universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Problemlösen als alternative Unterrichtsmethode - Unter besonderer Berücksichtigung psychologischer und mathematischer Aspekte

Verfasserin

Jasmin Ferstl

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 299
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith

Danksagung

Zunächst möchte ich mich an dieser Stelle bei all jenen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit und durch mein ganzes Studium hindurch unterstützt und motiviert haben.

Danken möchte ich in erster Linie meinem Betreuer, Herrn Professor Raith, der mir nicht nur bei der Themenfindung zur Seite stand. Durch stetiges Feedback und hilfreiche Anmerkungen half er mir, dass sich diese Arbeit Schritt für Schritt weiterentwickelte. Zudem motivierte er mich diese Arbeit mit LaTeX zu erstellen, was sich durchaus gelohnt hat. Vielen lieben Dank für die Zeit und Mühen, die Sie in meine Diplomarbeit investiert haben.

Auch ein besonderer Dank an meinen Vater, der zahlreiche Stunden in die Korrektur meiner Arbeit investiert hat. Zahlreiche Beistriche, Satzstellungen und Rechtschreibfehler wurden dank seiner Hilfe ausgebessert.

Zu guter Letzt möchte ich noch meiner Familie, meinen Freunden und meinem Lebensgefährten danken. Sie haben mich nicht nur während meiner Ausbildung finanziell unterstützt, sondern standen mir auch immer mit Rat und Tat zur Seite.

Vorwort

Probleme und die Art und Weise, wie Menschen versuchen diese zu lösen, fand ich bereits seit meinem Psychologie-Unterricht in meiner Schulzeit interessant. Dies hat mich auch dazu motiviert Psychologie und Philosophie als zweites Fach für mein Lehramtsstudium zu wählen.

Während meiner Studienzeit wurde Problemlösen in den verschiedensten Vorlesungen in Psychologie behandelt, allerdings kam ich erst durch das Seminar *„Problemlösen"*, welches ich beim Herrn Professor Humenberger besuchte, darauf, dass dies auch ein mathematisch relevantes Themengebiet ist. So kam mir der Gedanke, dass Problemlösen ein fächerübergreifendes Themenfeld ist, welches nicht nur in der Psychologie, sondern auch in der Mathematik relevant ist.

Dieser Gedankengang wurde noch dadurch verstärkt, dass in der Vorlesung *„Theorie und Praxis des Lehrens und Lernens"* von Frau Professor Schrittesser verschiedene theoretische Lernansätze behandelte wurden, welche ebenfalls einen Bezug zum Problemlösen hatten.

So kam mir schließlich, nach einem ausführlichen Gespräch mit meinem Betreuer, Herrn Professor Raith, die Idee, meine Diplomarbeit zu diesem Thema zu verfassen. Dadurch war es mir möglich mich nun nicht nur aus psychologischer und mathematischer Perspektive mit diesem Themengebiet auseinanderzusetzen, sondern Problemlösen auch als fruchtbaren Moment des Lernens zu behandeln, welcher eine alternative Unterrichtsmethode darstellt.

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit Problemlösen als alternative Unterrichtsmethode.

Zuerst wird geklärt, was man unter einem Problem versteht, da es darüber verschiedene Ansichten gibt.

Anschließend wird Problemlösen aus psychologischer Sicht beschrieben.

Des Weiteren werden die Stadien des Problemlösens und heuristische Strategien zum Lösen von Problemen erörtert, wobei auf allgemeine, aber auch auf spezielle mathematische Problemlösestrategien eingegangen wird.

In den folgenden beiden Kapiteln wird versucht zu klären, ob der Einsatz von Problemlösen als Unterrichtsmethode sinnvoll und auch realisierbar ist.

Die Arbeit schließt mit konkreten Beispielen, wie Problemlösen im Mathematikunterricht realisiert werden könnte, ab.

Abstract

This dissertation deals with problem solving as an alternative teaching method.

Firstly,a definition of problem solving will be given as there are various views about it.

It will be then described from a psychological view.

Furthermore the stages as well as heuristic strategies for problem solving will be discussed whereas general and specific mathematical problem solving strategies will be examined in more detail.

The following two chapters try to show if the use of problem solving as teaching method is reasonable and to realize.

Finally examples to demonstrate how problem solving strategies during mathematic lessons can be realized are given.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **IV**

Kurzfassung **V**

Abstract **VI**

1 Was ist ein Problem **1**

1.1 Definition von einem Problem und Problemlösen 1

1.2 Komplexe Probleme 3

1.3 Problemlösen im Mathematikunterricht 5

1.3.1 Problemlösen nach George Polya 5

1.3.2 Fachdidaktische Perspektive 8

1.3.3 Problemorientiertes Lernen 12

1.3.4 Differenzierung zwischen Routineaufgaben und Problemaufgaben 14

1.4 Klassifikation von Problemen 16

1.5 Eigene Ansicht über Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht 19

2 Denkpsychologie **21**

2.1 Verhältnis von Denken und Problemlösen 21

2.2 Historische Wurzeln der Denkpsychologie 23

2.3 Strategien des Problemlösens in verschiedenen psychologischen Paradigmen 25

2.3.1 Behavioristische Ansätze - Assoziationstheorien . . 25

2.3.2 Kognitivistische Ansätze - Einsicht und Informationsverarbeitung . . . 29
2.3.3 Subjektwissenschaftliche Ansätze . . . 36
2.4 Eigene Auffassung des Problemlösens aus psychologischer Sicht . . . 40

3 Stadien des Problemlösens 41
3.1 Einteilung nach Wallas . . . 41
3.2 Einteilung nach Polya . . . 42

4 Heuristische Strategien 46
4.1 Einteilung von heuristischen Strategien . . . 46
4.2 Grundlegende Problemlösestrategien . . . 47
4.2.1 Ein Gefühl für das Problem bekommen . . . 47
4.2.2 Ähnliches oder einfacheres Problem . . . 54
4.2.3 Vorwärtsarbeiten . . . 54
4.2.4 Rückwärtsarbeiten . . . 55
4.2.5 Schrittweises Vorarbeiten . . . 58
4.2.6 Modularisieren . . . 62
4.2.7 Muster erkennen . . . 63
4.2.8 Einführen geeigneter Begriffe und Notationen . . . 65
4.2.9 Verallgemeinerungen/ Generalisierung . . . 66
4.3 Spezielle mathematische Problemlösestrategien . . . 67
4.3.1 Rekursion . . . 67
4.3.2 Vollständige Induktion . . . 71
4.3.3 Schubfachprinzip . . . 75
4.3.4 Extremalprinzip . . . 80
4.3.5 La Descente Infinie - der unendliche Abstieg . . . 85
4.3.6 Invarianzprinzip . . . 86
4.3.7 Abzählen . . . 88
4.3.8 Symmetrieprinzip/Symmetriezerstörung . . . 93
4.3.9 Systematisches Probieren . . . 94

4.3.10 Logik 94
4.3.11 Beweise 100

5 Gründe für den Einsatz von Problemlösen als Unterrichtsmethode 105

5.1 Motivation, Emotion und Interesse 105
5.2 Problemlösen als Grundmuster der mathematischen Arbeitsweise 106
5.3 Problemlösen in Bildungsstandards und Lehrplänen 108
5.4 Problemlösen als Beitrag zum besseren Weltverständnis . . 112

6 Ist Problemlösen lernbar und daher auch lehrbar? 116

6.1 Wie lehrt man Problemlösen? 116
6.2 Wie lernt man Problemlösen? 122

7 Problemlösen im Mathematikunterricht 125

7.1 Derzeitige Realität im Mathematikunterricht 125
7.2 Mögliche Schwierigkeiten bei der Umsetzbarkeit im Unterricht 127
7.3 Wie könnte Problemlösen im Mathematikunterricht aussehen? 128
7.3.1 Problemlösen in der 5.Schulstufe 131
7.3.2 Problemlösen in der 6.Schulstufe 134
7.3.3 Problemlösen in der 7./8. Schulstufe 138
7.3.4 Problemlösen in der 8./9. Schulstufe 142

Conclusio 148

Literaturverzeichnis 149

Abbildungsverzeichnis 154

Tabellenverzeichnis 155

Lebenslauf 156

1 Was ist ein Problem

In diesem Kapitel geht es darum, herauszufinden was man ganz allgemein unter einem Problem und somit unter Problemlösen versteht. In diesem Zusammenhang soll auch geklärt werden, welche Charakteristik reale Probleme aufweisen. Des Weiteren soll besonders geklärt werden, was man unter einem Problem und somit unter Problemlösen im Mathematikunterricht versteht. Dabei wird auf das problemorientierte Lernen und einem problemorientierten Mathematikunterricht genauer eingegangen. Auch die Unterscheidung zwischen Routine- und Problemlöseaufgaben wird behandelt. Anschließend folgt ein Versuch, die verschiedenen Arten von Problemen zu unterteilen. Das Kapitel schließt mit meiner eigenen Ansicht über Problemlösen ab.

1.1 Definition von einem Problem und Problemlösen

> „*Ein Individuum steht einem Problem gegenüber, wenn es sich in einem inneren oder äußeren Zustand befindet, den es aus irgendwelchen Gründen nicht für wünschenswert hält, aber im Moment nicht über die Mittel verfügt, um den unerwünschten Zustand in den wünschenswerten Zielzustand zu überführen*“ (Dörner 1976, 10).

> „*Problemlösendes Denken erfolgt, um Lücken in einem Handlungsplan zu füllen, der nicht routinemäßig eingesetzt werden kann. Dazu wird eine gedankliche Repräsentation erstellt, die den Weg vom Ausgangs- zum Zielzustand überbrückt*“ (Funke 2003, 25).

Es gibt viele verschiedene Definitionen von dem Begriff „*Problem*“. Diesen allen gemeinsam ist, dass ein Problem bestimmte Merkmale aufweist. (Vgl. Mayer 1979, 4)

Zunächst gibt es einen *Ausgangszustand*, auch oft als Ist-Zustand bezeichnet. Dieser beinhaltet gewisse Bedingungen, Objekte, Informationsbruchstücke und vieles mehr. Dieser soll in einen *Zielzustand*, auch Soll-Zustand genannt, übergeführt werden. Für diese Transformation ist Denken erforderlich. Jedoch ist es nicht möglich den Ausgangszustand direkt in den Zielzustand überzuführen, da es *Hindernisse* gibt. (Vgl. Mayer 1979, 4f)

Als *Problemlösen* wird hierbei die Überführung des Ausgangszustandes in den Zielzustand verstanden, durch Überwindung der Hindernisse (vgl. ebd., 7).

Durch diese simple Erklärung, in der ein Ausgangszustand in einen Zielzustand überführt werden soll, erscheint die Frage, worin hier überhaupt das Problem besteht. Daher sei kurz angemerkt, dass zum einen der Ausgangszustand nur selten überschaubar und daher nur begrenzt beschreibbar ist, wodurch sich wiederum die Frage stellt, welche Voraussetzungen angenommen werden können, zum anderen ist der Zielzustand ebenso oft unpräzise, wodurch man eher von einer Optimierung als von einer Lösung des Problems sprechen sollte. Auch die Diskussion über die zu verwendenden Mittel zur Erreichung eines Ziels, hängt stark von der Zielformulierung ab, die, wie schon erwähnt, oft sehr abstrakt und unscharf ist. (Vgl. Funke 2003, 14f)

Die erste Definition von Problemlösen nach Dörner ist noch sehr allgemein gehalten und enthält so gut wie keine Einschränkungen. Aus diesem Grund könnte in diesem Sinne alles Mögliche ein Problem darstellen, wichtig ist hierbei nur, dass die Aufgabe für die betreffende Person, subjektiv empfundene Schwierigkeiten enthält. Jedoch ist diese Definition nicht besonders zweckmäßig, da ansonsten sehr viele Aufgaben, welche im Mathematikunterricht behandelt werden, als Probleme charakterisiert werden könnten. Die zweite Definition von Funke scheint schon um einiges besser zu sein, da diese alle Aufgaben ausschließt, welche durch routinemäßige Abläufe gelöst werden können.

1.2 Komplexe Probleme

Aufgrund der Tatsache, dass es zwischen den einfachen Problemen, welche in den meisten Untersuchungen zum Denken und Problemlösen verwendet wurden, und real gegebenen Problemen, wie etwa dem Problem der Überbevölkerung, prinzipielle Unterschiede gibt, konnte man nur selten die gewonnenen Erkenntnisse verallgemeinern. Einfache Probleme entsprechen nicht im geringsten den vielen alltäglichen Problemen, welche von einer ganz anderen Natur zu sein scheinen. Aufgrund dieser Feststellungen entstand ein neuer Forschungszweig, welcher sich mit sogenannten komplexen Problemen beschäftigte. In diesem wurden die Versuchspersonen in eine Art Rollenspiel versetzt, wobei mittels Computerprogrammen der jeweilige Gegenstandsbereich sehr realitätsnah simuliert wurde. (Vgl. Funke 2003, 125f).

Laut Funke (2003, 126-135) sind komplexe Probleme durch folgende Kennzeichen charakterisiert:

- *Komplexität:* Darunter versteht man, dass die Problemsituation viele verschiedene Variablen enthält. Dies verlangt von der problemlösenden Person die Reduktion auf das Wesentliche.
- *Vernetztheit:* Dieser strukturelle Aspekt bedeutet, dass die Variablen miteinander verbunden sind, und es sich daher um ein System handelt. Aus diesem Grund wird Modellbildung, um wechselseitige Abhängigkeiten sichtbar zu machen, notwendig.

- *Dynamik:* Die meisten komplexen Probleme besitzen eine Eigendynamik, sie verändern sich daher auch ohne Zutun des Problemlösers. Durch diesen prozessualen Aspekt muss auch immer der Zeitfaktor miteinbezogen werden. Dies verlangt eine gute Voraussicht und die Bildung von Prognosen.

- *Intransparenz:* In den meisten Fällen sind nicht alle Informationen direkt zugänglich. Aufgrund der unvollständigen Informationen bekommt man auch nur eine unvollständige Repräsentation des Problems. Es gilt sich aktiv Informationen zu beschaffen.

- *Polytelie:* Meistens hat man es nicht nur mit einem Ziel, sondern mit vielen verschiedenen, oft auch sich widersprechenden Zielen zu tun. Aus diesem Grund muss man abwägen, eine Balance finden und eventuell auch Kompromisse eingehen.

Ein viel beschriebenes Experiment zum komplexen Problemlösen ist das realitätsnahe **LOHHAUSEN -Szenario** von Dörner. Bei dieser Simulation ging es um die Nachbildung einer Kleinstadt namens „Lohhausen“, wobei die Versuchspersonen hierbei die Rolle des Bürgermeisters einnahmen und sich um das Wohlergehen der Stadt zu kümmern hatten. Es wurde dabei versucht die Situation möglichst wirklichkeitsgetreu nachzubilden, sodass eine Vielzahl an Variablen verwendet wurde und zudem das Szenario noch während der Bearbeitung erweitert wurde. Die Versuchspersonen waren hierbei Studenten, daher Laien, welche ohne jegliche Vorbereitungszeit Führungsaufgaben übernehmen mussten. (Vgl. ebd., 146ff)

Es hat sich gezeigt, dass gute Versuchspersonen unter anderem mehr Entscheidungen getroffen haben und bei ihren Entscheidungsabsichten auch immer mehrere Aspekte gleichzeitig beachteten. Daher wurde bei ihnen nicht nur ein Ziel verfolgt, sondern gleich mehrere, da sie erkannten, wie alles zusammenhängt. Zudem erkannten sie die wesentlichen Probleme von Anfang an und beschäftigten sich damit sofort, während die schlechten

Versuchspersonen mehr dazu neigten, die Probleme, welche sie nicht sofort lösen konnten, von sich zu schieben. Interessanterweise hat sich gezeigt, dass Intelligenz kein Merkmal für Erfolg war, sondern dass sich dieser eher aus den Persönlichkeitsmerkmalen der Versuchspersonen ergab. (Vgl. Dörner 1989, 32-46)

Auch wenn diese komplexen Probleme sehr realitätsnah sind, und man dadurch sehr viele interessante Erkenntnisse gewonnen hat, wie Personen in schwierigen Situationen handeln und welche Fehler sie dabei machen, so sind sie kaum für den Unterricht geeignet. Aufgrund der Komplexität ist ein hoher Zeitaufwand notwendig, wodurch die Brauchbarkeit für schulische Zwecke eher gering ist. Möglicherweise kann man sie, je nachdem wie ausgeprägt die einzelnen Merkmale sind, nur beschränkt und in einer stark vereinfachten Form im Unterricht behandeln, sodass man sie wieder zu einfachen Problemen macht.

1.3 Problemlösen im Mathematikunterricht

1.3.1 Problemlösen nach George Polya

Mathematisches Problemlösen wurde vor allem durch Polya geprägt (vgl. Link 2011, 11), sodass er nicht selten als *„einer der Urväter des mathematischen Problemlösens“* (Bruder und Collet 2011, 18) bezeichnet wird.

Dieser verwendet jedoch selbst kaum den Begriff „*Problem*“, sondern schreibt hierfür meist „*Aufgabe*“. Dennoch soll hierbei unter einer Aufgabe das verstanden werden, was in dieser Arbeit als „*Problem*“, als „*Problemaufgabe*“bzw. als „*Problemlöseaufgabe*“dargestellt wird.

Nach Polya (1966) wird unter Problemlösen folgendes verstanden:

> *„Eine Aufgabe lösen heißt, einen Ausweg aus einer Schwierig-*

> *keit finden, einen Weg um ein Hindernis herum entdecken, ein Ziel erreichen, das nicht unmittelbar erreichbar war“* (Polya 1966, 9).

Auch diese Beschreibung von Problemlösen ist nicht besonders präzise, entspricht jedoch den allgemeinen Definitionen, welche gleich zu Beginn genannt wurden. Polya (1966) führt seine Überlegungen noch etwas deutlicher aus, indem er beschreibt, was es bedeutet ein Problem zu haben:

> *„[...] bewußt [!] nach einer Handlungsweise suchen, die dazu angetan ist, ein klar erfaßtes [!], aber nicht unmittelbar erreichbares Ziel zu erreichen“* (Polya 1966, 173).

Problemlösen wäre demnach die Entdeckung einer solchen Handlungsweise (vgl. Polya 1966, 173). Diese Formulierung ist zwar auch noch nicht besonders exakt, jedoch wird dadurch deutlich, dass seiner Ansicht nach Problemlöseaufgaben immer ein klar formuliertes Ziel enthalten sollten.

Immerhin versucht Polya (1966) Problemlöseaufgaben noch etwas exakter zu definieren, indem er diese von Routineaufgaben abgrenzt. So schreibt er, dass Problemlöseaufgaben *„[...] einen gewissen Grad von Unabhängigkeit, Urteilsfähigkeit, Einsicht, Originalität und schöpferische Tätigkeit verlangen“* (Polya 1966, 12).

Zudem wird Problemlösen als eine „praktische Kunst“angesehen, die man entweder durch Übung oder durch Nachahmung erlernen kann (vgl. Polya 1966, 9).

Polya (1995) schlägt zudem folgenden Lösungsplan für Probleme vor:

Tabelle 1.1: Problemlöseplan, nach: Polya 1995, Klappentext

Problemlöseschritte	Problemlösen
Erstens: Du musst die Aufgabe *verstehen*	VERSTEHEN DER AUFGABE • *Was ist unbekannt?* • *Was ist gegeben?* • *Wie lautet die Bedingung?*
Zweitens: Zusammenhänge suchen, Hilfsaufgaben betrachten, *Plan* der Lösung erhalten	AUSDENKEN EINES PLANES • *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* • *Betrachte die Unbekannte!* • *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst du sie gebrauchen?*
Drittens: *Führe* Deinen Plan aus	AUSFÜHREN DES PLANES • *Kontrolliere jeden Schritt.* • Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? • Kannst Du beweisen, dass er richtig ist?
Viertens: *Prüfe* die erhaltene Lösung	RÜCKSCHAU • Kannst Du das *Resultat kontrollieren?* Kannst Du den Beweis kontrollieren? • Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst du es auf den ersten Blick sehen? • Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

Dieses schematische Vorgehen soll dabei behilflich sein eine Lösung zu finden. Dennoch bleibt es ungeklärt, inwiefern diese Anleitung zum Lösen von Problemen für die Umsetzbarkeit im Mathematikunterricht nützlich ist (vgl. Link 2011, 13).

1.3.2 Fachdidaktische Perspektive

Nicht nur in der Denkpsychologie gibt es keine Einigkeit darüber, was man unter Problemlösen versteht, sonder auch in der Didaktik der Mathematik. Im folgenden werden verschiedene, aber auch zum Teil sehr ähnliche Ansätze zum Problemlösen im Mathematikunterricht dargestellt.

So wird zum Beispiel aus fachdidaktischer Perspektive unter Problemlösen folgendes verstanden:

> *„Unter einem Problem versteht man in der Mathematik eine Aufgabe, die es zu lösen gilt, bei der eine Lösung allerdings nicht offensichtlich ist. Problemlösen bedeutet also insbesondere die intensive Beschäftigung mit einer Aufgabe, ohne dass von Anfang an klar ist, welche Mechanismen, Algorithmen, Inhalte oder Sätze zum Erfolg führen"* (Reiss und Hammer 2013, 56).

Nach dieser Auffassung ist es nicht primär von der Aufgabenstellung abhängig, was ein Problem darstellt. Dies hängt viel mehr von der Person ab, welche die Aufgabe lösen möchte. Was dem einen Probleme bereitet, kann für jemand anderen ein Klacks sein. Zudem wird man ein Problem, dessen Lösungsweg man bereits gesehen hat, auch nicht mehr als ein solches bezeichnen. (Vgl. Reiss und Hammer 2013, 57)

Eine sehr ähnliche Ansicht haben Bruder und Collet (2011), sie verstehen unter einem Problem folgendes:

> *„Ein **Problem** im Mathematikunterricht soll eine Anforderungssituation bezeichnen, die subjektiv als (kognitiv) schwierig erlebt wird"* (Bruder und Collet 2011, 11).

Nach dieser Definition müsste jede Aufgabenstellung vom lernenden Subjekt her betrachtet werden, um festzustellen, ob es sich um eine Routine- oder Problemlöseaufgabe handelt. Dies erfordert von der Lehrkraft, um eine geeignete Aufgabe auszuwählen, entsprechende Kenntnisse über den

Wissensstand ihrer Schülerinnen und Schüler.

Nun könnten, nach dieser Definition, natürlich auch Routineaufgaben individuelle Schwierigkeiten enthalten, jedoch sollte bei diesen, im Gegensatz zu Problemlöseaufgaben, das schematische Vorgehen prinzipiell klar sein (vgl. Bruder und Collet 2011, 143).

Um entscheiden zu können, inwiefern eine Aufgabe Problemlösecharakter hat oder nicht, nennen Bruder und Collet (2011, 13f) folgende vier Parameter:

- *Formalisierungsgrad F:* Schwierigkeitsgrad beim Erfassen und Verstehen der Aufgabe, Mathematisierung ist eventuell notwendig.
- *Komplexitätsgrad K*: Schwierigkeitsgrad bezüglich der kognitiven Anforderungen der Aufgabe.
- *Bekanntheitsgrad B:* Schwierigkeitsgrad, welcher von den subjektiven Erfahrungen und Kenntnissen des Aufgabenbearbeiters abhängig ist.
- *Ausführungsaufwand A:* Schwierigkeitsgrad bei der Darstellung der Lösung.

Diese Orientierungshilfe finde ich nicht besonders hilfreich. Zum einen denke ich nicht, dass es durch diese Merkmale objektiv möglich ist, eine Aufgabe als Problemlöseaufgabe zu identifizieren, da der Parameter B nur subjektiv verstanden werden kann, zum anderen wird auch nicht deutlich genug erklärt, in welchen Ausmaß diese Parameter vorhanden sein sollen, sodass es auch tatsächlich eine Problemlöseaufgabe ist.

Büchter und Leuders (2005) gehen bei ihrer Formulierung genauer auf den Aufforderungscharakter von Problemlöseaufgaben ein:

> *„Eine **Problemlöseaufgabe** (auch kurz: ein Problem) ist die Aufforderung, eine Lösung zu finden, ohne dass ein passendes*

> *Lösungsverfahren auf der Hand liegt"* (Büchter und Leuders 2005, 28).

Problemlösen beginnt nach dieser Auffassung immer dann, wenn man entweder ein passendes Lösungsverfahren auswählen, einen neuen Lösungsansatz erst entwickeln muss oder bei der Kombination und Modifikation von bekannten Methoden auf die aktuelle Aufgabenstellung. Problemlösen wird somit auch hier als ein kreativer Prozess bezeichnet, welcher aber immer mit Transferleistungen einhergeht. (Vgl. Büchter und Leuders 2005, 28)

Auch nach dieser Sichtweise spielen die Fähigkeiten und Fertigkeiten des Problemlösers eine wichtige Rolle um zu entscheiden, ob es eine Problemlöseaufgabe ist oder nicht, aber auch andere Aspekte sind relevant. So wird vor allem die Offenheit der Aufgabenstellung als relevantes Merkmal angegeben. Durch diese soll den Schülerinnen und Schülern überhaupt erst die Möglichkeit zum problemlösenden Denken gegeben werden. Es muss daher generell möglich sein verschiedene Lösungswege und Ansätze zu entwickeln. (Vgl. Büchter und Leuders 2005, 29f; Leuders 2003, 125)

Des Weiteren wird Problemlösen auch vom Modellieren abgegrenzt, indem man unter Problemlösen das „*Arbeiten in innermathematischen Situationen*"(Büchter und Leuders 2005, 31) bezeichnet. Damit wird aber nicht ausgeschlossen, dass Problemlösen durchaus beim Modellieren auftreten kann. (Vgl. Büchter und Leuders 2005, 30f)

Dennoch sei hier kurz angemerkt, dass bis jetzt die Darlegungen nur einen deskriptiven Charakter hatten und noch nichts darüber gesagt wurde, wie man zu „guten"Problemen für das Problemlösen im Mathematikunterricht kommt. Leuders (2003) schlägt diesbezüglich folgende vier Kriterien vor, welche aber nicht unbedingt alle gleichzeitig erfüllt sein müssen.

> „
>
> 1. *Ein Problem führt auf allgemeinere **mathematischen Ideen***

und macht übergreifende Zusammenhänge verständlich. Dabei macht es gegebenenfalls neue Begriffsbildung nötig und zugleich einsichtig.

2. *Ein Problem gibt Anlass zu **divergentem** Arbeiten und individuellen Erkundungen. Dabei sollte es vor allem unterschiedliche Ansätze - auch auf unterschiedlichem Niveau - erlauben.*
3. *Ein Problem bietet einen (inner- oder außermathematischen) **Kontext** für ein mathematisches Konzept. Dabei sollte es vor allem **leicht zugänglich** sein, die Problemsituation muss den Lernenden unmittelbar verständlich sein.*
4. *Ein Problem besteht aus einer Situation, in der Schülerinnen und Schüler erst die **Strategien selbst entwickeln** müssen. Dabei können sie aus vorhandenen Kenntnissen schöpfen und diese neu kombinieren“*

(Leuders 2003, 123).

Diese Idee, Problemlöseaufgaben nicht nur vom lösenden Individuum zu bestimmen, sondern auch von der Art der Aufgabenstellung, wird von Link (2011) übernommen, indem sie selbst ein zweidimensionales Modell zur Bestimmung von Problemlöseaufgaben vorschlägt.

„

1. Charakterisierung eines mathematischen Problems in Hinblick auf die Beurteilung der Aufgabe
   a) *Ein Problem kann über verschiedene Lösungswege sinnvoll bearbeitet werden.*
   b) *Ein Problem ist innermathematisch gestellt und mathematisch substantiell.*
2. Charakterisierung eines mathematischen Problems in Hinblick des Einsatzes der Aufgabe in Bezug auf eine Bearbeitergruppe
   a) *Ein Problem ist leicht verständlich.*

b) Ein mathematisches Problem stellt für die Schülerinnen und Schüler die Aufforderung dar, eine Lösung zu finden, ohne dass ein passendes Lösungsverfahren auf der Hand liegt.

c) Schülerinnen und Schüler können durch das Arbeiten an dem Problem ihre mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten erweitern"

(Link 2011, 41f).

In dieser schon sehr ausführlichen Darlegung des Wesens von Problemlöseaufgaben kommen zu den bereits genannten Kriterien noch ein paar hinzu. So ist bei der Darlegung der Aufgabe nicht nur wichtig, dass sie offen und innermathematisch gestellt ist, sondern auch, dass sie substantiell für die Mathematik ist, daher zu allgemeinen mathematischen Ideen führt (vgl. Leuders 2003, 123). Bezüglich des Blickwinkels auf das lösende Individuum wird auch ausführlich betont, dass durch das Lösen dieses Problems ein Erkenntniswert für die Schülerinnen und Schüler bestehen soll.

1.3.3 Problemorientiertes Lernen

Unter *problemorientiertem Lernen* versteht man Lernen, dass durch ein Problem ausgelöst wird. Wird dadurch noch neues Wissen generiert, indem die Lernenden sich selbständig mit dem Problem befassen, so entspricht dies den Anschauungen des entdeckenden Lernens. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 61)

Um problemorientiertes Lernen fruchtbar im Unterricht einzusetzen, müssen einige Bedingungen beachtet werden. Zunächst müssen die mathematischen Probleme von den Schülerinnen und Schülern verstanden werden. Verstehen setzt jedoch Fachwissen voraus, welches entweder vorhanden oder von der Lehrkraft bereitgestellt werden muss. Auch für das Auffinden der Lösung wird sowohl Wissen als auch Erfahrung benötigt. Zudem sollte das zu behandelnde Problem einen Erkenntniswert enthalten. Die

Schwierigkeit oder das Endergebnis des Problems ist hierfür kein Prädikat, sondern dieses ergibt sich meist aus dem Lösungsweg. Diese gewonnene Erkenntnis gilt es zudem explizit zu machen. Des Weiteren sollte ein Zusammenhang zu anderen Unterrichtsthemen bestehen. Man bedenke dabei, dass Probleme meistens weitere Probleme erzeugen. Um daher nicht bei diesem längerfristigen Lernen den „roten Faden“zu verlieren, ist es sinnvoll einen Anknüpfungspunkt zu finden. Offene Fragestellungen erweisen sich zum Hinführen zu Problemen als besonders geeignet. Schließlich steht noch die Selbständigkeit der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund. Aus diesem Grund sollte die Lehrperson Lösungshinweise so weit wie nur möglich vermeiden, sodass die Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Erfahrungen beim Lösen von Problemen machen können. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 62ff)

Die Forderung den Unterricht vorwiegend an Problemen zu orientieren, bezeichnet man als *„Prinzip der Problemorientierung“*, wobei hier nur Probleme mit einer richtungweisenden Funktion gemeint sind. Unter *richtungweisenden Problemen* versteht man jene Problemtypen, welche den Unterricht eine bestimmte Richtung geben können. Hierbei kann man zwischen richtungweisenden Problemen für den gesamten Lehrgang und jenen, welche nur für bestimmte Themen vorgesehen sind, unterscheiden. (Vgl. ebd., 118f)

Unter einem *problemorientierten Mathematikunterricht* versteht man daher einen Unterricht, *„[...] der seine wesentlichen Impulse aus* richtungweisenden *Problemstellungen erhält, die geeignet sind,* mathematisches Denken *in Gang zu setzen und zu neuer* mathematischer Erkenntnis *zu führen“* (ebd., 119). Unter Problemen versteht man in diesem Zusammenhang entweder offene Fragen oder auch Probleme im engeren Sinn (vgl. ebd., 119).

Nach dieser Auffassung wird die Behandlung von Problemen im Unterricht zu einer speziellen Art des Lernens. Problemlöseaufgaben sollten zur

Aneignung von Wissen und Verständnis beitragen. Ein Bezug zu anderen mathematisch relevanten Fragestellungen ist wünschenswert. Ein Problem sollte daher nicht nur isoliert betrachtet werden, sondern ist in die relevante Unterrichtsthematik einzubetten.

Auch wenn eine problemorientierte Unterrichtsgestaltung nicht als identisch mit dem Konzept des Problemlösens angesehen wird (vgl. Bruder und Collet 2011, 15), so werde ich diese beiden Konzepte in dieser Arbeit im weitesten Sinne synonym behandeln, aufgrund der Tatsache, dass sie meines Erachtens nach die selben zentralen Standpunkte besitzen.

1.3.4 Differenzierung zwischen Routineaufgaben und Problemaufgaben

Aufgrund der Tatsache, dass es primär vom Problemlöser abhängig ist, ob eine bestimmte Aufgabe als Problem aufgefasst wird oder nicht, schlägt Haas (2000) eine genauere Charakterisierung von Problemlöseaufgaben vor, sodass sich diese in wesentlichen Punkten von sogenannten Routineaufgaben unterscheiden.

Tabelle 1.2: Routineaufgaben vs. Problemaufgabe, aus: Haas 2000, 7

Routineaufgabe	Problemaufgabe
• entschlüsselbar als Aufgabe eines bestimmten Typs • Abruf einer verfügbaren Lösungsprozedur möglich • formales bis ritualhaftes Abarbeiten der gespeicherten Prozedur möglich • Erfolg auch ohne Verständnis möglich • provoziert i. A. nicht zum Weiterdenken, Fortspinnen; wirkt abgeschlossen	• Eine ‚Barriere' verhindert das Entschlüsseln, die Aufgabe ist offen, mehrdeutig • Suche nach einem Lösungsweg notwendig; man benötigt Einfälle, andere Sichtweisen, neuartige Verbindungen der Wissensbestände • Inhaltliches Denken ist unverzichtbar zur Konstruktion eines Lösungsweges • ohne Verständnis kein Erfolg möglich • provoziert zum Weiterdenken, Variieren, Ausbauen; wirkt offen

Nach dieser Auffassung, wird eine Routineaufgabe vor allem dadurch charakterisiert, dass man sie zu einem bestimmten Aufgabentyp zuordnen kann. Dies deutet bereits an, dass man schon ähnliche Aufgaben gelöst hat, sodass man über die nötigen Verfahren verfügt um auch diese Aufgabe, ohne besondere Schwierigkeiten, zu lösen.

Ein Problem soll eben nicht nur eine Barriere enthalten, sondern auch noch offen bzw. mehrdeutig sein soll. Dies bedeutet eben, dass die Lösung nicht sofort einsichtig sein soll und es zudem auch verschiedene Lösungsansätze geben soll. Dadurch wird selbstverständlich auch die aktive Suche nach einem Lösungsweg erforderlich, wobei diese Aspekte schon bei den vorangegangen Definitionen erwähnt wurden.

Auch die Notwendigkeit des inhaltlichen Denkens ist kein neuer Aspekt, da dieser stark mit der Aufforderung nach Verständnis verknüpft ist. Könnte man eine Aufgabe, ohne sich mit dieser tiefergehender zu beschäftigen, einfach mit bekannten Verfahren lösen, so würde es sich um eine Routineaufgabe, und eben nicht um eine Problemlöseaufgabe handeln.

Des Weiteren ist es nicht verwunderlich, wenn eine Aufgabe offen bzw. mehrdeutig ist, dass diese zum weiteren Nachdenken anregt, wobei hierbei nicht das Ausmaß festgelegt wird, in welchem dies geschehen soll. Auch diese Charakteristik, welche beim problemorientierten Lernen als Anknüpfungspunkt zu anderen Thematiken beschrieben wird, wurde bereits erwähnt.

Trotz dieser genannten Differenzierung sei hier kurz angemerkt, dass Routineaufgaben durchaus wieder zu Problemen werden können. Man bedenke hierbei, dass die meisten Aufgaben, welche im Mathematikunterricht behandelt werden, in einem bestimmten Kontext eingebettet sind. Meist liefert gerade dieser Kontext die entscheidende Idee zur Lösung der Aufgabe. Aus diesem Grund kann eine Routineaufgabe zu einem Problem werden, wenn der entsprechende Kontext fehlt. Zur Sicherung des Basiswissens ist es daher durchaus sinnvoll, auch immer wieder Aufgaben im Unterricht zu verwenden, für welche man früher erworbenes Wissen benötigt. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 281)

Dies legt nahe, dass auch der Kontext, in welchem eine Aufgabe gestellt wird, entscheidend ist, ob eine Aufgabe als Routine- oder als Problemlöseaufgabe aufgefasst wird. Mit Kontext betreffend Problemlöseaufgaben kann hier entweder gemeint sein, dass eine Aufgabe in einer Schulstufe gestellt wird, in welcher die notwendigen Verfahren zur Lösung noch nicht entwickelt wurden, oder, dass zwar die Verfahren bereits entwickelt wurden, aber durch das Fehlen des Zusammenhanges, in welchem die Aufgabe gestellt wurde, diese nicht sofort mit diesem assoziiert werden.

1.4 Klassifikation von Problemen

Eine sehr übliche, aber auch genauso simple Klassifikation von Problemen, ist die nach „*well-defined*“und „*ill-defined*“(vgl. Funke 2003, 29). Bei einem gut definierten Problem gibt es eine Regel, um von einem beliebigen Zustand entscheiden zu können, ob dieser ein Endzustand ist oder eben nicht. Im Vergleich dazu gibt es bei schlecht definierten Problemen keine solchen offenkundigen Regeln und daher verlangen diese nach einer dialektischen Prozedur um sie zu lösen. (Vgl. Dörner 1976, 13)

Eine etwas genauere Art der Klassifikation wäre nach dem Ausmaß, in welchem die verfügbaren Mittel und die zu erreichenden Ziele bekannt sind. Hierbei nennt Funke (2003, 29) die Einteilung in Transformationsprobleme - ein gut definierter Ist-Zustand ist in einen gut definierten Soll-Zustand überzuführen, Neuordnungsprobleme - Elemente müssen zur Lösung des Problems in eine neue Reihenfolge gebracht werden, und Induktionsprobleme - aus Einzelfällen ist eine allgemeine Regel abzuleiten.

Es gibt noch viele verschiedene Klassifikationsmodelle für Probleme, die sich durch einen bestimmten Aspekt, auf dem sie sich fokussieren, unterscheiden, wobei Funke (2003) eine generelle Unterscheidung zwischen der Klassifikation von einfachen Problemen und der Taxonomie von komplexen Problemen macht.

Bei der Klassifikation von einfachen Problemen nennt Funke (2003, 30f) unter anderem das Klassifikationssystem von Dörner (1976, 11-15). Bei diesem handelt es sich um ein zweidimensionales System, wobei nach Art der Barriere unterschieden wird. Die zwei Dimensionen sind der Bekanntheitsgrad der Mittel und die Klarheit der Zielkriterien, diese werden in den Stufen hoch oder gering unterschieden. (Vgl. Funke 2003, 30)

Daraus ergeben sich vier verschiedene Barrieretypen:

Interpolationsbarriere: Sind neben dem Ist- und Sollzustand auch die Operatoren, also die Mittel zur Überwindung des Problems, bekannt, so wird das Problem durch das Auffinden der richtigen Operatorenabfolge gelöst. Beispiele hierfür wären das Schachspiel oder das Nummernschloss am Fahrrad. (Vgl. Dörner 1976, 12; Funke 2003, 30f)

Synthesebarriere: Wenn sowohl Ausgangs- als auch Zielzustand wohl definiert sind, nur die Mittel, die zu diesem führen sollen, unbekannt sind, benötigt man den Einsatz von kreativen Lösungsvorschlägen. Das Alchimisten-Problem, worin es darum geht aus Blei Gold zu machen, ist ein gutes Beispiel hierfür. (Vgl. Dörner 1976, 12; Funke 2003, 31).

Dialektische Barriere: Wenn umgekehrt die Mittel zur Verfügung stehen, nur das Ziel nicht klar definiert ist, muss dieses zuerst sorgfältig ausgeführt werden. Durch einen dialektischen Prozess von These, Antithese und Synthese wird das Ziel geschärft. Dies wäre beispielsweise der Fall, wenn man über die beste Verwendung eines großen Geldbetrages nachdenkt oder wenn eine neue Wohnung schöner als die alte werden soll. (Vgl. Dörner 1976, 13; Funke 2003, 31)

Dialektische und Synthesebarriere: Sollten beide Dimensionen gering sein, so handelt es sich um eine Kombination der Barrieretypen (vgl. Dörner 1976, 14; Funke 2003, 31).

Diese genannten Barrieretypen sind jedoch nicht unabhängig vom Problemlöser, man bedenke, dass einige Situationen für Personen Probleme darstellen, während dieselben Umstände für andere Menschen keine Schwierigkeiten enthalten. Zudem kann ein Problem auch mehrere Barrieretypen enthalten, wie dies sehr oft bei komplexen Problemen der Fall ist. (Vgl. Dörner 1976, 14)

Für die Taxonomie komplexer Probleme zählt Funke (2003, 32) unter anderem die von Hussy auf. Bei diesem ergibt sich die Problemschwierigkeit aus Personen- und Problemmerkmalen. Funke selbst unterscheidet zwischen Personen-, Situationen- und Aufgabenmerkmalen. (Vgl. Funke 2003, 32)

Auch in der Mathematik gibt es Versuche die Problemlöseaufgaben zu klassifizieren. Der Grund hierfür ist, dass es natürlich leichter ist ein Problem zu lösen, wenn man dieses zu einem bestimmten Problemtyp zuordnen kann, dessen Lösungsweg man bereits kennt. (Vgl. Polya 1966, 175)
Polya (1966, 175f) unterscheidet zwischen *Bestimmungs- und Beweisaufgaben.* Hingegen schlagen Bruder und Collet (2011, 17; 163-167) eine Einteilung in folgende Problemtypen vor: *Mathematisierungsprobleme, innermathematische Probleme und Interpretationsprobleme.*

Anhand dieses kurzen Einblicks in die Klassifikationsversuche lässt sich erkennen, dass es keine allgemeine Einteilung für Probleme gibt, welche das gesamte Spektrum möglicher Probleme abdeckt. Dies könnte schon allein daran liegen, dass es keine einheitlich anerkannte Definition gibt, was man unter einem Problem versteht, und durch diese Freiheit ergeben sich sehr viele verschiedene Probleme.

1.5 Eigene Ansicht über Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht

Zusammenfassend lässt sich erkennen, dass eine Problemlöseaufgabe immer ein Hindernis enthält, sodass es nicht direkt möglich ist diese zu lösen. (Vgl. u. a. Polya 1966, 9)

Dieses Hindernis ist immer vom lösenden Subjekt aus zu verstehen, daher müssen bei jeder Problemlöseaufgabe die jeweilige Schulstufe sowie der generelle Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler mitberücksichtigt werden. (Vgl. u. a. Bruder und Collet 2011, 11)

Abgesehen davon muss eine Problemlöseaufgabe einen bestimmten Grad an Offenheit enthalten (vgl. u.a. Büchter und Leuders 2005, 30). Es soll daher möglich sein die gestellte Aufgabe über mehr als nur einen richtigen Lösungsweg zu bearbeiten (vgl. u. a. Link 2011, 41).

Zudem ist es mehr als ausreichend, wenn eine Problemaufgabe in einem innermathematischen Kontext gestellt ist (vgl. u. a. Büchter und Leuders 2005, 31). Ein Problem zu lösen enthält bereits genug Schwierigkeiten, sodass es nicht zusätzlich notwendig ist, dass dieses noch, wie beim Modellieren, zuerst in die mathematische Sprache übersetzt werden muss.

Das für mich persönlich wichtigste Kriterium einer Problemlöseaufgabe ist, dass diese zu einem Erkenntnisgewinn beisteuern soll (vgl. u. a. Link 2011, 42). Diesen Gewinn an Erkenntnis sehe ich allerdings nicht gebunden an dem Erlernen von für das Individuum neuen mathematischen Begriffen, sondern es kann sich auch in dem Verstehen anderer, über die Mathematik hinausgehender Arbeitstechniken und heuristischer Strategien handeln. Damit will ich ausdrücken, dass zum Beispiel auch der richtige Umgang mit Heurismen einen Zuwachs an Erkenntnis darstellt. Aus dieser Sichtweise betrachtet teile ich die Ansicht von Frau Link, dass Problemlöseprozesse auch immer Erkenntnisprozesse darstellen. (Vgl. Link 2011, Kapitel 3)

Von den möglichen Charakterisierungen mathematischer Probleme gefällt mir jene von Frauke Link (2011, 41f) am besten, da ihre Darlegung eine gute Zusammenfassung der wesentlichen Kennzeichen einer mathematischen Problemlöseaufgabe enthält.

Konform mit Büchter und Leuders (2005) sehe ich den Weg zum Auffinden „guter“mathematischer Probleme. Entweder kann man von einem zentralen mathematischen Begriff ausgehend Probleme formulieren, welche diesen zum Mittelpunkt haben. Oder aber man „öffnet“eine Routineaufgabe, indem man zum Beispiel die Lösung als Ausgangspunkt heranzieht und damit die Aufgabenstellung einfach umkehrt. Sollte der Fokus beim Problemlösen mehr auf das Erlernen von nützlichen Lösungsstrategien liegen, so kann man diese auch durch direkte Aufforderungen in der Aufgabenstellung in den Mittelpunkt rücken. Ein weiterer Weg, um sich die Arbeitstechniken des Problemlösens zu verdeutlichen, stellt, ihrer Meinung nach, welcher ich mich anschließe, das Reflektieren von bereits gelösten Problemstellungen dar. Hierbei wird das eigene Denken in dem Sinne erleichtert, dass man nicht selbst ein Problem erst lösen muss, es fördert allerdings die bewusste Reflexion und die Argumentationsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler. Im Gegensatz zu den beiden oben genannten, Büchter und Leuders (2005), sehe ich das Selbstfinden von Problemen durch Schülerinnen und Schüler nicht als besonders wertvoll an, da dies meiner Ansicht nach schon für Lehrkräfte eine sehr schwere Herausforderung darstellt und somit nur wertvolle Unterrichtszeit vergeuden würde. (Vgl. ebd., 32-42)

2 Denkpsychologie

In diesem Kapitel wird die Rolle der Denkpsychologie beim Problemlösen behandelt. Der zu Grunde liegende Gedanke ist, dass Problemlösen sehr eng mit dem Konzept des Denkens verwandt ist. Zudem spielen viele der Theorien, welche in dieser entwickelt wurden, eine entscheidende Rolle bei Lern- und Lehrprozessen, indem diese eine wesentliche Grundlage für viele verschiedene didaktische Prinzipien bilden. Um eine gute Übersicht über die verschiedenen Ansätze zu bekommen, wird kurz die historische Entwicklung der Denkpsychologie behandelt. Anschließend wird etwas genauer auf die verschiedenen Paradigmen in der Psychologie und deren Auffassung von Problemlösen eingegangen.

2.1 Verhältnis von Denken und Problemlösen

Die beiden Begriffe „*Denken*“und „*Problemlösen*“sind eng miteinander verwandte Konzepte. Beide stellen erstrebenswerte Eigenschaften dar, die sowohl im schulischen, als auch im beruflichen Kontext eine zentrale Rolle spielen. Einerseits dienen sie zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit im kognitiven Bereich, und andererseits stellen sie auch die Grundlage dessen dar, was man unter Intelligenz versteht. Problemlösen zählt zudem zu den Schlüsselqualifikationen von internationalen Schulleistungsstudien, wie zum Beispiel PISA, wobei es hierbei als fächerübergreifend- greifende Fähigkeit angesehen wird. (Vgl. Funke 2003, 13)

Kurz gesagt:„*Es gibt eigentlich kaum einen Bereich menschlichen Lebens,* *in dem Problemlösen* nicht *bedeutsam wäre"* (Funke 2003, 13)!

Bezüglich des Verhältnisses der beiden Konzepte „*Denken*"und „*Problemlösen*"gibt es verschiedene Ansichten. Die radikalste Ansicht wäre jede denkerische Tätigkeit als problemlösend aufzufassen. In den meisten Fällen dagegen wird Problemlösen als Sonderfall des Denkens aufgefasst, wodurch die denkerische Tätigkeit auch noch andere Schwerpunkte haben kann. Dadurch würde das Problemlösen als jene Art des Denkens verstanden, durch welche Hindernisse auf dem Weg zu einem Ziel beseitigt werden. Mit dieser Annahme verbunden ist der funktionale Aspekt jeder denkerischen Tätigkeit. Das problemlösende Denken würde demnach in den Dienst menschlicher Handlungsregulation eingeordnet. (Vgl. ebd., 21f)

Probleme entstehen sogar gerade erst dadurch, dass Menschen bestimmte Ziele verfolgen und diese nicht sofort erreichen können. Ein Problem ergibt sich daher erst durch eine gegebene Situation mit einer bestimmten Zielsetzung. Diese Zielorientiertheit, welche spezifisch für menschliches Handeln ist, erfordert problemlösendes Denken. (Vgl. ebd., 18)

> *„Solange Menschen handeln, können Probleme durch diese Handlungen entstehen [...], ja man kann sagen: Gerade* weil *Menschen handeln, entstehen Probleme"* (ebd., 18).

In diesem Abschnitt wird deutlich, dass Problemlösen eine spezifisch menschliche kognitive Tätigkeit ist. Man kann sogar sagen, in dieser Art zu denken, ist ein wesentliches Merkmal, durch welches sich die Menschen von den Tieren unterscheiden. Die Darstellung als fächerübergreifende Fähigkeit wird gerade dadurch noch deutlicher, dass Problemlösen sowohl in der Psychologie, als auch in der Mathematik behandelt wird. Bezüglich des angesprochenen Verhältnisses von Denken und Problemlösen, so teile ich die Ansicht, dass Problemlösen nur eine Art des Denkens darstellt. Die gesamte denkerische Tätigkeit als problemlösend zu charakterisieren, wäre doch etwas zu radikal.

2.2 Historische Wurzeln der Denkpsychologie

Der Ursprung der Denkpsychologie befindet sich bereits im Assoziationismusansatz von Aristoteles (400 v. Chr.). Der Grundgedanke war hierbei, dass die geistige Tätigkeit auf folgenden zwei Grundkomponenten, den „*Vorstellungen*“und deren „*Assoziationen*“, basiert. Dieser Ansatz von Aristoteles beruht auf folgenden drei Gesetzen: *Dem Gesetz der Kontiguität, dem Gesetz der Ähnlichkeit und dem Gesetz der Gegensätzlichkeit.* (Vgl. Mayer 1979, 10)

Dieser Ansatz wurde im 17. und 18. Jahrhundert von Hobbes und Locke neu formuliert. Nun beinhaltet die Theorie der Denktätigkeit, neben den drei aristotelischen Gesetzen, noch folgende vier Hauptpunkte: *Atomismus, Mechanismus, Empirismus und Imagismus.* (Vgl. Mayer 1979, 11)

Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde die Psychologie durch Wundt als experimentelle Wissenschaft begründet. Wundt, der auch als „*Vater der Psychologie*“bezeichnet wird, verstand die Erforschung des menschlichen Denkens und Verhaltens als neue Aufgabe der Wissenschaft und errichte deshalb das erste psychologische Laboratorium an der Universität Leipzig. Dennoch erkannte Wundt, dass dieser experimentelle Charakter seine Grenzen hatte, so konnte zum Beispiel komplexes Denken und Lernen nicht allein durch die Beobachtung erforscht werden. (Vgl. ebd., 11f)

Dieser Grundgedanke Wundts bezüglich der Unerforschlichkeit des Denkens, wurde erst durch die Würzburger Schule widerlegt. Durch eine Gruppe Würzburger Psychologen konnten mittels der neuen Methode der „*Introspektion*“die kognitiven Prozesse untersucht werden. Diese Methode der Selbstbeobachtung brachte den Vertretern der Würzburger Schule enorme Kritik ein, da sie nicht den objektiv überprüfbaren Standards entsprach. Dennoch konnte damit gezeigt werden, dass sich das menschliche Denken erforschen lässt und folglich kam es zu einer Erschütterung der, bis dahin unangefochtenen, Assoziationsphilosophie. (Vgl. ebd., 12f)

Neben der Leipziger und Würzburger Schule hat sich die Gestaltpsychologie aus der Ganzheitspsychologie des 19. Jahrhunderts entwickelt. Die Forschungsmethode orientiert sich hierbei an dem Motto „*Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile*“(Funke 2003, 27). Die von ihr entwickelten Gestaltprinzipien werden nicht nur in der Wahrnehmungspsychologie, sondern auch in der Denkpsychologie angewendet. (Vgl. Funke 2003, 27)

Durch Watson, einem Vertreter des radikalen Behaviorismus, kam es zu einem Bruch mit der traditionellen Psychologie. Er lehnte die Würzburger Schule und ihre Methoden strikt ab und bezeichnete diese als „*Lehnstuhl*“-Psychologie. Nun wurde allein das beobachtbare Verhalten, die Gleichsetzung von Tier und Mensch, sowie die Betrachtung der Psychologie als Naturwissenschaft zum leitenden Dogma. Ziel dieser Psychologie ist die alleinige Vorhersage und Kontrolle von menschlichem Verhalten und dessen Verstehen. (vgl. ebd., 27)

Dieses vorherrschende Paradigma konnte erst in den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts durch die sogenannte „*kognitive Wende*“abgelöst werden. Daraus resultierte ein neues Verständnis menschlicher Kognitionen. Nun waren die internen Prozesse im Zentrum der Forschung und auch für das Geschehen der sogenannten „*black box*“, dem Gehirn, gab es ein Modell. (Vgl. ebd., 28)

Leider kam es in der deutschen Denkpsychologie aufgrund des Ausbruches des zweiten Weltkrieges zu einem traurigen Ende der Forschungstätigkeiten. Viele deutsche Wissenschaftler mussten fliehen oder wurden ermordet. Zur gleichen Zeit hatte der Behaviorismus in Amerika durch Watson seinen Aufschwung, sodass jegliche kognitive Betrachtung zu dieser Zeit ausgeschlossen wurde. Erst durch die kognitive Wende wurde Denken unter dem Blickpunkt der Informationsverarbeitung wieder zum Thema. Dieser neuzeitliche Standpunkt wurde von vielen Psychologen aufgegriffen und weiter entwickelt. (Vgl. ebd., 28)

Dieser kurzer Abschnitt gibt einen guten Überblick in welche Richtungen sich die Erforschung des Denkens und Problemlösens im Laufe der Zeit entwickelt hat. Dies ist besonders hilfreich um die weiteren Darlegungen der verschiedenen Ansätze zu verstehen.

2.3 Strategien des Problemlösens in verschiedenen psychologischen Paradigmen

Im Folgenden werden, im Bezug auf die kurze historische Übersicht, die wichtigsten psychologischen Ansichten zum Denken, Lernen und Problemlösen erklärt. Probleme und deren Lösung spielen in allen diesen Paradigmen eine zentrale Rolle, jedoch werden sie je nach vorherrschender Ansicht unterschiedlich behandelt.

2.3.1 Behavioristische Ansätze - Assoziationstheorien

Lernprozesse werden nach diesem Paradigma durch die Assoziationsbildung zwischen einem Reiz (Stimuli) und einer Reaktion (Response) beschrieben. Aus diesem Grund ist der Behaviorismus als SR-Theorie aufzufassen. (Vgl. Funke 2003, 44f) Dem Prozess der Assoziationsbildung bezeichnet man als Konditionierung und dieser beruht auf der Theorie der bedingten Reflexe (vgl. Künkler 2011, 50). Durch die wiederholte Assoziationsbildung ergeben sich Reaktionshierarchien. Bei einem Problem jedoch führen diese Gewohnheitsmuster, welche sich an der Spitze der Reaktionshierarchie befinden, nicht zum Ziel. Beim Problemlösen wird daher die Methode „*Versuch und Irrtum*“angewendet, welche zu einer Umschichtung der Reaktionshierarchien führt. (Vgl. Funke 2003, 44)

Ein sehr bekanntes Experiment der Behavioristen zum Problemlösen stammt von Thorndike. Dieser bediente sich eines Problemkäfigs, in welchem er Katzen einsperrte. Um sich aus dem Käfig zu befreien, musste das Tier bestimmte Reaktionsleistungen erbringen. Die Belohnung des Verhaltens war, dass die Katze nun wieder frei war bzw. zu essen bekam.
Thorndike beobachtete dabei, dass die Katze das Problem nach dem Versuch-und-Irrtum-Prinzip löste. Daher verhielt sich das Tier zu Beginn wahllos, bis zufällig die erforderliche Reaktion erbracht wurde, damit sich die Tür öffnete. Jedoch bei mehrmaligen Übungen wurden unzweckmäßige Reaktionen, wie miauen, weniger oft und zweckmäßige öfter dargeboten. Nach sehr vielen Durchgängen gelang es dem Tier sofort sich durch das zielführende Verhalten aus dem Käfig zu befreien, es hatte also gelernt. (Vgl. Mayer 1979, 19ff)

Denken ist demnach nach der Assoziationstheorie die Anwendung von ursprünglichen bestehenden Reaktionstendenzen nach dem Versuch-und-Irrtum-Prinzip. Die Annahme ist hierbei, dass für jede Situation Assoziationen mit vielen verschiedenen Reaktionen bestehen. Das assoziative Denken besteht hierbei aus drei Elementen: Reiz (Problemsituation), Reaktion (Lösungsverhalten) und Assoziationen zwischen Reiz und Reaktion. Die Assoziationen bilden nach ihrer unterschiedlichen Stärke eine Hierarchie. Aus diesem Grund werden in einer Problemsituation zunächst die dominierenden Reaktionen versucht, falls diese nicht zum Erfolg führen, werden andere Reaktionen ausprobiert. Nach mehreren Versuchsdurchgängen werden jedoch die zum Erfolg führenden Reaktionen stärker, es erfolgt daher eine Umschichtung in den Reaktionshierarchien. (Vgl. Mayer 1979, 21f)

Diese Umstrukturierung wird durch folgende zwei Lerngesetze erklärt (vgl. ebd., 23):

1. *Dem Gesetz der Übung:* Durch Übung wird die Assoziation zwischen

einem bestimmten Reiz und einer bestimmten Reaktion verstärkt.

2. *Dem Gesetz der Auswirkung:* Reaktionen, die zur Problemlösung nicht förderlich sind verlieren an Stärke, während die zum Erfolg führenden Reaktionen an Stärke gewinnen und daher eine höhere Position in der Reaktionshierarchie einnehmen.

Die modifizierte Assoziationstheorie geht von Folgendem aus:„*Versuch und Irrtum können - besonders beim Menschen - sowohl* offen *als auch* verdeckt *stattfinden*“ (ebd., 24). Denken bedeutet demnach, dass die Reaktionen in Gedanken ausprobiert werden, bis ein zielführendes Verhalten gefunden ist. Somit ist Denken ein verdecktes Verhalten. (Vgl. ebd., 24)

Auch beim Behaviorismus unterscheiden Bredenkamp und Wippich (1977) zwischen verschiedenen Richtungen. Diese sind folgende: *Klassische Konditionierung, operante Konditionierung, instrumentelles Lernen und Imitationslernen.*

Klassische Konditionierung

Bei der *klassischen Konditionierung* wird durch eine experimentelle Prozedur gezeigt, wie ein neutraler Reiz zu einem konditionierten Reiz wird. Beim berühmten Hunde-Experiment von Iwan Pawlow wurde gezeigt, dass ein unbedingter Stimulus (Futter) zu einer unbedingten Reaktion (Speichelfluss) führte. Ein dagegen neutraler Reiz (Ton einer Stimmgabel) führte vor dem Experiment zu keinerlei Reaktion. Während des Versuchsdurchganges wurde der neutrale Reiz mehrmals vor dem unbedingten Reiz dargeboten. Nach dieser Phase zeigte sich, dass schon die alleinige Darbietung des zu Beginn neutralen Reizes zum Speichelfluss führte. Der neutrale Reiz wurde daher zu einem konditioniertem Reiz und führte nun zu einer konditionierten Reaktion. Das Konzept der klassischen Konditionierung wurde aber erst von Watson auf das menschliche Lernen übertragen. Durch das ethisch vielfach umstrittene Experiment „*Little-Albert*“konnte demonstriert werden, dass die klassische Konditionierung auch auf Menschen anwendbar ist. In diesem Versuch ging es speziell um die Erlernbarkeit von Furchtreaktionen und deren Generalisierbarkeit. So wurde bei dem Experiment von Watson und Ryan ein neutraler Reiz, eine weiße Ratte, die zu Beginn zu keinerlei Angstreaktion führte, zu einem konditionierten Reiz, welcher eine Furchtreaktion zur Folge hatte, indem dieser immer kurz vor dem unbedingten Reiz, einem lauten Geräusch, dargeboten wurde. Interessanterweise zeigte sich, dass bei der Versuchsperson nach Beendigung des Experimentes auch ähnliche Reize, wie etwa Kaninchen, eine Furchtreaktion auslöste. (Vgl. Bredenkamp und Wippich 1977, 9f)

Die Tatsache, dass das auf einem bestimmten Reiz konditionierte Verhalten auch in Gegenwart anderer, ähnlicher Reize auftritt, wird als Reizgeneralisation bezeichnet. Durch diese ist es erst möglich, das in einer bestimmten Situation erworbene Verhalten auf eine neue Situation zu übertragen, ohne dabei neu lernen zu müssen. (Vgl. Bredenkamp und Wippich 1977, 137ff)

Operante Konditionierung

Bei der *operanten Konditionierung* geht es um eine Verhaltensänderung aufgrund der Konsequenzen, diese können positiv oder negativ sein. Wird eine Belohnung verabreicht spricht man von *positiven Verstärkung*, im Gegensatz dazu nennt man die Beendigung einer unangenehmen oder sogar schmerzhaften Reizung *negative Verstärkung*. Als *Verstärker* bezeichnet man jeden Reiz, der die Auftretenswahrscheinlichkeit eines bestimmten Verhaltens steigert. (Vgl. Bredenkamp und Wippich 1977, 10)

Instrumentelles Lernen

Von *instrumentellen Lernen* spricht man dann, wenn ein bestimmtes Verhalten, als Mittel, als Zweck, als Instrument eingesetzt werden muss, um den Verstärker zu erlangen. In der Trotzphase verwenden Kinder das instrumentelle Verhalten, wie etwa Schreien, sich wütend auf dem Boden zu werfen, um den Verstärker, die Aufmerksamkeit der Eltern, zu bekommen. Auch hierbei ändert sich das Verhalten aufgrund der Konsequenzen. (Vgl. Bredenkamp und Wippich 1977, 10) Im Unterschied aber zur operanten Konditionierung, wo man die Freiheit besitzt das Verhalten auszuführen oder zu unterlassen, ist beim instrumentellen Lernen die Freiheit eingeschränkt (vgl. Bredenkamp und Wippich 1977, 50).

Imitationslernen

Unter *Imitationslernen*, auch Beobachtungslernen oder Lernen am Modell genannt, versteht man den Erwerb neuer Verhaltensweisen durch Beobachtung (vgl. Bredenkamp und Wippich 1977, 11). Hierbei gab es eine Diskussion, ob Imitationslernen nicht einfach nur das Produkt eines früheren instrumentellen Lernens wäre, oder ob es auch zur Nachahmung ohne einer Bekräftigung des Verhaltens käme. Bis heute bestehen beide Ansichten. (Vgl. Bredenkamp und Wippich 1977, 126-136)

2.3.2 Kognitivistische Ansätze - Einsicht und Informationsverarbeitung

Gestaltpsychologie

Eine zentrale These der *Gestaltpsychologie* ist, dass Menschen beim Problemlösen Schwierigkeiten haben, da sie ihr *Set*, ihre Problemlösestrategie, nicht ändern können. Um die Problemsituation umzustrukturieren, müssten sie das Problem in einem neuen Licht sehen. Ein Hinweis kann hierbei sehr hilfreich sein, um die Situation neu zu organisieren. Aber auch einfach einige Zeit verstreichen zu lassen, was als *Inkubation* bezeichnet wird, kann helfen, um Einsicht in die Lösung zu erhalten. Die plötzliche Einsicht wird oft von dem nach Bühler benannte „*Aha- Erlebnis*“begleitet. (Vgl. Mayer 1979, 65)

Während Thorndike mit seinem Problemkäfig Lernen am Erfolg nach Ver-

such und Irrtum beobachtete, machte der Gestaltpsychologe Köhler eine ganz andere Entdeckung (vgl. Mayer 1979, 23). Er stellte Menschenaffen vor sehr ähnliche Probleme: Die Affen befanden sich in einem Käfig, in welchem eine Banane von der Decke hing, die außerhalb ihrer Reichweite war. Zudem lagen einige Kisten auf dem Boden. Die Affen sollten die Kisten aufeinander stellen und so eine Leiter bauen, sodass sie die Banane erreichen konnten. (Vgl. ebd., 66)
Dabei beobachtete er keinerlei Aktivitäten, die auf das Versuch-und-Irrtum-Prinzip schließen ließen. Er war davon überzeugt, dass die Tiere nach einer plötzlichen Einsicht, nachdem sie über das Problem nachdachten, auf die Lösung kamen. (Vgl. ebd., 23; 66)

Problemlösen ist nach der Gestalttheorie eine Umstrukturierung bzw. Neuorganisation der Problemelemente. Dabei wird die Fähigkeit gewonnen zu begreifen, wie alle Elemente eines Problems zusammenpassen, was als *Strukturverständnis* verstanden wird. Im Vergleich zur Assoziationstheorie geht es hierbei um die kreative Erarbeitung neuer Problemsituationen und nicht um die Anwendung eines gewohnten Lösungsverhaltens, welches durch frühere Erfahrungen gewonnen wurde. (Vgl. ebd., 67)

Zudem wird in der Gestaltpsychologie zwischen zwei Arten von Denken unterscheiden (vgl. ebd., 68):

1. *Produktives Denken:* Darunter versteht man das Erfinden einer neuen Lösung für ein Problem.

2. *Reproduktives Denken:* Die Anwendung früherer Lösungen, wobei alte Gewohnheiten oder Verhaltensweisen reproduziert werden.

Wertheimer hat anhand einer Aufgabe gezeigt, wie zwischen produktivem und reproduktivem Denken unterschieden wird. Bei der sogenannten „Parallelogramm-Aufgabe“wurden zwei verschiedene Unterrichtsmethoden verwendet, um Schülerinnen und Schülern die Flächenberechnung eines

Parallelogramms beizubringen. Bei der verständnisvollen Methode sollte die Struktur der Problemstellung erkannt werden. Hierbei wurde die Flächeninhaltsformel eines Parallelogramms durch Rückführung auf den Flächeninhalt eines Rechtecks hergeleitet. Die geometrischen Eigenschaften der Figur erlauben es ein Dreieck von der einen Seite zu der anderen Seite zu verschieben, sodass ein Rechteck entsteht. Bei der mechanischen Methode wurde die Flächeninhaltsformel wie ein Kochrezept hergeleitet. Beide Gruppen hatten die gleichen Leistungen bei Aufgaben zur Berechnung der Flächeninhalte von Parallelogrammen, aber SchülerInnen, die nach Verständnis lernten, wiesen bessere Transferleistungen auf. Es hat sich daher gezeigt, dass produktives Denken besser ist, wenn es darum geht das Gelernte auf neue Probleme und Aufgaben anzuwenden. (Vgl. ebd., 68ff)

Rigidität- Starrheit

In der Gestaltpsychologie wurde zudem die Erkenntnis gemacht, dass sich frühere Erfahrungen negativ in neuen Situationen auswirken können. Durch die reproduktive Anwendung von früheren Erfahrungen wird das produktive Problemlösen behindert. Belege dafür, dass die reproduktive Anwendung produktives Problemlösen behindert, sind die *funktionale Gebundenheit*, *Einstellungseffekte* und der *Negativ-Transfer*. (Vgl. Mayer 1979, 87)

Funktionale Gebundenheit

Unter funktionaler Gebundenheit wird die Schwierigkeit verstanden, einen neuen Verwendungszweck, eine neue Funktion für ein Objekt zu finden, welcher nicht dem gewohnten entspricht. Eine Problemlösung kann durch die funktionale Gebundenheit, die man gegenüber einem Gegenstand besitzt, entweder erschwert oder sogar verhindert werden. (Vgl. Mayer 1979, 90f)

Mayer (1979, 91) beschreibt hierbei ein bekanntes Experiment von Duncker, indem die Versuchspersonen verschiedene Gegenstände erhielten und den Auftrag die Kerzen an eine Wand zu montieren, sodass diese auch entzündbar wären. Eine Gruppe von Versuchspersonen bekamen die erforderlichen Gegenstände (Kerzen, Reißnägel und Streichhölzer) in den Pappschachteln, während die anderen sämtliche Gegenstände separat erhielten. Die Lösung wäre gewesen die Kerzen mittels eines brennenden Streichholz an die Schachtel zu kleben und diese dann mittels eines Reißnagels an der Wand zu befestigen. Für die Versuchsgruppe, welche die Schachteln als Behältnis der anderen Gegenstände bekamen, war die Lösung schwieriger zu finden. Dadurch wurde gezeigt, dass der gewöhnliche Gebrauch von Gegenständen es schwieriger macht, sich diese mit einem anderen Zweck vorzustellen.

Einstellungseffekte

Der Einstellungseffekt besagt, dass, wenn man einmal auf eine bestimmte Art und Weise zu einer Lösung gekommen ist, man allzu gerne dazu bereit ist, diese mechanische Lösungsmethode fortzuführen, auch wenn es einen anderen leichteren und eventuell auch kürzeren Lösungsweg geben würde (vgl. Funke 2003, 113).

Dieser Einstellungseffekt wird von Mayer (1979, 88f) und von Funke (2003, 113f) durch das Experiment von Luchins genauer demonstriert. Bei der beschriebenen Abfüll-Aufgabe sollten sich die Versuchspersonen drei verschieden große Wasserkrüge und eine unbegrenzte Wassermenge vorstellen. Danach sollte mit Hilfe von diesen gewünschte Wassermengen abgefüllt werden. Es stellte sich heraus, dass nach dem ersten Einübungsbeispiel, die nächsten fünf immer durch den selben Lösungsweg gelöst werden konnten. Aber die darauffolgenden Aufgaben hätten auch mit einer kürzeren und produktiveren Methode gelöst werden können. Jedoch wählten die meisten Versuchspersonen die längere, auf Einstellung beruhende Methode.

Negativ Transfer

Unter negativ Transfer versteht man etwas Ähnliches wie beim Einstel-

lungseffekt, es ist ebenfalls eine Art Lernhemmung. Mayer (1979, 89f) nennt hierfür das krypto-arithmetische Problem von Bartlett als Beispiel. Bei diesem Problemtyp sollten Buchstaben so zu Ziffern dekodiert werden, dass eine arithmetische Operation, wie etwa die Addition, gültig ist (vgl. Funke 2003, 108).
So sollten etwa die Buchstaben in DONALD+GERALD=ROBERT durch Ziffern ersetzt werden, wobei vorgegeben war, dass D=5 ist, und dass die Ziffern von 0 bis 9 nur jeweils einem Buchstaben entsprachen. Die meisten Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgabe kamen durch die Gewohnheiten beim Addieren und Subtrahieren. (Vgl. Mayer 1979, 89)

Bedeutungstheorie

Auch nach all diesen Beispielen, wo frühere Erfahrungen die Problemlösung behinderte, gibt es genügend Beispiele von positiv Transfer, wo vorherige Erfahrungen hilfreich für eine neue Problemsituation waren (vgl. Mayer 1979, 95). Nach der *Bedeutungstheorie* etwa versteht man Denken als *Assimilation an Schemata*. Problemlösen erfordert, nach dieser Annahme, die Assimilation des Problems an die frühere Erfahrung des Problemlösers. Hierbei wird ein Prozess angenommen, durch welchen die Aufgabe zu Konzepten und Vorstellungen im Gedächtnis in Beziehung gesetzt wird. Unter Denken versteht man hierbei den Prozess, durch welchen das passende Schema oder frühere Vorerfahrungen in Bezug auf die neue Problemsituation ausgewählt werden. Anschließend wird die Problemsituation interpretiert und anhand des ausgewählten Schema umstrukturiert. (Vgl. Mayer 1979, 106f)

Nach Mayer (1979, 107) versteht man unter dem Begriff „*Schema*“eine organisierte Repräsentation früherer Reaktionen, welche vermutlich jede Antwort des Organismus auf Umweltereignisse mitbestimmt, wobei sich Mayer (1979, 107) auf den Schemabegriff von Bartlett aus dessen Arbeit „*Remembering: A study in experimental and social psychology*“bezieht. *As-*

similation hingegen wird als die Suche nach einem geeigneten Bezugsrahmen oder Schema verstanden (vgl. Mayer 1979, 107).

Informationsverarbeitungsansatz

Dörner (1976) hingegen fasst in seinem Ansatz *Problemlösen als Informationsverarbeitung* auf, welche sich immer auf bestimmte Realitätsbereiche bezieht. Diese Realitätsbereiche bestehen aus Operatoren und Sachverhalten. Unter Sachverhalten versteht man alle möglichen Zustände, die ein Realitätsbereich annehmen kann. Die Menge der Sachverhalte kann endlich oder unendlich sein. Operatoren hingegen erlauben es einen Zustand zu verändern. (Vgl. Dörner 1976, 15; Funke 2003, 72) Wobei Dörner (1976, 15) zwischen Operation und Operator unterscheidet. Als Operator versteht er ein Handlungsprogramm, welches alle möglichen Realisierungsmöglichkeiten enthält, während die Operation die konkrete Realisierung einer Handlung darstellt (vgl. Dörner 1976, 15). Die Problemlösung besteht in der Umwandlung bestimmter Sachverhalte mit Hilfe von bestimmten Operatoren, wobei der Problemlöseprozess sowohl von der Art der Barriere, als auch von den Eigenschaften des Realitätsbereichs abhängig ist. Die Eigenschaften eines bestimmten Realitätsbereichs ergeben sich aus den Eigenschaften der Sachverhalte und Operatoren. (Vgl. ebd., 16f)

Bei den Eigenschaften der Sachverhalte zählt Dörner (1976, 18ff) folgende Dimensionen auf:

- Komplexität: Die Komplexität ist abhängig von der Anzahl der Komponenten und den Verknüpfungen zwischen diesen. Je nach Grad der Komplexität werden verschiedene komplexitätsreduzierende Maßnahmen notwendig.

- Dynamik: Darunter wird die zeitliche Entwicklung einer bestimmten Problemsituation verstanden. Während sich statische Situationen nur durch das Eingreifen der problemlösenden Person ändern, verändern sich dynamische Situationen auch ohne das Zutun des Problemlösers. Dynamische Situationen erfordern daher unter Zeitdruck zu handeln, sowie die möglichen Entwicklungen abschätzen zu können.

- Vernetztheit: In einer stark vernetzten Situation hängen die Variablen oder Merkmale der jeweiligen Situation in hohen Maße voneinander ab. Aus diesem Grund ist es nicht möglich diese isoliert zu betrachten, ohne dabei auf mögliche Nebenwirkungen zu stoßen. Die problemlösende Person muss daher auch immer die Nebenwirkungen seiner Handlung im Auge behalten.

- Transparenz: Hiermit ist das Ausmaß gemeint, indem die Merkmale einer Situation direkt zugänglich sind. Sollte die Transparenz gering sein, so wird vom Problemlöser die Beseitigung der Unbestimmtheit gefordert, indem dieser aktiv nach Informationen sucht.

- Grad des Vorhandenseins freier Komponenten: Freie Komponenten benötigt man für die Konstruktion von Objekten, sollten diese nicht vorhanden sein, dann muss der Auflösungsgrad bei der Betrachtung und Analyse des Sachverhaltes erhöht werden.

Folgende Eigenschaften von Operatoren werden von Dörner (1976, 21ff) genannt:

- Wirkungsbreite: Darunter versteht man, auf wie viele Merkmale eines Sachverhaltes ein bestimmter Operator verändernd wirkt. Hier sei kurz anzumerken, dass man bei Operatoren mit einem breiten Wirkungsspektrum, sogenannten „Breitbandoperatoren“, mehr beachten muss. Diese erfordern ein genaueres Vorauskalkulieren als Operatoren mit schmaler Wirkungsbreite, sogenannte „Schmalbandoperatoren“.

- Reversibilität: Man nennt einen Operator reversibel, wenn man seine Wirkungen wieder aufheben kann. Ein Realitätsbereich mit fast ausschließlich reversiblen Operatoren erlaubt ein spielerisches Probieren beim Problemlösungsprozess.

- Größe des Anwendungsbereichs: Die Größe des Anwendungsbereichs ist davon abhängig, an wie viele Bedingungen ein Operator geknüpft ist, sodass dieser verwendet werden darf. Bei Operatoren mit einer geringen Wirkungsbreite, wird ein sorgfältiges Vorausplanen, sowie die Bildung von Zwischenzielen notwendig.
- Wirkungssicherheit: Darunter versteht man den Grad mit der eine angestrebte Zustandsänderung durch Verwendung eines bestimmten Operators eintritt. Problemlösen mit unsicheren Operatoren muss mit einer breiteren Vorausplanung geschehen als mit sicheren.
- Materielle und zeitliche Kosten des Operators: Da jede Operation eine bestimmte Energieaufwendung sowie eine bestimmte Zeit benötigt, sollte man diese beiden Aspekte auch berücksichtigen. Dennoch sollte man hier kurz anmerken, dass diese Kosten-Nutzen-Kalkulation oftmals vernachlässigbar ist, aber beim komplexen Problemlösen eine wichtige Rolle spielen kann.

Zum Problemlösen benötigt man in diesem Ansatz eine bestimmte kognitive Struktur, welche aus einer *epistemischen* und einer *heuristischen* Struktur besteht. Die epistemische Struktur enthält bestimmtes Wissen über den Realitätsbereich, in welchem das Problem zu lösen ist, dies ist vergleichbar mit reproduktivem Denken. Die Gesamtheit aller Konstruktionsverfahren bzw. Heurismen, welche zur Herstellung der nötigen Operatoren benötigt werden, bezeichnet man als heuristische Struktur. Diese ist entscheidend für die Fähigkeit des produktiven Denkens. (Vgl. ebd., 26f)

2.3.3 Subjektwissenschaftliche Ansätze

Im *subjektwissenschaftlichen Ansatz* von Holzkamp wird Lernen im Begründungsdiskurs, im Gegensatz zu Lernen im Bedingungsdiskurs, erklärt. In den bisherigen Ansätzen wurde das menschliche Erleben und Verhalten als Resultat von bestimmten Bedingungen angesehen und die Menschen wurden damit immer als fremdbestimmt determiniert. Nun steht aber das lernende Subjekt und seine Motive im Zentrum und damit auch die Ansicht, dass menschliches Verhalten immer begründet ist. (Vgl. Erckmann und Zander 2011, 9-11; Meretz 2011, 3-5; Schlemm 2011, 12-14)

Nach diesem Ansatz findet Lernen immer dann statt, wenn man mit einer direkten Problembewältigung nicht weiter kommt, wenn man innehält und auf Distanz geht, um herauszufinden, wodurch die Schwierigkeiten erst entstanden sind. Durch diese Dezentralisierung, der Überführung einer „*Handlungsproblematik*“in eine „*Lernproblematik*“, kommt es lt. Holzkamp (1993) zu einem Standpunktwechsel, durch welchen nach Möglichkeiten der Überwindung der Schwierigkeiten gesucht wird. (Vgl.Holzkamp 1993, 184)

Nicht jede Handlungsproblematik wird automatisch zu einer Lernproblematik, so gibt es durchaus vielfältige Problematiken, die nicht erst durch Lernen gelöst werden können, sondern auch anders zu bewältigen sind (vgl. Holzkamp 1993, 182). Der wesentliche Unterschied zwischen Lernproblematiken und allgemeinen Handlungsproblematiken wird von Holzkamp (1993) wie folgt erklärt:

> „Lern*problematiken wären mithin gegenüber primären Handlungsproblematiken dadurch ausgezeichnet, daß [!] hier auf der einen Seite die* Bewältigung der Problematik aufgrund bestimmter Behinderungen, Widersprüche, Dilemmata nicht im Zuge des jeweiligen Handlungsablaufs selbst*, ggf. durch bloßes Mitlernen o.ä., möglich erscheint: Auf der anderen Seite aber gibt es hier gute Gründe für die Annahme, daß [!] in (mindestens) einer Zwischenphase aufgrund einer besonderen Lernintention die* Behinderungen, Dilemmata ect., die mich bis jetzt an der Überwindung der Handlungsproblematik gehindert haben, aufgehoben *werden können, so daß [!] daran anschließend bessere Voraussetzungen für die Bewältigung der Handlungsproblematik bestehen“* (ebd., 183).

In dieser Erklärung wird deutlich, dass Holzkamp (1993), wenn er von Lernen spricht, nicht *inzidentelles Lernen*, d.h Mitlernen meint, welches für ihn unproblematisch ist und kontinuierlich jeden Handlungsvollzug begleitet, sondern *intendiertes Lernen* (vgl. ebd., 182f). Durch das Misslingen der primären Problembewältigung und der daraus resultierenden Herausbildung einer Lernproblematik kommt es zur Konfigurierung eines Lerngegenstandes. Gerade durch die Erfahrung einer Diskrepanz, da der Stand des Vorgelernten nicht ausreicht um die Problematik zu lösen, kommt es zur Ausgliederung des jeweiligen Lerngegenstandes.

Nach dieser Ansicht lernen Menschen aufgrund ihrer subjektiven Lebensinteressen, die Fragen nach den Lernmotivationen ist daher gleichgestellt mit den subjektiven Lerngründen. Lernen braucht daher immer *Lerngründe* und ist nicht vertretbar, daher:*„[...] mein Lernen kann keineswegs durch irgendwelche dafür zuständigen Instanzen [...] über meinen Kopf hinweg geplant werden* “ (ebd., 184).

Die Lerngründe können von *expansiver Natur* sein - auf die Erweiterung meiner Lebensqualität ausgerichtet; oder von *defensiver Natur* sein - um einen drohenden Verlust bzw. eine Beeinträchtigung abzuwenden (vgl. ebd., 190f). Wobei sich eine Lernhaltung zur Überwindung der Lernproblematik nur bei expansiv orientierten Lerngründen einstellt, während bei defensiv motivierten Lerngründen eine bloße Bewältigungshaltung auftritt, wie dies bei Überwindungen von Handlungsproblematiken üblich ist. Aus diesem Grund haben defensive Lerngründe auch widerständiges, erzwungenes Lernen zur Folge. (Vgl. ebd., 193)

Eine herausgestellte Lernproblematik kann lt. Holzkamp (1993) auf zweierlei Arten überwunden werden. Einerseits durch qualitative Lernsprünge, dies lässt sich mit der plötzlichen Einsicht, dem AHA-Erlebnis vergleichen, und andererseits durch kontinuierliche Lernfortschritte, welche weit häufiger vorkommen. (Vgl. ebd., 239)

Ein universelles Phänomen in Bezug auf intentionales Lernen sind die involvierten intentional-sprachlichen Stellungsnahmen, das „*innere Sprechen*". „*Das innere Sprechen* ist *in gewissem Sinne meine willentliche, intentionale Zuwendung zur Welt, zu anderen und zu mir selbst, qualifiziert also die besondere Art des situativen Bezugs meiner mentalen Handlungen*" (ebd., 259). Dieses innere Sprechen kann in folgender Gestalt auftreten: Stellungsnahmen, Selbstkommentare, Selbstaufforderungen, Selbstinstruktion, Fragen an mich selbst und so weiter (vgl. ebd., 261). Durch diese Artikulierungen wird der eigene Lernprozess selbst reflektiert und damit die Lernhaltung konkretisiert. Neben der Berücksichtigung von besonderen Schwierigkeiten wird dadurch auch die Möglichkeit der Beachtungslenkung auf die relevanten Momente in der Problematik gegeben. (Vgl. ebd., 258-262)

Holzkamp beschäftigt sich auch mit der Frage, ob Problemlösen als Lernprozess aufgefasst und somit als ein Sonderfall von Lernproblematiken verstanden werden könnte. Aufgrund der Tatsache, dass die Definitionen eines Problems mit der Bestimmung von intentionalem Lernen zu übereinstimmen scheint, erweckt dies zunächst den Anschein, dass es so sein mag. Jedoch durch Betrachtung der Probleme, wie sie in den Problemlöseforschungen beschrieben wurden, kommt Holzkamp zu dem Schluss, dass diese auch bei Auslagerung einer Lernschleife gelöst werden können und daher der Vollzug des Problemlösens keinen Lernprozess darstellt. (Vgl. ebd., 229ff) Hierbei sei kurz anzumerken, dass Holzkamp zu dieser Schlussfolgerung kommt, indem er sich auf die traditionellen Problemlöseaufgaben, wie sie in der psychologischen Forschung verwendet wurden, bezieht, welche mehr Denksportaufgaben darstellen, als reale Problemstellungen.

2.4 Eigene Auffassung des Problemlösens aus psychologischer Sicht

Von den zuvor beschriebenen Ansätzen gefällt mir am besten der subjektwissenschaftliche Ansatz von Holzkamp.

Bei den Assoziationstheorien wird das Verhalten der Menschen reduziert auf reizgebundene Reaktionen. Dies würde jedoch bedeuten, dass menschliches Handeln ohne gegebenen Stimulus nicht möglich wäre. Dem widerspricht aber, dass menschliche Lebewesen auch ohne erkennbaren Anreiz Tätigkeiten vorausplanen. Zudem wurden die meisten Experimente in Form von Tierversuchen ausgeführt, wodurch sich nur bedingt Rückschlüsse auf humanes Verhalten ableiten lässt.

Das zentrale Konzept der kognitivistischen Ansätze ist der Informationsverarbeitungsansatz, wobei der Mensch auf einen Computer reduziert wird, welcher auf Inputs mit Outputs reagiert. Menschliches Handeln ist jedoch wesentlich komplexer und wird von vielen verschiedenen Faktoren beeinflusst.

Holzkamp hingegen stellt den Menschen als solches in den Vordergrund. Laut seiner Meinung, welcher ich mich anschließe, ist die Grundvoraussetzung jeden vertieften Lernens ein subjektiver Anreiz. Dies sollte man auch im Unterricht berücksichtigen, indem man das Interesse der Schülerinnen und Schüler weckt. Im Gegensatz zu ihm bin ich jedoch schon der Ansicht, dass Problemlösen sehr wohl einen Lernprozess darstellen kann. Denn jedes Problemlösen setzt die Anwendung bereits vorhandenem oder die Aneignung neuen Wissens voraus. Sich neues Wissen anzueignen stellt jedenfalls einen Lernprozess dar, meiner Auffassung stellt aber auch die Verwendung bereits vorhandener Wisseninhalte auf neue Situationen einen Lernprozess dar.

3 Stadien des Problemlösens

In diesem Abschnitt soll der Prozess des Problemlösens genauer analysiert werden. Hierzu wird einerseits die psychologische Betrachtungsweise nach Wallas und andererseits die mathematische Herangehensweise, in Anlehnung an George Polya, an Probleme erläutert.

3.1 Einteilung nach Wallas

Mayer (1979, 76) beschreibt folgende 4 Phasen des kreativen Prozesses nach Walles, welche auf analytischer Introspektion basieren. Die *Vorbereitungsphase*, in welcher Informationen gesammelt werden und erste Lösungsversuche stattfinden. In der darauffolgenden *Inkubationsphase* kommt es zur Distanzierung von dem Problem. Die folgende „*Erleuchtung*“liefert die Lösung des Problems. In der letzten Phase, der *Verifikationsphase* wird überprüft, ob die gefundene Lösung auch tatsächlich nützlich ist.

Gelegentlich wird auch von 5 Phasen des kreativen Problemlösungsprozesses gesprochen (vgl. Funke 2003, 47). Zu der Vorbereitungs-, Inkubations-, Einsichts- und Bewertungsphase kommt noch die Ausarbeitungsphase. In dieser soll der Weg von der Idee bis zum fertigen Endergebnis noch einmal präzise dargelegt werden. (Vgl. Funke 2003, 48)

3.2 Einteilung nach Polya

Prof. Dr. Daniel Grieser (2013, 22f; 257ff) beschreibt vier Hauptschritte des Problemlösens, in Anlehnung an George Polya:

1. ***Das Problem verstehen***
   Um ein gegebenes Problem überhaupt zu verstehen, ist es wichtig dieses genau zu analysieren. Dabei sollte man versuchen heraus zu filtern, was gegeben, was gesucht und welche Voraussetzungen gemacht wurden. (Vgl. Grieser 2013, 22; 257)

2. ***Das Problem untersuchen***
   Bei der Untersuchung des Problems ist es wichtig, wie man mit Frustrationen umgeht. Oft kommt man zu einem Punkt, wo man einfach nicht weiter weiß. Hier gilt es sich bewusst zu machen, welche Schätze man in seiner Werkzeugkiste hat. Angefangen mit allgemeinen Problemlösestrategien, über spezielle Strategien bis hin zu besonderen Techniken und Konzepten. Man muss hier hartnäckig bleiben, aber auch bei Bedarf flexibel, indem man zum Beispiel eine andere Strategie probiert.
   Falls man eine mögliche Lösungsstrategie gefunden hat, so gilt es nun deren Einsatz zu planen, damit diese auf die konkrete Problemsituation umsetzbar ist. Besonders hilfreich bei der Untersuchung von Problemen ist die eigene Erfahrung. Diese erhält man entweder indem man immer wieder Probleme selbst löst, oder indem man versucht vorgegebene Lösungen nachzuvollziehen. Auch eine Kombination aus beiden kann äußerst hilfreich sein. Im schlimmsten Fall, wenn keines der vorhanden Werkzeuge weiter hilft, so muss man sein eigenes entwickeln. Dies ist aber dann schon Problemlösen in seiner höchsten Form, so wie es in vielen Forschungen üblich ist. (Vgl. ebd., 22; 257ff)

3. ***Die Lösung geordnet aufschreiben***
   Beim geordneten Aufschreiben der Lösung ist auf eine schlüssige Argumentation zu achten, sowie auf eine sinnvolle Anordnung und eine

grundlegende verständliche Sprache. Man bedenke, dass auch andere beim Betrachten der Lösung diese als schlüssig empfinden sollten. Besonders die mathematische Fachsprache, wenn es um mathematische Probleme geht, kann dabei sehr hilfreich sein um sich präzise auszudrücken. Dennoch gilt es, dass Erklärungen zur Ergänzung der reinen Formelansammlungen eingefügt werden sollten. (Vgl. ebd., 23; 260)

4. ***Rückschau***
   Die Rückschau soll dazu dienen sich über die gewonnenen Erkenntnisse bewusst zu werden, sodass diese auch nachhaltig eine Wirkung zeigen. Dazu könnte man sich weitere Fragen zu dem gelösten Problem stellen, wie etwa ob die Lösung sinnvoll ist oder ob es auch eine andere, vielleicht sogar bessere Lösung gegeben hätte. (Vgl. ebd., 23; 260)

Die meisten Schwierigkeiten ergeben sich bei der Untersuchung des Problems. Ein grundlegendes Verständnis des Problems sollte selbstverständlich bestehen. Beim dritten Schritt des geordneten Aufschreibens der Lösung soll diese nur anderen mitgeteilt werden. Zudem soll diese Phase helfen um kontrollieren zu können, ob die gefundene Lösung auch tatsächlich richtig und vollständig ist. Die Rückschau bietet ebenfalls eine gute Kontrolle und soll behilflich sein die gewonnene Erkenntnis für andere Probleme einzusetzen. (Vgl. ebd., 257)

Diese genannten Arbeitsphasen stellen nur eine Richtlinie da, so schlagen Mason, Burton und Stacey (2008) eine etwas gröbere Gliederung in drei Arbeitsphasen vor: ***Planungs-, Durchführungs- und Rückblicksphase*** (vgl. Mason et al. 2008, 28).

In der Planungsphase soll sich mit der genauen Problemstellung vertraut gemacht werden, indem herausgefiltert wird, was bekannt ist, was das Ziel ist, und welche Hilfsmittel man zur Verfügung hat. Hierbei gilt es sich die Problemstellung genau durchzulesen und das Wesentliche zu erfassen. Dabei könnten Skizzen, Diagramme und Tabellen besonders hilfreich sein. Aber auch Vereinfachungen und die Betrachtung von Spezialfällen kann behilflich sein, sich einen ersten Überblick zu verschaffen. (Vgl. Mason et al. 2008, 30-39)

Wenn man hinreichend vertraut mit der Problemstellung ist, gelangt man zu der Durchführungsphase. Diese Phase ist durch Schwierigkeiten, aber auch AHA-Erlebnisse charakterisiert. Es kann durchaus vorkommen, dass die konkrete Durchführung der Lösung mehrere Anläufe erfordert. Zudem sind auch lange Stagnationsphasen, in welchen man auf neue Ideen und Einsichten wartet keine Seltenheit. Diese Phase gilt als abgeschossen, wenn entweder die Arbeit an der Problemstellung beendet ist, oder wenn man diese momentan abbrechen muss, da man zum Beispiel nicht mehr weiter kommt. (Vgl. ebd., 40) In dieser Phase ist eine der Haupttätigkeiten das Formulieren von Vermutungen, diese zu testen und wenn nötig zu modifizieren (vgl. ebd., 86). Vermutungen bilden nicht nur, das Rückgrat jeder Lösung, sondern auch generell für mathematisches Arbeiten (vgl. ebd., 67). Oft ist es leichter eine Lösung zu erraten, als diese zu erklären und zu beweisen. Beim Beweisen ist es besonders wichtig eine Struktur zu finden, welche die Voraussetzungen mit den Behauptungen verknüpft. (Vgl. ebd., 107)

Hat man nun eine Lösung gefunden oder musste man die Bearbeitung einstellen, so ist es nun an der Zeit für einen Rückblick. Das Zurückblicken auf das Geschehnis erlaubt es die gefundene Lösung noch einmal zu kontrollieren und mögliche Verallgemeinerungen zu finden. Hier sollte man die gefundene Lösung testen und über die Lösungsideen nachdenken. Die beste Nachbereitung ist, wenn man seinen Lösungsweg noch einmal in leicht verständlicher Form für andere aufschreibt. (Vgl. ebd., 41-48)

Auch wenn es im ersten Moment so aussieht, als ob die Durchführungsphase die entscheidende wäre, so sind doch die beiden anderen Phasen von besonderer Wichtigkeit. Zumeist wird die Durchführung euphorische in Angriff genommen, was oft zum Scheitern beim Problemlösen führt. Auch wenn bei der Durchführungsphase die meisten Bemühungen anzuwenden sind, so ist es dennoch extrem wichtig ausreichende Vorüberlegungen anzustellen. (Vgl. ebd., 29). *„Die Arbeit, die in die Planungsphase investiert wird, legt den Grundstock für eine erfolgreiche Lösungsdurchführung“* (ebd., 30). Nicht nur eine intensive Vorarbeit ist wichtig, sondern auch die anschließende Rückschau, welche eben so oft vernachlässigt wird (vgl. ebd., 29). Dennoch hängt der Erfolg bei der Durchführungsphase *„[...] von einer sorgfältigen und kritischen Rückschau auf die geleistete Arbeit und den erreichten Stand ab; dies wird leider nur allzu oft übersehen“* (ebd., 40).

4 Heuristische Strategien

In diesem Kapitel wird versucht eine Übersicht über die wichtigsten Heurismen anzugeben. Zunächst werden hierfür mögliche Einteilungsarten von Heurismen besprochen und geklärt, welche Einteilung in dieser Arbeit übernommen wurde. Anschließend werden einige allgemeine Problemlösestrategien besprochen, welche nicht nur in der Mathematik, sondern auch in vielen anderen Wissenschaften und Lebensbereichen eine zentrale Rolle spielen. Des Weiteren werden besonders wichtige mathematische Problemlösestrategien besprochen, welche zwar auch in anderen Bereichen relevant sein können, aber in der Mathematik eine zentrale Stellung einnehmen.

4.1 Einteilung von heuristischen Strategien

Bezüglich der Einteilung von heuristischen Strategien, gibt es hier unterschiedliche Ansichten. Einige, wie unter anderem Grieser (2013), unterscheiden nur zwischen allgemeinen und speziellen Heurismen. Diese Art der Einteilung wurde hier ebenfalls übernommen.

Dennoch möchte ich darauf Aufmerksam machen, dass es durchaus auch andere sinnvolle Einteilungen geben kann. Schwarz (2006), zum Beispiel, unterscheidet zwischen Heurismen der Variation, der Induktion und der Reduktion.

Bei den Heurismen der Variation geht es zum Einen um eine Verbesserung der Problemwahrnehmung, indem man das Problem in möglichst viele verschiedene Repräsentationssystemen darstellt, und zum Anderen soll durch das Variieren der verschiedenen Aspekte der Problemstellung, ein Lösungsplan entstehen. (Vgl. Schwarz 2006, 32)

In Anlehnung an Polyas plausibles Schließen, gehören zu den Heurismen der Induktion jene Elemente, die den schöpferischen Prozess initiieren und in Gang halten. Diese sind von unschätzbaren Wert für den Erkenntnisgewinn, für die Problemfindung und Begriffsbildung, sowie für die Problemlösung. (Vgl. Schwarz 2006, 144)

Die Heurismen der Reduktion werden, aufgrund ihrer regressiven Natur, hauptsächlich bei der Problemlösung verwendet (vgl. Schwarz 2006, 199). Diese Verfahren suchen entweder nach geeigneten Voraussetzungen für den angestrebten Zielzustand, oder nach falschen Konsequenzen, wenn dieser nicht eintritt (vgl. Schwarz 2006, 247).

Man sieht hierbei, dass es nicht nur eine Uneinigkeit bezüglich der Definition von einer Problemlöseaufgabe gibt, sondern auch über die Einteilung der jeweiligen Heurismen. Die hier übernommene Einteilung spiegelt aber den Gedankengang wieder, dass Problemlösen als fächerübergreifende Fähigkeit angesehen wird.

4.2 Grundlegende Problemlösestrategien

4.2.1 Ein Gefühl für das Problem bekommen

Spezialfälle und konkrete Beispiele können hilfreich sein, um sich mit dem Problem vertraut zu machen und das Wesentliche herauszuarbeiten. Auch Tabellen und Skizzen helfen eine Übersicht zu erlangen und das Problem genau zu betrachten. Durch diese Überführung in einen anderen Repräsentationsmodus gelingt es vielleicht das Problem aus einer anderen Sichtweise zu betrachten. (Vgl. Grieser 2013, 258)

Hesse (2009, 151-163) demonstriert anhand der Herleitung der Pickschen Formel, wie sich ein Problem leichter lösen lässt, indem man Spezialfälle betrachtet. Der österreichische Mathematiker Georg Alexander Pick (1859-1942) beschäftigte sich mit Gittervielecken. Dabei handelt es sich um Vielecke deren Eckpunkte allesamt ganzzahlige Koordinaten haben und somit auf den Gitterpunkten eines Rasters liegen. Dabei stellte er sich die Frage, ob man durch einfaches fundamentales Abzählen der Gitterpunkte, welche ein Vieleck abdeckt, auf den Flächeninhalt dieses Vielecks schließen könnte.
Zunächst betrachtet man ein allgemeines Gittervieleck, welches in Dreiecke zerlegt werden kann. Das kleinste Gitterquadrat hat einfachheitshalber den Flächeninhalt 1.

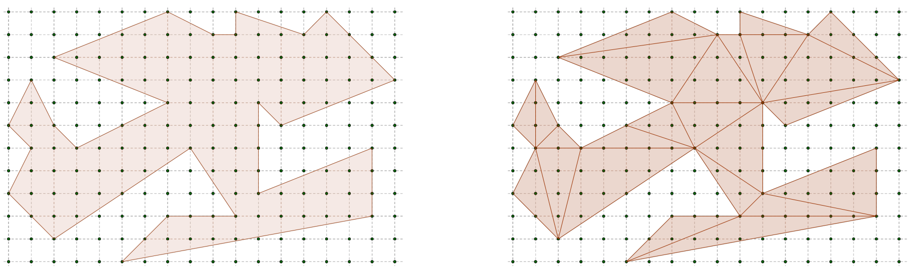

Abbildung 4.1: Gittervieleck und Triangulierung des Gittervielecks

Da man mit dieser allgemeinen Betrachtungsweise nicht weiter kommt, beschäftigt man sich nun mit den einfachsten konkreten Spezialfällen, um ein Gefühl für die Problemsituation zu bekommen. Dazu legt man des Weiteren folgende Notation fest: Die Anzahl der inneren Punkte wird mit i, die Anzahl der Randpunkte mit r und der Flächeninhalt mit F bezeichnet.

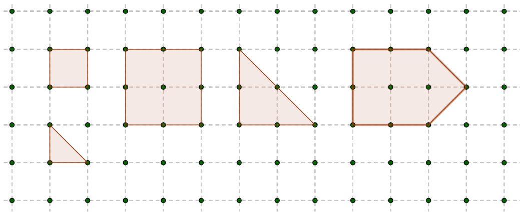

Abbildung 4.2: Einfache Spezialfälle, aus: Hesse 2009, 154

Durch die Betrachtung dieser einfachen konkreten Beispiele gelangt man zur folgenden Intuition bezüglich der Problemstellung: Es scheint einen direkt linearen Zusammenhang zwischen F einerseits und r und i andererseits zu bestehen. Daher nimmt man an, dass ein Ausdruck $F(r,i)$ für den Flächeninhalt eines Gittervielecks existiert, der nur von den Anzahlen i und r abhängt. Diesen Ausdruck kann man als eine lineare, monoton wachsende Funktion deuten, was durch folgenden Ansatz ausgedrückt wird: $F(r,i) = ai + br + c$, mit den Konstanten a, b und c.
Um die Konstanten zu bestimmen, betrachtet man die bisherigen Spezialfälle:
$F(4,0) = 1$; $F(3,0) = \frac{1}{2}$; $F(8,1) = 4$; $F(6,0) = 2$ und $F(8,2) = 5$.
Aus diesen und dem Ansatz erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 4b & + & c & = & 1 \\ & & 3b & + & c & = & \frac{1}{2} \\ & & 6b & + & c & = & 2 \\ a & + & 8b & + & c & = & 4 \\ 2a & + & 8b & + & c & = & 5 \end{array}$$

Nach dem Auflösen des Gleichungssystems erhält man $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ und $c = -1$. Wodurch sich folgende Formel für den Zusammmenhang zwischen r, i und F ergibt:

$$F(r,i) = i + \frac{r}{2} - 1 \tag{4.1}$$

Diese Formel (4.1) soll nun auf den komplizierteren Spezialfall eines allgemeinen Dreiecks erweitert werden. Aufgrund der Tatsache, dass sich jedes

Vieleck in Dreiecke zerlegen lässt, möchte man versuchen zu zeigen, dass diese Formel (4.1) auch für ein allgemeines Dreieck gilt, dessen Eckpunkte beliebig auf dem Gitter liegen. Wenn man dies zeigen kann, so kann man aufgrund der Spezialfälle auf den allgemeinen Fall schließen. Hierzu geht man schrittweise voran.

1.Schritt: Für den Fall des kleinsten Gitterquadrats ($F(4,0) = 1$) ist die Formel (4.1) gültig.

2.Schritt: Betrachtet nun ein $n \times m$-Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. In diesem Rechteck gibt es $i = (n-1) \cdot (m-1)$ innere Punkte und $r = 2 \cdot (n+1) + 2 \cdot (m+1) - 4 = 2n + 2m$ Randpunkte. Der Flächeninhalt ist das Produkt $F = n \cdot m$. Da gilt

$$\begin{aligned} F(r,i) &= F(2n+2m, (n-1)\cdot(m-1)) \\ &= (n-1)\cdot(m-1) + \tfrac{(2n+2m)}{2} - 1 \\ &= n \cdot m - n - m + 1 + n + m - 1 \\ &= n \cdot m \end{aligned}$$

stimmt die Formel (4.1) auch in diesem Fall.

3.Schritt: Man betrachtet nun ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten der Länge n und m und dem Flächeninhalt $F = \frac{n \cdot m}{2}$. Man versucht nun auch hier die Anzahl der inneren Punkte und der Randpunkte zu bestimmen. Jedoch ist es in diesem Fall, wegen der Hypotenuse, etwas komplizierter. Ohne sich mit der Frage, wie viele Punkte auf der Hypotenuse liegen, zu beschäftigen, schreibt man einfach h für die Anzahl der Gitterpunkte auf der Hypotenuse, ohne dabei die beiden Eckpunkte zu berücksichtigen. Für die Anzahl der Randpunkte des Dreiecks ergibt sich dann $r = n+m+1+h$. Aufgrund der Tatsache, dass das Rechteck $(n-1)\cdot(m-1)$ innere Punkte hatte und das rechtwinkelige Dreieck aus diesem durch Halbierung hervorgegangen ist, ergibt sich aus Symmetriegründen und nach Subtrahieren der

h Punkte auf der Diagonalen, dass $i = \frac{(n-1)\cdot(m-1)-h}{2}$ ist. Da gilt

$$\begin{aligned}
F(r,i) &= F(n+m+1+h, \tfrac{(n-1)\cdot(m-1)-h}{2}) \\
&= \frac{(n-1)\cdot(m-1)-h}{2} + \frac{n+m+1+h}{2} - 1 \\
&= \frac{n\cdot m-n-m+1-h}{2} + \frac{n+m+1+h}{2} - \frac{2}{2} \\
&= \frac{n\cdot m}{2},
\end{aligned}$$

ist (4.1) auch in diesem Fall erfüllt.

4.Schritt: Nun betrachtet man ein beliebiges Gitterdreieck D, welches durch Hinzufügen dreier rechtwinkeliger Dreiecke A, B, C zu einem Rechteck R ergänzt werden kann.

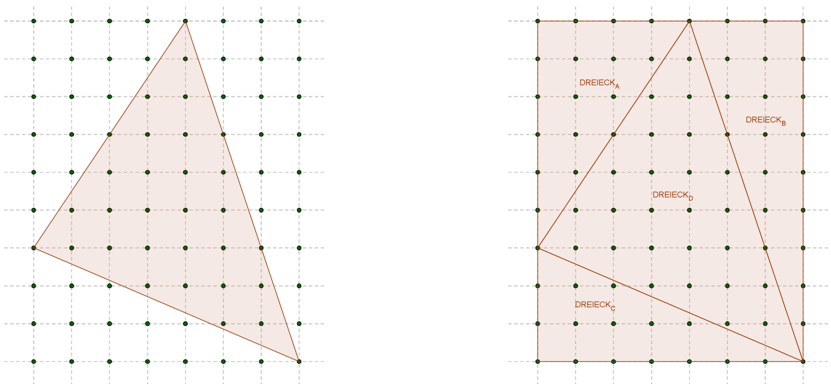

Abbildung 4.3: Beliebiges Gitterdreieck und dessen Ergänzung zu einem Rechteck, nach: Hesse 2009, 159f

Da man bereits gezeigt hat, dass die Formel (4.1) für beliebige Rechtecke und beliebige rechtwinkelige Dreiecke gilt, nutzt man dies, um die Formel auch für ein beliebiges Dreieck zu beweisen. Man schreibt hierfür i_A, r_A für die inneren Punkte und Randpunkte, sowie F_A für den Flächeninhalt des Dreiecks A. Entsprechendes gilt auch für die übrigen Dreiecke und das Rechteck. Daraus ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccccc} F_A & = & i_A & + & \frac{r_A}{2} & - & 1 \\ F_B & = & i_B & + & \frac{r_B}{2} & - & 1 \\ F_C & = & i_C & + & \frac{r_C}{2} & - & 1 \\ F_R & = & i_R & + & \frac{r_R}{2} & - & 1 \end{array}$$

Man möchte nun nachweisen, dass die Beziehung $F_T = i_t + \frac{r_t}{2} - 1$ gilt. Dazu verwendet man, dass

$$\begin{gathered} F_T = F_R - F_A - F_B - F_C \\ = i_R - i_A - i_B - i_C + \tfrac{r_R - r_A - r_B - r_C}{2} + 2 \end{gathered} \tag{4.2}$$

gilt.
Betrachtet man nun, in welcher Beziehung die Randpunkte der 4 Dreiecke zu den Randpunkten des Rechtecks R stehen, so ergibt sich

$$r_R = r_A + r_B + r_C - r_T. \tag{4.3}$$

Bezüglich der inneren Punkte erhält man die Gleichung

$$i_R = i_A + i_B + i_C + i_T + (r_A + r_B + r_C - r_R) - 3. \tag{4.4}$$

Der Summand -3 gibt an, dass man fälschlicherweise die drei Eckpunkte des Dreiecks T als innere Punkte des Rechtecks R gezählt hat.

Setzt man nun (4.3) in (4.4) ein, so erhält man

$$i_R = i_A + i_B + i_C + i_T + r_T - 3. \tag{4.5}$$

Nun setzt man (4.3) und (4.5) in die Gleichung (4.2) ein:

$$\begin{aligned} F_T &= i_R - i_A - i_B - i_C + \tfrac{r_R - r_A - r_B - r_C}{2} + 2 \\ &= (i_A + i_B + i_C + i_T + r_T - 3) - i_A - i_B - i_C + \tfrac{[(r_A + r_B + r_C - r_T) - r_A - r_B - r_C]}{2} + 2 \\ &= i_T + r_T - 3 - \tfrac{r_T}{2} + 2 \\ &= i_T + \tfrac{r_T}{2} - 1. \end{aligned}$$

Somit ist die Formel (4.1) auch für ein beliebiges Dreieck bewiesen.

Nun wollen wir von dem Spezialfall beliebiger Dreiecke auf den allgemeinen Fall beliebiger Gittervielecke schließen. Zunächst einmal stellt man fest, dass sich die Formel (4.1) beim Zusammenlegen von beliebigen Vielecken vererbt, da man bereits weiß, dass sich jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen lässt. Nun untersucht man, wie sich die Flächeninhalte und Punkte von Vielecken beim Zusammenlegen verhalten. Dazu betrachtet man zwei einfache Vielecke V_1 und V_2, die der Formel (4.1) entsprechen. Nun nimmt man an, dass V_1 und V_2 nur eine gemeinsame Kante besitzen, auf welcher sich k Gitterpunkte befinden. Nun werden die beiden Vielecke zu einem großen Vieleck V vereinigt, indem man die gemeinsame Kante beseitigt. Daraus ergibt sich für den Flächeninhalt F von V

$$F = F_1 + F_2 = (i_1 + \frac{r_1}{2} - 1) + (i_2 + \frac{r_2}{2} - 1).$$

Des Weiteren kann man für die inneren Punkte von V gleich

$$i = i_1 + i_2 + (k - 2)$$

notieren. Für die Randpunkte von V ergibt sich der Ausdruck

$$r = r_1 + r_2 - 2k + 2.$$

Zusammenfassend ergibt sich folgende Auswertung:

$$\begin{aligned} i + \frac{r}{2} - 1 &= i_1 + i_2 + (k-2) + \frac{(r_1 + r_2 - 2k + 2)}{2} - 1 \\ &= (i_1 + \frac{r_1}{2} - 1) + (i_2 + \frac{r_2}{2} - 1) \\ &= F. \end{aligned}$$

Somit ist die Formel (4.1), die so genannte *Picksche Formel*, auch für einfach zusammengesetzte Vielecke und damit auch für ein beliebiges Vieleck bewiesen. (Vgl. Hesse 2009, 151-163)

4.2.2 Ähnliches oder einfacheres Problem

Durch Zurückführen auf ein analoges Problem kann dieses leichter gelöst werden (vgl. Grieser 2013, 258).
Durch Umformulierung und Analogiebildung sollen Gemeinsamkeiten mit bereits gelösten oder einfacheren Problemen entdeckt werden. Durch diese äquivalenten Umformungen kann einerseits beziehungsreiches Wissen aufgebaut werden, welches die Transferleistungen erhöht, und andererseits wird es durch die vermehrten Assoziationen wahrscheinlicher Ideen für einen Lösungsplan zu entwickeln. (Vgl. Schwarz 2006, 32f)

Kann man zunächst ein einfacheres Problem betrachten (vgl. Grieser 2013, 258)?
Eine weitaus anspruchsvollere Tätigkeit ist die Analogiebildung. Darunter versteht man die Transformation eines Problems in ein überschaubares System. Die Lösungsideen, welche für das transferierte, einfachere Problem entwickelt wurden, müssen dann noch für das ursprüngliche Problem nutzbar gemacht werden. (Vgl. Schwarz 2006, 33)

4.2.3 Vorwärtsarbeiten

Was kann man mit den gegeben Voraussetzungen machen (vgl. Grieser 2013, 258)?

Die gegebene Definitionen von Problemlösen legt es nahe sich von einem vorhandenen Anfangszustand (A) zu einem Zielzustand (Z) zu bewegen. Die Lösungssuche beginnt hierbei bei den vorhanden Daten der Problemstellung. Aus diesem Grund zählt Schwarz (2006, 159) diese „*datengetriebene*“Strategie zu den induktiven Methoden. (Vgl. Schwarz 2006, 159)

Jedoch wird das reine Vorwärtsarbeiten hauptsächlich von Experten angewendet, da diese besser die tiefere Struktur der Problemstellung identifizieren können und ein breiteres bereichsspezifisches Wissen haben. Zudem gibt es selten einen direkten Weg vom Ausgangszustand zum Zielzustand, wodurch man, ohne das notwendige Expertenwissen, ratlos den möglichen Verzweigungen der Problementwicklung ausgesetzt ist. (Vgl. Schwarz 2006, 162)

Um diese Problematik in den Griff zu bekommen, könnte man eine Variante des Vorwärtsarbeitens benutzen. Diese Variante ist unter dem Namen „*Hill Climbing*“bekannt und besagt in etwa folgendes: Möchte man vom Fuße eines Berges auf dessen Gipfel und es gibt dabei keine offensichtliche Aufstiegsroute, so sollte man am besten seinen Weg so wählen, dass dieser ständig bergauf verläuft. Falls man während des Aufstiegs bemerken sollte, dass es bergab geht, so sollte man umdrehen und die Richtung korrigieren. Im Bezug auf den Problemlösungsprozess bedeutet dies, dass man nur solche Teilziele verfolgen sollte, welche einem dem Zielzustand näher bringen. Wobei man hierbei erwähnen sollte, dass es manchmal sogar nützlich oder unvermeidbar sein kann, Teilziele zu verfolgen, die weiter weg vom angestrebten Zielzustand sind. Eventuell kann man gerade dadurch einen besseren Lösungsweg oder gar erst die Lösung finden. (Vgl. ebd., 162)

4.2.4 Rückwärtsarbeiten

Durch genaue Zielanalyse soll man überlegen, wie man das Ziel erreichen kann (vgl. Grieser 2013, 258). Diese Prinzip des Perspektivenwechsels wird auch „*Pappos-Prinzip*“genannt (vgl. Hesse 2009, 305). Bei dieser heuristischen Methode beginnt man beim Zielzustand und versucht von diesem zum Ausgangszustand zu gelangen. Wobei man diese Heuristik eher dann verwenden sollte, wenn die Lösung bzw. der Zielzustand bekannt oder leicht zu ermitteln ist, aber das zielgerichtete Vorwärtsarbeiten in einer Sackgasse endet. Die logische Schlussweise des Modus ponens spielt hierbei häufig eine wichtige Rolle. So versucht man ausgehend vom Ziel Aussagen zu finden, aus welchen der Zielzustand folgern würde. (Vgl. Hesse 2009, 306)

Hesse (2009, 308f) verdeutlicht die Vorgehensweise an einer sehr bekannten Knobelaufgabe namens „*Kokosnuss-Problem*“. Die Knobelaufgabe lautet in etwa wie folgt:

Drei Männer und ein Affe stranden auf einer Insel und sammeln Kokosnüsse als Nahrung. Diese wollten die drei Männer am nächsten Tag gleichmäßig untereinander aufteilen. Als aber ein Mann in der Nacht aufwachte, beschloss dieser sich seinen Anteil gleich zu sichern. Daher teilte er den Haufen in drei gleiche Teile, wobei eine Kokosnuss übrig blieb. Diese gab er dem Affen, dann versteckte er seinen Anteil und den Rest legte er wieder auf einen Haufen. Nach und nach wachten die anderen beiden Männer auf und taten exakt dasselbe.
Am nächsten Tag wurden die restlichen Kokosnüsse gerecht durch drei geteilt, wobei wieder eine Kokosnuss übrig blieb, die der Affe bekam. Wie viele Kokosnüsse hatten die Männer zu Beginn gesammelt? (Vgl. ebd., 308f)

Sei nun n die Anzahl der anfangs vorhandenen Kokosnüsse, sowie n_1, n_2 und n_3 die Anzahl der Kokosnüsse die sich die drei Männer in der Nacht zur Seite legen. Daraus ergibt sich, dass der i-te Schiffbrüchige $2n_i$ Kokosnüsse hinterlässt. Zudem sei n_4 die Anzahl der Kokosnüsse, die jeder der drei Männer am Morgen bei der Verteilung noch erhält. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3n_4 + 1 &= 2n_3 \\ 3n_3 + 1 &= 2n_2 \\ 3n_2 + 1 &= 2n_1 \\ 3n_1 + 1 &= n \end{aligned}$$

Nun möchte man aus diesen Gleichungen eine Beziehung zwischen n_4, den am Ende für jeden noch verbleibenden Kokosnüssen, und der Gesamtanzahl n der Kokosnüsse herstellen. Dazu muss man die Gleichungen folgendermaßen modifizieren:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (n_4 + 1) &= 2 \cdot (n_3 + 1) \\ 3 \cdot (n_3 + 1) &= 2 \cdot (n_2 + 1) \\ 3 \cdot (n_2 + 1) &= 2 \cdot (n_1 + 1) \\ 3 \cdot (n_1 + 1) &= n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tfrac{3}{2}) \cdot (n_4 + 1) &= n_3 + 1 \\ (\tfrac{3}{2}) \cdot (n_3 + 1) &= n_2 + 1 \\ (\tfrac{3}{2}) \cdot (n_2 + 1) &= n_1 + 1 \\ 3 \cdot (n_1 + 1) &= n + 2 \end{aligned}$$

Daraus lässt sich durch schrittweises Rückwärtseinsetzen leicht ableiten, dass $n + 2 = \frac{3^4}{2^3} \cdot (n_4 + 1)$ ist. Aus dieser Tatsache kann man, durch kurze Überlegungen zur Teilbarkeit, folgern, was n_4 und somit n sein könnte. Da sowohl n als auch n_4 ganzzahlige Anzahlen sein müssen und zudem 3^4 und 2^3 teilerfremd sind, ergibt sich, dass der Faktor 2^3 im Nenner den Faktor $(n_4 + 1)$ teilen muss, da die linke Seite der Gleichung auch ganzzahlig ist. Daraus ergibt sich für das kleinste n_4 und somit für die kleinste Anzahl n von gesammelten Kokosnüssen, wenn $2^3 = (n_4 + 1)$ ist, dass, $n_4 = 7$ ist und somit $n = 79$ ist. Alle möglichen Lösungsfälle erhält man, wenn $k \cdot 2^3 = (n_4 + 1)$ ist, für $k \in \mathbb{N}$, und somit ist $n = k \cdot 3^4 - 2$ die Gesamtanzahl der Kokosnüsse. (Vgl. ebd., 309ff)

4.2.5 Schrittweises Vorarbeiten

Durch Setzen von sinnvollen Zwischenzielen soll man sich der Lösung des Problems schrittweise annähern (vgl. Grieser 2013, 258). Diese Suche nach Teilzielen wird in der Mathematik ebenfalls als *Pappos-Prinzip* bezeichnet (vgl. Schwarz 2006, 216). Diese sukzessive Approximation kennzeichnet zudem den generellen Verlauf von verschiedenen Wissenschaften (vgl. Hesse 2009, 255).

Hesse (2009) veranschaulicht dies, indem er die verschiedenen Ansichten über die Gestalt der Erde in der geschichtlichen Entwicklung aufzählt. Hatte man zu Beginn die Ansicht, dass die Erde eine Scheibe sei, so wurde dies ab Aristoteles, welcher bereits an die Kugelgestalt glaubte, widerlegt. Aber auch die Kugelgestalt konnte sich nicht halten, so wurde von Isaac Newton gezeigt, dass auch die Kugelgestalt nur eine Approximation ist, da die Erde ein rotierender Körper ist. Jedoch entsprach auch Newtons Ansicht noch nicht zur Gänze der Realität, was man bereits seit 1950 durch den Einsatz von Satelliten beweisen konnte. Den gesamte Entwicklungsprozess der Wissenschaften kann man daher als einen sukzessiven Approximationsprozess von Modellen an die tatsächliche Realität deuten. (Vgl. Hesse 2009, 255-259)

In der Mathematik versteht man unter einer sukzessiven Approximation ein Iterationsverfahren. Ein sehr bekanntes Iterationsverfahren aus der numerischen Mathematik ist das ***Newton-Verfahren***.
Bei diesem iterativen Verfahren geht es darum die Nullstelle einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zu bestimmen. Die Grundidee ist hierbei die Funktion F zu linearisieren. Hierzu betrachtet man nun den eindimensionalen Fall etwas näher.
Gegeben sei eine reelle Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Weiters sei f auf I mindestens zweimal stetig differenzierbar. Gesucht wird nun ein Wert $x_1 \in I$ mit $f(x_1) = 0$. Hierbei setzt man voraus, dass f in I

mindestens eine Nullstelle besitzt. Nun versucht man die Nullstelle mittels einer Iteration $x_{j+1} = \Phi(x_j)$ anzunähern, wobei Φ eine geeignete Iterationsfunktion ist, welche in Abhängigkeit von f konstruiert werden muss. (Vgl. Schabak und Wendland 2005, 107)

Bei diesem Verfahren approximiert man die Funktion f durch die Tangente, welche man. durch eine gegebene Näherung x_0 für die Nullstelle x_1 erhält. Nun gilt

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

Falls $f(x_1) = 0$ die gesuchte Nullstelle ist, so erhält man

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

(Vgl. Bollhöfer und Mehrmann 2004, 142)

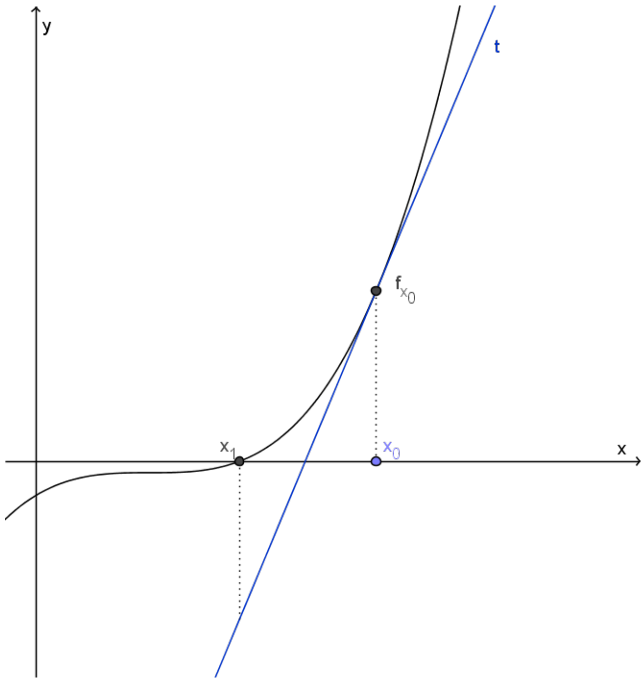

Abbildung 4.4: Newton-Verfahren, nach: Bollhöfer und Mehrmann 2004, 142

Diese Idee wird dabei folgendermaßen fortgesetzt: Zunächst wird an einen gegeben Näherung x_j für die Nullstelle der Funktion f die zugehörige Tangente an f bestimmt. Die nächste Näherung x_{j+1} ist dann die Nullstelle dieser Tangente. Daher wird die Funktion f approximativ durch ihre Tangenten ersetzt. (Vgl. Schabak und Wendland 2005, 108)

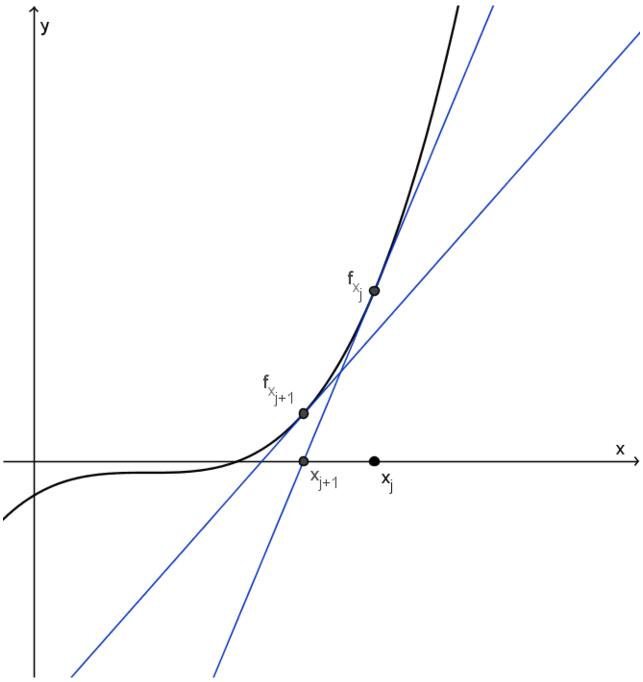

Abbildung 4.5: Approximation durch Tangenten, nach: Schabak und Wendland 2005, 108

Die Tangentengleichung ist nun durch

$$t_j(x) = f'(x_j) \cdot (x - x_j) + f(x_j)$$

gegeben. Durch Auflösen der Gleichung $t_j(x_{j+1}) = 0$ erhält man die folgende Iterationsvorschrift nach Newton

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}, j = 0, 1, 2, \dots,$$

welche nur wohldefiniert ist für $f'(x_j) \neq 0$. Falls $f'(x_j) = 0$ wäre, dann würde dies bedeuten, dass die Tangente t_j parallel zur x-Achse verläuft und im Fall $f(x_j) \neq 0$ keine Nullstelle hat. (Vgl. Schabak und Wendland 2005, 108)

4.2.6 Modularisieren

Darunter versteht man die Zerlegung eines Problems in Subprobleme, welche womöglich leichter zu lösen sind. Indem man die Lösungen der Subprobleme kombiniert, soll eine Lösung für das Ausgangsproblem gefunden werden. Diese heuristische Strategie ist in der künstlichen Intelligenz von besondere Bedeutung und ist hier unter der Bezeichnung „*Divide and Conquer*“bekannt. (Vgl. Schwarz 2006, 226)

„Das Modularisierungsprinzip basiert auf dem Motiv des «Devide et impera»: Teile und herrsche“ (Hesse 2009, 313). Diese heuristische Strategie gehört zu einer der wichtigsten Techniken in der Informatik. So ist zum Beispiel der modularisierter Algorithmus der binären Suche ein Prototyp dieser heuristischen Technik. (Vgl. Hesse 2009, 314)

Aber auch in der Mathematik finden sich zahlreiche Anwendungen, wie Hesse (2009) anhand folgendem Beispiel demonstriert:

„Münzen und Sequenzen. *Wie oft muss man im Mittel eine Münze werfen, bevor man eine Sequenz, bestehend aus exakt einer ungeraden Anzahl von* Kopf *(K), gefolgt von einmal* Zahl *(Z), geworfen hat (z.B. KZ oder KKKZ)“* (ebd., 317)?

Um diesen Problem zu lösen, teilt man die Menge aller Münzwurffolgen in drei disjunkte Teilmengen. Diese drei Teilmengen bestehen aus a. Folgen, die mit Zahl beginnen, b. Folgen, die mit 2-mal Kopf beginnen und c. Folgen, die mit Kopf gefolgt von Zahl beginnen.
Alle drei dieser Fälle kommen für eine Münzwurffolge in Frage, die länger als 1 ist. Man nimmt nun an, dass m die gesuchte mittlere Anzahl von Würfen ist, bis die gewünschte Sequenz auftritt. Betrachte man nun alle drei Fälle separat, so lässt sich folgendes Aussagen: In den Fällen a. und b. gibt es bezüglich der zu werfenden Sequenz keinen Fortschritt, daher benötigt man hier noch immer m weiter Würfe. Nur in dem Fall c. ist das Ziel bereits mit zwei Würfen erreicht.

Aus diesen Überlegungen erhält man folgende Gleichung

$$m = \frac{1}{2} \cdot (1 + m) + \frac{1}{4} \cdot (2 + m) + \frac{1}{4} \cdot 2$$

mit den Gewichtsfaktoren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$, welche die Wahrscheinlichkeiten für die drei genannten Fälle darstellen.
Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{m}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{m}{4} + \tfrac{1}{2} \\ m &= \tfrac{3}{2} + \tfrac{3m}{4} \\ 4m &= 6 + 3m \\ m &= 6 \end{aligned}$$

Eine Münze muss daher im Mittel 6-mal geworfen werden um die gewünschte Sequenz zu erhalten. (Vgl. ebd., 317f)

4.2.7 Muster erkennen

Lässt sich bei genauerer Betrachtung eine allgemeine Regel erkennen (vgl. Grieser 2013, 258)? Muster können auch gebildet werden, so können etwa durch den Einsatz von Farben bei den auftretenden Strukturen des Problems Muster entstehen, sodass womöglich Informationen über die Lösung abgeleitet werden können (vgl. Hesse 2009, 267). Hesse (2009) beschreibt dies als Färbungsprinzip und Engel (1999) widmet dieser Problemlösungsstrategie, welcher er „*Coloring Proofs*“nennt, ein ganzes Kapitel mit möglichen Problemstellungen dazu. Eine häufige Anwendung findet sich bei Problemstellungen, bei welchen es um Pflasterungen mit Dominosteinen geht. So hat der britische Physiker M.E. Fisher gezeigt, dass ein 8×8 Schachbrett auf $3604^2 = 12988816$ verschiedene Arten mit 2×1 Dominosteinen lückenlos und ohne Überlappungen gepflastert werden kann. (Vgl. Engel 1999, 25; Hesse 2009, 273)

Hesse (2009) zeigt zudem, wie man eine abstrakt mathematische Tatsache ganz leicht durch Verwendung des Färbungsprinzips beweisen kann. Bei *Fermats Kleinem Theorem* handelt es sich um folgende Teilbarkeitsaussage:*„Für jede natürliche Zahl n und jede Primzahl p ist $n^p - n$ durch p teilbar“* (Hesse 2009, 281).

Die Beweisargumentation lautet hierbei wie folgt:
Angenommen man hat Perlen in n verschiedenen Farben und möchte daraus verschiedene Perlenketten aus jeweils p Perlen herstellen, wobei diese mindestens zwei verschiedene Farben enthalten sollen. Die Frage, die sich nun stellt, ist, wie viele verschieden gefärbte Perlenketten es gibt, wobei unter verschieden gefärbt gemeint ist, dass jene Fälle auszuschließen sind, welche durch zyklische Verschiebung entstehen.
Zunächst beginnt man damit, dann man jeweils p Perlen auf einer geraden Schnur aufreiht. Da es für jede der p Perlen n Möglichkeiten der Farbwahl gibt, ergeben sich insgesamt n^p verschiedene Perlenanordnungen entlang der geraden Schnur.
Aufgrund der Tatsache, dass man vorausgesetzt hat, dass die entstehende Perlenkette nicht einfarbig sein soll, ergeben sich $n^p - n$ verschiedene Anordnungen durch Verwerfung der n Aufreihungen von Perlen gleicher Farbe. Einige von diesen Anordnungen führen zu derselben Perlenkette, wenn die Schnur zusammengeknüpft wird. So etwa, wenn man die Anordnungen längs der Schnur betrachtet und die Perlen von rechts beginnend nach ganz links überführt, erhält man wieder dieselbe Kette, wenn man sie zusammenknüpft.
Die Frage, die sich nun daraus ergibt, ist, wie oft muss man diese Überführungen durchführen bis man zu einer identischen Kette kommt. Diese identische Anordnung ergibt sich anscheinend dann, wenn man p-mal eine Perle von rechts nach ganz links überführt, sodass dann alle p Perlen wieder in derselben Startposition sind. Nun gilt noch zu prüfen, ob dies auch mit weniger Überführungen möglich wäre.
Angenommen k, wobei $k \leq p$ gilt, ist die kleinste positive Zahl von Überführungen, mit welcher eine identische Anordnung längs der Schnur erreicht

wird. Es gilt nun $p = r \cdot k + s$ mit $s = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Da die schrittweise Überführung von p einzelnen Perlen wieder die Ausgangsposition ergibt und ebenso die schrittweise Überführung von $r \cdot k$ Perlen, so folgt daraus, dass die schrittweise Überführung von s Perlen dasselbe leisten muss. Nun wurde aber k als die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft angenommen, daraus folgt zwingend, dass $s = 0$ sein muss. Daraus ergibt sich, dass k ein Teiler von p sein muss, wobei man hierbei daran erinnert werden sollte, dass p eine Primzahl ist. Aus dieser Tatsache folgt, dass $k = p$ und also $r = 1$ ist.
Aus diesen Überlegungen ergibt sich, dass von den $n^p - n$ mehrfarbigen Anordnungen von Perlen je p zu derselben Perlenkette führen, wodurch sich $(n^p - n)/p$ verschiedene Perlenketten ergeben. Daraus folgt, dass $(n^p - n)/p$ eine natürliche Zahl ist und somit $n^p - n$ durch p teilbar, was zu zeigen war. (Vgl. Hesse 2009, 282f)

4.2.8 Einführen geeigneter Begriffe und Notationen

Polya (1995, 75-83) erwähnt die immense Bedeutung von der Einführung und Verwendung von Bezeichnungen. Aufgrund der Tatsache, dass Sprechen und Denken seines Erachtens nach unerlässlich ist, folgt, „daß *[!] der Gebrauch von Zeichen unerläßlich [!] erscheint für den Gebrauch der Vernunft*“ (Polya 1995, 76). Da die Verwendung von mathematischen Symbolen einen ähnlichen Verwendungszweck wie Wörter hat, erscheinen die mathematischen Bezeichnungen als eine eigene Art der Sprache. Aus diesem Grund ist ein wichtiger Schritt bei der Lösung eines mathematisches Problem eine passende Bezeichnung festzulegen. (Vgl. Polya 1995, 75ff)

Zudem erleichtert diese nicht nur das Aufschreiben der Lösung, sondern auch das Nachdenken über das Problem (vgl. Grieser 2013, 63).

4.2.9 Verallgemeinerungen/ Generalisierung

Bei diesem Verallgemeinerungsprinzip geht es darum, dass sich ein Problem leichter lösen lässt, indem man es allgemeiner macht. Oft erhält man diese Verallgemeinerung indem man einfach bestimmte Voraussetzungen beseitigt oder die Nebenbedingungen der Problemstellung ändert. Lässt sich nun das allgemeinere Problem leichter lösen, so kann die gewonnene Lösung auf den Spezialfall angewendet werden. (Vgl. Hesse 2009, 137)

Bei dieser Problemlösestrategie geht es paradoxerweise darum, eine Vereinfachung der Problemstellung zu erreichen, indem man sich mit einer eigentlich anspruchsvolleren Problemstellung beschäftigt. Dennoch sei hier kurz angemerkt, dass es oft nicht so leicht ist, eine geeignete anspruchsvollere Aufgabenstellung zu finden. (Vgl. Hesse 2009, 143)

Trotzdem scheint diese Taktik besonders gut zu funktionieren, wenn die ursprüngliche Problemformulierung Informationen enthält, welche für die Lösung des Problems irrelevant sind. Durch das Weglassen dieser Distraktoren wird das Problem leichter überschaubar. (Vgl. Schwarz 2006, 82)

Hess (2009) demonstriert dies an folgendem Beispiel:
Es soll gezeigt werden, dass für $\forall n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2$ gilt. Die Summe $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ wird nun einfachheitshalber mit $a(n)$ bezeichnet. Die Idee, diese Aussage mittels vollständiger Induktion zu beweisen, daher von $a(n)$ auf $a(n+1)$ zu schließen, funktioniert hier leider nicht. Aus diesem Grund wird die Ungleichung verschärft, indem man die Konstante 2 durch $2 - \frac{1}{n}$ ersetzt.
Nun versucht man mittels vollständiger Induktion zu zeigen, dass sogar $a(n) \leq 2 - \frac{1}{n}$ für $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt.
Dies scheint für $a(1) = 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$ offensichtlich zu stimmen, womit der Induktionsanfang gesichert ist. In der Induktionsbehauptung nimmt man die Richtigkeit von $a(n) \leq 2 - \frac{1}{n}$ an. Damit ergibt sich folgendes für den

Induktionsschritt von $a(n)$ auf $a(n+1)$:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= a(n) + \tfrac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq (2 - \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= 2 - \tfrac{1}{n} \cdot (1 - \tfrac{1}{n+1}) \\ &= 2 - \tfrac{1}{n} \cdot (\tfrac{n}{n+1}) \\ &= 2 - \tfrac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Da nun $a(n) \leq 2 - \frac{1}{n}$ für $\forall n \in \mathbb{N}$ bewiesen ist, folgt nun auch die schwächere Aussage $a(n) \leq 2$. (Vgl. Hess 2009, 144ff)

4.3 Spezielle mathematische Problemlösestrategien

4.3.1 Rekursion

Grieser vergleicht die Idee der Rekursion mit der russischen Holzfigur Matrjoschka (vgl. Grieser 2013, 25). Der Grundgedanke dieses fundamentalen Werkzeugs der Mathematik ist ein Problem zu lösen, indem man es auf ein kleineres, gleichartiges Problem zurückführt. Normalerweise wird dabei das Problem auf stets einfachere Versionen von sich selbst zurück geführt. (Vgl. Hesse 2009, 242f)

Hesse (2009, 246f) demonstriert anhand des Rades des Theodorus, allgemein bekannter als Wurzelschnecke, wie die rekursive Strategie schon vor mehr als 2000 Jahren genutzt wurde. Bei diesem Exempel handelt es sich um eine rekursive Vorgehensweise, um die irrationalen Zahlen wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ u.s.w als Streckenlängen zu konstruieren. Als Ausgangspunkt wurde hierbei ein rechtwinkeliges Dreieck D_1, mit den Kathetenlängen 1 verwendet. Die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks D_1, ist dann die

Kathete im rechtwinkeligen Dreieck D_2, wobei die andere Kathete immer die Länge 1 besitzt. Dies geht so lange rekursiv weiter, sodass die Folge der Streckenlängen $\sqrt{n}$ entsteht. Die Hypotenuse h_n des Dreiecks D_n ist dann: $h_n = \sqrt{h_{n-1}^2 + 1}$. (Vgl. Hesse 2009, 246f)

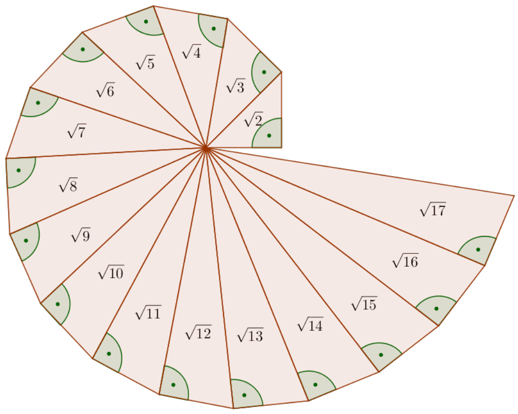

Abbildung 4.6: Rad des Theodorus - Wurzelschnecke, nach: Hesse 2009, 247

Technik der Rekursion

Allgemein versteht man unter einer Rekursion für eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Formel, welche jedes a_n mit Hilfe der anderen Folgenglieder $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ ausdrückt (vgl. Grieser 2013, 25).

Die Technik der Rekursion, wie sie meist bei Abzählproblemen auftritt, kann in zwei Schritte geteilt werden (vgl. Grieser 2013, 26f):

1. *Suche einer Rekursion:* Wenn man das Problem auf dasselbe Problem kleinerer Größe zurückführen kann, dann erhält man eine Rekursion für die gesuchte Zahlenfolge a_n.

2. *Auflösen der Rekursion:* Anschließend verwendet man die Rekursion

um eine Formel für a_n zu finden. Hierbei benötigt man auch eine Anfangsbedingung. Einfache Rekursionen lassen sich oft auflösen, indem man sie zum Beispiel wiederholt in sich selbst einsetzt.

Beispiel der Herleitung einer allgemeinen Formel mittels Rekursion

Grieser (2013, 45-51) zeigt anhand eines Abzählproblems, wie man durch das systematische Suchen einer Rekursion zur Lösung gelangt. Bei diesem Problem geht es um Triangulierungen. Darunter versteht man die Tatsache, dass jedes konvexe Polygon durch sich nicht schneidende gerade Verbindungen der Eckpunkte von diesen in Dreiecke unterteilt wird. Ein Polygon ist ein allgemeines n-Eck, dieses heißt konvex, wenn alle Diagonalen im Inneren des Polygons liegen. Bei dem folgendem Problem ist die Anzahl aller möglichen Triangulierungen eines konvexen n-Ecks gesucht, wobei Triangulierungen auch dann als unterschiedlich gelten, wenn diese durch Drehungen oder Spiegelungen ineinander übergeführt werden können. Die Anzahl aller möglichen Triangulierungen eines n-Ecks wird hierbei mit Tn bezeichnet.

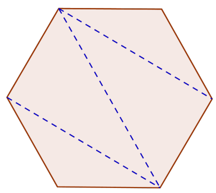

Abbildung 4.7: Triangulierung eines 6-Eck, nach: Grieser 2013, 45

Zunächst wird durch systematisches Probieren versucht ein Muster zu erkennen und daraus eine Rekursion abzuleiten. Jedoch lässt sich durch Vergleich der Anzahlen der Triangulierungen eines 3-Ecks, 4-Ecks, 5-Ecks

und 6-Ecks kein offensichtliches Muster erkennen. Nun wird versucht anhand des Problems selbst eine Rekursion zu finden, indem man versucht die Triangulierungen eins n-Ecks in Teilklassen aufzuteilen, welche kleinere Triangulierungen enthalten. Hierbei ist das größte Problem disjunkte Teilklassen zu erhalten, also Klassen, die keine gemeinsamen Elemente enthalten, da es sonst zu Mehrfachzählungen kommt.
Bei der Suche nach einer disjunkten Unterteilung des Problems stößt man auf folgende Idee: Man wählt eine beliebige Seite des n-Ecks aus, die bei jeder Triangulierung zu einem der Dreiecke gehören muss. Dadurch wird die Triangulierung nach der Lage der dritten Ecke des Dreiecks klassifiziert. Für ein 6-Eck würden sich demnach folgende 4 Klassen ergeben.

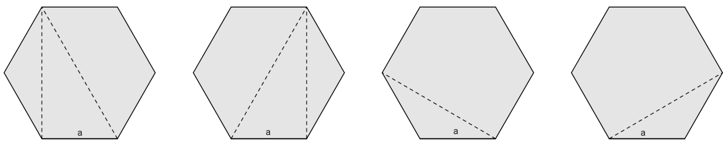

Abbildung 4.8: Einteilung in disjunkte Klassen, nach: Grieser 2013, 49

Dadurch erhält man rechts und links vom strichlierten Dreieck konvexe Polygone mit weniger Ecken. Die Anzahl der Triangulierungen eines n-Ecks kann nun rekursiv angegeben werden, indem man die Triangulierungen der kleineren Polygone zählt und kombiniert.
Bei einem beliebigen konvexen n-Eck, dessen Ecken mit P_j, wobei $j = 1, ..., n$ ist, bezeichnet werden, wird die Triangulierung in disjunkte Klassen geteilt. Jede dieser Klassen ist durch die dritte Ecke des Dreiecks bestimmt, welches die Seite P_1P_n enthält. Dieses Dreieck wird mit D und seine dritte Ecke mit P_k, wobei $k = 2, ..., n-1$ sein kann, bezeichnet. Für jeden Wert von k erhält man eine Klasse. Das Dreieck D zerlegt das n-Eck rechts in ein k-Eck und links in ein $(n-k+1)$-Eck, welche ebenfalls trianguliert

und miteinander kombiniert werden können. Für $k = 2$ beziehungsweise $k = n - 1$ erhält man links oder rechts kein Polygon, sondern nur ein Zweieck, dass nicht trianguliert werden kann.
Dadurch erhält man nun folgende Anzahlen an Triangulierungen für jedes k:

Tabelle 4.1: Anzahlen an Triangulierungen, nach: Grieser 2013, 50

k	Ecken	Triang.	Ecken	Triang.	kombinierte Triang.
2	2 (kein Polygon)	-	$n-1$	T_{n-1}	T_{n-1}
3	3	T_3	$n-2$	T_{n-2}	$T_3 \cdot T_{n-2}$
4	4	T_4	$n-3$	T_{n-3}	$T_4 \cdot T_{n-3}$
...	...	...	...	...	...
k	k	T_k	$n-k+1$	T_{n-k+1}	$T_k \cdot T_{n-k+1}$
...	...	...	...	...	...
$n-2$	$n-2$	T_{n-2}	3	T_3	$T_{n-2} \cdot T_3$
$n-1$	$n-1$	T_{n-1}	2 (kein Polygon)	-	T_{n-1}

Somit ist die Anzahl der Triangulierungen für jede disjunkte Klasse gefunden und die Gesamtanzahl der Triangulierungen des n-Ecks ergibt sich aus deren Summe.

$$T_n = T_{n-1} + T_3 \cdot T_{n-2} + T_4 \cdot T_{n-3} + \cdots + T_k \cdot T_{n-k+1} + \cdots + T_{n-2} \cdot T_3 + T_{n-1}$$

$$= T_{n-1} + \sum_{k=3}^{n-2} T_k \cdot T_{n-k+1} + T_{n-1}$$

Setzt man noch für $T_2 := 1$ ein , so erhält man:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k \cdot T_{n-k+1},$$

was die gesuchte Rekursion ist. (Vgl. Grieser 2013, 45-51)

4.3.2 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein grundlegendes Beweisverfahren der Mathematik und basiert auf demselben Prinzip wie die Technik der Rekursion.

Auch hier gilt das Problem auf ein analoges Problem kleinerer Größe zurück zu führen. Die vollständige Induktion ist die Umsetzung dieses Grundgedankens bei Beweisproblemen. (Vgl. Grieser 2013, 55)

Man bedenke hierbei, dass man die endgültige Sicherheit einer Lösung nur durch einen Beweis erhält. Viele andere Wissenschaften verwenden meist die unvollständige Induktion. Diese schließen von einigen speziellen Fällen auf die Allgemeinheit, was durchaus für andere Wissenschaften angemessen ist. (Vgl. Schwarz 2006, 144)

Auch in der Mathematik gibt es Heurismen der unvollendeten Induktion. Schwarz (2006, 145) beschreibt diese als Formen induktiven Schließens, die auf plausibles, aber nicht auf formallogisch begründeten Verallgemeinerungen einzelner Beobachtungen setzen. Als Heurismen der unvollendeten Induktion werden das systematische Probieren, das Vorwärtsarbeiten, sowie die Approximation genannt. (Vgl. Schwarz 2006, 145-189)

Das Induktionsprinzip

Zu Beginn hat meine eine gewisse Behauptung $A(n)$ über natürliche Zahlen n. Beim Induktionsanfang wird diese Behauptung zunächst für einfache Fälle getestet. Falls diese Aussage sich für diese Fälle als richtig erweist, so nennt man diese nun Induktionsvoraussetzung bzw. Induktionsannahme. Dies bedeutet, dass man annimmt, dass diese Behauptung für alle natürlichen Zahlen n stimmt und somit auch für $n + 1$, was die Induktionsbehauptung ist. Nun folgt der Induktionsschluss, bei diesem wird durch einen Beweis, bei welchen man die Induktionsbehauptung verwendet, gezeigt, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt. (Vgl. Grieser 2013, 55)

Diese Darstellung löst immer wieder ein bestimmtes Misstrauen aus. Ein häufig genannter Kritikpunkt gegen die vollständige Induktion lautet, dass das was bewiesen werden soll, bereits als Prämisse vorausgesetzt wird. Jedoch stimmt dies nicht, da man im Induktionsschritt eine bedingte Aussage beweist. Wenn daher die zu beweisende Aussage für einen bestimmten Fall richtig ist, dann ist sie auch für den folgenden Fall richtig. Es handelt sich daher um ein bedingtes Schließen. (Vgl. Hesse 2009, 128f)

Beispiel eines Induktionsbeweises

Der junge Gauß bekam von seinem Lehrer Büttner die Aufgabe die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Dabei erkannte er, dass bei der Summenbildung aus jeweils zwei Zahlen die Zahl 101 herauskam und zwar genau 50-Mal. Daher brauchte der junge Gauß zur Lösung dieser Aufgabe nur eine einfache Multiplikation zu rechnen. (Vgl. Wussing 1976, 11)

Allerdings könnte man dabei auch folgenden Trick benutzen: Man schreibt die Zahlenreihe zweimal auf und zwar einmal vorwärts beginnend mit 1 und einmal rückwärts beginnend mit 100.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & 99 & 100 \\ 100 & 99 & \dots & 2 & 1 \\ \hline 101 & 101 & \dots & 101 & 101 \end{array}$$

Nun bemerkt man, dass wenn man die beiden Zahlenreihen addierte, immer 101 herausbekommt. Die Zahl 101 kommt insgesamt 100 Mal heraus, was eine Gesamtsumme von $100 \cdot 101$ ergibt. Da jedoch die Zahlen von 1 bis 100 zweimal zusammengezählt wurden, muss noch die Summe durch 2 dividiert werden. (Vgl. Grieser 2013, 20f)

Die **gaußsche Summenformel** lautet daher:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beim Induktionsbeweis beginnt man nun mit der *Behauptung:* Für alle

$n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Einfachheitshalber bezeichnet man nun die Summe der natürlichen Zahlen 1 bis n mit S(n).

Nun folgt der *Induktionsanfang*: Hierbei zeigt man, dass die Aussage auch für $n = 1$ gilt. $S(1) = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ scheint offenbar richtig zu sein.

Die *Induktionsvoraussetzung* ist nun, dass die Formel auch gilt, wenn n beliebig ist.

Die *Induktionsbehauptung* ist nun, dass auch gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Schließlich folgt der eigentliche Teil des Beweises, der *Induktionsschluss*: Dabei wird die Induktionsvoraussetzung verwendet und umgeformt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (\sum_{k=1}^{n} k)+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\square$. (Vgl. Grieser 2013, 56)

Als Alternative könnte der *Induktionsschluss* auch folgendermaßen aussehen:

Um nun die gaußsche Summenformel für $n+1$ zu beweisen, muss gezeigt werden, dass folgendes gilt:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$$

Dazu beginnt man auf der linken Seite der zu beweisenden Gleichung:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \underbrace{(1+2+3+\cdots+n)}_{\text{Benutzung der Induktionsvoraussetzung}} +(n+1) \\
&= \underbrace{\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)}_{\text{Zusammenfassen in einen Bruch}} \\
&= \underbrace{\frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2}}_{n+1 \text{ herausheben}} \\
&= \underbrace{\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}}_{n+2=(n+1)+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

□

Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung konnte also die linke Seite der Gleichung in die rechte Seite umgeformt werden. Damit ist die Gleichung auch für $n+1$ bewiesen und da n beliebig war, auch für alle natürlichen Zahlen.

Grenzen der Induktion

Die vollständige Induktion ist zwar ein nützliches Beweisverfahren, allerdings ist sie nutzlos um die Formel herzuleiten. Daher muss man hierfür die Formel schon kennen bzw. vermuten, was sie sein könnte. Zudem bekommt man dadurch auch keine Information, woher die Formel stammt. Zusammengefasst kann man sagen, dass der Induktionsbeweis zwar eine Sicherheit bezüglich der Richtigkeit der Formel liefert, jedoch hat man meist das Problem trotzdem nicht richtig verstanden. (Vgl. Grieser 2013, 57)

4.3.3 Schubfachprinzip

Das Schubfachprinzip, auch manchmal *Dirichletsche Schubfachprinzip* (vgl. Schwarz 2006, 133) oder *Dirichlet-Prinzip* (vgl. Hesse 2009, 86), gehört zu den wenigen allgemeinen Prinzipien der Mathematik. Die Schwierigkeit besteht darin zu erkennen, wo man es als Hilfsmittel einsetzen kann. Eine häufige Anwendung findet sich bei Existenzbeweisen. (Vgl. Grieser 2013, 173)

Die Formulierung des Schubfachprinzips geht auf den Mathematiker Dirichlet zurück und lautet einfach ausgedrückt:
„Verteilt man mehr als n Perlen auf n Schubfächer, so gibt es mindestens ein Schubfach, dass mehr als eine Perle enthält“ (Mayer 2003, 14).

In der Sprache der Mathematik lässt sich dieses Prinzip wie folgt definieren: Gegeben seien eine n-elementige Menge X, eine k-elementige Menge Y sowie eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$. Ist $k < n$, so existiert mindestens ein $y \in Y$ mit $|f^{-}1(y)| > 1$. (Vgl. Schwarz 2006, 133)

Einfache Beispiele zur Verdeutlichung wären (vgl. Grieser 2013, 174):
Unter 8 Personen gibt es zwei, die am selben Wochentag geboren sind (Schubfächer: Wochentage. Perlen: Personen).
In einer Schule mit 367 SchülerInnen gibt es mindestens zwei SchülerInnen, die am gleichen Tag Geburtstag haben (Schubfächer: 365 Tage. Perlen: Anzahl der SchülerInnen).

Bezüglich der Anwendung dieses Prinzips lassen sich stets zwei Schritte erkennen (vgl. Hesse 2009, 91):

1. Zunächst müssen die Objekte, für welche man zeigen will, das mindestens eine bestimmte Anzahl von ihnen eine bestimmte Eigenschaft hat, bestimmt werden.

2. Des Weiteren müssen die Schubfächer, daher die verschiedenen Klassen, in welcher alle Objekte eine bestimmte Eigenschaft haben, identifiziert werden. Wobei natürlich jedes Objekt zu einer bestimmten Klasse gehören muss.

Stellt man sich die Frage, wie viele Personen man braucht, um behaupten zu können, dass zum Beispiel zwei, drei oder a Personen am selben Tag Geburtstag haben, so kommt man auf die ***Verallgemeinerung des Schubfachprinzips***. Dieses besagt:
Seien $a, n \in \mathbb{N}$. Verteilt man $an + 1$ Perlen auf n Schubfächer, so enthält mindestens ein Fach mehr als a Perlen (vgl. Grieser 2013, 175).

Anwendungsbeispiel: Approximation durch Brüche

Das Approximationsproblem beschäftigt sich mit der Frage, wie gut man beliebige reelle Zahlen a durch Brüche annähern kann (vgl. Grieser 2013, 179).

Eine sehr simple Vorgehensweise bei dieser Fragestellung wäre, wenn man einfach die Dezimaldarstellung von a nach einigen Stellen abschneidet, sodass man eine endliche Dezimaldarstellung erhält, welche man auf jeden Fall als Bruch mit ganzen Zahlen darstellen kann. Die Approximation könnte hierbei durch Hinzufügen weiteren Stellen einfach verbessert werden. (Vgl. Grieser 2013, 179)

Eine weitere logische Überlegung wäre, dass wenn der Bruch $\frac{m}{n}$ nahe bei a liegen sollte, so müsste na nahe bei der ganzen Zahl m liegen (vgl. ebd., 180).

Betrachtet man nun diese Problemstellung etwas genauer, so könnte man nun untersuchen, wie bei einer Approximation einer beliebigen reellen Zahl a durch Brüche $\frac{m}{n}$ der Approximationsfehler ε mit der Größe des Nenners n zusammenhängt. Diesen Zusammenhang könnte man folgendermaßen anders ausdrücken:„Es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $|a - \frac{m}{n}| \leq \varepsilon$ ist“(ebd., 182). Unter diesem Gesichtspunkt ergeben sich für das Approximationsproblem sehr interessante Fragestellungen, in welchen es um den Zusammenhang zwischen a, n und den Approximationsfehler ε geht. (Vgl. ebd., 181f)

Dazu betrachtet man nun folgendes Problem:
„Sei $N \in \mathbb{N}$. Finde eine möglichst kleine Zahl δ, abhängig von N, für die Folgendes gilt: Für jede reelle Zahl $a > 0$ weicht mindestens eine der Zahlen $a, 2a, \ldots, Na$ um höchstens δ von einer ganzen Zahl ab" (ebd., 183).

Um ein Gefühl für die Problemstellung zu bekommen, betrachtet man nun Spezialfälle. Für den Fall $N = 1$ gilt offenbar, dass jedes a um höchstens $\delta = \frac{1}{2}$ von einer ganzen Zahl abweicht. Der nächste Fall, für $N = 2$, ist etwas komplizierter, hierzu muss man bereits die Zahlen a und $2a$ betrachten (vgl. Grieser 2013, 183).

An dieser Stelle ist es notwendig eine geeignete Notation einzuführen. Man schreibt nun $frac(x)$ für den Nachkommaanteil einer reellen Zahl x, wobei $x \geq 0$ sei. Daher lässt sich nun jedes $x \in \mathbb{R}$, mit $x \geq 0$, folgendermaßen darstellen: $x = \lfloor x \rfloor + frac(x)$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl ist, die kleiner oder gleich x ist. Da nun $frac(x) = x - \lfloor x \rfloor$ gilt, ist $frac(x) \in [0, 1)$. Somit hängt der Abstand einer reellen Zahl zur nächsten ganzen Zahl nur von ihren Nachkommastellen ab, wodurch es ausreicht die Zahlen $frac(a), frac(2a)$ zu betrachten. (Vgl. ebd., 184)

Für den Fall $N = 2$ kommt man nun zu der Vermutung, dass $\delta = \frac{1}{3}$ ist. Um diese Vermutung zu bestätigen, betrachtet man das Intervall $[0, 1)$ und teilt es in drei gleich große Teile. Es gilt nun zu zeigen, dass mindestens eine der Zahlen $frac(a), frac(2a)$ für jedes a in einem der äußeren Drittel liegt. Dazu nimmt man an, dass keine der Zahlen in diesen liegen, so müssten, nach dem Schubfachprinzip, beide im mittleren Drittel liegen. Dann wäre aber ihr Abstand kleiner als $\frac{1}{3}$ und folglich müssten auch $2a - a = a$ um weniger als $\frac{1}{3}$ von einer ganzen Zahl abweichen, und somit würde $frac(a)$ doch in einem der äußeren Intervalle liegen, was ein Widerspruch zu der Annahme wäre. (Vgl. ebd., 184f)

Die kleinste Zahl δ, für die das Problem gelöst zu sein scheint, ist $\delta = \frac{1}{N+1}$. Um dies zu beweisen benützt man folgendes Lemma: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a, b \geq 0$. Aus $|frac(a) - frac(b)| < \delta$ folgt, dass $a - b$ um weniger als δ von einer ganzen Zahl abweicht. (Vgl. ebd., 185)

Beweis:
Um auszuschließen, dass es nicht ein $\delta < \frac{1}{N+1}$ geben kann, für das die Aussage erfüllt ist, reicht es ein Beispiel für a, wie etwa $a = \frac{1}{N+1}$, anzugeben. Für diesen Fall wäre jede der Zahlen $a, 2a, 3a, \ldots, Na$ mindestens $\frac{1}{N+1}$ von der nächsten ganzen Zahl entfernt.
Um nun zu zeigen, dass die Aussage für $\delta = \frac{1}{N+1}$ stimmt, zerlegt man das Intervall $[0, 1)$ in die $N + 1$ Intervalle

$$I_0 = [0, \frac{1}{N+1}], I_1 = [\frac{1}{N+1}, \frac{2}{N+1}], \ldots, I_N = [\frac{N}{N+1}, 1).$$

Nun nimmt man an, dass keine der Zahlen na, mit $n = 1, 2, \ldots, N$ von einer ganzen Zahl um höchstens $\frac{1}{N+1}$ abweicht. Dann würde keine der Zahlen $frac(na)$ in den Intervallen I_0 oder I_N liegen und folglich müssten alle diese N Zahlen in den restlichen $N - 1$ Intervallen liegen. Nach dem Schubfachprinzip müssten mindestens zwei dieser Zahlen im selben Intervall liegen. Angenommen $frac(ka)$ und $frac(la)$ mit $k > l$ liegen im selben Intervall. Da aber jeder Intervall die Länge $\frac{1}{N+1}$ hat, so müsste nun, nach obigen Lemma, $ka - la$ um weniger als $\frac{1}{N+1}$ von einer ganzen Zahl abweichen. Nun gilt aber wegen $k, l \in 1, \ldots, N$, dass $k - l \in 1, \ldots, N - 1$ ist und somit ist $ka - la = (k - l)a$ eine der Zahlen na, was ein Widerspruch zur Annahme wäre. Somit war die Annahme falsch und die Behauptung ist gezeigt. (Vgl. ebd., 186)

In diesem Problem wurde folgendes gezeigt:„Gegeben a, N, dann gibt es ganze Zahlen $n \leq N$ und m, so dass $|na - m| \leq \frac{1}{N+1}$ gilt“(ebd., 187). Dies wird als *Approximationssatz von DIRICHLET* bezeichnet (vgl. ebd, 188).

4.3.4 Extremalprinzip

In der Wissenschaft treten vielfach Extreme als ein faszinierendes Phänomen auf. Betrachtet man beispielsweise eine Seifenblase, so versucht diese ihre Oberfläche minimal zu halten und nimmt daher die Form einer Kugel an. Anhand dieses Beispieles sieht man, dass extreme Formen oft besondere Eigenschaften, wie Symmetrie besitzen. Es gibt zudem verschiedene Anwendungsformen des Extremalprinzips. (Vgl. Grieser 2013, 195)

Das *allgemeine Extremalprinzip* besagt daher, wenn etwas extremal wird, dann besitzt es besondere Strukturen (vgl. Grieser 2013, 196).
Wenn man dieses allgemeine Prinzip anders interpretiert, erhält man eine Problemlösestrategie. *Sucht man ein Objekt mit besonderen Eigenschaften, sollte man versuchen das Objekt durch eine extreme Eigenschaft zu charakterisieren.* Diese Problemlösestrategie dient sehr oft als Hilfsmittel für Existenzbeweise. (Vgl. ebd., 202).

Extremalprinzip bei Existenzbeweisen

Anhand eines Problems über Turniere wird das Schema eines Existenzbeweises mit Hilfe des Extremalprinzips erläutert. Das folgende Problem lautet:

> *„In einem Turnier spielt jeder gegen jeden ein Mal. Dabei gibt es kein Unentschieden. Am Schluss des Turniers fertigt jeder Spieler eine Liste an, auf der sowohl diejenigen Spieler stehen, gegen die er gewonnen hat, als auch die, gegen die diese gewonnen haben. Zeigen Sie, dass es einen Spieler gibt, auf dessen Liste alle anderen Spieler stehen“* (ebd., 202).

Um eine Übersicht über die Problemstellung zu erhalten, sollte man sich ein konkretes Beispiel anschauen. Betrachtet man ein Turnier mit 4 Spielern, so kann man dieses durch eine Graphik darstellen. In der unteren Abbildung sind die Punkte A,B,C und D die Spieler, während die Vektoren die Spiele darstellen; die Pfeile zeigen jeweils vom Gewinner zum Verlierer.

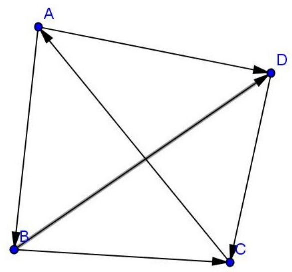

Abbildung 4.9: Turnier mit 4 Spielern, nach: Grieser 2013, 203

In diesem Beispiel stehen auf der Liste von Spieler A die Spieler B, C und D. Es ist zudem irrelevant, ob auf der Liste Spieler doppelt auftreten, da Spieler B sowohl gegen C, als auch gegen D gewonnen hat, während Spieler D nur gegen C gewonnen hat. Spieler A erfüllt zudem die Bedingung der Aufgabe, da auf seiner Liste alle anderen Spieler stehen. Daher gibt es in diesem Fall mindestens einen Spieler mit einer vollständigen Liste. Spieler B hat zudem auf seiner Liste ebenfalls alle anderen Spieler aufgelistet.
Um nun die Existenz eines Spielers mit vollständiger Liste zu zeigen, verwendet man das Extremalprinzip, indem man eine extreme Eigenschaft charakterisiert. Dabei nimmt man einfach an, dass Spieler A die meisten Spiele gewonnen hat.
Um nun daraus zu folgern, dass auf der Liste von Spieler A alle anderen Spieler stehen, verwendet man einen indirekten Beweis. Man nimmt einfach an, dass Spieler B nicht auf der Liste von A steht. Dann hat Spieler B sicher gegen A gewonnen, zudem hat B gegen alle Spieler gewonnen, gegen die auch A gewonnen hat. Hätte B nämlich gegen einen dieser Spieler verloren, so müsste B, laut Annahme, auf der Liste von A stehen. Daher hat Spieler B mehr Spiele als A gewonnen. Dies widerspricht jedoch der Annahme, dass Spieler A die meisten Spiele gewonnen hat. Aus diesem Grund muss die Annahme, dass Spieler B nicht auf der Liste von A steht, falsch gewesen sein und folglich stehen alle anderen Spieler auf As Liste. (Vgl. ebd., 202ff)

Diese Problemstellung kann formal folgendermaßen beschrieben werden (vgl. ebd., 204f):
Es sei eine Menge M von Objekten gegeben. Zudem sei eine beschriebene Eigenschaft E gegeben, welche diese Objekte haben können. Zu zeigen ist, dass es ein Objekt in M gibt, das die Eigenschaft E besitzt.
Versucht wird nun das Problem zu spezialisieren, sodass man auf eine neue Problemstellung übergehen kann. Dabei sucht man eine Größe, deren Extremalisierung auf die Eigenschaft E schließen lässt. Als Größe wird hierbei eine Abbildung verstanden, die jeden Objekt in M eine Zahl zuordnet, also $G : M \rightarrow \mathbb{R}$. Daher sollte dieses neue Problem die ursprüngliche Problemsituation als Verallgemeinerung enthalten. (Vgl. ebd., 204)

Der verwendete Existenzbeweis hat dabei folgende Struktur (vgl. ebd., 204f):

1. Sei $A \in M$, sodass $G(A)$ maximal ist, daher $G(A) \geq G(B)$ für $\forall B \in M$.

2. Man behauptet nun, dass A die Eigenschaft E hat.

3. Nun folgt ein indirekter Beweis, indem man annimmt, dass A nicht die Eigenschaft E hat. Daraus folgt, dass ein Objekt B existiert, sodass $G(B) > G(A)$ gilt. Dies widerspricht jedoch der Maximalität von $G(A)$. Daraus folgt, dass A die Eigenschaft E haben muss.

Die Art und Weise der Argumentation beruht auf folgenden Grundtatsachen (vgl. Mayer 2003, 77; Grieser 2013, 205):

1. Jede endliche nichtleere Menge reeller Zahlen enthält ein kleinstes und ein größtes Element.

2. Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen enthält ein minimales Element.

Extremalprinzip als allgemeine Problemlösestrategie

Das Extremalprinzip ist nicht nur als Hilfsmittel für Existenzbeweise nützlich, sondern auch als allgemeiner Leitgedanke. *In unübersichtlichen Situationen sollte man Objekte mit einer extremen Eigenschaft betrachten* (vgl. Grieser 2013, 211).

Das Extremalprinzip taucht in der Mathematik in zweierlei Zusammenhängen auf. Einerseits um Extrema selbst zu bestimmen, dies sind oft typische Optimierungsprobleme, und andererseits werden Extreme als Hilfsmittel für andere Zwecke verwendet, wie etwa für Existenzbeweise. (Vgl. Grieser 2013, 216)

Einteilung des Extremalprinzips

Nicola Haas (2000) versucht auf der Grundlage des allgemeinen Extremalprinzips, welches sie als Korrespondenzhypothese formuliert, eine genauere Einteilung des Extremalprinzips. Das Korrespondenzprinzip besagt, dass Objekte mit extremen Eigenschaften sehr oft auch andere interessante Merkmale aufweisen (vgl. Haas 2000, 56).

Dabei formuliert sie drei Substrategien des Extremalprinzips, welche sich durch die unterschiedliche Funktion des Extremalen unterscheiden.

1. *Das Extremalprinzip bei Existenzproblemen - Identifikationsfunktion:*
   Hier wird die Korrespondenzvermutung in ihrer ursprünglichen Form angewendet, in der Hoffnung, dass Objekte mit einer extremen Eigenschaft auch das gesuchte Merkmal aufweisen (vgl. Haas 2000, 57).

2. *Das Extremalprinzip bei allverneinenden Aussagen - Monsterfunktion:*
   Allverneinende Aussagen kann man als das Gegenstück zu Existenzbeweisen sehen. Anstatt zu zeigen, dass ein Objekt mit einer bestimmten Eigenschaft existiert, soll man nun beweisen, dass es kein

Objekt mit dieser Eigenschaft gibt. Hierbei verwendet man ebenfalls das Korrespondenzprinzip, jedoch in einem umgekehrten Sinn. Möchte man zeigen, dass ein Problem keine Lösung besitzt, dann lohnt es sich oft Extremfälle zu betrachten, in der Hoffnung, dass diese extreme Konstellation der gesuchten Eigenschaft am ehesten widerspricht. Man kombiniert daher die Korrespondenzvermutung mit der Methode des indirekten Beweises um einen Widerspruch zu erhalten. (Vgl. ebd., 74)

3. *Das Extremalprinzip bei Reduktionen der Komplexität - Determinationsfunktion:*
   Möchte man die Komplexität eines vielschichtigen Problems herabsetzen, so lohnt es sich, laut der Korrespondenzhypothese, Extremfälle zu untersuchen. Determinierende Objekte zeichnen sich dabei häufig durch ihre extremalen Eigenschaften aus. (Vgl. ebd., 78)

Das Extremalprinzip in der Psychologie

Nicole Haas (2000) findet auch eine Bedeutung des Extremalprinzips für die psychologischen Betrachtungen des Problemlösens. Als Anknüpfungspunkt nennt sie das Scheitern des Problemlösens, aufgrund einer Überlastung des Arbeitsgedächtnisses. Diese Überlastung kann durch den impliziten Einsatz des Extremalprinzips beseitigt werden. Durch die Konzentration auf Extremwerte wird Platz für das Wesentliche geschaffen. Folglich wird der Suchraum eingeschränkt, wodurch man sich mehr auf jene Bereiche konzentrieren kann, die für eine adäquate Bearbeitung des Problems hilfreich sind. Das Extremalprinzip kann zudem als eine Methode der Superzeichenbildung angesehen werden, indem Inhalte zu größeren Einheiten zusammengefasst werden. Dadurch wird wiederum Platz gespart. Auch bei der Wahrnehmungsselektion spielt das Extremalprinzip eine wichtige Rolle, da Eindrücke, welche besonders auffällig, daher extrem sind, leichter bewusst wahrgenommen werden. (Vgl. ebd., 162f)

4.3.5 La Descente Infinie - der unendliche Abstieg

Das Schema der Methode des unendlichen Abstiegs lässt sich folgendermaßen beschreiben:

> *„Gegeben sei eine Problemstellung mit der Eigenart, dass jede streng monoton fallende Folge von Lösungen des Problems endlich sein muss. Man versuche, aus der Annahme der Existenz einer Lösung des Problems eine unendliche Folge von immer kleineren Lösungen des Problems zu konstruieren oder aber einen unendlichen Prozess in zu setzen, der eine geeignete Größe von Schritt zu Schritt verkleinert, obwohl diese Größe nur endlich viele kleinere Werte als den Startwert annehmen kann. In beiden Fällen wird die Annahme der Existenz einer Lösung des Problems zum Widerspruch geführt und damit gezeigt, dass das Problem keine Lösung besitzt“* (Schwarz 2006, 204).

Eine Problemstellung kann vor allem dann mit dieser Strategie behandelt werden, wenn das Problem auf einer wohlgeordneten Struktur basiert. Besonders in der Zahlentheorie, wo die natürlichen Zahlen durch das Prinzip vom kleinsten Element wohlgeordnet sind. Aus diesem Grund wird das Prinzip des unendlichen Abstieges auch als eine Ausprägung des Extremalprinzips angesehen. (Vgl. Schwarz 2006, 204)

Schwarz (2006) zeigt anhand des unendlichen Abstiegs, wie man die Irrationalität von $\sqrt{n}$, wenn $n \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl ist, beweisen kann. Hierbei wählt man folgenden Widerspruchsbeweis:
Angenommen $\sqrt{n}$ wäre rational, dann würde eine Bruchdarstellung in der Form $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, mit $a, b \in \mathbb{N}$, existieren.
Um nun die Methode des unendlichen Abstiegs anwenden zu können, konstruiert man aus der Bruchdarstellung $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ eine neue Bruchdarstellung $\sqrt{n} = \frac{a_1}{b_1}$ mit $a_1 < a$ und $b_1 < b$. Dazu verwendet man die Tatsache, dass $\sqrt{n}$ nicht ganzzahlig ist und es daher ein $t \in \mathbb{N}$ mit $t < \frac{a}{b} < t + 1$ geben

muss.
Daraus erhält man $tb < a < tb - b$ bzw. $0 < a - tb < b$, wodurch man versuchen könne eine Bruchdarstellung von $\sqrt{n}$ mit dem Nenner $b_1 := a - tb < b$ zu finden.
Durch Quadrieren von $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ erhält man $a^2 = nb^2$. Aus diesem ergibt sich

$$a \cdot (a - tb) = nb^2 - atb = b \cdot (nb - ta) \text{ bzw. } \frac{a}{b} = \frac{nb - ta}{a - tb} =: \frac{a_1}{b_1}$$

mit $0 < b_1 = a - tb < b$ und $a_1 := nb - ta < a$.
Folglich kann man aus jeder Bruchdarstellung $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ von $\sqrt{n}$ eine neue Bruchdarstellung $\sqrt{n} = \frac{a_1}{b_1}$ mit $a_1 < a$ und $b_1 < b$ konstruieren. Diese Annahme, dass eine Bruchdarstellung von $\sqrt{n}$ existiert, führt auf die Existenz einer unendliche Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von Bruchdarstellungen $\sqrt{n} = \frac{a_n}{b_n}$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallende Folgen sind.
Da es aber nach dem Prinzip vom kleinsten Element keine unendlichen streng monoton fallende Folgen von natürlichen Zahlen geben kann, folgt daraus, dass $\sqrt{n}$ keine Bruchdarstellung besitzen kann und folglich irrational ist. (Vgl. ebd., 205)

4.3.6 Invarianzprinzip

Das Invarianzprinzip ist oft bei komplexen Problemen, welche dauernden Veränderungen ausgesetzt sind, hilfreich um Informationen zu gewinnen. Indem man Eigenschaften betrachtet, die bei Veränderungen unveränderlich bleiben, kommt man zu einer Lösung des Problems. Die Grundaussage des Invarianzprinzips lautet daher:
Achte bei mehrfachen Veränderungen darauf, was gleich bleibt. (Vgl. Grieser 2013, 229f)

Schema des Invarianzprinzips

Das Invarianzprinzip lässt sich oft bei Problemen anwenden, welche einen Prozess beinhalten, der in einzelnen Schritten mehrere Zustände durchläuft. Da die einzelnen Schritte bekannt sind, lässt sich eine Vermutung darüber angeben, welche Zustände aus einem Anfangszustand erreicht werden können und welche nicht. Die Invariante ist hierbei eine Vorschrift, die allen möglichen erreichbaren Zuständen eine Zahl, ein Symbol oder etwas ähnliches zuordnet und deren Wert unveränderlich bei jeden Schritt bleibt. (Vgl. Grieser 2013, 234)

Als Faustregeln für die Anwendbarkeit des Invarianzprinzips lässt sich folgendes angeben: Ein Problem kann über dieses Prinzip lösbar sein, wenn man endlich viele Zustandsänderungen eines Startzustandes beschreiben kann, die alle eine gemeinsame Eigenschaft haben (vgl. Mayer 2003, 94).

Zudem ist es auch hilfreich, wenn Aussagen über einen bestimmten Endzustand bewiesen werden sollen. Hierbei verwendet man einen Existenzbeweis für erreichbare Zustände und einen Nichtexistenzbeweis für nicht erreichbare Fälle. Insbesondere ist das Invarianzprinzip hilfreich bei Unmöglichkeitsbeweisen, in welchen man zeigen möchte, dass ein bestimmter Zustand nicht möglich ist bzw. nicht existiert. Für diesen Fall sucht man eine Invariante, welche für den Anfangszustand und den betrachteten Zustand unterschiedliche Werte hat. (Vgl. Grieser 2013, 235; 251)

Zusammenfassend lassen sich folgende zwei Verwendungsmöglichkeiten für das Invarianzprinzip nennen (vgl. Schwarz 2006, 45):

1. Möchte man zeigen, dass ein bestimmter Anfangszustand Z_A nicht in endlich vielen Schritten in den Endzustand Z_E überführt werden kann, so sucht man im Algorithmus nach einer invarianten Funktion f mit $f(Z_A) \neq f(Z_E)$.

2. Manchmal ist es nützlich sich nach Transformationen umzusehen, die die im Problemkontext vorgegebenen Relationen oder Eigenschaften als Invarianten haben. Dadurch kann man eventuell der Lösung des Problems näher kommen.

4.3.7 Abzählen

„Dinge abzuzählen ist eine der ureigensten Aufgaben der Mathematik“ (Grieser 2013, 91). Insofern es nicht nur Selbstzweck ist, sondern auch ein hilfreiches Mittel für andere Zwecke darstellt, ist es eine Problemlösestrategie (vgl. Grieser 2013, 91).

Grundlegende Prinzipien

Abzählprobleme lassen sich im Allgemeinen durch Mengen und Tupel klar formulieren. Bei diesen Problemen möchte man, die Elemente einer Menge X bestimmen, wobei man $|X|$ schreibt, für die Anzahl der Elemente von X. Die zwei wichtigsten Grundregeln des Abzählens sind die *Summenregel* und die *Produktregel.* (Vgl. Grieser 2013, 91f)

Summenregel:
Sei $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$ eine disjunkte Vereinigung, dann gilt $|X| = \sum_{i=1}^{r} \|X_i|$ (vgl. Aigner 2001, 3).

Die Summenregel wird meist bei Abzählproblemen angewendet, die man in disjunkte Klassen einteilen kann (vgl. Grieser 2013, 92). Zudem bildet sie die Grundlage für viele Rekursionen (vgl. Aigner 2001, 3).

Produktregel:
Sei $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_r$ ein Mengenprodukt, dann gilt $|X| = \prod_{i=1}^{r} \|X_i|$ (vgl. Aigner 2001, 3).

Weitere wichtige Abzählprinzipien

Aus der Produktregel ergibt sich die **Mehrfachzuordnungsregel**:
Falls man jedem Element von X genau m verschiedene Elemente von Y zuordnen kann und dabei jedes Element von Y genau einem Element von X zugeordnet wird, so gilt $|X| = \frac{|Y|}{m}$ (vgl. Grieser 2013, 93).

Diese Regel ist nur anwendbar, wenn die Anzahl der Mehrfachzuordnungen immer gleich bleibt. Ansonsten muss man versuchen die abzuzählende Menge aufzuteilen, sodass die Regel wieder auf einige Teilmengen anwendbar ist. (Vgl. Grieser 2013, 95)
Grieser (2013, 94) demonstriert dies an folgendem Beispiel:
Das Spiel Triomini besteht aus Spielsteinen in der Form gleichseitiger Dreiecke, auf deren Oberseite jeweils drei Zahlen aus der Menge $\{0, \ldots, 5\}$ stehen. Wie viele verschiedene Spielsteine kommen im Spiel vor?

Zunächst einmal zählt man, auf wie viele Arten ein Dreieck mit drei Zahlen beschriftet werden kann. Da man für jede der drei Ecken 6 Möglichkeiten hat, erhält man insgesamt $6^3 = 216$ Dreiecke. Nun stellt sich noch die Frage, wie viele verschiedene Spielsteine man daraus erhält, wobei die Dreiecke nur dann verschieden sind, wenn sie nicht durch Drehung ineinander übergeführt werden können. Für die meisten Dreiecke gilt, dass man diese in drei Positionen drehen, sodass sie wieder denselben Spielstein ergeben. Daher könnte man sagen, dass jeder Spielstein drei Dreiecken entspricht. Aber Achtung, dies gilt nicht für die Dreiecke mit drei gleichen Zahlen. In diesem Fall entspricht ein Spielstein nur einem Dreieck. Die Mehrfachzuordnungsregel kann daher nur jene Dreiecke angewendet werden, deren Zahlen nicht alle gleich sind. Es existieren $216 - 6 = 210$ solche Dreiecke, also gibt es $\frac{210}{3} = 70$ entsprechende Spielsteine. Insgesamt also $70 + 6 = 76$ verschiedene Spielsteine. (Vgl. ebd., 94f)

Ein weiteres wichtiges elementares Zählprinzip ist die **Gleichheitsregel** (vgl. Aigner 2001, 4). Diese wird auch oft *Abzählen bzw. Zählen durch Bijektion* genannt (vgl. Grieser 2013, 99; Schwarz 2006, 107). Unter einer Bijektion zwischen zwei Mengen A und B versteht man eine Vorschrift, die jedem Element von A genau ein Element von B zuordnet, wobei jedes Element von B auftritt (vgl. Grieser 2013, 99).

Abzählen durch Bijektion:
Seien A und B endliche Mengen und ist $\varphi : A \to B$ eine Bijektion, dann gilt $|A| = |B|$ (vgl. Schwarz 2006, 107).

Abzählen durch Bijektion kann auf zwei verschiedene Arten nützlich sein. Einerseits zum Abzählen einer Menge A, indem man eine Menge B sucht, deren Elementenzahl entweder bekannt oder leicht zu ermitteln ist, und eine Bijektion $A \to B$ existiert, und andererseits zum Beweisen von Formeln, falls man zwei Mengen A, B mit bekannter Elementenzahl und eine Bijektion $A \to B$ hat, so folgt $|A| = |B|$. (Vgl. Grieser 2013, 99)

Abzählprinzipien als Problemlösestrategien

Aus der zuletzt genannten Abzählmethode ergibt sich eine spezielle Problemlösestrategie, welche als **Doppeltes Abzählen** (vgl. Grieser 2013, 104) oder **Fubini-Prinzip** (vgl. Hesse 2009, 54) bezeichnet wird. Bei diesem heuristischen Prinzip geht es vorwiegend darum, die Anzahl von irgendetwas zu bestimmen, indem man etwas ganz anderes abzählt (vgl. Hesse 2009, 54). Dieser Methode liegt die simple Idee zugrunde, dass unabhängig davon wie man zählt, das Ergebnis immer das selbe sein sollte (vgl. Hesse 2009, 66). Die andere Anwendungsmöglichkeit wäre, wie schon beim Abzählen durch Bijektion erwähnt, dass man interessante Formeln daraus herleiten kann (vgl. Grieser 2013, 104). Dies demonstriert Grieser (2013) indem er die Anzahl der Tripel (a, b, c), mit $a, b, c \in 1, \ldots, n$ und $a < c, b < c$, auf zwei verschiedene Arten zählt und dadurch eine Formel für $\sum_{k=1}^{n} k^2$ herleitet. (Vgl. Grieser 2013, 106f)

Grundaufgaben der Kombinatorik

Aus diesen Grundprinzipien des Abzählens lassen sich vier kombinatorische Grundaufgaben lösen (vgl. Schwarz 2006, 108). *„Dabei handelt es sich darum, die k-Auswahlen aus einer n-Menge* mit ***(1)*** *oder* ohne ***(2)*** Berücksichtigung der Reihenfolge *und* mit ***(a)*** *oder* ohne ***(b)*** Wiederholungen *zu zählen“* (Schwarz 2006, 108). Diese Grundtypen sind besonders wichtig, da sich viele konkrete Abzählprobleme auf diese zurückführen lassen (vgl. Grieser 2013, 95).

1. Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen von k Elementen aus einer n-elementigen Mengen mit Berücksichtigung der Reihenfolge und
   - mit Wiederholung: Die Anzahl aller k-Tupel einer n-elementigen Menge ist n^k.
     Beweis mit Produktregel:
     Für alle $i = 1, \dots, k$ hat man zur Besetzung der i-ten Komponente des k-Tupels jeweils n Möglichkeiten zur Verfügung. Aus der Produktregel ergibt $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k-mal} = n^k$.
   - ohne Wiederholung: Die Anzahl aller k-Tupel mit verschiedenen Komponenten aus einer n-elementigen Menge ist $\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.
     Beweis mit Produktregel:
     Für $i = 1, \dots, k$ hat man zur Besetzung der i-ten Komponente des k-Tupels jeweils $(n - i + 1)$ Möglichkeiten zur Verfügung, wenn keine Wiederholung erlaubt ist. Aus diesem Grund sind die $i - 1$ Elemente, mit welchen man die Komponenten 1 bis $i - 1$ besetzt hat, nicht mehr verfügbar. Aus der Produktregel ergibt sich $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
2. Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen von k Elementen aus einer n-elementigen Mengen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und

- ohne Wiederholung: Die Anzahl der k-elementigen Teilmenge einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$.
  Beweis mit Zählen durch Bijektion und Summenregel:
  Sei M die Menge aller k-Tupel mit verschiedenen Komponenten aus der n-elementigen Menge A. Weiters sei durch $a \sim b :\Leftrightarrow$ a und b enthalten bis auf die Reihenfolge die gleichen Elemente, eine Äquivalenzrelation in M erklärt. Diese zerlegt M in a Äquivalenzklassen, daher disjunkte Klassen, welche genau $k!$ Elemente haben. Damit erhält man aus der Summenregel für die Anzahl $|M|$ der Elemente von M gleich $\underbrace{k! + k! + \cdots + k!}_{a-Summanden} = a{\cdot}k!$.
  Da man aber bereits weiß, dass $|M| = \frac{n!}{(n-k)!}$ ist, kann man diese Gleichung nach a auflösen und man erhält für die Anzahl der Klassen folgende Formel:
  $$a = \frac{|M|}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$
- mit Wiederholung: Die Anzahl aller k-Kollektionen aus einer n-elementigen Menge ist $\binom{n+k-1}{k}$. (Vgl. Schwarz 2006, 109f)

(Vgl. Schwarz 2006, 109f)

Prinzip der Inklusion und Exklusion

Eine weitere Abzähltechnik und auch hilfreiche Problemlösestrategie ergibt sich durch einer Verfeinerung der Summenregel.
Sei $X = X_1 \cup X_2$ die Vereinigung der endlichen Mengen X_1 und X_2, wobei diese Mengen nicht paarweise disjunkt sind. So kann man durch

$$X = [X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)] \cup [X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)] \cup (X_1 \cap X_2)$$

eine Partition von X in drei disjunkte Teilmengen beschreiben. Nach der Summenregel ergibt sich nun die Elementenzahl von X durch

$$|X| = |X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)| + |X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)| + |X_1 \cap X_2|.$$

Da aber auch $X_i = [X_i \setminus (X_1 \cap X_2)] \cup (X_1 \cap X_2)$ für $i = 1, 2$ gilt, bietet sich zur Berechnung von $|X|$ ebenfalls an, die Summe $|X_1| + |X_2|$ zu bilden und davon die Elemente von $X_1 \cap X_2$ einmal abzuziehen, da diese doppelt gezählt wurden. Daraus ergibt sich $|X| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$. (Vgl. Schwarz 2006, 117)

Die Verallgemeinerung dieser Zähltechnik ist als **Siebformel** oder als **Prinzip der Inklusion und Exklusion** bekannt (vgl. Schwarz 2006, 117).
Diese besagt folgendes:
Es sei $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \cdots \cup X_n$ die Mengenvereinigung der endlichen Mengen $X_1, \ldots, X_n$. Dann gilt

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{J \in P_i(N)} \| \bigcap_{j \in J} M_j|,$$

wobei $N := 1, 2, \ldots, n$ die natürlichen Zahlen und $P_i(N)$ die Menge aller i-elementigen Teilmengen von N bezeichnet mit $1 \leqslant i \leqslant n$. (Vgl. ebd., 118)

4.3.8 Symmetrieprinzip/Symmetriezerstörung

Beim Lösen eines Problems kann es äußerst nützlich sein auftretende Symmetrien auszunutzen (vgl. Mayer 2003, 123). *„Symmetrie bedeutet, dass eine Situation gleich bleibt, auch wenn eine bestimmte Veränderung [...] durchgeführt wird “* (Mayer 2003, 123). Symmetrien reduzieren daher die Komplexität einer Problemstellung, indem sie die vielfältigen Erscheinungsformen auf jene, die unter bestimmten Umständen unverändert bleiben einschränken (vgl. Hesse 2009, 230). Diese Auffassung ähnelt dem Invarianzprinzip. Klassische Aufgaben, in denen das Symmetrieprinzip Anwendung findet, finden sich in der Geometrie, aber auch darüber hinaus. (Vgl. Mayer 2003, 123)

Dem entgegen steht das Prinzip der Symmetriezerstörung.

> *„Sind in der Problemstellung Elemente gegeben, deren Gleichberech-*

> *tigung hinsichtlich gewisser Kriterien kein Bestandteil der Voraussetzung ist, so lässt sich durch Einführung eines Unterscheidungsmerkmals [...] neue Information für die Lösung gewinnen"* (Mayer 2003, 135).

Als elementares Prinzip findet es vor allem in der Kombinatorik Verwendung (vgl. ebd., 134).

4.3.9 Systematisches Probieren

Probieren ist normalerweise eine der ersten Tätigkeiten um eine Lösung zu suchen. In diesem Sinne jedoch ist Probieren noch keine Lösungsstrategie, erst durch das systematisierte Probieren wird es zu einer nützlichen Strategie (vgl. Mayer 2003, 106).

Die Anwendung dieser Problemlösestrategie erweist sich bei folgenden Aufgabentypen als sinnvoll (vgl. Mayer 2003, 112):

- Wenn Aussagen über Einzelfälle vorhanden sind.
- Wenn eine allgemeingültige Aussage gesucht ist, welche viele oder alle Einzelfälle umfasst.

Hierbei erweist es sich als vorteilhaft die verfügbaren Informationen zu ordnen, zum Beispiel mit Hilfe von Tabellen. Oft treten dabei bereits erste Zwischenergebnisse auf, die man weiter verfolgen sollte. (Vgl. ebd., 112)

Dem Gegenüber steht das „*Brute-Force-Prinzip*", welche aus dem Ausprobieren aller möglichen Lösungsfälle beruht, in der Hoffnung dadurch eine Lösung des Problems zu finden (vgl. Hesse 2009, 333).

4.3.10 Logik

Mathematische Argumente werden in der natürlichen Sprache formuliert, dabei sind logische Fehlschlüsse keine Seltenheit. Um gut argumentieren zu können, benötigt man eine ausreichende Kenntnis über die wichtigsten logischen Konstrukte und Sprechweisen. Beim mathematischen Arbeiten werden vielfach Vermutungen und Ergebnisse als Aussagen formuliert. Ein wichtiges Thema der Logik ist die Verknüpfung von Aussagen und die Bestimmung ihres Wahrheitswertes (wahr oder falsch). Ein weiteres Thema ist das korrekte Schlussfolgern, also wie man von wahren Aussagen auf andere Aussagen schießt und sicherstellt, dass diese ebenfalls wahr sind. (Vgl. Grieser 2013, 135f)

Aussagen

Ein Ausdruck, welcher einen *Wahrheitswert* enthält, also entweder wahr oder falsch sein kann, wird in der Logik als *Aussage* bezeichnet. Beispiele für Aussagen wären: „2 ist gerade“, „es scheint die Sonne“und so weiter. Dagegen ist der Ausdruck „n ist prim“keine Aussage, da nichts darüber gesagt wurde was n ist. Setzt man jedoch für n einen Wert ein, z.B. $n = 10$, so wird der Ausdruck zu einer Aussage, die falsch wäre. Man bezeichnet einen Ausdruck, welcher Variablen enthält und der beim Einsetzten von Werten für die Variablen zu einer Aussage wird, als *Aussageform.* Hat man eine Aussage A, so ist deren *Negation* (Verneinung), bezeichnet mit $\neg A$, ebenfalls eine Aussage. (Vgl. Grieser 2013, 136)

Verknüpfungen von Aussagen

Bei dem Verknüpfen von Aussagen kann man zwischen „und“- und „oder“-Verknüpfungen unterscheiden (vgl. Grieser 2013, 137). Diese werden als *Konjunktion* und *Adjunktion* bzw. *Disjunktion* bezeichnet. Diese unterschiedliche Bezeichnung der „oder“-Verknüpfung ergibt sich, je nachdem ob man das „ausschließende“, Disjunktion, bzw. das „einschließende“, Adjunktion, Oder meint. (Vgl. Gabriel 2007, 12f)

In der deutschen Sprache wird *oder* immer in einem ausschließenden Sinn verwendet um auszudrücken, dass genau eine der Aussagen richtig ist. In

der Prädikatenlogik erster Stufe hingegen wird dies immer einschließend interpretiert. (Vgl. Barwise und Etchemendy 2005, 77)
Auch in der Mathematik ist immer das nichtausschließende Oder gemeint. Dies bedeutet, dass die Aussage auch dann wahr ist, wenn beide Aussagen wahr sind. Das ausschließende Oder kann übersetzt werden als „Entweder A oder B“. (Vgl. Grieser 2013, 137)

Als Konjunktion bezeichnet man eine Aussage, die aus zwei oder mehreren Aussagen zusammengesetzt ist. Die Konjunktion „A und B“ist genau dann wahr, wenn sowohl die Aussage A, als auch die Aussage B wahr ist. Anderenfalls ist die Konjunktion falsch. In der logischen Sprache schreibt man meist $A \wedge B$. (Vgl. Gabriel 2007, 12)

Eine zusammengesetzte Aussage, welche behauptet, dass mindestens eines ihrer Teilaussagen wahr ist, bezeichnet man als Adjunktion. Die Aussage „A oder B“ist genau dann wahr, wenn also mindestens eine der Aussagen wahr ist. In der logischen Sprache schreibt man $A \vee B$. (Vgl. Gabriel 2007, 13)

Um verknüpfte Aussagen ihren Wahrheitswert zuzuordnen eignen sich am besten Wahrheitstabellen (vgl. Grieser 2013, 137).

Tabelle 4.2: Wahrheitstabelle, nach: Grieser 2013, 138

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Quantoren zum Binden von Variablen

In der Mathematik werden Aussagen häufig mit Quantoren beschrieben. So fangen beispielsweise viele Aussagen damit an „Für alle rationalen Zahlen gilt ...“oder „Es gibt eine Zahl, für die gilt...“(vgl. Grieser 2013, 137).

Grundsätzlich kann man zwei verschiedene Arten von Quantoren unterscheiden:

1. ***Der Existenzquantor:*** Dieser wird durch das Zeichen $\exists$ dargestellt und verwendet um Existenzbehauptungen auszudrücken. Diesen Ausdrücken kann man im Deutschen übersetzen als *etwas, irgendetwas, wenigstens ein Ding* oder einfach durch den unbestimmten Artikel *ein.* (Vgl. Barwise und Etchemendy 2005, 237)
   Um eine „Es gibt“-Aussage zu widerlegen, verwendet man eine „Für alle“-Aussage (vgl. Grieser 2013, 138).
   Beispiel: $\exists n$ prim: n gerade. Ausgeschrieben: „Es gibt eine Primzahl n, für die gilt: n ist gerade“(Grieser 2013, 139).

2. ***Der Allquantor:*** Dieser wird durch das Zeichen $\forall$ dargestellt um universelle Aussagen auszudrücken. Die deutschen Übersetzungen hierfür wären *alle, alles, jeder, alle Dinge, jedes Ding.* (Vgl. Barwise und Etchemendy 2005, 236)
   Zum Widerlegen einer solchen Aussage reicht es ein einziges Gegenbeispiel zu finden (vgl. Grieser 2013, 138).
   Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \in \mathbb{N}$. Ausgeschrieben: Für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass die darauffolgende Zahl wieder eine natürliche Zahl ist (vgl. Grieser 2013, 138).

Bei vielen mathematischen Aussagen treten Kombinationen von Quantoren auf. Hierbei ist die Reihenfolge der auftretenden Quantoren entscheidend für den Wahrheitswert der Aussage. Hierzu zwei Beispiele:
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}$: $m > n$
$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $m > n$

In beiden Aussagen treten die selben Quantoren auf, dennoch ist die erste wahr, während die zweite Aussage falsch ist. Übersetzt bedeutet die erste Aussage, dass es für alle natürlichen Zahlen mindestens eine natürliche Zahl gibt, die größer als diese ist. Die zweite würde bedeuten, dass es mindestens eine natürliche Zahl gibt, sodass für alle natürlichen Zahlen gilt, dass diese eine Zahl größer als alle anderen natürlichen Zahlen ist. (Vgl. Grieser 2013, 139)

Konditionale: wenn - dann

Eine weitere Art um Aussagen miteinander zu verknüpfen ist die Relation „wenn - dann". Aus den Aussagen A und B kann man die Aussage „Wenn A, dann B"beziehungsweise häufig gesprochen als „Aus A folgt B"bilden. Man schreibt dafür $A \Rightarrow B$. Da die Aussage A nun eine Voraussetzung ist, bezeichnet man sie als *Prämisse* und B nennt man *Konklusion*, die Schlussfolgerung. Diese Aussage ist nur in einem einzigen Fall falsch und zwar, wenn die Prämisse wahr ist und die Konklusion falsch ist. (Vgl. Grieser 2013, 140)

Dies bedeutet, dass sie auch dann wahr ist, wenn die Prämisse falsch ist, aber die Konklusion richtig. Dies scheint auf den ersten Blick nicht besonders logisch zu sein, erweist sich aber durchaus als sinnvoll. Deshalb betrachtet man am besten ein einfaches Beispiel. Die Aussagen A: „Es regnet"und B: „Die Straße wird nass". Die Aussage $A \Rightarrow B$ bedeutet dann: „Wenn es regnet, wird die Straße nass". Diese Aussage ist nur dann falsch, wenn es regnet und die Straße trocken bleibt. Falls es jedoch nicht regnet, bleibt die Aussage trotzdem wahr, unabhängig davon ob die Straße trocken oder nass ist. Dies liegt daran, dass über den Fall, dass es nicht regnet, nichts behauptet wurde. Zudem sind Konditionalaussagen fast immer Teil einer „Für alle"-Aussage. Aus diesem Grund sollte man sich statt „Wenn - dann"ein „Jedes Mal"denken. (Vgl. Grieser 2013, 140)

Außerdem ist es auch möglich die Implikation umzuformen: Dies bedeutet, dass die Aussage $A \Rightarrow B$ gleichwertig ist mit $\neg B \Rightarrow \neg A$. In den oben genannten Beispiel wäre dies die Aussage „Wenn die Straße trocken bleibt, regnet es nicht“, was logisch korrekt ist. Diese Tatsache bildet auch die Grundlage für den indirekten Beweis und den Widerspruchsbeweis. Jedoch wäre $\neg A \Rightarrow \neg B$ nicht gleichwertig. Im Beispiel wäre dies folgende Aussage „Wenn es nicht regnet, wird die Straße nicht nass“, dies ist jedoch eine andere Aussage. Gleichwertig bedeutet in diesem Zusammenhang, dass diese Aussagen denselben Wahrheitswert haben. (Vgl. ebd., 141)
Dies kann man sehr gut durch eine Wahrheitstabelle darstellen:

Tabelle 4.3: Richtige und falsche Umformungen

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	w	w	w	w

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Ein sehr häufiger logischer Fehler ist die Verwechslung von hinreichenden und notwendigen Bedingungen. Wie bereits oben erwähnt ist die Aussage $A \Rightarrow B$ nicht gleichwertig mit der Aussage $\neg A \Rightarrow \neg B$. Auf das obige genannte Beispiel „Wenn es regnet, wird die Straße nass“angewendet bedeutet dies, das die Straße auch auf eine andere Art und Weise nass werden könnte. (Vgl. Gabriel 2007, 33)

Um die Unterscheidung zwischen hinreichenden und notwendigen Bedingungen noch zu präzisieren, werden die zwei wichtigsten logischen Schlussregeln, der ***modus ponens*** und der ***modus tollens*** eingeführt.

Der modus ponens: Diese Regel erlaubt es nachdem man die Prämissen

A und $A \Rightarrow B$ nachgewiesen hat, auf die Konklusion B zu schließen (vgl. Barwise und Etchemendy 2005, 204).
Aus diesem Grund wird der modus ponens auch als Gesetz der hinreichenden Bedingung bezeichnet. Man kann daher sagen, wenn $A \Rightarrow B$ gilt, dann ist die Geltung von A eine hinreichende Bedingung für die Geltung von B. (Vgl. Gabriel 2007, 34)

Der modus tollens: Diese Regel erlaubt es aus den Prämissen $\neg B$ und $A \Rightarrow B$ auf die Konklusion $\neg A$ zu schließen.
Aus diesem Grund ist der modus tollens das Gesetz der notwendigen Bedingung. Man kann daher sagen, wenn $A \Rightarrow B$ gilt, dann ist die Geltung von B eine notwendige Bedingung für die Geltung von A, anderenfalls wenn nämlich B nicht gilt, so folgt daraus notwendigerweise, dass auch A nicht gilt. (Vgl. Gabriel 2007, 34)

Äquivalenz zweier Aussagen

Zwei Aussagen A und B nennt man äquivalent, wenn sowohl $A \Rightarrow B$, als auch $B \Rightarrow A$ gilt. Dies ist nur der Fall, wenn die beiden Aussagen den gleichen Wahrheitswert besitzen. Man schreibt dafür $A \Leftrightarrow B$ und sagt „A gilt genau dann, wenn B gilt“. (Vgl. Grieser 2013, 142)

4.3.11 Beweise

„Ein Beweis ist eine logisch vollständige Begründung einer Aussage. Solange wir eine Aussage nicht bewiesen haben, ist es möglich, dass sie falsch ist - auch wenn sie durch zahlreiche Beispiele gestützt wird“ (Grieser 2013, 144).

Die Mathematik grenzt sich gerade durch ihren streng axiomatischen Aufbau und ihre formal logische Arbeitsweise von vielen anderen Wissenschaften ab. Während es in vielen anderen Wissenschaften schon ausreicht, wenn eine Aussage auf Statistiken und zahlreichen Beispielen basiert, so muss deren Gültigkeit nach den strengen Kriterien der Mathematik erst mittels eines Beweises gezeigt werden. (Vgl. Grieser 2013, 2f; 146)

Kurz gesagt: *„Beweise sind das Herz der Mathematik“* (ebd., 2).

Allgemeine Beweisformen

Es lassen sich einige allgemeine Beweisformen nach deren Vorgehen unterscheiden (vgl. Grieser 2013, 145f):

- **Direkter Beweis**
  Ausgehend von der Prämisse A wird in einzelnen Schritten gezeigt, dass dann die Konklusion B gilt. Man benutzt dabei die Schlussregel modus ponens. Bei diesem Vorwärtsschluss ist die Gültigkeit der einzelnen Schritte entweder leicht einzusehen, oder sie wurden selbst bereits bewiesen. Man darf daher Aussagen, die bereits bewiesen wurden, oder als allgemein bekannt vorausgesetzt wurden, verwenden. Daraus ergibt sich dann eine Kausalkette, die schlussendlich auf die Konklusion führt. (Vgl. Grieser 2013, 145f; Barwise und Etchemendy 2005, 47)

- **Indirekter Beweis**
  Hierbei benutzt man die Schlussregel modus tollens, indem man zeigt, wenn die Konklusion B nicht gilt, auch die Prämisse A nicht gelten kann. Dieser Rückwärtsschluss kann wiederum aus einzelnen Teilschritten bestehen. (Vgl. Grieser 2013, 145)

- **Widerspruchsbeweis**
  Diese Beweisform ist dem indirekten Beweis sehr ähnlich, jedoch wird hierbei die Prämisse A das Gegenteil der Konklusion, also $\neg B$, angenommen. Durch einen Rückwärtsschluss kommt man schließlich auf einen Widerspruch und da aus Wahren nur Wahres folgen kann, muss die Aussage stimmen. (Vgl. Grieser 2013, 145)

Hesse (2009) hat dies Ansicht, dass sowohl der indirekte Beweis, als auch der Widerspruchsbeweis, das Gegenteilprinzip nützen. Dieses besagt, dass man sich von einer Behauptung überzeugen kann, indem man ihr Gegenteil annimmt und dieses auf einen Widerspruch führt. Diese Art des logischen Argumentierens wird als *reductio ad absurdum* bezeichnet, was soviel bedeutet wie die Rückführung auf Widersinniges. (Vgl. Hesse 2009, 113f; Barwise und Etchemendy 2005, 139)

Bereits Euklid zeigte mittels diesem Beweisprinzip, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dazu nahm er zunächst das Gegenteil an, daher dass es nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ gibt, wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ gilt.
Anschließend bildete er das Produkt dieser Zahlen und addierte noch eine 1 dazu, so entstand einen neue Zahl P.

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1$$

Diese neue Zahl P ist sicherlich größer als p_r, die größte angenommene Primzahl, und kann daher selbst keine Primzahl sein. Folglich muss sie nach der Primfaktorzerlegung als Produkt von Primzahlen darstellbar sein, die Teiler von P sind. Da aber P wegen dem Summanden $+1$ durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilbar ist, muss P selbst eine Primzahl sein.
Durch diesen Widerspruch wird deutlich, dass die Ausgangsannahme falsch gewesen sein muss und es daher unendlich viele Primzahlen geben muss. (Vgl. Hesse 2009, 120f)

- **Gegenbeweis durch Gegenbeispiel**
  Oft genügt es schon ein Gegenbeispiel anzugeben, um eine universelle Aussage zu widerlegen (vgl. Grieser 2013, 146).

  „*Ein Gegenbeispiel zu einem Argument ist ein möglicher Sach-*

verhalt, in welchem alle Prämissen des Argumentes wahr sind, die Konklusion aber falsch ist. Bereits das Aufzeigen eines einzigen Gegenbeispiels ist hinreichend, um zu zeigen, dass ein Argument nicht logisch gültig ist"(Barwise und Etchemendy 2005, 383).

- **Vollständige Induktion**
  Diese Beweisform wird häufig verwendet um eine „Für alle"-Aussage zu beweisen (vgl. Grieser 2013, 146).

Typische Beweismuster für spezielle Aussagetypen

Zudem gibt es auch einige typische Beweismuster für bestimmte Aussagetypen (vgl. Grieser 2013, 147-155):

- **Beweise von Formeln**
  Formeln sind ein hilfreiches Werkzeug um allgemeine Zusammenhänge auszudrücken. Oft vermutet man bei der Problemuntersuchung eine Formel, deren Gültigkeit anschließend allgemein gezeigt werden muss. Diese kann nun entweder direkt, aus bekannten Formeln hergeleitet werden, oder mittels vollständiger Induktion bewiesen werden. Auch die Methode des doppelten Abzählens erweist sich hierbei oft als sehr hilfreich. (Vgl. ebd., 147)

- **Existenzbeweise**
  Viele mathematische Aussagen beziehen sich auf die Existenz von Objekten, beispielsweise, ob eine gegebene quadratische Gleichung eine reelle Lösung besitzt. Der einfachste Beweis wäre hierbei die direkte Angabe der Lösung. Jedoch hat man meist unendlich viele Elemente für die man die Gültigkeit einer Aussage zeigen soll. Um nun nicht unendlich viele Existenzbeweise führen zu müssen, gibt man eine allgemeine Konstruktion an, welche für alle Elemente gilt. (Vgl. ebd., 148)
  Die Schwierigkeit besteht hierbei ein allgemeines Muster zu finden.

Kann man keine allgemeine Konstruktion finden, so verwendet man oft folgende beide speziellen Strategien: Das Schubfachprinzip und das Extremalprinzip. (Vgl. ebd., 151).

- **Nichtexistenzbeweise/Unmöglichkeitsbeweise**
  Das Gegenpaar zu den Existenzbeweisen und um einiges schwieriger sind die Nichtexistenzbeweise bzw. auch genannt Unmöglichkeitsbeweise. Hier gilt es zu zeigen, dass ein Objekt nicht existiert beziehungsweise, dass etwas unmöglich ist. (Vgl. ebd., 152)
  Typische Beweismuster sind hier der Widerspruchsbeweis oder der Beweis mittels Invarianzprinzip (vgl. ebd., 155).

5 Gründe für den Einsatz von Problemlösen als Unterrichtsmethode

5.1 Motivation, Emotion und Interesse

„Problemlösen macht Spaß und ist kreativ“ (Grieser 2013, 2).
„Mathematische Probleme motivieren *den Menschen, intensiv mathematisch zu denken“* (Vollrath und Roth 2012, 60).

Diese Einstellung, dass das Lösen von mathematischen Problemen Freude bereiten kann, ist vielfach vertreten. So wird meist das Finden der Lösung selbst als Belohnung für die Strapazen angesehen (vgl. Vollrath und Roth 2012, 282). Diese Zufriedenheit, die sich einstellt, wenn man ein besonders kniffliges Problem gelöst hat, wird von Bruder und Collet (2011, 34) als *„HEUREKA-Effekt“*bezeichnet. Solche Erfolgserlebnisse verstärken sowohl die Lernmotivation als auch das Selbstvertrauen (vgl. Bruder und Collet 2011, 35).

Zudem bieten Probleme meist einen Kontext, in dem man sinnvoll Mathematik entwickeln kann. Durch diesen werden vielfache Assoziationen zu verwandten mathematisch relevanten Themenfeldern entwickelt, wodurch die Erinnerungs- und Behaltensleistung erhöht wird. Aus diesem Grund wirken gerade Probleme motivierend und sind mutmaßlich für ein tiefer gehendes Lernen verantwortlich. (Vgl.Leuders 2003, 122)

Motivation, Emotion und Interesse sind außerdem wesentliche Bestandteile, wenn es darum geht zu klären, unter welchen Voraussetzungen Schülerinnen und Schüler lernen. Das Interesse ist meist geprägt durch positive Gefühle, eine subjektive Bedeutung und die freiwillige Beschäftigung mit dem jeweiligen Inhalt. Des Weiteren hat sich eine positive Korrelation zwischen Interesse und Leistung gezeigt. Leider nimmt die Lernmotivation sowie das Interesse für Mathematik während der Schullaufbahn bei den meisten Schülerinnen und Schülern ab. Aus diesem Grund ist es besonders sinnvoll den Unterricht so zu gestalten, dass dieser das Interesse fördert. Unterricht, der Interesse fördert, sollte unter anderem Alltagserfahrungen, authentische Lernsituationen und realistische Probleme miteinbeziehen. Emotionen haben, ebenso wie das Interesse, eine bedeutsame Rolle, wenn es um Lernprozesse geht, da sie die Leistung wesentlich beeinflussen können. (Vgl. Reiss und Hammer 2013, 40ff)

5.2 Problemlösen als Grundmuster der mathematischen Arbeitsweise

*„Probleme bieten Gelegenheiten, **Mathematik individuell und aktiv zu konstruieren** und nicht passiv zu rezipieren“* (Leuders 2003, 122).
„Problemlösen macht neugierig auf mathematische Theorien“ (Grieser 2013, 2).
Unter dieser Perspektive betrachtet, versteht man unter Problemen Fragestellungen, die zum mathematischen Denken anregen (vgl. Vollrath und Roth 2012, 60).

In der Entstehungsgeschichte der Mathematik spielen *„Probleme als Quellen mathematischen Wissens“* (Vollrath und Roth 2012, 27) eine zentrale Rolle. Möchte man daher einen authentischen Mathematikunterricht, in welchem angemessene Vorstellungen bezüglich der mathematischen Arbeitsweise vermittelt werden, so sollte man den Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit geben, diese Entstehungsgeschichte selbst zu erleben. Hierfür eignet sich am besten die Behandlung von Problemen im Unterricht. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 24; 27)

Problemlösen gehört genauso wie Beweisen, Argumentieren, mathematische Begriffe, mathematisches Modellieren und Algorithmen zu den Grundmustern der mathematischen Arbeitsweise. (Vgl. Reiss und Hammer 2013, 47-63) Zudem spielen gerade Probleme eine zentrale Rolle bei der Erarbeitung von Begriffen, von Sachverhalten, von Verfahren und von Anwendungen und bei der Modellbildung. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 281)

Des Weiteren ist die mathematische Arbeitsweise kein linearer Prozess, sondern durch Phasen der Exploration charakterisiert. Aus diesem Grund sind fehlerhafte, nicht zum Ziel führende Wege immer inkludiert und werden als normaler Bestandteil dieser Arbeitsweise, welche vermehrt als Problemlösen bezeichnet wird, aufgefasst. (Vgl. Reis und Hammer 2013, 45)

Möchte man daher etwas über den formalen Bildungswert der Mathematik erfahren, so sollte man Problemlösen im Unterricht behandeln, da durch dieses allgemein nützliche Problemlösefähigkeiten erworben werden. Hierzu sollte man im Unterricht auf Umwege und Irrwege eingehen, alternative Deutungen zulassen, sowie zum Austausch von Ideen und Reflexionen anregen, da hierdurch eigenverantwortliches Handeln initiiert wird. (Vgl. Reiss und Hammer 2013, 7)

5.3 Problemlösen in Bildungsstandards und Lehrplänen

Problemlösen und die Behandlung von Problemen im Unterricht findet sich bereits im Lehrplan der AHS Unterstufe wieder. Gleich zu Beginn steht in dem Kapitel „*Bildungs- und Lehraufgabe*“:

> „*Die Schülerinnen und Schüler sollen: [...]*
>
> - *durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lösungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen planen und in der Durchführung erproben;*
>
> *[...]*“(BMBF 2000, 1).

Auch in dem Abschnitt „*Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte*“wird das Analysieren von Problemen als produktive geistige Tätigkeit zu den mathematischen Grundfertigkeiten gezählt, welche im Laufe des Unterrichts entwickelt werden sollen (vgl. BMBF 2000, 1).

Des Weiteren wird auf die besondere Rolle des Problemlösens für ein verantwortungsvolles Zusammenleben in einer Gesellschaft hingewiesen. Im Abschnitt „*Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule*“steht:

> „*Der Mathematikunterricht soll folgende miteinander vielfältig verknüpfte Grunderfahrungen ermöglichen:*
>
> - *Erscheinungen der Welt um uns in fachbezogener Art wahrzunehmen und zu verstehen;*
> - *Problemlösefähigkeiten zu erwerben, die über die Mathematik hinausgehen*
>
> (BMBF 2000, 1).

Zudem wird im Lehrplan der AHS Unterstufe auch der Beitrag von Problemlösen zu anderen relevanten Bildungsbereichen, wie etwa zum Bereich „*Mensch und Gesellschaft*“oder zur „*Kreativität und Gestaltung*“, erwähnt:

> „Mensch und Gesellschaft:
> *Untersuchen von Situationen und Problemen mit Hilfe rationalen Denkens; [...]*
> Kreativität und Gestaltung:
> *Entwickeln verschiedener Lösungswege zu mathematischen Fragestellungen; Nutzen heuristischer Strategien* (BMBF 2000,2).“

Problemlösen und die Behandlung von Problemen liefert also nicht nur entsprechende Vorteile, sondern ist eben auch für den Mathematikunterricht durch den Lehrplan gesetzlich festgelegt.

Diese Beschäftigung mit Problemen durchzieht sich durch den gesamten Lehrgang, so findet man gleich zu Beginn in dem Kapitel „*Bildungs- und Lehraufgabe*“im Lehrplan der AHS Oberstufe folgendes wieder:

> „*Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts* “(BMBF 2004, 1).

Es wird auch abermals der Vorteil von Problemen zum Beitrag in anderen Bildungsbereichen erläutert. So steht im Abschnitt „*Beiträge zu den Bildungsbereichen*“folgendes:

> „*Natur und Technik:*
> *Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen; Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden*
> *Kreativität und Gestaltung:*

> *Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren an neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden* "(BMBF 2004, 2)

Die österreichischen Bildungsstandards beziehen sich auf den Kompetenzbegriff von Franz E. Weinert.

> *„Dabei versteht man unter Kompetenzen die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können"* (Weinert 2002, 27).

Problemlösen, als fächerübergreifende Kompetenz, zählt, neben fachlichen, wie auch Handlungskompetenzen, zu jenen „*Kompetenzen [die] für ein gutes und erfolgreiches Leben innerhalb wie außerhalb der Schule notwendig sind*"(Weinert 2002, 28). Wobei all jenen dieser Kompetenzen die gleiche Priorität zuzusprechen ist. (Vgl. Weinert 2002, 28)

Aus diesem Grund ist es nicht verwunderlich, dass es auch in den österreichischen Bildungsstandards, durch die festgelegt ist, welche Kompetenzen die Schülerinnen und Schüler nach Abschluss der 4. bzw. der 8. Schulstufe besitzen sollten, Bezüge zum Problemlösen gibt. So ist etwa in den Bildungsstandards der 4. Schulstufe im Bereich „*Allgemeine mathematische Kompetenzen (AK)*"sogar explizit die Rede von Problemlösen als eigener Kompetenzbereich. Dieser Kompetenzbereich „*Problemlösen (AK 4)*"wird folgendermaßen beschrieben:

> „***4.1 Mathematisch relevante Fragen stellen***
> *Kompetenz:*
> *Die Schülerinnen und Schüler können*

- *ein innermathematisches Problem erkennen und dazu relevante Fragen stellen.*

4.2 Lösungsstrategien (er)finden und nutzen
Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler können

- *geeignete Lösungsaktivitäten wie Vermuten, Probieren, Anlegen von Tabellen oder Erstellen von Skizzen anwenden,*
- *zielführende Denkstrategien wie systematisches Probieren oder Nutzen von Analogien einsetzen"*

(BIFIE 2011, 1).

In diesen Teilbereichen wird genauer darauf eingegangen, welche heuristischen Strategien und Hilfsmittel von den Schülerinnen und Schülern beherrscht werden sollen. Dennoch wird nicht exakt festgelegt, was man hierbei unter einem Problem versteht. Nichts desto trotz ist Problemlösen somit ein Teil der Bildungsstandards für die 4. Schulstufe und sollte daher auch bereits in der Primarstufe im Unterricht eingesetzt werden.

Im Vergleich hierzu ist in den Bildungsstandards für die 8. Schulstufe nicht mehr ausdrücklich die Rede von Problemlösen. Die Kompetenzen werden hierbei in einem dreidimensionalen Modell dargestellt. Die drei Dimensionen umfassen den Handlungsbereich, den Inhaltsbereich und den Komplexitätsbereich. Die vier Handlungsbereiche sind „*Darstellen, Modellbilden* (H1)", „*Rechnen, Operieren* (H2)", „*Interpretieren* (H3)"und „*Argumentieren, Begründen* (H4)", welche im Wesentlichen den allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards für die 4. Schulstufe entsprechen. Weiters ist vorgesehen, dass eine Kompetenz genau einem Handlungsbereich, einem Inhaltsbereich und einem Komplexitätsbereich entspricht. Aus diesem Grund entsprechen zwar Problemlöseaufgaben nicht den Kompetenzen der Bildungsstandards, da diese meist aus mehr als nur einem Handlungsbereich bestehen, aber sie können dennoch als exemplarisches Beispiel dienen, um zu demonstrieren, inwiefern diese Bereiche miteinander verknüpft sind. Beim Problemlösen treten meist alle vier Handlungsbereiche in unterschiedlicher Ausprägung in Erscheinung. Um zunächst einmal eine Lösungsidee zu finden muss dargestellt und ein Modell gebildet werden (H1), um diesen Plan weiter auszuführen ist oft Rechnen/ Operieren nötig (H2). Hat man dann bereits eine mögliche Lösung gefunden, so gilt es diese auf ihre Sinnhaftigkeit hin zu interpretieren (H3). Beim anschließenden Reflektieren des Lösungsweges ist Argumentieren und Begründen (H4) notwendig, um einerseits festzustellen, ob die Lösung auch stimmt, und andererseits die Problemlösekompetenz zu festigen. (Vgl. BIFIE 2013, 1ff)

Da es sich bei diesen Bildungsstandards lediglich um Mindeststandards handelt, bedeutet dies nicht, dass man im Unterricht nicht genauer auf die mathematische Arbeitsweise eingehen kann. „*Mathematisches Arbeiten umfasst vielfältige originär mathematische wie auch außermathematische (Denk-)Tätigkeiten, die meist eng miteinander vernetzt sind bzw. aufeinander bezogen werden müssen*“(BIFIE 2013, 2). Gerade durch die Behandlung von Problemlösen im Mathematikunterricht kann dieser Sachverhalt verdeutlicht werden und somit einen wesentlichen Beitrag zu den Bildungsstandards leisten.

5.4 Problemlösen als Beitrag zum besseren Weltverständnis

Aufgrund der Tatsache des immensen Veränderungsprozesses der Gesellschaft und die damit verbundenen immer komplexer werdenden Probleme benötigt man eine solide Allgemeinbildung (vgl. Winter 2003, 6).

> *„Zur Allgemeinbildung soll hier das an Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen gezählt werden, was jeden Menschen als Individuum und Mitglied von Gesellschaften in einer wesentlichen Weise betrifft, was für jeden Menschen unabhängig von Beruf,*

> *Geschlecht, Religion u. a. von Bedeutung ist"* (Winter 2003, 6).

Auch der Mathematikunterricht sollte in diesem Sinne einen wesentlichen Beitrag zur Allgemeinbildung leisten. Hierfür schlägt Winter (2003) folgendes vor:

> *„Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:*
>
> **(G 1)** *Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*
>
> **(G 2)** *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,*
>
> **(G 3)** *in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten), die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben"*
>
> (Winter 2003, 6f).

In der dritten Grunderfahrung wird die zentrale Stellung von Problemlösen als Beitrag zur Allgemeinbildung direkt angesprochen. Aus dieser Perspektive betrachtet ist Problemlösen eine Schlüsselqualifikation, da sie eine wesentliche Grundlage für lebenslanges Lernen bildet. Natürlich ist es unmöglich in der Schule für alle erdenklichen Probleme, die einem im Laufe seines Lebens begegnen werden, zugeschnittene Lösungsmethoden zu vermitteln. Aus diesem Grund ist es noch wichtiger, dass die Schülerinnen und Schüler durch die Entwicklung von Problemlösekompetenz irgendwann selbstständig in der Lage sind Ansätze und Strategien zur Problemlösung zu entwickeln. (Vgl. Leuders 2003, 122f)

Diese Förderung von Problemlösefähigkeiten im Mathematikunterricht kann aber nur dann seinen Anteil zur Allgemeinbildung und somit die Transferierbarkeit auf außermathematische Bereiche leisten, wenn das Problemlösen durch ständige Reflexionsprozesse begleitet wird. Diese zeichnen sich vor allem durch intensive Überlegungen während und nach dem Lösen eines Problems aus. (Vgl. Winter 2003, 10f).

Durch diese intensive Reflexion wird nicht nur die Praxis des Problemlösens und damit auch das strategische Denken trainiert, sondern dadurch können auch Fehler, Misserfolge und Missverständnisse, welche beim Problemlösen auftauchen, produktiv genutzt werden. Besonders aufgrund der Tatsache, dass diese in der Mathematik *„objektiv ausweisbar und kritisierbar gemacht werden können“* (Winter 2003, 11), ergibt sich daraus ein wesentlicher Anstoß um das tiefere Verständnis der Schülerinnen und Schüler zu fördern. (Vgl. Winter 2003, 11)

Indem sich Problemlösen nicht nur auf das Erlernen von heuristischen Strategien, sondern auch auf das Trainieren des Verstandes durch Reflexion bezieht, wird dadurch auch noch das richtige Argumentieren erlernt. Die Einsicht in die richtige Art des Schlussfolgerns ist ein weiterer Vorteil, welchen man durch Problemlösen gewinnen kann. (Vgl. Winter 2003, 11)

Dieser Grundgedanke, dass Problemlösen einen wichtigen Beitrag zur Allgemeinbildung und somit zu einem besseren Weltverständnis leistet, wurde bereits von Karl R. Popper (Popper, 1994) in dessen Werk „*Alles Leben ist Problemlösen*“thematisiert. Popper vertritt die Ansicht, dass Problemlösen nicht nur die mathematische Arbeitsweise widerspiegelt, sondern das Probleme den Ursprung aller Natur- und Sozialwissenschaften bilden. Wobei er als einzige Lösungsmethode für diese Probleme Versuch und Irrtum sieht. (Vgl. Popper 1994, 15; 19)

Aufgrund der Tatsache, dass eben Probleme nicht nur in der Mathematik eine zentrale Rolle spielen, sondern auch für die Entwicklung anderer

Wissenschaften relevant sind, wird deutlich, welchen Status die Fähigkeit Probleme zu lösen hat. Meine Ansicht ist, dass doch jede Wissenschaft im Grunde die zentrale Aufgabe hat, die Welt und die Geschehnisse in ihr für den Menschen verständlich zu machen. Somit wird noch plausibler, dass die im Mathematikunterricht erworbene Problemlösekompetenz auch ein wichtiges Hilfsmittel in anderen Wissenschaften ist, welche in ihrem Bereich zu einem besseren Weltverständnis beitragen.

Die Wissenschaftslehre wird von Popper durch folgende drei Bestandteile, das Problem, die Lösungsversuche und die Elimination, charakterisiert, indem er den Prozess des Problemlösens in drei Stufen teilt:

> *„Mein dreistufiges Schema ist also in folgender Weise auf die Wissenschaftslogik oder Methodologie anwendbar:*
>
> 1. *Der Ausgangspunkt ist immer ein* Problem *oder eine Problemsituation.*
> 2. *Dann folgen* Lösungsversuche*. Diese bestehen immer aus Theorien, und diese Theorien sind, da sie* Versuche *sind, sehr häufig irrig: Sie sind und bleiben immer Hypothesen oder Vermutungen.*
> 3. *Auch in der Wissenschaft lernen wir durch die* Elimination *unserer Irrtümer, durch die* Elimination *unserer falschen Theorien“*
>
> (Popper 1994, 21).

Diese vereinfachte Darstellung entspricht durchaus auch dem Vorgang beim mathematischen Problemlösen, wobei auch Popper der Ansicht ist, dass ein gewisses Maß an Reflexion beim Problemlösen unerlässlich ist. „*Das Besondere der Wissenschaft liegt in der bewußten [!] Anwendung der* kritischen Methode*; in der 3. Stufe unseres Schemas, der Elimination unserer Irrtümer, gehen wir bewußt [!] kritisch vor*“(Popper 1994, 21).

6 Ist Problemlösen lernbar und daher auch lehrbar?

Mason et al. (2008) vertreten die Ansicht, dass die Arbeits- und Denkweise der Mathematik immer an Problemen orientiert sind. Diese Meinung vertritt auch Grieser (2013), indem er schreibt: „*Probleme sind die Seele der Mathematik*“(Grieser 2013, 1).

Mathematisches Wissen wird daher als Ergebnis des Problemlösens angesehen, sodass man unter dem Einsatz von Problemen einen möglichen Weg sieht, um Mathematik zu lernen. Man erhofft sich dadurch eine positive Einstellung gegenüber mathematischen Wissen zu erzeugen. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 46f)

Aus diesem Grund lässt sich die Frage, ob man Problemlösen lernen und daher auch lehren kann, folgendermaßen beantworten: „*Jeder ist zum mathematischen Denken befähigt*“(Mason et al. 2008, 166).

6.1 Wie lehrt man Problemlösen?

Die Offenheit der Aufgabenstellung alleine reicht noch lange nicht aus, damit Schülerinnen und Schüler auch tatsächlich problemlösend denken und arbeiten. So ist neben der Darbietung guter Problemlöseaufgaben auch noch wichtig, dass die Lehrperson eine entsprechende Unterrichtsgestaltung vorwegnimmt, sodass sich Problemlösen fruchtbar im Unterricht einsetzen lässt. (Vgl. Leuders 2003, 130)

Es gilt daher: „*Im Unterricht nicht nur Lernanforderungen stellen, sondern auch zu deren Bewältigung befähigen*"(Bruder 2000, 72). Zum erfolgreichen Problemlösen benötigt man eine entsprechende Lerneinstellung, ein flexibles und vernetztes Grundwissen und einen gewissen Grad an heuristischer Bildung. Unter heuristischer Bildung versteht man die Kenntnis und Fähigkeit zum Anwenden von Heurismen. (Vgl. Bruder 2000, 72)

Um die Schüler und Schülerinnen nun zum eigenen Denken anzuregen, ist es notwendig, dass diese sich einer Lücke, einer Unklarheit zwischen den eigenen Erwartungen und dem Ergebnis bewusst werden und diese überwinden wollen. Auslöser zum Lernen kann daher ein unerklärlicher Vorfall, ein überraschendes Ergebnis beziehungsweise eine Widersprüchlichkeit sein. Bei dieser Art des Lernens, welche über die bloße mechanische Anwendung von bestimmten Techniken und Regeln hinausgeht, braucht man Zeit, man muss Rückschläge in Kauf nehmen und die Gefahr in Sackgassen zu geraten. (Vgl. Mason et al. 2008, 158f)

Der Zeitfaktor spielt eine entscheidende Rolle, es sollte daher unbedingt ausreichend Zeit gegeben werden, sodass wirklich jede Schülerin und jeder Schüler die Gelegenheit bekommt sich selbständig mit der Aufgabenstellung zu beschäftigen. Auch die Gelegenheit sich mit seinen Mitschülerinnen und Mitschülern austauschen zu können, wirkt sich günstig beim Lernen von Problemlösen aus. Dadurch wird nicht nur die Möglichkeit gegeben sich durch Rückfragen zu vergewissern, ob der individuelle Lösungsansatz auch stimmen könnte, sondern es wird auch noch das Argumentieren gefördert. (Vgl. Leuders 2003, 130). Aus diesem Grund muss die Lehrkraft einen entsprechenden Freiraum einrichten, welcher sogar frei von der Leistungsbeurteilung sein soll. Man bedenke hierbei, dass durch den Leistungsdruck die Kreativität, welche zum Problemlösen unerlässlich ist, eingeschränkt wird. Daher sollte die Problemlösungsphase unbedingt unter der Bedingung des Aufschubs von Bewertung ablaufen. (Vgl. Leuders 2003, 128; 130)

Es gilt daher eine förderliche Atmosphäre zu schaffen, welche folgende drei Aspekte beinhalten sollte. Erstens sollte sie anregend sein, sodass sie die Neugier der Lernenden weckt. Zweitens sollte sie fordernd sein, sodass durch die Herausforderung ein gewisser Anreiz entsteht. Drittens muss sie Zeit zum Nachdenken gewähren, daher muss den Lernenden die Möglichkeit gegeben werden selbständig darüber nachzudenken, Fragen zu stellen und ihre eigenen Vermutungen aufzustellen und diese in Ruhe zu betrachten. (Vgl. Mason et al. 2008, 160f; Vollrath und Roth 2012, 111; 283)

Neben der bereits behandelten Bedingung an ausreichend Zeit, ist es noch wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler Erfolgserlebnisse haben. Hierfür benötigt man *„[d]ie richtige Balance zwischen Anregungsniveau und Lösungshoffnung [..]“* (Leuders 2003, 130). Dies trägt wesentlich dazu bei die Motivation der Schülerinnen und Schüler zu steigern. (Vgl. Leuders 2003, 130)

Obwohl prinzipiell die generelle Ansicht besteht, dass man Problemlösen nur lernen kann, indem man selbständig Probleme löst, so gibt es doch sinnvolle Hilfestellungen, welche die Lehrkraft den Lernenden geben kann. Einerseits kann in den Reflexionsphasen heuristisches Wissen vermittelt werden, andererseits kann man das schematische Vorgehen demonstrieren, welches bei allen Problemen gleich ist, sodass die Schülerinnen und Schüler ein Handlungsmuster erhalten. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 112)

Da Schülerinnen und Schüler, wie schon erwähnt, zum erfolgreichen Problemlösen auch entsprechende Problemlösestrategien und Arbeitstechniken benötigen, so können diese allmählich im Unterricht angereichert werden und über Reflexion bewusst gemacht werden. Besonders wichtig ist hierbei das Bewusstmachen der Strategien, sodass den Schülerinnen und Schülern deutlich wird, welche Methoden, nicht nur in der Mathematik, sinnvoll eingesetzt werden können. (Vgl. Leuders 2003, 130f)

Eine andere Voraussetzung zum produktiven Problemlösen ist die Tatsache, dass die Schülerinnen und Schüler entsprechende Vorkenntnisse entweder besitzen müssen oder sich diese selbständig erarbeiten können. Aber auch die Lehrperson kann entsprechende Hilfe anbieten.(Vgl. Leuders 2003, 130)

Bezüglich der Hilfestellung seitens der Lehrkraft ist hier anzumerken, dass stets das „*Prinzip der minimalen Hilfe*“(Zech 1978, 287) gilt. Man kann hierbei zwischen folgenden Arten der Hilfestellung mit zunehmender Einflussnahme unterscheiden: 1) Motivieren, 2) Rückmeldungen, 3) allgemeine strategische Hinweise, 4) inhaltsorientierte strategische Interventionen und 5) inhaltliche Hinweise. (Vgl. Zech 1978, 287) Um diese verschiedenen Hilfestellungen genauer zu verstehen, betrachtet man nun die folgende Tabelle.

Tabelle 6.1: Hilfestellungsarten, nach: Zech 1978,291

Motivationshilfen	Rückmeldungshilfen	allgemein-strategische Hilfen	inhaltsorientierte strategische Hilfen	inhaltliche Hilfen
Die Aufgabe ist nicht schwer!	Du bist auf dem richtigen Wege!	Lies die Aufgabe genau durch!	Versuche, deine Kenntnisse bezüglich Geschwindigkeit anzuwenden!	Denk an den Zusammenhang Geschwindigkeit - Weg - Zeit!
Du wirst die Aufgabe schon schaffen!	Du stehst kurz vor der Lösung!	Schreib dir die gegebenen Daten heraus!	Versuche, das Problem graphisch zu lösen!	Wie ist Geschwindigkeit definiert?
Man braucht nicht viel Zeit zur Lösung ...	Da musst du noch mal nachrechnen!	Mach dir doch mal eine Zeichnung!	Vielleicht kann dir die Dreisatz- oder Verhältnisrechnung helfen!	Versuche, aus zwei der Größen v, s, t die dritte zu berechnen!
Man bekommt schnell Anhaltspunkte für die Lösung!	Mach weiter so!	Versuche, die gegeben Daten in einen Zusammenhang zu bringen!	Worauf kommt es hier an? Welche Rolle spielt der Hubschrauber?	Rechne doch erst mal aus, wann sich die Autos treffen!
		Überprüfe deinen Lösungsweg!	Überprüfe die Größenordnung des Ergebnisses!	Jetzt weißt du, wie lange der Hubschrauber in der Luft bleibt, und du kennst seine Geschwindigkeit. Also? ...
			Überprüfe dein Ergebnis am Text!	

Link (2011) sieht im Vergleich dazu reine strategische Interventionen von Seiten der Lehrkraft als sinnvoller an um den Problemlösungsprozess in Gang zu halten. Unter strategischen Interventionen versteht sie jede Art von Äußerungen, welche ein strategisches Vorgehen anregen können, ohne dass man sich dabei auf konkrete Inhalte mathematischer Art bezieht (vgl. Link 2011, 89). Dabei sieht das Mustervorgehen bei strategischen Interventionen folgendermaßen aus:

„

- *Der Problemlöseprozess stockt.*
- *Die Lehrperson beginnt mit einer strategischen Intervention.*
- *Während der Szene greift die Lehrperson nicht mit eigenen Ideen in den Lösungsverlauf inhaltlich ein.*
- *Die Szene endet mit einem Lernmoment bzw. mit einem Neuansatz selbstständigen Arbeitens der Schülerin bzw. des Schülers, der zu einem Lernmoment führt.“*

(Link 2011, 175)

Als sinnvolle Ratschläge bezüglich der Umsetzbarkeit im Unterricht wird folgendes angegeben: Zu Beginn sollten einfache Probleme behandelt werden, da die Schülerinnen und Schüler Erfolgserlebnisse brauchen, um Selbstvertrauen zu gewinnen. Weiters sollen die Lösungen immer genau aufgeschrieben werden, sodass man über die gewonnenen Erkenntnisse und Erfahrungen reflektiert. Zudem sollte man immer daran denken, dass Problemlösen kein Selbstzweck ist, sondern das dies zur Hinführung zu weiteren Theorien dient. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 282)

Leuders (2003) fasst diese genannten Kriterien, um Problemlösen produktiv im Unterricht umzusetzen, in die drei Bereiche, Wissen, Problemlösehaltung und Problemlösekompetenz zusammen. Diese drei Bereiche stellen die notwendigen Voraussetzungen dar, welche man beim Problemlösen benötigt. Jeder von diesen entspricht einem Verantwortungsbereich der Lehrperson, welche diese bei der Unterrichtsgestaltung berücksichtigen sollte. (Vgl. Leuders 2003, 131)

Tabelle 6.2: Benötigte Bereiche beim Problemlösen, nach: Leuders 2003, 131

	Voraussetzung des Lernenden	Verantwortung des Lehrenden
Wissen	im Unterricht (und auch in anderen Fächern oder im Alltag) erworbene Kenntnisse und Fähigkeiten	richtige Balance aus zu erwartendem Vorwissen und Neuheit des Problems
Problemlösehaltung	Frustrationstoleranz, Durchhaltevermögen, Erkundungsfreude	günstige Motivationslage fördern, Lehrer als Modell des Problemlösers
Problemlösekompetenz	Informationsbeschaffung, Arbeitstechniken, heuristische Strategien	Gelegenheiten für Reflexion schaffen

6.2 Wie lernt man Problemlösen?

Anhand der soeben erwähnten Auflistung wird erkenntlich, dass die Schülerinnen und Schüler sowohl *inhaltsbezogene*, Wissen, als auch *prozessbezogene*, Können, Komponenten und natürlich auch die entsprechenden *Haltungen* zum erfolgreichen Problemlösen benötigen. Jedoch gibt es bezüglich der Erwerbung der beiden letztgenannten Bedingungen grundsätzlich zwei verschiedene Ansichten. Auf der einen Seite besteht die Ansicht, dass man diese heuristischen Strategien explizit unterrichten und auch reflektieren sollte. Auf der anderen Seite besteht die Meinung, dass man eben durch Problemlösen die dafür nötigen Lösungsstrategien implizit auch mitlehrt und dadurch lernen die Schülerinnen und Schüler diese auch unbewusst. Jedoch ist hierbei anzumerken, dass das Lernen dieser Strategien noch nicht bedeutet, dass man diese auch richtig anwenden kann. (Vgl. Leuders 2003, 131)

„Fest steht aber wohl, dass eine gewisse Form der Metakognition, d.h. des reflektierten Arbeitens nicht nur unabdingbare Voraussetzung für das Problemlösen ist, sondern immer schon ein erklärtes Ziel allgemeinbildenden Mathematikunterrichts“ (Leuders 2003, 131).

Diese Ansicht ist weitgehend verbreitet, wobei Mason et al. (2008) eine Mischform der beiden oben genannten Vorgehensweisen beim Lernen von Problemlösen vertreten. Um seine Problemlösefähigkeit und damit sein mathematisches Denken zu steigern, benötigt man zunächst eine grundlegende Basis, in welcher man sich die wichtigsten mathematischen Techniken und Fertigkeiten aneignet. Zur Verbesserung seiner mathematischen Denkfähigkeit ist die bloße Bearbeitung von Aufgaben sinnlos, wenn man sich nicht auch bewusst macht, welche Techniken man einsetzen kann. Auch Fragen zu stellen, wenn man in Schwierigkeiten gerät, ist äußerst wichtig um sein Vorgehen zu reflektieren. Daher kann man Problemlösen nur lernen, indem man einerseits Probleme selbst in Angriff nimmt und andererseits über die dabei gemachten Erfahrungen reflektiert. Dabei ist es besonders wichtig, die dabei aufkommenden Schwierigkeiten produktiv zu nutzen. Zusammenfassend lässt sich daher sagen, dass Problemlösen vor allem nur durch Übung erlernbar ist, da man sich dadurch ein Repertoire an nützlichen Strategien aneignet, aber, dass diese, ohne sorgfältige Reflexion danach, sinnlos ist. (Vgl. Mason et al. 2008, 154ff)

Problemlösen zu lernen bedeutet daher immer durch Reflexion zu lernen (vgl. Vollrath und Roth 2012, 82). Wobei man durchaus auch Problemlösen lernen kann, indem man Musterlösungen betrachtet und über das Vorgehen reflektiert (vgl. Vollrath und Roth 2012, 282).

Bruder und Collet (2011) beschränken das Lernen von Problemlösen in ihren Ansatz auf das *„Kennen- und Anwendenlernen von Methoden und Techniken zum Lösen individuell schwieriger Aufgaben“* (Bruder und Collet 2011, 14). Zu dieser Ansicht gelangen sie, indem sie die Meinung vertreten, dass man zum erfolgreichen Problemlösen eine gewisse geistige Beweglichkeit benötigt (vgl. Bruder und Collet 2011, 33). Heuristische Methoden und Techniken müssen eben nicht, wie andere mathematische Verfahren, zur Lösung der Aufgabe führen. Beim Problemlösen zeigt sich diese geistige Beweglichkeit in folgenden Formen: Reduktion auf das Wesentliche, Reversibilität von Gedankengängen, Aspektbeachtung - Beachtung von mehreren Aspekten gleichzeitig oder gegenseitige Abhängigkeit erkennen, Aspektwechsel - Annahmen, Kriterien wechseln, Problemstellung umstrukturieren. (Vgl. Bruder 2000, 73)

Mögliche Defizite bei dieser, können durch das Erlernen und Anwendenlernen von heuristischen Problemlösestrategien ausgeglichen werden, was als *„Wirkungsprinzip heuristischer Schulung“* bezeichnet wird (vgl. Bruder und Collet 2011, 36).

Auch wenn die strategische Denkfähigkeit der Schülerinnen und Schüler womöglich durch das Kennen und Anwenden lernen von Heurismen verbessert werden kann, so finde ich die bloße Fixierung auf heuristische Strategien fragwürdig, um den Schülerinnen und Schülern die tiefere Bedeutung von Problemlösen nahe zu bringen. Zudem wäre in diesem Ansatz die Lehrpersonen damit überfordert, die Lösungsideen der Lernenden zu diagnostizieren (vgl. Link 2011, 217).

Zusammenfassend kann man sagen, dass man zum Problemlösen a) mathematisches Wissen (Basiswissen), b) heuristisches Wissen (metamathematisches Wissen) und c) Übung und Erfahrung zum Einsetzen dieses Wissen benötigt (vgl. Vollrath und Roth, 281).

7 Problemlösen im Mathematikunterricht

Um die unterschiedlichen Bildungsziele zu erreichen gibt es nicht das pädagogische bzw. didaktische Konzept schlechthin, sondern je nach fokussierter Zielsetzung eignen sich verschiedene Unterrichtsmethoden bzw. Lernstrategien unterschiedlich gut (vgl. Weinert 2002, 18). Dies bedeutet, dass Problemlösen als alternative Unterrichtsmethode durchaus ihre Berechtigung hat, jedoch sich nicht für jedes Lernziel gleich gut eignet.

Im Folgenden wird kurz auf die Kritik am vorherrschenden Mathematikunterricht eingegangen. Anschließend wird auch erläutert, welche Schwierigkeiten sich bei der Umsetzung von Problemlösen als alternative Unterrichtsmethode ergeben könnten. Das Kapitel schließt mit einigen praxisnahen Beispielen ab, wie Problemlösen im Unterricht eingesetzt werden könnte.

7.1 Derzeitige Realität im Mathematikunterricht

Haas (2000, 11) hat die Ansicht, dass es sich bei den meisten Aufgaben, welche im Mathematikunterricht verwendet werden, entweder um Routineaufgaben oder Interpolationsprobleme handelt. Wenn dann doch Problemlöseaufgaben im Unterricht verwendet werden, geschieht dies entweder als Einstiegsaufgaben zu einer neuen Thematik oder in Form von besonders schwierigen Aufgaben, die auf weiterführende Probleme hinweisen. Problemlöseaufgaben zum Einstieg in eine neue Thematik stellen nur deshalb Probleme dar, da man die hierfür notwendigen Begriffe, Regeln und Verfahren noch nicht behandelt hat. Dieses Defizit soll im Laufe des Unterrichts so schnell wie möglich behoben werden. In der anderen genannten Form werden diese entweder ganz zum Schluss, oder nur von besonders begabten Schülerinnen und Schülern oder eben überhaupt nicht behandelt. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass man die meisten Problemlöseaufgaben entweder in der Hochbegabtenförderung oder in Mathematikwettbewerben findet, vom normalen Schulalltag sind sie weitgehend ausgeschlossen. (Vgl. Haas 2000, 11)

Dennoch werden Probleme im Unterricht eingesetzt, wobei diese vermehrt gemeinsam in einer Interaktion mit der Lehrkraft erarbeitet werden. Im bestem Fall liefert eine Schülerin oder ein Schüler die Idee zur Lösung des Problems. Ansonsten wird diese von der Lehrkraft genannt oder es werden zumindest Hinweise diesbezüglich gegeben. Jedoch liegt der zentrale Erkenntniswert darin, dass die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Lösung finden. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 111)

Auch Mason et al. (2008, 157) haben die Ansicht, dass im Mathematikunterricht das Frage-/Antwort-Schema vermehrt eingesetzt wird. Dadurch entsteht der Eindruck, dass die mathematische Denkweise das Ergebnis einer wiederholten Übung an Aufgaben ist. (Vgl. Mason et al. 2008, 157)

Gerade nach dem Scheitern bei TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study*) und PISA (*Program for International Student Assessment*) wurde der Wunsch nach mehr Anwendungsorientiertheit im Unterricht laut. Trotz aller möglichen Versuche der Umsetzbarkeit scheint dies bis heute nicht entsprechend realisiert worden zu sein. Aus diesem Grund wird die Mathematik, wie sie in der Schule behandelt wird, oft als nutzlos und realitätsfern angesehen. (Vgl. Reiss und Hammer 2013, 8f)

Laut Reiss und Hammer (2013, 9) werden diesbezüglich drei Gründe genannt:

1. Im Unterricht dominieren noch immer die regelhaften und prozeduralen Aspekte. Die, als „alltagsbezogene“Aufgaben bezeichneten, sind nicht

mehr als eingekleidete Aufgaben, welche praktisch ohne jegliche Alltagsrelevanz sind. Diese dienen einzig und allein dazu bestimmte Rechenoperationen zu routinieren.

2. Der Bezug zu der Lebenswelt in einer Aufgabe kann nicht konstant sein, da sich das Interesse der Schülerinnen und Schüler ständig verändert. Dennoch sollten gute Aufgaben einen subjektiven Bezug zu der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler herstellen.

3. Manche Alltagsprobleme wären zwar prinzipiell dazu geeignet im Unterricht behandelt zu werden, dennoch werden diese dann sehr oft unrealistisch formuliert. Durch diese unglückliche Darstellung sind diese Aufgaben dann praktisch wertlos.

7.2 Mögliche Schwierigkeiten bei der Umsetzbarkeit im Unterricht

Vollrath und Roth (2012, 69) haben die Ansicht, dass Fragestellungen, welche zu einem problemorientierten Lernen anreizen sollen, in den gängigen Schulbüchern entweder als hinführende oder vertiefte Aufgaben zu finden sind. Dennoch sind diese Arten der Aufgabensammlungen Mangelware, sodass noch immer Übungsaufgaben zur Ertragssicherung in den Schulbüchern dominieren. (Vgl. Vollrath und Roth 2012, 69)

Also wird der Mathematikunterricht vermehrt auf das reine Lösen von Aufgaben dezimiert, wodurch das schon beschriebene verzerrte Bild von Mathematik entsteht (vgl. Vollrath und Roth 2012, 71).

Wie bereits erwähnt ist es möglich sich durch Problemlösen, mathematisches Wissen anzueignen. Jedoch benötigt man zum Problemlösen selbst bereits Wissen und mathematische Fähigkeiten, welche womöglich noch nicht vorhanden sind. Zudem besteht das Risiko die Übersicht zu verlieren. Aus diesem Grund wird vorgeschlagen, dass man den Wissenserwerb durch Problemlösen nur als Ergänzung verwendet. (Vgl. ebd., 46f; 61)

Eine weitere Problematik der Umsetzbarkeit liegt darin, dass sich gerade beim Problemlösen die gravierenden Leistungsunterschiede der Schülerinnen und Schüler zeigen. Diese sind nun auch den Problemlösern bewusst und könnten sich eventuell demotivierend auf leistungsschwache Schülerinnen und Schüler auswirken. Aus diesem Grund sind im generellen Unterricht keine besonders guten Voraussetzungen zum selbstständigen Problemlösen gegeben. (Vgl. ebd., 282)

Des Weiteren ist mit Problemlösen ein hoher Zeitaufwand verbunden (vgl. ebd., 62). Man bedenke dabei, dass die Rahmenbedingungen einer Unterrichtsstunde hierfür nicht gerade günstig sind, da diese nur 50 Minuten umfasst und nach dieser Zeit muss der kreative Prozess einfach abgebrochen werden.

Nach Link (2011, 81) ergibt sich zudem für die Umsetzbarkeit des Problemlösens ein besonderer Anspruch für die Lehrperson, wobei sich Link (2011, 81) auf die Arbeit „Teaching problem solving“in *Problem solving - A world view (Proceedings of the problem solving theme group, ICME 5)* von Burkhardt (1988) bezieht. Zunächst einmal aus mathematischer Perspektive müssen die verschiedenen Lösungsansätze nicht nur akzeptiert werden, sondern es muss auch miteinbezogen werden, ob diese eventuell auch zum Ziel führen könnten. Denn nur so ist es möglich, dass die Lehrperson sinnvoll intervenieren kann. Bezüglich der Interventionen von Seiten der Lehrkraft gilt stets, dass die Selbstständigkeit der Lernenden erhalten bleiben sollte. Dies ist nicht besonders leicht, da nun die Lehrkraft entscheiden muss, wann es Sinn macht sich einzuschalten und wie dies überhaupt vonstatten gehen soll. Des Weiteren ist es für die meisten Lehrpersonen eine ungewöhnliche Situation, wenn man selbst die Zügel aus der Hand gibt und an seine Schülerinnen und Schüler übergibt. (Vgl. Link 2011, 81)

7.3 Wie könnte Problemlösen im Mathematikunterricht aussehen?

In diesem abschließenden Unterkapitel möchte ich erläutern, wie man Problemlösen sinnvoll im Mathematikunterricht umsetzen könnte. Hierbei möchte ich erwähnen, dass nicht das Problemlösenlernen selbst, daher das Erlernen von heuristischen Strategien und Techniken im Unterrichtsmittelpunkt steht, sondern wie man durch den Einsatz von Problemlöseaufgaben effektiv Mathematik in der Schule betreiben kann.

Die verfassten Unterrichtsvorschläge sind nach ihrer jeweiligen Einsetzbarkeit in den verschiedenen Schulstufen unterteilt. Da die Schülerinnen und Schüler verschiedenes Vorwissen benötigen, um die unterschiedlichen Problemlöseaufgaben überhaupt erst bearbeiten zu können, wird auch dieses immer angegeben.

Für jede geplante Unterrichtsstunde wird:

- Ein Unterrichtsziel angegeben.
- Ein Bezug zum Lehrplan hergestellt.
- Die erforderlichen Vorkenntnisse angegeben.
- Die Funktion der Aufgabe genannt.
- Angegeben, welchen Erkenntniswert diese Stunde für die Schülerinnen und Schüler hat.

Dennoch möchte ich an dieser Stelle erwähnen, dass es durchaus auch Problemstellungen gibt, welche unabhängig von der jeweiligen Schulstufe eingesetzt werden können. So zeigt zum Beispiel folgende Problemlöseaufgabe, wie man durch scheinbar irrelevante Informationen überraschend zur Lösung gelangt.

„Zwei russische Mathematiker treffen sich zufällig im Flugzeug: „Hattest du nicht drei Söhne?“, fragt der eine, „wie alt sind die denn jetzt?“„Das Produkt der Jahre ist 36“, lautet die Antwort, „und die Summe der Jahre ist genau das heutige Datum.“„Hmm, das reicht mir noch nicht“, meint darauf der Kollege. „Oh ja, stimmt“, sagt der zweite Mathematiker, „ich habe ganz vergessen zu erwähnen, dass mein ältester Sohn einen Hund hat.“
Wie alt sind die drei Söhne? “ (Dambeck 2012, 2. Teil: Vorsicht Falle!)

Gerade dieser Überraschungseffekt durch die auftretende Information, dass der älteste Sohn einen Hund besitzt, kann bewirken, dass die Schülerinnen und Schüler beginnen nachzudenken. Neben dieser, zunächst als nutzlos empfundenen Zusatzbemerkung über die Tierhaltung seines ältesten Sohnes erweckt die Aufgabe auch noch den Anschein, als würden wichtige Informationen um das Alter der Kinder zu bestimmen fehlen, da man zwar das Produkt, aber nicht die Summe der Jahre kennt.

Natürlich ist nicht der Hund die relevante Information, sondern die Tatsache, dass es einen ältesten Sohn gibt. Betrachtet man dies nun in diesem Zusammenhang, so muss man nun alle ganzzahligen Zahlen betrachten, deren Produkt 36 ist. Nun muss man nur noch die Summe dieser Zahlen bilden und bemerkt, dass diese nur in zwei Fällen gleich ist.

Produkt 36	Summe
1,1,36	38
1,2,18	21
1,3,12	16
1,4,9	14
1,6,6	13
2,2,9	13
2,3,6	11
3,3,4	10

Erst jetzt macht die zusätzliche Information Sinn, da der andere Mathematiker zwar das Datum wusste, es aber dafür zwei Möglichkeiten gab und zwar 1, 6, 6 oder 2, 2 und 9 Jahre. Durch die relevante Information, dass es einen ältesten Sohn gibt, bleibt nur noch die Möglichkeit 2, 2 und 9 Jahre als Lösung. (Vgl. Dambeck 2012, 2. Teil: Vorsicht Falle!)

Die hier vorgestellte Aufgabe zeigt, wie wesentlich es ist, dass man eine Aufgabenstellung erst einmal verstanden haben muss, bevor man stur rechnet. Zudem wird hierbei die heuristische Strategie des Vorwärtsarbeitens und des systematischen Probierens angewendet, da man einerseits von den gegebenen Informationen ausgeht und andererseits auch nur relevante Zahlen ausprobiert, deren Produkt 36 ergibt. Diese Aufgabenstellung kann man meiner Ansicht nach nicht nur in der Unterstufe, sondern auch in der Oberstufe im Unterricht einsetzen, da sie eben zeigt, wie schon erwähnt, wie wichtig es ist zuerst alle Informationen im Zusammenhang zu verstehen.

7.3.1 Problemlösen in der 5.Schulstufe

Unterrichtsvorschlag 1

Im Schulbuch „Mathematik verstehen 1“für die 5. Schulstufe findet man im Kapitel *Zahlen und Maße* folgende Aufgabenstellung:

„Herr Petric hebt bei einem Bankomaten 400 € ab. Er braucht für eine Zahlung einen 50 €-Schein und zwei 10 €-Scheine. Der Bankomat gibt 100er-, 50er-, 20er-, und 10er-Scheine aus. Gib mindestens drei Möglichkeiten an, in welchen Scheinen er sich die 400 € auszahlen lassen kann“ (Salzger et al. 2014, 39)!

Diese Aufgabe stellt nach meiner Auffassung von Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht noch nicht ein Problem dar, da sie zu geschlossen formuliert wurde. Man kann jedoch die Aufgabe öffnen, indem man angibt, dass möglichst viele Möglichkeiten angegeben werden sollen, in welchen er sich die 400 € Scheine auszahlen lassen kann.

Nun wäre dies eine Problemlöseaufgabe, welche man ohne Probleme schon in der 5. Schulstufe verwenden könnte, da hierbei kaum mathematisches Vorwissen benötigt wird. Zudem ist die Aufgabe leicht verständlich formuliert und auch sinnvoll über verschiedene Lösungswege bearbeitbar. Als mögliche Lösungswege könnten hier systematisches Probieren, die Zuhilfenahme von Tabellen, sowie das Extremalprinzip sinnvoll eingesetzt werden.

Ziel der Unterrichtsstunde:
Die Schülerinnen und Schüler werden mit Problemlöseaufgaben vertraut gemacht. Heuristische Strategien, wie etwa das systematische Probieren, werden dabei implizit angewendet.

Bezug zum Lehrplan:

„***1.1. Arbeiten mit Zahlen und Maßen** [...]*

- *anhand von Teilern und Vielfachen Einblicke in Zusammenhänge zwischen natürlichen Zahlen gewinnen;*

[...]“(BMBF 2000, 4f).

Erforderliche Vorkenntnisse:
Die Schülerinnen und Schüler müssen die Begriffe „Teiler“und „Vielfache“kennen.

Funktion der Aufgabe:
Da die Aufgabe in einem sehr lebensnahen Kontext gestellt ist, ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern eine Problemstellung mathematisch zu bearbeiten.

Erkenntniswert:
Der Erkenntnisgewinn bei diesem Problem wäre, dass die Schülerinnen und Schüler das Arbeiten mit heuristischen Strategien kennen lernen. Diese Erkenntnis müsste jedoch, nachdem die Aufgabe bearbeitet und die Ergebnisse dargestellt wurden, von Seiten der Lehrkraft ausdrücklich hervorgehoben werden.

Unterrichtsvorschlag 2

Eine andere Aufgabe ist die Aufgabenstellung „**Fähre**“aus der Kulturministerkonferenz (KMK 2005). Diese besitzt zwar nur zum Teil Problemlösecharakter, aber gerade durch das Minimum an mathematischem Basiswissen, welches man zu deren Bearbeitung benötigt, lässt sich die Aufgabe schon sehr gut in der 5. Schulstufe einsetzen. Die Aufgabenstellung lautet wie folgt:

„An der Anlegestelle einer großen Fähre findet sich diese Preistabelle:

Einzelkarte	*1 Person*	*50,00 €*
Blockkarte	*8 Personen*	*380,00 €*
Blockkarte	*20 Personen*	*900,00 €*

a) Berechne den günstigsten Preis für 16 Personen.
b) Welchen Preisnachlass erhält Peter, wenn er statt 20 Einzelkarten die entsprechende Blockkarte kauft?
c) Für eine Gruppe aus 24 Personen rechnet Frank einen Preis von 1140,00 € aus. Maike meint, dass die Gruppe günstiger fahren kann. Hat sie Recht? Begründe.
d) Die Fährgesellschaft will eine Blockkarte für 50 Personen einführen. Welcher Preis wäre dafür angemessen? Begründe“ (KMK 2005, 26).

Ziel der Unterrichtsstunde:
Die Schülerinnen und Schüler werden mit Problemlöseaufgaben vertraut gemacht und erkennen, dass es nicht immer eine eindeutige Lösung für ein Problem gibt.

Bezug zum Lehrplan:

„***1.1. Arbeiten mit Zahlen und Maßen*** *[...]*

- *einfache Ungleichungen zum Einschranken benutzen;*

...

- *grundlegende Sicherheit im Kopfrechnen gewinnen,*

[...]“(BMBF 2000, 4f).

Erforderliche Vorkenntnisse:
Da man für diese Aufgabenstellung nur die Beherrschung der Grundrechnungsarten benötigt, könnte man sie jeder Zeit in der 5. Schulstufe einsetzen.

Funktion der Aufgabe:
Nur der letzte Punkt der Aufgabenstellung ist als ein Problem zu verstehen, aber das Interessante an dieser Problemstellung ist, dass es keine eindeutige

Lösung gibt. Die Schülerinnen und Schüler können daher über eine mögliche Lösung diskutieren und ihre jeweiligen Entscheidungen begründen. Dies zeigt auch wieder, wie sehr Problemlöseaufgaben mit anderen Kompetenzbereichen, wie etwa Argumentieren und Begründen, verknüpft sind. In der Schule würde ich die Aufgabe von den Schülerinnen und Schülern selbstständig bearbeiten lassen. Anschließend würde ich nur kurz die Ergebnisse von a) bis c) vergleichen und nur bei der letzten Aufgabenstellung auf eine genauere Diskussion der Ergebnisse eingehen.

Erkenntniswert:
Die Schülerinnen und Schüler beginnen durch die Aufgabenstellung Alltagssituationen mit der mathematischen Brille zu betrachten.

7.3.2 Problemlösen in der 6.Schulstufe

Unterrichtsvorschlag 3

Im Schulbuch „Mathematik verstehen 2"für die 6. Schulstufe findet man im Kapitel *Zahlen und Maße* folgende Aufgabenstellung:

> *„Vor einer Schule soll ein Fahrradabstellplatz mit 96 dm Länge und 36 dm Breite mit möglichst großen quadratischen Betonplatten ausgelegt werden. Welches Maß soll für die Seitenlänge einer Betonplatte verwendet werden"* (Salzger et al. 2015, 29)?

Bei dieser Aufgabenstellung handelt es sich eindeutig um eine Problemlöseaufgabe, denn zunächst einmal ist kein Lösungsverfahren offensichtlich. Des Weiteren ist die Problemsituation leicht verständlich und innermathematisch gestellt. Zudem ist es möglich diese Aufgabenstellung durch systematisches Probieren, sowie durch Einsetzen einer Tabelle oder durch graphische Hilfestellungen zu lösen.

Ziel der Unterrichtsstunde:
Die Schülerinnen und Schüler sollen den Begriff des größten gemeinsamen Teilers kennenlernen.

Bezug zum Lehrplan:

„***2.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen*** *[...]*

- *wichtige Teilbarkeitsregeln kennen und anwenden können;*

[...]“(BMBF 2000, 5f).

Erforderliche Vorkenntnisse:
Um diese Aufgabe überhaupt lösen zu können, benötigen die Lernenden das Wissen, was man unter einem echten Teiler in der Mathematik versteht. An dies ist bei der zeitlichen Einsetzung der Problemlöseaufgabe zu denken.

Funktion der Aufgabe:
Diese Problemlöseaufgabe basiert auf einem zentralen mathematischen Begriff, in diesem Fall der Begriff des „ggT“, welcher im Zuge der Problemlösung entwickelt werden soll.

Erkenntniswert:
In dieser Problemstellung liegt der Erkenntniswert im zentralen mathematischen Begriff des größten gemeinsamen Teilers, auf welchen man notwendigerweise bei der Lösung des Problems stößt. Zudem gilt es wiederum, dass die Lehrperson das gewonnene Wissen explizit für die Schülerinnen und Schüler darlegt.

Unterrichtsvorschlag 4

Auch in dem Kapitel *Geometrische Figuren und Körper* im Schulbuch „Mathematik verstehen 2“für die 6. Schulstufe findet man einige Aufgaben, welche man sehr gut verwenden kann, wenn man Problemlösen als Unterrichtsmethode verwenden möchte. Dennoch muss man aufpassen, da einige Aufgaben nur zum Teil Problemlösecharakter aufweisen, wie zum Beispiel folgende:

„Für die beiden Siedlungen Köhlergrund und Hainwiesen soll eine neue Schule so errichtet werden, dass diese von beiden Siedlungen gleich weit entfernt ist. Zeichnet mehrere Möglichkeiten für den neuen Schulstandort ein und begründet eure Wahl“ (Salzger et al. 2015, 161)!

Diese Aufgabe würde ich nicht als eine besonders gute Problemlöseaufgabe bezeichnen, da die Lösung dieser Aufgabe geradewegs zu dem Begriff der Streckensymmetrale führt und dabei keinerlei andere Lösungswege zulässt. Hingegen wirkt folgende Aufgabenstellung schon um einiges offener, da dieser zwar auch der zentrale mathematische Begriff des Umkreismittelpunktes zu Grunde liegt, dieser aber nicht zwangsweise bei der Lösung der Aufgabe entwickelt wird.

„Für drei Forschungsstationen in der Antarktis ist ein neuer Hubschrauberlandeplatz geplant, der von jede Station gleich weit entfernt ist.
Konstruiere den Punkt L, an dem der Landeplatz gebaut werden soll“ (Salzger et al. 2015, 205).

Ziel der Unterrichtsstunde:
Die Schülerinnen und Schüler sollen den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks konstruieren können.

Bezug zum Lehrplan:

> *„**2.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern** [...]*
>
> - *Eigenschaften von Strecken- und Winkelsymmetralen kennen,*
> - *und für Konstruktion anwenden können;*
>
> *[...]*“(BMBF 2000, 6).

Erforderliche Vorkenntnisse:
Um diese Aufgabe lösen zu können, benötigen die Lernenden das Wissen, was man unter einer Streckensymmetrale versteht und wie man diese konstruiert.

Funktion der Aufgabe:
Diese Problemlöseaufgabe basiert auf dem zentralen mathematischen Begriff des „Umkreismittelpunktes“eines Dreiecks, welcher im Zuge der Problemlösung entwickelt werden soll. Zudem kann man die Komplexität der Aufgabestellung noch variieren, indem man den Schülerinnen und Schülern entweder eine Skizze der Standorte angibt, sodass diese erkennen, dass es sich um ein Dreieck handelt oder man lässt diese informative Figur einfach weg.

Erkenntniswert:
Der Erkenntniswert dieser Problemstellung liegt im zentralen Begriff des Umkreismittelpunktes eines Dreiecks, auf welchen man womöglich bei der Lösung der Aufgabe stößt. Nachdem die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungsversuche vorgestellt haben, muss die Lehrperson wieder die gewonnenen Erkenntnisse explizit mit diesen besprechen.

Unterrichtsvorschlag 5

Im Bereich der Prozentrechnung gibt es ebenfalls sehr schöne Problemlöseaufgaben, welche man mit seinen Schülerinnen und Schülern im Unterricht behandeln könnte. Die erste Problemlöseaufgabe über Wassermelonen stammt von Bruder und Collet (2011) und lautet wie folgt:

„Eine große Wassermelone wiegt 10 kg. Die Melone hat einen Wasseranteil von 99%. (1% sind feste Bestandteile.) In einer Woche sinkt der Wasseranteil durch Verdunsten auf 98%. Wie viel kg wiegt die Melone jetzt“ (Bruder und Collet 2011, 60)?

Ziel der Unterrichtsstunde:
Die Schülerinnen und Schüler werden mit Problemlöseaufgaben vertraut gemacht. Die heuristische Strategie des Invarianzprinzip wird dabei implizit angewendet.

Bezug zum Lehrplan:

> „***2.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen*** *[...]*
>
> - *Rechnen mit Prozenten in vielfältigen Zusammenhängen;*
>
> *[...]*“(BMBF 2000, 5f).

Erforderliche Vorkenntnisse:
Voraussetzung für deren Einsetzbarkeit ist, dass die Schülerinnen und Schüler die formalen Rechenverfahren der Prozentrechnung bereits beherrschen.

Funktion der Aufgabe:
Das Interessante an dieser Aufgabe ist, dass das Ergebnis sehr erstaunlich ist. Man sollte daher zuerst das Ergebnis schätzen lassen und erst anschließend dieses berechnen lassen. Um die richtige Lösung zu finden, kann auch eine Tabelle sehr hilfreich sein.

Tabelle 7.1: Tabelle zur Lösung, aus: Bruder und Collet 2011, 60

	Masse der Melone	**Wasseranteil**	**fester Anteil**
Beginn	10 kg	9,9 kg $\widehat{=}$ 99%	100 g $\widehat{=}$ 1%
nach dem Verdunsten	5 kg	4,9 kg $\widehat{=}$ 98%	100 g $\widehat{=}$2%

Erkenntniswert:
Um diese Aufgabe lösen zu können, benötigt man das Invarianzprinzip, die Schülerinnen und Schüler müssen daher erkennen, dass sich zwar beim Verdunsten der Wasseranteil verändert, aber, dass die Masse an festen Bestandteilen unverändert bleibt, da diese nicht verdunstet. Hat man den Schülerinnen und Schülern ausreichend Zeit gegeben, um die Aufgabe selbstständig zu bearbeiten, so soll anschließend die gefundenen Ergebnisse und das Vorgehen besprochen und auch mögliche Denkfehler aufgedeckt werden.

7.3.3 Problemlösen in der 7./8. Schulstufe

Unterrichtsvorschlag 6

Eine andere Problemlöseaufgabe zur Prozentrechnung stammt von Mason et al. (2008) und lautet folgendermaßen:

„In einem Kaufhaus bekommen Sie 20% Rabatt, müssen aber 15% Umsatzsteuer zahlen. Was wäre für Sie günstiger: sollte man zuerst den Rabatt abziehen oder sollte man zuerst den Steueraufschlag vornehmen “ (Mason et al. 2008, 2)?

Ziel der Unterrichtsstunde:
Die Schülerinnen und Schüler können einen Sachverhalt mittels Variablen beschreiben. Die Schülerinnen und Schüler nutzen dabei die heuristische Strategie „Spezialfälle“um zu einer Vermutung der Lösung zu kommen.

Bezug zum Lehrplan:

„***3.2 Arbeiten mit Variablen***

- *Formeln (bzw. Terme) umformen und durch Rechenregeln begründen können,*

...

- *Formeln in Sachsituationen und in der Geometrie aufstellen können,*
- *Aufgaben aus Anwendungsbereichen und aus der Geometrie durch Umformungen von Formeln oder Termen lösen können,*

[...]“(BMBF 2000, 7).

„***4.2 Arbeiten mit Variablen***

- *Sicherheit beim Arbeiten mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen steigern,*

[...]“(BMBF 2000, 7).

Erforderliche Vorkenntnisse:
Voraussetzung für deren Einsetzbarkeit ist, dass die Schülerinnen und Schüler bereits ausreichend mit dem Arbeiten mit Variablen vertraut sind und die Prozentrechnung beherrschen.

Funktion der Aufgabe:
Auch hier gilt, dass das Endergebnis erstaunlich ist, sodass man die Schülerinnen und Schüler ebenfalls zuerst bitten sollte zu schätzen, welche Variante die günstigere ist. Um die Aufgabe zu lösen, empfiehlt es sich Spezialfälle zu betrachten, wie etwa wenn die Ware 100 Euro kosten würde. Dabei sollte den Schülerinnen und Schülern auffallen, dass die genaue Reihenfolge irrelevant ist, da in beiden Fällen ein Endbetrag von 92 Euro zu zahlen wäre. Die Problemlöseaufgabe zeigt sehr schön, wie man durch das einfache Betrachten von Einzelfällen schon zu einer Lösung gelangt.

Viel schwieriger ist es jedoch eine allgemeine Begründung hierfür anzugeben. Da man für deren Herleitung mit dem Umgang von Termen bereits vertraut sein sollte, eignet sich die Problemlöseaufgabe eher für die 7. bzw. 8. Schulstufe, auch wenn die Prozentrechnung bereits ab der 6. Schulstufe behandelt wird. Hierbei geht man von einer Ware aus die x Euro kostet.

Die erste Möglichkeit wäre zuerst den Rabatt abzuziehen und anschließend die Mehrwertsteuer zu diesem neuen Preis zu addieren. Daraus ergibt sich folgende Rechnung für den Endpreis E_1:

$$\begin{aligned} E_1 &= x - \tfrac{x}{100}\cdot 20 + \tfrac{(x-\frac{x}{100}\cdot 20)}{100}\cdot 15 \\ &= x - \tfrac{x}{5} + \tfrac{(x-\frac{x}{5})}{20}\cdot 3 \\ &= x - \tfrac{x}{5} + \tfrac{3x}{20} - \tfrac{3x}{100} \\ &= x\cdot(1 - \tfrac{1}{5} + \tfrac{3}{20} - \tfrac{3}{100}) \end{aligned}$$

Die zweite Möglichkeit ist, dass man zuerst den Steueraufschlag dazu rechnet und anschließend erst den Rabatt abzieht. Der Endpreis E_2 errechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} E_2 &= x + \tfrac{x}{100}\cdot 15 - \tfrac{(x+\frac{x}{100}\cdot 15)}{100}\cdot 20 \\ &= x + \tfrac{3x}{20} - \tfrac{(x+\frac{3x}{20})}{5} \\ &= x + \tfrac{3x}{20} - \tfrac{x}{5} - \tfrac{3x}{100} \\ &= x\cdot(1 + \tfrac{3}{20} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{3}{100}) \end{aligned}$$

Man sieht hierbei sehr schön, dass die beiden Endpreise E_1 und E_2 gleich berechnet werden und daher gilt auch, dass $E_1 = E_2$ ist.

Erkenntniswert:
Um zu einer schnellen Lösung dieser Aufgabe zu kommen, empfiehlt es sich Spezialfälle zu betrachten. Dadurch gelangen die Schülerinnen und Schüler schnell zu einer ersten Vermutung und zwar, dass die Reihenfolge hierbei keine Rolle spielt. Aber erst durch die Einführung einer passenden Notation gelangt man zu einer allgemeinen Begründung. Die Schülerinnen und Schüler sollen dadurch erkennen, welchen Vorteil der Einsatz von Variablen und die Verwendung von Formeln hat. Dieser Erkenntnisgewinn sollte wieder von der Lehrkraft hervorgehoben werden.

Unterrichtsvorschlag 7

Als Ergänzung zur vorherigen Aufgabenstellung würde ich den Schülerinnen und Schülern noch folgenden Aufgabe stellen:

In einem Kaufhaus bekommen Sie 20% Rabatt auf Alles während der Aktionstage. Daher auch auf die bereits um 30% reduzierte Ware.
Herbert sieht einen Blu-ray Player und denkt: „Super, erst wurde um 30% gesenkt und jetzt noch einmal um 20%. Jetzt kostet der Player ja nur noch halb so viel!“
Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort! (Vgl. KMK 2005, 17f)

Ziel der Unterrichtsstunde:
Die Schülerinnen und Schüler können mathematisch argumentieren. Die Schülerinnen und Schüler nutzen dabei die heuristische Strategie „Spezialfälle“, um zu einer Vermutung der Lösung zu kommen.

Bezug zum Lehrplan:

„***3.2 Arbeiten mit Variablen***

- *Formeln (bzw. Terme) umformen und durch Rechenregeln begründen können,*

...

- *Formeln in Sachsituationen und in der Geometrie aufstellen können,*
- *Aufgaben aus Anwendungsbereichen und aus der Geometrie durch Umformungen von Formeln oder Termen lösen können,*

[...]“(BMBF 2000, 7).

„***4.2 Arbeiten mit Variablen***

- *Sicherheit beim Arbeiten mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen steigern,*

[...]“(BMBF 2000, 7).

Erforderliche Vorkenntnisse:
Die Schülerinnen und Schüler sind bereits ausreichend mit dem Arbeiten mit Variablen vertraut und beherrschen die Prozentrechnung.

Funktion der Aufgabe:
Auch bei dieser Problemstellung würde ich die Schülerinnen und Schüler zuerst raten lassen. Höchstwahrscheinlich würden die meisten Schülerinnen und Schüler mit Herberts Ansicht übereinstimmen, dass die Ware nun nur noch die Hälfte vom ursprünglichen Preis kostet. Um die Aufgabe zunächst zu lösen, reicht es wieder von einem konkreten Beispiel auszugehen. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler auf das überraschende Ergebnis kommen, dass die Ware nun nicht die Hälfte vom ursprünglichen Preis kostet. Für eine allgemeine Begründung sollen die Schülerinnen und Schüler von einer Ware ausgehen, die zu Beginn x Euro kostete.

Erkenntniswert:
Die Schülerinnen und Schüler lernen durch diese Aufgabenstellung, wie man mathematisch argumentiert. Dies wird gerade dadurch erreicht, dass diese Problemstellung zur Prozentrechnung den Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler entspricht und sie dazu auffordert sich mit dem Fehlschluss auseinanderzusetzen (vgl. KMK 2005, 18). Ich würde die Schülerinnen und Schüler nun bitten, diese beiden Aufgaben zu vergleichen und zu erklären, worin der Unterschied besteht. Die Schülerinnen und Schüler sollen dadurch ein besseres Verständnis für die Prozentrechnung erhalten.

7.3.4 Problemlösen in der 8./9. Schulstufe

Unterrichtsvorschlag 8

Im Folgenden möchte ich auf zwei Aufgaben, die „**Kerzenaufgabe**“und die „**Müller-Muffig-Aufgabe**“von Bruder und Collet (2011) genauer eingehen.

„Zwei Kerzen brennen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ab: Kerze A ist 36 cm lang und brennt mit 3 cm pro Stunde ab, Kerze B ist 10 cm lang und brennt mit 1 cm pro Stunde ab. Wann sind beide Kerzen gleich lang“ (Bruder und Collet 2011, 53)?

„Um 15 Uhr startet Familie Müller mit 3 km/h zu ihrem 12 km langen Spaziergang um den See.
Plötzlich tropft es bei Herrn Muffig, der unter den Müllers wohnt, von der Decke.
Darauf versucht Herr Muffig die Müllers zu informieren.
Um 16 Uhr macht sich Herr Muffig aufgebracht mit 5 km/h auf den Weg.
Wann wird er die Müllers treffen“ (Bruder und Collet, 135)?

Ziel der Unterrichtsstunde:
Die Schülerinnen und Schüler können lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten auf verschiedene Arten lösen.

Bezug zum Lehrplan:

„***4.2 Arbeiten mit Variablen*** *[...]*

- *lineare Gleichungen mit zwei Variablen graphisch darstellen und Lösungen angeben können,*
- *Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen (zwei Gleichungen mit zwei Variablen) nutzen können,*

[...]“(BMBF 2000, 7).

„***Gleichungen und Gleichungssysteme*** *[...]*

- *Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen, Untersuchen der Lösbarkeit dieser Gleichungssysteme, geometrische Interpretation*

[...]“(BMBF 2004, 4).

Erforderliche Vorkenntnisse:
Bezüglich der zeitlichen Einsetzbarkeit dieser Problemlöseaufgaben ist zu beachten, dass bereits lineare Funktionen und ihre Darstellungsformen behandelt wurden, da die Aufgaben sonst nicht lösbar wären. Jedoch sollte noch keine Anwendungsaufgaben dieser Art im Unterricht behandelt worden sein, da es sich ansonsten nur um Routineaufgaben handeln würde.

Funktion der Aufgaben:
Die beiden Aufgabenstellungen sind sehr ähnlich und entsprechen meiner Auffassung einer Problemlöseaufgabe. Sie sind leicht verständlich und im Prinzip innermathematisch gestellt, da der Mathematisierungsschritt schon mehr oder weniger vorgegeben ist. Zudem ist es möglich diese Aufgaben über mehrere Wege zu bearbeiten.

Zunächst einmal könnte man dies mittels Gleichungen lösen.
Für die „**Kerzenaufgabe**“würde man Gleichungen aufstellen, in der die momentane Höhe h der Kerzen in Zentimeter abhängig von der vergangen Zeit t in Stunden ist. Für die Kerze A erhält man dann die Gleichung $h = 36 - 3 \cdot t$ und für die Kerze B die Gleichung $h = 10 - t$, indem man diese beiden Gleichungen gleichsetzt, erhält man als Lösung $t = 13$. Durch diesen Lösungsweg gelangt man zu der Annahme, dass die Kerzen nach 13 Stunden dieselbe Höhe haben sollten.

Für die zweiter Aufgabe, die „**Müller-Muffig-Aufgabe**“, ist der Lösungsweg mittels Gleichungen etwas komplizierter. Zum Einen muss man bereits den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Zeit und zurückgelegtem Weg kennen, sodass man auf die Formel $s = v \cdot t$ kommt, um überhaupt die Gleichungen aufstellen zu können. So gelangt man nun zu einer Gleichung für die Familie Müller, $s_{\text{Müller}} = 3 \cdot t_{\text{Müller}}$, und zu einer für den Herrn Muffig, $s_{Muffig} = 5 \cdot t_{Muffig}$. Zum Anderen muss man den Zusammenhang zwischen diesen beiden Gleichungen erkennen können, so zum Beispiel, dass $t_{Muffig} = t_{\text{Müller}} - 1$ gilt. Um anschließend noch das Gleichungssystem lösen zu können, muss man erkennen, dass der zurückgelegte Weg aller beteiligter Personen, wenn sich diese treffen, die Invariante ist. Hat man dies alles berücksichtigt so kommt man zu der Lösung $t = 2,5$ und man nimmt an, dass Herr Muffig die Müllers nach 2,5 Stunden eingeholt hat.

Eine andere Möglichkeit wäre diese Aufgaben mittels einer Tabelle zu lösen, indem man einfach systematisch probiert. Auch hier gelten zwar dieselben Schwierigkeiten bei der „**Müller-Muffig-Aufgabe**“, jedoch denke ich, dass diese in diesem Lösungsweg eher unbewusst berücksichtigt werden. Dieser Lösungsweg ist meiner Ansicht nach nicht so abstrakt wie der Lösungsweg mittels Gleichungen. Zudem erkennt man bei dieser Lösungsdarstellung, dass die berechnete Lösung der „**Kerzenaufgabe**“mittels Gleichungen falsch war. So lässt sich leicht aus der Tabelle ablesen, dass die Kerze B bereits nach 10 Stunden vollkommen abgebrannt war, während die Kerze A noch eine Länge von 6 cm hatte.

	Länge der Kerze (cm)	
Zeit(h)	Kerze A	Kerze B
0	36	10
1	33	9
2	30	8
3	27	7
4	24	6
5	21	5
6	18	4
7	15	3
8	12	2
9	9	1
10	6	0

	Zurückgelegter Weg (km)	
Uhrzeit	Fam. Müller	Hr. Muffig
15:00	0	0
16:00	3	0
17:00	6	5
17:30	7,5	7,5

Tabelle 7.2: Lösung mittels einer Tabelle

Eine weitere Möglichkeit wäre diese Aufgaben mittels Graphen zu lösen, sodass man eine informative Figur erhält. Auch in dieser Darstellung sieht man, dass die berechnete Lösung für die Kerzenlängen nicht plausibel war. Kerze B war bereits nach 10 Stunden und Kerze A nach 12 Stunden vollkommen abgebrannt. Demnach wäre die richtige Antwort auf diese Aufgabe, dass beide Kerzen nach 12 Stunden, wenn beide bereits vollkommen abgebrannt sind, die gleiche Höhe erreicht haben.

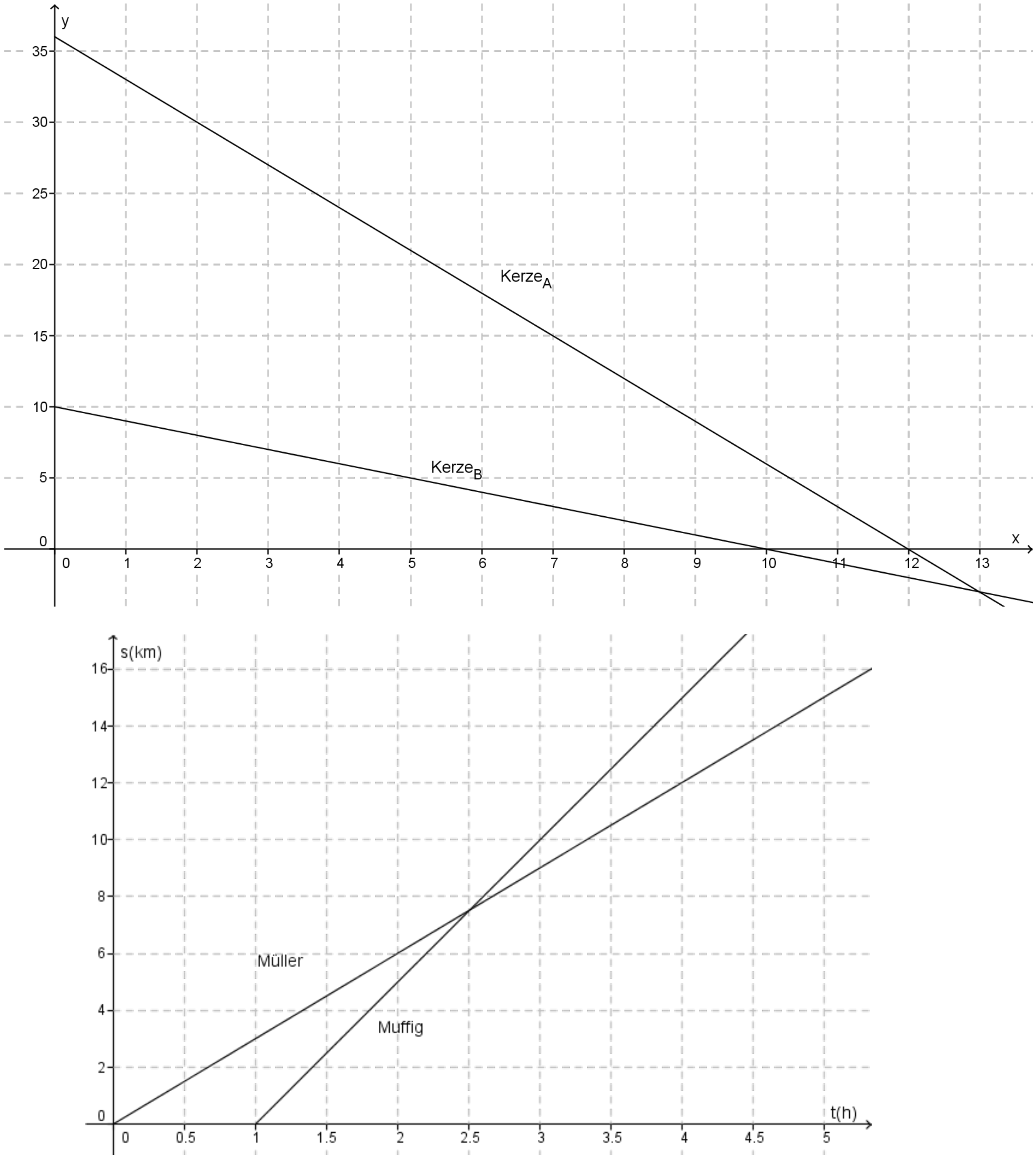

Abbildung 7.1: Lösung mittels Graphen

Erkenntniswert:

Besonders gut gefällt mir an diesen Problemlöseaufgaben, dass sie zwar prinzipiell die gleichen Lösungswege enthalten, aber doch unterschiedlich komplex sind. Zudem kann man mittels dieser Problemstellungen die Vor- und Nachteile verschiedener Lösungswege besprechen. Dies sollte man meiner Ansicht nach auch unbedingt in der anschließenden Reflexionsphase machen, da hierdurch besonders betont wird, wie wichtig es ist, wenn man eine Lösung gefunden hat, diese auch nach ihrer Plausibilität zu prüfen.

Conclusio

Problemlösen im Unterricht - ein zunächst einfach wirkendes Thema. Doch bei genauerer Betrachtung stellt sich heraus, dass es bereits bei der Definition des Wortes „Problem“verschiedene Meinungen gibt und somit auch darüber, wie man ein solches lösen kann.

Verschiedenste Psychologen und Mathematiker haben darüber unterschiedliche Auffassungen, wobei, wie so oft im Leben, es nicht nur eine einzige Wahrheit gibt.

Eine Erkenntnis jedoch ist meines Erachtens auf jeden Fall nachvollziehbar: Was für ein Individuum ein Problem darstellt, kann für ein anderes lediglich eine leicht lösbare Aufgabe und somit keine Schwierigkeiten darstellen.

Durch meine Studien bin ich zu dem Schluss gekommen, dass Problemlösen immer den Gewinn eines Erkenntniswertes zur Folge haben muss, welcher meist nicht durch einen einzigen Lösungsweg, sondern oft durch eine Vielfalt an möglichen Strategien erreicht werden kann.

Um nun diese Erkenntnis zu erlangen, ist oft ein hoher Zeitaufwand vonnöten, wodurch Problemlösen im Unterricht aufgrund der Erhöhung des Selbstbewusstseins der Schülerinnen und Schüler zwar sinnvoll, aber leider häufig schwer möglich ist.

Dennoch bin ich der Ansicht, dass man Problemlösen zumindest teilweise im Unterricht einsetzen sollte, um die Kreativität der Auszubildenden zu fördern und somit durch Steigerung der Motivation Neues zu erlernen unter Umständen verborgene Talente aufdeckt.

Literaturverzeichnis

[1] Aigner, M. (2001). *Diskrete Mathematik. Mit über 500 Übungsaufgaben.* 4., durchgesehene Aufl., Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

[2] Barwise, J., Etchemendy, J. (2005). *Sprache, Beweis und Logik. Band I. Aussagen- und Prädikatenlogik.* Paderborn: mentis Verlag GmbH.

[3] BIFIE, (2011). *Kompetenzbereiche Mathematik 4. Schulstufe.* URL: `https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_vs_kompetenzbereiche_m4_2011-08-19.pdf` (Stand: 06.05.2015).

[4] BIFIE, (2013). *Kompetenzbereiche Mathematik 8. Schulstufe.* URL: `https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf` (Stand: 06.05.2015).

[5] BMBF, (2000). *Lehrplan der AHS Unterstufe. Mathematik.* URL: `https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2` (Stand: 06.05.2015).

[6] BMBF, (2004). *Lehrplan der AHS Oberstufe. Mathematik.* URL: `https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2` (Stand: 06.05.2015).

[7] Bollhöfer, M., Mehrmann, V. (2004). *Numerische Mathematik. Eine projektorientierte Einführung für Ingenieure, Mathematiker und Naturwissenschaftler.* Wiesbaden: Vieweg.

[8] Bredenkamp, J., Wippich, W. (1977). *Lern- und Gedächtnispsychologie. Band I.* Stuttgart, Berlin, Köln, Mainz: Kohlhammer.

[9] Bruder, R. (2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Strategien - Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht. In: Flade, L., Herget,

W. (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS - Anregungen für die Sekundarstufe* (69-78). Berlin: Volk-und-Wissen- Verlag.

[10] Bruder, R., Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

[11] Büchter, A., Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

[12] Dambeck, H. (2012). Knifflige Mathe-Rätsel: Wenn der Hund das Alter des Sohnes verrät. In: *Spiegel Online* vom 14.03.2012. URL: `http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/die-kniffligsten-mathe-raetsel-und-ihre-loesungen-a-819639.html` (Stand: 19.06.2015).

[13] Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung.* Stuttgart, Berlin, Köln, Mainz: Kohlhammer.

[14] Dörner, D. (1989). *Die Logik des Mißlingens. Strategisches Denken in komplexen Situationen.* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

[15] Engel, A. (1999). *Problem-Solving Strategies.* 2., korrigierte Aufl., New York: Spirnger-Verlag.

[16] Erckmann, G., Zander, M. (2011). Praxisforschung: Widersprüche in Therapie und Beratung. In: *CONTRASTE - Die Monatszeitung für Selbstorganisierte* 318, 9-11. URL: `http://www.kritische-psychologie.de/files/kp-contraste-2011.pdf` (Stand: 30.03.2015).

[17] Funke, J. (2003). *Problemlösendes Denken.* Stuttgart: Kohlhammer.

Gabriel, G. (2007). *Einführung in die Logik. Kurzes Lehrbuch mit Übungsaufgaben und Musterlösungen.* 3., durchgesehene Aufl., Jena: Verlag IKS Garamond, Edition Paideia.

[18] Grieser, D. (2013). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

[19] Haas, N. (2000). *Das Extremalprinzip als Element mathematischer Denk- und Problemlöseprozesse. Untersuchungen zur deskriptiven, konstruktivistischen und systematischen Heuristik.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

[20] Hesse, C. (2009). *Das kleine Einmaleins des klaren Denkens. 22 Denkwerkzeuge für ein besseres Leben.* München: Verlag C.H. Beck.

[21] Holzkamp, K. (1993). *Lernen. Subjektwissenschaftliche Grundlegung.* Frankfurt/Main, New York: Campus.

[22] Humenberger, J., Reichel, H.-Ch. (1995). *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihrer Umsetzung im Unterricht.* Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wiss.-Verlag, (Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik; BD 31).

[23] KMK, (2005). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss vom 15.10.2004.* URL: `http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf` (Stand: 21.06.2015).

[24] Künkler, T. (2011). *Lernen in Beziehung. Zum Verhältnis von Subjektivität und Relationalität in Lernprozessen.* Bielefeld: transcript.

[25] Leuders, T. (2003). Problemlösen. In: Leuders, T. (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (119-135). Berlin: Cornelsen Scriptor.

[26] Link, F. (2011). *Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten. Kontexte und Bedeutungen strategischer Lehrerinterventionen in der Sekundarstufe I.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

[27] Mason, J., Burton, L. und Stacey, K. (2008). *Mathematisch denken: Mathematik ist keine Hexerei.* 5., verbesserte Aufl., München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

[28] Mayer, R.E. (1979). *Denken und Problemlösen: Eine Einführung in menschliches Denken und Lernen.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

[29] Mayer, W. (2003). *Lösungsstrategien für mathematische Aufgaben* 2., unveränderte Aufl., Köln: Aulis Verlag Deubner.

[30] Meretz, S. (2011). Einstieg: Was ist Kritische Psychologie? In: *CONTRASTE - Die Monatszeitung für Selbstorganisierte* 318, 3-5. URL: `http://www.kritische-psychologie.de/files/kp-contraste-2011.pdf` (Stand: 30.03.2015).

[31] Polya, G. (1966). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Band I.* Basel, Stuttgart: Birkhäuser.

[32] Polya, G. (1995). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* 4., Aufl., Tübingen, Basel: A. Francke Verlag.

[33] Popper, K. R. (1994). *Alles Leben ist Problemlösen. Über Erkenntnis, Geschichte und Politik.* München, Zürich: Piper.

[34] Reiss, K., Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe.* Basel: Birkhäuser.

[35] Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., Ulovec, A. (Hrsg.) (2014). *Mathematik verstehen 1. Sicher und kompetent zu den Bildungsstandards.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

[36] Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., Ulovec, A. (Hrsg.) (2015). *Mathematik verstehen 2. Sicher und kompetent zu den Bildungsstandards.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

[37] Schaback, R., Wendland, H. (2005). *Numerische Mathematik.* 5., vollständig neu bearbeitet Aufl., Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

[38] Schlemm, A. (2011). Emanzipatorische Bewegungen: Ent-Unterwerfung denken und praktizieren. In: *CONTRASTE - Die Monatszeitung für Selbstorganisierte* 318, 12-14. URL: `http://www.kritische-psychologie.de/files/kp-contraste-2011.pdf` (Stand: 30.03.2015).

[39] Schwarz, W. (2006). *Heuristische Strategien des Problemlösens: Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik.* Münster: WTM - Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

[40] Steiner, C. (2014). *Theorie und Praxis von Problemlöseaufgaben und ihr Einsatz im Mathematikunterricht.* Wien, Universität, Dipl.-Arb., URL: `http://othes.univie.ac.at/33660/1/2014-06-11_0804956.pdf` (Stand: 12.05.2015).

[41] Vollrath, H.-J., Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* 2., Aufl., Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

[42] Weinert, F. E. (2002). Vergleichende Leistungsmessungen in Schulen - eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Weinert, F. E. (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (17-31). 2., unveränderte Aufl., Weinheim, Basel: Beltz.

[43] Winter, H. (2003). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Henn, H.-W., Maaß, K. (Hrsg.), *ISTRON, Band 8. Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (6-15). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

[44] Wußing, H. (1976). *Carl Friedrich Gauß. Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Medizinier;* Band 15; 2., Aufl., Leipzig: Teubner.

[45] Zech, F. (1978). *Grundkurs Mathematik: theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen im Fach Mathematik.* 2., Aufl., Weinheim, Basel: Beltz.

Abbildungsverzeichnis

4.1 Gittervieleck und Triangulierung des Gittervielecks 48
4.2 Einfache Spezialfälle, aus: Hesse 2009, 154 49
4.3 Beliebiges Gitterdreieck und dessen Ergänzung zu einem Rechteck, nach: Hesse 2009, 159f 51
4.4 Newton-Verfahren, nach: Bollhöfer und Mehrmann 2004, 142 . . 60
4.5 Approximation durch Tangenten, nach: Schabak und Wendland 2005, 108 61
4.6 Rad des Theodorus - Wurzelschnecke, nach: Hesse 2009, 247 . . 68
4.7 Triangulierung eines 6-Eck, nach: Grieser 2013, 45 69
4.8 Einteilung in disjunkte Klassen, nach: Grieser 2013, 49 70
4.9 Turnier mit 4 Spielern, nach: Grieser 2013, 203 81

7.1 Lösung mittels Graphen 146

Tabellenverzeichnis

1.1 Problemlöseplan, nach: Polya 1995, Klappentext 7
1.2 Routineaufgaben vs. Problemaufgabe, aus: Haas 2000, 7 14

4.1 Anzahlen an Triangulierungen, nach: Grieser 2013, 50 71
4.2 Wahrheitstabelle, nach: Grieser 2013, 138 96
4.3 Richtige und falsche Umformungen 99

6.1 Hilfestellungsarten, nach: Zech 1978,291 120
6.2 Benötigte Bereiche beim Problemlösen, nach: Leuders 2003, 131 122

7.1 Tabelle zur Lösung, aus: Bruder und Collet 2011, 60 138
7.2 Lösung mittels einer Tabelle 145

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Jasmin Ferstl
Geburtsdatum:	9. September 1991
Geburtsort:	Wien

Schulbildung

September 1997 – Juni 2001:	Volksschule Prießnitzgasse, 1210 Wien
September 2001 – Juni 2009:	Bundesgymnasium/Bundesrealgymnasium Franklinstraße 21, 1210 Wien
Juni 2009:	Reifeprüfung mit ausgezeichneten Erfolg bestanden

Studium

ab Oktober 2009:	„Lehramtsstudium UF Chemie UF Mathematik“an der Universität Wien
ab März 2010:	„Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie“an der Universität Wien
6. Februar 2012:	Abschluss des ersten Studienabschnitts

Praktische Tätigkeiten

August 2010:	Ferialpraktikum bei der Bank Austria UniCredit Group, 1210 Wien

August 2011 und September 2012:	Ferialpraktikum bei der Allianz Versicherung, 1140 Wien
September 2013 – August 2014:	Anstellung als Mathematiklehrerin an der Hertha Firnbergschule für Wirtschaft und Tourismus, 1220 Wien