MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Approximierbarkeit der Eigenwerte vollstetiger Operatoren auf nicht-archimedischen Banachräumen"

verfasst von / submitted by

Andreas Dießner, BSc

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Science (MSc)

Wien, 2016 / Vienna 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 066 821
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Mathematik UG2002
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Dr. Joachim Mahnkopf
Mitbetreut von / Co-Supervisor:	

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir uns mit der Approximation von Eigenwerten vollstetiger Operatoren auf nicht-archimedischen Banachräumen beschäftigen. Es ist bekannt, dass die Nullstellen eines Polynoms aus $\mathbb{C}[X]$ stetig von seinen Koeffizienten abhängen, siehe dazu zum Beispiel [2, S. 9]. Da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, sind auch die Eigenwerte eines linearen Operators eines endlichdimensionalen Vektorraums stetig von den Eintragungen seiner Darstellungsmatrix abhängig. Diese stetige Abhänigkeit bedeutet, dass für ε-nahe Operatoren, das heißt für ein Paar von Operatoren φ, φ' mit der Eigenschaft

$$\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon,$$

auch die Eigenwerte von φ und φ' nahe beieinander liegen, das heißt zu jedem Eigenwert λ_i von φ existiert ein Eigenwert λ'_j von φ' sodass $\left|\lambda_i - \lambda'_j\right| < \delta$ für ein $\delta = \delta(\varepsilon)$. Wir interessieren uns dafür ob eine analoge Aussage auch im nicht-endlichdimensionalen, nicht-archimedischen Fall gilt, das heißt ob sie auch für Operatoren auf nicht-archimedischen Banachräumen gilt. Wir definieren dazu eine Klasse von Operatoren $\mathcal{D}(V)$ deren Eigenwerte gute Approximationseigenschaften haben. Diese Klasse ist ein Analogon zur Klasse der selbstadjungierten kompakten Operatoren aus der archimedischen Funktionalanalysis. Um die obige Herangehensweise für nicht-archimedische Banachräume zu adaptieren ließe sich das charakteristische Polynom eventuell durch die Fredholmdeterminante ersetzen, doch wir wählen einen anderen Weg. Wir werden die Abstände der Eigenwerte für ε-nahe Operatoren, direkt abschätzen. Ein Vorteil dieser Herangehensweise ist, dass wir auch qualitative Ergebnisse erhalten. Genauer werden wir als Hauptresultat zeigen dass sich die Abstände der Eigenwerte eines Paares ε-naher Operatoren durch ε und die Anzahl der Eigenwerte von φ, die größer als ε sind, abschätzen lassen; siehe Korollar 4.12. Diese Abschätzung impliziert insbesondere die stetige Abhängigkeit der Eigenwerte von φ. Ein wichtiges Hilfsmittel für die direkte Abschätzung der Eigenwerte ist die Tatsache, dass die Eigenwerte eines Operators aus $\mathcal{D}(V)$ gegen 0 konvergieren (siehe Satz 4.8), das heißt fast alle seine Eigenwerte haben einen Betrag kleiner als ein gegebenes $\varepsilon > 0$. Wegen der starken Dreiecksungleichung spielen also nur endlich viele Eigenwerte bei der Approximation von Eigenwerten ε-naher Operatoren aus $\mathcal{D}(V)$ eine Rolle. Dies begründet, warum wir mit der Approximation von Eigenwerten ε-naher stetiger linearer Operatoren endlichen Ranges beginnen. Den nicht-endlichdimensionalen Fall führen wir dann auf den endlichdimensionalen Fall zurück indem wir ausnutzen, dass jeder vollstetige Operator der Limes von Operatoren endlichen Ranges ist. Zum Schluss zeigen wir als Anwendung, dass für einen Operator aus der Klasse $\mathcal{D}(V)$ mit $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ und $\varphi_n \in \mathcal{D}(V)$, die Eigenwerte der Operatoren φ_n gegen die Eigenwerte von φ konvergieren; siehe Satz 4.13.
Wir geben noch einen kurzen Überblick über den Inhalt: Der Abschnitt 2 enthält Bemerkungen zu den Grundlagen der nicht-archimedischen Funktionalanalysis; hierbei gehen wir nach [1], [3] und [4] vor. Ab Abschnitt 3 beginnen wir dann mit dem eigentlichen Thema der Arbeit, der Approximation der Eigenwerte.

2 Grundlagen aus der nicht-archimedischen Funktionalanalysis

In diesem Abschnitt wollen wir uns kurz mit den Grundlagen der nicht-archimedischen Funktionalanalysis auseinandersetzen.

Konvention. Das heißt wir setzen K stets als nicht-archimedischen Körper, also einen vollständigen Körper mit einem Betrag $|\cdot|$ für den die starke Dreiecksungleichung gilt, voraus.

Die Definitionen ähneln oft jenen aus der archimedischen Funktionalanalysis, aber es gibt wesentliche Unterschiede die wir beachten müssen. Wie zum Beispiel die Notwendigkeit der Einführung der Bedingungen (N) und (N'), um das Normieren aller Vektoren zu ermöglichen und die Operatornorm durch die Gleichung

$$\|f\| = \sup\{\|\varphi(v)\| : v \in V \text{ mit } |v| \leq 1\}$$

auszudrücken. Wir beginnen mit der Definition eines normierten Vektorraums, sie entspricht der üblichen Definition aus der archimedischen Theorie, mit dem Unterschied, dass die zugrundeliegende Norm die starke Dreiecksungleichung erfüllen muss.

2.1 Die Bedingungen (N) und (N')

Definition 2.1 (Normierter Vektorraum)**.** Ein normierter Vektorraum ist ein K-Vektorraum V zusammen mit einer Normabbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche die folgenden Eigenschaften für alle $\alpha \in K$ und $v, w \in V$ erfüllt:

1. $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ gilt,
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$ und
3. $\|v + w\| \leq \max\{\|v\|, \|w\|\}$.

Damit definiert man dann den Begriff des Banachraumes.

Definition 2.2 (Banachraum)**.** Ein K-Banachraum ist ein normierter Vektorraum, der bezüglich der von seiner Norm induzierten Topologie vollständig ist.

Ein Unterschied zu den archimedischen normierten Vektorräumen ist, dass es hier möglich ist, dass der Durchschnitt der Mengen

$$\{\|v\| : v \in V - \{0\}\} \cap \{|\alpha| : \alpha \in K^*\}$$

leer ist. Das bedeutet, dass man im nicht-archimedischen Fall im Allgemeinen nicht jeden Vektor normieren kann. Sei zum Beispiel K_r der normierte Vektorraum, welchem der Körper K als Vektorraum zugrundeliegt, zusammen mit der Norm $\|\cdot\| : \alpha \mapsto r\,|\alpha|$, wobei r eine positive reelle Zahl ist. Dann ist

$$\{\|v\| : v \in K_r - \{0\}\} \cap \{|\alpha| : \alpha \in K^*\} = \emptyset,$$

wenn r kein Element aus der Wertegruppe von K ist:

Definition 2.3 (Wertegruppe)**.** Unter der Wertegruppe W_K von K, ist das Bild von K^* unter der Betragsabbildung von K zu verstehen. Also

$$W_K = \{|a| : a \in K^*\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Aus diesm Grund führen wir die folgende Bedingung nach [4] ein.

Definition 2.4 (Bedingung (N))**.** Sei V ein K-Banachraum und W_K die Wertegruppe von K. Wir sagen V erfüllt die Bedingung

(N) wenn für alle $v \in V$ der Abschluss von W_K in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ den Betrag $|v|$ enthält.

Insbesondere ist diese Bedingung dann erfüllt, wenn

(N') $$\|V\| = \{\|v\| : v \in V\} = \{|a| : a \in K\} = |K| \text{ gilt.}$$

Wie aus der Theorie nicht-archimedischer Körper bekannt gilt die starken Dreiecksungleichung für normierte Vektorräume

$$\|v + w\| \leq \max\{\|v\|, \|w\|\}$$

mit Gleichheit falls $\|v\| \neq \|w\|$. Dies wollen wir nun für K-Vektorräume verallgemeinern.

Lemma 2.5. *Sei V ein normierter K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann gilt*

$$\|v_1 + \cdots + v_n\| = \max\{\|v_1\|, \dots, \|v_n\|\},$$

falls $\|v_i\| \neq \|v_j\|$ für alle $i \neq j$.

Beweis nach [1]. Nach der Definition eines normierten Vektorraums folgt mittels Induktion, dass $\|v_1 + \cdots + v_n\| \leq \max\{\|v_1\|, \dots, \|v_n\|\}$, wir müssen also nur noch die umgekehrte Ungleichung zeigen. Sei dazu $s = v_1 + \cdots + v_n$. Da wir $\|v_i\| \neq \|v_j\|$ für alle $i \neq j$ voraussetzen können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\|v_1\| < \|v_2\| < \cdots < \|v_n\|$ gilt. Es folgt

$$\|v_n\| \leq \max\{\|s\|, \max\{\|v_1\|, \dots, \|v_{n-1}\|\} = \max\{\|s\|, \|v_{n-1}\|\},$$

da $v_n = s - (v_1 + \cdots + v_{n-1})$. Da wir $\|v_{n-1}\| < \|v_n\|$ angenommen haben, folgt

$$\max\{\|v_1\|, \dots, \|v_n\|\} = \|v_n\| \leq \max\{\|s\|, \|v_{n-1}\|\} = \|s\| = \|v_1 + \cdots + v_n\|.$$

□

2.2 Die innere direkte Summe in Banachräumen

Seien U_i, $i \in I$, Untervektorräume eines Banachraumes V, deren Summe direkt ist. Dann ist die innere direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} U_i \leq V$ ein normierter Vektorraum. Allerdings ist dieser im Allgemeinen nicht abgeschlossen. Daher definieren wir:

Definition 2.6. Seien U_i, $i \in I$, Untervektorräume des Banachraumes V. Dann definieren wir den Banachraum

$$\widehat{\bigoplus_{i\in I}} U_i,$$

als den Abschluss des normierten Vektorraums $\bigoplus_{i\in I} U_i$ im Banachraum V.

Bemerkung 2.7. Seien U_i, $i \in I$, Untervektorräume eines Banachraumes V. Dann gilt

$$\widehat{\bigoplus_{i\in I}} U_i = \left\{ \sum_{i\in I} u_i : u_i \in U_i,\ i \in I \text{ und } \lim_{i\in I} u_i = 0 \right\}.$$

2.3 Orthogonalität in nicht-archimedischen Banachräumen

Wie wir in der Einleitung bemerkt haben, benötigen wir den Begriff der Orthogonalität, dazu müssen wir diese zunächst für nicht-archimedische Banachrräume einführen. In der archimedischen Theorie für Vektorräumen lässt sich die Orthogonalität eines Vektors v bezüglich eines echten Untervektorraumes F durch

$$v \perp F \Leftrightarrow d(v, F) = \|v\|$$

charakterisieren. Auf analoge Weise können wir Orthogonalität für nicht-archimedische Vektorräume definieren. Dazu benötigen wir den folgenden Abstandsbegriff.

Definition 2.8. Sein V ein normierter K-Vektorraum und $F \subseteq V$. Dann definieren wir den Abstand von $v \in V$ zu F durch

$$d(v, F) := \inf_{f\in F} \|v - f\|.$$

Nun können wir damit die Orthogonalität definieren.

Definition 2.9. Sei V ein Banachraum und $v, w \in V$. Dann sagen wir v und w stehen orthogonal zueinander, und schreiben $v \perp w$, genau dann, wenn

$$d(v, \langle w \rangle) = \|v\|.$$

Dabei steht $\langle w \rangle$ für die lineare Hülle von w.

Aus dieser Definition geht noch nicht hervor, dass es sich bei der Orthogonalität um eine symmetrische Relation handelt. Dies ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

Lemma 2.10. *Sei V ein K-Banachraum und $v, w \in V$. Dann stehen v und w orthogonal zueinander, genau dann wenn*

$$\|\alpha v + \beta w\| = \max\{\|\alpha v\|, \|\beta w\|\}$$

für alle $\alpha, \beta \in K$ gilt. Insbesondere stehen $v_i \in V$ für alle $1 \leq i \leq n$ orthogonal zueinander, das heißt $v_i \perp \sum_{j \neq i} v_j$ für alle $1 \leq i \leq n$, genau dann wenn

$$\|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\| = \max\{\|\alpha_1 v_1\|, \ldots, \|\alpha_n v_n\|\}$$

für alle $\alpha_i \in K$, $1 \leq i \leq n$ gilt.

Um dieses Lemma zu beweisen benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 2.11. *Sei V ein K-Banachraum und $v, w \in V$. Sei weiters t eine reelle Zahl $0 \leq t \leq 1$ und $\|v + w\| \geq t\|v\|$. Dann gilt auch $\|v + w\| \geq t\|w\|$ und insbesondere*

$$\|v + w\| \geq t \max\{\|v\|, \|w\|\}.$$

Beweis nach [1]. Angenommen es würde $\|v + w\| < t\|w\|$ gelten. Dann wäre $\|v + w\| < \|w\|$ und wegen Lemma 2.5 muss dann schon $\|v\| = \|w\|$ gelten. Denn würde $\|w\| < \|v\|$ gelten, dann wäre $\|v\| = \|v + w\| < \|w\|$ ein Widerspruch zur Annahme. Analog führt man die Annahme $\|w\| > \|v\|$ zu einem Widerspruch. Damit würde $\|v + w\| \geq t\|v\| = t\|w\|$ folgen, was unserer ersten Annahme $\|v + w\| < t\|w\|$ widerspricht. Also gilt auch $\|v + w\| \geq t\|w\|$. □

Beweis von Lemma 2.10 nach [1]. Sei $v \perp w$. Dann gilt

$$\|\alpha v + \beta w\| = |\alpha| \left\| v - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) w \right\| \geq |\alpha|\, d(v, \langle w \rangle) = |\alpha| \|v\| = \|\alpha v\|.$$

Mithilfe von Lemma 2.11 folgt dann,

$$\|\alpha v + \beta w\| \geq \max\{\|\alpha v\|, \|\beta w\|\}.$$

Da immer $\|\alpha v + \beta w\| \leq \max\{\|\alpha v\|, \|\beta w\|\}$ gilt, ist die erste Richtung gezeigt. Sei nun umgekehrt $\|\alpha v + \beta w\| = \max\{\|\alpha v\|, \|\beta w\|\}$ für alle $\alpha, \beta \in K$. Dann gilt insbesondere für alle $\beta \in K$

$$\|v - \beta w\| = \max\{\|v\|, \|\beta w\|\} \geq \|v\|.$$

Daraus folgt, dass $d(v, \langle w \rangle) \geq \|v\|$ gilt. Weil

$$\inf_{w' \in \langle w \rangle} \|v - w'\| \leq \|v - 0\| = \|v\|,$$

gilt auch $d(v, \langle w \rangle) \leq \|v\|$ und es folgt $d(v, \langle w \rangle) = \|v\|$, also $v \perp w$. Der Rest der Behauptung folgt durch Induktion. □

Ein wichtiger Unterschied bezüglich der Orthogonalität in nicht-archimedischen Banachräumen V ist, dass im Allgemeinen die Menge $\{y \in V : x \perp y\}$ keinen Vektorraum bildet. Denn betrachtet man das Beispiel $V = K^2$, $u = (1, 1)$, $v = (1, 0)$ und $w = (0, 1)$, dann gilt $u \perp v$ und $u \perp w$ aber nicht $u \perp v + w$. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 2.12. Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines Banachraumes V. Dann sagen wir U_1 steht orthogonal auf U_2 und schreiben $U_1 \perp U_2$, wenn für alle $u_1 \in U_1$ und alle $u_2 \in U_2$ gilt, dass $u_1 \perp u_2$. Sei nun $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untervektorräumen eines Banachraumes V. Die Familie $(U_i)_{i\in I}$ heißt orthogonal, wenn

$$U_j \perp \widehat{\bigoplus_{i\neq j}} U_i$$

für alle $j \in I$ gilt.

Jetzt können wir den Begriff einer Orthonormalbasis einführen.

Definition 2.13 (Orthonormalbasis)**.** Sei V ein K-Banachraum. Eine Teilmenge $\{e_i\}_{i\in I}$ von V heißt Orthonormalbasis von V wenn

1. jedes $v \in V$ eine Darstellung der Form $v = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$ mit $\alpha_i \in K$, $\lim_i \alpha_i = 0$ besitzt und

2. jede dieser Darstellungen $v = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$ Norm $\|v\| = \sup_{i\in I} |\alpha_i|$ hat.

Bemerkung 2.14. Der Punkt 2 in der obigen Definition entspricht der Orthonormalität der Basisvektoren. Denn für eine Darstellung von $v = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$ lässt sich die Norm dann berechenen durch

$$\|v\| = \sup_{i\in I} \|\alpha_i e_i\| = \sup_{i\in I} |\alpha_i| \,,$$

weshalb $\|e_i\| = 1$ für alle $i \in I$ gelten muss. Außerdem sorgt der Punkt 2 auch dafür, dass die Koeffizienten α_i eindeutig bestimmt sind, das heißt die e_i sind linear unabhängig. Ersetzt man in Punkt 2 die Bedingung durch $\|v\| = \sup_{i\in I} \|\alpha_i e_i\|$ erhält man die Definition einer Orthogonalbasis.

Satz 2.15. *Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine orthogonale Familie in einem Banachraum V, mit der Eigenschaft $V = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} U_i$. Seien weiters B_i, $i \in I$, Orthonormalbasen von U_i. Dann definiert $\bigcup_{i\in I} B_i$ eine Orthonormalbasis von V. Insbesondere definiert $\bigcup_{i\in I'} B_i$ für jede Teilmenge $I' \subset I$ eine Orthonormalbasis von $\widehat{\bigoplus}_{i\in I'} U_i$.*

Beweis. Sei $v \in V$ beliebig. Weil $V = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} U_i$ besitzt v eine Darstellung der Form $v = \sum_{i\in I} u_i$ mit $u_i \in U_i$ und $\lim_{i\in I} u_i = 0$. Da jeder Untervektorraum U_i eine Orthonormalbasis $B_i = \{b_{i,j} : j \in J_i\}$ besitzt erhalten wir die folgende Gleichung

$$v = \sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} \alpha_{i,j} b_{i,j},$$

wobei $\lim_j \alpha_{i,j} = 0$ für alle $i \in I$, da B_i für alle $i \in I$ Orthonormalbasis von U_i ist. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass $\lim_{i,j} \alpha_{i,j} = 0$ gilt, denn dann haben wir eine Darstellung gefunden die Punkt 1 der Definition einer Orthonormalbasis genügt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fix. Wegen der Charakterisierung der inneren direkten Summe gilt $\lim_i u_i = 0$, weshalb $\|u_i\| < \varepsilon$ für fast alle $i \in I$. Sei nun I' die Menge der Indizes, sodass $\|u_i\| < \varepsilon$. Dann ist $I - I'$ endlich. Weil B_i Orthonormalbasis von U_i ist, gilt

$$\|u_i\| = \sup\{|\alpha_{i,j}| : j \in J_i\}$$

und daher ist $|\alpha_{i,j}| < \varepsilon$ für alle $i \in I'$ und alle $j \in J_i$. Für jedes $i \in I - I'$, sei $J_i' \subseteq J_i$ die Teilmenge jener Indizes sodass $|\alpha_{i,j}| < \varepsilon$. Außerdem gilt für alle $i \in I - I'$, dass $\lim_j \alpha_{i,j} = 0$ (siehe oben) und somit sind die Mengen $J_i - J_i'$ endlich für alle $i \in I - I'$. Daher ist

$$\{(i,j) : i \in I - I' \text{ und } j \in J_i - J_i'\}$$

die Menge aller Indizes für die der Betrag von $\alpha_{i,j}$ größer oder gleich ε ist. Diese ist endlich, da $I - I'$ endlich ist und $J_i - J_i'$ für alle $i \in I - I'$ endlich ist. Also gilt $\lim_{i,j} \alpha_{i,j} = 0$. Wir zeigen nun dass auch die zweite Bedingung der Definition einer Orthonormalbasis gilt. Da die Untervektorräume U_i eine orthogonale Familie bilden erhalten wir

$$\|v\| = \left\| \sum_{i \in I} u_i \right\| = \sup_{i \in I} \|u_i\| .$$

Es folgt

$$\|v\| = \sup_{i \in I} \|u_i\| = \sup_{i \in I} \{\sup\{|\alpha_{i,j}| : j \in J_i\}\} = \sup\{|\alpha_{i,j}| : i \in I \text{ und } j \in J_i\} .$$

Damit erfüllt $B = \bigcup_{i \in I} B_i = \{b_{i,j} : i \in I \text{ und } j \in J_i\}$ die zwei Bedingungen an eine Orthonormalbasis. $\square$

Jetzt wollen wir noch einen Satz erwähnen, welcher uns im Abschnitt 4 ermöglicht die Voraussetzungen etwas allgemeiner zu halten. Der Beweis benötigt das Konzept der projektiven Banachräume, für Details siehe [3, S. 174].

Satz 2.16 (Gruson). *Sei V ein Banachraum mit einer Orthogonalbasis. Dann besitzt auch jeder abgeschlossene Teilraum von V eine Orthogonalbasis.*

Wenn wir zusätzlich die Bedingung (N') voraussetzen lässt sich jedes $v \in V$ normieren und wir können aus einer Orthogonalbasis eine Orthonormalbasis machen. Damit erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 2.17. *Sei V ein Banachraum mit einer Orthogonalbasis, welcher die Bedingung (N') erfüllt. Insbesondere besitzt damit V eine Orthonormalbasis und auch jeder abgeschlossene Teilraum von V.*

2.4 Vollstetige Operatoren

Die Bedingung (N) spielt auch eine wichtige Rolle für den Raum der stetigen lineare Abbildungen, der wie folgt definiert ist.

Definition 2.18. Seien V, W K-Banachräume. Wir definieren $\mathcal{L}(V, W)$ als den K-Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen $\varphi : V \to W$ und schreiben $\mathcal{L}(V)$ für $\mathcal{L}(V, V)$. Dieser wird mit

$$\|\varphi\| := \sup\left\{\frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} : v \in V - \{0\}\right\}$$

zu einem Banachraum.

Da $\mathcal{L}(V)$ ein normierter Vektorraum ist erhalten wir das folgende Resultat.

Lemma 2.19. *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei V ein Banachraum und seien φ, φ' und $\varphi'' \in \mathcal{L}(V)$ mit $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon$ (< 1) und $\|\varphi' - \varphi''\| \leq \varepsilon$ (< 1). Dann folgt*

$$\|\varphi - \varphi''\| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Für Operatoren mit $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon$ und $\|\varphi' - \varphi''\| \leq \varepsilon$ gilt

$$\|\varphi - \varphi''\| = \|\varphi - \varphi' + \varphi' - \varphi''\| \leq \max\{\|\varphi - \varphi'\|, \|\varphi' - \varphi''\|\} \leq \varepsilon.$$

□

Wir erläutern nun, weshalb die Bedingung (N) eine wichtige Rolle im Raum der stetigen linearen Abbildungen spielt.

Bemerkung 2.20. Wenig überraschend ist, dass die Norm wie in der archimedischen Theorie definiert wird, allerdings gilt die bekannte Gleichung

$$\|f\| = \sup\{\|\varphi(v)\| : v \in V \text{ mit } |v| \leq 1\},$$

nur wenn V die Bedingung (N) erfüllt. Sei zum Beispiel $V = \mathbb{Q}_3$ mit Norm $\|v\| = 2\,|v|_3$ und $W = \mathbb{Q}_3$ mit der (üblichen) Norm $|\cdot|_3$. Betrachten wir die Abbildung $\mathrm{id} : V \to W$, dann gilt

$$\|\mathrm{id}\| = \sup\left\{\frac{\|\mathrm{id}(v)\|}{2\,|v|_3} : v \in V - \{0\}\right\} = \sup\left\{\frac{|v|_3}{2\,|v|_3} : v \in V - \{0\}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Aber es gilt

$$\|\mathrm{id}\| \neq \sup\{\|\mathrm{id}(v)\| : v \in V \text{ mit } 2\,|v|_3 \leq 1\} = \sup\left\{|v|_3 \leq \frac{1}{2} : v \in V\right\} = \frac{1}{3},$$

denn die Wertegruppe von $\mathbb{Q}_3$ ist $W_{\mathbb{Q}_3} = 3^{\mathbb{Z}}$.

Jetzt führen wir die Klasse der Operatoren ein, welche die Grundlage der Operatoren bildet die wir behandeln wollen.

Definition 2.21 (Vollstetiger Operator)**.** Seien V und W Banachräume. Ein Operator $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ heißt vollstetig genau dann wenn, φ der Limes Operatoren endlichen Ranges ist. Dass heißt es gibt $\varphi_n \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $\operatorname{rank}(\varphi_n) < \infty$, sodass

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n.$$

Wir bezeichnen $\mathcal{C}(V, W)$ als den Untervektorraum aller vollstetigen Operatoren und schreiben $\mathcal{C}(V)$ für $\mathcal{C}(V, V)$.

2.5 Der Spektralsatz für nicht-archimedische vollstetige Operatoren

Wir wollen auf ein wichtigstes Resultat aus der nicht-archimedischen Funktionalanalysis eingehen, ein Analogon zum Spektralsatz der archimedischen Funktionalanalysis. Der Satz zeigt, dass sich die verallgemeinerten Eigenräume eines nicht-archimedischen vollstetigen Operators abspalten lassen und motiviert die Wahl der Klasse von Operatoren $\mathcal{D}(V)$ welche wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachten werden, siehe dazu Definition 4.6. Wir geben einen Überblick; genauere Informationen und die Beweise aller Behauptungen sind in [4] zu finden.
Um den Satz formulieren zu können müssen wir zuerst die Fredholmdeterminante eines vollstetigen Operators definieren. Sei dazu V der Banachraum $c_0(I)$ und $\varphi \in \mathcal{C}(V)$, wobei

$$c_0(I) := \{f \in l^\infty(I) : \text{ für alle } \varepsilon > 0 \text{ ist } |f(i)| < \varepsilon \text{ für fast alle } i \in I\}$$

und $l^\infty(I)$, der Banachraum aller beschränkten Funktionen $f : I \to K$ ist. Wir können annehmen, dass $\|\varphi\| \leq 1$, denn wir benötigen später auch nur diesen Fall. Dann gilt $\varphi(V_0) \subseteq V_0$ für $V_0 := \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$. Sei $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{m}$ ein Ideal in $\mathcal{O}$, wobei $\mathfrak{m} = \{a \in K : |a| < 1\}$ und $\mathcal{O} = \{a \in K : |a| \leq 1\}$. Dann induziert die Abbildung φ einen Endomorphismus

$$\varphi_{\mathfrak{a}} : V_0/\mathfrak{a}V_0 \to V_0/\mathfrak{a}V_0.$$

Der Raum $V_0/\mathfrak{a}V_0$ ist ein freier $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$-Modul. Die Vollstetigkeit von φ führt dazu, dass die Eintragungen ihrer Matrixdarstellung beschränkt sind, weshalb dass Bild von $\varphi_{\mathfrak{a}}$ in einem endlich erzeugten freien $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$-Untermodul $V_{\mathfrak{a}}$ von $V_0/\mathfrak{a}V_0$ enthalten ist. Damit ist das charakteristische Polynom von $\varphi_{\mathfrak{a}}$ definiert durch

$$\det(1 - T\varphi_{\mathfrak{a}}) := \det(1 - \varphi_T \mathfrak{a}|_{V_{\mathfrak{a}}}).$$

Für ein Ideal $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$ gilt koeffizentenweise

$$\det(1 - T\varphi_{\mathfrak{a}}) = \det(1 - T\varphi_{\mathfrak{a}'}) \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Sei $\varpi \in \mathcal{O}$ mit $|\varpi| < 1$, $\mathfrak{a}_n = \varpi^n \mathcal{O}$ das Hauptideal welches von ϖ^n erzeugt wird und $a_{i,\mathfrak{a}_n}$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von $\varphi_{\mathfrak{a}_n}$, das heißt

$$\det(1 - T\varphi_{\mathfrak{a}_n}) = \sum_i a_{i,\mathfrak{a}_n} T^i.$$

Dann bilden $(a_{i,\mathfrak{a}_n})_n$ für alle i eine Cauchyfolge in $\mathcal{O}$ und $\lim_{n\to\infty} a_{i,\mathfrak{a}_n}$ existiert. Damit können wir die Fredholmdeterminante definieren:

Definition 2.22 (Fredholmdeterminante)**.** Sei V der K-Banachraum $c_0(I)$. Sei $\varphi \in \mathcal{C}(V)$ ein vollstetiger Operator mit $\|\varphi\| \leq 1$. Dann definieren wir die Fredholmdeterminante als

$$H(T, \varphi) = \det(1 - T\varphi) \coloneqq \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (\lim_{n\to\infty} a_{i,\mathfrak{a}_n}) T^i \in \mathcal{O}[[T]].$$

Jetzt können wir den nicht-archimedischen Spektralsatz für vollstetige Operatoren formulieren.

Satz 2.23. *Sei V der K-Banachraum $c_0(I)$. Sei $\varphi \in \mathcal{C}(V)$ ein vollstetiger Operator mit $\|\varphi\| \leq 1$. Sei $a \in K$ eine Nullstelle der Fredholmdeterminante der Ordnung h. Dann lässt sich V auf eindeutige Weise in eine direkte Summe*

$$V = N(a) \oplus F(a)$$

zerlegen, wobei $N(a)$ und $F(a)$ abgeschlosse φ-invariante Teilräume von V sind, sodass

1. *der Operator $1 - a\varphi$ auf $N(a)$ nilpotent ist,*
2. *der Operator $1 - a\varphi$ auf $F(a)$ invertierbar ist und*
3. $\dim N(a)$ *gleich der Ordnung h der Nullstelle a ist.*

3 Eigenschaften von Eigenwerten nicht-archimedischer Operatoren

In diesem Abschnitt wollen wir Eigenschaften von Eigenwerten nicht-archimedischer Operatoren, das heißt von Operatoren aus $\mathcal{L}(V)$, betrachten. Die Gültigkeit der starken Dreiecksungleichung führt zu einem interessanten Ergebnis. Dazu wiederholen wir zuerst die Definition des Eigenwerts.

Definition 3.1 (Eigenwert)**.** Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann heißt $\lambda \in K$ Eigenwert zum Eigenvektor $0 \neq v \in V$, wenn

$$\varphi(v) = \lambda v$$

gilt. Weiters definieren wir den Eigenraum $E(\lambda)$ als den Untervektorraum in V bestehend aus allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Analog zur linearen Algebra gilt die folgende Eigenschaft.

Lemma 3.2. *Sei V ein K-Banachraum, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ und $\lambda_i \in K$, $i \in I$, die Eigenwerte von φ. Dann gilt*

$$|\lambda_i| \leq \|\varphi\| \text{ für alle } i \in I.$$

Beweis. Sei $v_i \in V$, $i \in I$, der zugehörige Eigenvektor des Eigenwerts λ_i, dann gilt

$$\|\varphi\| = \sup\left\{\frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} : v \in V - \{0\}\right\} \geq \frac{\|\varphi(v_i)\|}{\|v_i\|} = \frac{\|\lambda_i v_i\|}{\|v_i\|} = |\lambda_i|\,.$$

□

Das folgende Lemma zeigt, welch großen Einfluss die starke Dreiecksungleichung auf den Abstand aller Eigenwerte zueinander hat. Außerdem sieht man mithilfe dieses Lemmas, wie stark die Bedingung $\|\varphi - \varphi'\| < \varepsilon$ an zwei Operatoren $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(V)$ die Norm der beiden Operatoren einschränkt. Darauf werden wir in der Bemerkung 3.4 näher eingehen.

Lemma 3.3. *Sei V ein K-Banachraum. Seien $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_i \in K$, $i \in I$, die Eigenwerte von φ und $\lambda'_j \in K$, $j \in J$, die Eigenwerte von φ'. Dann gilt*

$$\left|\lambda_i - \lambda'_j\right| \leq \max\{\|\varphi\|, \|\varphi'\|\}$$

für alle $i \in I$ und $j \in J$.

Beweis. Wegen Lemma 3.2 ist $|\lambda_i| \leq \|\varphi\|$ für alle $i \in I$ und $\left|\lambda'_j\right| \leq \|\varphi'\|$ für alle $j \in J$. Dann folgt ganz allgemein für alle $i \in I$ und alle $j \in J$, dass

$$\left|\lambda_i - \lambda'_j\right| \leq \max\{|\lambda_i|, |\lambda_j|\} \leq \max\{\|\varphi\|, \|\varphi'\|\}.$$

□

Bemerkung 3.4. Seien zwei Operatoren $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(V)$ mit $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon$ und $\|\varphi\| \neq \|\varphi'\|$ gegeben. Dann gilt

$$\varepsilon \geq \|\varphi - \varphi'\| = \max\{\|\varphi\|, \|\varphi'\|\}.$$

Daher ist $\|\varphi\| \leq \varepsilon$ und $\|\varphi'\| \leq \varepsilon$. Insbesondere folgt aus Lemma 3.3, dass

$$\left|\lambda_i - \lambda'_j\right| \leq \max\{\|\varphi\|, \|\varphi'\|\} \leq \varepsilon$$

für alle $i \in I$ und $j \in J$. Das heißt für ε-nahe Operatoren, sind die Abstände all ihrer Eigenwerte zueinander auch kleinergleich als ε. Daher sind in diesem Fall alle Aussagen, die wir später im Abschnitt 4 beweisen werden, trivialerweise erfüllt. Allerdings, wie wir gerade gesehen haben, muss, falls $\|\varphi\| \neq \|\varphi'\|$ gilt, notwendigerweise auch $\|\varphi\| \leq \varepsilon$ und $\|\varphi'\| \leq \varepsilon$ gelten, das heißt die Operatoren haben selbst schon eine kleine Norm nicht nur ihre Differenz. Damit ist dieser Fall eigentlich uninteressant und wir könnten von nun an $\|\varphi\| = \|\varphi'\|$ annehmen, was wir, um die Aussagen allgemeiner zu halten, aber nicht tun werden. Dies erklärt auch warum wir in vielen Beweisen nur die Norm von φ für Abschätzungen heranziehen werden.

Der folgende Satz ist entscheidend um den Satz von Gruson bzw. dessen Folgerung Korollar 2.17 anwenden zu können.

Satz 3.5. *Sei V ein K-Banachraum, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ und $\lambda_i \in K$, $i \in I$, die Eigenwerte von φ. Dann sind alle Eigenräume $E(\lambda_i)$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $i \in I$ beliebig. Sei weiters $(v_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Eigenvektoren aus $E(\lambda_i)$ mit $v = \lim_{n\to\infty} v_{i,n}$ für ein $v \in V$. Wir müssen zeigen, dass $v \in E(\lambda_i)$. Da φ insbesondere stetig ist, gilt

$$\varphi(v) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} v_{i,n}\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(v_{i,n}\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda_i v_{i,n} = \lambda_i v.$$

Damit ist $v \in E(\lambda_i)$ und da $i \in I$ beliebig war ist die Behauptung bewiesen. □

Der folgende Satz ermöglicht uns die Voraussetzungen für die Aussagen im Abschnitt 4 etwas allgemeiner zu halten, denn ohne diesen Satz müssten wir die Existenz von Orthonormalbasen für die Eigenräume voraussetzen. Siehe dazu auch Bemerkung 4.7.

Satz 3.6. *Sei V ein Banachraum mit einer Orthogonalbasis, welcher die Bedingung (N') erfüllt. Sei weiters $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ und $\lambda_i \in K$, $i \in I$, die Eigenwerte von φ. Dann besitzt jeder Eigenraum $E(\lambda_i)$ eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Folgt aus Korollar 2.17 und Satz 3.5. □

4 Approximation der Eigenwerte nicht-archimedischer vollstetiger Operatoren

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Abschätzung der Abstände von Eigenwerten ε-naher vollstetiger Operatoren und der Konvergenz der Eigenwerte einer konvergenten Folge von vollstetigen Operatoren beschäftigen. Wir definieren dazu eine Klasse von Operatoren mit guten Approximationseigenschaften. Beginnen werden wir allerdings mit einer Abschätzung der Abstände der Eigenwerte stetiger linearen Operatoren endlichen Ranges.

Konvention. Sei von nun an V ein K-Banachraum, welcher die Bedingung (N') erfüllt und ε bedeute stets eine reelle Zahl in $\mathbb{R}_{>0}$.

Warum diese Voraussetzung notwendig ist, werden wir in der folgenden Bemerkung erläutern.

Bemerkung 4.1. Wegen Bemerkung 2.20 muss der Banachraum V die Bedingung (N) erfüllen, denn für manche Beweise ist es notwendig, dass

$$\sup\left\{\frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} : v \in V - \{0\}\right\} = \sup\{\|\varphi(v)\| : v \in V \text{ mit } \|v\| \leq 1\}$$

gilt. Dies ist aber keine Einschränkung, da jeder Banachraum V zu einem Banachraum isomorph ist, welcher die Bedingung (N) erfüllt. Wir definieren dazu eine neue Norm

$$\|v\|' = \inf\{r \in W_K : r \leq \|v\|\}$$

wodurch der Banachraum $(V, \|\cdot\|')$ die Bedingung (N) erfüllt und klarerweise auch isomorph zum ursprünglichen Banachraum V ist. In unserem Fall reicht das allerdings noch nicht, da wir für manche Beweise Vektoren normieren müssen, wir benötigen also die Bedingung (N'). Dies stellt eine Einschränkung dar, allerdings würden die Ergebnisse mit leichten Abschwächungen der Abschätzungen auch für Vektorräume, die nur die Bedingung (N) erfüllen, gelten. Wegen des technischen Aufwands und der mangelnden neuen Erkenntnisse sehen wir davon ab.

Nun kommen wir zur Abschätzung der Abstände der Eigenwerte ε-naher stetiger linearer Operatoren endlichen Ranges. Wir wollen den folgenden Satz beweisen.

Satz 4.2. *Seien $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(V)$ von endlichem Rang mit $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon$ (< 1) und $\|\varphi\|, \|\varphi'\| \leq 1$. Seien weiters $\lambda_i \in K$, $i \in I$, die Eigenwerte von φ, $\lambda'_j \in K$, $j \in J$, die Eigenwerte von φ' und*

$$V = \bigoplus_{i \in I} E(\lambda_i) \textit{ bzw. } V = \bigoplus_{j \in J} E(\lambda'_j)$$

die direkte Summe der Eigenräume von φ bzw. φ'. Dann gilt für alle $j \in J$

$$\prod_{i \in I} \left|\lambda'_j - \lambda_i\right| \leq \varepsilon.$$

Bemerkung 4.3. Da im obigen Satz φ bzw. φ' von endlichem Rang ist, folgt dass Kardinalität von I bzw. J endlich ist und die Dimension der Eigenräume aller Eigenwerte $\lambda_i \neq 0$ bzw. aller Eigenwerte $\lambda'_j \neq 0$ ebenfalls endlich ist, denn es gilt

$$\operatorname{im}(\varphi) = \bigoplus_{\lambda_i \neq 0} E(\lambda_i) \text{ bzw. } \operatorname{im}(\varphi') = \bigoplus_{\lambda'_j \neq 0} E(\lambda'_j).$$

Insbesondere muss dann für einen nicht-endlichdimensionalen Banachraum V der Eigenraum $E(0)$ von φ bzw. φ' auch nicht-endlichdimensional sein.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 4.4. *Seien $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(V)$ mit $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon$ (< 1) und $\|\varphi\|$, $\|\varphi'\| \leq 1$. Dann gibt es für alle $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$ ein $\varpi = \varpi(v) \in K$ mit $|\varpi| \leq \varepsilon$ und $u \in V$ mit $\|u\| = 1$, sodass*

$$\varphi(v) = \varphi'(v) + \varpi u.$$

Beweis. Im Fall $\varphi(v) = \varphi'(v)$ ist die Behauptung klar. Sei also $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$ und $\varphi(v) \neq \varphi'(v)$. Aufgrund der Bedingung (N') gibt es ein $\varpi = \varpi(v) \in K$, sodass $|\varpi| = \|\varphi(v) - \varphi'(v)\| \neq 0$ ist und es gilt

$$\varphi(v) - \varphi'(v) = \varpi \underbrace{\left(\frac{\varphi(v) - \varphi'(v)}{\varpi} \right)}_{=:u}.$$

Da $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon$ ist, gilt $|\varpi| = \|\varphi(v) - \varphi'(v)\| \leq \|\varphi - \varphi'\| \|v\| \leq \varepsilon$ und klarerweise gilt auch $\|u\| = 1$. □

Lemma 4.5. *Seien $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(V)$ mit $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon$ (< 1) und $\|\varphi\|, \|\varphi'\| \leq 1$. Dann folgt*

$$\|\varphi^n - \varphi'^n\| \leq \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma mittels Induktion nach n. Für den Induktionsanfang $n = 1$ ist nichts zu zeigen, da in diesem Fall die Behauptung der Voraussetzung entspricht. Nehmen wir nun an, die Behauptung sei für n bewiesen. Sei $v \in V$ beliebig mit $\|v\| \leq 1$. Wegen Lemma 4.4 existiert $\varpi \in \mathcal{O}$ mit $|\varpi| \leq \varepsilon$ und $u \in V$ mit $\|u\| = 1$, sodass $\varphi(v) = \varphi'(v) + \varpi u$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi^{n+1}(v) - \varphi'^{n+1}(v)\right\| &= \|\varphi^n(\varphi(v)) - \varphi'^n(\varphi'(v))\| \\
&= \|\varphi^n(\varphi'(v) + \varpi u) - \varphi'^n(\varphi'(v))\| \\
&= \|\varpi \varphi^n(u) + \varphi^n(\varphi'(v)) - \varphi'^n(\varphi'(v))\| \\
&\leq \max\{|\varpi| \|\varphi^n(u)\|, \ \|\varphi^n(\varphi'(v)) - \varphi'^n(\varphi'(v))\|\} \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

da $\|\varphi^n(\varphi'(v)) - \varphi'^n(\varphi'(v))\| \leq \|\varphi^n - \varphi'^n\| \|\varphi'(v)\| \leq \varepsilon \|\varphi'\| \|v\| \leq \varepsilon$ nach Induktionsvoraussetzung. Weiters ist auch $|\varpi| \|\varphi^n(u)\| \leq \varepsilon$, weil $|\varpi| \leq \varepsilon$, $\|\varphi^n\| \leq \|\varphi\|^n \leq 1$ und

$\|u\| = 1$. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\left\|\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}\right\| = \sup\left\{\left\|\varphi^{n+1}(v) - \varphi'^{n+1}(v)\right\| : v \in V \text{ mit } \|v\| \leq 1\right\} \leq \varepsilon$$

womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

Nun können wir nun mit dem Beweis von Satz 4.2 beginnen.

Beweis von Satz 4.2. Wir definieren das Polynom $p(T) := \prod_{i\in I}(T - \lambda_i)$ und setzen für T Operatoren aus $\mathcal{L}(V)$ ein. Da

$$\operatorname{im}(\varphi) = \bigoplus_{\lambda_i \neq 0} E(\lambda_i)$$

gilt, ist $n := |I| \leq 1 + \operatorname{rank}(\varphi) < \infty$. Sei o.B.d.A $I = \{1, \dots, n\}$. Dann ergibt sich die folgende Gleichung für einen beliebigen Eigenvektor v_i von φ zum Eigenwert λ_i

$$\begin{aligned}
p(\varphi)v_i &= (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_n \mathrm{id}_V)v_i \\
&= (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi(v_i) - \lambda_n \mathrm{id}_V(v_i)) \\
&= (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_V) \circ \cdots \circ (\lambda_i - \lambda_n)v_i \\
&= (\lambda_i - \lambda_n)(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_{n-1} \mathrm{id}_V)v_i \\
&\dots \\
&= \prod_{k\in I}(\lambda_i - \lambda_k)v_i.
\end{aligned}$$

Da $\prod_{k\in I}(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, ist $p(\varphi) = 0$ auf $E(\lambda_i)$ und es folgt $p(\varphi) \equiv 0$ auf V, denn nach Voraussetzung gilt $V = \bigoplus_{i\in I} E(\lambda_i)$ und $p(\varphi)$ ist linear. Ganz analog folgt, dass für alle Eigenvektoren $v'_j \in V$ von φ' mit dem Eigenwert λ'_j

$$p(\varphi')v'_j = \prod_{k\in I}(\lambda'_j - \lambda_k)v'_j$$

gilt. Weiters gilt

$$
\begin{aligned}
\|p(\varphi)-p(\varphi')\| &= \left\|\prod_{i\in I}(\varphi-\lambda_i \mathrm{id}_V)-\prod_{i\in I}(\varphi'-\lambda_i \mathrm{id}_V)\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=0}^{n}\varphi^{n-k}\mathrm{id}_V^k \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=k}}\prod_{i\in S}\lambda_i-\sum_{k=0}^{n}\varphi'^{n-k}\mathrm{id}_V^k \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=k}}\prod_{i\in S}\lambda_i\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=0}^{n}\left(\varphi^{n-k}\mathrm{id}_V^k-\varphi'^{n-k}\mathrm{id}_V^k\right)\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=k}}\prod_{i\in S}\lambda_i\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\varphi^{n-k}-\varphi'^{n-k}\right)\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=k}}\prod_{i\in S}\lambda_i\right\| \\
&\le \max\{\|\varphi^n-\varphi'^n\|,\left\|\varphi^{n-1}-\varphi'^{n-1}\right\|,\ \dots\ ,\|\varphi-\varphi'\|\}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung gilt, da wegen Lemma 3.2 und der Voraussetzung $\|\varphi\|\le 1$

$$
\left|\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=k}}\prod_{i\in S}\lambda_i\right| \le \max_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=k}}\left|\prod_{i\in S}\lambda_i\right|\le 1
$$

gilt. Aus Lemma 4.5 und (1) folgt dann

$$
\|p(\varphi)-p(\varphi')\|\le\max\{\|\varphi^n-\varphi'^n\|,\left\|\varphi^{n-1}-\varphi'^{n-1}\right\|,\ \dots\ ,\|\varphi-\varphi'\|\}\le\varepsilon.
$$

Da wir die Bedingung (N') voraussetzen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass alle Eigenvektoren v_j' Norm 1 haben. Da $p(\varphi)(v)=0$ für alle $v\in V$, folgt für alle Eigenvektoren $v_j'\in V$, dass

$$
\varepsilon\ge\left\|p(\varphi)(v_j')-p(\varphi')(v_j')\right\|=\left\|p(\varphi')(v_j')\right\|=\left\|\prod_{i\in I}(\lambda_j'-\lambda_i)v_j'\right\|.
$$

Damit folgt dann

$$
\varepsilon\ge\left\|\prod_{i\in I}(\lambda_j'-\lambda_i)v_j'\right\|=\left|\prod_{i\in I}(\lambda_j'-\lambda_i)\right|\left\|v_j'\right\|=\left|\prod_{i\in I}(\lambda_j'-\lambda_i)\right|
$$

für alle $j\in J$, da wir für alle Eigenvektoren $\left\|v_j'\right\|=1$ vorausgesetzt haben. □

Wir wollen nun beginnen, Satz 4.2 für vollstetige Operatoren zu verallgemeinern. Dafür ist der folgende Satz 4.8 essenziell. In diesem spielt die Orthogonalität der Eigenräume eine entscheidende Rolle. Da alle darauffolgenden Ergebnisse aufeinander aufbauen führen wir deshalb die folgende Klasse von Operatoren ein:

Definition 4.6 (Klasse $\mathcal{D}(V)$)**.** Sei V ein K-Banachraum mit Orthonormalbasis, welcher die Bedingung (N') erfüllt. Wir definieren $\mathcal{D}(V)$ als die Menge aller vollstetigen Abbildungen $\varphi \in \mathcal{C}(V)$ mit Eigenwerten $\lambda_i \in K$, $i \in I$, sodass

1. die Familie der Eigenräume $(E(\lambda_i))_{i\in I}$ orthogonal ist und

2. $V = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E(\lambda_i)$.

Bemerkung 4.7. Die Voraussetzungen für die Menge $\mathcal{D}(V)$ führen zu den folgenden Eigenschaften:

1. Die Indexmenge I in der obigen Definition ist abzählbar. Denn angenommen I wäre nicht abzählbar, dann können die Eigenwerte λ_i nicht gegen 0 konvergieren, was dem Satz 4.8 widersprechen würde.

2. Der Banachraum V besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Denn nach Satz 3.6 besitzt jeder Eigenraum $E(\lambda_i)$ eine Orthonormalbasis B_i und da die Eigenräume eine orthogonale Familie bilden und $V = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E(\lambda_i)$ gilt, ist $\bigcup_{i\in I} B_i$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, nach Satz 2.15.

3. In der archimedischen Funktionalanalysis haben selbstadjungierte kompakte Operatoren eine Spektralzerlegung als Summe orthogonaler Eigenräume. Die Operatoren aus $D(V)$ können daher als Analogon zu den selbstadjungierten kompakten Operatoren aus der archimedischen Funktionalanalysis gesehen werden.

Konvention. Von nun an sei V ein K-Banachraum mit Orthonormalbasis, welcher die Bedingung (N') erfüllt.

Satz 4.8. *Sei $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ mit $\operatorname{rank}(\varphi_n) < \infty$ und $\|\varphi\| \leq 1$. Seien $\lambda_i \in K$, $i \in I$, die Eigenwerte von φ. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes φ_n mit $\|\varphi - \varphi_n\| \leq \varepsilon$*

$$\sum_{|\lambda_i|>\varepsilon} \dim(E(\lambda_i)) \leq \operatorname{rank}(\varphi_n),$$

das heißt für die Menge $I_\varepsilon = \{i \in I : |\lambda_i| > \varepsilon\} \subseteq I$ bzw. für alle $i \in I_\varepsilon$ gilt

$$|I_\varepsilon| \leq \operatorname{rank}(\varphi_n) \textit{ bzw. } \dim(E(\lambda_i)) \leq \operatorname{rank}(\varphi_n).$$

Insbesondere sind die Eigenräume $E(\lambda_i)$ für $\lambda_i \neq 0$ endlichdimensional und die Indexmengen I_ε sind für alle $\varepsilon > 0$ endlich, das heißt die Folge der Eigenwerte λ_i konvergiert gegen 0.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung

$$\varphi_n : \widehat{\bigoplus_{i \in I_\varepsilon}} E(\lambda_i) \to \operatorname{im}(\varphi_n)$$

injektiv ist. Dies ist genau dann der Fall wenn diese Abbildung einen trivialen Kern besitzt. Da V nach Voraussetzung die Bedingung (N') erfüllt lässt sich jedes Element $v \in V$ normieren. Damit reicht es zu zeigen, dass alle Vektoren mit Norm 1 nicht im Kern liegen. Sei $v \in \widehat{\bigoplus}_{i \in I_\varepsilon} E(\lambda_i)$ und sei o.E. $\|v\| = 1$. Also besitzt v eine Darstellung der Form $v = \sum_{i \in I_\varepsilon} v_i$ und weil die Familie $(E(\lambda_i))_{i \in I}$ orthogonal ist, folgt wegen Lemma 2.10

$$\|\varphi(v)\| = \left\| \sum_{i \in I_\varepsilon} \lambda_i v_i \right\| = \max\left\{ \|\lambda_i v_i\| : i \in I_\varepsilon \right\} \geq \|\lambda_{i_0} v_{i_0}\| = |\lambda_{i_0}|\,;$$

beachte dabei dass wegen Lemma 2.10 auch $1 = \|v\| = \left\| \sum_{i \in I_\varepsilon} v_i \right\| = \max\left\{ \|v_i\| : i \in I_\varepsilon \right\}$ gelten muss und deshalb ein $i_0 \in I_\varepsilon$ existiert, sodass $\|v_{i_0}\| = 1$. Weiters ist die Norm $\|\varphi(v) - \varphi_n(v)\| \leq \varepsilon$, da $\|\varphi - \varphi_n\| \leq \varepsilon$ und somit folgt

$$\|\varphi_n(v)\| = \|\varphi(v) - (\varphi(v) - \varphi_n(v))\| \geq \big|\, \|\varphi(v)\| - \|\varphi(v) - \varphi_n(v)\| \,\big| \geq \big| |\lambda_{i_0}| - \varepsilon \big| > 0,$$

denn $|\lambda_i| > \varepsilon$ für alle $i \in I_\varepsilon$. Also ist $\varphi_n \neq 0$ auf $\widehat{\bigoplus}_{i \in I_\varepsilon} E(\lambda_i)$ und somit ist die Abbildung $\varphi_n|_{\widehat{\bigoplus}_{i \in I_\varepsilon} E(\lambda_i)}$ injektiv. Daraus folgt

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} \dim(E(\lambda_i)) \leq \dim \operatorname{im}(\varphi_n) = \operatorname{rank}(\varphi_n).$$

Insbesondere muss daher $|I_\varepsilon| < \infty$ sein, das heißt $|\lambda_i| \leq \varepsilon$ für fast alle $i \in I$ und $\dim E(\lambda_i) < \infty$ für alle $|\lambda_i| > \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt $\lim_i \lambda_i = 0$ und die Eigenräume $E(\lambda_i)$ sind endlichdimensional für alle $\lambda_i \neq 0$. □

Mit dem obigen Beweis sind wir unserem Ziel den Satz 4.2 zu verallgemeinern, schon näher gekommen, doch bevor wir dies tun können, benötigen wir noch ein Lemma und die folgende Definition um es formulieren zu können.

Definition 4.9. Sei V ein Banachraum der Form $V = U \oplus W$, $\varphi \in \mathcal{L}(U)$ und $\varphi' \in \mathcal{L}(W)$. Dann besitzt jedes $v \in V$ eine Darstellung der Form $v = u + w$ für $u \in U$, $w \in W$ und wir definieren die Abbildung $\varphi \oplus \varphi' : V \to V$ durch

$$v \mapsto \varphi(u) + \varphi'(w).$$

Lemma 4.10. *Seien $\varphi, \varphi' \in \mathcal{D}(V)$ mit $\|\varphi\|, \|\varphi'\| \leq 1$ und $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon$ (< 1). Seien $\lambda_i \in K$, $i \in I$, die Eigenwerte von φ und seien $\lambda'_j \in K$, $j \in J$, die Eigenwerte von φ'. Dann sind die Teilmengen $I_\varepsilon = \{i \in I : |\lambda_i| > \varepsilon\} \subseteq I$ und $J_\varepsilon = \{j \in J : |\lambda'_j| > \varepsilon\} \subseteq J$ für alle $\varepsilon > 0$ endlich. Insbesondere gilt dann*

$$|\lambda_i| \leq \varepsilon \text{ und } |\lambda_j| \leq \varepsilon \text{ für alle } i \in I - I_\varepsilon \text{ bzw. } j \in J - J_\varepsilon.$$

Für die folgenden Teilräume des Vektorraums V, welche definiert sind durch

$$U = \widehat{\bigoplus_{i \in I_\varepsilon}} E(\lambda_i) \text{ bzw. } U' = \widehat{\bigoplus_{i \in J_\varepsilon}} E(\lambda_i')$$

und deren Komplementärraume

$$W = \widehat{\bigoplus_{i \in I - I_\varepsilon}} E(\lambda_i) \text{ bzw. } W' = \widehat{\bigoplus_{i \in J - J_\varepsilon}} E(\lambda_i')$$

gilt $\|\varphi|_U\| \leq \|\varphi\|$, $\|\varphi'|_{U'}\| \leq \|\varphi'\|$ *und*

$$\|\varphi|_U \oplus 0|_W - \varphi'|_{U'} \oplus 0|_{W'}\| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt durch Anwenden von Satz 4.8 für φ und φ'. Offensichtlich ist

$$\|\varphi|_U\| = \sup\left\{\frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} : \text{ für } v \in U - \{0\}\right\} \leq \sup\left\{\frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} : \text{ für } v \in V - \{0\}\right\} = \|\varphi\|.$$

Ganz analog folgt auch $\|\varphi'|_{U'}\| \leq \|\varphi\|$. Wie wir in der obigen Bemerkung bereits gesehen haben, besitzt V eine Orthonormalbasis

$$B = \{v_{i,k} \in E(\lambda_i) : i \in I \text{ und } 1 \leq k \leq \dim E(\lambda_i)\}$$

aus Eigenvektoren. Sei $B_W = \{v_{i,k} \in B : i \in I - I_\varepsilon\} \subseteq B$. Dann ist B_W eine Orthonormalbasis von W wegen Satz 2.15. Da U, W φ-invariant bzw. U', W' φ'-invariant sind, besitzen φ bzw. φ' eine Darstellung der Form $\varphi = \varphi|_U \oplus \varphi|_W$ bzw. $\varphi' = \varphi'|_{U'} \oplus \varphi|_{W'}$. Daher erhalten wir

$$\|\varphi - (\varphi|_U \oplus 0|_W)\| = \|\varphi|_U \oplus \varphi|_W - \varphi|_U \oplus 0|_W\| = \|\varphi|_U - \varphi|_U \oplus \varphi|_W - 0|_W\| = \|\varphi|_W\|$$

und es folgt $\|\varphi - (\varphi|_U \oplus 0|_W)\| \leq \varepsilon$, da $\|\varphi|_W\| \leq \varepsilon$. Dies gilt, da für $v \in W$ mit $\|v\| \leq 1$ und einer Darstellung der Form $v = \sum_{v_{i,k} \in B_W} \alpha_{i,k} v_{i,k}$ die folgende Gleichung gilt

$$\|\varphi(v)\| = \left\|\sum_{v_{i,k} \in B} \alpha_{i,k}\varphi(v_{i,k})\right\| = \sup\{|\alpha_{i,k}\lambda_i| : v_{i,k} \in B_W\} \leq \sup\{|\lambda_i| : v_{i,k} \in B_W\} \leq \varepsilon.$$

Denn $|\alpha_{i,k}| \leq 1$, da $1 \geq \|v\| = \sup\{|\alpha_{i,k}| : \alpha_{i,k} \in B_W\}$ und $|\lambda_i| \leq \varepsilon$ für alle $i \in I - I_\varepsilon$ ist. Analog folgt $\|\varphi' - (\varphi'|_{U'} \oplus 0|_{W'})\| \leq \varepsilon$. Da $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon$ nach Voraussetzung und wegen $\|\varphi - (\varphi|_U \oplus 0|_W)\| \leq \varepsilon$ folgt

$$\|\varphi' - (\varphi|_U \oplus 0|_W)\| \leq \varepsilon$$

nach Lemma 2.19. Da auch $\|\varphi' - (\varphi'|_{U'} \oplus 0|_{W'})\| \leq \varepsilon$ gilt, folgt

$$\|\varphi|_U \oplus 0|_W - \varphi'|_{U'} \oplus 0|_{W'}\| \leq \varepsilon$$

wieder aufgrund von Lemma 2.19. □

Jetzt können wir die Verallgemeinerung des Satzes 4.2 beweisen.

Satz 4.11. *Seien $\varphi, \varphi' \in \mathcal{D}(V)$ mit $\|\varphi - \varphi'\| \leq \varepsilon\ (< 1)$, $\|\varphi\|, \|\varphi'\| \leq 1$, $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ und $\varphi' = \lim_{n\to\infty} \varphi'_n$, wobei $\operatorname{rank}(\varphi_n) < \infty$ bzw. $\operatorname{rank}(\varphi'_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $\lambda_i \in K$, $i \in I$, die Eigenwerte von φ und $\lambda'_j \in K$, $j \in J$, die Eigenwerte von φ'. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:*

1. *$I_\varepsilon = \{i \in I : |\lambda_i| > \varepsilon\} \subseteq I$ und $J_\varepsilon = \{j \in J : \left|\lambda'_j\right| > \varepsilon\} \subseteq J$ sind endlich,*
2. *$|\lambda_i| \leq \varepsilon$ und $\left|\lambda'_j\right| \leq \varepsilon$ für alle $i \in I - I_\varepsilon$ bzw. $j \in J - J_\varepsilon$,*
3. *$\left|\lambda'_j - \lambda_i\right| \leq \varepsilon$ für alle $i \in I - I_\varepsilon$ und alle $j \in J - J_\varepsilon$,*
4. *$|I_\varepsilon| \leq \operatorname{rank}(\varphi_l)$ und $|J_\varepsilon| \leq \operatorname{rank}(\varphi'_m)$ für all jene $l, m \in \mathbb{N}$ sodass $\|\varphi - \varphi_l\| \leq \varepsilon$ bzw. $\|\varphi - \varphi'_m\| \leq \varepsilon$,*
5. *$\dim(E(\lambda_i)) < \infty$ und $\dim(E(\lambda'_j)) < \infty$ für alle $\lambda_i \neq 0$ bzw. $\lambda'_j \neq 0$ und*
6. *$\prod_{i \in I_\varepsilon} \left|\lambda'_j - \lambda_i\right| \leq \varepsilon$ für alle $j \in J_\varepsilon$.*

Beweis. Die Punkte 1, 2, 4 und 5 folgen, indem wir Satz 4.8 für φ und φ' anwenden. Aus Punkt 2 folgt 3, denn

$$\left|\lambda_i - \lambda'_j\right| \leq \max\left\{|\lambda_i|, \left|\lambda'_j\right|\right\} \leq \varepsilon$$

für alle $i \in I - I_\varepsilon$ und $j \in J - J_\varepsilon$. Für den Beweis von Punkt 6 definieren wir die folgenden Teilräume von V

$$U = \widehat{\bigoplus_{i \in I_\varepsilon}} E(\lambda_i) \text{ bzw. } U' = \widehat{\bigoplus_{i \in J_\varepsilon}} E(\lambda'_i)$$

und deren Komplementärraume

$$W = \widehat{\bigoplus_{i \in I - I_\varepsilon}} E(\lambda_i) \text{ bzw. } W' = \widehat{\bigoplus_{i \in J - J_\varepsilon}} E(\lambda'_i)$$

Wir betrachten nun die Abbildungen $\psi := \varphi|_U \oplus 0|_W$ und $\psi' := \varphi'|_{U'} \oplus 0|_{W'}$, dann sind ψ und ψ' von endlichem Rang, wegen Punkt 4 und 5. Weiters gilt wegen Lemma 4.10, dass $\|\psi\| \leq \|\varphi\| \leq 1$, $\|\psi'\| \leq \|\varphi'\| \leq 1$ und $\|\psi - \psi'\| \leq \varepsilon$. Damit erfüllen ψ und ψ' die Voraussetzungen von Satz 4.2 und wir erhalten für alle $j \in J_\varepsilon$

$$\prod_{i \in I_\varepsilon} \left|\lambda'_j - \lambda_i\right| \leq \varepsilon.$$

$\square$

Sei nun $(K, |\cdot|) = (\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$. Wir wollen mithilfe von Satz 4.11 die Abstände einzelner Eigenwerte abschätzen. Dazu benötigen wir, dass jede p-adische Zahl $v \in \mathbb{Q}_p$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$v = p^n u \text{ für } n \in \mathbb{Z} \text{ und } u \in \mathbb{Z}_p^*$$

besitzt. Damit können wir nun die Abstände einzelner Eigenwerte abschätzen.

Korollar 4.12. *Sei V ein $\mathbb{Q}_p$-Banachraum und seien $\varphi, \varphi' \in \mathcal{D}(V)$ mit $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ und $\varphi' = \lim_{n\to\infty} \varphi'_n$, wobei $\operatorname{rank}(\varphi_n) < \infty$ bzw. $\operatorname{rank}(\varphi'_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\|\varphi - \varphi'\| \leq |p^n|$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\|\varphi\|, \|\varphi'\| \leq 1$. Weiters seien $\lambda_i \in \mathbb{Q}_p$, $i \in I$, die Eigenwerte von φ, $\lambda'_j \in \mathbb{Q}_p$, $j \in J$, die Eigenwerte von φ'. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:*

1. *$I_{p^n} = \{i \in I : |\lambda_i| > |p^n|\} \subseteq I$ und $J_{p^n} = \{j \in J : |\lambda'_j| > |p^n|\} \subseteq J$ sind endlich*
2. *$|\lambda_i| \leq |p^n|$ und $|\lambda'_j| \leq |p^n|$ für alle $i \in I - I_{p^n}$ bzw. $j \in J - J_{p^n}$,*
3. *$|\lambda'_j - \lambda_i| \leq |p^n|$ für alle $i \in I - I_{p^n}$ und alle $j \in J - J_{p^n}$,*
4. *$|I_{p^n}| \leq \operatorname{rank}(\varphi_l)$ und $|J_{p^n}| \leq \operatorname{rank}(\varphi'_m)$ für all jene $l, m \in \mathbb{N}$ sodass $\|\varphi - \varphi_l\| \leq |p^n|$ bzw. $\|\varphi - \varphi'_m\| \leq |p^n|$,*
5. *$\dim(E(\lambda_i)) < \infty$ und $\dim(E(\lambda'_j)) < \infty$ für alle $\lambda_i \neq 0$ bzw. $\lambda'_j \neq 0$,*
6. *$\prod_{i \in I_{p^n}} |\lambda'_j - \lambda_i| \leq |p^n|$ für alle $j \in J_{p^n}$ und*
7. *für alle $j \in J_{p^n}$ existiert ein $i \in I_{p^n}$ mit $|\lambda'_j - \lambda_i| \leq |p|^{\left\lfloor \frac{n}{|I_{p^n}|} \right\rfloor}$.*

Beweis. Die Aussagen 1 bis 6 folgen direkt aus Satz 4.11. Sei $j \in J_{p^n}$ beliebig aber fix. Wegen Lemma 3.2 ist $|\lambda'_j| \leq \|\varphi'\| \leq 1$ und $|\lambda_i| \leq \|\varphi\| \leq 1$ für alle $i \in I_{p^n}$. Damit ist auch $|\lambda'_j - \lambda_i| \leq \max\{|\lambda'_j|, |\lambda_i|\} \leq 1$. Daher ist für alle $i \in I_{p^n}$ und die Differenz $\lambda'_j - \lambda_i \in \mathbb{Z}_p$ und es gibt für alle $i \in I_{p^n}$ und eine Darstellung der Form

$$\lambda'_j - \lambda_i = p^{n_i} u_i$$

mit $|u_i| = 1$ und $n_i \in \mathbb{N}_0$. Wir erhalten wegen Punkt 6

$$\prod_{i \in I_{p^n}} |\lambda'_j - \lambda_i| = \prod_{i \in I_{p^n}} |p^{n_i} u_i| = \prod_{i \in I_{p^n}} |p^{n_i}| \leq |p^n|.$$

Diese Gleichung ist im p-adischen genau dann erfüllt, wenn

$$\sum_{i \in I_{p^n}} n_i \geq n$$

gilt. Daher gibt es ein $i \in I_{p^n}$, sodass $n_i \geq \left\lfloor \frac{n}{|I_{p^n}|} \right\rfloor$. Denn gebe es kein solches $i \in I_{p^n}$, dann wäre $n_i < \left\lfloor \frac{n}{|I_{p^n}|} \right\rfloor$ für alle $i \in I_{p^n}$ und es würde

$$\sum_{i \in I_{p^n}} n_i < \sum_{i \in I_{p^n}} \left\lfloor \frac{n}{|I_{p^n}|} \right\rfloor = |I_{p^n}| \left\lfloor \frac{n}{|I_{p^n}|} \right\rfloor \leq |I_{p^n}| \frac{n}{|I_{p^n}|} = n$$

folgen. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\sum_{i \in I_{p^n}} n_i \geq n$. $\square$

Aus Korollar 4.12 folgt der nächste Satz.

Satz 4.13. *Sei V ein $\mathbb{Q}_p$-Banachraum. Seien $\varphi, \varphi_n \in \mathcal{D}(V)$ mit $\|\varphi\|, \|\varphi_n\| \leq 1$ und $\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, sodass o.E. $\|\varphi - \varphi_n\| < |p|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $\lambda_j \in K$, $j \in J$, die Eigenwerte von φ, $\lambda_{i,n} \in K$, $i \in I_n$, die Eigenwerte von φ_n. Sei weiters*

$$|I_{\varphi_n, p^n}| = |\{i \in I_n : |\lambda_{i,n}| > |p|^n\}| = o(n).$$

Dann gibt es für jeden Eigenwert λ_j von φ eine Folge von Eigenwerten $\lambda_{i,n}$ von φ_n, wobei $i = i(\lambda_j, n)$, sodass

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{i,n} = \lambda_j.$$

Beweis. Durch Anwenden von Korollar 4.12 auf die Paare φ, φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass die Teilmengen $I_{\varphi_n, p^n} \subseteq I_n$ und $J_{p^n} = \{j \in J : |\lambda_j| > |p|^n\} \subseteq J$ für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich sind und für alle $j \in J_{p^n}$ ein $i \in I_{\varphi_n, p^n}$ existiert, sodass

$$|\lambda_j - \lambda_{i,n}| < |p|^{\left\lfloor \frac{n}{|I_{\varphi_n, p^n}|} \right\rfloor}.$$

Es gilt $|\lambda_j| \leq |p|^n$ für $j \in J - J_{p^n}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\lambda_k \neq 0$ ein beliebiger Eigenwert von φ. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $|\lambda_k| > |p|^n$, weil $|p| < 1$, daher ist $k \in J_{p^n}$. Weiters ist dann $k \in J_{p^m}$ für alle $m \geq n$, denn es gilt $J_{p^n} \subseteq J_{p^m}$ für alle $m \geq n$. Da $k \in J_{p^m}$ für alle $m \geq n$, gibt es für jedes solche m ein $i = i(\lambda_j, m) \in I_{\varphi_m, p^m}$, sodass

$$|\lambda_k - \lambda_{i,m}| < |p|^{\left\lfloor \frac{m}{|I_{\varphi_m, p^m}|} \right\rfloor}.$$

Weil wir $|I_{\varphi_n, p^n}| = o(n)$ voraussetzen, folgt für $m \to \infty$

$$\left\lfloor \frac{m}{|I_{\varphi_m, p^m}|} \right\rfloor \to \infty.$$

Da $|p| < 1$, erhalten wir $|\lambda_k - \lambda_{i,m}| \to 0$ für $m \to \infty$. Da wir $\lambda_k \neq 0$ als beliebig vorausgesetzt haben, bleibt nur mehr der Fall $\lambda_k = 0$ zu betrachten. Da $\varphi_n \in \mathcal{D}(V)$, gilt nach Satz 4.8 $\lim_{i \to \infty} \lambda_{i,n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gibt es auch hier eine Folge $\lambda_{i,n}$ von Eigenwerten von φ_n, wobei $i = i(\lambda_k, n)$, mit $\lim_{n \to \infty} \lambda_{i,n} = 0$. $\square$

Als Folgerung erhalten wir das nächste Korollar, welches die Bedingung $|I_{\varphi_n,p^n}| = o(n)$ des obigen Satzes veranschaulichen soll.

Korollar 4.14. *Sei V ein $\mathbb{Q}_p$-Banachraum. Seien $\varphi, \varphi_n \in \mathcal{D}(V)$ mit $\|\varphi\|, \|\varphi_n\| \leq 1$ und $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, sodass o.E. $\|\varphi - \varphi_n\| < |p|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $\lambda_j \in K$, $j \in J$, die Eigenwerte von φ, $\lambda_{i,n} \in K$, $i \in I_n$, die Eigenwerte von φ_n. Sei weiters*

$$\mathrm{rank}(\varphi_n) = o(n).$$

Dann gibt es für jeden Eigenwert λ_j von φ eine Folge von Eigenwerten $\lambda_{i,n}$ von φ_n, wobei $i = i(\lambda_j, n)$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{i,n} = \lambda_j.$$

Beweis. Wegen Korollar 4.12 Punkt 4 gilt

$$|I_{\varphi_n,p^n}| \leq \mathrm{rank}(\varphi_n)$$

und somit folgt die Behauptung aus Satz 4.13. $\square$

Literatur

[1] J. Mahnkopf. Algebraische Geometrie. Vorlesung, Universität Wien, 2015.

[2] Q. I. Rahman and G. Schmeisser. *Analytic Theory of Polynomials*. Oxford University Press, 2002.

[3] A. C. M. van Rooij. *Non-Archimedean Functional Analysis*. Marcel Dekker, Inc, 1978.

[4] J.-P. Serre. Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. *Publ. Math. IHES*, 12:69–85, 1978.

5 Zusammenfassung

Es ist bekannt, dass die Nullstellen eines Polynoms stetig von dessen Koeffizienten abhängig sind und da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, sind auch die Eigenwerte einer linearen Abbildung stetig von den Eintragungen ihrer Darstellungsmatrix abhängig. Uns interessiert nun, ob eine analoge Aussage auch für vollstetige Operatoren auf (nicht notwendigerweise endlichdimensionalen) nicht-archimedischen Banachräumen V gilt. In dieser Arbeit werden wir eine Klasse $\mathcal{D}(V)$ von Operatoren auf V mit guten Approximationseigenschaften definieren, welche ein Analogon zur Klasse der selbstadjungierten kompakten Operatoren aus der archimedischen Funktionalanalysis ist, und zeigen dass für Operatoren aus $\mathcal{D}(V)$ eine analoge Aussage gilt. Um das zu erreichen werden wir die Abstände der Eigenwerte von Paaren ε-naher Operatoren φ und φ' aus $\mathcal{D}(V)$, das heißt es ist $\|\varphi - \varphi'\| < \varepsilon$, direkt abschätzen durch ε und die Anzahl der Eigenwerte von φ die größer als ε sind. Insbesondere erhalten wir, dass für einen vollstetigen Operator aus $\mathcal{D}(V)$ mit $\varphi_n \to \varphi$ für φ_n aus $\mathcal{D}(V)$ jeder Eigenwert von φ der Limes von Eigenwerten der Operatoren φ_n ist.

6 Abstract

It is well known that the roots of a polynomial depend continuously on its coefficients. Because of the fact, that the eigenvalues are the roots of the characteristic polynomial, the eigenvalues of a linear mapping depend continuously on the entries of the matrix, which represents the linear map, as well. We want to investigate whether an analogous statement is true for completely continuous operators on (not necessarily finite dimensional) non-Archimedean Banach spaces V. In this thesis, we will define a class $\mathcal{D}(V)$ of operators on V with good approximation properties, which is an analogue of the class of self-adjoint compact operators from Archimedian functional analysis, and show that for operators from $\mathcal{D}(V)$ an analogous statement applies. In order to achieve this, we directly estimate the distances of eigenvalues of pairs of ε-close operators φ and φ' from $\mathcal{D}(V)$ (this means $\|\varphi - \varphi'\| < \varepsilon$) by ε and the number of eigenvalues of φ greater than ε. In particular, we obtain that for a completely continuous operator in $\mathcal{D}(V)$ with $\varphi_n \to \varphi$ for φ_n from $\mathcal{D}(V)$, every eigenvalue of φ is the limit of eigenvalues of the operators φ_n.