	BG u. BRG Villach St. Martin
2003-2004	BG u. BRG Polgarstraße, 1220 Wien
Juni 2004	Reifeprüfung mit ausgezeichnetem Erfolg
2004-2012	Schauspielausbildung (Abschluss: Paritätische Reifeprüfung)
Oktober 2009	Studium an der Universität Wien: Mathematik (LA), Englisch (LA)
9. November 2012	Erstes Diplomprüfungszeugnis Mathematik (LA), Englisch (LA)