DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Arithmetische Funktionen und die Riemannsche Zetafunktion“

verfasst von / submitted by

Elisabeth Maria Hergovich

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 338 406
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	UF Latein UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Dr. Günther Hörmann

Zusammenfassung

Bernhard Riemann stellte in seiner Arbeit *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* im Jahre 1859 die Nachwelt vor große Aufgaben. Er knüpft in dieser Abhandlung an Untersuchungen über die Zetafunktion an, mit der sich bereits Leonhard Euler 100 Jahre zuvor beschäftigte. Riemann formuliert in seiner nur acht Seiten langen Arbeit interessante Aussagen über die Verteilung der Primzahlen, von denen er aber nur eine selbst bewies. Somit gilt diese Arbeit mitunter als Geburtsstunde der analytischen Zahlentheorie. Ein Zugang zu dieser Arbeit führt über den Bereich der Arithmetischen Funktionen. Die Frage nach den Eigenschaften und der Darstellung solcher Funktionen gilt dabei als zentrale Problemstellung und erfordert das Untersuchen von einigen typischen Beispielen. Dabei werden wir uns mit der Multiplikativität und Additivität beschäftigen, um später Rückschlüsse auf algebraische Strukturen ziehen zu können. Anschließend wenden wir uns der speziellen arithmetischen Funktion - der Riemannsche Zetafunktion - zu, die den zweiten Teil dieser Arbeit bildet. Anhand von Primzahlbeweisen werden wir sodann die Entstehung der Zetafunktion nachvollziehen. Genau diese Beweise leiten uns dann zur Darstellung der Funktionsgleichung und deren Beweis, wobei wir zeigen werden, dass sich dies nur durch andere Funktionen, wie die Gamma- und Thetafunktion bewerkstelligen lässt. Abschließend soll anhand der Riemannschen Vermutung gezeigt werden, dass sich die Beschäftigung mit Riemanns Arbeit immer noch lohnt, da eine Idee Riemanns bis heute nicht zur Gänze bewiesen wurde.

Abstract

In his work *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, published in 1859, Bernhard Riemann left many challenges to his successors. In this study about the zeta function, he enters where Leonhard Euler left off 100 years earlier. On mere 8 pages, Riemann formulated a number of conjectures about the distribution of prime numbers but only proving one of them. Not only therefore this work is nowadays often seen as the origin of analytic number theory. One potential approach to the work of Riemann is via arithmetic functions. Questions concerning properties and representations of such functions are at the very core of the problem and thus require the analysis of classic examples to build up familiarity with the concept. We will work on multiplicativity and additivity to later on draw conclusions based on algebraic structures. Equipped with this knowledge, we will then focus on a specific arithmetic function, the Riemann zeta function, and illustrate its development by doing proofs on prime numbers. Exactly those proofs will then lead to the representation of the functional form and the proof thereof. In the process we will show, that this can only be done by exploiting properties of other interesting functions, namely gamma and theta functions. We will round up the journey by demonstrating that it is still fruitful and relevant to study the work of Riemann and illustrate this by what he is still most famous for: the unproven Riemann hypothesis.

Danksagung

Zu allererst möchte ich mich bei ao. Univ.-Prof. Dr. Günther Hörmann bedanken, der trotz seines vollen Terminkalenders immer wieder Zeit für mich fand, um mit mir stundenlang zu rechnen und zu diskutieren. Auch bei Korrekturen nahm er sich viel Zeit und war mir ein ständig hilfsbereiter und motivierender Begleiter auf dem Weg zur Fertigstellung der vorliegenden Arbeit. Ich hätte mir keinen besseren und kompetenteren Betreuer für diese Diplomarbeit wünschen können. Ein herzliches Dankeschön dafür.

Ein besonderer Dank gilt meinen Mathemädels Andrea, Anna, Julia, Sophie und Valerie, die meine Studienjahre durch ihre Freundschaft unvergesslich gemacht haben. Sie waren durch ihren Fleiß stets Vorbilder für mich, weshalb ich ohne sie niemals mein Studium mit dieser Akribie und Schnelligkeit absolviert hätte.

Ganz besonders möchte ich mich jedoch bei meiner Studienkollegin Katja Maierhofer bedanken, die mich in beiden Studienfächern begleitet hat und mir stets mit Rat und Tat zur Seite stand. Danke für die vielen gemeinsamen Stunden, deine Hilfsbereitschaft und deine immerwährende Freundschaft.

Auch meiner Langzeitmitbewohnerin Alexandra Waniek gilt an dieser Stelle ein besonderer Dank. Ich durfte quasi als Inventar von der Stadtgrenze Wiens bis fast in die Innenstadt immer mit ihr mitsiedeln. Sie war stets die Erste, die Freud und Leid mit mir teilte und sich Beschwerden anhören musste. Danke für jedes Gespräch, das mich auf den Boden der Realität zurückholte und mir zeigte, dass man zwischen dem vielen Lernen auch das Leben genießen soll.

Ich möchte auch meiner Freundin Victoria Werner für die ausgedehnten Spaziergänge bedanken, bei denen sie stets ein offenes Ohr für meine Sorgen und Anliegen hatte. Danke für jeden Gedankenaustausch, für dein Verständnis und für deine Ratschläge, die ich immer zu beherzigen versuchte.

Außerdem möchte ich meiner Studienkollegin Katrin Tuppinger danken. Durch ihre Überredungskunst half sie mir eine Krise zu überwinden und mit dem Mathematikstudium fortzufahren.

Andrea Kleinl-Pöhn, meiner Lateinlehrerin, möchte ich ebenfalls an dieser Stelle danken. Sie hatte stets eine Vorbildfunktion inne und war mein Mentor und Motivator für meine Studienwahl.

Auch meinem Bruder Philipp Hergovich gilt unendlicher Dank für seine Unterstützung zu dieser Arbeit. Bei jeglichen Fragen und Problemen konnte ich ihn stets kontaktieren und er kam mir mit so einer stoischen Ruhe und Gelassenheit entgegen, die mir sofort jeglichen Frust nahmen. Danke für den lebenslangen Zusammenhalt und den großen Beistand, den du jederzeit zu leisten bereit bist.

Danken möchte ich auch meinen Eltern, die mir nicht nur in finanzieller Hinsicht das Studium ermöglicht haben, sondern mich auch in jeder Lebenssituation unterstützen und mir zur Seite stehen. Auch meiner Oma gebührt großer Dank, da sie seit meiner Kindheit immer für mich da war.

Abschließend möchte ich meinem Freund Andreas Blutmager danken, der tagtäglich meine Höhen und Tiefen in Bezug auf diese Arbeit miterleben musste. Danke für die aufbauenden Worte, wenn ich nach einer mehr rot als schwarzen Arbeit demotiviert war, für das entgegengebrachte Interesse und dafür, dass du immer für mich da bist und mein Leben komplettierst.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Es gibt zwei Tatsachen über die Verteilung von Primzahlen: Die eine ist, daß die Primzahlen, trotz ihrer einfachen Definition und Rolle als Bausteine der natürlichen Zahlen, zu den willkürlichsten, widerspenstigsten Objekten gehören, die der Mathematiker überhaupt studiert. Sie wachsen wie Unkraut unter den natürlichen Zahlen, scheinbar keinem anderen Gesetz als dem Zufall unterworfen, und kein Mensch kann voraussagen, wo wieder eine sprießen wird, noch einer Zahl ansehen, ob sie prim ist oder nicht. Die andere Tatsache ist viel verblüffender, denn sie sagt just das Gegenteil, daß die Primzahlen die ungeheuerste Regelmäßigkeit aufzeigen, dass sie durchaus Gesetzen unterworfen sind und diesen mit fast peinlicher Genauigkeit gehorchen.

Don Zagier (1975).

Als historisch wahrscheinlich älteste mathematische Beschäftigung gilt die Zahlentheorie, die sich der Untersuchung von ganzen Zahlen verschrieben hat. Bereits in der Antike enstanden daher mathematische Schriften, wie Euklids *Elemente*, die von Fragen über ganzzahlige Probleme handeln. In diesem Werk behandelt Euklid auch die Grundbausteine der Zahlentheorie, nämlich die Primzahlen. Ihm gelang es auch einen Beweis für die Unendlichkeit dieser besonderen Zahlen festzumachen. In den kommenden Jahrhunderten jedoch schwand das Interesse an der Mathematik und so erlangte die Zahlentheorie erst im 17. und 18. Jahrhundert, vor allem durch Euler, ihre Renaissance. Seither hat sich aber Erstaunliches auf dem Sektor der Zahlentheorie getan. So stellte auch Bernhard Riemann 1859 mit seinem Werk *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* die Welt vor neuen Herausforderungen, als er Hypothesen zu Primzhlen und über eine bereits bekannte Funktion - die Zetafunktion - aufstellte. Alle bis auf eine dieser Hypothesen wurden im Laufe der Zeit von bedeutenden Mathematikern bewiesen. Die übrige Fragestllung gilt heutzutage als Millenniumsproblem und wartet noch darauf, gelöst zu werden.

Die lebhafte Mathematik, die sich immer weiterentwickeln muss, hat mich während meines Mathematikstudiums immer fasziniert. Obwohl man bereits viel weiß und bewiesen hat, ist diese Wissenschaft noch nicht ausgereizt und steht noch heute, im Zeitalter von elektronischer Hilfe und diversen Computerprogrammen, vor scheinbar noch unlös-

baren Problemen. Gerade dieses Millenniummsproblem hat mich zum Verfassen dieser Diplomarbeit angeregt. Zweifellos gibt es verschiedene Zugänge, um sich dieser Thematik anzunähern. Die Mutter der Zetafunktion - die arithmetischen Funktionen - soll mir daher einen passenden Zugang schaffen. Diese Funktionen sollen eine Basis geben, die es ermöglicht, sich leichter mit der Zetafunktion beschäftigen und tiefere Einblicke gewährleisten zu können.
Kapitel 2 hat einführenden Charakter. Hierbei werden Grundlagen vorausgeschickt, die wir in der Arbeit laufend verwenden werden, wie die Definition der natürlichen Zahlen und die der Primzahlen. Außerdem wird in diesem einleitenden Kapitel die Primfaktorzerlegung und der Fundamentalsatz der Arithmetik kurz vorgestellt, was unerlässlich für die kommenden Kapitel sein wird.
Im Kapitel 3 folgt zunächst eine von zwei zentralen Definitionen dieser Arbeit, woran sich gleich einige Beispiele zur Veranschaulichung dieser behandelten Funktionen anschließen. Mit Untersuchungen zur Multiplikativität und Additivität wollen wir wichtige Eigenschaften arithmetischer Funktionen aufzeigen, um im sechsten Teil des Kapitels die multiplikativen Funktionen zu einer Gruppe zusammenfassen zu können. Der vierte Teil des Kapitels stellt einen kleinen Exkurs dar, der uns ermöglichen soll, mit unendlichen Reihen zu hantieren. Als sehr interessantes Unterkapitel zeigt sich die Faltung, welche eine neue Verknüpfung und damit Verwendungsmöglichkeiten der behandelten Funktionen darstellt. Ein kurzer Ausblick auf weitere arithmetische Funktionen bildet den letzten Teil des Kapitels.
Da die vorliegende Diplomarbeit aus zwei thematischen Teilen besteht, wird in Kapitel 4 die Zetafuktion vorgestellt. Wir beginnen hierbei mit zwei verschiedenen Primzahlbeweisen, um Rückschlüsse auf die Zetafunktion ziehen zu können und die Motivation dahinter zu verstehen. Der historische Aspekt geht im zweiten Teil hervor, indem wir versuchen, einen kurzen Einblick in Bernhard Riemanns Meisterwerk zu geben. Im Anschluss nähern wir uns der Zetafunktion durch den Beweis ihrer Funktionalgleichung an. Abschließend wird auf die noch unbewiesene Vermutung Riemanns eingegangen und deren Problemstellung erläutert.

Kapitel 2

Grundlagen

Bevor wir uns den Arithmetischen Funktionen zuwenden und zeigen, was man mit diesen speziellen Funktionen alles machen kann, wollen wir einige grundsätzliche Dinge klären, die sich durch die gesamte Arbeit ziehen werden. Ich beziehe mich bei diesen Erklärungen und Definitionen vor allem auf [2] S. 2ff. und [1] S. 1ff..

Zuallererst bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}$, die bei 1 startet. Weitere Eigenschaften der natürlichen Zahlen werden in dieser Arbeit als bekannt vorausgesetzt und nicht näher erläutert.

Da diese Arbeit in der Analytischen Zahlentheorie gipfelt, brauchen wir auch Primzahlen, die für die Zahlentheorie unabdingbar sind. Somit wird das Symbol p ausschließlich für Primzahlen genutzt. Die Menge aller Primzahlen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet. Zur Wiederholung möchten wir an dieser Stelle die Definition einer Primzahl anführen.

Definition: Sei $p \in \mathbb{Z}, p > 1$. Wenn p nur die Teiler 1, -1, p, $-p$ besitzt, dann heißt p Primzahl.

Bemerkung: Wir wollen darauf hinweisen, dass 1 keine Primzahl ist.

Später werden wir auch zwei verschiedene Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen anführen, die uns dann den Anstoß für die Betrachtung der Riemannschen Zeta-Funktion liefern sollen.

Ein weiterer wichtiger Satz, den wir für die vorliegende Arbeit brauchen, ist der Fundamentalsatz der Arithmetik, der besagt, dass jede von 1 verschiedene natürliche Zahl als ein Produkt endlich vieler Primzahlen darstellbar ist. Dieses Produkt ist auch eindeutig, wenn man die in ihr vorkommenden Primzahlen der Größe nach ordnet. Auch hier werden wir den Beweis nicht anführen, da dieser in der Standardvorlesung zur Zahlentheorie vorkommt und als bekannt vorausgesetzt wird.

Aus diesem Fundamentalsatz gewinnt man auch die so genannte kanonische Primfaktorzerlegung. Sie kommt laufend in dieser Arbeit vor und wird auch oft als Hilfe für Beweise herangezogen. Sie verkürzt den Fundamentalsatz und besagt, dass die Primzahlen, die in der Produktzerlegung von n gemäß desselben Satzes vorkommen, nicht verschieden sein müssen. Daher fasst man bei der kanonischen Primfaktorzerlegung von n gleiche Primfaktoren zusammen und schreibt kürzer:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k} = \prod_{\kappa=1}^{k} p_\kappa^{a_\kappa}.$$

Man beachte, dass die Menge aller Primzahlen mit $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ bezechnet wird. Daher ist auch folgende Notation nützlich

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(n)}, \tag{2.0.1}$$

wobei sich nun das Produkt über alle $p \in \mathbb{P}$ erstreckt, für die $\nu_p(n) \neq 0$ gilt. Der Exponent $\nu_p(n) \in \mathbb{N}_0$ in (2.0.1), der oft auch als Vielfachheit von p in n bezeichnet wird, ist 0 für alle $p \in \mathbb{P} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ und $\nu_p(n) = a_\kappa$, falls $p = p_\kappa$ für $1 \leq \kappa \leq k$.

Zum Beispiel lautet die Primfaktorzerlegung von 72 daher $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, die kanonische Primfaktorzerlegung hingegen $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

Kapitel 3

Arithmetische Funktionen

Im folgenden Kapitel stellen wir nun arithmetische Funktion vor. Wir werden zunächst einige typische Beispiele solcher anführen. Anschließend definieren wir ein weiteres Unterscheidungsmerkmal arithmetischer Funktionen im Hinblick auf die Multiplikatitvität und Additivität. Dann schieben wir mit der Produktdarstellung unendlicher Reihen ein Kapitel ein, das uns spätere Beweisführungen erleichtern wird. Weiterführend werden wir uns mit der Faltung beschäftigen, was eine sehr wichtige Verknüpfung von arithmetischen Funktionen darstellt, um dann noch algebraische Zusammenhänge anzustellen und zu zeigen, dass die multiplikativen arithmetischen Funktionen eine Gruppe bilden. Da sich diese Arbeit insbesondere mit der Riemannschen Zetafunktion beschäftigt, geben wir Anwendungsbereiche anderer arithmetischer Funktionen nur fragmentarisch in einem Ausblick an.

Wir beziehen uns in diesem Kapitel vor allem auf [2] S. 35 ff., wo sich auch die Produktdarstellung unendlicher Reihen finden lässt. Weitere Quellen für dieses Kapitel sind [1] S. 18 f. und [16] S. 13 ff., eine Vorlseung zur Zahlentheorie von Otto Forster an der Uni München im Sommersemester 2014 [8] und die Vorlesung zur Analytischen Zahlentheorie von Dietrich Burde an der Uni Wien aus dem Jahr 2005 [3]. Eine weitere Quelle liefert [14] S. 283 ff..

3.1 Definition

Eine zahlentheoretische oder arithmetische Funktion ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dies ist nichts anderes als eine komplexwertige Folge, also ein Element des komplexen Vektorraumes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, der in dieser Arbeit mit Z (folgend der Standardliteratur) bezeichnet wird.

Das Verhalten einer arithmetischen Funktion lässt sich zumeist grob beschreiben, indem man zu den arithmetischen Mitteln $\frac{1}{N}(f(1)+f(2)+...+f(N))$ übergeht. So kann man die Wachstumsordnung der arithmetischen Mittel genau bestimmen und die Irregularitäten werden gedämpft.

3.2 Typische Beispiele

Nun möchten wir einige Beispiele von arithmetischen Funktionen anführen:

a) $\mathbf{0}(n) := 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$

b) $\varepsilon(1) := 1$ und $\varepsilon(n) := 0$, für alle $n \geq 2$

c) sei α aus $\mathbb{R}$ beliebig, wir definieren $i_\alpha(n) := n^\alpha$ für jedes $n \in \mathbb{N}$; insbesondere gilt $i_1 = \mathrm{id}$ und $i_0(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

d) die Teileranzahlfunktion $\tau(n) := \sum\limits_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d \mid n}} 1$, für $n \in \mathbb{N}$, die angibt wie viele Teiler eine Zahl n hat

e) die Teilersummenfunktion $\sigma(n) := \sum\limits_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d \mid n}} d$, für $n \in \mathbb{N}$, die die Summe aller Teiler einer Zahl n angibt

f) die Möbiusfunktion $\mu(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ (-1)^j, & \text{falls } n = p_1 \cdots p_j \text{ mit paarweise verschiedenen Primzahlen } p_l \ (l = 1, \ldots, j) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

g) die Eulersche Phifunktion $\varphi(n) := \#\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq n, \mathrm{ggT}(j,n) = 1\}$, die für jede natürliche Zahl n angibt, wie viele zu n teilerfremde natürliche Zahlen es gibt, die nicht größer als n sind

h) die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(n) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, für $\mathrm{Re}(s) > 1$

Bemerkung: Zu (h) müssen wir noch genauere Betrachtungen anstellen. Da die Riemannsche Zetafunktion eine unendliche Summe darstellt, müssen wir uns fragen, warum dies eine definierte Zahl ist. Darum werden wir nun die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ für $\mathrm{Re}(z) > 1$ nachweisen, wobei $z \in \mathbb{C}$. Wir werden uns hierbei an [5] S. 222f. und [15] S. 147 halten.

Schreiben wir nun $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$, so gilt nach der Definition der komplexen Potenz (siehe [9])

$$|n^z| = |e^{z \log n}| = |e^{(x+iy) \log n}| = |e^{x \log n}| \cdot \underbrace{|e^{iy \log n}|}_{=1} = n^x.$$

Wir können nun ganz einfach sehen, dass der Imaginärteil weggefallen ist und $|n^z| = n^{\mathrm{Re(z)}}$ gilt. Daher gibt es für z mit $\mathrm{Re}(z) > 1$ ein reelles $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon$. Wegen $|\frac{1}{n^z}| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re(z)}}} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ ist daher $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^z}|$.

Nach dem Integraltest für Reihen konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ wegen $\varepsilon > 0$, denn das Integral-Vergleichskriterium für Reihen besagt (siehe Forster S. 222), wenn $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion ist, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergiert.}$$

Daraus folgt nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} < \infty$$

und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergent, ja sogar absolut konvergent.
(Man beachte $|n^z| = n^{\mathrm{Re}(z)}$ für $\mathrm{Re}(z) > 1$.)

3.3 Multiplikative und additive Funktionen

Wie wir sehen, gibt es zahlreiche arithmetische Funktionen. Um diese noch genauer zu untersuchen, führen wir weitere Definitionen und Verknüpfungen ein. Dazu müssen wir aber vorher noch eine wichtige Teilmenge von Z anführen, die mit M abgekürzt wird. Diese Teilmenge M besteht aus den multiplikativen Funktionen.

Eine zahlentheoretische Funktion f heißt *multiplikativ*, wenn

$$f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2) \tag{3.3.1}$$

für alle teilerfremden $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt. Wenn dies auch für nicht teilerfremde Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt, dann heißt f *streng multiplikativ*. Jede streng multiplikative Funktion ist somit automatisch multiplikativ.

Beispiele solcher multiplikativen Funktionen sind τ, σ und φ. Die Nullfunktion $\mathbf{0}$, ε und alle i_α mit $\alpha \in \mathbb{R}$ sind sogar streng multiplikativ.

3.3.1 Proposition

(i) Für jedes $f \in M \backslash \{\mathbf{0}\}$ gilt $f(1) = 1$

(ii) Für $f \in Z$ gilt die Äquivalenz

$$f \in M \iff f(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} f(p^{\nu_p(n)}), \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Ad (i): Nach (3.3.1) ist $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$ und daher entweder $f(1) = 1$ oder $f(1) = 0$. Die zweite Möglichkeit liefert $f(n) = f(n \cdot 1) = f(n)f(1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f = \mathbf{0}$.

Ad (ii): "$\Rightarrow$": Ist $f \in M$, so folgt die behauptete Zerlegung von $f(n)$, indem man (3.3.1) endlich oft auf die Produktzerlegung $\prod\limits_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(n)}$ von n anwendet und $f(1) = 1$ bei $f \neq \mathbf{0}$ beachtet, was o.B.d.A. vorausgesetzt werden darf.

" $\Leftarrow$ " folgt aus der Kommutivität der Multiplikation.

$\square$

Zu den multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen gibt es natürlich auch die additiven $f \in Z$, die in der Zahlentheorie auch von großer Bedeutung sind. Ihre Menge wird mit A abgekürzt.

Dabei heißt $f \in Z$ *additiv*, wenn

$$f(n_1 n_2) = f(n_1) + f(n_2) \tag{3.3.2}$$

für alle teilerfremden $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt. Wenn dies auch für nicht teilerfremde Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ zutrifft, dann heißt f *streng additiv*.

Beispiele socher additiven Funktionen sind die Anzahl der Primfaktoren $\Omega(n)$, die Anzahl der verschiedenen Primteiler $\omega(n)$ und der natürliche Logarithmus $\log(n)$ von $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere sind Ω, log und die Nullfunktion $\mathbf{0}$ mit $\mathbf{0}(n) := 0$ sogar streng additiv. (siehe [10])

Bemerkung: Zusätzlich ist noch zu sagen, dass Teil (ii) der obigen Proposition einen Grund für die Bedeutung der multiplikativen arithmetischen Funktionen aufzeigt: Sie sind durch ihre Werte an den sämtlichen Primzahlpotenzen bereits vollständig festgelegt. Dies folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Ist nämlich f streng additiv oder streng multiplikativ, so ist f schon durch die Werte $f(p)$ für $p \in \mathbb{P}$ festgelegt.
Ist nämlich $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ mit paarweise verschiedenen $p_\kappa \in \mathbb{P}$ und $a_\kappa \in \mathbb{N}$ die kanonische Darstellung von $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$f(n) = \sum_{\kappa=1}^{k} f(p_\kappa^{a_\kappa}), \text{ falls } f \in A,$$
$$f(n) = \prod_{\kappa=1}^{k} f(p_\kappa^{a_\kappa}), \text{ falls } f \in M.$$

Bei streng additiven bzw. streng multiplikativen Funktionen f gilt noch zusätzlich $f(p^a) = af(p)$ bzw. $f(p^a) = f^a(p)$.

3.4 Produktdarstellung unendlicher Reihen

Dieser Abschnitt soll als Hilfsmittel dienen, damit wir später mit dieser Produktdarstellung arbeiten können und uns nicht mit komplizierten Termen herumschlagen müssen.

3.4.1 Satz

Ist $f \in Z$ multiplikativ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergent, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu). \tag{3.4.1}$$

Bemerkung: Mit folgendem Hilfssatz wollen wir den anschließenden Beweis besser verständlich machen.

3.4.2 Hilfssatz

Ist $f \in Z$ reellwertig, nichtnegativ und multiplikativ und konvergiert $\sum\limits_{\nu \geq 0} f(p^\nu)$ für jede Primzahl p, so gilt für alle reellen x

$$\sum_{n \leq x} f(n) \leq \prod_{p \leq x} \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu). \tag{3.4.2}$$

Beweis. (des Hilfssatzes)
O.B.d.A sei $f \neq \mathbf{0}$. Für reelles $x < 2$ ist (3.4.2) trivial wegen $f(1) = 1$ und der Konvention über leere Produkte. Man ordnet einem Produkt, bei dem der Startwert größer als der Endwert ist, den Wert 1 zu. (siehe [17], 5.35)
Nun führen wir eine neue Notaion ein, um die Beweisführung leichter zeigen zu können, wie wir später sehen werden. Sei nun $x \geq 2$ und seien $p_1, \ldots, p_k$ genau jene verschiedenen Primzahlen, die nicht größer sind als x. Dann ist

$$\prod_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu) = \prod_{\kappa=1}^{k} \sum_{a_\kappa=0}^{\infty} f(p_\kappa^{a_\kappa}) = \sum_{(a_1,\ldots,a_k) \in \mathbb{N}_0^k} f(p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}) \tag{3.4.3}$$

Im letzten Schritt wurde die absolute Konvergenz der Reihen $\sum f(p^\nu)$ und die Multiplikativtät von f ausgenützt. In (3.4.3) kommen (nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik) rechts unter den $p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ mindestens alle natürlichen $n \leq x$ vor. Daraus folgt dann (3.4.2). $\square$

Beweis. (des Satzes)
Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir beginnen mit (3.4.3) und sehen, dass die Summe rechts von der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum{}' f(n) \tag{3.4.4}$$

ist. $\sum'$ bedeutet, dass die Summation genau über die $n \in \mathbb{N}$ erfolgt, die von mindestens einer Primzahl, die größer als x ist, geteilt wird. Diese n sind also größer als x und $|\sum' f(n)|$ wird beliebig klein für große x.
Nun nehmen wir in (3.4.3)

$$\prod_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu)$$

heraus und setzen ein.

Sei nun ein reelles $\varepsilon > 0$. Dann folgt die Ungleichung

$$|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu)| \leq \sum{}' |f(n)|, \tag{3.4.5}$$

wobei $\sum' \mid f(n) \mid < \varepsilon$ für alle $x > x_0(\varepsilon)$. Somit folgt für $x \to +\infty$ (3.4.1). □

3.5 Faltung

Die Faltung arithmetischer Funktionen wurde nach dem deutschen Mathematiker Peter Gustav Dirichlet benannt, deshalb spricht man auch von der Dirichlet-Faltung oder dem Dirichlet-Produkt. Dies ist eine Verknüpfung in Z, die es nun zu definieren gilt.

3.5.1 Definition

Für $f, g \in Z$ sei

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) g(d) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d}), \tag{3.5.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Man beachte, dass mit $d \mid n$ gemeint ist, dass man über alle positiven Teiler d von n summieren muss. Somit ist auch 1 und n eingeschlossen. Die zahlentheoretische Funktion $f * g$ heißt *Dirichlet-Faltung* von f mit g. Man beachte, dass die Faltung multiplikativer Funktionen wieder multiplikativ ist, was wir nun im nächsen Satz zeigen wollen.

3.5.2 Satz

Es seien f, g multiplikativ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, dann gilt nach Definition

$$(f * g)(mn) = \sum_{c|mn} f(c)g(\frac{mn}{c}).$$

Jeder Teiler $c \mid mn$ lässt sich aber in der Form $c = ab$, mit $a \mid m$ und $b \mid n$ schreiben. Wegen $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ ist

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}) = 1.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}(f * g)(mn) &= \sum_{\substack{a|m\\b|n}} f(ab)g(\frac{mn}{ab}) = \sum_{\substack{a|m\\b|n}} f(a)f(b)g(\frac{m}{a})g(\frac{n}{b})\\ &= \sum_{a|m} f(a)g(\frac{m}{a}) \cdot \sum_{b|n} f(b)g(\frac{n}{b}) = (f * g)(m)(f * g)(n).\end{aligned}$$

Die Faltung streng multiplikativer Funktionen ist jedoch im Allgemeinen nicht streng multiplikativ. Man betrachte zum Beispiel $\tau(2) = 2$, aber $\tau(4) = 3$, also ist τ nicht vollständig multiplikativ.

Beispiele: Zur Veranschaulichung können wir nun Werte der Faltung für kleine n berechnen:

$$\begin{aligned}(f * g)(1) &= f(1)g(1)\\ (f * g)(2) &= f(1)g(2) + f(2)g(1)\\ (f * g)(3) &= f(1)g(3) + f(3)g(1)\\ (f * g)(4) &= f(1)g(4) + f(2)g(2) + f(4)g(1).\end{aligned}$$

Damit sich manche Rechnungen mit der Faltung zweier Funktionen vereinfachen, bemerken wir, dass man die Summe rechts in (3.5.1) auch anders notieren kann. Man kann sie nämlich in die symmetrische Form

$$\sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{N}^2\\cd=n}} f(c)g(d) \tag{3.5.2}$$

setzen.

Nun wollen wir zeigen, dass $(Z, *)$ eine kommutative Halbgruppe bildet. Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass das Assoziativgesetzt gilt, die Existenz eines neutralen Elements nachweisen und die Kommutivität prüfen, was wir mit folgender Proposition aufzeigen wollen.

3.5.3 Proposition

Für beliebige $f, g, h \in Z$ gilt

(i) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(ii) $f * \varepsilon = f$,

(iii) $f * g = g * f$.

Beweis. Zuerst zeigen wir (i), das heißt die Assoziativität.
Seien f, g, h drei arithmetische Funktionen. Für (i) schreibt man bei $n \in \mathbb{N}$ die Summe

$$\sum(n) := \sum_{\substack{(b,c,d)\in\mathbb{N}^3 \\ bcd=n}} f(b)g(c)h(d)$$

unter Beachtung von (3.5.2) zunächst folgendermaßen um

$$((f * g) * h)(n) = \sum_{\substack{(a,d)\in\mathbb{N}^2 \\ ad=n}} (f * g)(a)h(d) = \sum_{\substack{(a,d)\in\mathbb{N}^2 \\ ad=n}} h(d) \sum_{\substack{(b,c)\in\mathbb{N}^2 \\ bc=a}} f(b)g(c) = \sum_{\substack{(b,c,d)\in\mathbb{N}^3 \\ bcd=n}} f(b)g(c)h(d),$$

Weiters:

$$(f * (g * h))(n) = \sum_{\substack{(b,l)\in\mathbb{N}^2 \\ bl=n}} f(b)(g * h)(l) = \sum_{\substack{(b,l)\in\mathbb{N}^2 \\ bl=n}} f(b) \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{N}^2 \\ cd=l}} g(c)h(d) = \sum_{\substack{(b,c,d)\in\mathbb{N}^3 \\ bcd=n}} f(b)g(c)h(d).$$

Somit gilt für $(Z, *)$ das Assoziativgesetz.

Als nächsten Schritt prüfen wir die Existenz eines neutralen Elements nach.
Bei (ii) müssen wir $(f * \varepsilon)(n)$ nach (3.5) berechnen, also

$$(f * \varepsilon)(n) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})\varepsilon(d) = f(n)\varepsilon(1) = f(n), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wegen $\varepsilon(d) = 0$ für $d > 1$, wobei nur der Summand $f(n)\varepsilon(1) = f(n)$ übrigblieb.
ε ist also das neutrale Element bezüglich $*$, sofern die Kommutativität gezeigt wird, da auch $\varepsilon * f = f$ gelten müsste. Dieses Versäumnis werden wir nun nachholen und im nächsten Schritt die Kommutativität nachweisen.

Der Beweis für (iii) folgt direkt aus der Definition:

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{N}^2 \\ cd=n}} f(c)g(d) = \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2 \\ lm=n}} g(l)f(m) = (g * f)(n).$$

Somit ist $(Z, *)$ kommutativ. □

Diese Proposition zeigt uns daher, dass $(Z, *)$ eine *kommutative Halbgruppe mit Einselement* bildet. Bei (i) zeigt sich auch, dass die Klammersetzung bei der Faltung von endlich vielen arithmetischen Funktionen überflüssig ist.

Wir versuchen nun zu zeigen, dass die Menge der arithmetischen Funktionen Z bezüglich der beiden Verknüpfungen $+$ und $*$ einen nullteilerfreien kommutativen Ring mit Einselement, einen sogenannten *Integritätsring* bildet. Wegen der vorigen Proposition, brauchen wir nur mehr das Distributivgesetz und die Nullteilerfreiheit nachzuweisen.

3.5.4 Satz

$(Z, +, *)$ ist ein Integritätsring.

Beweis. Zunächst wollen wir dir Distributivität $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ beweisen.
Seien f, g, h drei arithmetische Funktionen und $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\begin{aligned} f * (g + h)(n) = \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{N}^2 \\ ab=n}} f(a) \cdot (g + h)(b) = \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{N}^2 \\ ab=n}} f(a) \cdot g(b) + \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{N}^2 \\ ab=n}} f(a) \cdot h(b) \\ = (f * g)(n) + (f * h)(n). \end{aligned}$$

Nun beweisen wir als nächsten und letzten Schritt die Nullteilerfreiheit. Hierbei müssen wir $f * g \neq \mathbf{0}$ bei $f, g \in Z\backslash\{\mathbf{0}\}$ zeigen.

Seien c_0 bzw. d_0 aus $\mathbb{N}$ jeweils kleinstmöglich gewählt mit $f(c_0) \neq 0, g(d_0) \neq 0$. Dann ist $(f * g)(c_0 d_0) = f(c_0)g(d_0) \neq 0$, also $f * g \neq \mathbf{0}$. Für $n = c_0 d_0$ reduziert sich die Summe (3.5.1) auf $f(c_0)g(d_0)$, weil $g(d) = 0$ für $d < d_0$ und $f(\frac{c_0 d_0}{d}) = 0$ für $d > d_0$ gilt. □

3.5.5 Inverse

Nun zeigen wir, wann ein $f \in Z$ bezüglich $*$ eine Inverse hat.

Satz

Für $f \in Z$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f(1) \neq 0$

(ii) Es gibt ein $g \in Z$ mit $f * g = \varepsilon$.

Bemerkung: Für g wie in (ii) gilt $g(1) = \frac{1}{f(1)}$, also $g(1) \neq 0$.

Beweis. Sei $f(1) \neq 0$, dann kann man $g \in Z$ auf $*$ rekursiv definieren. Man setzt zuerst $g(1) := \frac{1}{f(1)}$ und hat damit

$$(f * g)(1) = \sum_{d|1} f(d)g(\frac{1}{d}) = f(1)g(1) = 1 = \varepsilon(1).$$

Ist dann $n > 1$ und $g(d)$ schon für $d = 1, \ldots, n-1$ definiert, so setzt man

$$g(n) := -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} f(\frac{n}{d})g(d).$$

nach 3.5.1 ergibt sich daraus

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = f(1)g(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)g(\frac{n}{d}) = 0 = \varepsilon(n).$$

Somit folgt (i) aus (ii).
Ist andererseits (ii) vorausgesetzt, so ist nach 3.5.1 insbesondere $f(1)g(1) = 1$, also $f(1) \neq 0$, das heißt es folgt (i). □

Bemerkung: Man beachte, dass die Inverse g, die im obigen Beweis konstruiert wurde, eindeutig ist. Würde neben $f * g = g * f = \varepsilon$ auch noch $f * h = h * f = \varepsilon$ gelten, so hätte man $f * g = f * h = \varepsilon$ und somit

$$g = g * \varepsilon = g * (f * h) = (g * f) * h = \varepsilon * h = h.$$

Somit existiert zu jedem $f \in Z$ mit $f(1) \neq 0$ bezüglich $*$ genau eine Inverse in Z, die mit f^{-1} bezeichnet wird und für die $f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} \neq 0$ gilt.

Wir führen nun eine Abkürzung ein.

$$Z_1 := \{f \in Z : f(1) \neq 0\}.$$

Offenbar ist Z_1 bezüglich $*$ abgeschlossen, man hat ja nur $(f * g)(1) = f(1)g(1) \neq 0$ für $f, g \in Z_1$ zu beachten. Mit dieser Beobachtung und mithilfe von 3.5.3 kommen wir zur Erkenntnis, dass $(Z_1, *)$ eine *abelsche* (oder *kommutative*) *Gruppe* ist.

3.5.6 Definition

Sei $f \in Z$ eine arithmetische Funktion und i_0 nach 3.2c definiert. So heißt $F := i_0 * f$, die *summatorische Funktion* von f. Da $i_0(d) = 1$ für alle $d \in \mathbb{N}$, ist die Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, nach 3.5.1 durch

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{3.5.3}$$

gegeben.

Es wird hierbei über alle positiven Teiler d von n summiert.

Zum Beispiel ist

$$F(2) = f(1) + f(2),$$

$$F(4) = f(1) + f(2) + f(4),$$

$$F(6) = f(1) + f(2) + f(3) + f(6).$$

Beispiel: Die summatorische Funktion der Funktion $i_1 = \mathrm{id}$ (vgl. 3.2c) ist die Teilersummenfunktion

$$\sigma(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n}} d.$$

3.5.7 Satz

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine multiplikative arithmetische Funktion und $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die summatorische Funktion von f, dann ist auch F multiplikativ.

Beweis. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ teilerfremd, dann gilt

$$\begin{aligned} F(m_1 m_2) &= \sum_{d \mid m_1 m_2} f(d) \\ &= \sum_{d_1 \mid m_1} \sum_{d_2 \mid m_2} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1 \mid m_1} \sum_{d_2 \mid m_2} f(d_1) f(d_2) \\ &= \sum_{d_1 \mid m_1} f(d_1) \sum_{d_2 \mid m_2} f(d_2) = F(m_1) F(m_2). \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Hier wird bereits 3.6.5 verwendet, dessen Beweis wir erst später durchführen werden.

Beispiel: Da $i_1(n) = n$ multiplikativ ist, ist auch die Teilersummenfunktion $\sigma(n) = \sum\limits_{d \mid n} d = \sum\limits_{d \mid n} i_1(d)$ multiplikativ.

3.5.8 Satz

Für $f \in Z$ gilt die Äquivalenz

$$f \in M \iff F \in M.$$

Beweis. $\Rightarrow$: wurde bereits im Satz 3.5.7 gezeigt.
$\Leftarrow$: wegen $i_0(1) = 1 \neq 0$ ist i_0 gemäß 3.5.5 invertierbar. Setzt man nun $F \in M$ voraus, so ist $f = i_0^{-1} * (i_0 * f) = i_0^{-1} * F$ nach Satz 3.5.7 multiplikativ. □

3.6 Die Gruppe der multiplikativen Funktionen

Wir haben bereits in 3.5 bewiesen, dass die Menge Z_1 bezüglich der Faltung abgeschlossen ist. Nun möchten wir das auch für $M \backslash \{\mathbf{0}\}$ zeigen. Dazu müssen wir zunächst einige Hilfssätze vorausschicken. Der erste bezieht sich wiederum auf die Primfaktorzerlegung, Hilfssatz 2, 3 und 4 handeln von der Teilbarkeit.

3.6.1 Hilfssatz 1

Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: m teilt n genau dann, wenn $\nu_p(m) \leq \nu_p(n)$ für alle $p \in \mathbb{P}$ zutrifft.

Beweis. Es ist $m \mid n$ gleichwertig mit der Existenz eines $l \in \mathbb{N}$, für das $n = lm$ gilt. Aus dieser Gleichung folgt mit (2.0.1) und dem Fundamentalsatz $\nu_p(n) = \nu_p(l) + \nu_p(m)$ für alle $p \in \mathbb{P}$, wegen $\nu_p(l) \in \mathbb{N}_0$ insbesondere $\nu_p(n) \geq \nu_p(m)$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Hat man andererseits diese letzte Tatsache, so sind die Differenzen $\delta_p := \nu_p(n) - \nu_p(m)$ nichtnegative ganze

Zahlen für alle $p \in \mathbb{P}$, aber höchtens endlich viele δ_p sind positiv. Deswegen ist $\prod_p p^{\delta_p} \in \mathbb{N}$. Bezeichnet man dieses Produkt nun mit l, so gilt damit $lm = n$. □

Die folgenden Sätze werden nur angeführt und nicht bewiesen. Die Beweise dazu kann man in [2] Kap. 1 §2,6 oder [12] Kap. 1, Satz 7 und Kap. 2, Lemma 8 und Satz 9 nachlesen.

3.6.2 Hilfssatz 2

Seien m, n_1, n_2 in $\mathbb{Z}$. Wenn $m \mid n_1 n_2$ und sind m, n_1 teilerfremd, so gilt: $m \mid n_2$.

3.6.3 Hilfssatz 3

Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{Z}$, dann sind äquivalent:

(i) $\mathrm{ggT}(p, n) = 1$

(ii) $p \nmid n$.

3.6.4 Hilfssatz 4

Es sei $p \in \mathbb{Z}, p > 1$. Dann sind äquivalent:

(i) p ist Primzahl

(ii) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$.

(iii) Wenn $p = xy$, mit $x, y \in \mathbb{Z}$, dann gilt: $x \in \{1, -1\}$ oder $y \in \{1, -1\}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wenn $p \mid a$, dann ist die Behauptung richtig. Sei also $p \nmid a$, daraus folgt nach 3.6.3, dass $\mathrm{ggT}(p, a) = 1$ und daraus folgt wiederum nach 3.6.2, dass $p \mid b$ gilt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Aus $p = xy$ folgt, dass $p \mid xy$ und nach (ii) $p \mid x$ oder $p \mid y$. Falls $p \mid x$, folgt daraus, dass $p \leq |x|$, andererseits gilt $p = |x||y| \geq |x|$. Nun sehen wir, dass $p = |x|$ gelten muss und daher ist $x \in \{-p, p\}$ und $y \in \{-1, 1\}$. Der Fall $p \mid y$ führt analog auf $y \in \{-p, p\}$ und $x \in \{-1, 1\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen $m \mid p$, mit $m \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ für das gilt: $p = mn$. Daher ist entweder $m \in \{-1, 1\}$ und daher $n \in \{-p, p\}$ oder $n \in \{-1, 1\}$ und $m \in \{-p, p\}$. Insbesondere ist $m \in \{-1, 1, -p, p\}$, also ist p eine Primzahl. □

Mit diesen Hilfssätzen lässt sich nun folgendes Lemma beweisen.

3.6.5 Lemma

Für teilerfremde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gelte $d \mid n_1 n_2$ mit einem $d \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar (d_1, d_2) natürlicher Zahlen mit $d_1 d_2 = d$, $d_1 \mid n_1$ und $d_2 \mid n_2$, wobei außerdem d_1, d_2 zueinander teilerfremd sind ebenso wie $\frac{n_1}{d_1}, \frac{n_2}{d_2}$.

Beweis. Nach 3.6.1 ist $\nu_p(d) \leq \nu_p(n_1 n_2)$ für alle $p \in \mathbb{P}$, insbesondere $\nu_p(d) = 0$ für $p \nmid n_1 n_2$. Bei $p \mid n_1 n_2$ ist nach 3.6.3 genau ein $\nu_p(n_i)$ Null und man hat entweder $\nu_p(d) \leq \nu_p(n_1), \nu_p(n_2) = 0$ oder $\nu_p(d) \leq \nu_p(n_2), \nu_p(n_1) = 0$, also

$$d = \prod_{p \mid d} p^{\nu_p(d)} = \prod_{p \mid n_1 n_2} p^{\nu_p(d)}.$$

Dies gilt wegen $\nu_p(d) = 0$ für $p \mid n_1 n_2$ mit $p > d$.
Weiters setzen wir gleich

$$\prod_{p \mid n_1 n_2} p^{\nu_p(d)} = \prod_{p \mid n_1} p^{\nu_p(d)} \cdot \prod_{p \mid n_2} p^{\nu_p(d)}.$$

Wir setzen nun $d_j := \prod_{p \mid n_j} p^{\nu_p(d)}$.

Aus der Definition wissen wir, dass $d_1 \mid n_1$ und $d_2 \mid n_2$. Haben nun d_1', d_2' dieselben Eigenschaften wie d_1, d_2 im Lemma, so folgt aus $d_1 d_2 = d_1' d_2'$ die Bedingung $d_1 \mid d_1'$. Um diese Behauptung leichter verständlich zu machen, wollen wir nochmals die Bedingungen für d_1, d_2 und d_1', d_2' herausschreiben.
Für $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ gilt

(i) $d_1 \cdot d_2 = d$

(ii) $d_1 \mid n_1$

(iii) $d_2 \mid n_2$

(iv) $\mathrm{ggT}(d_1, d_2) = 1$

Für $d_1', d_2' \in \mathbb{N}$ gilt:

(i)' $d_1' \cdot d_2' = d$

(ii)' $d_1' \mid n_1$

(iii)' $d_2' \mid n_2$

(iv)' $\mathrm{ggT}(d_1', d_2') = 1$

Nun sehen wir, dass $d_1 \cdot d_2 = d_1' \cdot d_2' = d$ (folgt aus (i) und (i)'). Wir wollen zeigen, dass $d_1 \mid d_1' \cdot d_2'$. Zunächst stellen wir die Behauptung auf, dass $d_1 \mid d_1'$, beziehungsweise müssen wir uns fragen, ob $\mathrm{ggT}(d_1, d_2') = 1$ zutrifft. Wir behaupten daher, dass $\mathrm{ggT}(d_1, d_2') = 1$ gilt. Aus (ii) und (iii)' folgt dies auch, da andernfalls der $\mathrm{ggT}(n_1, n_2) > 1$ wäre. Daraus ergibt sich mit (3.6.2), dass $d_1 \mid d_1'$. Also folgt nun, dass $d_1' = \delta d_1$ und daraus natürlich $d_2 = \delta d_2'$ mit $\delta > 0 \in \mathbb{Z}$. Wegen $\mathrm{ggT}(n_1, n_2)$ muss $\delta = 1$ gelten. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun den eigentlichen Beweis für die Abgeschlossenheit der Menge M der multiplikativen arithmetischen Funktionen, als auch für die Menge $M\backslash\{\mathbf{0}\}$ führen.

3.6.6 Proposition

Die Menge M der multiplikativen arithmetischen Funktionen und die Menge $M\backslash\{\mathbf{0}\}$ sind bezüglich der Faltung abgeschlossen.

Beweis. Seien $f, g \in M$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ zueinander teilerfremd, dann gilt mit Hilfe von Lemma 3.6.5

$$\begin{aligned}(f * g)(n_1 n_2) &= \sum_{d \mid n_1 n_2} f(\frac{n_1 n_2}{d}) g(d) = \sum_{\substack{(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2 \\ d_1 \mid n_1, d_2 \mid n_2}} f(\frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}) g(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1 \mid n_1} \sum_{d_2 \mid n_2} f(\frac{n_1}{d_1}) g(d_1) f(\frac{n_2}{d_2}) g(d_2) = \sum_{d_1 \mid n_1} f(\frac{n_1}{d_1}) g(d_1) \sum_{d_2 \mid n_2} f(\frac{n_2}{d_2}) g(d_2) \\ &= (f * g)(n_1)(f * g)(n_2).\end{aligned}$$

Seien nun $f, g \in M\backslash\{\mathbf{0}\}$, so ist $f(1) = 1$ und $g(1) = 1$ nach 3.3.1(i) und somit $(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1$, also hat man $f * g \in M\backslash\{\mathbf{0}\}$. □

Dies gilt auch für $f \in Z_1$.

Da $i_\alpha \in M\backslash\{\mathbf{0}\}$, ist $M\backslash\{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$.

3.6.7 Satz

$(M\backslash\{\mathbf{0}\}, *)$ ist eine Untergruppe der Gruppe $(Z_1, *)$.

Beweis. Da wir bereits wissen, dass $(Z_1, *)$ eine kommutative Gruppe bildet und aufgrund zuvor genannter Proposition, bleibt nur noch zu zeigen, dass $M\backslash\{\mathbf{0}\}$ zu jedem Element f auch die Inverse f^{-1} enthält. Klar ist zunächst, dass $f \in Z_1$ und f also nach 3.5.5 in Z_1 die Inverse f^{-1}, besitzt. Dazu definieren wir ein $g \in Z$ durch

$$g(n) := \prod_{p \mid n} f^{-1}(p^{\nu_p(n)}), \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3.6.1}$$

Nun ist $g(1) = 1$ und $g \in M$, was, wie man leicht sehen kann, aus der Primfaktorzerlegung folgt. Also ist $g \in M\backslash\{\mathbf{0}\}$ und somit $f * g \in M\backslash\{\mathbf{0}\}$ nach Proposition 3.6.6. Wenn nun $f * g = \varepsilon$ nachgewiesen ist, folgt $f^{-1} = g$ wegen der Eindeutigkeit des Inversen und somit $f^{-1} \in M\backslash\{\mathbf{0}\}$ wie gewünscht. Für $f * g = \varepsilon$ muss man nach der Bemerkung in 3.3.1 nur zeigen, dass die beiden multiplikativen Funkionen $f * g$ und ε auf den Primzahlpotenzen übereinstimmen. Nach (3.6.1) gilt für alle $j \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{P}$

$$(f * g)(p^j) = \sum_{h=0}^{j} f(p^{j-h})g(p^h) = \sum_{h=0}^{j} f(p^{j-h})f^{-1}(p^h) = f * f^{-1}(p^j) = \varepsilon(p^j).$$

□

3.7 Ausblick

Abschließend werden wir nun einen kurzen Ausblick auf weitere arithemtische Funktionen wagen, welche wir in dieser Arbeit nicht näher studieren werden.

Die Möbiussche Funktion μ ist auch eine sehr bekannte zahlentheoretische Funktion, die nach dem deutschen Mathematiker August Ferdinand Möbius benannt wurde. Definiert wurde sie bereits in 3.2f. Hier wollen wir noch weitere Eigenschaften anführen.

a) μ ist multiplikativ,

b) Für jede Primzahl p gilt $\mu(p) = -1$,

c) für jede Quadratprimzahl, also für jedes ganze $j \geq 2$ gilt $\mu(p^j) = 0$,

d) die summatorische Funktion der Möbiusfunktion ist $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Die Summatorische Funktion ist definiert als eine Faltung mit i_0. Das bedeutet eigentlich, dass $i_0 * \mu = \varepsilon$, also $i_0 = \mu^{-1}$. Hieraus folgt dann die *Möbiussche Umkehrformel*, denn $f = \varepsilon * f = (\mu * i_0) * f = \mu * (i_0 * f) = \mu * F$.

Anders ausgedrückt sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine arithmetische Funktion und $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ ihre summatorische Funktion, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})F(d).$$

Ähnliche Aussagen kann man auch über die Eulersche Phifunktion treffen. Die Funktion $\varphi(n)$ ist multiplikativ und es gilt $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Die Eulersche Phifunktion hängt auch mit der Müfunktion zusammen. Für $n \geq 1$ gilt

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}.$$

Für $n \geq 2$ gilt die *Eulersche Produktformel*

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}).$$

Außerdem hat die Eulersche Phifunktion die Eigenschaften

a) $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$, für $p \in \mathbb{P}$ und $n \geq 1$,

b) $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$ für $n \geq 1$,

c) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}$, wobei $d = \mathrm{ggT}(m, n)$,

d) $m \mid n \Rightarrow \varphi(m) \mid \varphi(n)$,

e) $\varphi(n)$ ist gerade für alle $n \geq 3$.

Weiters kann man sich noch mit der Verallgemeinerung der Dirichlet-Faltung beschäftigen. Seien α und β zwei arithmetische Funktionen. Wir definieren nun für $D \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $f : D \to \mathbb{N}$

$$(\alpha \circ \beta)(n) := \sum_{\substack{f(x,y)=n \\ (x,y)\in D}} \alpha(x)\beta(y).$$

Wir können wiederum zeigen, dass dies zusammen mit der üblichen Addition einen kommutativen Ring mit Einselement bildet. Die Kommutativität der Verknüpfung $\circ$ wird mit erreicht durch die Forderung $(x, y) \in D$, daher auch $(y, x) \in D$ und $f(x, y) = f(y, x)$.

Die Assoziativität von $\circ$ zeigt man durch folgende Forderung: Mit $(x, y), (f(x, y), z) \in D$ gilt auch $(y, z), (x, f(y, z)) \in D$ und $f(f(x, y), z) = f(x, (y, z))$.

Wenn für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $(x, 1), (1, x) \in D$ und $f(x, 1) = (1, x) = x$, so ist die Existenz eines Einselements bewiesen.

Nun müssen wir noch die Möglichkeit ausschließen, dass $f(x, y) = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ unendlich viele Lösungen hat. Die Summe, welche $(\alpha \circ \beta)(n)$ definiert, wäre nicht endlich. Um dem entgegenzuwirken gilt $x \mid f(x, y)$ und $y \mid f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$.
Daraus ergeben sich noch weitere Produkte, wie zum Beispiel das kgV-Produkt, das Lucas-Produkt und das Cauchy-Produkt, die wir aber an dieser Stelle nicht genauer studieren werden.

Kapitel 4

Die Riemannsche Zetafunktion

Die Riemannsche Zetafunktion bildet den zweiten Teil dieser Arbeit. Im Folgenden werden wir ausgehend von zwei unterschiedlichen Primzahlbeweisen die Zetafunktion vorstellen. Dabei erwähnen wir auch Bernhard Riemanns Arbeit und seine Ideen, wobei nur auf eine - die Funktionsgleichung - eingegangen wird.

Die wichtigsten Quellen sind hierbei Riemanns Arbeit selbst [13] und Vorlesungen von Otto Forster von der Universität in München [6], sowie [7], wo sich unter anderem Beweise zur Funktionalgleichung finden lassen. Außerdem bildet die klassische Literatur zu diesem Thema eine fundierte Grundlage, wie bei [14] S. 15 ff., [1] 1 ff., [2] S. 301 ff und 38 f., [11] S. 1 ff. und [4] S. 1 ff..

4.1 Primzahlenbeweise

Die Riemannsche Zetafunktion und die Primzahlverteilung gehen Hand in Hand. Bereits der griechische Mathematiker Euklid bewies in der Antike, dass die Folge der Primzahlen nicht abbricht.

4.1.1 Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen (Euklid)

Beweis. Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen. Wir bezeichnen diese Primzahlen mit $p_1, p_2, \dots, p_r$. Die natürliche Zahl

$$n := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$$

ist durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_r$ teilbar, weil sonst nach der Transitivitätsregel ($a \mid b$ und $a \mid b+c$ folgt $a \mid c$) auch 1 durch diese Primzahl teilbar wäre. Da aber nach dem Fundamentalsatz jede Zahl größer als 1 durch mindestens eine Primzahl teilbar ist, existiert mindestens eine weitere Primzahl. Dies widerspricht jedoch der Annahme, dass $p_1, p_2, \dots, p_r$ die einzigen Primzahlen sind. $\square$

Auch der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler hat sich mit Primzahlen beschäftigt und 1737 einen Beweis für die Unendlichkeit dieser gefunden. Dieser Beweis war richtungsweisend für den Einsatz analytischer Hilfsmittel in der Zahlentheorie. Liefert der Beweis von Euklid keine Aussagen über die "Dichte"der Primzahlmenge in $\mathbb{N}$, so erhält man bei Eulers Beweis einen Hinweis, wie man genauere Aussagen über die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen unterhalb der Schranke x erhalten könnte. Die Anzahlfunktion ist folgendermaßen definiert:

$$\pi(x) = \#\{p : p \leq x\}.$$

Nun wollen wir Eulers Beweis ausführen, damit der Unterschied der beiden Beweise klar erkennbar wird und wir anschließend mit der Zetafunktion arbeiten können.

Beweis. Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Man bilde das Produkt

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_{i=1}^{k} (1 + \frac{1}{p_i} + (\frac{1}{p_i})^2 + (\frac{1}{p_i})^3 + \cdots)$$

und multipliziere die Klammern aus. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen ergibt sich dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Summand $\frac{1}{n}$ genau einmal. Daher ist

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{4.1.1}$$

Diese Summe erinnert uns aber an die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ und, da diese divergiert, ist unsere Schlussfolgerung unmöglich. Somit haben wir einen Widerspruch und die Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, ist widerlegt. □

Nun wollen wir als nächsten Schritt zeigen, wie nahe nun die Riemannsche Zetafunktion mit den zuvor getroffenen Aussagen zusammenhängt. Es gilt nun zu prüfen, ob das unendliche Produkt $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^s}}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergent ist.

Beweis. Zunächst erweitern wir den Bruch und schreiben ihn um:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} = \frac{1 - \frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{p_i^s}}{1 - \frac{1}{p_i^s}} = 1 + \frac{\frac{1}{p_i^s}}{1 - \frac{1}{p_i^s}} = 1 + \frac{1}{p_i^s - 1}.$$

Nun können wir auch das Produkt gleichermaßen umformen:

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} = \prod_{i=1}^{N} (1 + \frac{1}{p_i^s - 1}).$$

Wir betrachten nun den Betrag des Produkts, um die absolute Konvergenz zu überprüfen.

$$1 + \left|\frac{1}{p_i^s - 1}\right| = 1 + \frac{1}{|p_i^s - 1|}.$$

Das heißt:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} \quad \text{abs. konv.} \Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{p_i^s - 1}) \quad \text{abs. konv.}$$
$$\Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{|p_i^s - 1|}) \quad \text{konv.} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|p_k^s - 1|} \quad \text{konv.}.$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$|p_k^s - 1| \geq |p_k^s| - 1 = p_k^{\mathrm{Re}(s)} - 1 \Rightarrow \frac{1}{|p_k^s - 1|} \leq \frac{1}{p_k^{\mathrm{Re}(s)} - 1}.$$

Da aber

$$p_k^{\mathrm{Re}(s)} - 1 \geq \frac{1}{2} p_k^{\mathrm{Re}(s)},$$

können wir die Ungleichheitskette folgendermaßen fortführen:

$$\frac{1}{|p_k^s - 1|} \leq \frac{1}{p_k^{\mathrm{Re}(s)} - 1} \leq \frac{2}{p_k^{\mathrm{Re}(s)}}$$

und da

$$p_k \geq k \Rightarrow \frac{2}{p_k^{\mathrm{Re}(s)}} \leq \frac{2}{k^{\mathrm{Re}(s)}} \Rightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$$

ist eine konvergente Majorante für

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|p_k^s - 1|}.$$

Daraus folgt nun

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} \quad \text{abs. konv.}.$$

$\square$

Mit diesen Argumenten erhält man für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{p_i^s} + (\frac{1}{p_i^s})^2 + (\frac{1}{p_i^s})^3 + \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{4.1.2}$$

Bemerkung: Mit $s \to 1$ folgt nochmals die Unendlichkeit der Primzahlen, da das Produkt auf der linken Seite bei $s = 1$ stetig wäre, wenn es nur endlich viele Primzahlen gäbe und rechts nochmals die harmonische Reihe zum Vorschein kommt. Da der Grenzwert dieser ja unendlich ist, divergiert auch das Produkt.

Diese gewonnene Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{4.1.3}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 1$, wird mit ζ abgekürzt und Riemannsche Zetafunktion genannt, da der deutsche Mathematiker Bernhard Riemann als erster die Bedeutung der Zetafunktion als Funktion einer komplexen Variablen für die Primzahlverteilung erkannte. Die Entdeckung der zuvor gezeigten Identität kann als analytische Fassung des Fundamentalsatzes angesehen werden und gilt daher als Geburtsstunde der analytischen Zahlentheorie.

4.2 Riemanns Anstoß

Bernhard Riemann konnte in seiner Abhandlung *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* [13], die 1859 publiziert wurde, bahnbrechende Fortschritte auf dem Gebiet der Funktionentheorie aufzeigen. Auf nur neun Seiten präsentiert Riemann ein Resümee seiner intensiven Recherchen, welche er selbst niemals vollenden konnte. Somit schuf er für die Nachwelt eine Art Programm, das es auszuarbeiten galt und bis heute noch gilt. Riemann selbst bewies in seinem Aufsatz, dass die in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 1$ durch die Reihe $\sum n^{-s}$ definierte Funktion $\zeta(s)$ nach ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar ist. Riemann zeigte auch, dass diese Fortsetzung lediglich an der Stelle 1 einen Pol besitzt und dass sie einer gewissen Funktionalgleichung genügt, die wir im Anschluss gleich zeigen wollen. In der Arbeit stellte Riemann noch vier Behauptungen über die Nullstellenverteilung und eine über die Produktzerlegung auf. Außerdem nannte er eine Primzahlformel und er lukrierte die Idee, durch Anwendung der Zetafunktion, zahlentheoretische Ansätze zu finden, was sich auch mit der Zeit als sinnvoll herausstellte. Alle Riemannschen Behauptungen konnten bis heute bewiesen werden. Alle bis auf eine.

4.3 Die Funktionalgleichung der Zetafunktion

Wir beginnen nun mit einem Beweis der Funktionalgleichung für die Zetafunktion, wie ihn auch Riemann gegeben hat. Dazu benötigen wir jedoch zwei Hilfsmittel, die *Gamma-* und die *Thetafunktion*.

4.3.1 Satz

Die Gammafunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ durch

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{4.3.1}$$

definert. Mit Hilfe partieller Intregration erhält man für $\mathrm{Re}(z) > 0$ die Funktionalgleichung $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$. Da außerdem $\Gamma(1) = 1$ ist, folgt $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Näheres zur Gammafunktion siehe [6] Kap. 6)

4.3.2 Satz

Die Thetafunktion wird folgendermaßen definiert

$$\Theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}, \quad \text{für } x > 0 \tag{4.3.2}$$

und besitzt die Funktionalgleichung

$$\Theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\Theta(x), \quad \text{für alle } x > 0, \tag{4.3.3}$$

deren Beweis wir später auch zeigen werden.

Wir nehmen zunächst die Funktionalgeichung

$$\Theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\Theta(x),$$

und formen diese nach $\Theta(x)$ um:

$$\Theta(x) = \Theta(\frac{1}{x}) : \sqrt{x} \Rightarrow \Theta(x) = \Theta(\frac{1}{x})\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Nun setzen wir dafür die Funktion ein und erhalten

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-\pi n^2}{x}}. \tag{4.3.4}$$

Um einen einfachen Beweis für die Funktionalgleichung zu liefern, benötigen wir zunächst einen Hilfssatz - die sogenannte *Poissonsche Summenformel.*

4.3.3 Satz

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$f(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2}) \text{ und } f'(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2}) \text{ für } |x| \to \infty$$

und sei

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x t} dx$$

die Fourier Transformierte von f. Dann gilt

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n). \tag{4.3.5}$$

Bemerkung: Für eine reelle Zahl $\lambda > 0$ besitzt die Funktion $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_\lambda(x) := e^{-\pi\lambda x^2}$ die Fourier Transformierte $\hat{f}_\lambda(t) = \frac{e^{-\pi x^2 \backslash \lambda}}{\sqrt{\lambda}}$. Da wir in dieser Arbeit nicht Fourieranalysis studieren wollen, beweisen wir diesen Satz nicht. Er kann u.a. bei [6] nachgelesen werden.

Nun wollen wir unseren Beweis für die Funktionalgleichung der Thetafunktion ausführen.

Beweis. Da die Theta-Reihe und ihre sämtlichen Ableitungen gleichmäßig auf jedem Intervall $[\epsilon, \infty[, \epsilon > 0$ konvergieren, können wir die soeben definierte Poissonsche Summenformel auf die Funktion $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_\lambda(x) := e^{-\pi\lambda x^2}$ anwenden. Dabei ist $\lambda > 0$ ein reeller Parameter. Da $\hat{f}_\lambda(t) = \frac{e^{-\pi x^2 \backslash \lambda}}{\sqrt{\lambda}}$, folgt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi\lambda n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\pi n^2 \backslash \lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Schreibt man nun x statt λ ergibt sich die Behauptung des Satzes. $\square$

4.3.4 Korollar

Die Thetafunktion $\Theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$ genügt der Abschätzung

$$\Theta(x) = O(\frac{1}{\sqrt{x}}) \qquad \text{für } x \searrow 0.$$

Forster führt hier in [6] den einfachen Beweis an:

Beweis.

$$\lim_{x\to\infty} \Theta(x) = 1. \tag{4.3.6}$$

□

4.3.5 Lemma

Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}} (\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}) \frac{dt}{t}. \tag{4.3.7}$$

Bemerkung: Dabei wird $\psi(t) = \sum\limits_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}$ gesetzt. Also

$$\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}} \psi(t) \frac{dt}{t}. \tag{4.3.8}$$

Bemerkung: Die Funktion $\psi(t)$ konvergiert für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0. Es gilt $\Theta(t) = 1 + 2\psi(t)$ und somit auch $\psi(t) = \frac{1}{2}(\Theta(t) - 1)$.

Beweis.

$$\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n<0}} \underbrace{e^{-\pi n^2 x}}_{e^{-\pi(-n)^2 x}} + \underbrace{\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n=0}} e^{-\pi n^2 x}}_{=1} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n>0}} e^{-\pi n^2 x} =$$

$$1 + 2\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} = 1 + 2\psi(t).$$

□

Aus 4.3.4 folgt daraus $\psi(t) = O(\frac{1}{\sqrt{t}})$ für $t \searrow 0$.

Beweis. (des Lemmas) Wir gehen zunächst von der Gammafunktion, wie wir sie in (4.3.1) definiert haben, für $\Gamma(\frac{s}{2})$ aus.

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-t} \frac{dt}{t}.$$

Wir substituieren nun $t = \pi n^2 \tilde{t}$, dabei ist $n \in \mathbb{N}$.

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int\limits_0^\infty (\pi n^2 \tilde{t})^{\frac{s}{2}} e^{-\pi n^2 \tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}}.$$

Wir schreiben nun wieder t statt $\tilde{t}$ und erhalten

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int\limits_0^\infty (\pi n^2 t)^{\frac{s}{2}} e^{-\pi n^2 t} \frac{dt}{t}.$$

Nun schreiben wir den Exponenten zu jedem Faktor einzeln dazu.

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int\limits_0^\infty \pi^{\frac{s}{2}} n^s t^{\frac{s}{2}} e^{-\pi n^2 t} \frac{dt}{t}.$$

Wie man leicht sieht, kann man nun Faktoren aus dem Integral herausziehen.

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-\pi n^2 t} \frac{dt}{t}.$$

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit der Zetafunktion und es gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \Gamma(\frac{s}{2}) \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-\pi n^2 t} \frac{dt}{t} \frac{1}{n^s} = \pi^{\frac{s}{2}} \int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}} (\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}) \frac{dt}{t},$$

und da wir ja $\psi(t) = \sum\limits_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}$ gesetzt haben, folgt daraus

$$\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}} \psi(t) \frac{dt}{t}.$$

Die Vertauschung von Summe und Integral ist wegen des Satzes von der dominierten Konvergenz von Lebesgue-Integralen erlaubt, was wir im abschließenden Beweisteil erläutern wollen.

Der Satz von der dominierten Konvergenz (Lebesque) besagt:

$$\int f_N(t) \to \int f(t)dt,$$

falls

a) $f_N(t) \to f(t), \quad t$ fast überall

b) $|f_N(t)| \leq g(t), \quad \int g(t)dt < \infty.$

Wir betrachten zunächst das Integral und die endliche Summe.

$$\int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^N e^{-\pi n^2 t} \frac{dt}{t} = \underbrace{\int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi t}}_{\substack{:=f(t) \\ f(t)>0}} \underbrace{\sum_{n=1}^N e^{-\pi(n^2-1)t}}_{:=S_N(t)} dt.$$

Beachte, dass für alle $t > 0$: $S_N(t) = \sum\limits_{n=1}^{N} e^{-\pi(n^2-1)t}$, was konvergent für $N \to \infty$ ist. Nun wollen wir zeigen, dass $\int_0^\infty f(t)S_N(t)dt \to \int_0^\infty f(t)S(t)dt$ gilt. Dazu zerlegen wir das Integral in zwei Teile

a) $t > 1$,

b) $0 < t \leq 1$.

Setze $S(t) = \lim_{N\to\infty} S_N(t)$
a) $t > 1$:

$$|S_N(t)| = S_N(t) = 1 + \sum_{n=2}^{N} e^{-\pi(n^2-1)t} \underbrace{\leq}_{n^2-1\geq n \text{ für } n\geq 2} 1 + \sum_{n=2}^{N} e^{-\pi nt} =$$
$$1 + \sum_{n=2}^{N} (e^{-\pi t})^n = 1 + \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{e^{\pi t}})^n.$$

Bemerkung: $e^{\pi t} > 1$, wenn $t > 1$.

Das heißt

$$|S_N(t)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{e^{\pi t}})^n.$$

Wir setzen nun $q := \frac{1}{e^{\pi t}} < \frac{1}{e^{\pi}} =: \tilde{q}$ (immer noch $t > 1$). Daraus folgt nun

$$1 + \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{e^{\pi t}})^n = 1 + \sum_{n=2}^{N} q^n \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \tilde{q}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{q}^n - \tilde{q} =$$
$$\frac{1}{1-\tilde{q}} - \tilde{q} \leq \frac{1}{1-\tilde{q}} =: \tilde{C}.$$

b) $|\psi(t)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$ für $0 < t \leq 1$ und wegen der Bemerkung nach 4.3.5 gilt $\psi(t) = O(\frac{1}{\sqrt{t}})$, wenn $t \to 0$.
Wir fassen nun zusammen:

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt = \underbrace{\int_0^1 \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt}_{:=A} + \underbrace{\int_1^\infty \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt}_{:=B}$$

A)

$$|t^{\frac{s}{2}-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 t}}_{\leq \frac{C}{\sqrt{t}}}| \leq Ct^{\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}-\frac{3}{2}} = Ct^{\frac{\mathrm{Re}(s)-3}{2}} \leq \underbrace{Ct^{-\alpha}}_{\int_0^1 Ct^{-\alpha}dt < \infty}, \quad \text{für } \alpha < 1.$$

B)

$$|t^{\frac{s}{2}-1}S_N(t)| \leq \tilde{C}e^{-\pi t}t^{\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}-1},$$

und dies ist intergrierbar über $[1,\infty[$. Daraus erhalten wir die dominierte Konvergenz, denn aus A) folgt, dass $\int\limits_0^1 \psi(t)t^{\frac{s}{2}-1}dt$ konvergiert, wenn $N \to \infty$ und aus B), dass $\int\limits_1^\infty \psi(t)t^{\frac{s}{2}-1}dt$ konvergiert, wenn $N \to \infty$. □

4.3.6 Satz (Funktionalgleichung der Zetafunktion)

a) Die Funktion

$$\xi(s) := \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$$

lässt sich merpmorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Die fortgesetzte Funktion ist holomorph bis auf zwei Pole erster Ordnung an den Stellen $s = 0, s = 1$ und genügt der Funktionalgleichung

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

b) Die Zetafunktion selbst lässt sich ebenfalls meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen mit einem Pol an der Stelle $s = 1$. Es gilt die Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos(\frac{\pi s}{2})\zeta(s).$$

Beweis. a) Nach 4.3.5 gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$ mit $\psi(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$

$$\xi(s) = \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{\frac{-s}{2}}\pi^{\frac{s}{2}}\int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} =$$
$$\int\limits_0^1 t^{\frac{s}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} + \int\limits_1^\infty t^{\frac{s}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} \tag{4.3.9}$$

Aus der Funktionalgleichung der Thetafunktion folgt für $\psi(t) = \frac{1}{2}(\Theta(t)-1)$

$$\psi(t) = t^{-\frac{1}{2}}\psi(\frac{1}{t}) - \frac{1}{2}(1-t^{-\frac{1}{2}}), \tag{4.3.10}$$

denn aus

$$\psi(t) = \frac{1}{2}(\Theta(t)-1)$$

folgt mit der Substitution $t = \frac{1}{t}$

$$\psi(\frac{1}{t}) = \frac{1}{2}(\Theta(\frac{1}{t}) - 1).$$

Wir setzen nun die Funktionalgleichung $\Theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\Theta(x)$ ein und erhalten

$$\psi(\frac{1}{t}) = \frac{1}{2}(\sqrt{t}\Theta(t) - 1).$$

Sogleich beginnen wir mit dem Umformen und bringen $\frac{1}{2}$ und -1 auf die linke Seite

$$2\psi(\frac{1}{t}) + 1 = \sqrt{t}\Theta(t).$$

Für Θ erhalten wir somit

$$\Theta(t) = \frac{2\psi(\frac{1}{t}) + 1}{\sqrt{t}}.$$

Nun setzen wir das Ergebnis für Θ in die ursprüngliche, mit $\frac{1}{2}$ ausmultiplizierte Gleichung

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\Theta(t) - \frac{1}{2}$$

ein und bekommen

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\frac{2\psi(\frac{1}{t}) + 1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}.$$

Durch Umformen erhalten wir

$$\psi(t) = t^{-\frac{1}{2}}\psi(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}$$

und schließlich

$$\psi(t) = t^{-\frac{1}{2}}\psi(\frac{1}{t}) - \frac{1}{2}(1 - t^{-\frac{1}{2}}).$$

Wir setzten nun (4.3.10) in das Integral von 0 bis 1 ein und gewinnen daraus

$$\int_0^1 t^{\frac{s}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} = \int_0^1 t^{\frac{s}{2}}(t^{\frac{-1}{2}}\psi(\frac{1}{t}) - \frac{1}{2}(1 - t^{\frac{-1}{2}}))\frac{dt}{t} =$$

$$\int_0^1 t^{\frac{(s-1)}{2}}\psi(\frac{1}{t})\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_0^1 (t^{\frac{(s-1)}{2}} - t^{\frac{s}{2}})\frac{dt}{t}. \tag{4.3.11}$$

Man kann nun leicht sehen, dass man das letzte Integral explizit, unter Beachtung von $\mathrm{Re}(s) > 1$, berechnen kann

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 (t^{\frac{(s-1)}{2}} - t^{\frac{s}{2}})\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_0^1 (\frac{t^{\frac{(s-1)}{2}}}{t} - \frac{t^{\frac{s}{2}}}{t})dt = \\
\frac{1}{2}\int_0^1 (t^{\frac{(s-1)}{2}-1} - t^{(\frac{s}{2})-1})dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (t^{\frac{(s-1)}{2}-1}) - \frac{1}{2}\int_0^1 (t^{(\frac{s}{2})-1})dt = \\
\frac{1}{2}(\frac{(s-1)^{-1}}{2}t^{\frac{(s-1)}{2}})\big|_0^1 - \frac{1}{2}((\frac{s}{2})^{-1}t^{(\frac{s}{2})})\big|_0^1 = \\
[\frac{1}{2}(\frac{s-1}{2})^{-1}1^{(\frac{s-1}{2})} - 0] - [\frac{1}{2}(\frac{s}{2})^{-1}1^{(\frac{s}{2})} - 0] = \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s-1}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s}\cdot 1 = \\
\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Im ersten Integral auf der rechten Seite machen wir hingegen die Substitution $t = 1\backslash\tilde{t}$ und setzen danach wiederum t statt $\tilde{t}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\frac{(s-1)}{2}}\psi(\frac{1}{t})\frac{dt}{t} = \int_1^\infty \frac{1}{\tilde{t}}^{\frac{(s-1)}{2}}\psi(\tilde{t})\frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}} = \int_1^\infty \frac{1}{t}^{\frac{(s-1)}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} = \\
\int_1^\infty t^{\frac{-(s-1)}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} = \int_1^\infty t^{\frac{(1-s)}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t}.
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Nun setzen wir alles in (4.3.9) ein, woraus wir

$$\begin{aligned}
\xi(s) = \int_0^1 t^{\frac{s}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} + \int_1^\infty t^{\frac{s}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} = \\
\int_1^\infty t^{\frac{(1-s)}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty t^{\frac{s}{2}}\psi(t)\frac{dt}{t} = \\
\int_1^\infty (t^{\frac{1-s}{2}} + t^{\frac{s}{2}})\psi(t)\frac{dt}{t} + (\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s})
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

lukrieren.

Da $\psi(t)$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0 geht, konvergiert das Integral auf der rechten Seite gegen eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $g(s)$. Somit liefert (4.3.13) eine Fortsetzung von $\xi(s)$ als meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Polen 1. Ordnung an den Stellen

$s = 1$ und $s = 0$. Da die Darstellung invariant unter der Abbildung $s \mapsto 1 - s$ ist, folgt $\xi(1-s) = \xi(s)$.

b) Wir beginnen nun wieder mit unserer Ausgangsfunktion $\xi(s) := \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ und schreiben sie nach ζ um.

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\xi(s).$$

Aufgrund dieser Darstellung lässt sich auch die Zetafunktion meromorph nach ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Die Funktion $s \mapsto \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und hat eine Nullstelle 1.Ordnung bei $s = 0$, die sich gegen die Polstelle 1. Ordnung der Funktion $\xi(s)$ weghebt. Deshalb ist $\zeta(s)$ holomorph in $\mathbb{C}$ bis auf den Pol 1. Ordnung bei $s = 1$.

Aus der Funktionalgleichung von ξ können wir nun die Funktionalgleichung der Zetafuktion ableiten.

$$\pi^{\frac{-(1-s)}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s) = \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$$

ergibt, wenn $\zeta(1-s)$ auf einer Seite alleine stehen soll und wir gleich die π-Faktoren zusammenziehen

$$\zeta(1-s) = \pi^{\frac{1}{2}-s}\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})^{-1}\zeta(s). \tag{4.3.14}$$

Nun benutzen wir zwei Formeln aus der Theorie der Gammafunktion

a) $\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$ (Euler)

b) $\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{1+z}{2}) = 2^{1-z}\sqrt{\pi}\Gamma(z)$ (Legendre)

Aus a) folgt

$$\Gamma(\frac{1-s}{2})^{-1}\Gamma(\frac{1+s}{2})^{-1} = \frac{\sin(\pi\frac{1+s}{2})}{\pi} = \frac{\cos(\frac{\pi s}{2})}{\pi}.$$

Daraus folgt nun

$$\Gamma(\frac{1-s}{2})^{-1} = \frac{\cos(\frac{\pi s}{2})}{\pi}\Gamma(\frac{1+s}{2}) \tag{4.3.15}$$

und damit lässt sich die Formel (4.3.14) umformen zu

$$\zeta(1-s) = \pi^{\frac{1}{2}-s}\Gamma(\frac{s}{2})\frac{\cos(\frac{\pi s}{2})}{\pi}\Gamma(\frac{1+s}{2})\zeta(s) = \pi^{\frac{-1}{2}-s}\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1+s}{2})\cos(\frac{\pi s}{2})\zeta(s)$$

(Man beachte, dass der Exponent bei π durch den Bruch bei $\frac{\cos(\frac{\pi s}{2})}{\pi}$ zustande kommt, denn $\frac{\pi^{\frac{1}{2}-s}}{\pi} = \pi^{\frac{-1}{2}-s}$.)
Nach Anwendung von b) folgt daher

$$\zeta(1-s) = \pi^{\frac{-1}{2}-s}2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(s)\cos(\frac{\pi s}{2})\zeta(s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos(\frac{\pi s}{2})\zeta(s).$$

□

4.4 Ausblick

Riemanns Ideen wurden im Laufe der Zeit vollständig bewiesen. Vor allem der französische Mathematiker Jacques Hadamard, Charles-Jean de La Vallée Poussin aus Belgien und der Deutsche Hans von Mangoldt leisteten Herausragendes auf dem Gebiet der Zetafunktion und erzielten große Erfolge. Somit hat sich die analytische Primzahltheorie in den letzen 150 Jahren gewaltig entwickelt. Die Ideen der analytischen Zahlentheorie begannen sich fortan rasch auszubreiten.

4.5 Die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung gilt als Millenniumsproblem und ist bis heute unbewiesen. Hierbei geht es um nicht-triviale Nullstellen der Zetafunktion. Riemann behauptete, dass außer den trivialen Nullstellen an den Stellen $s = -2k, k \geq 1$ und $k \in \mathbb{N}$, alle anderen Nullstellen der Zetafunktion im *kritischen Streifen* $S := \{s \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ liegen. Die nicht-trivialen Nullstellen liegen sowohl symmetrisch zur reellen Achse, als auch zur Geraden $\{\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$. Man vermutet zusätzlich, dass auch diese Nullstellen einfach sind.

Riemann selbst, der in seiner Arbeit mit ξ arbeitet, schreibt dazu:

[...]dieses Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t) = 0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläaufg bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

Wir wollen an dieser Stelle noch zwei theoretische Resultate erwähnen, die für die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung sprechen. Zum einen gelang André Weil für gewisse zu ζ analoge Funktionen der Beweis des Analogons zur Riemannschen Vermutung. Diese Erungenschaft wurde von Pierre Deligne noch weitgehend verallgemeinert. Zum anderen konnte gezeigt werden, dass ein gewisser Anteil der im kritischen Streifen enthaltenen ζ-Nullstellen tatsächlich auf der Geraden $\{\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$ liegt.

Literaturverzeichnis

[1] J. Brüdern. *Einführung in die analytische Zahlentheorie.* Springer Verlag, 1995.

[2] P. Bundschuh. *Einführung in die Zahlentheorie.* Springer Verlag, 2002.

[3] D. Burde. Analytische Zahlentheorie, 2005. `https://homepage.univie.ac.at/dietrich.burde/papers/burde_27_analytic_nt_course.pdf`[abgerufen am 31. 1. 2017].

[4] H.M. Edwards. *Riemann´s Zeta Function.* Dover Publications, INC., 2001.

[5] O. Forster. *Analysis 1.* Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2008.

[6] O. Forster. Die riemannsche Zetafunktion, 2008. `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/vorlA8w_zet.html`[abgerufen am 31. 1. 2017].

[7] O. Forster. Analytische Zahlentheorie, 2011. `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/v/azt11/anazth_07.pdf`[abgerufen am 15. 2. 2017].

[8] O. Forster. Einführung in die Zahlentheorie, 2014. `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/v/zth/inzth_07.pdf`[abgerufen am 31. 1. 2017].

[9] A. Gathmann. Einführung in die Funktionstheorie, 2014. `http://www.mathematik.uni-kl.de/agag/mitglieder/professoren/gathmann/notes/futheo/`[abgerufen am 31. 1. 2017].

[10] L. Lucht. Elementare Zahlentheorie, 1998. `http://www.matheraetsel.de/texte/ZT98.PDF`[abgerufen am 31. 1. 2017].

[11] S.J. Patterson. *An introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function.* Cambridge University Press, 1995.

[12] Ch. Baxa, A. Ramert. *Zahlentheorie.* Skriptum zur Vorlseung von Christoph Baxa, 2012.

[13] B. Riemann. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, 1859. transkribiert von D. R. Wilkins im Jahre 1998 `http://www.claymath.org/sites/default/files/zeta.pdf`[abgerufen am 31. 1. 2017].

[14] H. Scheid. *Zahlentheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 2003.

[15] R. Remmert und G. Schuhmacher. *Funktionentheorie 1*. Springer Verlag, 2002.

[16] P.T. Bateman und H.G. Diamond. *Analytic Number Theorie*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.

[17] H. Schichl und R. Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Verlag, 2012.