DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Geogebra

Einsatz in der Sekundarstufe I

Verfasser

Werner Kranawetter

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 884 406
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramt Informatik Mathematik
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. i.R. Dr. Günter Hanisch

Mein Dank gilt...

meinen Eltern, die mir das Studium in Wien ermöglichten und immer wieder eine große Stütze waren.

Daniela JANTSCHY für Ihren Ideenreichtum, Ihre Hilfsbereitschaft und Ihr kritisches Denken, wodurch diese Diplomarbeit erst zu dem wurde, was sie jetzt ist.

Günter HANISCH, der nie die Rolle des Betreuungslehrers aufgab.

Direktorin Karin BRESNIK und Direktorin Christa FRIEDL, die mir die Tore Ihrer Schulen öffneten, um meine Evaluierung durchführen zu können.

Iris MEYER, Thomas THALHAMMER, Günter HRABEC, Iris WOLF für die Mühe, sich dieser Diplomarbeit anzunehmen und zu lektorieren.

Roswitha POSCH und Karin BRESNIK, die mir den Umstieg vom Studium in den Lehrberuf so leicht wie möglich gemacht haben und mir immer bei Problemen zur Seite standen.

Monika FORNIX und Ihrem Team, welches es mir ermöglichte, Arbeit und Studium zu verbinden.

Abstract

In den letzten Jahren wurde immer wieder von Medien, Eltern und Schülern gewünscht, dass man den Mathematikunterricht in der Unterstufe moderner gestalten sollte. Eine Reaktion des Bildungsministeriums ist der Beschluss zur verpflichtenden Verwendung Geogebras bei der Zentralmatura ab dem Jahr 2018. Diese Diplomarbeit hat sich dieser Problematik angenommen. Im ersten Teil wird das Programm Geogebra auf didaktische Prinzipien analysiert, welche Lerntheorien und Unterrichtskonzeptionen beinhalten. Im zweiten Teil wird auf den Lehrplan der AHS-Unterstufe eingegangen. Dabei werden zu jedem Kapitel jeder Klasse die Einsatzmöglichkeiten von Geogebra analysiert. Um einen praktischen Bezug zum Unterricht herzustellen werden zu jedem Kapitel Beispiele aus den Schulbüchern *MatheFit* gelöst, wobei auch jeweils die Stärken und Schwächen von Geogebra aufgezeigt werden. Der letzte Teil beinhaltet eine empirische Untersuchung mit dem Ziel, den aktuellen Einsatz von Geogebra in der Unterstufe widerzuspiegeln. In dieser Evaluierung wurden auch die persönlichen Erfahrungen und Meinungen der Schüler mit Geogebra berücksichtigt.

English version

In recent years the media, teachers, parents and students have repeatedly requested that maths lessons in lower grades should be designed in a more modern way. This desire is based on the decision of the Ministry of Education that all students have to take the centralized A-levels with the assistance of advanced technology from school year 2017/2018 onwards. This issue is covered in this thesis.

In the first part the program Geogebra is analysed concerning its didactic principles, which include learning theories and teaching concepts. The second part discusses the curriculum of the lower grades in grammar schools. In doing so, each chapter of each class is analysed regarding possible ways to include Geogebra. In every chapter exercises taken from the schoolbook MatheFit are solved to connect theory and practice. In addition, these highlight the strengths and weaknesses of Geogebra. The last part of this thesis includes an empirical study. Its aim is to reflect on the current usage of Geogebra in lower grades. In this evaluation students' personal experiences and opinions on Geogebra were considered as well.

Inhalt

Einleitung

Ideenfindung

Da mein zweiter Unterrichtsgegenstand Informatik ist, wollte ich über ein Thema schreiben, dass auch einen Bezug zu diesem herstellt. Ich stand technischen Neuerungen schon immer kritisch gegenüber, deshalb war ich sofort begeistert von der Idee meiner Lebensgefährtin, das Programm Geogebra zu analysieren. Während meiner eigenen Schulzeit gab es diese Lernsoftware noch nicht. Sie wurde mir erst an der Universität Wien und an der KPH Wien/Krems vorgestellt. Seit damals war mein Interesse an dem Programm groß und seither überlege ich immer wieder aufs Neue, wie es sich sinnvoll in den Unterricht einbinden lässt. Nach Absprache mit ao. Univ.-Prof. i.R. Dr. Günter Hanisch, welcher meine Vorstellungen ebenfalls für gut umsetzbar hielt, war das Thema gefunden und die Arbeit konnte beginnen.

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die Verwendung männlicher und weiblicher Sprachformen verzichtet. Sämtliche Personenbezeichnungen gelten gleichwohl für beiderlei Geschlechter.

Ziele dieser Diplomarbeit

In den folgenden Kapiteln wird auf die didaktische Anwendbarkeit von Geogebra im Mathematikunterricht eingegangen. Geogebra stellt eine kostenlose Systemsoftware dar, die sowohl eine grafische als auch eine algebraische Schnittstelle aufweist. Um mehr Klarheit zu schaffen, wie man Geogebra sinnvoll in den Unterricht einbinden kann, ist diese Diplomarbeit folgenden Zielsetzungen gewidmet:

- Eine kurze didaktische Analyse der gängigen Lerntheorien mit Bezugnahme auf Geogebra.
- Das Finden von Möglichkeiten, Geogebra erfolgreich im Mathematikunterricht einzusetzen.
- Das Aufdecken ineffektiver Einsatzmöglichkeiten von Geogebra im Mathematikunterricht.

- Eine Evaluation, die den momentanen Einsatz von Geogebra widerspiegeln soll.

Im ersten Kapitel ist es das Ziel, die Anwendbarkeit von Geogebra, unter Bezugnahme bekannter Entwicklungspsychologen und deren Lerntheorien im Mathematikunterricht, zu analysieren. Zusätzlich wird in diesem Abschnitt auf die zeitmäßig sinnvolle Einsetzbarkeit von Geogebra eingegangen. Die folgenden beiden erwähnten Ziele werden im zweiten Kapitel bearbeitet. Unter Berücksichtigung des Lehrplans der AHS Unterstufe[1] wird versucht, positive aber auch negative Aspekte bei der Verwendung von Geogebra zu finden. Die Ergebnisse der Evaluation werden in Kapitel vier erläutert.

Aufbau dieser Arbeit

Das erste Kapitel beinhaltet die Didaktik. Es werden bekannte didaktische Grundprinzipien und die behavioristische, kognitivistische und konstruktive Lerntheorie erläutert. Zusätzlich wird im ersten Kapitel auf die möglichen Einsatzweisen von Geogebra im Mathematikunterricht und auf gängige Unterrichtskonzeptionen eingegangen. Abschließend wird auch auf die rechtliche Lage und auf den österreichischen Lehrplan und die dortigen Erläuterungen zum Einsatz elektronischer Hilfsmittel eingegangen. Anschließend wird noch der Vortrag von Andreas FISCHER „*Der Einsatz des Computers im Mathematikunterricht der Hauptschule*“[8] behandelt.

Im zweiten Kapitel wird der im ersten Kapitel analysierte Lehrplan genauer unter die Lupe genommen. Dabei wird auf die vier Lehrplanschwerpunkte, die in jeder Schulstufe relevant sind, Bezug genommen. Diese sind:

- Arbeiten mit Zahlen und Maßen
- Arbeiten mit Variablen
- Arbeiten mit Figuren und Körpern
- Arbeiten mit Modellen, Statistik

[1] Lehrplan AHS Unterstufe und österreichische Hauptschule sind ident

Somit ist ein Aufbau gemäß dem Spiralprinzip gewährleistet[2]. Im dritten Kapitel wird in Absprache mit den jeweiligen Schuldirektoren eine Evaluation durchgeführt, welche den momentanen Stand und Einsatz von Geogebra aufzeigen soll. Mit Bezugnahme auf diese Ergebnisse beinhaltet das letzte Kapitel eine Zusammenfassung und versucht die Entwicklung von Geogebra zu prognostizieren.

[2] Siehe S.12

Geogebra

Einsatz in der Unterstufe

Kapitel 1 Didaktische Analyse

Geogebra?

„Wer immer tut, was er schon kann, bleibt immer das, was er schon ist."

Henry Ford 1863-1947

Es stellt sich nun die Frage, ob dies einer der Aspekte war, der zur Einführung von Geogebra geführt hat, oder ob es einfach der normale Zeitwandel war. Es scheint, dass es momentan einen spürbaren Umbruch im Mathematikunterricht gibt. Im Moment steigen immer mehr Schulen vom elektronischen Taschenrechner auf Computerprogramme um, die auf allen gängigen PCs und Laptops ausgeführt werden können. Diese Veränderungen reichen bis in die Mobiltelefonie. Doch bringt dieser Umstieg auf computergesteuerte Mittel auch automatisch einen höheren Lernerfolg? Dazu hat das Onlineportal Spiegel Online[1] eine Studie der Princeton-Universität und der Universität von Kalifornien präsentiert. In drei Versuchsreihen konnten sie zeigen, dass Studenten, die sich Notizen auf dem Laptop machen, bei Leistungstests schlechter abschnitten als jene Studenten, die das Wichtigste per Hand mitschrieben.[3] Ein Grund für dieses Ergebnis ist, dass bei der Laptop-Mitschrift alles stichwortartig erfasst wurde. Im Gegensatz dazu wurden bei den handschriftlichen Notizen eigene Sätze formuliert, die man sich besser merken kann.

Leider geht aus den Studien nicht hervor, in welchen Fächern diese Analysen durchgeführt wurden. Besonders in einem Fach wie Mathematik, in dem man beim Mitschreiben am Laptop viele Sonderzeichen benötigt, ist es schwieriger, schnell und sinnerfassend mitzuschreiben, als beispielsweise in einem linguistischen Fach.

[3] Spiegel-Online-28.7.2014

Ist es demnach ein Rückschritt Computer und Laptops in den Unterricht einzubinden, wenn die Gedächtnisleistungen nachlassen? Nein, denn der Erfolg hängt vom richtigen Einsatz im Klassenraum ab. Bei vielen Lehrerfortbildungen hört man immer wieder, dass ein guter Mathematikunterricht auch ohne Technologieeinsatz möglich ist. Diese Tatsache soll nicht bestritten werden, aber wie eingangs Henry FORD schon zitiert wurde, sollte man auf diese neu gewonnenen Mittel nicht verzichten. Deshalb werden auf den kommenden Seiten didaktische Grundprinzipien mit Bezugnahme auf Geogebra analysiert.

Didaktische Prinzipien

Die folgenden Punkte sollen unter Berücksichtigung der didaktischen Prinzipien klären, wann, wie, warum und wo man Geogebra einsetzen sollte, um optimalen Lernerfolg zu erzielen. Zuvor wird noch ein Überblick über die Theorien der Denkentwicklung gegeben.

Theorien der Denkentwicklung

Der Entwicklungspsychologe Jean PIAGET[4] hat mit seiner „Stadientheorie" noch heute Einfluss auf unsere Denkpsychologie. Er geht davon aus, dass sich die Denkentwicklung von Schülern in mehreren Stadien vollzieht und im Laufe der Zeit immer höhere Denkleistungen erzielt werden. [2]

Zusammenfassung des Schemas:

Alter	Stadium	Denkleistung
2-6	präoperatorisch	an konkrete Handlungen und unmittelbare Anschauung gebunden; nicht kompositionsfähig, nicht reversibel
7-11	konkrete Operationen	an konkrete Vorstellungen gebunden, reversibel
ab 12	formale Operationen	nicht an konkrete Vorstellungen gebunden; formal abstrakt, deduktiv, hypothetisch

Zitat: Grundkurs Mathematik Didaktik [2] S.95

Im ersten Stadium ist das Kind, laut PIAGET, stark an konkrete Handlungen und unmittelbare Anschauungen gebunden. Das heißt, dass das Kind noch nicht in der Lage ist, die nötigen Vergleichsoperatoren zusammenzufügen. Im zweiten Stadium ist das Kind zwar immer noch stark an unmittelbare Handlungen gebunden, es lernt aber gewisse Denkleistungen zusammenzusetzen und umzukehren. Das dritte Stadium nennt er das Stadium der „formalen Operationen". Die Kinder stehen hier am Anfang eines hypothetisch-deduktiven Denkens. Als Beispiel:

[4] **Jean PIAGET** (* 9. August 1896 in Neuchâtel; † 16. September 1980 in Genf) Entwicklungspsychologe

„Gilt dies……, dann gilt das….“

Die Schüler schaffen es, aufgrund von Annahmen Rückschlüsse herzustellen, ohne dabei auf eigene Erfahrungen zurückzugreifen. Einfachste transitive Annahmen werden von den Schülern verstanden. Zum Beispiel:

$$„a < b \text{ und } b < c, \text{dann } a < c“$$

Schüler sind somit fähig, Beweise und algebraische Umformungen zu verstehen.

Sieht man davon ab, dass man mit Geogebra auch zeichnen kann, eignet sich der Einsatz von Geogebra erst in diesem dritten und letzten Stadium, da die Schüler erst jetzt fähig sind, algebraische Begriffe zu verstehen. Diese Stadientheorie von PIAGET zieht sich noch bis heute in den Unterricht. Da der Technologieeinsatz in der Unterstufe schon vonstattengeht, kann im Stadium der formalen Operationen mit dem Arbeiten in Geogebra begonnen werden.

Im nächsten Absatz wird die Theorie der Darstellungsebenen nach BRUNER[5] erörtert.

Theorie der Darstellungsebenen nach BRUNER

> *„BRUNERs Theorie der Denkentwicklung ist als die bisher radikalste Modifikation der Piaget'schen Theorie anzusehen. Die Denkentwicklung vollzieht sich nach BRUNER nicht auf zeitliche abgestufte Denkniveaus, sondern gleichzeitig auf verschiedene „Darstellungsebenen", die in starker Wechselbeziehung zueinander stehen."*
>
> Zitat: Grundkurs der Mathematikdidaktik S104 [2]

BRUNER unterscheidet in seiner Theorie drei verschiedene interagierende Darstellungsformen:

1. enaktive Darstellung — Sachverhalt durch Handlung
2. ikonische Darstellung — Sachverhalt durch Bilder
3. symbolische Darstellung — Sachverhalt durch Zeichen und Sprache

Zuerst dominiert die enaktive Darstellung, danach folgt die ikonische Darstellung und zum Schluss die symbolische Darstellung.

[5] **Jérôme Seymour BRUNER** (* 1. Oktober 1915 in New York) Psychologe

„Das Kind kommt mit seinen gewohnten Handlungen durch den Alltag. Mit der Zeit kommt die Darstellung der Bilder hinzu und allmählich wachsen Bilder und Handlung zu einer Sprache zusammen.“

Zitat: Grundkurs der Mathematikdidaktik S104 [2]

Es gibt Wechselwirkungen zwischen den Darstellungen, welche BRUNER als „Enaktivierung“, „Ikonisierung“ und „Verbalisierung“ bezeichnet. Durch eine besondere Pflege dieser Übergänge zwischen den Darstellungsformen kann man eine höhere Denkleistung erzielen. Diese Aufgabe, welche wir mit Geogebra ohne weiteres erfüllen können, fällt letztlich auch auf uns Lehrer zurück. Geogebra hat bereits mehrere internationale Auszeichnungen erhalten, unter anderem wurde es zum Sieger des Comenius 2004 „German Educational Media Award“[6] ernannt. Dazu ein Auszug der Begründung für die Auszeichnung:

„Die Jury erkennt mit großer Freude den Förderpreis dem Programm GeoGebra zu, weil es in hervorragender Weise entdeckendes, handlungs-orientiertes Lernen fördert und sich zur Lösung von Problemaufgaben eignet. Das Werkzeug hat durch die neuartige Verbindung von dynamischer Geometrie und Computeralgebra auf den behandelten Gebieten didaktische Vorteile, die andere vergleichbare Werkzeuge so nicht bieten.“

Comenius 2004: German Educational Media Award

Diese Aussage deckt sich mit den Theorien der Denkentwicklung von Piaget und BRUNER. Mit Geogebra müsste demnach ein optimaler Lernerfolg garantiert sein.

Spiralprinzip und Orientierung an Leitideen

„Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden.“

Zitat: BRUNER[3]

Um einen Lernerfolg zu sichern, sollte der Mathematikunterricht nicht in unzusammenhängende Gebiete auseinanderfallen. Er sollte eine Struktur haben und einen roten Faden, der sich durch das gesamte Gebiet der Mathematik zieht. Das Wiederholen der Gebiete sollte einen Überblick und ein Gefühl für den Umfang der

[6] http://www.gpi-online.de/front_content.php

Mathematik geben. Doch dies soll nicht nur oberflächlich über den Gesamtlehrplan erfolgen, sondern auch auf die ganz kleinen Zyklen des Lernens übergreifen. Nach KLINGBERG[7] spaltet sich das Lernen in sechs verschiedene Phasen, die immer wieder durchlaufen werden.

Diese Phasen sind: [2] S. 127-128

1. Phase der Motivation
   Der Lernprozess bedarf eines Anstoßes.

2. Phase der Schwierigkeit
   Ist der Lernprozess angestoßen, so werden Schwierigkeiten auftreten.

3. Überwindung der Schwierigkeiten
   Der Lernende versucht mittels Hilfestellung (Lehrer, Mitschüler, Medien,…) seine Schwierigkeiten zu überwinden.

4. Sicherung des Gelernten
   Das neu Gelernte wird wiederholt und nach eventueller Korrektur verinnerlicht.

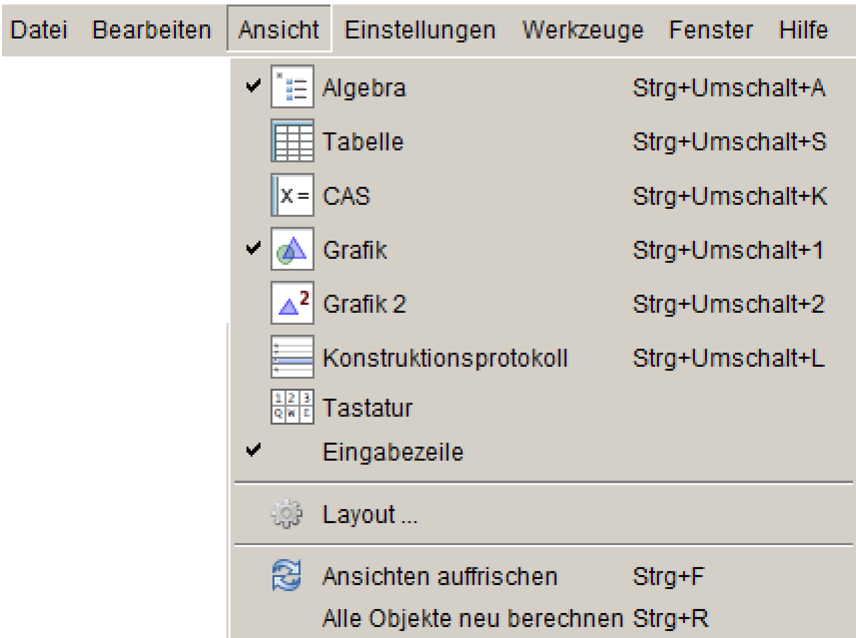
5. Phase der Anwendung
   Das neu Gelernte wird in neuen schwierigeren Beispielen angewandt und geübt.

6. Transfer des Gelernten
   Erst wenn der „Transfer“ in spätere Lebenssituationen gelingt, gilt der Lernprozess als erfolgreich und abgeschlossen.

Der Lernprozess gilt also erst dann als erfolgreich, wenn der zu lernende Inhalt als verstanden und wiedereinsatzfähig angesehen werden kann. Dies ist auf das Spiralprinzip von BRUNER übertragbar, denn nur durch immerwährendes Wiederholen in den verschiedensten Abschnitten, kann ein Lernerfolg gesichert werden.

In Geogebra haben sich die Entwickler etwas sehr Originelles einfallen lassen, um das Prinzip des spiralförmigen Aufbaus von BRUNER zu unterstützen. Man kann je nach geistigem Niveau der Schüler die Ansicht-Fenster von Geogebra an- und ausschalten.

[7] **Lothar KLINGBERG** (* 11. Januar 1926 in Rosenberg/Oberschlesien; † 8. Juli 1999 in Brandenburg an der Havel)



Dies hat den Vorteil, dass Schüler, die sich erst in höheren Schulstufen mit bestimmten Funktionen beschäftigen, nicht durch das übermäßige Angebot an Bearbeitungsmöglichkeiten abgelenkt werden. Beispielsweise beschäftigen sich Schüler ausschließlich mit dem Zeichnen und Analysieren eines Kreises im Grafik-Fenster. Im Laufe der Schullaufbahn kann man mit dem Zuschalten des Algebrafensters dieses Problem noch vertiefen. Diese Möglichkeit hebt Geogebra von anderen Konkurrenzprodukten ab. Die Schüler müssen nicht mehrere Programme kennen oder erlernen, sondern es reicht ein einziges Programm aus, um die verschiedensten geometrischen Themengebiete abzudecken. Ein weiterer Punkt ist, dass Geogebra auf „schulnahe“ Notation setzt. Denn das Abschreiben aus dem Schulübungsheft ist weit einfacher, als noch zusätzliches Übersetzen in eine weitere Fachsprache[4]S.21.

Das Spiralprinzip ähnelt dem Aufbauprinzip von DIENTES.

> *„Jüngere Kinder sollten Gelegenheit bekommen, mathematische Konzepte konkret-handelnd aufzubauen.“*
>
> Zitat: Grundkurs Mathematikdidaktik [2] S113

Damit ist gemeint, dass Schüler zuerst die Methode des Probierens und Experimentierens anhand von Beispielen und Denkaufgaben erlernen sollen. Erst wenn dieser Schritt erfolgreich abgeschlossen ist, kann man mit den Schülern die

Ergebnisse analysieren. Dies lässt sich wieder wunderbar mit der Eigenschaft der Ansichts-Fenster verwirklichen. Um abschließend den Zusammenhang zu den Theorien der Denkentwicklung wiederherzustellen, gilt Folgendes:

Das Spiralprinzip von BRUNER und das Aufbauprinzip von DIENTES sind beides Modifikationen der Stadientheorie von PIAGET. Das würde aber auch implizieren, dass man die Darstellungsebenen von BRUNER auch mit einbeziehen müsste, da diese auch nur eine Abänderung der Theorie von PIAGET sind. Man kann also der Reihung des Spiralprinzips folgen. Zu Beginn wird in der enaktiven Phase gearbeitet, dann wird in die ikonische Phase gewechselt und zum Schluss setzt die symbolische Phase ein.

Lerntheorien

Der folgende Abschnitt setzt sich mit den klassischen Lerntheorien auseinander. Denn Ziel der Lehrer sollte doch sein, seine Schüler möglichst effektiv zum Lernen anzuregen. Lerntheorien sind eigentlich nichts anderes als Konstrukte, die das „Lernen“ mit möglichst einfachen Mitteln erklären sollen. Im Folgenden werden die drei bekanntesten Lerntheorien vorgestellt. Dabei wird jedoch auf eine Wertung dieser gänzlich verzichtet. (vergleiche [5] S.3)

Behaviorismus

Beim Behaviorismus handelt es sich um eine der ältesten lernpsychologischen Strömungen, die ihre Anfänge im 19. Jahrhundert hatte und sich 1920 schlussendlich durchsetzte. Die wichtigsten Vertreter waren John WATSON[8], Lee THORNDIKE[9] und SKINNER[10].

John WATSON zerlegte jedes menschliche Verhalten in eine „Reiz-Reaktionskette“. Da zu dieser Zeit die Theorie der Introspektion (=Selbstbeobachtung) gebräuchlich war, war dieser Schritt von WATSON ein gewaltiger. WATSON nahm dabei als Reiz jede mögliche Veränderung in der äußeren Umwelt oder im Individuum selbst an. Beispielsweise würde auf den Reiz „brauche Nahrung“ die Reaktion „Hunger“ folgen. Um nun zum Lernen zu kommen, wird der Lernende als passive „Black Box“ eingesetzt. Dementsprechend wäre jegliches Verhalten durch Erfahrungen mit der Umwelt erlernt und nicht angeboren. Wenn Entscheidungen getroffen wurden, welche als erwünscht gelten, so gibt es eine Belohnung. Dadurch kommt es zu Handlungsverstärkungen und Abschwächungen in Folge von Konsequenzen. Der Behaviorismus nahm durch SKINNER im Jahr 1958 schulischen Einfluss. Er stellte sein Konzept „Programmierte Instruktion“ den Schülern zur Verfügung. Sein Vorschlag war, den Unterrichtsstoff auf Fragen und direkte Antworten zu reduzieren. Dabei folgte auf jede Frage sofort die „einzige“ richtige Antwort. Weiters konnten die Schüler selbst die Geschwindigkeit, die Wiederholungsrate und den

---

[8] **John Broadus WATSON** (9. Januar 1878 South Carolina; † 25 September 1958 New York City) Psychologe

[9] **Edward Lee THORNDIKE** (* 31. August 1874 Massachusetts† 9. oder 10. August 1949 New York) Psychologe

[10] **Burrhus Frederic SKINNER** (* 20. März 1904, Pennsylvania; † 18. August 1990, Massachusetts) Psychologe

Schwierigkeitsgrad wählen. Dies sollte einen optimalen Lernerfolg garantieren. Wenn man eine gewisse Anzahl an Fragen richtig beantwortet hatte, bekam man zusätzlich eine Belohnung. SKINNER nannte diesen selbstgeschaffenen Ablauf „Programme“. Im Laufe der Zeit und dem einsetzenden Computerzeitalter wurde dieses „Programm“ unter dem Namen „tutorielle Systeme“ zusammengefasst. Auch im Programm Geogebra ist der Behaviorismus allgegenwärtig. Auf der Hersteller-Website von Geogebra[11] finden sich selbstständige Lerntutorials. Zusätzlich bietet Geogebra eine eigene „GeogebraTube“ an. Dies ist eine Onlineplattform, wo sich Benutzer austauschen können und wieder eigene Tutorials anbieten. Auch für die Schüler der Sekundarstufe I eignet sich diese Onlineplattform optimal. Sie ist kostenlos abrufbar und in deutscher Sprache geschrieben.

Kognitivismus

In den 1950er Jahren kam es zu einer Gegenbewegung gegen den soeben beschriebenen Behaviorismus. Die wichtigsten Vertreter waren Edward TOLMAN[12], Jerome BRUNER[13] und Jean PIAGET[14].

Im Gegensatz zum Behaviorismus wird beim Kognitivismus das Individuum in den Mittelpunkt gestellt[3]. Beim Behaviorismus wurde das Innere bewusst ausgeblendet und als „Black Box“ bezeichnet. Hingegen versucht man nun beim Kognitivismus die intern laufenden Informationsprozesse zu verstehen. (vergleiche [5] S.5). Konkret heißt das, dass Kognitivistische Lerntheorien davon ausgehen, dass das Lernen durch Prozesse und Zustände beeinflusst wird, die zwischen Reiz und Reaktion liegen.

Reiz -> kognitive Struktur -> Reaktion

Das Aussehen dieser kognitiven Struktur ist bei den kognitiven Lerntheoretikern meist verschieden. In dieser Arbeit konzentriert man sich auf die kognitiven Entwicklungstheorien von PIAGET. Er ging davon aus, dass diese kognitive Struktur (Schema) aus Elementen besteht, die bestimmten Aufbaugesetzmäßigkeiten

---

[11] www.geogebra.org
[12] **Edward Chace TOLMAN** (* 14. April 1886 in, Massachusetts; † 1959 , Kalifornien) Psychologe
[13] **Jérôme Seymour BRUNER** (* 1. Oktober 1915 in New York) Psychologe
[14] **Jean PIAGET** [(* 9. August 1896 in Neuchâtel; † 16. September 1980 in Genf) Entwicklungspsychologe

unterworfen sind. Eine solche Struktur regelt sich weitgehend selbst, das heißt, sie stellt eine ursprüngliche Ganzheit dar und besteht aus einem System von Beziehungen und Transformationen. Die kognitiven Strukturen bestehen aus Gruppen von Schemata, die sich nach gewissen Entwicklungsgesetzen verändern. Der Mensch teilt demnach seine Umwelt in verschiedene Schemata ein. Zum Beispiel beim Multiplizieren mit Zahlen, dem Schema des Multiplizierens. Schemata machen verschiedenartige Gegenstände zu gleichartigen. So werden Zahlen zu solchen Gegenständen, mit denen multipliziert werden kann. Diese Schemata werden im Gehirn abgespeichert und dienen zur Wiedererkennung.

Wesentlich zur Formung einer kognitiven Struktur sind die Assimilation und die Akkommodation. Diese beiden tragen zur Gesamtformung der kognitiven Struktur bei. Folgendermaßen lassen sich beide Begriffe beschreiben:

- Assimilation
  Dieser Begriff beschreibt das Einordnen und Interpretieren von bekannten Gegenständen. Zum Beispiel wird das Schema des Multiplizierens gestärkt, indem das Multiplizieren immer wieder geübt wird.

- Akkommodation
  Dieser Terminus wird verwendet, wenn es bei bekannten Gegenständen eine Diskrepanz zur gewohnten Struktur gibt. Dieser Fall tritt in der Mathematik ein, wenn Zahlen als Brüche dargestellt werden. Will man sie nun addieren, so darf man nur ihre Zähler addieren, aber nicht die Nenner.

Doch wie muss man als Lehrer nun agieren, um nach Vorbild des Kognitivismus zu lehren? Ähnlich DIENTES Aufbauprinzip[15] muss eine Einbettung des neuen Lehrstoffes in das Fundament des alten passieren. Auf diese Weise ergibt sich ein sequenzierter Ablauf mit einer genauen Rangordnung und Unterrichtsgestaltung. Kognitives Lernen kann man also als Lernen durch Verstehen und Nachvollziehen bezeichnen. Es geht also nicht mehr um das Auswendiglernen von Informationen, sondern um die

[15] siehe S.15

Auseinandersetzung mit den Lerninhalten und den Erwerb von Methoden und Fähigkeiten für das Lösen von Problemstellungen. Der Lehrer nimmt die Rolle des „Richtungsweisers" ein. Dieser legt den Lernstoff und die Abfolge fest, wobei dieser Lernstoff nicht nur aus Fakten besteht, wie es beim Behaviorismus der Fall ist. Die Schüler bestimmen ihren Lernprozess selbst, da jeder individuelle Lernvoraussetzungen mitbringt. Die Lehrer sind auch nicht mehr zuständig für andauerndes Wiederholen, sondern gelten eher als „Tutoren" beziehungsweise „Guides". Der Lehrvorgang selbst ist in folgende Punkte gegliedert:

- Aufmerksamkeit wecken
  Den Lehrstoff mittels besonderer Betonungen oder einfallsreicher Geschichten reizvoller gestalten.
- Vorwissen aktivieren
  Bevor ein neuer Lehrstoff gelehrt wird, sollte ein kurzer Gesamtüberblick vermittelt werden, an den die Schüler anknüpfen können.
- Wahrnehmungsprozess unterstützen
  Informationen sollten einfach, verständlich und prägnant dargestellt werden.
- Speicherung im Gedächtnis verbessern
  Durch das Anwenden des neu Gelernten, kann die Gedächtnisleistung gesteigert werden.
- Wissen überprüfen und verbessern
  Mit dem Erreichen von Lernzielen kann das Lernverhalten positiv beeinflusst werden.

Entdeckendes Lernen

Unter Bezugnahme auf die Psychologen PIAGET und BRUNER wird zum Abschluss noch auf eine besondere Art des Kognitivismus eingegangen, das entdeckende Lernen[6].

> *„Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller – sowohl im Hinblick auf handfeste Leistungen, speziell Transferleistungen, als auch im Hinblick auf mögliche schwer fassbare bildende Formung-, je mehr es im Sinne eigner*

aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbstständigen entdeckerischen Unternehmungen beruht.“

Zitat Endeckende Lernen [6] S.1

Diese Hauptthese wird von folgenden Punkten untermauert, auf welche sich das Prinzip entdeckenden Lernens stützt[16].

1. Etwas in der Mathematik zu lernen, kann auf Dauer nur funktionieren, wenn man Einsicht gewinnt. Es kommt zwar oft zu Scheinleistungen, diese treten aber nur zeitlich lokal auf. Langfristiges Lernen kann nur mit Einsicht und Verständnis funktionieren.

2. Das Bemühen um eigenständiges Erschließen von neuem Wissen geleitet zu Stolz und Erfolgserlebnissen mit seinem Verstand, Intellekt und seinem Gemüt.

3. Selbständiges Erarbeiten erfordert ein ständiges Absuchen und Umorganisieren des vorhandenen Wissens und stellt somit eine intensive und sinnerfüllte Form des Übens dar. Am besten kann das Transferieren[17] trainiert werden, welches den Abschluss eines Lernerfolges darstellt.

4. Durch die Findungsbemühungen und Anstrengungen ist es sehr wahrscheinlich, dass Inhalte oft lang und leicht erinnert werden.

5. Lernen ist immer nur eine Form des Weiterlernens. Lernen wird also davon bestimmt, was schon vorhanden ist[18].

Dem entdeckenden Lernen wird insgesamt eine motivierende Wirkung zugesprochen, die aber auch von der eigenen Motivation und dem unbewussten Lernen abhängt.

Ich selbst habe bereits versucht, dieses „Entdecken“ in einer Geogebra Stunde einzubauen und ließ die Schüler in der ersten Stunde am Computer einfach

[16] [6] S.1-5
[17] siehe S. 16
[18] siehe S. 18

„losstarten“. Jene Dinge, die sie in dieser Stunde entdeckt oder erstellt hatten, blieben ihnen am längsten im Gedächtnis.

Konstruktivismus

In den 1950ern beginnt die Zeit des Konstruktivismus. Der Konstruktivismus basiert auf Arbeiten von PIAGET und Hans AEBLI[19].
Genauso wie im Kognitivismus betrachtet man den Wissenserwerb im Konstruktivismus als einen Aufbauprozess. Der lernende Mensch wird als selbsthandelnde und zielgerichtete Person dargestellt, welche Wissen erwirbt und somit Konzepte und Rückschlüsse auf Basis der Informationen aus ihrer Umwelt schließt. Demnach ist Lernen kein passives Speichern von Wissen, sondern ein aktives Konstruieren. Dies bedeutet nun, dass Wissen nicht durch Anleitungen vermittelt werden kann, so wie es im Kognitivismus der Fall wäre. Wissen muss dem Lernenden durch Erleben und Erfahren in seine eigene Wissenswelt integriert werden[5] S.8.
Dadurch muss diese Wissenswelt bei neu erworbenen Inhalten immer wieder neu sortiert und geordnet werden. Der Lehrer übernimmt hierbei die Rolle des Moderators, der die individuellen Konstruktionsprozesse (erfahren, erleben,…) anregen, aber nicht steuern soll.

> *„Ihre primäre Aufgabe wird in der Bereitstellung einer herausfordernden, möglichst reichen und authentischen Lernumgebung gesehen, so dass insbesondere an Vorwissen angeknüpft werden kann.“*
>
> *Zitat: Dr. Katrin Vogt [5] S.9*

Dadurch haben die Schüler genug Freiheit, um sich ihre eigenen Lösungswege zu suchen und erhalten dabei Hinweise und Feedback vom Lehrpersonal. In der modernen Didaktik finden diese Unterrichtsmethoden immer mehr Anklang, da sie die Eigenverantwortung der Schüler unterstützen. Es wird das Hauptaugenmerk auf die individuelle Förderung und Begleitung gelegt, sodass die Schüler, unabhängig von ihrem Lernniveau, einen Lernerfolg erzielen. Es ist aber unumstritten, dass manche

[19] **Hans AEBLI** (* 6. August 1923 in Zürich; † 26. Juli 1990 in Burgdorf) Theoretiker der Denkpsychologie

Sachverhalte durch Anweisungen und Frontalunterricht besser und schneller vermittelt werden können. Man sollte also alle Lerntheorien in den Unterricht miteinbeziehen, was aber wiederum bedeuten würde, dass es keine optimale Lerntheorie gibt.

Conclusio

In der folgenden Grafik werden noch einmal die Eckpunkte der Lerntheorien dargestellt.

KATEGORIE	BEHAVIORISMUS	KOGNITIVISMUS	KONSTRUKTIVISMUS
Hirn ist ein	passiver Behälter	informations-verarbeitendes Gerät	informationell geschlossenes System
Wissen wird	abgelagert	verarbeitet	konstruiert
Wissen ist	eine korrekte Input-Outputrelation	ein adäquater interner Verarbeitungsprozess	mit einer Situation operieren zu können
Lernziele	richtige Antworten	richtige Methoden zur Antwortfindung	komplexe Situationen bewältigen
Paradigma	Stimulus-Response	Problemlösung	Konstruktion
Strategie	lehren	beobachten und helfen	kooperieren
Lehrer ist	Autorität	Tutor	Coach, (Spieler) Trainer
Feedback	extern vorgegeben	extern modelliert	intern modelliert

Quelle: Link

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich die Lehrtätigkeit auf Grundlage von behavioristischer, kognitivistischer und konstruktivistischer Auffassung von Lernen begründen und gestalten lässt. Sollte man sich nur auf ein Lernmodell konzentrieren, wird man wahrscheinlich scheitern, denn schon für den Erwerb von Grundlagenwissen und anwendungsfähigem Wissen wird es unerlässlich sein, unterschiedliche Modelle zu verwenden.

Die Schüler sollten die Möglichkeit haben, selbst Erfahrungen zu sammeln. Dies sollte aber nur soweit geschehen, dass der Lehrer noch ausreichend Einfluss hat. Zum Beispiel kann man den Schülern einen Arbeitsauftrag in einem bestimmten Gebiet vorgeben, welchen die Schüler auf ihre Art und Weise lösen dürfen. Aus zeitlichen Gründen muss man trotzdem den Behaviorismus in den Unterricht einbringen. Meiner Ansicht nach wurde Geogebra unter Berücksichtigung des Kognitivismus, Konstruktivismus und des Behaviorismus entwickelt. Bei Letzterem ist ein Lernerfolg durch Lob und Tadel garantiert. Beim Kognitivismus hat der Lehrer quasi das „Steuer" in der Hand, um den Schülern Geogebra zu erklären. Was aber wiederum bedeutet, dass die Schüler kaum eine Möglichkeit erhalten, sich eigenständig Wissen anzueignen. Im Gegensatz dazu sitzt der Schüler beim Konstruktivismus selbst am „Steuer". Dadurch entsteht für die Lehrkraft jedoch die Schwierigkeit, zu kontrollieren, welche Themengebiete nun tatsächlich von den Schülern erlernt werden, beziehungsweise ob die Vorgehensweise die richtige ist.

Unterrichtskonzeptionen

Wie der Mathematikunterricht in Schulen erfolgt, hängt von der individuellen Konzeption jedes Schulstandortes ab. Daher werden in den nächsten Abschnitten unterschiedliche Unterrichtskonzeptionen vorgestellt. ([7] S.113-125)

Genetischer Mathematikunterricht

Der Mathematikunterricht sollte auf die heranwachsenden Schüler abgestimmt werden. Er darf sich also nicht an den universitären Standard der Axiomatik[20] halten, denn dieser richtet sich nach einem gewissen Maß der Reife und Entwicklung. Friedrich DIESTERWEG formulierte bereits im 19.Jahrhundert das Prinzip der Stufengemäßheit (vgl. PIAGET S.3).

Richte dich bei dem Unterricht nach den natürlichen Entwicklungsstufen des heranwachsenden Menschen….

Zitat: DIESTERWEG (1962)

In der Psychologie begann man fortan auf die Sichtweise der Kinder einzugehen, denn dies schien notwendig, um einen Mathematikunterricht effektiv gestalten zu können. Auch heute besteht weitgehend der Konsens darüber, dass der Mathematikunterricht der Entwicklungsstufe angepasst sein muss. Man erklärte, dass dieses genetische Prinzip das „oberste Unterrichtskonzept“ sei. In ihm bündeln sich erkenntnistheoretische, mathematische, pädagogische und psychologische Einsichten, durch die der Mathematikunterricht geprägt ist. Denn Mathematik kann nicht als „Fertigware“ verstanden werden. Um Einsichten in die Mathematik zu erhalten, muss jedes Individuum denselben (Irr)Weg gehen. Es ist ein immer währender Neuaufbau in den Generationen notwendig. Dennoch meint der Psychologe WITTMAN[21], dass man historische Umwege oder gar Irrwege vermeiden müsse. Denn selbst gute historische Vorgehensweisen sind im Bezug auf die Entwicklung zu überdenken, wenn es inzwischen kürzere und leichtere Vorgehensweisen gibt. Auch im Bezug auf Geogebra muss Vorarbeit geleistet werden. Der prinzipielle Umgang mit dem Computer muss

---

[20] Lehre vom Beweisen mittels Axiomen

[21] Erich Christian WITTMAN Mathematiker

erlernt werden. Dies fällt den Schülern heutzutage aber immer leichter, denn Computer bilden meist einen wichtigen Teil ihres alltäglichen Lebens.

Das genetische Prinzip spiegelt sich nicht nur in der Entwicklung der Schüler wieder, mit der Zeit erscheinen laufend neue dynamische Arbeitsblätter in der GeogebraTube. Dieses Phänomen lässt sich an der Versionsnummer, die laufend aktualisiert wird, deutlich erkennen. Aber auch Geogebra selbst wird immer wieder aktualisiert, um eventuellen Fehlern vorzubeugen oder veraltete Vorgehensweisen durch neuere zu ersetzen.

Problemorientierter Unterricht

Wie schon im vorhergehenden Kapitel ausführlich erklärt, gibt es Probleme, die man im Laufe der Zeit umging oder Irrwege, die man umlenkte. Aber unter diesen Problemtypen gibt es auch jene, die den Unterricht in die richtigen Bahnen lenken. Diese Probleme werden im Buch Grundlagen des Mathematikunterrichts ([7] S.118) als „richtungsweisende Probleme“ bezeichnet. Diese richtungsweisenden Probleme kommen im Schulalltag immer wieder vor und so auch im Programm Geogebra.

Beispielsweise arbeitet eine Klasse an der grafischen Lösung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Variablen. Es kommt das Problem auf, wie man nun eine algebraische Lösung finden könne, was dazu führt, dass die Klasse die Ansicht wechselt und fortan im Algebra-Fenster weiter arbeitet. Die richtungsweisenden Probleme tauchen immer wieder auf, zum Beispiel in folgenden Kapiteln:

Längen und Flächenberechnung

Erzeugen und Darstellen von Funktionen

Beschreiben und Darstellen von Zahlenmengen

Es kann aber auch sein, dass nur einzelne Themengebiete betroffen sind. Beispielsweise lässt man die Schüler auf ein Thermometer blicken und ablesen, wie viel Grad momentan angezeigt werden, zum Beispiel 21°C. Anschließend fällt die

Temperatur um mehr als die Ausgangstemperatur, zum Beispiel um 30 °C. Die Frage an die Schüler könnte lauten, welche Temperatur das Thermometer nun anzeigt.

Dieses Unterrichtskonzept wurde schon in den 1970er Jahren in der DDR durchgeführt. Am Beginn jeder Unterrichtstunde wurde ein Problem dargestellt. ([7] S.119).

Wenn man also von einem problemorientierten Mathematikunterricht spricht, ist damit gemeint, dass man den Unterricht in die richtigen Bahnen lenkt, um mathematisches Denken in Gang zu setzen und zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Es ist jedoch zu beachten, dass die Probleme nicht im Übermaß auftreten. Eine wahllose Aneinanderreihung der Probleme fördert den Unterricht nicht, schlimmer noch, es kann zu einer Leistungsstagnierung der Schüler durch Überforderung führen.

Zielorientierter Mathematikunterricht

„Ziel der Unterrichtsstunde laut Lehrplan ist die Einführung des Begriffes *Löse*[ ]"

In dieser Zielsetzung für eine Unterrichtstunde ist zwar klar definiert, was passieren soll und um welches Thema es sich handelt, aber es wird nicht festgelegt, welche Fähigkeiten und Kenntnisse ein Schüler am Ende dieser Stunde erlangt haben soll. So kam es unter dem Einfluss von amerikanischen Pädagogen am Beginn dieses Jahrhunderts zur Forderung von operationalisierten Lehrzielen[22]. Lernziele sollten durch nachprüfbare Fähigkeiten bestimmt werden. Man müsste die obige Zielsetzung folgendermaßen formulieren.

„Die Schüler sind im Stande, lineare Gleichungen mit Hilfe der Methode Löse[] zu lösen und auch bei weiteren Berechnungen anwenden zu können."

Durch diese eben umgestaltete Zielsetzung wurde der Unterricht zu einem lernzielorientierten Unterricht. Diese Art von Zielsetzung finden wir aber nicht nur in

[22] [7] S.120

den Planungen der Lehrer, sondern auch im Lehrplan für den Mathematikunterricht. Die Lernzielorientierung hatte aber auch ihre Kritiker. So lehnte unter anderem Freudenthal[23] den lernzielorientierten Mathematikunterricht prinzipiell ab. „Dadurch werden die wesentlichen Dimensionen des Mathematiklernens ignoriert“, so Freudenthal. ([7] S.120) Damit wurde der lernzielorientierte Unterricht eine Modeerscheinung und galt bald als überholt.

Trotzdem müssen Schüler auch heute gewisse Normen erbringen. So brauchen die Schüler im österreichischen Schulsystem am Ende jedes Schuljahres im Zeugnis eine Jahresnote zwischen eins und vier, um in die nächste Schulstufe aufsteigen zu können. Das spricht dafür, dass der Mathematikunterricht dennoch zielgerichtet sein sollte. Auch in Österreich wurde nun auf Druck des Bildungsministeriums und des Bologna Abkommens eine solche allgemeine Überprüfung der Schüler eingeführt, die Zentralmatura. Was in mehreren europäischen Ländern schon gang und gäbe ist, findet im Jahr 2015 zum ersten Mal auch österreichweit statt. Somit werden auch hierzulande die Leistungen zentral erhoben.

Selbstständiges Üben am Computer

Lernen findet heutzutage immer mehr am Computer statt. Viele Informationen werden online bereitgestellt und geteilt. Doch wie sieht es mit der Mathematik-Lernsoftware selbst aus?[24] Intelligente Systeme sollen in Interaktion mit den Lernenden stehen und sie dabei in Wort, Bild und Simulation unterstützen. Heutige Programme können als Weiterentwicklung von SKINNER, welche den Behaviorismus zu Grunde liegen haben, angesehen werden. Die Schüler sollen in der Lage sein, direkte Anweisungen zu befolgen und dadurch bestimmte Themengebiete erarbeiten zu können. Folgende Anforderungen werden an lernzielorientierte Computerprogramme gestellt.

- Der Schwierigkeitsgrad passt sich an den Lernenden an.
- Der Schwierigkeitsgrad lässt sich in gewissen Abschnitten steigern.
- Das System erkennt Defizite und gibt Lösungshinweise.
- Das System gibt Feedback.

[23] **Hans Freudenthal** (*1905 in Luckenwalde; † 13. Oktober 1990 in Utrecht) Mathematiker
[24] vergleiche Behaviorismus S.17

- Am Ende sollten die Lernenden ihre Leistungen einschätzen können.

Um all diese Punkte zu erfüllen, benötigt es einen hohen finanziellen, didaktischen und pädagogischen Aufwand, sodass solche Systeme kaum auf dem Markt zu finden sind. Diese Systeme werden wahrscheinlich nie eine Lehrperson ersetzen können, da sie nie so auf individuelle Probleme eingehen können wie eine qualifizierte Lehrkraft. Es macht aber schon Sinn, solche Systeme im Zusammenhang mit kognitiven konstruktiven Unterrichtsmethoden zu verwenden. So kann man zum Beispiel ein bestimmtes Themengebiet im Mathematikunterricht mit deren Hilfe einführen. Eine weitere Möglichkeit wäre, wenn ein Gebiet erarbeitet wurde, die Lernsoftware zum Zweck der Übung zu verwenden. Doch auch diese muss, laut Jürgen ROTH ([7] S.124), folgende Anforderungen erfüllen.

- Übungsaufgaben müssen über eine dynamische Visualisierung verfügen.
- Ein Zufallsgenerator kann ähnliche Aufgaben erzeugen.
- Der Lernende erhält eine Rückmeldung bezüglich der Korrektheit der Lösung.
- Eventuell werden für richtige Antworten Punkte vergeben.
- Es müssen Hilfestellungen im System verfügbar sein.

Punktuell eingesetzt, können dieses Systeme sicher hilfreich sein, aber der Einsatz in der gesamten Unterrichtseinheit ist aus heutiger Sicht utopisch. Wie soll eine Maschine auf unterschiedliche Menschen mit verschiedenen Eigenschaften eingehen können? Einen Versuch dazu lieferte Joseph WEIZENBAUM[25]. Er entwickelte im Jahre 1966 ein Computerprogramm (ELIZA), welches das Ziel hat, einen Psychologen und im weiteren Sinne eine Lehrkraft zu ersetzen. Denn wird eine Frage an die Maschine gestellt, welche sie nicht beantworten kann, wird diese Frage übersprungen oder es wird eine Pauschalantwort gegeben. Das Ziel, jede mögliche Frage beantworten zu können, ist nicht realisierbar. Geogebra selbst stellt keine Lernsoftware dar, wie es im letzten Kapitel beschrieben wurde. Wie schon erwähnt, ist Geogebra ein System auf Basis der kognitiven und konstruktiven Lerntheorien.

Joseph WEIZENBAUM(* 8. Januar 1923 in Berlin; † 5. März 2008 in Gröben bei Berlin) Informatiker

Mathematik erarbeiten

Mathematik lässt sich auf unterschiedliche Art und Weise unterrichten, man kann aber die diversen Stile in Großgruppen, wie zum Beispiel Frontalunterricht, Einzelarbeit und Projektarbeit, zusammenfassen. ([7] S.227-285)

Erarbeiten von Begriffen

Mathematische Begriffe haben eine unterschiedliche Gewichtung bezüglich ihrer Rolle im Unterricht. Den Begriff der „Konvergenz“ wird man in der Sekundarstufe I weniger gewichten als den Begriff des „Flächeninhalts“. Nach Jürgen ROTH unterscheidet man daher folgende Begriffe ([7] S.227):

- Leitbegriffe: Zahlen, Figuren, Funktionen,….
- Schlüsselbegriffe: Etwa der Begriff des „Bruchs“ für die Bruchrechnung
- zentraler Begriff: Jener Begriff, um den sich die Unterrichtseinheit dreht, z.B. Dreieck
- Arbeitsbegriffe: Jene Begriffe, die das Arbeiten mit einem Themengebiet erleichtern, z.B. Nenner und Zähler,….

Geogebra eignet sich hervorragend, um die zuvor erwähnten Begriffe zu erklären. Über die Eingabeleiste oder den „Schieberegler“ können wir Einfluss auf Zahlenwerte, Längen, Winkel, Lagebeziehungen und vieles mehr nehmen. Wichtig dabei ist, dass man sich bewusst ist, welche Auswirkungen bestimmte vorgenommene Änderungen haben. Beispielsweise kann sich durch die Änderung des Schiebereglers ein Winkel von „stumpfwinkelig“ zu „spitzwinkelig“ verändern.

> *„Mit dynamischen Mathematiksystemen können Repräsentationsformen (Graph, Figur, Tabelle, Term) wechselseitig in Beziehung gesetzt werden, indem Veränderungen an einer Repräsentationsform entsprechend und gleichzeitig bei den anderen umgesetzt werden. Dies unterstützt die Begriffsbildung in vielfältiger Weise.“*
>
> Zitat: ROTH [7] S.241

Erarbeiten von Sachverhalten

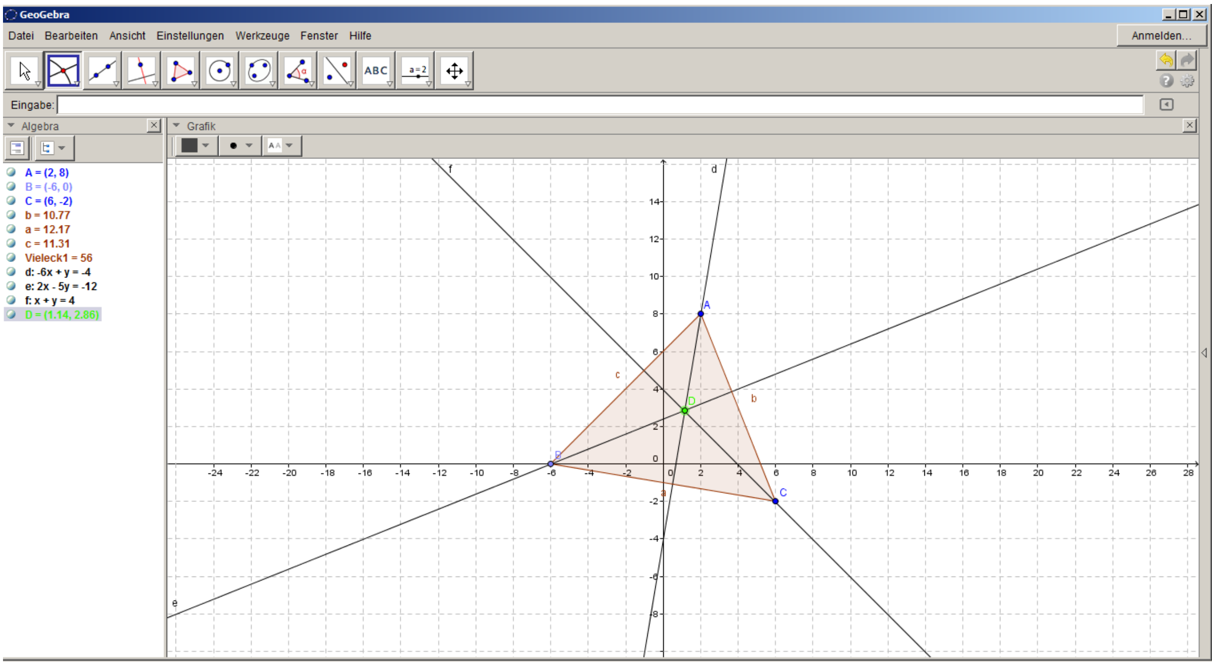
Neue Sachverhalte werden oft in die Unterrichtskonzeption des problemorientierten Unterrichts eingebaut. Dabei spielt Geogebra eine tragende Rolle ([7] S.253).

Geogebra hilft…

> … Neues zu entdecken, beispielsweise dass man durch Verändern der Winkel und Seitenlängen ein Quadrat in ein allgemeines Viereck umwandeln kann.
>
> … Beziehungen zwischen Aussagen zu verstehen. Zum Beispiel wenn man die Ähnlichkeit von Dreiecken betrachtet.
>
> … Ideen zu visualisieren.
>
> … Beweise zu verbildlichen und durchzuführen.

Beispiel:

„Gegeben ist ein Dreieck. Zeichnen Sie die drei Höhenlinien ein und überprüfen Sie, ob sie einander in einem Punkt schneiden!“



Durch die Konstruktion des Dreiecks und der Höhenlinien können die Schüler sehen, dass die Höhen einander in einem Punkt schneiden. Wenn man nun Schieberegler an den Eckpunkten des Dreiecks anbringt, so ändern sich das Dreieck und auch ihr Schnittpunkt. Demnach sollten die Schüler erkennen, dass bei einem spitzwinkeligen Dreieck der Schnittpunkt im Dreieck liegt, bei einem rechtwinkeligem genau auf einem Eckpunkt und bei einem stumpfwinkeligen außerhalb des Dreiecks. Die Verwendung von Geogebra zur Veranschaulichung ist eine gute Möglichkeit, zudem der Vorteil besteht, dass im Algebra-Fenster zusätzliche Informationen angeführt werden, welche reine Geometrieprogramme meist nicht liefern.

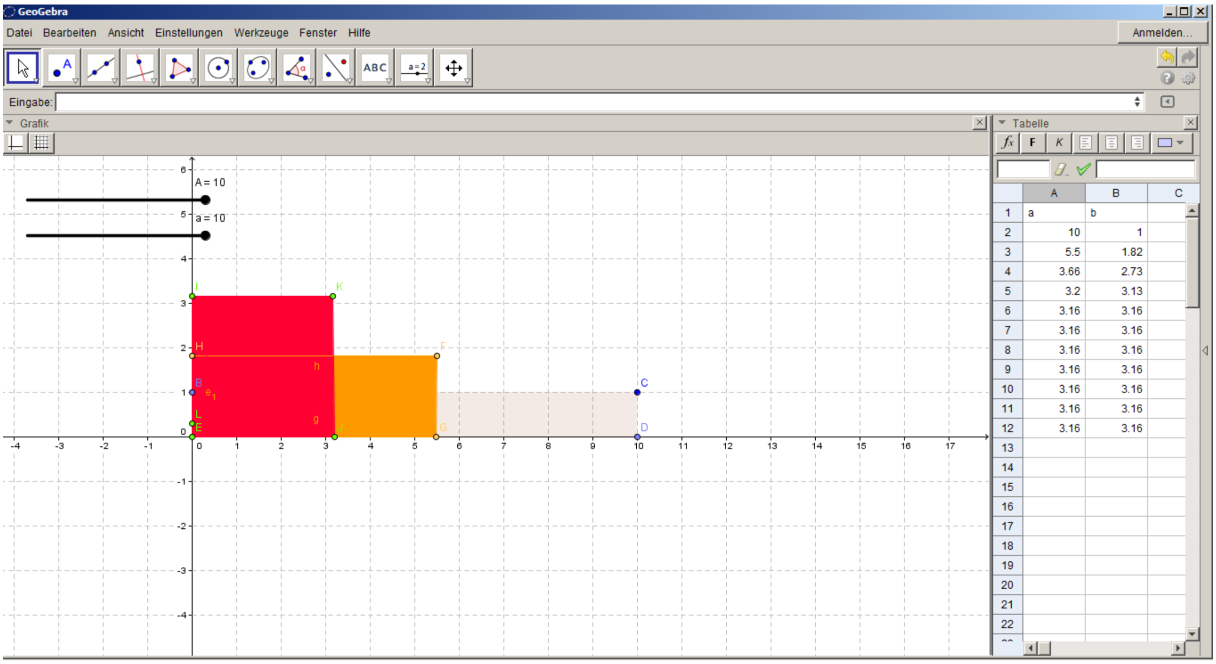
Erarbeiten von Verfahren

Hat man ein Problem gelöst, so liegt es nahe, dass man sich mit dem Lösungsweg an ähnliche Probleme wagt. Gelingt es, diese auch auf demselben Weg zu entschlüsseln, so bildet sich ein allgemeines Verfahren zur Lösung. Meist auch als „Algorithmus" bezeichnet. ([7] S. 261) Auch Geogebra lässt sich dazu einsetzen, solche Verfahren zu entwickeln. Dabei sollte als Erstes das Problem verstanden werden, um anschließend Ideen zu entwickeln, wie es am besten gelöst werden könnte. Diese Ideen zerlegt man in einzelne Schritte und versucht, durch diesen Vorgang das ganze Problem zu lösen. Gelingt es einem nicht auf diesem Wege eine Problemstellung zu lösen, müssen die einzelnen Schritte nochmals analysiert werden. Ist man jedoch erfolgreich, so kann man die Schritte zusammenfassen und anschließend das gewonnene Verfahren bewerten.

Beispiel:

„Heronsches Verfahren zum Wurzelziehen" ([7] S.262)

Beim Verfahren von Heron versucht man, näherungsweise die Wurzel einer Fläche zu ziehen. Dabei geht man meist von einem Rechteck aus und versucht, die kurzen Seiten zu verlängern und die langen Seiten zu verkürzen bis, im besten Fall, ein Quadrat entsteht.



Wenn die Schüler die Zustandsveränderung vom Rechteck hin zum Quadrat verstanden haben, fällt es ihnen meist leichter, die Berechnungsterme für die Seitenlängen anzugeben. Dies wäre eine Möglichkeit, die Funktionsweise mit einem Verfahren bzw. Algorithmus zu erklären.

Anwenden und Modellbilden

Für Anwendungen im Mathematikunterricht gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Einerseits gibt es die „innermathematischen“ Anwendungen. Diese stellen Anwendungen dar, welche sich nur auf mathematische Themen beziehen, beispielsweise zur Berechnung des Umfangs oder des Flächeninhaltes eines Dreieckes. Die zweite Variante von Anwendungen sind die „außermathematischen“. Dies sind Aufgaben, die den Schülern den Nutzen und Zweck der Mathematik näher bringen sollen. Um wieder auf das Dreiecksbeispiel zurückzukehren, so könnte man auch davon ausgehen, dass dieses Dreieck eine Grundstücksfläche darstellt und die Schüler müssen den Zaunumfang berechnen. Prinzipiell spricht ROTH von zwei verschiedenen Wegen, solche Anwendungen im Unterricht einzuführen:

- *„Man steigt in ein neues Gebiet mit einem praktischen Problem ein. Damit wird signalisiert: Die mathematischen Fragestellungen sind aus praktischen Problemen erwachsen.*

- *Nach der Erarbeitung eines Gebiets zeigt man an einigen Beispielen, in welchen Bereichen es angewendet werden kann."*

  Zitat Jürgen ROTH [7] S.271

Diese Methode, das Verständnis der Mathematik aus praktischen Fragestellungen zu entwickeln, wird heutzutage als Modellbildung bezeichnet. Oft wird im Zusammenhang mit dem Terminus „Modellbildung" auch der Begriff „modellieren" genannt. Dies ist das Verb zum Wort der Modellbildung und beschreibt, wie der Übergang zu einer Modellbildung stattfindet. Dies findet meist in einem Kreislauf statt, dargestellt in den folgenden Abbildungen.

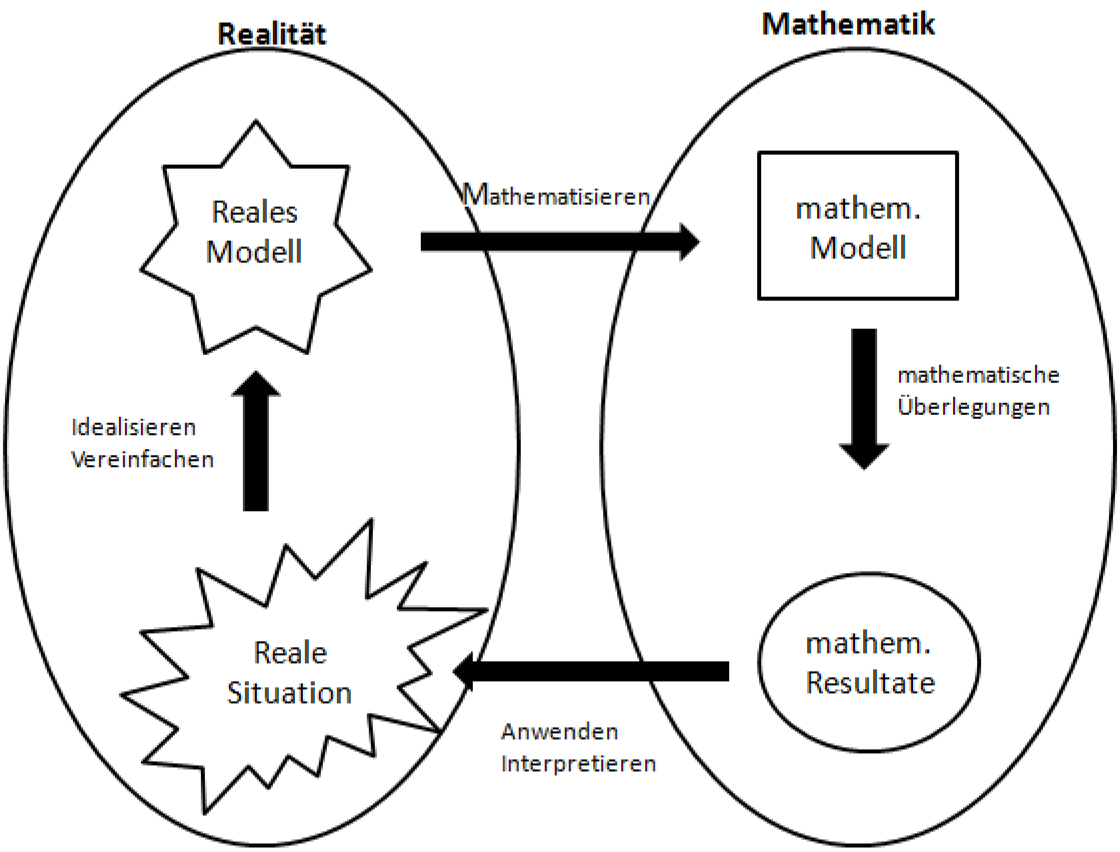


Abbildung: Kreislauf der Modellbildung [7] S.275

Betrachtet man diesen Kreislauf an einem konkreten Beispiel, so könnte dieser mit einer realen Situation beginnen. Dies könnte selbstverständlich auch ein Problem aus dem Alltag sein, welches es zu lösen gilt. Diese oft komplizierten Fälle kann man vereinfachen, indem man einige nicht einflussreiche Parameter weglässt und anschließend in einem Computerprogramm, zum Beispiel Geogebra, darstellt und versucht, dieses reale Modell zu mathematisieren. Die Mathematisierung erfolgt auch durch das Finden anderer Bezeichnungen für bestimmte Parameter, um besser mit ihnen rechnen zu können. Hat man diesen Schritt geschafft, ergibt sich nun die Möglichkeit mit Geogebra bestimmte Rechenschritte durchzuführen, falls diese händisch zu mühsam wären. Hat man die Resultate erzielt, so können die Daten nun wieder in die Ausgangssituation rückgeführt werden und es kann gegebenenfalls eine neue Ausgangslage geschaffen werden.

Problemlösen

Obwohl Probleme eine Schwierigkeit im Mathematikunterricht darstellen und auch in den vorangegangenen Kapiteln immer wieder vorkommen, sollten diese nicht prinzipiell negativ wahrgenommen werden. Es sind viel mehr Aufgaben, wo die Lösungswege meist nicht gleich gefunden werden oder man zusätzliches Wissen benötigt. Eine der schwierigsten Aufgaben des Lehrenden ist wohl, seinen Schülern den richtigen Zugang zur Problemstellung bereitzustellen. Oft hört man die Sätze „Warum muss ich das können?“ oder „Das ist doch viel zu schwer!“. Die Schüler geben meist schon viel zu früh auf. Eine gute Möglichkeit, die Schüler dennoch zu motivieren, besteht darin, ihre Neugierde zu wecken. Am besten man lässt die Schüler mit der Problemstellung in Geogebra experimentieren. Durch die Methode des Versuchs und Irrtums gelingt es vielleicht einem Schüler die Aufgabe zu lösen und dieser darf anschließend stolz Mitschülern helfen. Dieses „Helfen“ bietet zusätzlich die Möglichkeit, dass der Schüler das eben gelöste Problem noch einmal wiederholt und verinnerlicht. Prinzipiell sind vier Schritte notwendig, um einen erfolgreichen Problemlöseprozess zu vollziehen ([7] S. 284).

- Verstehen der Aufgabe
  Durch Experimentieren mit Geogebra lässt sich die Aufgabe besser verinnerlichen, sodass spontane Änderungen verstanden werden können.
- Ausdenken eines Plans
  Hier ist es wohl besser, auf Geogebra zu verzichten und mit Zettel und Papier zu arbeiten.

- Ausführen des Plans
  Der ausgedachte Plan wird digitalisiert. Sollten schwierige oder langwierige Rechenprozesse anfallen, können diese mit Geogebra rasch gelöst werden.
- Rückschau
  Wurde die Aufgabe nun in allen Einzelheiten gelöst oder sind weitere Probleme entstanden? Sollte Letzteres der Fall sein, beginnt man wieder am Anfang.

Zusammenfassend kann man sagen, dass der Unterricht selbst oft Probleme mit sich bringt. In jeder Unterrichtsstunde treten Probleme auf, die gelöst werden. In solchen Situationen ist es ratsam, als Lehrender auf seine eigenen Erfahrungen oder auf die Ratschläge von Kollegen zurückzugreifen.

Der Einsatz des Computers im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Der technische Fortschritt ist allgegenwärtig und macht natürlich auch nicht vor unseren Schulen halt. Mit den Entwicklungen in der Computerbranche, wo immer kleinere und kostengünstigere Geräte entwickelt werden, wurde auch der potenzielle Markt in der Schule erkannt. Durch diesen Fortschritt ergab sich aber auch ein großes Problem. Mit dem Fortschreiten in der Technik kann die Schulentwicklung nicht mithalten, was zur Folge hat, dass die modernsten Utensilien noch nicht im Unterricht herangezogen werden. Jedoch werden alte Unterrichtsmaterialien, wie zum Beispiel ausgerechnete und vorgefertigte Sinus- und Cosinus-Tabellen, nur noch zur Demonstration vorgeführt. ([8] S. 291).

Bezug zum Lehrplan

Ab der fünften Schulstufe findet man im österreichischen Lehrplan[26] folgende Passage.

> *„Die Schüler und Schülerinnen sollen verschiedene Technologien (z.B. Computer) einsetzen können."*
>
> Zitat: [8] S.52

Es sollen also ab der fünften Schulstufe elektronische Hilfsmedien zur Berechnung von mathematischen Sachverhalten herangezogen werden, was natürlich den Einsatz von Geogebra begünstigt. Des Weiteren findet sich im Lehrplan folgender Absatz:

> *„Das kritische Vergleichen von Eingaben und Ausgaben bei verschiedenen Programmen und Geräten bezüglich der Problemstellung kann zum Entwickeln eines problem- und softwareadäquaten Analysierens, Formulierens und Auswertens beitragen."*
>
> Zitat: [8] S. 56

Programme wie Geogebra sollen also bewusst dazu beitragen, den Unterricht zu gestalten und zu unterstützen. Ein Problem, welches in Geogebra auftaucht bzw. bearbeitet wird, sollte dort auch gelöst und analysiert werden. Der Computer soll nicht nur im Fach Mathematik alleine eingesetzt werden, sondern auch fächerübergreifend,

[26] Siehe [9] S.52

zum Beispiel in Form eines „Projektunterrichtes“. Doch in welchen Situationen ist es nun angebracht mit Computerunterstützung und Geogebra zu arbeiten? Bevor mit der Arbeit am Computer begonnen wird, sollten Fähigkeiten, wie etwa das Kopfrechen, gefördert werden. Natürlich finden wir hier wieder Programme, die auf der Weiterentwicklung von SKINNER beruhen[27]. Aber Geogebra wurde nicht für diesen Einsatz konzipiert und demnach kann man es nicht mit solchen Programmen vergleichen. Aber beim nächsten wichtigen Punkt bekommt Geogebra umso mehr Bedeutung. Im Kapitel der Stochastik lässt sich Geogebra mit der vorhandenen Tabellenkalkulation sehr gut einsetzen. Wobei eine Aufgabe an die Schüler sein kann, Werte aus dem Alltag zu sammeln. „Wie viele Autos fahren am Tag an unserem Haus vorbei?“ oder „Wie oft rufen mich meine Eltern?“. Diese gesammelten Daten lassen sich in der Tabellenkalkulation erfassen und analysieren. Laut Andreas FISCHER bringt dieses Verfahren gegenüber Schülern, welche keine elektronischen Medien zur Verfügung haben, einen immensen Vorteil. Denn das immer wieder erneute Zeichnen und Einordnen ist, vor allem für leistungsschwache Schüler, mühsam ([8] S. 296). Weiters kann man grafikfähige Programme gut dazu nutzen, Aussagen aus der Geometrie zu entdecken, zu erforschen und zu beweisen. Sicherlich werden dabei leistungsstärkere Schüler gegenüber schwächeren Schülern einen Vorteil haben. Außerdem beschäftigen sich bessere Schüler meist mehr und intensiver mit der Materie.

Sobald im Mathematikunterricht die „Punkt vor Strich“-Rechnung durchgeführt oder die verschiedenen Zahlenmengen durchgenommen wurden, könnte man auch den Weg in den EDV Raum wagen. Die Schüler sollen auf den Computern verschiedene Aufgaben erstellen und andere Schüler sollen dann diese Aufgaben lösen. Auch in der siebten oder achten Schulstufe eignet sich Geogebra als Unterstützung. Man denke dabei an die Oberflächen- und Volumenberechnung. Wobei nicht die Formeln und Herleitungen im Vordergrund stehen sollten, sondern sogenannte „Was wäre wenn“ Sätze, zum Beispiel: „Was passiert mit dem Volumen der Kugel, wenn ich den Radius verdopple?“ oder „Ändert sich die Oberfläche, wenn ich den Quader um 180° drehe?“. Zusätzlich lässt sich Geogebra im Bereich der Zinsenrechnung, bei Kegel- und

[27] vergleiche S.17

Algebra-Aufgaben sehr gut verwenden. Ausführungen dazu folgen in den weiteren Kapiteln.

Lehrplanvergleich der Sekundarstufen I

Im folgenden Teil werden die verschiedenen Lehrpläne der Neuen Mittelschule, AHS Unterstufe sowie der Hauptschule im Bereich Technologieeinsatz und Geogebra untersucht. Die Lehrpläne, die hier betrachtet werden, befinden sich auf der Website des Bildungsministeriums (Stand 30.08.2014)[28] ([9], [10], [11]).

Lehrplan Neue Mittelschule

> *„Ein konstruktives Verhältnis der* Schülerinnen und Schüler *zur Mathematik soll gefördert werden."*
>
> Zitat: [9] S. 54

Mit diesem Satz beginnt der Absatz der didaktischen Grundprinzipien im Lehrplan der Neuen Mittelschule, wobei man sofort die Analogien zum Konstruktivismus erkennt[29]. Da auch Geogebra ein Computerprogramm ist, welches auf dem Konstruktivismus beruht, ist das auch ein guter Grund, um es im Unterricht zu verwenden. Der Unterricht soll in Einzel-, Partner- und Projektarbeit erfolgen, wobei man auch darauf achten muss, dass die leistungsstarken Schüler individuell gefördert werden. Im Kernbereich findet man folgenden Absatz bezüglich des Lehrstoffes:

> *„Die Schüler und Schülerinnen sollen praxisorientierte Aufgaben unter dem Aspekt der Modellbildung möglichst oft rechnerisch, geometrisch und graphisch darstellen, lösen und kritisch betrachten können."*
>
> Zitat: [9] S.56

Es wird von den Schülern direkt verlangt, dass sie praxisorientierte Aufgaben rechnerisch, geometrisch und graphisch lösen können. Dies ist als Aufruf zu verstehen, Programme, wie etwa Geogebra, im Unterricht einzusetzen. Natürlich müssen die Schüler ihre Zeichenfertigkeiten auch im Schulübungsheft unter Beweis stellen.

[28] bmukk.gv.at
[29] siehe S.21

Jedoch ist Geogebra für das Üben von weiterführenden Inhalten durchaus zu empfehlen. Es ist sogar erwünscht, elektronische Hilfen sowie teilweise selbsterstellte Formelsammlungen ab der fünften Schulstufe aufwärts zu verwenden. Wobei der kontinuierliche Aufbau im Vordergrund steht, so sollten Lehrstoffangaben und Kenntnisse der Schüler aus den unteren Klassen in den oberen Klassen berücksichtigt werden. Im Lehrplan ist auch deutlich gewünscht, dass den Schülern historische Kontexte gelehrt werden sollten. Das bedeutet, dass Schüler bedeutende Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte kennen und auch über die Entwicklung der Mathematik und der dazugehörigen Technologie bis zur Gegenwart Bescheid wissen sollten. Diese Anforderung wäre auch eine gute Möglichkeit des fächerübergreifenden Unterrichts, in diesem Fall mit Geschichte. Man könnte die Arbeit von großen Mathematikern im Umfeld ihrer Zeit betrachten. Eine weitere Fragestellung könnte auch sein, welche mathematischen Hilfsmittel für Entdeckungen oder Erfindungen notwendig waren.

Lehrplan AHS Unterstufe

Auch der Lehrplan der AHS Unterstufe richtet sich nach dem Modell des Konstruktivismus. Wobei im Gegensatz zu den Lehrplänen der Hauptschule und der Neuen Mittelschule die Verwendung von Computern und Technologien im Kapitel der Lehraufgabe – wie folgt – beschrieben wird:

> *„Die Schüler und Schülerinnen sollen verschiedene Technologien einsetzen können.“*
>
> Zitat: [10] S.1

Dieser Absatz ist wenig aussagekräftig. Es wird nicht beschrieben, welche Technologien verwendet werden dürfen und auch nicht, ob es sich dabei um elektronische oder nicht elektronische Medien handeln sollte. Genauso wenig ist geklärt, in welchem Zusammenhang diese Technologien eingesetzt werden dürfen. Aber man kann zumindest davon ausgehen, dass Technologien im Unterricht verwendet werden sollten. Wie auch in der Neuen Mittelschule, wird in der AHS Unterstufe schon ab der ersten Schulstufe mit Technologieeinsatz gearbeitet. Wobei nicht explizit auf entsprechende elektronische Medien eingegangen wird, sondern nur der Computer und der Taschenrechner genannt werden. Selbst zwischen den verwendeten Taschenrechnern gibt es große Unterschiede, wobei einfache und kostengünstige Geräte zumindest in der Unterstufe mehr als ausreichend sind. Zusätzlich kann es für manche Klassen eine Überlegung wert sein, eine entsprechende-App am Handy zu installieren. Diese sind meist schon gratis downzuloaden und leisten dasselbe wie die zuvor angesprochenen Endgeräte. Wie auch im Lehrplan der Neuen Mittelschule verankert ist, soll der Umgang mit elektronischen Hilfen langsam und strukturiert erfolgen.

Lehrplan Hauptschule

Der Lehrplan der Hauptschule ist ident mit dem Lehrplan der AHS Unterstufe, weshalb auf eine weitere Analyse des Lehrplans verzichtet wird.

Conclusio

> *„Was nicht verboten ist, ist erlaubt“*
>
> Zitat: Wallenstein

Was ergibt sich nun aus den gewonnenen Erkenntnissen der verschiedenen Lehrpläne? Auf einen wichtigen Punkt wurde nicht näher eingegangen, nämlich die Nutzung des Handys. Man liest zwar in jedem Lehrplan, dass ein Technologieeinsatz durchaus erwünscht ist, aber zugleich steht in den meisten Schulordnungen, dass Mobiltelefone während des Unterrichts abzuschalten sind. Dies ist ein Widerspruch in sich, denn oft weisen die Mobiltelefone der Schüler mehr Rechenleistung als jene der Klassencomputer auf. Deshalb ist es schade, dass der sinnvolle Einsatz von Mobiltelefonen im Unterricht nicht gefördert wird. Das Entwicklerteam rund um Geogebra hat sogar eine eigene App entwickelt, die auf jedem Android und Apple Handy abrufbar ist. Mit dem Programm Geogebra könnte theoretisch der gesamte Lehrplan abgedeckt werden. Dies soll aber nicht heißen, dass es auch sinnvoll ist, dies zu tun. Bei algebraischen Aufgaben, wie zum Beispiel dem „Term umformen“, werden bei Geogebra kaum Zwischenschritte angezeigt, welche aber für die Schüler in der Übungsphase enorm wichtig sind. Auf eine detaillierte Auflistung der Lernthemen wird in einem späteren Teil dieser Arbeit eingegangen und deshalb wird auf eine weitere Ausführung an dieser Stelle verzichtet.

Abschließend sei erwähnt, dass die Lehrpläne zwar auf die Entwicklungen in der Computerbranche eingehen, jedoch in diesen viel zu ungenau formuliert wird, wie der Technologieeinsatz in den Schulen genau aussehen soll.

Kapitel 2 Einsatzmöglichkeiten des Programms Geogebra

1. Klasse

Arbeiten mit Zahlen und Maßen

Im Lehrplan der Unterstufe[30] finden wir als ersten Punkt das „*Arbeiten mit Zahlen und Maßen*“. Analog dazu fängt das Schulbuch *MatheFit* 1([12] S.10) mit einem ähnlichen Thema an. Es geht um die Wiederholung des Stoffes der Volksschule, was wie folgt im ersten Kapitel zusammengefasst wird:

„In diesem Kapitel

1. *übst du Kopfrechnen,*
2. *wirst du merken, dass es wichtig ist genau zu lesen und zu schauen ,*
3. *musst du scharf denken*
4. *und erfährst du, dass Mathe sehr lustig sein kann.“*

Zitat: [12] S.11

Es handelt sich also eher um Themen, welche den Bezug zur Mathematik herstellen sollen und nur indirekt mit Computerunterstützung zu tun haben. Dazu folgendes Beispiel:

> *„Fünf Personen wollen mit einem Lift fahren, der nur für vier Personen zugelassen ist. Herr K. hat 78 kg, Frau B. 60 kg, Herr S. 98 kg, Herr P. 101 kg und Frau U. 82 kg. Dürfen sie dennoch in den Lift steigen, in dem auf einer Tafel 450 kg als „höchstzulässiges Gesamtgewicht“ angegeben ist?“*
>
> Zitat: [12] S. 49 Bsp.: 213

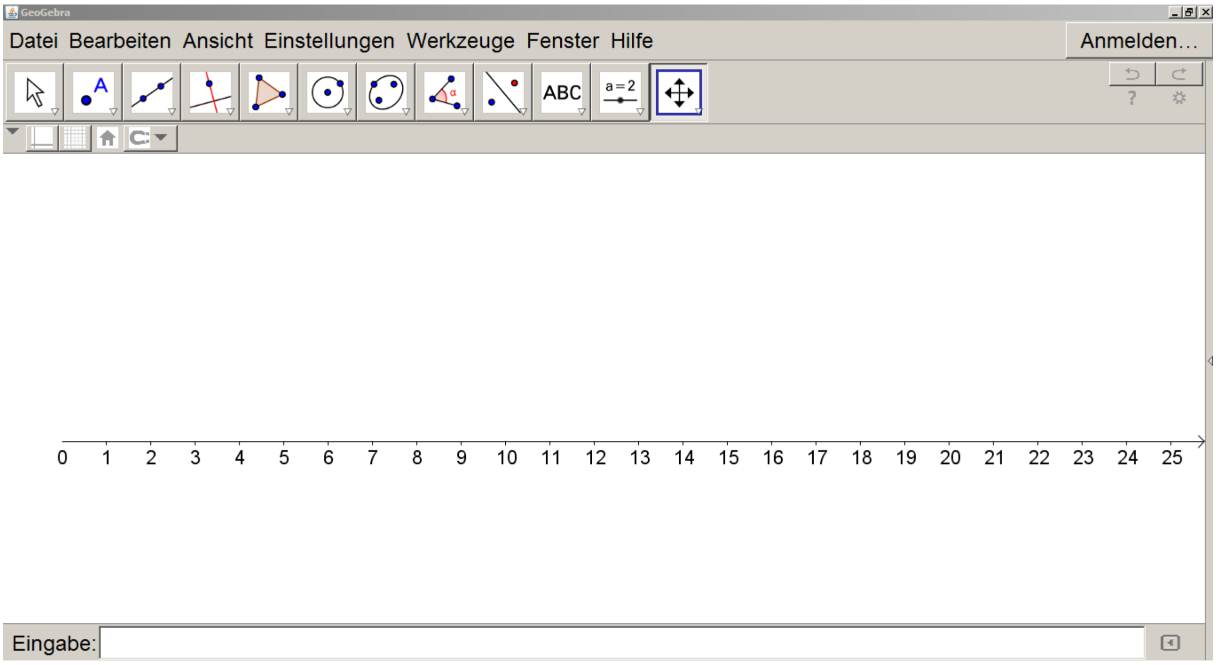
Auf den ersten Blick ist auch für Nicht-Mathematiker erkennbar, dass die zusätzliche Verwendung von Geogebra in diesem Fall keinen Sinn macht. In diesem Beispiel sind andere kognitive Fähigkeiten relevant. Die darauffolgenden Aufgaben zielen ebenfalls darauf ab, dass die Schüler das Kopfrechnen wiederholen. Die Beispiele kommen in den verschiedensten Varianten vor. Zum Beispiel, in Form von Grafiken, wobei es gilt, die richtigen Lösungsfelder auszumalen oder oft nur in Form von einfachen, „weißen

[30] ([9], [10], [11])

Zetteln“ mit Rechenangaben darauf. Diese gilt es stur auszurechnen. Die Beispiele zielen darauf ab, mit Hilfe des Behaviorismus[31] den Lernerfolg der Schüler zu steigern. Diesen Einstieg mit Geogebra zu wagen, ist keine gute Idee, da Geogebra nicht dafür programmiert wurde, um Feedback zu geben. Selbst wenn man solche Arbeitsblätter den Schülern online zugänglich macht, so ist dies doch unnötig mühsam. Daher sollte man auf Arbeitsaufgaben von Handzetteln, vom Schulbuch oder auf Programme wie Socrative[32] zurückgreifen.

Nun wird näher auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen eingegangen. Die Schüler sollen laut des österreichischen Lehrplans den Umgang mit den natürlichen Zahlen in der 1. Klasse vertiefen. Dazu ist eine Wiederholung des bereits Erlernten aus der Volksschule unerlässlich. Diese Wiederholung sollte eine kurze Übersicht über das Dezimalsystem beinhalten und anschließend sollte mit der Einführung des Zahlenstrahls begonnen werden. Nachdem man diesen kurz mithilfe der Tafel vorgestellt hat, sollte der Lehrer, zum besseren Verständnis, diesen auch in Geogebra zeichnen. Jedoch ist es ratsam, dass zu diesem Zeitpunkt der Zahlenstrahl in Geogebra nur dazu verwendet wird, um ihn an die Tafel zu projizieren. Folgende Schritte sind dazu im Programm notwendig. Der Lehrer muss in Geogebra in die Grafik-Ansicht wechseln und das Koordinatengitter beziehungsweiße die y-Achse ausblenden. Da nur die natürlichen Zahlen behandelt werden, sollte die Achse auch nur positive Werte beinhalten, was in der folgenden Abbildung dargestellt ist.

[31] vgl. S.17
[32] http://www.socrative.com/

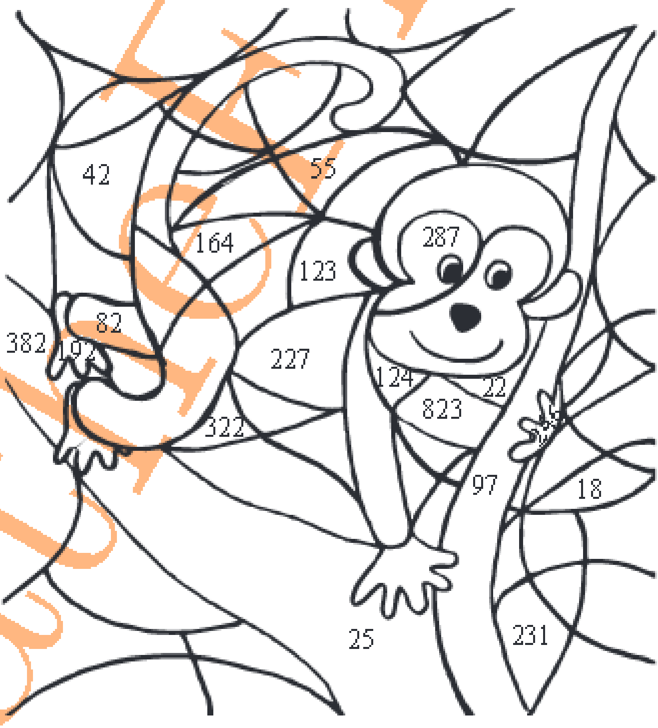


Die Schüler sollten im Stande sein, diesen Zahlenstrahl in ihr Heft zu übertragen. Nun könnten folgende Fragestellungen näher erörtert werden. „Ist der Abstand zwischen den Zahlen immer gleich?“, „Ist die rechte Zahl einer Zahl immer größer?“ oder „Was ist die kleinste Zahl?“. Der Vorteil durch die Verwendung von Geogebra entsteht dadurch, dass man die eingetragenen Zahlen immer wieder leicht löschen und diese auch, zur leichteren Erkennbarkeit, in verschiedensten Farben einfärben kann. Natürlich könnte man argumentieren, dass man diesen Effekt auch durch den Einsatz der Tafel erreichen kann, doch Geogebra bietet den Vorteil, dass alle Zahlenstrahlen dasselbe Design aufweisen. Gerade in der Anfangsphase des Erlernens eines neuen Stoffgebietes ist es vorteilhaft, dass Schüler nicht durch unklare Tafelbilder verwirrt werden und sich durch eine klare Darstellung auf das Inhaltliche konzentrieren können.

Doch der Zahlenstrahl hat auch seine Grenzen, denn sobald die Schüler das System der ganzen Zahlen, welche die negativen und positiven Zahlen beinhalten, verstanden haben, sollte auch damit gerechnet werden. Dazu ist der Zahlenstrahl nur bedingt eine Hilfe. Natürlich kann der Zahlenstrahl auch verwendet werden, um die Addition, Subtraktion und Multiplikation zu verdeutlichen. Ansonsten ist die Verwendung von Geogebra und CAS in diesem Teil des Lehrplans nicht wirklich sinnvoll, genauso wenig wie der Einsatz von anderen Technologien, da in diesem Alter das Kopfrechnen geschult werden sollte. Eventuell kann man auch hier wieder digitale oder nicht digitale Arbeitsblätter verwenden. Zur besseren Veranschaulichung dient folgendes Beispiel:

333 Wenn du die Felder mit den richtigen Ergebnissen ausmalst, erhältst du eine Figur.

3456 : 24 = ______
3444 : 41 = ____
12 345 : 15 = ______
3456 : 18 = ______
3444 : 42 = ____
10 664 : 31 = ______
3456 : 72 = ____
8766 : 18 = ______
10 664 : 62 = ______
3456 : 54 = ____
9988 : 11 = ______
10 664 : 86 = ______
3444 : 12 = ______
9988 : 44 = ______
1025 : 41 = ____
3444 : 14 = ______
5044 : 26 = ______



8022 : 14 = ______ 3444 : 21 = ______ 5044 : 13 = ______ 8022 : 21 = ______
3444 : 28 = ______ 9988 : 22 = ______ 5044 : 52 = ____ [33]

Hat man das Themengebiet der natürlichen Zahlen abgeschlossen, kann man den Zahlenstrahl von Geogebra wieder für das Erlenen der Dezimalzahlen verwenden. Dieser könnte hilfreich sein, um Fragen wie folgende zu beantworten: „Was befindet sich denn im Zwischenraum zwischen den Zahlen?“ Um diese Frage zu beantworten, kann man den Zahlenstrahl wieder auf die Tafel projizieren und mit der Computermaus in die Zwischenräume hinein scrollen, damit die Zehntel-, Hundertstel-,… Werte angezeigt werden. Auch das Addieren und Subtrahieren kann auf diese Weise gezeigt werden. So geht man vom ersten Summanden aus, den zweiten Summanden nach rechts den Zahlenstrahl entlang. Am Ende erhält man die Summe. Die Subtraktion sollt man noch nicht auf die Addition zurückführen, da die Schüler

[33] Quelle *[12] S. 74. Bsp.:333*

sich auf die Menge der natürlichen Zahlen beziehen. Daher einfach vom ersten Summanden ausgehend, den zweiten Summanden nach links zählen. Bei all diesen Punkten, wo es um Zahlendarstellung und Berechnung geht, darf man nicht vergessen, auch den Taschenrechner einzusetzen. Geogebra kann demnach gut zur Darstellung eingesetzt werden, für die konkrete Berechnung von Ergebnissen sollte man dennoch den Taschenrechner bevorzugen.

Arbeiten mit Variablen

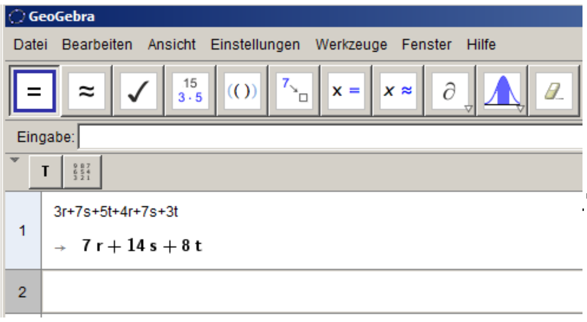
Der nächste Punkt des Lehrplans sieht das Arbeiten mit Variablen vor. Dieses Kapitel beinhaltet auch das Mathematik Schulbuch *MatheFit*.

> *„In diesem Kapitel wirst du die Lösung dieses Problems erfahren und außerdem noch:*
>
> 1. *was eine Variable ist,*
> 2. *wie man damit rechnet,*
> 3. *was eine Unbekannte ist,*
> 4. *was Gleichungen sind,*
> 5. *wie man aus ihnen die Unbekannte berechnet.“*
>
> Zitat: [12] S.120

Nachdem man den Schülern einen Überblick über die Variablen gegeben hat und auch an der Tafel gelehrt hat, wie man mit ihnen rechnet, kann man auch auf Geogebra zurückgreifen, um weitere Beispiele zu üben. Wichtig dabei ist, dass die Schüler Geogebra in diesem Fall nur nutzen, um ihre Ergebnisse zu kontrollieren. Sie sollten demnach im Stande sein, Gleichungen mit Variablen laut Aufgabenstellung zu lösen. Man öffnet dazu Geogebra und wechselt im Ansichts-Fenster nur auf das CAS (Computer-Algebra-System) Fenster. Nachdem die Schüler ihre Aufgaben im Heft gelöst haben, dürfen sie nun diese kontrollieren. Dazu werden ein paar Beispiele aus dem Schulbuch MatheFit 1[12] näher erläutert.

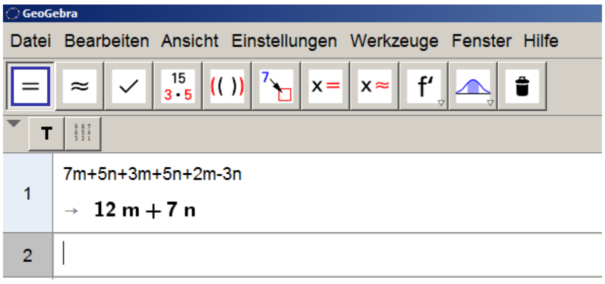
“3r+7s+5t+4r+7s+3t=”

Zitat: [12] S.121 Bsp.569(a)



“7m+5n+3m+5n+2m-3n= ”

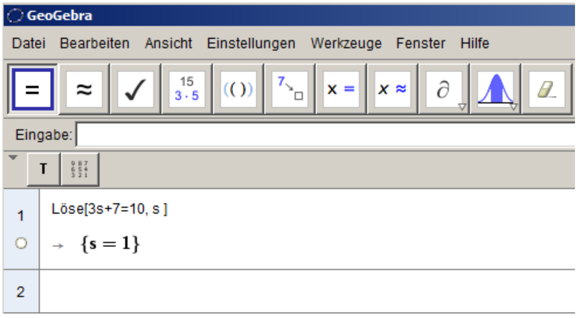
Zitat: [12] S.122 Bsp.576(a)



Dieses Schema funktioniert natürlich auch bei Gleichungen mit einer Variablen. Geogebra sollte aber nicht nur zur Probe verwendet werden. Es sollte zusätzlich auch die Einsetzmethode erklärt werden. Auch hierzu wird ein konkretes Beispiel näher erläutert:

„3s+7=10“

[12] S.127 Bsp.599(a)



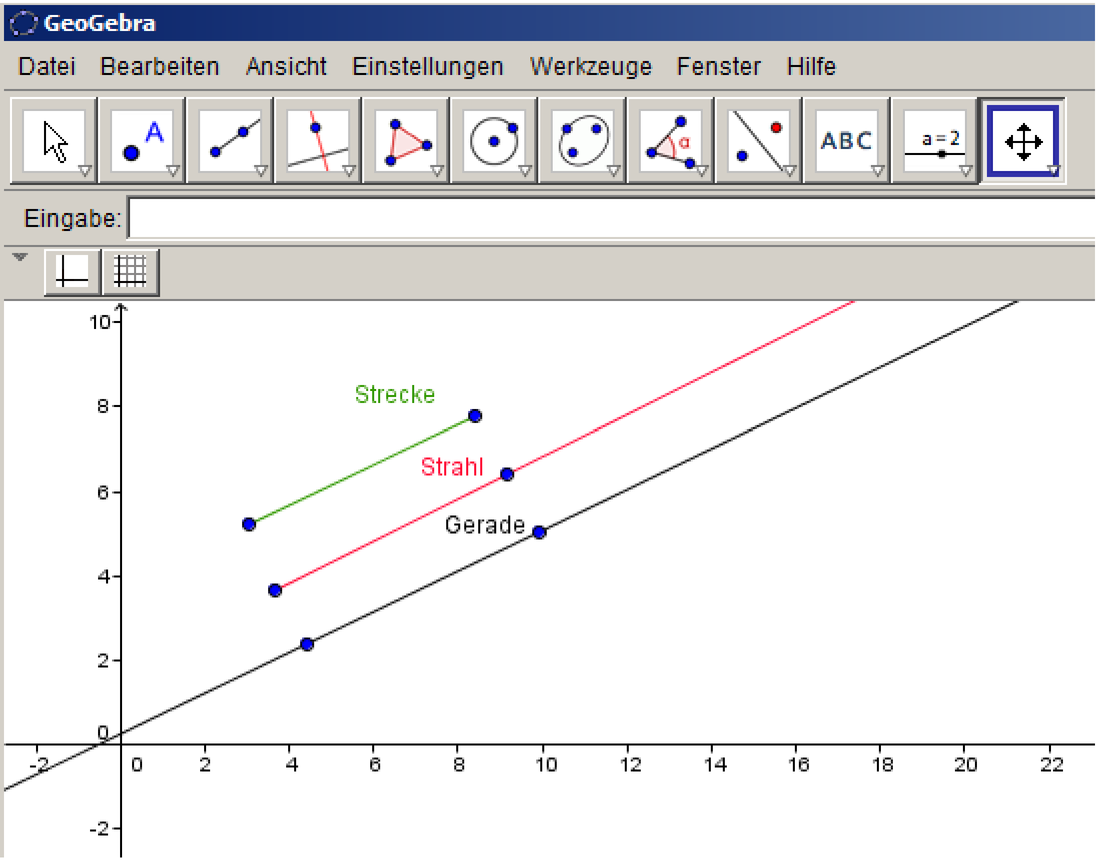
Zitat:

Schnell wird man merken, dass es nun nicht mehr reicht, die Angabe einfach in Geogebra einzugeben. Um auch diese Gleichung mittels Geogebra lösen zu können, bedarf es eines Zusatzbefehls **Löse[<Gleichung>, <Variable>].** Führt man diesen Befehl richtig aus, kommt man auch zu einer Lösung.

Da dieser Lösungsweg schon sehr umständlich ist, sollte man, wenn möglich, dieses Verfahren erst in höheren Schulstufen verwenden.

Arbeiten mit Figuren und Körpern

Im nun folgenden Abschnitt werden wir uns näher mit der Thematik der geometrischen Grundbegriffe und mit Vielecken und Kreisen, sowie deren Berechnung von Umfang und Fläche widmen. Für dieses Kapitel kann man Geogebra vielseitig einsetzen. Zuerst sollten die Schüler lernen, geometrische Grundbegriffe, wie etwa eine Gerade, einen Strahl, usw. selbst zu zeichnen. Daher ist es besser, wenn dies der Lehrende zuerst mit dem Lehrer-Geodreieck an der Tafel vorzeigt. Erst wenn die Schüler imstande sind, diese einfachen geometrischen Darstellungen zu zeichnen und zu unterscheiden, sollte man Geogebra zur Unterstützung verwenden. Jeder Schüler sollte zum Arbeiten einen eigenen Computer haben. Wie immer sollten solche Voreinstellungen getroffen werden, die es den Schülern erleichtern, mit dem Programm zu arbeiten. Das Grafik-Fenster wird dazu aktiviert und das Koordinatengitter wird ausgeblendet.



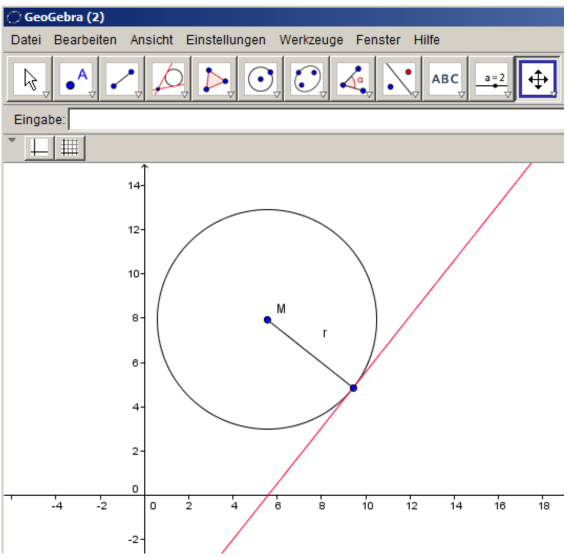
Zur Ergebnissicherung können die Schüler ihre gemachten Aufgaben ausdrucken und in ihre Hefte einkleben. Denn, wie schon erwähnt, soll Geogebra hierbei nur unterstützend verwendet werden. Deshalb nur unterstützend, damit die Fingerfertigkeit der Schüler zusätzlich geschult wird. Zum Beispiel kann man mit Geogebra parallele Geraden mit ein paar „Mausklicks“ zeichnen, aber um das gleiche Ergebnis mit ein oder zwei Geodreiecken zu erzielen, ist Übung notwendig. Wenn die Schüler diese grundlegenden geometrischen Begriffe und Darstellungen verinnerlicht haben, kann man die Schüler frei arbeiten lassen. Fragestellungen könnten sein:

> Wie könnten die Lagebeziehungen zwischen den Geraden aussehen? Gibt es auch Strecken, die den Anfangs- und Endpunkt gemeinsam haben?

Zur besseren Veranschaulichung wird nun ein Beispiel aus dem Schulbuch *MatheFit* näher betrachtet, das mit Hilfe von Geogebra gelöst werden soll.

> *„Lagebeziehung zwischen Kreis und Gerade:*
>
> *d) Zeichne eine Gerade t ein, die den Kreis an nur einer Stelle berührt“*
>
> Zitat: [12] S.108 Bsp. 497(2)

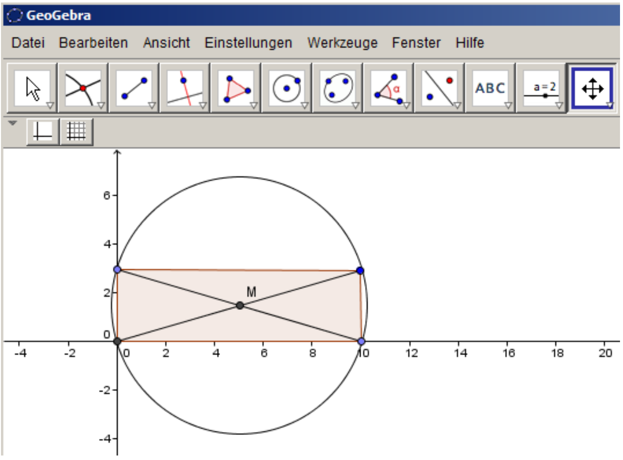
Für dieses Beispiel gibt es keine eindeutige richtige Lösung. Deshalb sollen die Schüler durch eigenständiges Probieren versuchen, auf eine mögliche Lösung zu kommen, zum Beispiel auf die folgende:



Zusätzlich kann Geogebra auch dazu verwendet werden, um sogenannte Zirkelfiguren zu zeichnen. Der Vorteil von Geogebra liegt darin, dass gemachte Zeichenschritte, im Gegensatz zum Schulübungsheft, rückgängig gemacht werden können. Nachdem die Schüler ein Basiswissen erlangt haben, sollen die Schüler auch die verschiedenen

Winkel und Winkelmaße kennenlernen. Wie auch für die Einführung der geometrischen Grundbegriffe, kann man Geogebra ebenfalls für die Winkel einsetzen. Zuerst sollte man an der Tafel arbeiten und erst abschließend auf Geogebra als Unterstützung zurückgreifen. Als Unterrichtsbeispiel lässt man die Schüler wieder mit zwei Schenkeln experimentieren, welche man in Geogebra mit zwei Geraden oder Strecken darstellen könnte und bietet ihnen somit die Möglichkeit, alle Winkelarten zu entdecken. Anschließend, wenn diese Winkel alle in Geogebra dargestellt wurden, dürfen die Schüler sie ausdrucken. Falls nicht, sollte der Lehrer mögliche Kopiervorlagen vorbereitet haben. Ansonsten sollte Geogebra in diesem Kapitel nicht verwendet werden. Die Schüler werden die praktische Übung später benötigen, um mit dem eigenen Geodreieck Winkel zu zeichnen oder deren Gradeinheiten abzulesen.

Zusätzlich zu den bisher angesprochenen Themen gehören auch die Quadrate und Rechtecke beziehungsweise der Quader und Würfel zum Unterpunkt „*Arbeiten mit Figuren und Körpern*“. Wobei zum Einstieg in dieses Kapitel wieder eine Wiederholung des Stoffes aus der Volksschule ratsam wäre. Auch bei dieser Thematik sollte man Geogebra vorerst nur am Rande verwenden, denn zu Beginn sollten die Schüler erlernen, wie man Rechtecke mittels Geodreieck oder Lineal konstruiert. Dazu ist es wieder notwendig, dass der Lehrende an der Tafel vorzeigt, wie man „richtig“ konstruiert. Wenn dieser Schritt erfolgt ist, könnte man wieder auf Geogebra zurückgreifen. Gemeinsam mit dem Lehrer zeichnen die Schüler ein Rechteck. Danach dürfen die Schüler frei experimentieren und beispielsweise die Eckpunkte so verändern, dass neue Rechtecke und eventuell auch Quadrate entstehen. Weiters könnte man mit den Schülern auch gleich den Mittelpunkt einzeichnen und die Veränderung der Lage des Mittelpunkts betrachten, wenn sich die Seitenlängen ändern. Abschließend wird im Schulbuch *MatheFit 1* noch der Umkreis besprochen. Somit entsteht ein Arbeitsblatt, wobei die Seitenlängen auch als „Schieberegler“ dargestellt werden könnten. Vorerst sollte wieder nur im Grafik-Fenster gearbeitet werden.



Für die Berechnung der Flächen und Umfänge sowie der Einheitenumrechnung sollte man auf Geogebra verzichten. Sollte dennoch ein Technologieeinsatz erwünscht sein, so ist es ratsam, auf den Taschenrechner zurückzugreifen.

Arbeiten mit Modellen, Statistik

Als letzter Punkt der 1. Klasse Unterstufe wird das Arbeiten mit Modellen und Statistik genannt. Zum Vergleich wird im Schulbuch *MatheFit 1* folgendes gelehrt.

„In diesem Kapitel lernst und übst du:

1. *das geschickte Umgehen mit Tabellen,*
2. *wie man den Mittelwert berechnet,*
3. *wie man Daten durch Zeichen darstellen kann,*
4. *wie man den Computer bei diesen Aufgabenstellungen hilfreich einsetzen kann.“*

Zitat: [12] S.215

Man merkt sofort, dass sich die Vorgaben vom Lehrplan mit dem Lehrstoff des Buches decken[34]. Die Schüler sollen demnach imstande sein, Tabellen zu erfassen und sie auch grafisch darzustellen. Seit dem 3.Juni 2009 und der Version 3.2 bietet Geogebra auch eine eigene Tabellenkalkulation programmintern an. Diese öffnet sich meist nicht direkt beim Starten, sondern muss erst als Ansichtsfenster aktiviert werden. Vorab sollte dennoch erwähnt werden, dass das handschriftliche Anlegen von Tabellen ebenfalls geschult werden sollte. Sollte diese Fähigkeit erfolgreich vermittelt worden sein, ist es eine Überlegung wert, auf die vorgefertigten Raster in Geogebra

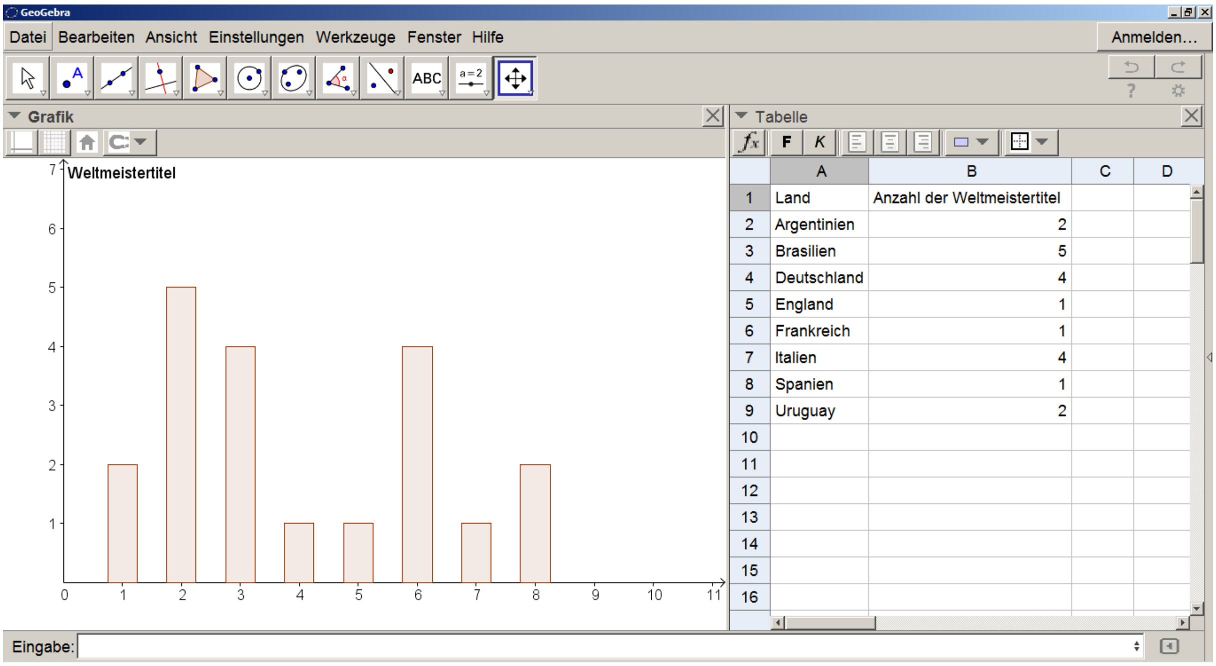
[34] vergleiche [10] , [11] S.5

zurückzugreifen. Durch verschiedene graphische Darstellungsmöglichkeiten kann man durchaus optisch gelungene Tabellen erzeugen. Mit den Befehlen der **Summe()** oder des **Mittelwerts()** lassen sich auch automatisch statistische Aussagen treffen. Wirklich interessant wird es, wenn wir diese Tabellen grafisch darstellen. Im Schulbuch *MatheFit 1* wird dazu „noch" mit dem Tabellenkalkulationsprogramm *Microsoft Excel* gearbeitet. Das lässt sich aber darauf zurückführen, dass zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit mit der Auflage aus dem Jahr 2007 gearbeitet wurde. In den neueren Auflagen wird schon mit Geogebra gearbeitet. Die Vorteile werden anhand folgendem Beispiel demonstriert.

> *„Fußballweltmeister:*
> *Die Tabelle zeigt, wie oft die Mannschaft eines genannten Landes bis jetzt Fußballweltmeister geworden ist. (Stand 2014)*
> *Zeichne ein Balkendiagramm, aus dem sich die Anzahl der Weltmeistertitel für jedes Land entnehmen lässt!"*
> Zitat: [12] S.221 Bsp.: 1080

Land	Anzahl der Weltmeistertitel
Argentinien	2
Brasilien	5
Deutschland	4
England	1
Frankreich	1
Italien	4
Uruguay	2

Als Voreinstellung sollte diesmal die Ansicht „Tabelle" gewählt werden und alle anderen Ansichtsarten sollten ausgeblendet werden. Dadurch haben die Schüler eine ordentliche Übersicht über ein unausgefülltes Tabellenblatt. Nach dem Eintragen der Daten ist es möglich, mit ein paar wenigen Mausklicks diese Rohdaten zu diskutieren und ein Balkendiagramm zu zeichnen, was in der folgenden Abbildung dargestellt wird.



Dadurch, dass man die Daten in der Tabelle beliebig ändern kann, ist dies ein erheblicher Vorteil gegenüber den selbstgezeichneten Diagrammen im Heft. Selbstverständlich lassen sich diese Diagramme ausdrucken und so die eigenen Ergebnisse sichern.

Geogebra kann man durchaus schon in der ersten Klasse der Sekundarstufe I verwenden, man sollte sich aber auf ein Ansichtsfenster konzentrieren. Wie schon mehrmals erwähnt, ist es möglich, Geogebra in allen Kernpunkten zu verwenden und den Unterricht dadurch vielfältiger und attraktiver zu gestalten. Im nächsten Kapitel wird mit der Analyse der nächsthöheren Klasse fortgesetzt.

2. Klasse

Arbeiten mit Zahlen und Maßen

Auch der Lehrplan der zweiten Klasse AHS Unterstufe ist in die gleichen vier Eckpunkte untergliedert wie der Lehrplan der ersten Klasse AHS Unterstufe. Der Beginn wird auch hier wieder mit dem Kapitel „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ gemacht. Hier legt der Lehrplan nicht wirklich eine bestimmte Richtung vor, was alles gelehrt werden soll.

> *„Festigen und Vertiefen der Fähigkeiten beim Arbeiten mit positiven rationalen Zahlen, um vielfältige und komplexere Probleme in Sachsituationen bearbeiten zu können“*
>
> Zitat: [10] , [11] S.6

Daher wird zum Vergleich das Schulbuch *MatheFit 2*[35] herangezogen, um klarzustellen, auf welche Probleme sich konkret bezogen wird. Während der Recherchen kamen folgende Punkte auf, die zur angegebenen Definition passen, aber nicht zum restlichen Lehrstoff gehören.

- Primzahlen
- kleinstes gemeinsames Vielfaches/ größter gemeinsamer Teiler
- Teilbarkeit von Zahlen
- Natürliche Zahlen/Dezimalzahlen

Um diese vier genannten Punkte und den Umgang mit positiven rationalen Zahlen besser zu schulen, sollte man auf Geogebra gänzlich verzichten. In *MatheFit 2* wird zum Teil das Rechnen mit den vier Grundrechnungsarten mit Dezimalzahlen aus der ersten Klasse wiederholt und zusätzlich wird der Maßstab eingeführt. Sollte für das Wiederholen der Computer eingesetzt werden, so ist es ratsam auf Reiz-Reaktionsprogramme[36] von SKINNER zurückgreifen. Für das Erlernen der Teilbarkeit von Zahlen, den Primzahlen, dem kgV (=kleinstes gemeinsames Vielfaches) und dem ggT (=größter gemeinsamer Teiler) empfiehlt es sich nicht, Geogebra einzusetzen. Für die Überprüfung der Teilbarkeit von Zahlen würde ein einfacher Taschenrechner

[35] siehe [15]
[36] siehe S.18

genügen. An dieser Stelle sei ein Kollege erwähnt, der auch die Teilbarkeit von Zahlen mit Hilfe von Technologieeinsatz unterrichtet, jedoch nicht mit Geogebra. Er projizierte das Bild seines Laptops auf die Tafel und schrieb zusammen mit den Schülern an einem Computerprogramm, welches in C++ kompiliert wurde. Basierend auf den Recherchen für diese Arbeit, ist diese Form des Technologieeinsatzes für 12-jährige Schüler noch etwas zu schwierig.

Der nächste Punkt im Lehrplan bezieht sich auf das Addieren und Subtrahieren mit Brüchen, wobei auch hier das Ziel ist, die korrekte Anwendung der Rechenregeln zu erlernen[37]. Zur leichteren Lesbarkeit wird ein Bruchstrich als „/“ dargestellt. Dies könnte eventuell zu Verwirrungen bei den Schülern führen. Im Buch *MatheFit 2* wird dazu auch ein Tipp angegeben, warum im Buch selbst eine andere Notation verwendet ist.

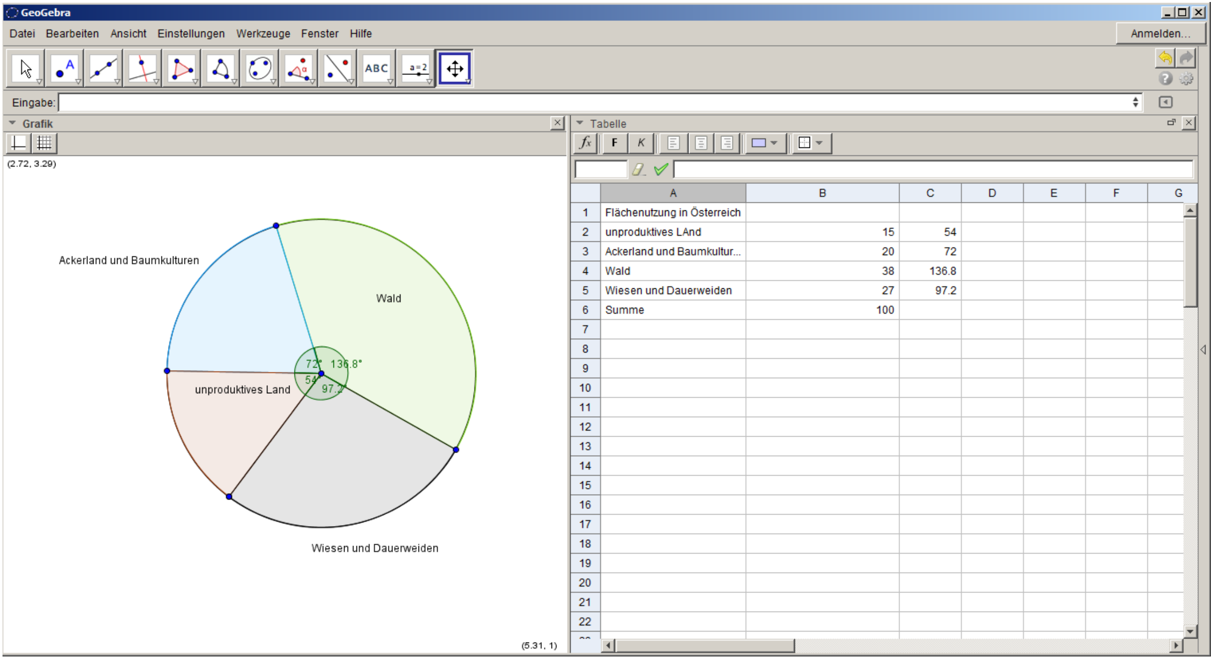
> *„Verwende den schrägen Bruchstrich in der Mathematik nach Möglichkeit nicht, da diese Darstellungsweise nicht so klar ist, wie die mit dem waagerechten Bruchstrich: Der Unterschied zwischen 2/3+5 und 2/(3+5) ist nicht so klar wie* $\frac{2}{3}+5$ *und* $\frac{2}{3+5}$*“*
>
> Zitat: [15] S.76

Es sei dahingestellt, ob es sinnvoll ist, bei Bruchrechnungen auf Geogebra zurückzugreifen. Man kann die Grundrechnungsarten mit dem Taschenrechner schneller erweitern, kürzen und umrechnen als mit Geogebra.

Anschließend im Kapitel „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ soll der Umgang mit der Prozentrechnung geschult werden. Dies lässt sich natürlich gut mit dem Bruchrechnen verbinden. Dieses Kapitel wird im Schulbuch *MatheFit 2* aber erst knapp hundert Seiten später behandelt. Diese Vorgangsweise wird auf das Spiralprinzip[38] von BRUNER zurückgeführt. Jedenfalls wird man beim Prozentrechnen den Computereinsatz hinten anstellen, da für die Berechnung mittels Schlussrechnung ein Taschenrechner vollkommen ausreicht. Jedoch macht es in der weiteren Behandlung des Kapitels durchaus Sinn, Geogebra zu verwenden und zwar im Zusammenhang mit

[37] vergleiche [10] S.6
[38] siehe S.13

der grafischen Darstellung. Dies kann mittels Balkendiagrammen[39] geschehen oder, wie im Schulbuch *MatheFit 2* angeführt, mittels Kreisdiagrammen. Um ein Kreisdiagramm zu zeichnen, sollte man auf keinen Fall Geogebra verwenden, da dies zwar über die Funktion „Winkelberechnung“ möglich ist, aber doch sehr umständlich erscheint. Dies ist die erste Situation, in der ein Konkurrenzprodukt sinnvoller erscheint als Geogebra. In der folgenden Abbildung wird die Aufgabe 1080 aus dem Schulbuch *MatheFit 2*[12 gelöst.



Da das Lernziel hierbei nicht die Umrechnung in Grad, sondern die prozentuelle Darstellung in Kreisdiagrammen ist, kann Geogebra an dieser Stelle nicht überzeugen. Auch der Zugang zur notwendigen Funktion wäre viel zu umständlich und kann bei *MS Excel* wesentlich einfacher gehandhabt werden.

Arbeiten mit Variablen

Dieser Eckpunkt im Lehrplan wird nur im geringen Ausmaß behandelt. Es sollen lediglich vier Unterpunkte abgearbeitet werden.

- *„mit Variablen allgemeine Sachverhalte beschreiben,*
- *Gleichungen und Formeln aufstellen, insbesondere auch in Sachsituationen,*

[39] siehe S.51

- *unter Verwendung von Umkehroperationen einfache lineare Gleichungen mit einer Unbekannten lösen und Formeln umformen,*
- *Formeln interpretieren."*

Zitat:[10]S.6

Die kurz gefasste Beschreibung lässt der Lehrkraft natürlich etwas Freiheit, wie sie den Unterricht gestaltet möchte. Aufbauend auf den Stoff der ersten Klasse, wird der Lehrstoff wieder ins Gedächtnis gerufen, beziehungsweise die Verwendung von CAS in Geogebra wiederholt. Da man in der ersten Klasse noch die direkte Eingabe von Befehlen außer Acht gelassen hat, kann man diese nun getrost in den Unterricht einbauen, denn die ersten Erfahrungen mit Geogebra sollten zu dem Zeitpunkt längst gemacht worden sein. Die Verwendung wurde bereits illustriert[40]. Diese Art, Beispiele zu lösen, gilt neben der Einsetzmethode nur zur Selbstkontrolle, denn es werden keine Rechenschritte angezeigt. Zusätzlich sollen auch Textaufgaben von den Schülern gelöst werden können. Da man nicht die ganze Beispielsangabe in Geogebra eingeben kann, müssen die Schüler zuerst den Rechenweg handschriftlich erfassen. Falls ein Ansatz zur Lösung aufgestellt und mittels Geogebra gelöst wurde, heißt das nicht automatisch, dass das Ergebnis korrekt ist. Man sollte nicht blind Geogebra und anderen Computer-Algebra-Systemen trauen.

Ein wichtiger Aspekt ist das Formelumformen. Man kann zwar durch korrekte Eingabe sofort auf ein Ergebnis schließen, aber welche Rechenschritte für die Umformung notwendig sind, wird nicht gezeigt. Doch dieses Problem wird man nicht so leicht lösen können, da der Computer meist andere Algorithmen verwendet, als sie in der Schule gelehrt werden. Zum Beispiel lernen die Schüler, dass sie Sinus und Cosinus anhand des Einheitskreises ohne Technologieeinsatz bestimmen können. Der Taschenrechner verwendet dafür den CORDIC-Algorithmus (COordinate Rotation DIgital Computer), welcher sehr trickreich und kompliziert aufgebaut ist. Wie soll nun beispielsweise ein Taschenrechner Zwischenschritte zu einer Berechnungsmethode angeben, die er selbst gar nicht kennt? Daher ist Geogebra in diesem Fall wieder als unterstützende Hilfe anzusehen. Um die Lösungsschritte von Gleichungen mit einer

[40] Siehe S.35

unbekannten Variablen zu lernen und zu verstehen, kann Geogebra keine Hilfestellung geben.

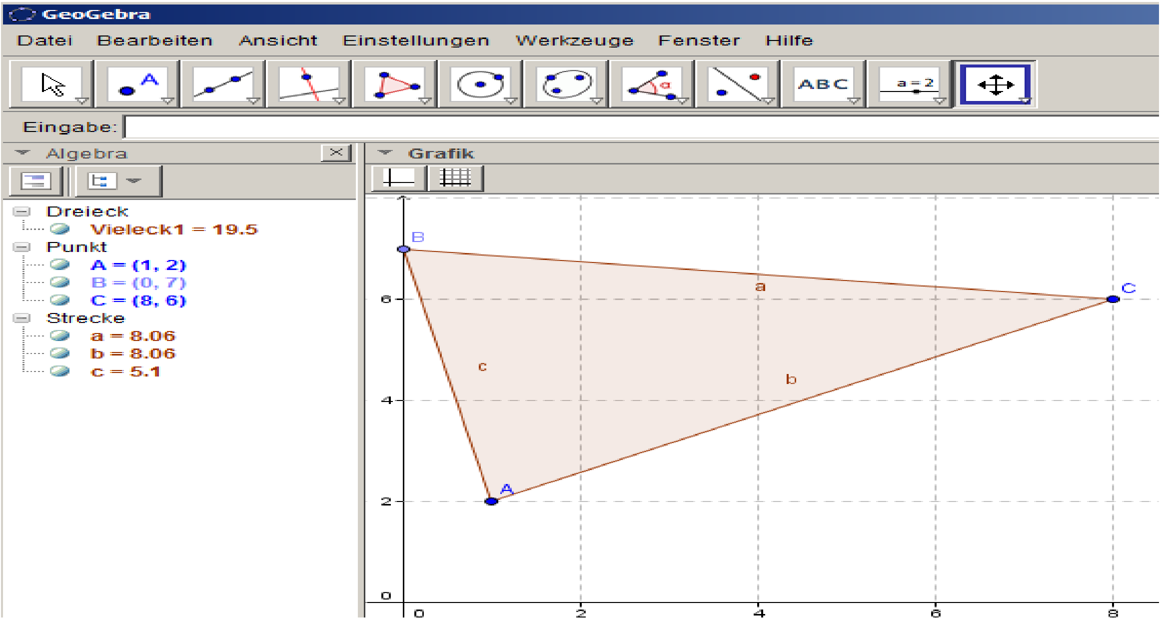
Arbeiten mit Figuren und Körpern

In diesem Kapitel gilt es nun Dreiecke, Vierecke und regelmäßige Vielecke zu konstruieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Zusätzlich sollen die Schüler in der Lage sein, kongruente Figuren zu konstruieren, beziehungsweise in der Lage sein, zu begründen, warum manche Figuren nicht kongruent sind[41]. Dazu empfiehlt es sich, wieder die Einleitung an der Tafel mit dem Lehrer-Geodreieck zu vollziehen, damit die Schüler sehen, wie man damit arbeiten muss. Anschließend ist es schon möglich, Geometrieprogramme, wie etwa Geogebra, zu verwenden. Zusätzlich zum Grafik-Fenster, wie es schon in der ersten Schulstufe verwendet wurde, sollte man nun beginnen, mit dem Algebra-Fenster zu arbeiten, da dieses zusätzliche Informationen anbietet, sobald die Schüler eine Figur skizziert haben. Zur besseren Veranschaulichung dient folgendes Beispiel aus dem Mathematik-Schulbuch *Mathematik verstehen*:

> *Zeichne das Dreieck in ein Koordinatensystem, konstruiere den Schwerpunkt und gib seine Koordinaten an A(1|2) B(0|7) C (8|6)!*
>
> Zitat: [18] S.142 Bsp.: 792a

Sobald die Schüler die Koordinaten eingetragen haben und jene mittels Strecken verbunden worden sind, werden zusätzlich Daten geliefert, für die Berechnungen nötig gewesen wären.

[41] vergleiche [11] S.6

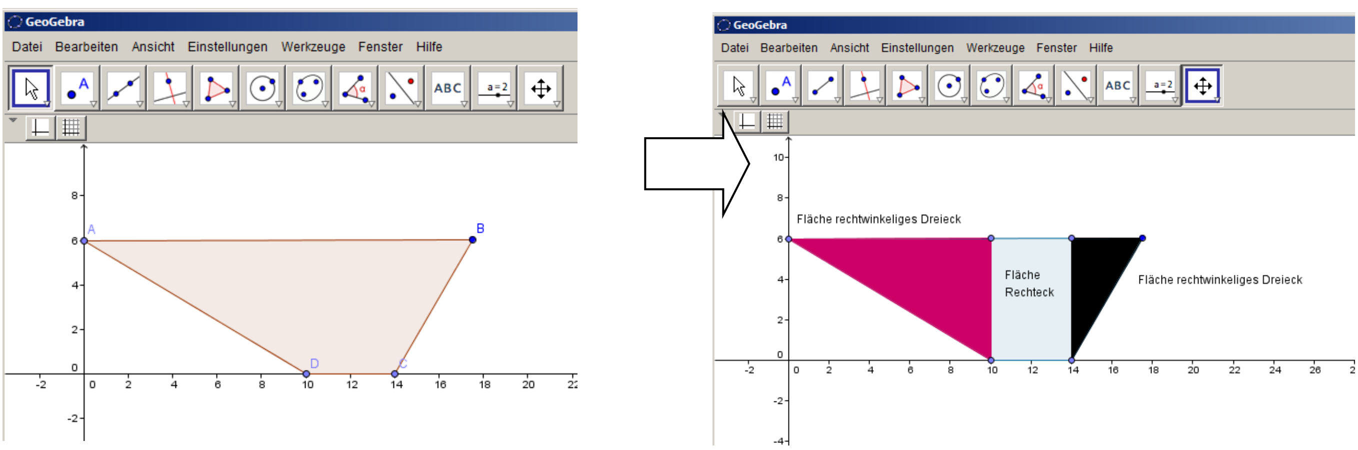


So wurden durch das bloße Zeichnen dieses Dreiecks sofort die Seitenlängen beschriftet und deren Längen ausgerechnet, sowie die Fläche des Dreiecks angegeben. Sollte es für solche Aufgabenstellungen in den Tests oder Schularbeiten zusätzliche Punkte geben, so könnten diese Aufgaben durch bloßes Ablesen gelöst werden. Denn mehr als Punkte in ein Koordinatensystem einzutragen, müssen die Schüler hierfür nicht können. Um zur Lösung der Aufgabe zu kommen, welche aber hier nebensächlich ist, braucht man nur noch die Mittelpunkte auf den Seitenlängen zu finden und diese mit einem gegenüberliegenden Eckpunkt verbinden. Der Vorteil von Geogebra ist wieder unverkennbar, denn man kann, um an letzteres Beispiel anzuschließen, gleich weitere wichtige Punkte einzeichnen und eine Euler'sche Gerade darstellen. Mit dem anschließenden Ausdruck der Unterlagen erhält man dann einen ordentlichen Schulübungseintrag.

Zusammengefasst kann behauptet werden, dass sich Geogebra zum Zeichnen eignet und auch für die Berechnung von Punkten kann das Programm eingesetzt werden. Anstatt eine schnelle, unsaubere Skizze zu fertigen, empfiehlt es sich, gleich eine genaue Zeichnung in Geogebra anzufertigen. Sobald diese Konstruktion fertig ist, werden Teillösungen im Algebra-Fenster angeboten, wodurch die Schüler ihre eigenen Lösungen mit diesen vergleichen können. Beispielsweise kann an dieser Stelle im Unterricht eine Art Stationenbetrieb mit Hilfe von Geogebra eingerichtet werden. Jeder Schüler bekommt die Aufgabe, ein beliebiges Dreieck in Geogebra zu erstellen.

Danach werden die Plätze getauscht und jeder Schüler hat die Aufgabe, das jeweilige Dreieck in sein Schulübungsheft zu übertragen und danach alle Seitenlängen, Winkel und speziellen Punkte zu berechnen. Als Hilfe darf selbstverständlich Geogebra verwendet werden. Durch das Experimentieren mit Geogebra war es möglich, diese Übung bis zum Ende der Stunde drei Mal zu wiederholen. Es empfiehlt sich auch, ein ähnliches Unterrichtsmodell bei den Vier- und Vielecken zu verwenden. Wobei anzumerken ist, dass in den folgenden Unterrichtsstunden noch einmal wiederholt werden müsste, welche Schritte in Geogebra gemacht wurden und wie diese Schritte auch ohne Technologieeinsatz möglich gewesen wären.

Für die Flächen- und Umfangsberechnung der jeweiligen Figuren kann man natürlich auch wieder Geogebra verwenden, sofern die Berechnungen noch nicht im Algebra-Fenster angezeigt wurden. Dazu müssten die Schüler nun zeitgleich auch mit dem CAS-Fenster arbeiten und dies stellt eine Überforderung dar. Daher sollten die Schüler bei der Berechnung der gesuchten empirischen Daten auf das Kopfrechnen oder den Taschenrechner zurückgreifen. Dennoch gibt es in diesem Kapitel eine weitere gute Möglichkeit, um Geogebra gezielt einzusetzen, nämlich zur Flächenberechnung von Vielecken, aber nicht bei der numerischen Berechnung, sondern beim Aufstellen des Rechenweges. Das heißt, sie können Geogebra verwenden, um ein Abbild ihres Vielecks zu zeichnen. Danach können sie durch das Aufteilen und eventuelles Einfärben auf Flächenformeln stoßen, die sie bereits kennen. In der folgenden Abbildung ist so ein Vieleck zu sehen, um sich ein besseres Bild davon machen zu können.



Arbeiten mit Modellen, Statistik

An dieser Stelle im Lehrplan sollen die Zusammenhänge zwischen direkten und indirekten Proportionalitäten gelehrt werden. Dabei wird großer Wert auf die tabellarische und grafische Darstellung gelegt. Da bis jetzt in dieser Arbeit nur die tabellarische Arbeit im Zusammenhang mit Balkendiagrammen vorgestellt wurde, ist nun ein guter Zeitpunkt, um einen kurzen Einblick in die Liniendiagramme zu geben. Dies wird wieder direkt an einem Beispiel demonstriert, um einen Schulbezug herzustellen.

> *„Stelle eine Preistabelle für folgende Ware auf (bis 6 kg) und zeichne das zugehörige Diagramm. Wähle passende Einheiten und vergiss nicht, die Achsen zu beschriften.*
> *1 kg Schweinefleisch kostet 7 € „*
> Zitat: [18] S.106 Bsp.: 618

Das Anlegen einer Tabelle in Geogebra wurde schon in der ersten Klasse geübt und sollte daher kein Problem darstellen. Nun muss man nur die Werte als Punkte darstellen lassen und es erscheint ein Liniendiagramm. Ein anderer Lösungsweg wäre natürlich über die Analyse der Wertetabelle und der späteren Abfrage des passenden Regressionsmodells möglich, doch dies ist erst in höheren Schulstufen angedacht. (Siehe Abb.1)

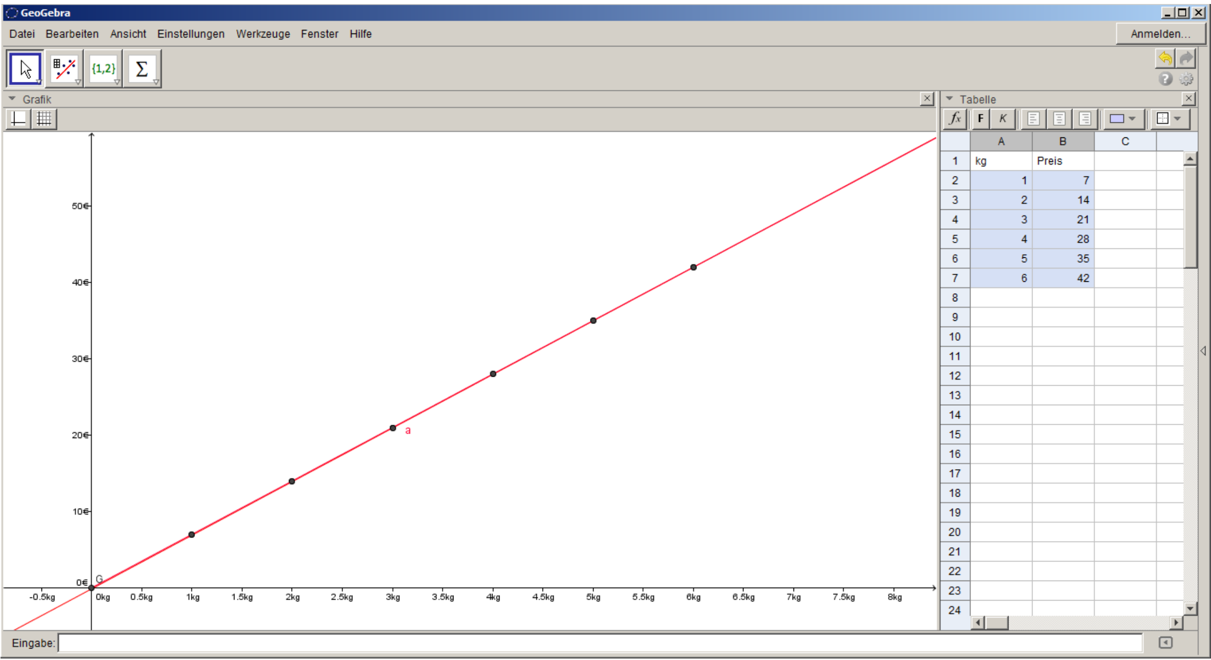


Abb. 1

Schüler sollten auch in der Lage sein, Diagramme zu deuten. Dafür wird Geogebra nicht gebraucht, da die Diagramme bereits erstellt sind. Einzig der Versuch, solche Modelle nachzuzeichnen, könnte eine sinnvolle Unterrichtsstunde ausfüllen. Daher könnte eine mögliche gelungene Aufgabe lauten, dass die Schüler Situationen aus dem Alltag aufschreiben, ähnlich wie es schon in der ersten Klasse gemacht wurde[42], und diese dann mittels Liniendiagramm darstellen sollen. Mit dieser Aufgabenstellung wird es auch den Schülern schwerfallen, voneinander abzuschreiben, sodass lauter verschiedene Liniendiagramme entstehen. Im abschließenden Kapitel der direkten und indirekten Schlussrechnungen werden hauptsächlich algebraische Rechenschritte angewandt, sodass sich der Einsatz von Geogebra, genauso wenig wie im Kapitel „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“, nicht eignet.

[42] siehe S.51

3. Klasse

Arbeiten mit Zahlen und Maßen

In der dritten Klasse der AHS Unterstufe folgt im Kapitel „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ die Erweiterung der natürlichen Zahlen auf die Menge der ganzen Zahlen. Dazu verläuft analog im Schulbuch *MatheFit 3*[16] das Kapitel „größer oder kleiner Null“.

> *„In diesem Kapitel erfährst du:*
>
> 1. *was die Menge der ganzen Zahlen ist,*
> 2. *ob es eine kleinste ganze Zahl gibt,*
> 3. *was man unter dem Betrag einer Zahl versteht und*
> 4. *wie Rechenoperationen in dieser neuen Zahlenmenge ausgeführt werden.“*
>
> Zitat: [16] S.26

Um die Menge der ganzen Zahlen darzustellen, kann man auf „VENN Diagramme“ zurückgreifen. Wobei bei dieser Anwendung die lehrende Person Geogebra nur simpel an die Tafel projiziert und der Unterricht frontal abgehalten wird. Dies wäre eine sinnvolle Ergänzung zum Unterricht. Weitere optionale Ergänzungen wurden beispielsweise von Dr. Andreas MEIER erstellt. Diese Erweiterungen sind interaktive Arbeitsblätter, welche kostenlos zum Download für die Schüler bereitstehen. Diese kann man auch auf der Website „realmath“[43] finden. Im Schulbuch *MatheFit 3* wird die Thematik des Addierens und Subtrahierens behandelt. Geogebra eignet sich ideal, um diese Thematik zu vertiefen. Wie intensiv der Umgang mit Pfeilen oder Zahlenpfeilen in den Unterricht integriert wird, wie Dr. Andreas MEIER sie nennt, bleibt jedem Lehrer selbst überlassen. Es kann jedoch festgehalten werden, dass dieses Modell einen weiteren Zugang zum Erlernen dieses Themas ermöglicht. Zur Veranschaulichung wird das Beispiel „Zahlenpfeilmodell der Addition“[14] präsentiert (Abb. 2)

Zur Erklärung, in der obersten Darstellung kann mit Hilfe der Schieberegler, welche jeweils auf der rechten Seite blau und grün dargestellt werden, die Länge der Pfeile

[43] http://www.realmath.de/Mathematik/newmath.htm

eingestellt werden. Dazu muss man den Schieberegler nach links oder rechts bewegen. Im zweiten Schritt wird dargestellt, wie man die zwei Pfeile aneinander reihen muss. Auch hier können mittels der interaktiven Schieberegler die Längen der Pfeile eingestellt werden. Zum Abschluss wird das Ergebnis rot dargestellt. Diese Vorgehensweise ist auf der Abbildung 2 nicht möglich, da dies nur eine Momentaufnahme ist. Dieses Beispiel ist nur eines unter vielen von Dr. Andreas MEIER.

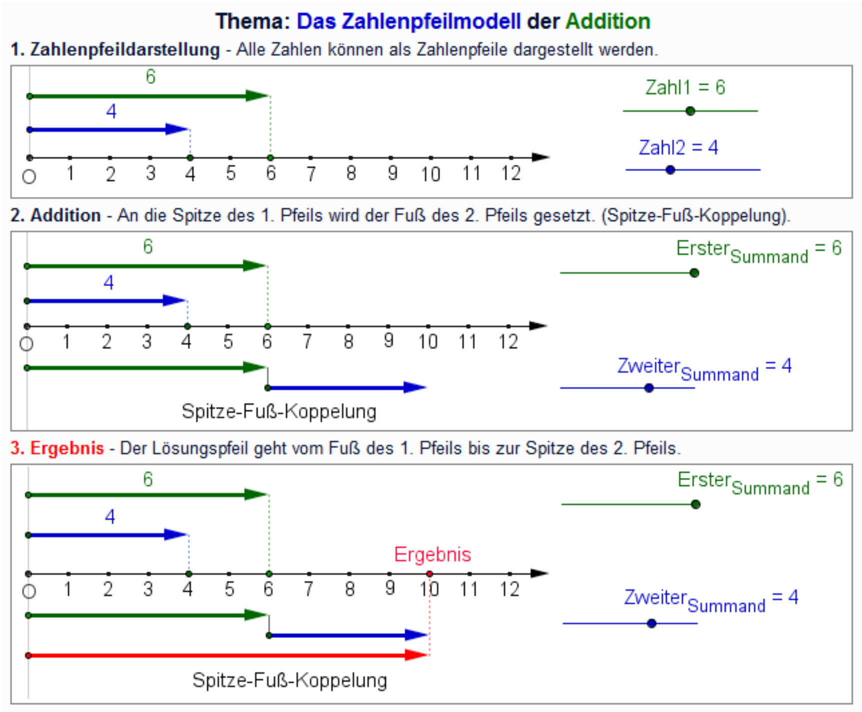


Abb. 2 [Link]

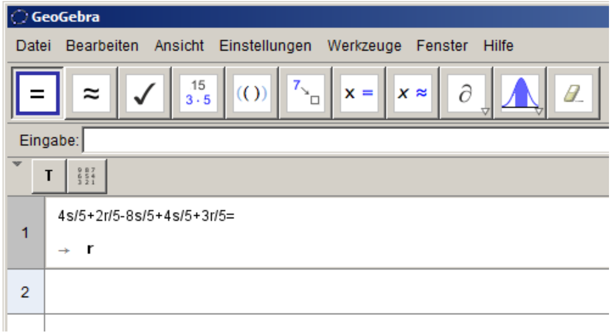
Weiters sollten die Schüler in diesem Schuljahr lernen, Verkettungen der vier Grundrechnungsarten zu lösen. Zusätzlich sollten die Schüler imstande sein, diese Verkettungen durch Kopfrechnen zu lösen. Dafür wird man kein Computer-Algebra-System benötigen, doch für die Lösung der Probe kann es schon nützlich sein, wobei in diesen dargestellten Fällen der handliche Taschenrechner vollkommen ausreichend sein sollte. In dieser Schulstufe wird nun auch das Koordinatensystem eingeführt. Bisher wurde das Koordinatensystem nur im ersten Quadranten erläutert. Die Methode des Frontalunterrichts zur Einleitung, sprich eine Projektion von Geogebra an die Tafel, ist zu bevorzugen. Das bringt den Vorteil, dass man das Koordinatensystem schön erkennt und auch die jeweiligen Quadranten und Vorzeichenveränderungen der

Punkte demonstrieren kann. Im Mathematik-Schulbauch *MatheFit 3* findet man dazu weiterführende Beispiele. Die Schüler sollen nun regelmäßige Vielecke in ein Koordinatensystem zeichnen, aber nicht die Eckpunkte beschriften. Danach erfolgt ein Tausch dieser Objekte untereinander. Aufgabe der Schüler ist es nun, die fehlenden Eckpunkte zu beschriften und die Koordinaten dazuzuschreiben. Nun folgt der abschließende Einsatz von Geogebra. Nach einem erneuten Tausch der Vielecke, soll nun anhand der Koordinaten im Grafik-Fenster von Geogebra dieselbe Figur entstehen. Diese Methode hat den Vorteil, dass der Lerninhalt dreimal interpretiert werden muss. Natürlich gibt es auch zielführendere Methoden, welche weniger aufwändig gestaltet sind. Man könnte den Schülern auch verschiedene Punkte an der Tafel vorgeben und die Schüler sollen mittels Streckenzügen erkennen, welche Figur sich ergibt[44].

[44] vergleiche [16] S.60

Arbeiten mit Variablen

Bisher wurde in diesem Kapitel in der ersten und zweiten Klasse immer nur das CAS-Fenster in Geogebra gesondert betrachtet. Es hätte sich jedoch auch angeboten, das Programm wxMaxima[45] zu verwenden, was aufgrund des höheren Schwierigkeitsgrades erst in der dritten Klasse angebracht ist. Die Schüler sollen auch graphische Darstellungsmöglichkeiten zum Lösen von Gleichungen nutzen[46]. In diesem Fall erweist sich Geogebra als vorteilhaft, da das Programm erlaubt, die graphische Darstellung und das Algebra-System zu kombinieren. Andere Systeme schaffen es nicht, diese zu kombinieren. Es wurde schon gezeigt, dass man ganzzahlige Terme mit Hilfe von Geogebra sehr leicht vereinfachen kann, weil man genau dieselbe Notation verwenden kann. Dies funktioniert auch für Bruchterme. Man muss einzig und allein die unterschiedliche Darstellung des Divisions-Zeichens beachten.[47].



„Vereinfache und mache die Probe für r=4 und s= 10!

$$\frac{4s}{5}+\frac{2r}{5}-\frac{8s}{5}+\frac{4s}{5}+\frac{3r}{5}= \text{“}$$

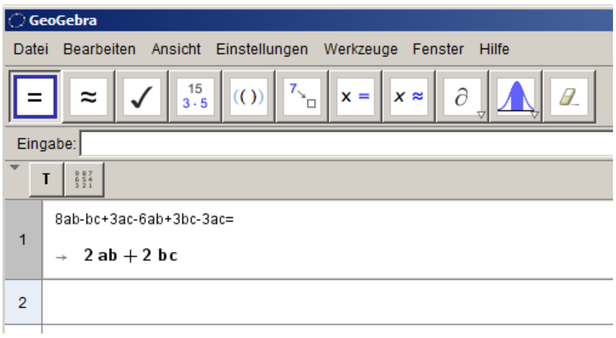
Zitat: [16] S.103 Bsp. 444a

Außerdem ist es möglich, Geogebra als Kontrollwerkzeug bei der Multiplikation von Variablen zu verwenden.

„Vereinfache und mache die Probe für a=3, b=2 und c=1!

$$8ab - bc + 3ac - 6ab + 3bc - 3ac = \text{“}$$

Zitat: [16]S.105 Bsp.: 451

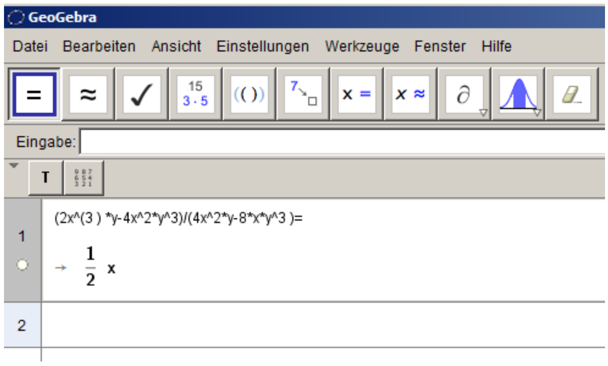


[45] http://sourceforge.net/projects/wxmaxima/
[46] vergleiche [11] S.7
[47] vergleiche S.61

Es darf demnach keine Ausrede der Schüler geben, da diese Kontrollmöglichkeit besteht. Die Lehrkraft muss beim Wählen der Variablen jedoch achtsam sein, da es beim Einsetzen von x und y zu Problemen kommen kann. Zum Abschluss folgt noch ein drittes Beispiel zur Vereinfachung von Gleichungen.

„Hebe heraus und kürze!

$\frac{2x^3\,y-4x^2y^3}{4x^2y-8xy^3}$ “



Um diesen Bruch mittels Technologieeinsatzes zu kürzen, müssen die Schüler eine erweiterte Kenntnis der mathematischen Symbole beherrschen. Doch das dürfte kein Problem darstellen, da sowohl die Symbole für die Potenz und das Rechnen mit Klammern bereits erklärt worden sein sollte. Zu letzterem Beispiel muss man dennoch anmerken, dass die Angabe sehr fordernd ist und sich bei Nichtsetzen des Multiplikationszeichens eine andere Lösung ergibt. Zum Vergleich wird das dritte Beispiel in Geogebra und dem Programm Wolfram Alpha[48] ohne Setzen des Multiplikationszeichens getestet. Das Ergebnis spricht gegen Geogebra und für das Programm Wolfram Alpha. Wolfram Alpha konnte mit jeder abgeänderten Version des Beispiels arbeiten und brachte das richtige Ergebnis hervor. Hingegen gab es bei Geogebra für jede Version meist ein anderes Ergebnis. Nur bei der exakten Eingabe der Multiplikationszeichen wurde die richtige Lösung angezeigt. Daraus lässt sich der Schluss ziehen, dass man Geogebra bei komplexeren Aufgabenstellungen durchaus auch verwenden kann, jedoch kann es durch die komplizierte Eingabe leicht passieren, dass man durch Tippfehler mehr Zeit benötigt.

Die Probleme mit den Zwischenschritten und der Übersetzung von Text auf mathematische Gebilde wurden schon im vorherigen Kapitel erörtert, daher folgt nun der Wechsel zum nächsten Kernpunkt im Lehrplan der AHS Unterstufe.

[48] http://www.wolframalpha.com/

Arbeiten mit Figuren und Körpern

Anknüpfend an die zweite Klasse, sollen nun in der dritten Klasse die Flächeninhalte von Dreiecken, Vierecken und regelmäßigen Vielecken behandelt werden. Nun können die Figuren auch im Koordinatensystem gezeichnet werden[49]. Dies hilft den Schülern beim Umgang mit Geometrieprogrammen, denn in Geogebra selbst ist ein Koordinatensystem integriert. Zusätzlich sollen die Schüler den Zusammenhang von Vergrößerung und Verkleinerung erkennen und den damit verbundenen Flächeninhalt berechnen können. Für solche Aufgaben kann Geogebra unterstützend in Form einer Skizze helfen. Zur Demonstration folgt nun eine Übungsaufgabe aus dem Mathematik Schulbuch *Mathematik verstehen.*

> *„Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn die Grundlinie verdoppelt wird und die dazugehörige Höhe gleich bleibt?“*
>
> Zitat: [19] S.80 Bsp.:466

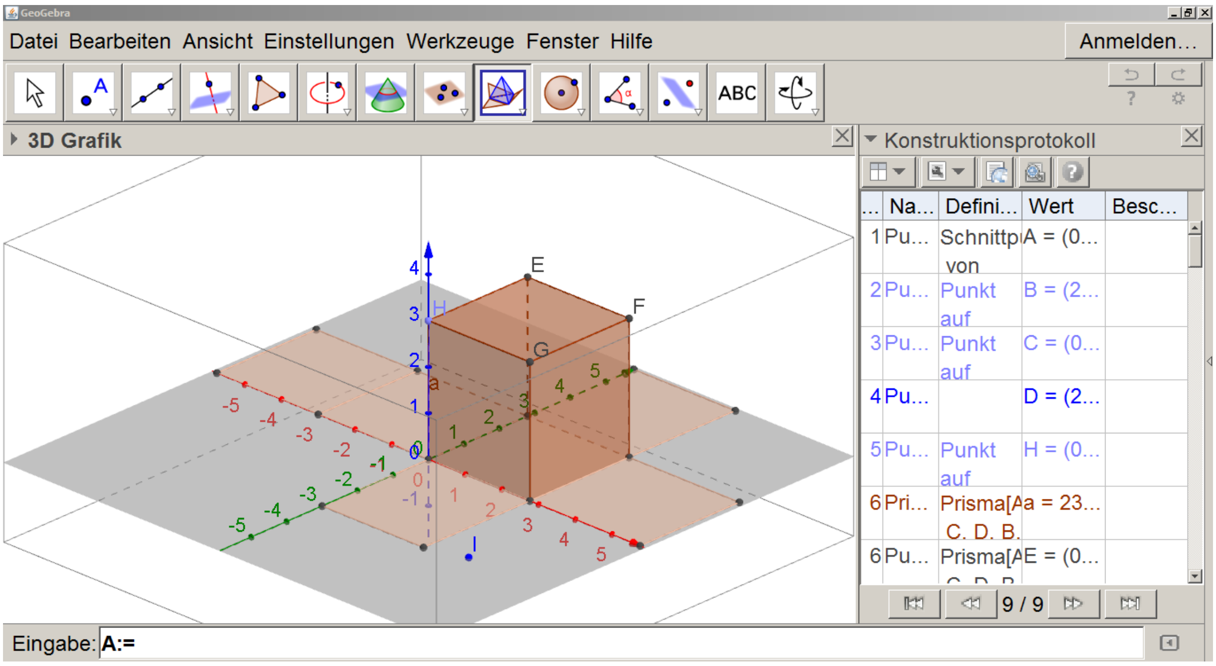
Ein Beispiel dieser Art ist schwer ausschließlich in Geogebra zu lösen, da eine Art Fenster zur Text- und Beweisführung fehlt. Jedoch ermöglicht eine Skizze es den Schülern, sich ein klareres Bild von dem Beispiel zu verschaffen. Durch eigenständiges Arbeiten in, zum Beispiel Kleingruppen, sollen nun die Schüler selbstständig probieren, wie sich die Seitenveränderung auf den Flächeninhalt auswirkt. Gegebenenfalls können auch algebraische Vermutungen im Heft aufgestellt werden. Um diese Präsentationsmöglichkeit optimal zu nutzen, könnte man aus der Grundfläche des einen Dreiecks einen Schieberegler erstellen, sodass sich automatisch bei der Bewegung die Fläche des anderen Dreiecks auch mit verändert.

Des Weiteren sollen die Schüler auch die Flächen der Raute und des Parallelogramms kennenlernen. Um diese Flächeninhalte herzuleiten, wäre es auch eine gute Idee, auf Geogebra zurückzugreifen. Durch die Möglichkeit des Verschiebens und Zusammenschneidens der Objekte kann man ganz einfach von Rechtecken und Vierecken auf weitere geometrische Figuren schließen. Ab der dritten Klasse kommen nun auch Figuren vor, welche im Raum dargestellt werden sollen. Die Erweiterungen auf Körper und der damit verbundene Schritt zur Erweiterung auf den Raum sind auch

[49] vergleiche S.63

in Geogebra möglich. Es ist jedoch zu erwähnen, dass die ersten Skizzen wieder mit Stift und Papier angefertigt werden sollten. Zusätzlich ist es auch unbedingt notwendig, dass die Eigenschaften von Prismen im Vorhinein besprochen werden, denn ansonsten werden kaum regelmäßige Prismen entstehen. Eine Kollegin hatte dazu eine sonderbare Idee. Sie hat in einer ihrer Unterrichtsstunden ein fertiges Prisma an die Tafel projiziert und die Schüler mussten nun mit Hilfe eines Geodreiecks die verschiedenen Winkel ausmessen. Mit den Werten der Winkel und Seitenlängen sollten nun die Schüler selbstständig versuchen, die Prismen nachzuzeichnen. Diese Variante ist nicht vorteilhaft, denn die Schüler sollten lernen, gedachte Prismen im Schrägriss darzustellen.

Die Umsetzung von Prismen in Geogebra ist leicht händelbar, denn für das Zeichnen eines solchen Quaders in Geogebra, braucht man kaum Grundkenntnisse. Um einen Quader zu zeichnen, muss man die geometrischen Grundbegriffe, wie etwa Winkel und Strecken, in Geogebra nicht beherrschen. In der nächsten Abbildung ist ein Quader gezeichnet, wobei darauf geachtet wurde, so wenige Befehle wie möglich zu verwenden. Zusätzlich zu erwähnen ist, dass in Geogebra eine 3D-Ansicht integriert ist, die es ermöglicht, Prismen mit wenigen Mausklicks zu zeichnen.



In nur fünf Arbeitsschritten konnte der Quader dadurch gezeichnet werden. Es ist auch möglich, wie in der Abbildung ersichtlich, ein Netz des Quaders zu erstellen, um die

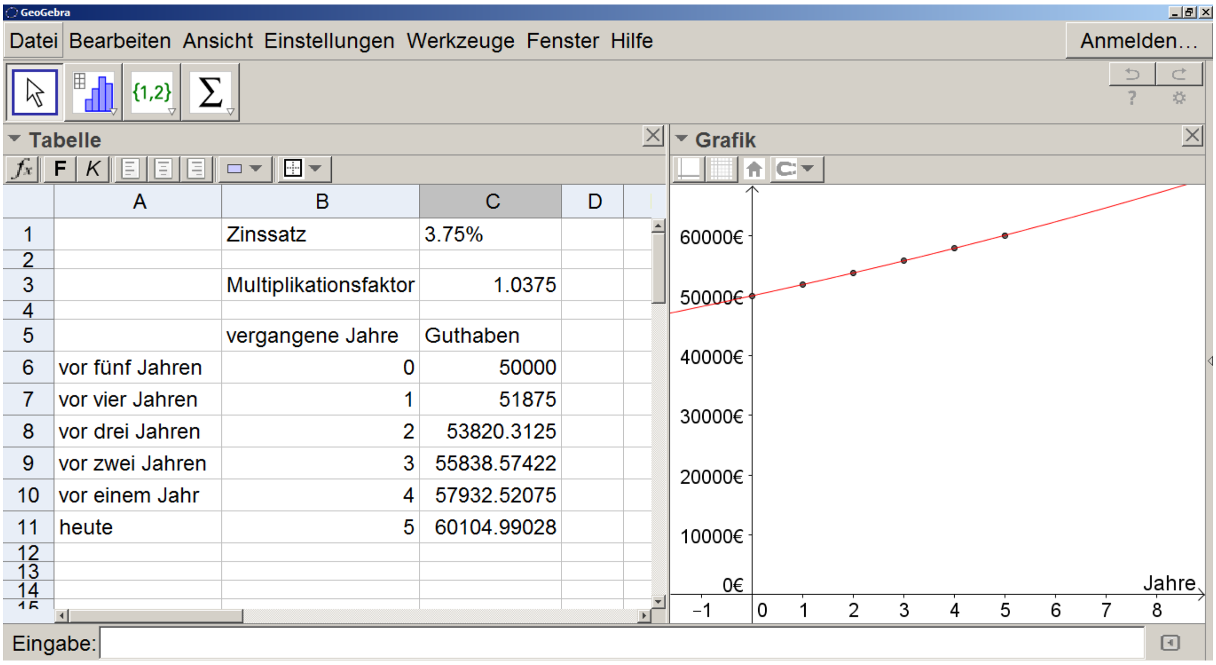
Mantelfläche darzustellen. Zusätzlich besteht die Option, eine Mantelfläche als Ausgangsbasis zu erstellen, sodass diese von Schülern zu einem Körper zusammengebaut werden kann. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die jeweiligen Vorlagen in der GeogebraTube zu suchen. An dieser Stelle sollen kurz die Vorlagen von Wolfgang WENGLER[50] hervorgehoben werden, da sie im Unterricht bei der Erarbeitung der Themengebiete „Prismen" und „Netzen von Prismen" sehr empfehlenswert sind.

Arbeiten mit Modellen, Statistik

Zum Abschluss der dritten Klasse wird im Lehrplan wieder das Kapitel „Arbeiten mit Modellen und Statistik" behandelt. In den Ausführungen zu den vorangegangen Schuljahren wurde schon auf die unterschiedlichen Diagrammtypen eingegangen. Neu hinzu kommt die Darstellung der Prozentsätze und der Zinsenrechnung. Diese soll natürlich auch mit Hilfe von elektronischen Hilfsmitteln geschehen. Die lernenden Schüler sollen imstande sein, ganze Zinstabellen zu erstellen und sie grafisch auszuwerten. Dafür würde sich ein reines Tabellenkalkulationsprogramm natürlich besonders gut eignen, aber für die Zwecke in der Sekundarstufe I ist die integrierte Tabellenkalkulation in Geogebra ausreichend. Der klare Vorteil von Geogebra und anderen Tabellenkalkulationsprogrammen liegt darin, dass die Daten mit Hilfe von Mausklicks sofort angepasst und vervielfältigt werden können. Zur besseren Veranschaulichung wurde folgendes Beispiel aus dem Mathematikschulbuch *Mathematik verstehen* gewählt.

> *„Herr Lebensfroh hat vor 5 Jahren ein Sparbuch mit einem Guthaben von 50.000 € angelegt, das mit 3,75% p.a. verzinst ist. Wie hoch ist sein Guthaben heute?"*
>
> *Zitat:[19] S.149*

[50] http://www.geogebratube.org/user/profile/id/143



Bei der Lösung dieser Aufgabe merkt man, dass ein wesentlicher Teil fehlt. Es wird weder in der Hilfefunktion von Geogebra noch auf der dazugehörigen Website ein Weg präsentiert, der eine Zelle in der Tabelle fixiert. Daher ist man gezwungen, jeden Eintrag einzeln einzugeben, wodurch man sich den Technologieeinsatz hätte sparen können. Bei etwaigen Vergleichsprogrammen, wie etwa Microsoft Excel, ist dies hingegen möglich. Ansonsten ist der Einsatz von Technologie an dieser Stelle im Unterricht eine gute Möglichkeit, um den Sachverhalt besser zu erklären und den Schülern näher zu bringen. Selbiges Prozedere gilt auch für die linearen Wachstums- und Abnahmevorgänge. Diese können auch mit Hilfe einer Tabelle aus Punkten oder einer linearen Gleichung dargestellt werden.

Die Ausführungen über die dritte Klasse der Sekundarstufe I werden an dieser Stelle beendet und im kommenden Kapitel wird mit der Aufbereitung der achten Schulstufe fortgefahren.

4. Klasse

Arbeiten mit Zahlen und Maßen

In der nun abschließenden Klasse der AHS Unterstufe sollen nun die Zusammenhänge der jeweiligen Kapitel aufgezeigt werden. Laut Lehrplan soll durch ein zusammenfassendes Betrachten das Zahlenverständnis vertieft werden. Im Vergleich dazu die Herangehensweise im Schulbuch *MatheFit* 4[17].

„In diesem Kapitel lernst du,

1. *dass Wurzelziehen die Umkehrung zum Potenzieren ist,*
2. *wie man mit Wurzeln rechnet,*
3. *dass es Wurzeln mit besonderen Eigenschaften gibt,*
4. *was irrationale Zahlen sind und wie man sie darstellen kann,*
5. *und welche Zahlen zur Menge der reellen Zahlen gehören."*

Nun stellt sich die Frage, wie man Geogebra an dieser Stelle gut einsetzen könnte. Wie schon in den vorherigen Kapiteln zu „Arbeiten mit Zahlen und Maßen" ist dies äußerst schwierig und man kann bestenfalls Empfehlungen oder Möglichkeiten zum Technologieeinsatz aufzeigen. Deshalb sollte man Geogebra bestenfalls unterstützend in diesem Kapitel einsetzen. Dazu wird auf einige hilfreiche Funktionen von Geogebra, die die Schüler unterstützen könnten, näher eingegangen. Das erste in Geogebra erstellte Arbeitsblatt, behandelt das Ordnen von reellen Zahlen. Wobei die Aufbauweise dieses Arbeitsblattes auf die Lerntheorie des Behaviorismus zurückzuführen ist. Die Schüler sollen im Stande sein, die reellen Zahlen nach der Größe zu sortieren, wobei man bei einer richtigen oder falschen Lösung des Beispiels sofort ein Feedback erhält. Weiters wurde aus Motivationsgründen ein „Highscore-Zähler" implementiert. In der folgenden Abbildung (Abb. 3) wird dieses interaktive Arbeitsblatt zum Ordnen der reellen Zahlen präsentiert. Zum Bearbeiten muss man einfach die links angegebenen Werte per „Drag and Drop" auf die rechte Seite ziehen.

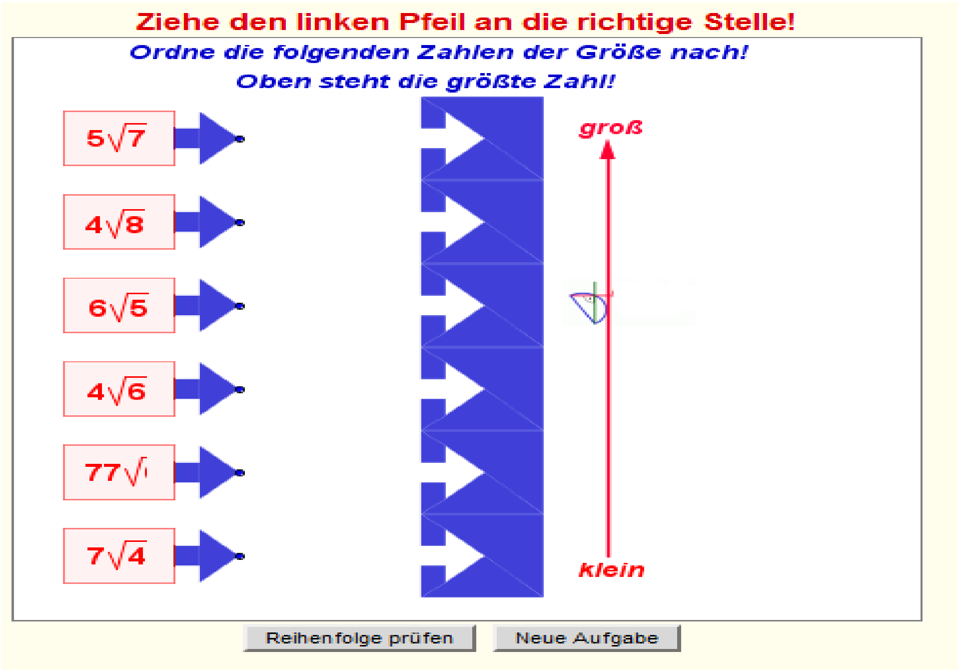
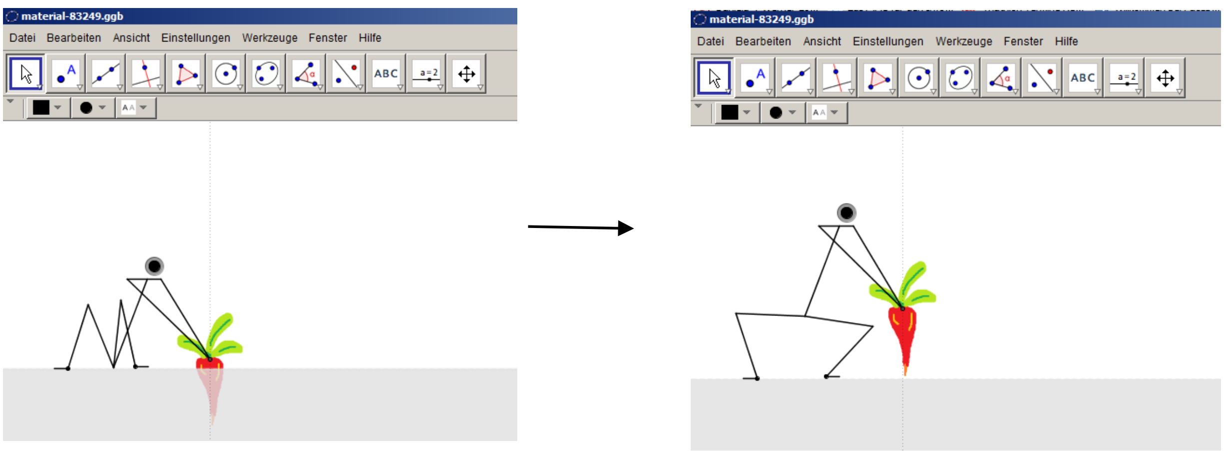


Abb.3 [Link]

An dieser Stelle kann man auch das Wurzelziehen mittels des Heron-Verfahren durchführen, welches bereits in einem vorangegangenen Kapitel näher beschrieben wurde.[51]. Zum Thema der Quadratwurzel lassen sich mit Geogebra und der dazugehörigen GeogebraTube nicht immer mathematisch sinnvolle Aufgabenstellungen finden. Zu dieser Problematik wird folgendes Beispiel angeführt. Der Titel, Wurzel ziehen, klingt doch sehr verlockend, doch hat dies sehr wenig mit der mathematischen Bedeutung der Wurzel zu tun, wie man in der folgenden Abbildung unschwer erkennen kann. Abb. 4



[51] Siehe S.21

Abb. 4

Die einzige Aufgabe, die auf diesem Arbeitsblatt erkennbar ist, ist es, den Kopf des Strichmännchens zu berühren und mittels Ziehen die Karotte aus dem Boden zu holen. Man sieht eindeutig, dass der gewollte Lernerfolg zum richtigen Wurzelziehen ausbleibt. Doch genau dies ist ein wichtiger Punkt, denn die Schüler müssen vor allem beim Selbststudium erkennen, welche Materialen wirklich nützlich sind. Im Unterricht selbst ist das aufgrund der meist großen Schüleranzahl nicht einfach zu kontrollieren. Doch wenn die Schüler schon die Motivation aufbringen, in der Freizeit mit Geogebra zu arbeiten, führen solche Arbeitsblätter am Ziel vorbei. Da wäre es durchaus besser, im Mathematikbuch zu schmökern.

Arbeiten mit Variablen

Zum vierten und letzten Mal wird nun der Unterpunkt „Arbeiten mit Variablen" analysiert. Wie in den vorherigen Kapiteln zu diesem Thema bereits beschrieben, wird der Weg an CAS nicht vorbeiführen. In diesem Kapitel geht es darum, dass die Schüler Gleichungen mit ein oder zwei Variablen umformen und lösen können. Des Weiteren soll der Begriff einer Funktion in den Köpfen der Heranwachsenden verankert werden.

Die Verwendung von CAS beim Lösen von Gleichungen wurde schon in den vorhergehenden Klassen aufgezeigt und deshalb wird auf eine wiederholte Beschreibung verzichtet. Auch wenn der Einsatz von CAS geeignet ist, so sollte man diesen auch in der vierten Klasse Geogebra nur als Erweiterung zum Unterricht ansehen. Dazu wird nicht mehr auf das herkömmliche Lösen eingegangen, sondern es werden weitere Beispiele aus der GeogebraTube betrachtet. Das größte Problem der Schüler ist meist, dass die einzelnen Termumformungen nicht in der CAS-Ansicht angezeigt werden. Um dennoch einen Lernerfolg zu erzielen, ist folgendes Arbeitsblatt zu empfehlen. Natürlich ist dies wiederum nur in Geogebra implementiert worden, sodass die Schüler keine weiteren Programme kennen müssen. In Abbildung fünf (Abb. 5) ist das vorgefertigte Arbeitsblatt dargestellt, welches die Schüler auf ihren eigenen Computern öffnen können.

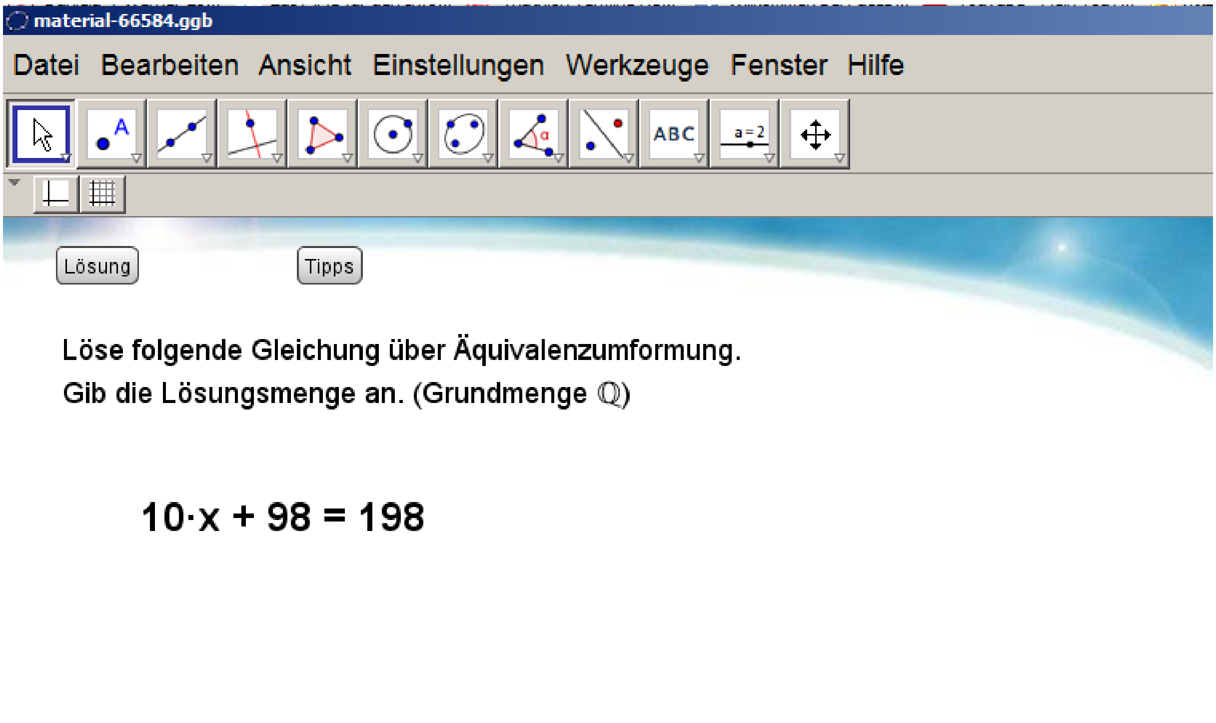
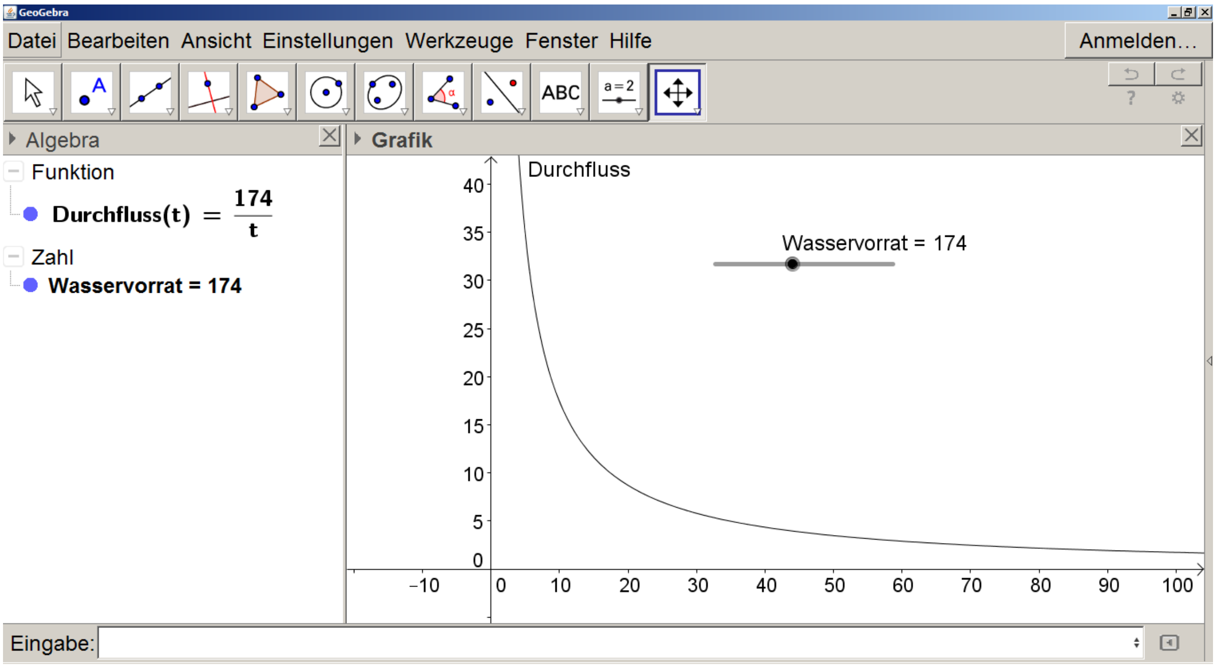


Abb.5 Quelle: GeogebraTube

Es ähnelt wiederum einem Lernprogramm, welches auf Grundlage des Behaviorismus erstellt wurde. Es bietet dennoch einige Vorteile, zum Beispiel wird nicht sofort die Lösung eines willkürlich erstellten Beispiels angezeigt, sondern die Schüler müssen die Aufgabenstellungen vorab selbst extern, zum Beispiel auf einem Blatt Papier, lösen. Da es kein Feld zur Eingabekontrolle gibt, müssen die Schüler selbst ihren Rechenverlauf und das daraus resultierende Ergebnis vergleichen. Als Hilfestellung besteht für die Lehrkraft die Möglichkeit, einzelne Rechenschritte mit dem angezeigten Button „Tipps“ anzuzeigen. Dies ist ein passendes Beispiel, um das Arbeiten mit Variablen im Selbststudium und mit Geogebra zu präsentieren. Wie schon eingangs erwähnt, sollen die Schüler an den Funktionsbegriff herangeführt werden. Im Verlauf der Themenerarbeitung kommt man nicht darüber hinaus, Funktionen anhand einer Funktionsgleichung zu zeichnen. Wobei das Zeichnen den Schülern auch helfen kann, eine Funktion zu erkennen und zu interpretieren, was oft schwierig ist, wenn man zum Beispiel nur eine Wertetabelle zur Verfügung hat. Der Vorteil von Geogebra liegt darin, dass man mehrere Funktionen erstellen und sie mittels „Schieberegler“ ändern kann. Dieser Vorteil wird am nächsten Beispiel unter der Verwendung von Geogebra gezeigt.

„Wie viel Stunden reicht ein Vorrat von y l Wasser, wenn durch eine Turbine pro Stunde x l Wasser fließen? Gib die Antwort in Form eines Graphen!“



Da für den Wasservorrat kein fixer Wert vorgegeben wurde, erstellt man einen Schieberegler. Durch eigenständiges Experimentieren werden die Schüler erkennen, dass sich die Funktion niemals mit der x- und y-Achse schneidet, sondern sich nur annähert. Man muss sich nicht mehr auf die Vorstellungskraft der Schüler verlassen. Den algebraischen Beweis dazu könnte man ergänzend im Schulübungsheft festhalten.

Zusätzlich könnte man als Ergänzung zum Unterricht die Schüler wiederum bitten, Daten aus dem Alltag zu sammeln, zum Beispiel den Temperaturanstieg zu den verschiedenen Uhrzeiten. Diese Daten werden digitalisiert und in der Tabellenkalkulation von Geogebra eingesetzt und abschließend als Funktion dargestellt. Der Vorteil liegt darin, dass Geogebra sofort eine angenäherte Funktion darstellt. Zur besseren Veranschaulichung wurden einige Daten gesammelt und in nachfolgender Abbildung ebenfalls als Funktion dargestellt (Abb.6).

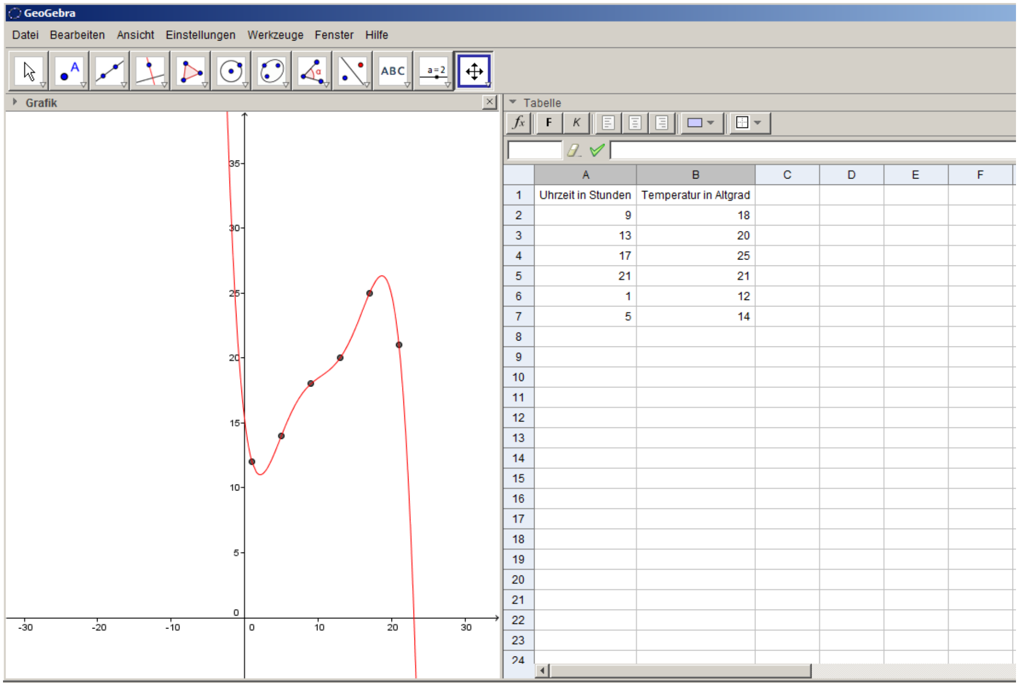


Abb. 6

Die Funktionsvorschrift ist in diesem Fall für die Schüler einer vierten Klasse uninteressant, da es näherungsweise ein Polynom fünften Grades ist. Zur Veranschaulichung ist dieses Beispiel bestens geeignet und erfüllt zugleich die gewünschten Anforderungen.

Arbeiten mit Figuren und Körpern

Auch in der letzten Schulstufe der AHS Unterstufe beschäftigt man sich mit dem Erarbeiten von Figuren und Körpern. Es wird an dieser Stelle nicht mehr auf die Vorteile von Flächen- und Volumenberechnungen mittels Geogebra eingegangen, da dies ohnehin bereits in den vorhergehenden Kapiteln erfolgte[52]. In dieser Schulstufe soll nach dem österreichischem Lehrplan auch noch die Satzgruppe des Pythagoras gelehrt werden. Um diesen Lehrsatz in den Mathematikunterricht einzuführen, kann man natürlich wieder auf Geogebra zurückgreifen. Als Tipp von Günter HANISCH sollten die Schüler ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnen und selbst versuchen, mittels Experimentieren, den Hauptsatz nachzuvollziehen. Dazu gibt es auch wieder einige

[52] Siehe S.42, S.54, S.63

Arbeitsblätter, welche den Inhalt noch deutlicher präsentieren. Dazu folgendes Arbeitsblatt von d.gutternigg[53] (Abb. 7).

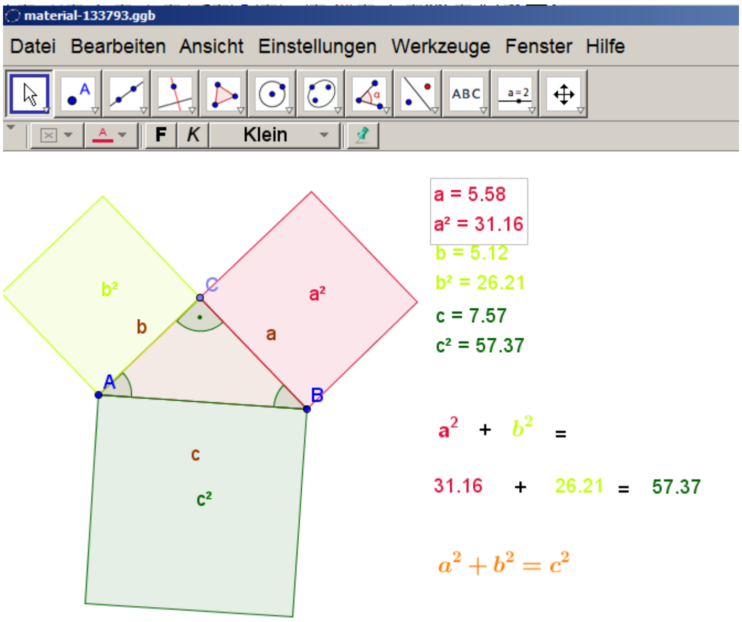


Abb. 7

So in etwa sollte auch die Arbeitsleistung der Schüler aussehen. Der Lerneffekt sollte daraus resultieren, dass egal wie groß oder klein die Quadrate a und b sind, die Summe immer gleich groß wie c ist. Diese Möglichkeit ist aber die einzig sinnvolle, um die Satzgruppe des Pythagoras mittels Computerunterstützung zu unterrichten. Ansonsten sollte man die Rolle von Geogebra nicht zu hoch einschätzen. In der zu Rate gezogenen Fachliteratur[54] lässt sich kein Beleg finden, dass man die Satzgruppe des Pythagoras vermehrt mittels Technologieeinsatzes unterrichten sollte. Daher wird nun mit dem nächsten Planpunkt im Lehrplan, dem Arbeiten mit Modellen und Statistiken, fortgefahren.

Arbeiten mit Modellen und Statistiken

Da der Lehrplan in der vierten Klasse im Kapitel „Arbeiten mit Modellen und Statistiken“ keine zusätzlichen Neuerungen vorsieht, werden an dieser Stelle noch ein paar zusätzliche Einsatzmöglichkeiten angesprochen. Geogebra bietet die Möglichkeit, eine Aufzählung von Daten mittels der Option „Liste“ festzulegen, wobei bei der

[53] http://tube.geogebra.org/user/profile/id/59710
[54] Fachdidaktik Mathematik

Eingabe der Daten nicht auf die Ordnung der Zahlen geachtet werden muss. Achten muss man darauf, dass man allein die Zahlenwerte und nicht zusätzlich die Maßeinheit angibt. Würde man bei den Zahlenwerten die Bezeichnungen wie etwa kg, cm, usw. dazu fügen, würde eine Fehlermeldung angezeigt werden.

> *„Bei einer schulärztlichen Untersuchung wurde die Größe der Schülerinnen und Schüler gemessen.*
> *Dabei ergab sich folgende Urliste:*
> *146cm, 158cm, 161cm, 155cm, 164cm, 156cm, 172cm, 162cm, 169cm, 149cm, 153cm, 163cm, 174cm, 158cm, 166cm, 154cm"*
>
> Zitat [20] S.137 Bsp.: 1842

Sobald man eine neue Liste erstellt hat, kann man mit wenigen Schritten statistische Kennzahlen darstellen. Leider werden nur die Lösungen angezeigt und nicht die dazugehörigen Rechenschritte. Deshalb sollte man Geogebra an dieser Stelle nur zum Üben einsetzen. Die Schüler haben durch Geogebra die Möglichkeit, ihre Ergebnisse zu vergleichen, wobei dies bei Aufgaben aus dem Schulbuch auch mit dem dazugehörigen Lösungsheft möglich ist. Zur Lösung des Beispiels reicht es aus, wenn die Schüler im Algebra Fenster arbeiten, was in folgender Abbildung dargestellt wird (Abb. 8).

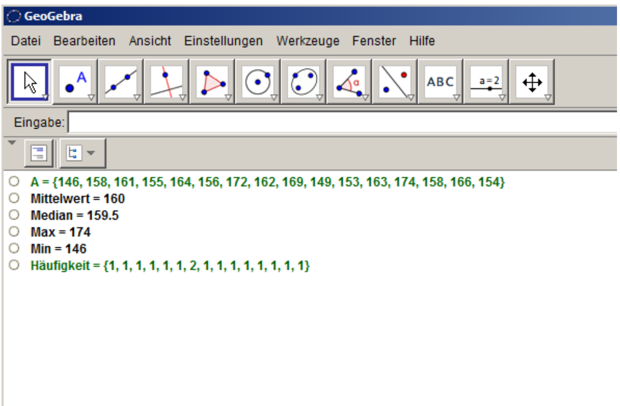


Abb. 8

So könnte die Lösung zum oben genannten Beispiel aussehen. Als nächsten Schritt könnte man nun die Häufigkeit als Diagramm oder die Liste von Punkten mittels Funktion darstellen, um so das Minimum und Maximum besser zu verdeutlichen. An dieser Stelle ist die Analyse des Lehrplans bezüglich Geogebra und dessen Einsatzmöglichkeit beendet. Deshalb kommen im folgenden Teil der Diplomarbeit jene Rückschlüsse, die sich aus der Analyse ziehen lassen.

Conclusio

Es gab an der Universität Wien in den vergangenen Semestern ein Seminar über die Verwendung von Geogebra im Unterricht, wobei die Teilnehmer führende Vertreter der Fachdidaktik der Mathematik waren. Die Ergebnisse aus dem Seminar (welche weitervermittelt werden durften) decken sich mit den Ergebnissen der Recherche, nämlich dass man Geogebra zwar im Unterricht einsetzen kann, aber es nicht wirklich notwendig ist.

Ganz zu Beginn dieser Diplomarbeit wurde Henry Ford zitiert, um aufzuzeigen, warum man fortschreitende Technologien unbedingt nutzen sollte. Dennoch wurden in den letzten Kapiteln einige Ansätze aufgezeigt, in welchen Bereichen es nicht sinnvoll ist, Geogebra einzusetzen. Beispielsweise ist es nicht sinnvoll, Schülern das Kopfrechnen mittels Geogebra beizubringen. Doch dies ist eine sehr wichtige Fähigkeit, welche die Schüler im späteren Alltag immer wieder benötigen werden. Aber bei speziellen Kapiteln, wie beim Rechnen mit Variablen, kann Geogebra eine unterstützende Rolle einnehmen. Dieses Kapitel lässt sich viel einfacher mit herkömmlichen Methoden an der Tafel erklären. Denn, wie oft angesprochen, werden die Umformungsschritte in den Rechnungen nicht angezeigt, sondern man bekommt nur das Ergebnis präsentiert. Daher könnte man Geogebra nur dazu einsetzen, um Ergebnisse zu kontrollieren. Doch auch dies ist schwer, denn vergleicht man die Lösung von Geogebra und jene vom Lösungsheft, so stellt sich die Frage, welche nun korrekt ist, falls Diskrepanzen auftreten. Daher ist es ratsam, falls eine Lösung Geogebras vom Lösungsheft abweicht, den Lösungsweg noch einmal zu kontrollieren oder zu überprüfen, ob die Lösungen äquivalent sind und sich nur in der Schreibweise unterscheiden.

Die Entwickler von Geogebra haben sich sehr viel Mühe gegeben, damit die Schüler auf eine schulnahe Notation zurückgreifen können. Doch sobald die Terme immer mehr verschachtelt werden, wird die Eingabe zusätzlich erschwert. In dieser Diplomarbeit wurde ein Beispiel vorgestellt, in dem ein Bruch gekürzt und vereinfacht wurde[55]. Während in der Angabe des Beispiels noch keine Klammern gesetzt sind,

[55] Siehe S.51

verlangt Geogebra in diesem Fall das Setzen von Klammern. Man könnte zwar argumentieren, dass die Schüler dadurch ein besseres Gefühl beim Aufbau von Bruchtermen bekommen, doch man kann nicht leugnen, dass die Eingabe deutlich schwieriger ist. Besonders leistungsschwächere Schüler sollten anfangs versuchen, solche Beispiele ohne elektronische Hilfsmittel zu lösen.

Geogebra weist natürlich nicht nur negative Seiten auf. Gerade beim Arbeiten mit Figuren und Körpern ist der Einsatz von Geogebra eine tolle Möglichkeit, um den Stoff zu vertiefen. So kann man sich beispielsweise durch das experimentelle Arbeiten der Schüler ein paar Beweise sparen, zum Beispiel den Höhenschnittpunkt. Dieser ist kaum mit der Mathematik aus der Unterstufe zu beweisen[56], aber durch die angebotenen Funktionen in Geogebra können Schüler diesen Sachverhalt durch Probieren besser verstehen. Auch die Satzgruppe des Pythagoras lässt sich auf diese Weise[57] erarbeiten und erleichtert Schülern das Verständnis. Des Weiteren ist es ein großer Vorteil, wenn die Lehrkräfte die erarbeiteten Beispiele abspeichern und mit diesen in der nächsten Unterrichtsstunde weiterarbeiten können. Das hat auch den Vorteil, dass sich die Schüler nicht an ein neues Tafelbild gewöhnen müssen. Zusätzlich können vergangene Unterrichtsstunden rekonstruiert werden falls im Nachhinein, zum Beispiel vor Schularbeiten, Fragen auftreten.

Zusammenfassend kann erwähnt werden, dass der Lehrplan der Sekundarstufe I noch nicht auf den Einsatz von Programmen wie Geogebra abgestimmt ist. Es wird nicht vorgeschrieben, wann solche genau zum Einsatz kommen müssen. Zusätzlich sind nicht alle Lehrkräfte im Stande, solche Programme zu verwenden, was eine erneute Schwierigkeit darstellt, um den Unterricht einheitlich zu gestalten. Man wird daher in den nächsten Jahren sehen, wie sich der Unterricht hinsichtlich der Zentralmatura gestalten wird, denn dort ist der Einsatz von Geogebra beziehungsweise ähnlichen Technologien zwingend.

[56] Möglich beispielsweise mit Hilfe des Strahlensatzes
[57] siehe S.76

Empirische Untersuchung

Grundgedanke

Im letzten Teil dieser Diplomarbeit wird eine empirische Untersuchung vorgestellt, deren Ziel es war, den aktuellen Einsatz von Mathematik-Programmen an österreichischen Schulen festzustellen. Da solch eine Befragung nicht ohne die Erlaubnis des Landesschulrates und den jeweiligen Direktionen möglich gewesen wäre, richte ich auf diesem Wege Dank an folgenden Personen und Institutionen:

Landesschulrat für Niederösterreich

Direktorin Christa FRIEDL — Mittelschule Guntramsdorf

Direktorin Karin BRESNIK, Mag. — ORG Guntramsdorf

Obwohl sich diese Diplomarbeit ausschließlich der Sekundarstufe I widmet, war es wichtig, auch die Oberstufenklassen in die Befragung einzubeziehen. Die Entscheidung fiel auf das ORG Guntramsdorf, da dort die fünften Jahrgänge von Schülern mit den unterschiedlichsten schulischen Vorbildungen aus dem Großraum Wien besucht werden.

An dieser empirischen Untersuchung nahmen insgesamt 92 Schüler teil, wobei einige zum Zeitpunkt der Evaluation schon die Sekundarstufe I abgeschlossen hatten. Die Teilnahme basierte auf freiwilliger Basis der Schüler und natürlich wurden die Eltern vorab über die Befragung ihrer Kinder informiert. Die teilnehmenden Schüler bekamen einen zweiseitigen Fragebogen vorgelegt, welcher offene und Multiple Choice Fragen beinhaltete. Die Multiple Choice Fragen galt es nach dem Schema

- Trifft ganz zu
- Trifft eher zu
- Trifft weniger zu
- Trifft nicht zu

zu beantworten. Auf den beiden folgenden Seiten befindet sich der originale Fragebogen, der den Schülern vorgelegt wurde. Zusätzlich gab es spezifische Gespräche mit den Schülern zum Thema Geogebra. Auch diese Ergebnisse werden auf den folgenden Seiten präsentiert.

Fragebogen

Geogebra

1. Persönliche Daten:

Geschlecht Männlich 0 Weiblich 0

Alter(in Jahren) …………………...

Schultyp ……………………

Schulklasse ……………………

2. Fragebogen

	Trifft ……. zu			
	ganz	**eher**	**weniger**	**nicht**
Ich kenne mich gut im Schulfach Mathematik aus.	☺	😐	☹	○
Ich kann mit dem Computer gut umgehen.	☺	😐	☹	○
Ich habe schon den Computer verwendet, um Mathematikbeispiele zu lösen.	☺	😐	☹	○
Meine Geschwister helfen mir beim Rechnen am Computer.	☺	😐	☹	○
Ich war während des Mathematikunterrichts schon einmal im Informatikraum.	☺	😐	☹	○
Ich kenne das Computerprogramm Geogebra.	☺	😐	☹	○
Ich habe mit dem Programm Geogebra schon gearbeitet.	☺	😐	☹	○

Die folgenden Fragen brauchen nur ausgefüllt werden, wenn du das Programm Geogebra kennst.
Wenn du Geogebra nicht kennst, gib den Fragebogen bitte ab!

Ich finde die Bedienung von Geogebra leicht.	☺	😐	☹	O
Meine Lehrkraft kennt sich gut in Geogebra aus.	☺	😐	☹	O
Meine Lehrkraft benutzt Geogebra oder ähnliche Computerprogramme im Unterricht.	☺	😐	☹	O
Ich versuche Hausaufgaben mit Geogebra zu lösen.	☺	😐	☹	O
Ich kann mit Geogebra viel schöner zeichnen als im Heft.	☺	😐	☹	O
Ich habe schon viel mit Geogebra konstruiert (Kreise, Dreiecke,…)	☺	😐	☹	O
Wenn ich mit Geogebra arbeite, erhalte ich einen Arbeitsauftrag.	☺	😐	☹	O
Prinzipiell macht mir die Arbeit mit Geogebra Spaß.	☺	😐	☹	O
Geogebra hilft mir den Mathematikunterricht besser zu verstehen.	☺	😐	☹	O
Ich darf in Geogebra frei arbeiten. Ich brauche keiner Anleitung zu folgen.	☺	😐	☹	O
Ich habe auch schon Gleichungen mit Geogebra gelöst.	☺	😐	☹	O
Ich möchte auch im kommenden Schuljahr mit Geogebra arbeiten.	☺	😐	☹	O

Was gefällt dir an Geogebra besonders?

…………………………………………………………………………………………………

Was gefällt dir an Geogebra überhaupt nicht?

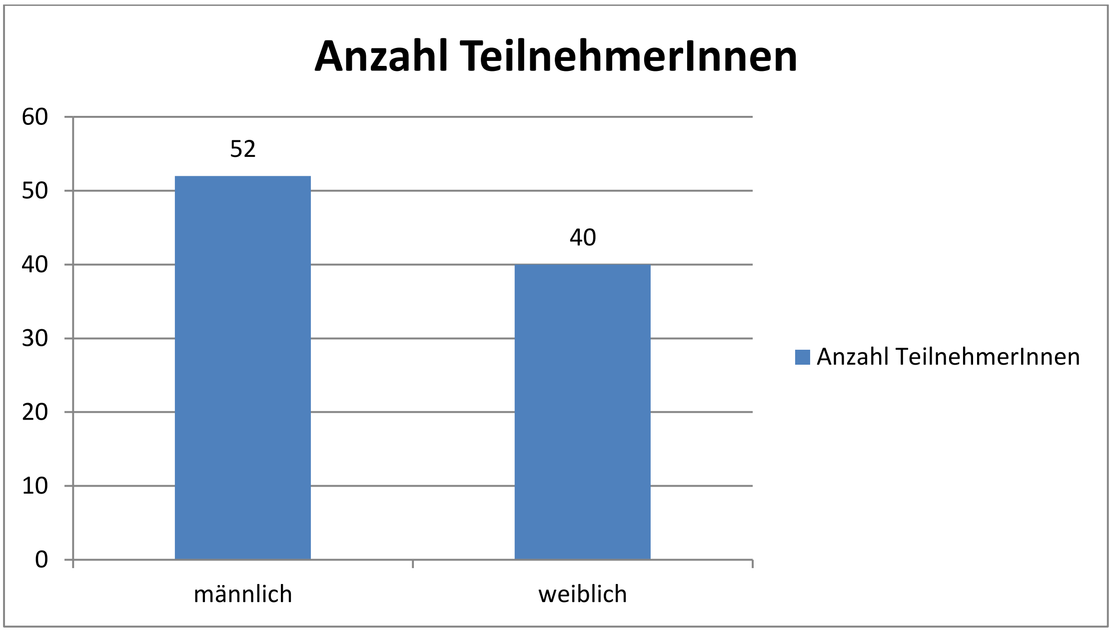
…………………………………………………………………………………………………

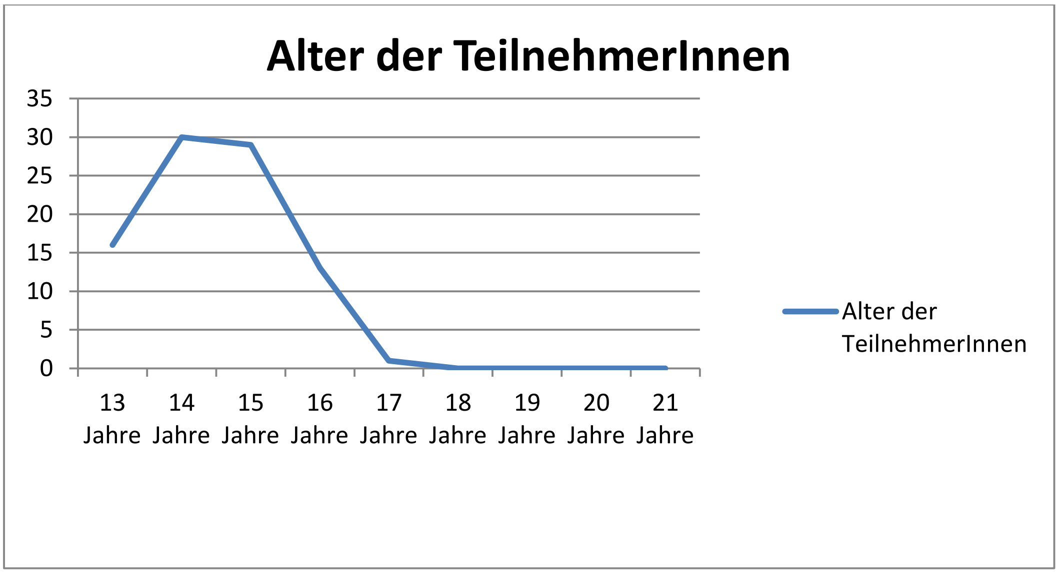
Danke

Statistische Auswertung

Allgemeine Informationen

Die empirische Untersuchung fand anonym statt und es nahmen insgesamt 92 Schüler und Schülerinnen teil.

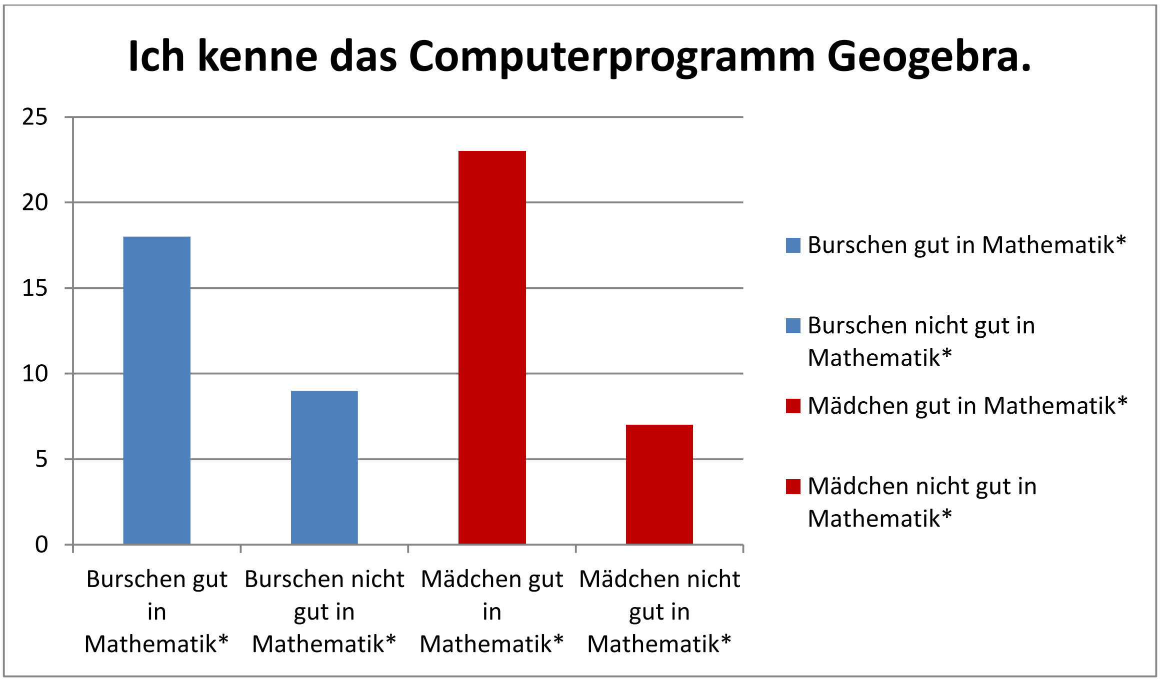




Spezifische Auswertung

Zu Beginn mussten sich die Schüler selbst einschätzen. Dazu galt es bei Frage 1 selbst zu beurteilen, wie groß das jeweilige mathematische Talent ist. Diese Einschätzung wurde mit der Frage: „Kennst du Geogebra?“ gekoppelt. Hinter dieser Koppelung verbirgt sich der Hintergedanke, ob nur „gute“ Schüler und Schülerinnen Geogebra kennen oder ob auch „förderungsbedürftigere“ Schüler zumindest schon von diesem Programm gehört haben. Grundsätzlich wurden die Geschlechter getrennt analysiert und die Ergebnisse in einer Gesamtübersicht zusammengefasst.

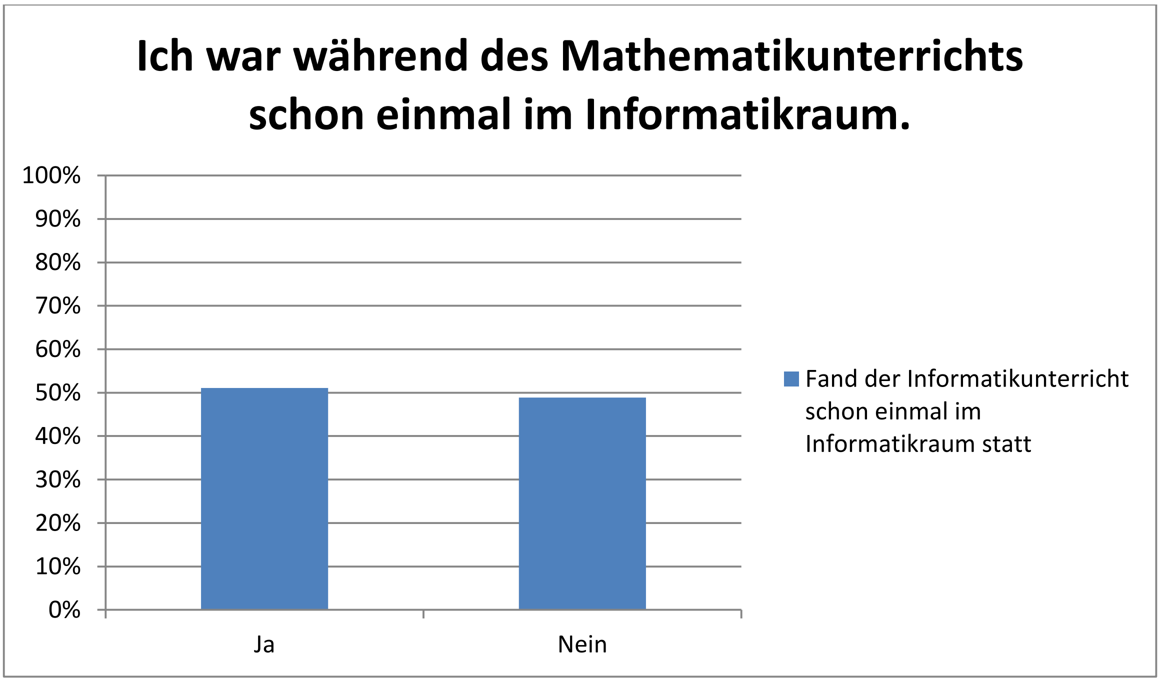
Dabei ergab sich folgendes Ergebnis, wobei anzumerken ist, dass in der folgenden Grafik nur jene 57 Teilnehmer erfasst sind, die angaben, das Programm Geogebra zu kennen.



*Es sind nur jene Schüler erfasst, die angaben, Geogebra zu kennen

Man erkennt, dass die Ergebnisse zwischen männlichen und weiblichen Schülern variieren. Man erkennt, dass gute Mathematiker das Programm Geogebra eher kennen als jene, die es nicht sind. Zumindest schätzten sich die Schülerinnen und Schüler selbst so ein. Dieses Ergebnis wirft nun mehrere Fragen auf. Wirkt sich Geogebra positiv auf die Leistung der Schüler aus? Interessieren sich leistungsstärkere Schüler mehr für Geogebra? Leider ist schwer feststellbar, was die Schüler unter dem Begriff „kennen“ genau verstehen.

Es stellt sich auch die Frage, wie sehr nun Geogebra im momentanen Unterricht eingebunden ist. Daraus ergab sich die Fragestellung, wie sehr ein hausinterner Informatikraum[58] genutzt wird oder ob sogar einzelne Mathematikunterrichtsstunden im Informatikraum abgehalten werden.

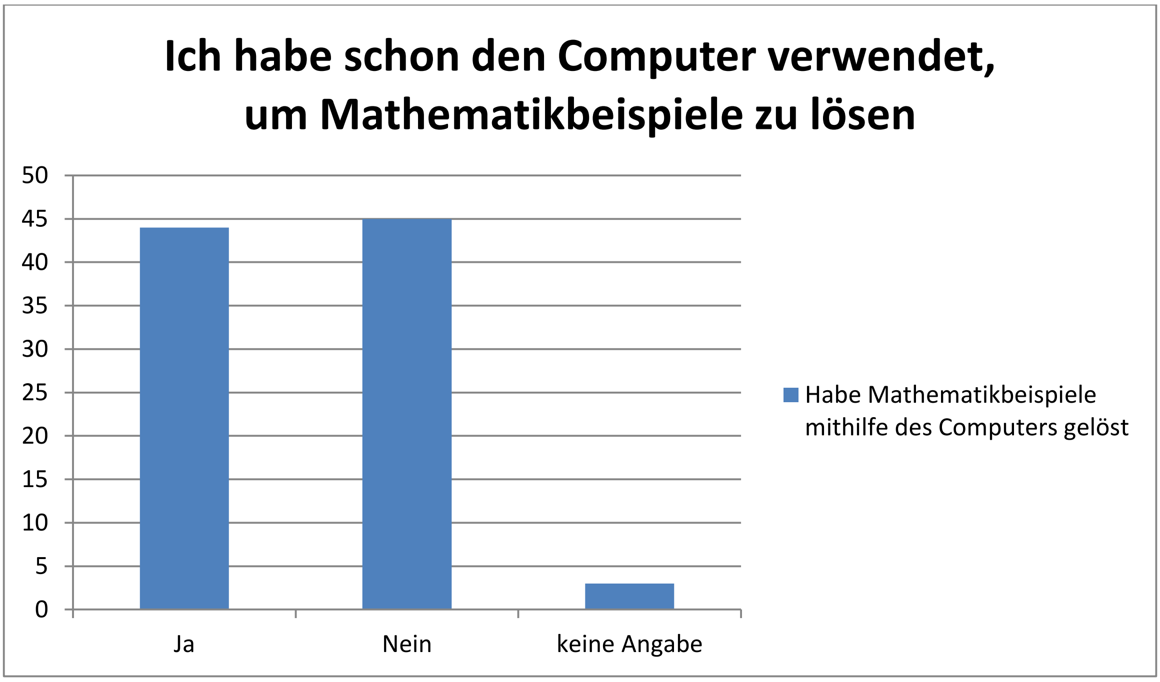


Das Ergebnis ist verwunderlich, denn knapp die Hälfte der Schüler gab an, dass sie schon zumindest einmal im Informatikraum ihren Mathematikunterricht verbracht hat. Dies sind nicht gerade viele, denn von allen Schülern würde nur knapp die Hälfte infrage kommen, die Geogebra schon einmal im Unterricht verwendet hätten. Für knapp 49% aller Schüler wäre es somit gar nicht möglich, mit Computerunterstützung in der Schule zu arbeiten, sofern es sich nicht um eine Sonderklasse, wie etwa eine Laptopklasse handelt. Wenn man nun diese Aussage mit jener vergleicht, die das „Kennen“ von Geogebra veranschaulicht, erkennt man Folgendes. 54% der Schüler und Schülerinnen gaben an, Geogebra zu kennen. Im letzten Diagramm erkennt man, dass knapp 50% schon einmal einen Mathematikunterricht mit Computerunterstützung hatten. Natürlich hat dieser Rückschluss keine Beweiskraft, aber wenn Mathematik

[58] Informatikraum = Raum mit mehreren PC-Arbeitsstationen

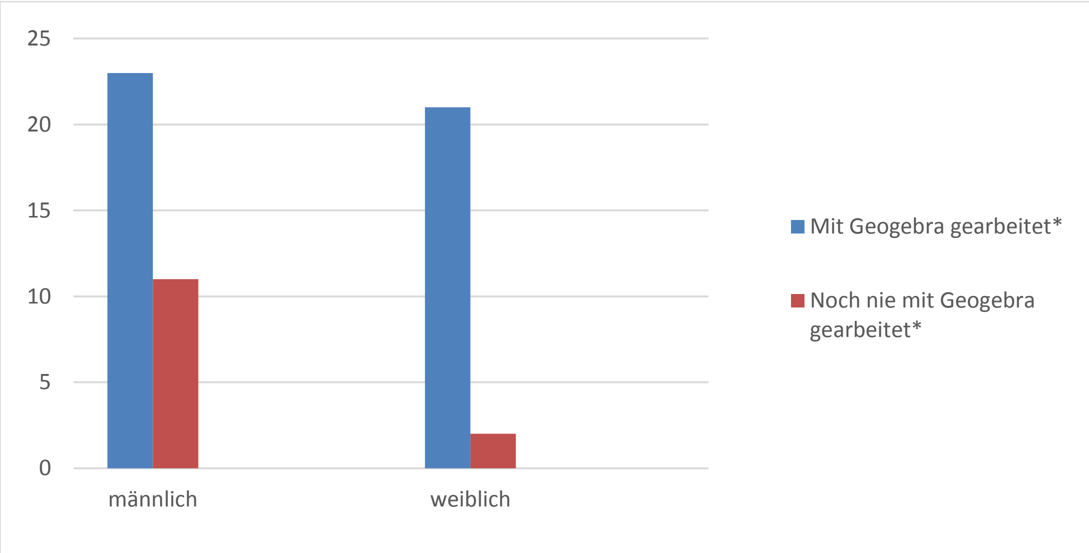
unterrichtet wurde, so würde man meinen, man hätte Geogebra verwendet. Bildet man die Differenz der Aussagen, so bleibt eine „Dunkelziffer“ übrig. Es bleiben ein paar Prozent, die Geogebra nicht aus dem Mathematikunterricht im Informatikraum kennen, sondern durch private Unterstützung.

Die nächste Frage ist, ob die Schüler schon einmal den Computer verwendet haben, um Aufgaben aus dem Bereich Mathematik zu lösen. Dabei war nicht der Taschenrechner gemeint und auch nicht der implementierte Taschenrechner im Computerbetriebssystem selbst.



Leider war es bei ein paar Schülern nicht erkennbar, was sie angekreuzt hatten. Daher mussten jene in die Kategorie „keine Angabe“ eingereiht werden. Dennoch erkennt man, dass die Arbeit mit dem PC immer wichtiger wird. Sogar in der Unterstufe wird bereits mit Hilfe dieser Technologie gearbeitet. Wie dies in der Praxis wirklich aussieht, konnte jedoch kein Schüler erklären. Auch wie die Korrekturarbeiten vorgenommen werden, wusste kein Schüler. Auf die Frage, welches Programm denn verwendet wird oder infrage käme, war die Antwort eindeutig Geogebra.

Die nächste Frage soll zeigen, ob die Schüler nur das Programm „kennen“ oder auch damit „gearbeitet“ haben. Wie bei der ersten Fragestellung ist es ungewiss, was die exakte Bedeutung des Wortes „arbeiten" ist. Trotz der ungewissen Definition ist es wichtig, das Anwendungsverhalten der Schüler zu vergleichen. Auch in diesem Fall wurden wieder männlich und weiblich getrennt betrachtet. Wobei im folgenden Balkendiagramm wieder nur jene 57 Schüler herangezogen wurden, welche schon einmal vom Programm Geogebra gehört haben.



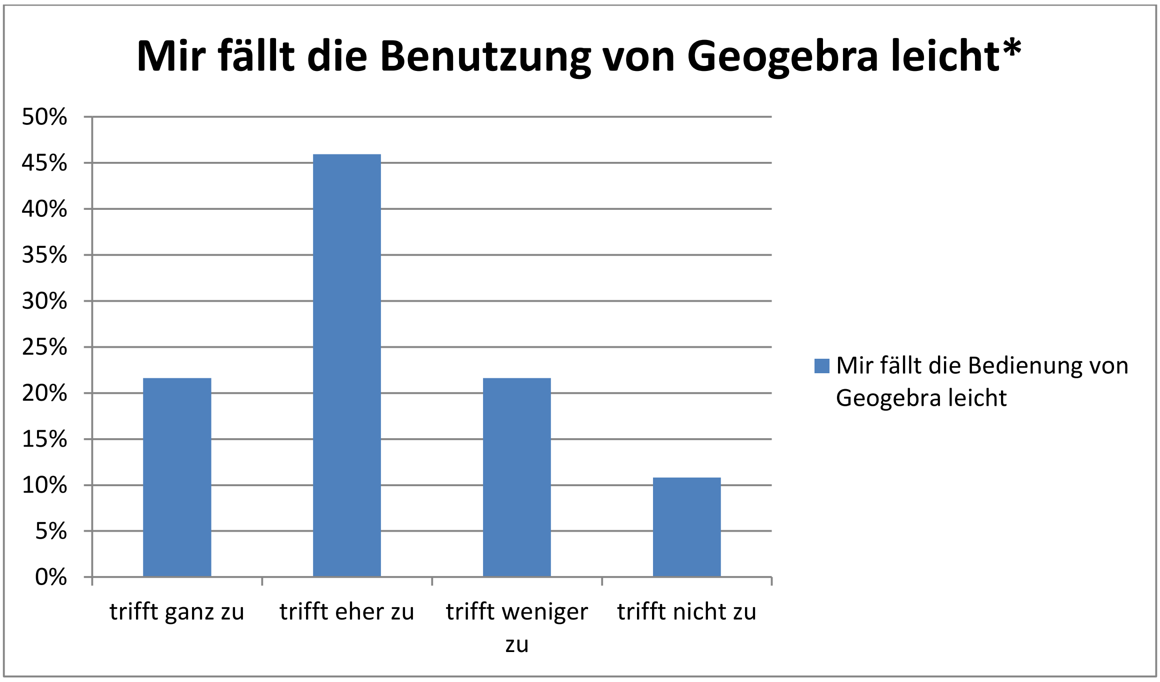
* Es sind nur jene Schüler erfasst, die angaben, Geogebra zu kennen

Hier ist der erste deutliche Unterschied zwischen den Geschlechtern erkennbar. Bei den Schülern gaben knapp zwei Drittel an, bereits mit Geogebra gearbeitet zu haben, während ein Drittel noch nie in diesem Programm tätig war. Bei den Schülerinnen ist dieser Anteil, mit etwa einem Zehntel, bedeutend geringer.

An dieser Stelle ist nun die angesprochene Differenzierung zu vollziehen. Wie der Terminus „kennen“, so ist auch der Begriff „gearbeitet“ sehr weitläufig und mit Zweifel zu betrachten. Was genau bedeutet es, mit Geogebra „gearbeitet“ zu haben? Die eine Schülerin benutzt Geogebra, um zu zeigen, dass alle Höhenlinien eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Eine weitere Schülerin benutzt Geogebra, um den vorbeigehenden Lehrer glauben zu machen, sie arbeite, obwohl sie im Hintergrund im Internet surft[59]. Daher ist es auch hier mit dieser Ausgangsposition, einem Multiple

[59] „im Internet surfen“- auf diverse Webseiten im Internet zugreifen

Choice Fragebogen, unmöglich, eine exakte Antwort zu geben.
An dieser Stelle wird spezifischer auf die Bedienung von Geogebra eingegangen. Wobei nur 37 Schüler die gewünschten Anforderungen erfüllten,[60] um am zweiten Teil der Umfrage teilzunehmen. Auf diese beziehe ich mich in den nächsten Fragestellungen. Dabei wurde den Schülern die Frage gestellt, ob sie die Benutzung von Geogebra leicht finden, beziehungsweise ob sie die Benutzung des Programmes schnell erlernt haben.



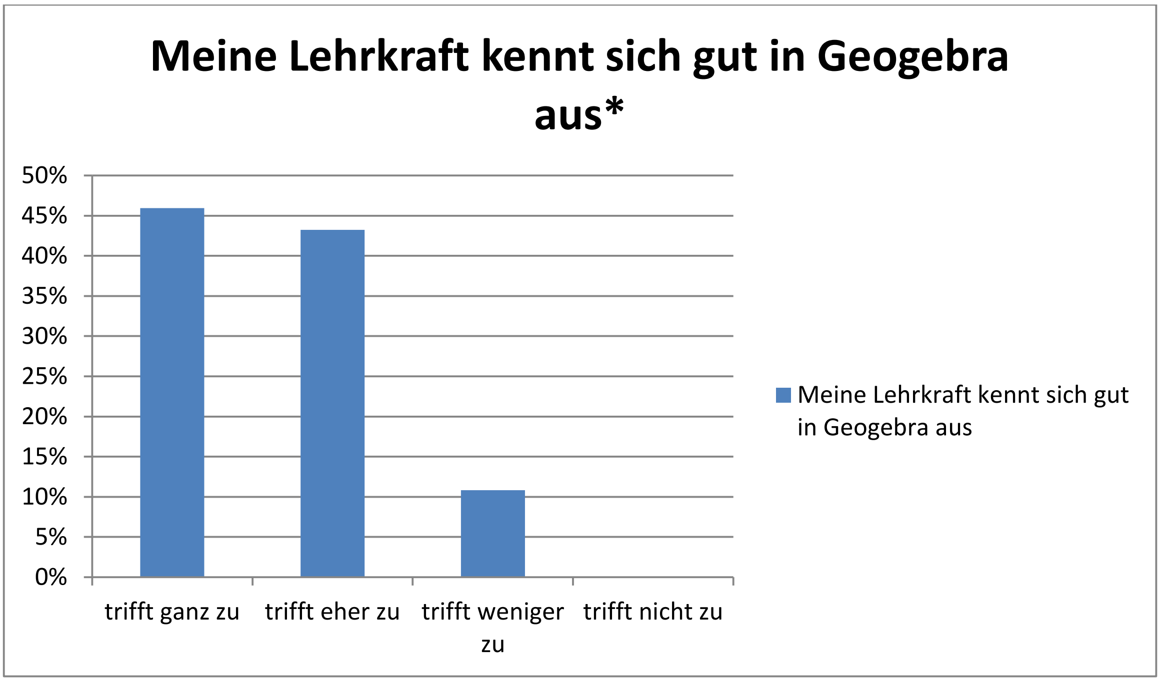
*Angaben in Prozent

Da insgesamt zirka 69% der Schüler ankreuzten, mit der Benutzung von Geogebra sehr gut beziehungsweise gut umgehen zu können, ist dies auf den ersten Blick ein Pluspunkt von Geogebra. Doch es gaben auch knapp 31% an, dass sie Schwierigkeiten bei der Benutzung des Programmes haben. Aus dieser Sicht stellen diese 31% Prozent, also knapp ein Drittel, schon einen großen Teil dar und sind daher auch ein nicht zu unterschätzender Mehraufwand für die Durchführung eines guten verständlichen Unterrichts. Allgemein kann jedoch festgehalten werden, dass die Bedienung von Geogebra auch für schwächere Schüler nach einigen Unterrichtseinheiten erlernbar ist. Denn mit der Aktionsleiste unter der Menüleiste, lässt sich schnell auf das Programm zugreifen. So lässt sich schnell, in der euklidischen/kartesischen Geometrie, die

[60] Siehe Fragebogen

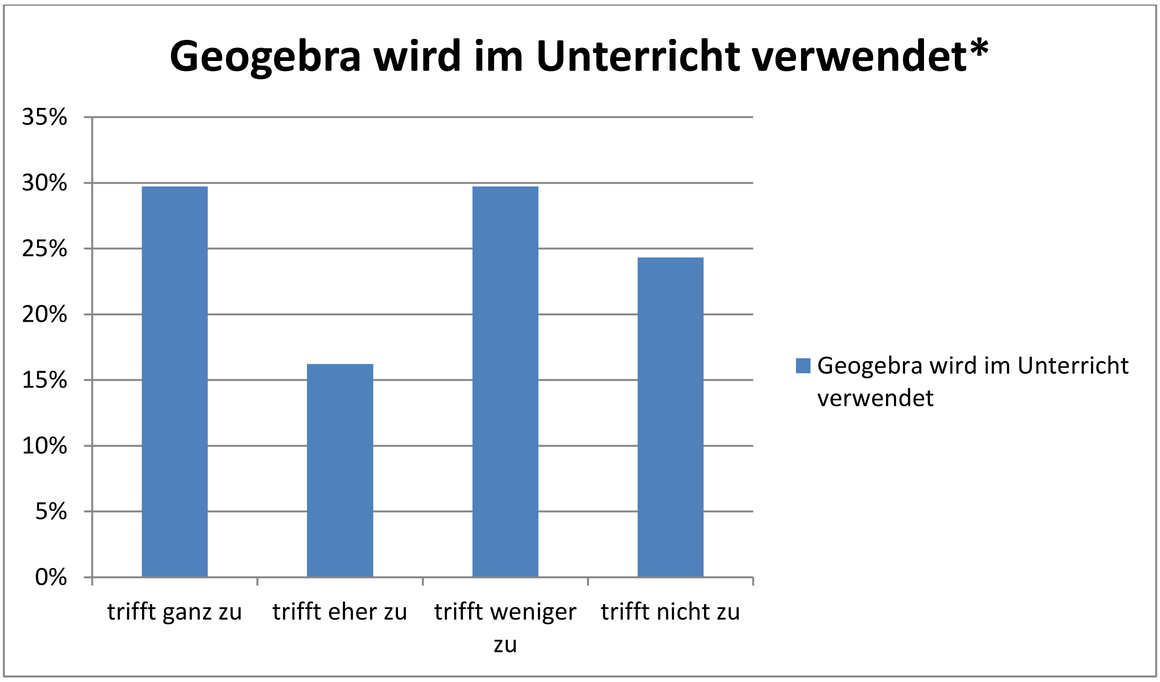
Eulersche Gerade zeichnen, wofür man mit der Befehlsleiste doch länger brauchen würde.

In der Schule ist die Lehrkraft hauptverantwortlich, dass die Schüler etwas lernen. Daher bezog sich die nächste Frage direkt darauf, wie die Schüler die Fähigkeiten der Lehrkraft einschätzen.



*Angaben in Prozent

Knapp 90% der befragten Schüler haben demnach einen guten Eindruck von der Professionalität der Lehrkraft. Man kann daraus schließen, dass das Lehrpersonal gut ausgebildet wurde und dieses Wissen auch den Schülern weitergeben kann. Nur knapp 10% sind vom „Können“ ihrer Lehrerkraft nicht so sehr überzeugt.

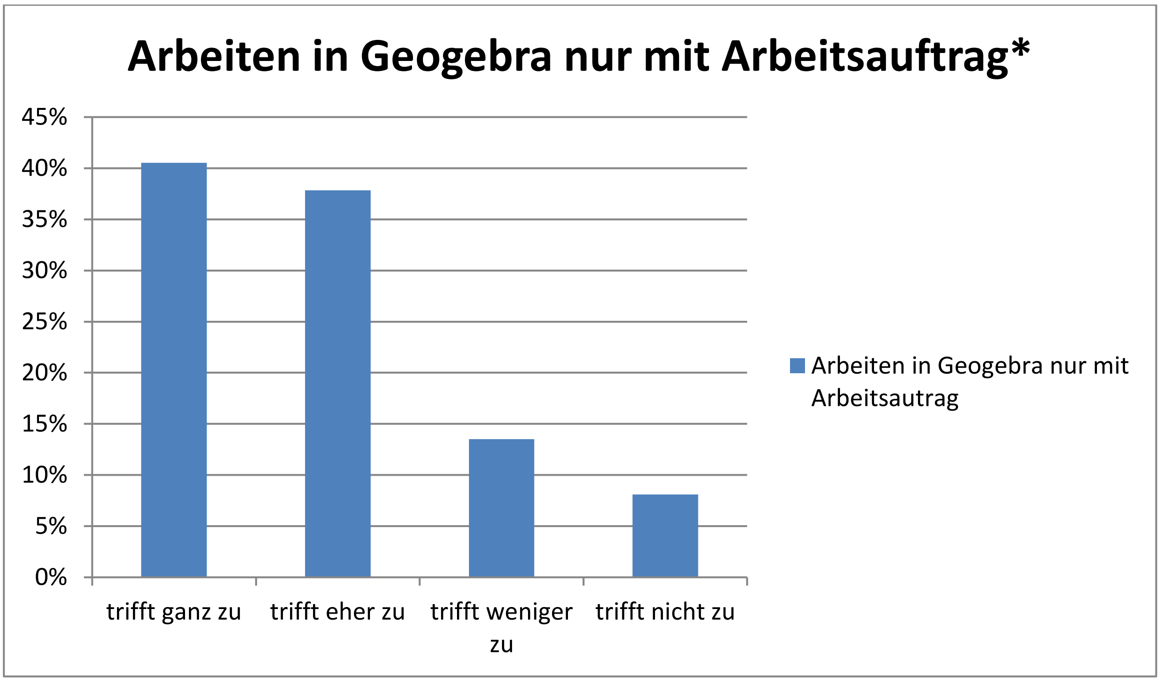


*Angaben in Prozent

Auch wenn die Lehrperson ein großes Fachwissen aufweist, fehlt den Schülern offensichtlich die Übung mit dem Programm selbst. Natürlich wird es immer wieder Schüler geben, die die gleiche Arbeit in kürzerer Zeit schaffen. Doch um alle auf ein gewisses Niveau zu bringen, bedarf es offensichtlich mehr Zeit. Andererseits ist nicht ganz klar, wie die Schüler das Fachwissen der Lehrkraft beurteilt haben. Immerhin gaben fast 25% an, Geogebra nicht im Unterricht zu verwenden. Trotzdem gab es in der vorherigen Statistik[61] niemanden, der angab, dass sich seine Lehrkraft nicht bei Geogebra auskennt.

Die nächste Fragestellung beruht deshalb darauf, wie in Geogebra gearbeitet wird. Denn es ist wichtig zu wissen, wie Geogebra im Unterricht eingesetzt wird. Speziell die Frage, ob Schüler selbst forschend in einem bestimmten Themengebiet arbeiten dürfen oder ob es einen gezielten Arbeitsauftrag abzuarbeiten gibt, wird im nächsten Abschnitt analysiert.

[61] siehe Seite 82



*Angaben in Prozent

Man erkennt deutlich, dass die Mehrheit der Schüler nach einem gezielten Arbeitsauftrag arbeitet. Leider konnte keiner der Schüler solch eine Arbeitsangabe herzeigen, demnach ist nicht wirklich klar, was die Schüler zu erledigen hatten. Denn es macht einen großen Unterschied, wie die Formulierung des Arbeitsauftrages lautet. Dieser Unterschied soll am Beispiel des Höhenschnittpunktes in Dreiecken[62] verdeutlicht werden.

Variante A:

> *„Zeichne ein Dreieck. Zeichne nun auf jede Seitenlänge ihre dazugehörige Höhenlinie ein. Was fällt dir auf?“*

Variante B:

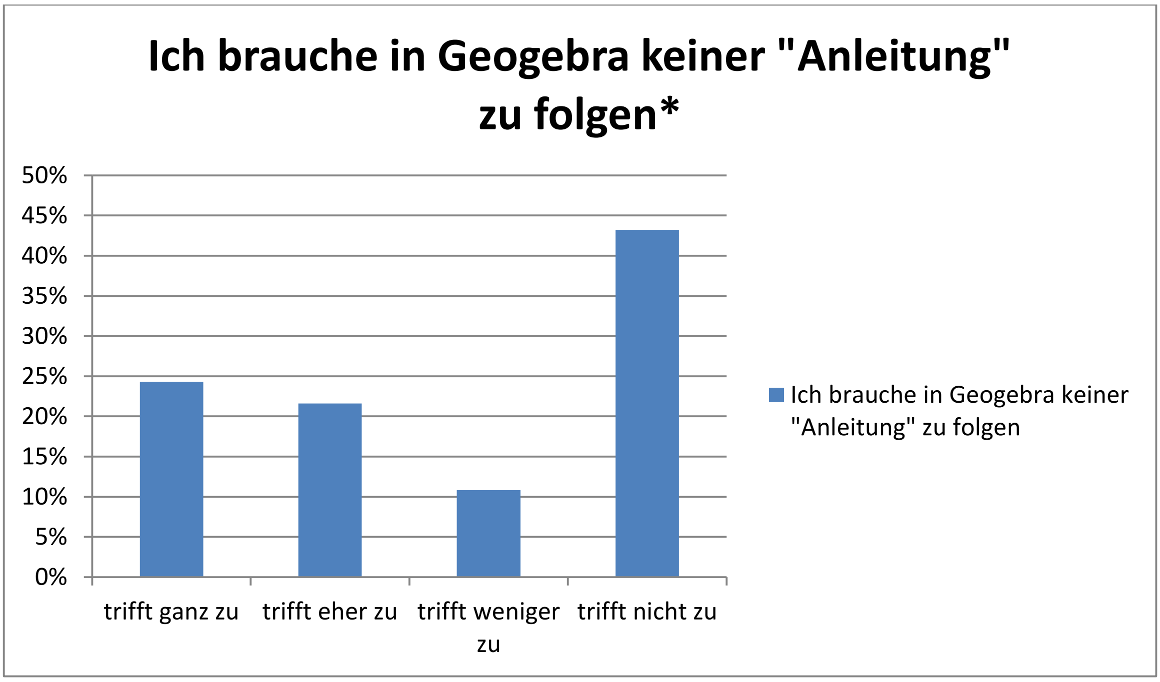
> *„Zeichne ein Dreieck mit folgenden Koordinaten als Eckpunkten. A(1|2), B(4|10), C(5|8).*
> *Beschrifte alle Seitenlängen und zeichne jeweils die Höhenlinien für jede Seitenlänge ein. Anschließend schneide alle Höhenlinien mit der Methode „schneiden.*

[62] vgl. Seite 28

Wenn du alles richtig gemacht hast, erhältst du den Höhenschnittpunkt."

Beide Angaben, Variante A und B, sind Arbeitsaufträge. Der Unterschied liegt aber eindeutig in der Ausführung. Viele große Erziehungswissenschaftler meinten schon, dass es ein Vergehen ist, einem Schüler etwas zu verraten, worauf er von selbst kommen könnte. In dem oben genannten Beispiel wäre es die Existenz eines Höhenschnittpunktes. Somit ist es schwer zu sagen, in welcher Form man Schüler selbstständig mit Geogebra arbeiten lassen sollte.

Die nächste Frage beschäftigt sich damit, ob die Schüler in Geogebra frei arbeiten dürfen und somit keiner Anleitung folgen müssen.



*Angaben in Prozent

Fast die Hälfte der Schüler muss sich anscheinend an eine vorgegebene Struktur halten, um eine Aufgabe zu erfüllen. Aus eigener Unterrichtserfahrung kann man sagen, dass sich die Schüler bei dieser Form des Unterrichts nur bestimmte Schemata merken, ohne zu wissen, was sie tun. Im Mathematikunterricht ist diese Vorgangsweise jedoch fehl am Platz, weil sich Schüler beispielsweise nur die Tippreihenfolge am Taschenrechner merken, aber diese nicht verstehen. Wobei die Schüler nicht die Arbeitsweise des Taschenrechners verstehen sollen, sondern das Zustandekommen der jeweiligen Tippreihenfolge.

Zum Abschluss dieser empirischen Untersuchung wurden die Schüler gefragt, was ihnen besonders an Geogebra gefällt. Repräsentativ werden ein paar Zitate angeführt.

„Es ist alles viel schöner als im eigenen Heft & zeichnet von selber"

„Dass es leicht zu bedienen ist"

„Die Handhabung"

„Einfach zu bedienen, genaueres Arbeiten möglich"

„Das man schöner zeichnen kann."

Es gab aber auch negative Anmerkungen.

„*Unübersichtlich und anfangs kompliziert*"

„*Es ist kompliziert, alle Werkzeuge zu kennen und anzuwenden*"

„*Die Einleitung der Funktionen*"

„*Für was brauch ich das in meinem Leben?*"

Conclusio

In diesem Abschnitt wird ein abschließendes Resümee aus dieser Arbeit gezogen. In den vorangegangen Kapiteln wurde mehrfach aufgezeigt, wie Geogebra momentan verwendet wird, beziehungsweise verwendet werden könnte. Fakt ist, dass die Schüler mit dem Schuljahr 2018/2019 die Mathematik-Matura mithilfe von Technologieeinsatz absolvieren müssen. Daher wird das Erlernen der korrekten Handhabung von elektronischen Hilfsmitteln schon in der Sekundarstufe I relevant sein. Wie die Schüler darauf vorbereitet werden, ist vom Lehrplan noch nicht wirklich festgelegt[63] und das Lehrpersonal befindet sich ebenfalls noch im Ungewissen.

Die Analyse Geogebras und die Erarbeitung dieses Themas hat sehr viel Freude bereitet. Mit dieser Arbeit soll ein Beitrag dazu geleistet werden, dass die Unterrichtsgestaltung für Lehrer der Sekundarstufe I erleichtert wird.

[63] vergleiche S. 38

Zusammenfassung

In den ersten Kapiteln wird der fachdidaktische Hintergrund vorgestellt. Dazu wird auf die didaktischen Prinzipien näher eingegangen. Die Theorien von PIAGET, BRUNNER und KLINGBERG erklären, wie Denkprozesse vonstattengehen. Anhand dieser Theorien wird ein Bezug zu Geogebra hergestellt, um aufzuzeigen, wie man Geogebra richtig „benutzt“, denn die richtige Herangehensweise fördert die Leistung der Schüler.

Als Nächstes werden die gängigen Lerntheorien (Behaviorismus, Kognitivismus, Konstruktivismus) vorgestellt und in Verbindung mit Geogebra gesetzt. Dabei hat sich gezeigt, dass man bei der Arbeit mit Geogebra auf jede dieser Lerntheorien erfolgreich zurückgreifen kann.

Es werden auch die Unterrichtskonzeptionen im Zusammenhang mit Geogebra analysiert. Dabei wird speziell auf den problemorientierten, den genetischen und den zielorientierten Unterricht eingegangen. Auf Basis dieser wird analysiert, in welchen Situationen der Einsatz von Geogebra sinnvoll erscheint. Aufbauend auf diese Ergebnisse folgt das Kapitel „Mathematik Erarbeiten“. In diesem Kapitel werden folgende Unterpunkte behandelt:

- Das Erarbeiten von Begriffen
- Das Erarbeiten von Sachverhalten
- Das Erarbeiten von Verfahren
- Das Anwenden und Modellbilden
- Problemlösen

Auch diese Thematik wird mit der Verwendung von Geogebra analysiert und anhand von Beispielen erklärt.

Im nächsten Teil der Diplomarbeit wird der Lehrplan der AHS Sekundarstufe I aufbereitet, wobei sich der Lehrplan jeder Klasse in vier Kapitel aufteilt, nämlich in folgende:

- Das Arbeiten mit Zahlen und Maßen
- Das Arbeiten mit Variablen

- Das Arbeiten mit Figuren und Körpern
- Das Arbeiten mit Modellen

In allen Klassen wird zu jedem dieser Kapitel anhand der *MatheFit* Schulbücher behandelt, ob es ratsam ist, Geogebra einzusetzen. Zusätzlich werden auch einzelne Beispiele aus dem Schulbuch verwendet und, wenn möglich, mit Geogebra realisiert. Der letzte Teil dieser Diplomarbeit umfasst eine empirische Untersuchung, welche das Ziel, die aktuelle Nutzung von Geogebra in der Sekundarstufe I hat. An dieser Untersuchung nahmen 92 Schüler im Alter von 13 bis 17 Jahren teil. Zum Beispiel hat sich gezeigt, dass Geogebra besonders hilfreich beim Zeichnen sein kann, da die Skizzen meist genauer werden. Vieles, was man bisher ohne Computer zeichnen, berechnen und vorzeigen konnte, kann man nun auch mit technologischer Unterstützung vornehmen.

Das Ergebnis dieser Untersuchung und der Analyse des Lehrplans der Unterstufe, somit der ganzen Diplomarbeit, ist, dass Geogebra nur in manchen Aspekten eine Bereicherung für den Unterricht darstellt. Trotzdem kann unter Berücksichtigung der angesprochenen Schwierigkeiten in den vorangegangen Kapiteln, die Arbeit mit Geogebra im Mathematikunterricht durchaus empfohlen werden.

Literatur

[1] Autor Unbekannt:
http://www.spiegel.de/unispiegel/studium/handschrift-oder-laptop-beim-mitschreiben-lernt-man-besser-a-980263.html
UniSPIEGEL 4/2014 (Stand 29.7.2014)

[2] ZECH Friedrich (1977): Grundkurs Mathematikdidaktik: Theorien der Denkentwicklung S.92-95
Beltz Verlag

[3] BRUNER Jerome (1972): Der Prozess der Erziehung. 2. Auflage
Berlin : Pädagogischer Verlag Schwann

[4] HOHENWARTER Markus (2006): GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht Salzburg 2006

[5] Dr. VOGT Karin, HECHENLEITER Andrea:
http://www-app.uni regensburg.de/Fakultaeten/PKGG/Geschichte/GeschichtsDidaktik/uploads/731225303898.pdf
Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (Stand 3.8.2014)

[6] WINTER Heinrich (1989): Endeckendes Lernen im Mathematikunterricht, Vieweg

[7] ROTH Jürgen, VOLLRATH Hans-Joachim (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts, Spektrum Verlag 2. Auflage

[8] FISCHER Andreas (1995): Computereinsatz im Mathematikunterricht
BI-Wissenschaftsverlag

[9] Österreichischer Lehrplan NMS
https://www.bmbf.gv.at/schulen/recht/erk/bgbla_2012_ii_185_anl1_22513.pdf?4dzi3h
(Stand 31.Juli.2014)

[10] Österreichischer Lehrplan AHS Unterstufe
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2
(Stand 31.Juli.2014)

[11] Österreichischer Lehrplan Hauptschule
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/hs17_881.pdf?4dzgm2
(Stand 31.Juli.2014)

[12] HANISCH Günter, BENISCHEK Isabella, HAUER-TYPPELT Petra, SATTLBERGER Eva: MatheFit 1 SchülerInnenausgabe
VERLAG BESSERES BUCH (2. Auflage 2014)

[13] LEWISCH Ingrid, ZWICKER Thomas, MÜRWALD-SCHEIFINGER Elisabeth, BREUNIG Eva, RIEHS Barbara: Mathematik, verstehen-üben-anwenden 1
VERITAS Verlag (1. Auflage 2010)

[14] Dr. MEIER Andreas: Interaktive Übungen zum Rechnen mit Ganzen Zahlen
http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/Ganze_Zahlen#Die_Ordnung_der_ganzen_Zahlen (Stand 18.8.2014)

[15] HANISCH Günter, BENISCHEK Isabella, HAUER-TYPPELT Petra, SATTLBERGER Eva: MatheFit 2, Lehrer/innenausgabe
VERLAG BESSERES BUCH (1. Auflage 2009)

[16] HANISCH Günter, BENISCHEK Isabella, HAUER-TYPPELT Petra, SATTLBERGER Eva: MatheFit 3, Lehrer/innenausgabe
VERLAG BESSERES BUCH (1. Auflage 2010)

[17] HANISCH Günter, BENISCHEK Isabella, HAUER-TYPPELT Petra, SATTLBERGER Eva: MatheFit 4, Lehrer/innenausgabe
VERLAG BESSERES BUCH (1. Auflage 2011)

[18] LEWISCH Ingrid, ZWICKER Thomas, BREUNIG Eva, RIEHS Barbara: Mathematik, verstehen-üben-anwenden 2
VERITAS Verlag (1. Auflage 2011)

[19] LEWISCH Ingrid, ZWICKER Thomas, BREUNIG Eva, RIEHS Barbara: Mathematik, verstehen-üben-anwenden 3
VERITAS Verlag (2. Auflage 2013)

[20] LEWISCH Ingrid, ZWICKER Thomas, BREUNIG Eva, RIEHS Barbara: Mathematik, verstehen-üben-anwenden 4
VERITAS Verlag (2. Auflage 2014)

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	KRANAWETTER
Vorname:	Werner
Nationalität/Staatsangehörigkeit:	Österreich
Religionsbekenntnis:	römisch-katholisch
Familienstand:	ledig

Schulbildung

1997 – 2001	Volksschule, 2345 Brunn am Gebirge
2001 – 2005	Europahauptschule, 2340 Mödling
2005 – 2009	Oberstufenrealgymnasium, 2700 Wiener Neustadt mit erfolgreichem Abschluss der Reifeprüfung
2010-2015	Studium an der Universität Wien UF Mathematik und Informatik