DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Zur Einführung der multiplikativen Rechenoperationen mit Dezimalzahlen im Mathematik-Unterricht der österreichischen Sekundarstufe I“

verfasst von / submitted by

Tobias Jessenk

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 313
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geschichte, Sozialkunde, Polit.Bildg.
Betreut von / Supervisor:	Prof. Mag. Dr. Maria Koth
Mitbetreut von / Co-Supervisor:	-

Zusammenfassung

Die nachfolgende Arbeit thematisiert die Behandlung der Dezimalzahlen in der Schule mit besonderer Berücksichtigung der multiplikativen Rechenoperationen. Zu Beginn steht eine einführende Behandlung der Grundlagen der Dezimalzahlen, bei der wichtige Konzepte erklärt und bekannte Problembereiche von Schülern und Schülerinnen abgesteckt werden. Anschließend wird das Konzept des Multiplizierens und Dividierens von natürlichen Zahlen im Mittelpunkt stehen, da dieses für die Weiterführung unerlässlich ist. Viele der hier auftretenden zentralen Aspekte und häufig auftretende Fehler sind auch für die darauffolgenden Beobachtungen essenziell. Sind alle Grundlagen behandelt, wird vorerst auf die Multiplikation und anschließend auf die Division von Dezimalzahlen eingegangen.

Die Untersuchungen zu den Dezimalzahlen und den Rechenoperationen zeigen, dass es eine erhebliche Zahl an bekannten typischen Fehlermustern und Fehlvorstellungen gibt, die es im Unterricht zu beachten gilt. Diese gewonnenen Erkenntnisse spielen abschließend auch bei der Untersuchung ausgewählter österreichischer Schulbücher eine tragende Rolle. Es war also ein wichtiges Anliegen, die zu einem großen Teil aus Deutschland stammenden Erfahrungen mit Bezug auf Dezimalzahlen, auf die Praxis in Österreich umzulegen und sowohl auf bereits umgesetzte Aspekte, als auch auf Verbesserungspotential aufmerksam zu machen.

Abstract

The following thesis broaches the issue of decimal numbers with an explicit attention to the multiplicative arithmetic operations. Starting with the basic principles of decimal numbers, the most important concepts and common problems of students will be the emphasis of the first part of the paper. Subsequently, the concept of Multiplication and Division of natural numbers will be the main focus, as this topic is indispensable for the following subjects. Many of the central aspects and common misconceptions of students are essential for the further study of the key issue. As soon as the fundamentals are examined, the Multiplication and Division of decimal numbers will be issued.

The analysis concerning decimal numbers and the arithmetic operations shows, that there are numerous well known typical mistakes and misconceptions, which need to be accounted for in school. The findings of the first part will then assume an important role in the investigation of selected Austrian school books. In this section the goal was to apply the gathered knowledge concerning decimal numbers, of which the biggest part was found in German sources, to the Austrian practice of teaching this topic in school and showing both positive aspects and room for improvement.

Danksagungen

Bevor die Dezimalzahlen in den Mittelpunkt treten, möchte ich einigen Menschen meinen besonderen Dank aussprechen, die an der Entstehung dieser Arbeit beteiligt waren und eine große Unterstützung für mich gewesen sind.

Allen voran danke ich meiner Verlobten, Roswitha Samek. Sie war während der Entstehung dieser Arbeit stets an meiner Seite und hat mich unterstützt wo es nur ging. Sie war und bleibt auch in Zukunft eine große Motivationsquelle und ein Vorbild.

Des Weiteren danke ich meinen Eltern, Brigitte und Johann Jessenk, dafür, dass sie stets an mich geglaubt, mich gefördert und mich während meines gesamten Studiums in allen Belangen unterstützt haben. Dank euch konnte ich meinen eigenen Weg wählen, mit all den prägenden Umwegen, die sehr wichtig für mich waren.

Außerdem danke ich meiner Diplomarbeits-Betreuerin, Frau Mag. Dr. Maria Koth, für die wichtigen fachlichen Inputs, die vielen Telefonate und sämtliche weitere Hilfestellungen.

Ein sehr großer Dank gilt meiner lieben Freundin Judith Dellinger, für ein zusätzliches Paar Augen beim Fertigstellen der Arbeit.

Auch meinen Kollegen und der Schulleitung der HTL Rennweg möchte ich danken, für die Unterstützung, das Verständnis und das Entgegenkommen, welche keineswegs als selbstverständlich zu erachten sind.

Zu guter Letzt möchte ich all meinen Freunden und Bekannten danken, die sich interessiert gezeigt und nach dem Status der Arbeit gefragt haben. Durch die vielen Gespräche wurde ich immer wieder aufs Neue motiviert und inspiriert.

Vielen Dank euch allen!

Inhaltsverzeichnis

Einführung

0.1 Einleitung und Überblick

Die Dezimalzahlen sind im Leben aller Menschen vorhanden und spielen sehr oft eine zentrale Rolle. Von der frühen Kindheit an, bis ins höchste Alter werden sie gebraucht, um Objekte zu beschreiben oder ihnen einen Wert zu geben. Die Einsatzmöglichkeiten sind unbeschreiblich vielfältig.

Nachdem in der Volksschule der erste schematische Kontakt hergestellt wird, stellen die Dezimalzahlen und der Umgang mit solchen in der Sekundarstufe I erstmals ein zentrales Thema dar. Jedoch ist diese Behandlung nicht immer leicht[1] und es zeigt sich, dass oft vielfältige Fehlvorstellungen auftreten, welche die Abwicklung im Unterricht erschweren und die sich auch auf weitere Gebiete der Mathematik fortsetzen können. In Bezug darauf findet Deniz Mehmetlioglu klare Worte:

"It is more important to identify the misconceptions and looking for the solutions in order to put away them because prerequisite knowledge and conceptions generates a step for later subjects. Therefore, even a simple misconception in mathematics may cause some misconceptions in the subjects which are related to previous one."[2]

Es ist also von großer Bedeutung, wie Mehmetlioglu sagt, diese Fehlvorstellungen zu identifizieren und Lösungen dafür zu finden. Beim Themengebiet der Dezimalzahlen ist dieser Vorgang besonders wichtig, da diese schon sehr früh in der Schullaufbahn behandelt werden. Das bedeutet, dass fehlerhafte Ansichten, die bei einer suboptimalen Vermittlung des Themas möglicherweise angeeignet werden, auch auf weitere Gebiete der Mathematik Auswirkungen haben könnten, für welche die Dezimalzahlen eine Grundlage darstellen. Es ist also essenziell, gerade bei dermaßen fundamentalen Konzepten, eine exakte Vermittlung zu gewährleisten, um Folgeerscheinungen möglichst gut einschränken zu können.

Die folgende Arbeit soll also einerseits aufzeigen, wo bekannte Schwierigkeiten liegen, sowohl bei den Grundlagen der Dezimalzahlen, wie beispielsweise dem Größenvergleich, als auch bei den ausgewählten multiplikativen Rechenoperationen. Andererseits sollen aber auch Vorschläge und Erkenntnisse geboten werden, wie die zuvor genannten Fehlvorstellungen behandelt oder sogar vorbeugend vermieden werden können. Dabei ist es natürlich von Vorteil zu wissen, wie es dazu

[1] Padberg, 2004, 41ff
[2] Mehmetlioglu, 2014, 570

kommt, dass solche Vorstellungen überhaupt entstehen. So kann es zum Beispiel einen entscheidenden Unterschied machen, ob die Zahl 5,38 als Fünf-Komma-Drei-Acht oder als Fünf-Komma-Achtunddreißig bezeichnet wird[3]. Eine weitere Betrachtung dieses Problems folgt etwas später.

Nachdem die Einleitung mit einem kurzen Blick auf den österreichischen Lehrplan beendet wird, folgt anschließend das erste Kapitel, in dem die Grundlagen der Behandlung von Dezimalzahlen im Unterricht erklärt werden sollen. Dabei geht es nicht nur um wichtige Konzepte, die dabei vermittelt werden, sondern auch schon um erste Fehlvorstellungen, die von Schülern und Schülerinnen teilweise bereits aus der Volksschulzeit mitgenommen werden.

Im zweiten Kapitel sollen die multiplikativen Rechenoperationen untersucht werden, vorerst aber nur bezugnehmend auf die Anwendung mit natürlichen Zahlen. Dabei stehen anschauliche Vorstellungen und schriftliche Rechenverfahren im Vordergrund, die großteils auch zu einem späteren Zeitpunkt noch Relevanz haben, wenn dieselben Konzepte auf Dezimalzahlen angewandt werden. Auch die typischen Fehler, die in diesem Zusammenhang von Schülern und Schülerinnen gemacht werden, sollen bei der Untersuchung erwähnt werden. Dabei ist anzunehmen, dass diese nicht ausschließlich bei der Anwendung auf natürliche Zahlen auftreten, sondern auch, wenn Dezimalzahlen benutzt werden. Es wird hier also gezeigt welche Fehler die üblichen Algorithmen verursachen, da angenommen wird, dass diese nicht einfacher werden, wenn sie auf Dezimalzahlen angewandt werden.

Im dritten Kapitel werden dann die Erkenntnisse der vorangegangenen Abschnitte zusammengeführt, um die Multiplikation und die Division von Dezimalzahlen zu untersuchen. Dabei wird sich zeigen, dass Erkenntnisse aus beiden Teilen eine Rolle spielen und dass neue problematische Themen auftauchen, wenn diese kombiniert werden.

Im vierten Kapitel geht es um eine Untersuchung ausgewählter österreichischer Schulbücher im Lichte der zuvor gewonnenen Erkenntnisse. Dabei wird es interessant sein zu beobachten, auf welche der bekannten Aspekte bereits eingegangen wird beziehungsweise ob zu erkennen ist, welche Fehlvorstellungen und typische Fehler verhindert oder behandelt werden sollen. Gleichzeitig sollen natürlich auch Lücken aufgezeigt und Verbesserungsvorschläge gebracht werden.

Es bleibt zu hoffen, dass sich Schulen, Schulbücher, Lehrer und Lehrerinnen beziehungsweise Betreuer und Betreuerinnen den neuen und auch alten Erkenntnissen anpassen können, um eine optimale

[3] Heckmann, 2006a, 23ff

Entwicklung im Umgang mit Dezimalzahlen zu gewährleisten und damit eine gute Grundlage zu schaffen, auf dem das Gerüst der Mathematik immer weiter aufgebaut werden kann.

0.2 Die Dezimalzahlen im österreichischen Lehrplan

Auf der Homepage des Bundesministeriums für Bildung[4] (BMB) finden sich drei relevante Lehrpläne für die Schultypen der Sekundarstufe I: „Neue Mittelschule“, „Hauptschule“ und „AHS-Unterstufe“. Es wird jedoch für die Hauptschule und die Neue Mittelschule explizit erwähnt, dass die Fachlehrpläne mit denen der AHS-Unterstufe ident sind. Deswegen kann an dieser Stelle für alle Schultypen der Sekundarstufe I gemeinsam gesprochen werden.

Der Volksschullehrplan, welcher auf derselben Homepage zu finden ist, erwähnt die Dezimalzahlen erstmals in der dritten Schulstufe im Zusammenhang mit dem Operieren mit Größen. Die genaue Formulierung lautet: „Addieren, Subtrahieren und Ergänzen von dezimalen Geldbeträgen handlungsorientiert anbahnen und festigen“[5]. Ein Beispiel dafür findet sich im Volksschulbuch ‚Alles Klar! 3‘[6] wo die Kommaschreibweise für Euro und Cent erklärt wird. Als Funktion des Kommas wird die Trennung der beiden Größen beschrieben. Nach einigen Aufgaben zur Umformung[7] ist diese erste Begegnung jedoch schon wieder vorbei. Zu einem späteren Zeitpunkt, im Zusammenhang mit der schriftlichen Addition werden abermals Aufgaben geboten, welche die Kommaschreibweise erfordern. In der vierten Klasse der Volksschule taucht das Rechnen mit dezimalen Geldbeträgen abermals auf, wenn es um Anwendungsaufgaben mit Bezug auf Größen geht.

Es zeigt sich also, dass die Vorbildung der Schüler und Schülerinnen zur Sekundarstufe I im Zusammenhang mit Dezimalzahlen zu einem großen Teil in Verbindung mit Größen (vor allem Geldbeträgen) entsteht. Dass diese Tatsache nicht ganz unproblematisch sein kann, wird in einem der folgenden Kapitel noch besprochen. Außer Frage steht aber, dass der Zugang dennoch sehr sinnvoll ist, da an Erfahrungen der Schulkinder angeknüpft wird. Andere Ansätze wären wahrscheinlich zu abstrakt beziehungsweise komplex.

Interessant ist, dass die Brüche in der Volksschule einen viel höheren Stellenwert haben als die Dezimalzahlen. Dies ist vermutlich durch die bessere Veranschaulichung erklärbar.

---

[4] https://www.bmb.gv.at/
[5] Mathematik-Lehrplan für die Volksschule, BMB, 14
[6] Grosser/Koth, 2008a, 52
[7] Beispielsweise $289{,}90\ € = 289\ €\ 90\ c$

Der Lehrplan der Sekundarstufe I erwähnt die Dezimalschreibweise in der fünften Schulstufe, wobei sich um diesen Abschnitt auch die meisten Ausführungen in der vorliegenden Arbeit drehen werden. Im Zuge des ‚Arbeitens mit Zahlen und Maßen' wird erwähnt, dass Schüler und Schülerinnen „mit der Darstellung von Dezimal- und Bruchschreibweise vertraut sein"[8] sollen. Außerdem findet sich die sehr allgemeine Formulierung „mit den positiven rationalen Zahlen Rechnungen mit leicht abschätzbaren Ergebnissen durchführen und zur Lösung von Problemen in Sachsituationen vielfältig anwenden können", was auch das Rechnen mit Dezimalzahlen miteinschließt.
Der Zusammenhang von Dezimalzahlen mit Brüchen ist im Lehrplan erst ab der sechsten Schulstufe explizit verankert, was durchaus kritisch zu hinterfragen ist, da beide Aspekte schon in der fünften Schulstufe separat behandelt werden. Die Untersuchung der Schulbücher in Kapitel 4 wird zeigen, dass hier zum Teil auch schon vorgearbeitet wird, was mir durchaus sinnvoll erscheint.
Im weiteren Verlauf der Sekundarstufe werden Dezimalzahlen natürlich immer wieder gebraucht, jedoch nur als Hilfsmittel im Zusammenhang mit anderen Themengebieten. Die systematische Behandlung sollte demnach im Zuge der fünften Schulstufe abgeschlossen sein.

[8] Mathematik-Lehrplan für die AHS-Unterstufe, BMB, 5

Teil 1:

Grundlagen der Behandlung von Dezimalzahlen im Unterricht

Einige Probleme von Schülern und Schülerinnen haben ihre Wurzeln im grundlegenden Verständnis des Konzeptes der Dezimalzahlen, noch bevor es überhaupt zu Rechenaufgaben mit diesen kommt. Es ist oft nicht etwa eine bestimmte Rechenoperation, die Schwierigkeiten bereitet, sondern eine Lücke in anderen, zuvor möglicherweise unzureichend behandelten Themenbereichen. Diese können sich im späteren Verlauf dann natürlich negativ auf nachfolgende Aufgabenstellungen, wie beispielsweise Multiplikation und Division von Dezimalzahlen, auswirken.

Wie eine Studie von Helme und Stacey attestiert, hat die Lehrperson einen sehr großen Einfluss auf den späteren Erfolg von Schülern und Schülerinnen in Bezug auf den Umgang mit Dezimalzahlen[9]. Es wurde beobachtet, dass die Anzahl der Schüler und Schülerinnen in einer Klasse, die gut mit Dezimalzahlen umgehen können, sehr stark schwanken kann (0%-82%), was einen großen Einfluss des Lehrers beziehungsweise der Lehrerin anzeigt. Des Weiteren wurde im Zuge eines Versuches, Lehrenden eine Hilfestellung in Form von ausgewählten Aufgaben und Spielen angeboten, welche diese in ihren Klassen anwenden sollten. Die entsprechenden Schüler und Schülerinnen wurden vor und nach dem Versuch getestet, woraufhin sich zeigte, dass die Klassen, in denen von dem Angebot Gebrauch gemacht wurde, beim zweiten Test viel besser abschnitten als beim ersten. Gleichzeitig wurde bei den Klassen, in denen die Aufgaben und Spiele nicht benutzt wurden, keine signifikanten Unterschiede festgestellt[10]. Ohne der Studie zu viel Gewicht zuzuschreiben[11], zeigt sie dennoch sehr eindrucksvoll die Relevanz der gewählten Unterrichtsmethoden in Bezug auf das Thema Dezimalzahlen. Diese sollten also sorgfältig und mit genügend Hintergrundinformationen gewählt werden.

[9] Helme/Stacey, 2000, 106ff

[10] Genauere Ausführungen zu der Untersuchung und einige der erwähnten Aufgaben und Spiele finden sich in Helme/Stacey, 2000

[11] Die Untersuchung wurde vor über 15 Jahren, auf einem anderen Kontinent, in einem anderen Schulsystem, an weniger als 100 Schülern und Schülerinnen durchgeführt.

Mit diesem Wissen im Hinterkopf, sollen im Laufe des folgenden Abschnittes einige wichtige Grundlagen für das Verständnis von Dezimalzahlen und die wichtigsten Aspekte der bereits erwähnten Fehlvorstellungen und Missverständnisse angeführt werden.

1.1 Grundlegende Konzepte

1.1.1 Dezimalzahlen, Dezimalbrüche und andere Formulierungen

Befasst man sich eingehender mit dem Thema Dezimalzahlen, so kommt man nicht am Begriff der Dezimalbrüche vorbei. Da dieser Begriff in Österreich nicht üblich ist, möchte ich kurz zu Beginn darauf eingehen.

Dezimalbruch ist ein in Deutschland verwendeter Begriff, welcher im Grunde das gleiche Konzept bezeichnet, das in Österreich Dezimalzahl genannt wird. Es handelt sich um eine Darstellungsform für rationale Zahlen. In meinen Augen gibt es einen kleinen, jedoch nicht unwesentlichen Vorteil, den die deutsche Version mit sich bringt, nämlich den unweigerlichen Zusammenhang mit den Brüchen und der Bruchrechnung. Für jeden Mathematiker ist dieser Konnex klar und deutlich, für Schüler und Schülerinnen ist er jedoch oft nicht selbstverständlich. Die Bezeichnung Dezimalbruch weist jedoch schon darauf hin, dass hier ein Zusammenhang bestehen muss, auch wenn eventuell nicht sofort klar ist, worin dieser besteht.

Michael Marxer und Gerald Wittman bringen des Weiteren den Begriff der Kommazahlen ins Gespräch und unterscheiden diesen dezidiert vom Begriff der Dezimalbrüche[12]. Um Kommazahlen handelt es sich laut den Autoren, wenn aufgrund von Alltagserfahrungen damit umgegangen und gerechnet wird. Die genaue Bedeutung und eine systematische Behandlung sind zu diesem Zeitpunkt noch kein Thema. Erst wenn die Hintergründe geklärt sind und die Vorgehensweisen durch das Konzept des dezimalen Stellenwertsystems begründet werden können, darf von der Dezimalbruchrechnung die Rede sein. Es ist also mit den beiden Begriffen dieselbe Art von Zahlen gemeint, den wesentlichen Unterschied macht das erreichte Verständnis der Person aus, die mit diesen umzugehen versucht.

Des Weiteren finde ich den Zugang, der im Schulbuch „Mathematik verstehen“[13] benutzt wird sehr interessant. Hier ist weder von Dezimalzahlen oder Bruchzahlen, noch von Kommazahlen und auch nicht von Dezimalbrüchen die Rede. In diesem Buch werden die Bezeichnungen „Zahl in Dezimaldarstellung“ und „Zahl in Bruchdarstellung“ benutzt. Abermals ist der Unterschied sehr gering,

[12] Marxer/Wittmann, 2012, 44
[13] Salzger et. al., 2014

kann aber dennoch einen großen Unterschied in der Auffassung machen. Die Formulierung stellt einen wichtigen Aspekt in den Mittelpunkt und betont, dass es sich um verschiedene Arten der Darstellung und nicht etwa um verschiedene Arten von Zahlen handelt. Gerade dieser Unterschied ist für Schüler und Schülerinnen oft schwer zu begreifen, weswegen ich eine Betonung der Tatsache durch diese Formulierung für sehr sinnvoll und gut erachte.

Nachdem nun die diversen Formulierungen erläutert wurden möchte ich darauf hinweisen, dass in den folgenden Teilen der Arbeit von Dezimalzahlen die Rede sein wird, welche auf folgende Art und Weise definiert werden können[14]:

Unter einer Dezimalzahl verstehen wir einen Ausdruck der Form:

$$q, q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$$

mit $q, q_i \in \mathbb{N}$ und $0 \leq q_i \leq 9$ für $i = 1,2,3, \dots$. Dabei ist $q, q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$ zu verstehen als die unendliche Reihe

$$q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \frac{q_4}{10^4} + \cdots$$

Für die Schule in Österreich ist diese Definition aufgrund der Zehnerbrüche, die darin vorkommen, nicht optimal. Diese Tatsache zeigt aber gleichzeitig welcher Aspekt aufgrund der in Österreich vorherrschenden Reihenfolge der Behandlung im Unterricht verabsäumt wird. Es fehlt damit in gewisser Weise die Verankerung der Dezimalzahlen in den rationalen Zahlen, da es sich nur um eine Abfolge von Ziffern handelt, wenn der letzte Teil der Definition vernachlässigt wird. Die Bedeutung der Dezimalen als Teil eines Ganzen ist vermutlich leichter fassbar, wenn durch die Behandlung der Brüche bereits gezeigt wurde, welches Konzept dahintersteckt. Führt man die Dezimalzahlen vor den Bruchzahlen ein, so muss man sich also auf die Vorerfahrungen aus dem Alltag beziehen, was sicherlich nicht immer optimal ist.

Dazu muss ergänzt werden, dass eine reine Umkehrung der Reihenfolge natürlich nicht das Allheilmittel für sämtliche Probleme mit den Dezimalzahlen darstellt. Die Konzepte, die bei der Behandlung von Brüchen auftreten, sind keineswegs durchgehend einfach zu verstehen und bereiten im Grunde ähnlich viele Probleme wie die der Dezimalzahlen. Dennoch ist es meiner Ansicht nach sinnvoll, die beiden Darstellungsformen gut aufeinander abzustimmen und bei der Behandlung die Parallelen aufzuzeigen, um sie zum besseren Verständnis nutzen zu können.

[14] Definition nach Vorbild von Bigalke/Hasemann, 1978, 38f. Eine Ähnliche Definition findet sich bei Postel, 1991, 5. Für eine sehr ausführliche Definition mit einigen Ergänzungen wird das Werk „Zahlbereiche“ empfohlen; Padberg et. al., 1995, 101ff

1.1.2 Das dezimale Stellenwertsystem und das Konzept des Bündelns

Das dezimale Stellenwertsystem bildet die Grundlage der Arithmetik und ermöglicht es, Rechenoperationen, wie die Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division in relativ kurzer Zeit und ohne großen Aufwand durchzuführen[15]. Es gestattet uns außerdem, alle (reellen) Zahlen mit Hilfe von nur zehn Ziffern aufzuschreiben.

Ein solches Stellenwertsystem kann zu verschiedensten Basen gebildet werden. Das bekannteste und auch üblicherweise benutzte, ist das dezimale Stellenwertsystem mit der Basis Zehn. Dieses soll hier dargestellt werden, da es sich hierbei auch um das System handelt, das an den österreichischen Schulen unterrichtet wird. Ebenso gebräuchlich, vor allem im Bereich der Informatik, jedoch weniger bekannt, ist beispielsweise das Dualsystem zur Basis Zwei.

Gleich zu Beginn sei erwähnt, dass Untersuchungen von Heckmann vermuten lassen, dass es bei vielen Schülern und Schülerinnen schnell zu Problemen im Zusammenhang mit dem Stellenwertverständnis kommen kann[16]. Es kann keinesfalls angenommen werden, dass die folgenden Grundlagen von einem Großteil der Lernenden verstanden oder gar erklärt werden können.

Die Grundlage unseres Stellenwertsystems bildet das Konzept des Bündelns[17]. Einfach gesagt bedeutet Bündeln, mehrere Elemente zu einem neuen zusammen zu schließen. Konkret gesprochen können so im Dezimalsystem zehn Einer zu einem Zehner gebündelt werden. Des Weiteren können Zehner zu Hundertern, Hunderter zu Tausendern und so fort zusammengefügt werden. Dies ist auch der Grund dafür, dass dieses System mit nur zehn Ziffern auskommt. Betrachtet man zum Beispiel die Zahl 4972 so besteht diese (nach der Bündelung von ebenso vielen Einern) aus zwei Einern, sieben Zehnern, neun Hundertern und vier Tausendern. Es wird also einfach gesagt nur die Anzahl der vorhandenen Zehnerpotenzen notiert. Das System wird bereits zu Beginn der Grundschule genutzt, um der Zahlenwortreihe, die von einigen Kindern schon zuvor gelernt wird, eine Bedeutung zu geben. Hierbei kann es wiederum durch die Eigenart der Bezeichnungen von Zahlen in der deutschen Sprache zu Schwierigkeiten kommen (zum Beispiel Inversion)[18]. Diese Problemstellung soll an dieser Stelle jedoch nicht genauer behandelt werden.

Das System bietet auch eine gute Möglichkeit zur Veranschaulichung anhand einer Tabelle. Jede Zahl kann in eine sogenannte Stellenwerttafel eingetragen werden. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, eine davon soll hier gezeigt werden:

[15] Padberg, 1986, 45ff
[16] Heckmann, 2006a, 30ff
[17] Ebd.
[18] Padberg, 1986, 5ff

Tausender (T)	Hunderter (H)	Zehner (Z)	Einer (E)	Zahl
0	0	1	2	12
0	4	0	3	403
0	0	0	7	7
5	2	7	3	5273

Für Erwachse mag diese Notation sehr trivial erscheinen. Für Schüler und Schülerinnen der Primarstufe kann dieses System gemeinsam mit vielseitigen Veranschaulichungen eine große Hilfe sein.

Das Konzept des Bündelns wird auch benutzt, um Vorgehensweisen bei Rechenoperationen leicht darzustellen. An dieser Stelle sei dies nur kurz anhand der Addition gezeigt. Für die Multiplikation und Division folgen die Erklärungen zu einem späteren Zeitpunkt.

Wird beispielsweise die Rechnung $26 + 32$ durchgeführt, so werden die Einer und Zehnerstellen einzeln addiert um zum Ergebnis zu kommen. Es gibt insgesamt acht Einer und fünf Zehner, weswegen das Ergebnis 58 sein muss. Das Konzept des Bündelns kommt hinzu, wenn eine Zehnerstelle überschritten wird, beispielsweise bei der Rechnung $17 + 25$. Addiert man vorerst die Einer, so erhält man zwölf. Diese Anzahl lässt sich zu einem Zehner bündeln wobei zwei Einer übrigbleiben. Addiert man anschließend die Zehner so erhält man drei. Hinzu kommt einer von der Bündelung, womit schlussendlich vier Zehner und zwei Einer vorhanden sind. Die gesuchte Zahl ist also 42. Diese Vorgehensweise lässt sich auch anhand einer Stellenwerttafel gut veranschaulichen.

Das dezimale Stellenwertsystem bildet auch eine Grundlage für die Dezimalzahlen, da es auf Bruchteile von Einern erweitert und somit analog fortgeführt werden kann. Padberg berichtet aufgrund einer Untersuchung von Heckmann, dass zu Beginn der Behandlung der Dezimalzahlen nicht davon ausgegangen werden kann, dass diese Erweiterung den Schülern und Schülerinnen bereits bekannt ist[19]. Deswegen wird empfohlen, dass diese sorgfältig erarbeitet und besprochen wird, um ein gutes Verständnis zu ermöglichen. Auch die Wiederholung der Grundlagen aus der Primarstufe halte ich für sinnvoll und wichtig. Einige andere Autoren und Autorinnen betonen ebenfalls die Wichtigkeit des Stellenwertsystems und sprechen sich für eine ausführliche Behandlung im Unterricht aus[20].

[19] Padberg, 2012, 166f

[20] Unter anderem Heckmann in diversen Werken, Marxer/Wittmann 2012, Gravemeijer 1997, Wearne/Hiebert 1986, Mosandl/Sprenger 2014

Auf die Bedeutung und häufig auftretende Schwierigkeiten durch die Erweiterung des Stellenwertsystems wird zu einem späteren Zeitpunkt eingegangen, wenn es um sogenannte Grundvorstellungsumbrüche geht.

1.1.3 Der Zahlenstrahl

Dem Zahlenstrahl (beziehungsweise der Zahlengerade) wird in der fachdidaktischen Literatur oft eine große Bedeutung für die reellen Zahlen zugeschrieben[21]. Er erweist sich meiner Meinung nach insbesondere bei der Behandlung von Dezimalzahlen als sehr hilfreich.

Mithilfe des Zahlenstrahls werden bereits ab der ersten Klasse Volksschule die natürlichen Zahlen und ihre Ordnung veranschaulicht, was die folgende Abbildung beispielhaft zeigen soll.

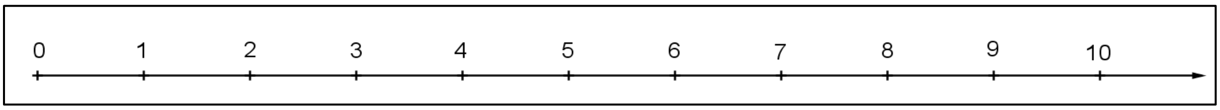


Abbildung 1: Zahlenstrahl, eigenständig gezeichnet mit Geogebra

Durch eine Verfeinerung dieser Darstellung, kann direkt zu einer Veranschaulichung der Dezimalzahlen und ihrer Anordnung übergeleitet werden. Dieser Schritt ist besonders für ein gutes Verständnis der Ordnung der Dezimalzahl von großer Wichtigkeit, da schon in diesem Zusammenhang häufig auftretenden Fehlern beziehungsweise Missverständnissen vorgebeugt werden kann.

Die erwähnten Verfeinerungen könnten wie folgt aussehen:

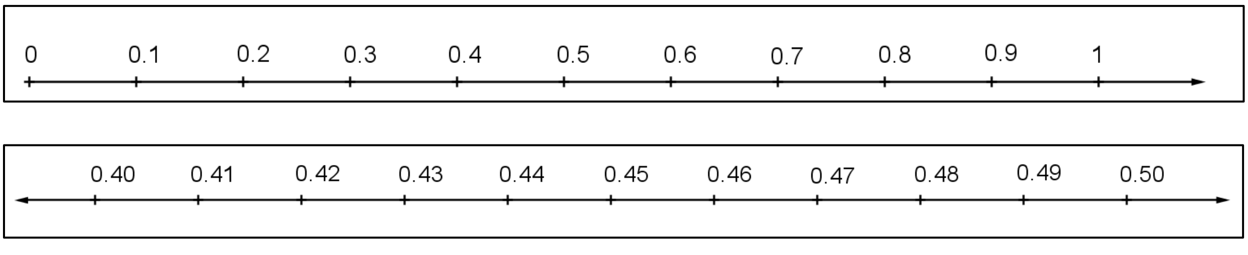


Abbildung 2: Zahlenstrahl bzw. Zahlengerade mit kleineren Intervallen, eigenständig gezeichnet mit Geogebra

Je größer der Abstand zwischen zwei Zahlen gewählt wird, desto genauer können auch Dezimalzahlen mit mehreren Nachkommastellen dargestellt werden. Diese Methode wird auch, wie bereits erwähnt, in einigen Schulbüchern angewandt, um eine Veranschaulichung für die Dezimalzahlen zu liefern.

[21] Büchter/Henn, 2010, 105ff; Kramer, 2008, 179ff

Die Zahlengerade hat beim Erlernen der Konzepte der Dezimalzahlen eine wichtige Bedeutung für Schüler und Schülerinnen. Der Hauptgrund dafür liegt darin, dass Kinder vor der Behandlung dieser Art von Zahlen oft schon Erfahrungen mit Längenmaßen sammeln konnten[22] (Die untersuchten Schüler und Schülerinnen wurden bei dieser Studie zu Beginn der sechsten Schulstufe getestet, also bevor die Dezimalzahlen behandelt wurden[23]). So kann ein Großteil dieser Kinder auf einem vorgefertigten Zahlenstrahl die richtige Dezimalzahl einzeichnen.

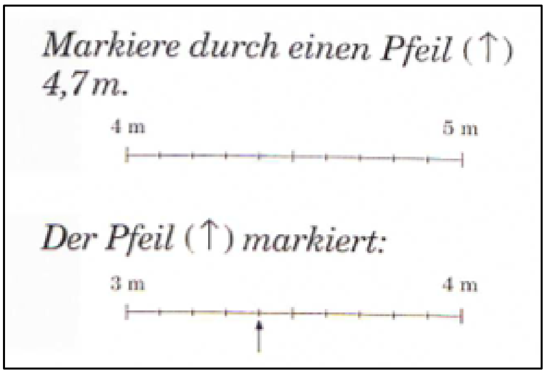


Abbildung 3: Aufgabe mit Zahlenstrahl, [Padberg, 2004, 42]

Deutlich schwieriger fällt es denselben Schülern und Schülerinnen, die Zahl 0,5 eigenständig grafisch darzustellen. Diese wird oft mit der Strecke 0,5 cm identifiziert, was den starken Bezug zu Längenmaßen verdeutlicht. Nur sehr wenige stellen die Zahl als die Hälfte einer bestimmten Figur dar und ein Großteil beantwortet die Aufgabe gar nicht.

Diese Ergebnisse der empirischen Untersuchung machen in meinen Augen deutlich, dass eine Veranschaulichung anhand von Längenmaßen beziehungsweise einer Zahlengerade besonders wichtig ist, da sie an den Vorkenntnissen der Schüler und Schülerinnen anknüpft. Wichtig ist jedoch auch eine ausführliche Erklärung, da die vorhandenen Kenntnisse offenbar nicht vollständig ausgeprägt sind und Dezimalzahlen automatisch mit Längenmaßen assoziiert werden, was in weiterer Folge zur Ausprägung einer Fehlvorstellung führen kann.

Des Weiteren kann die Zahlengerade sehr gut zur Erklärung des Größenvergleichs oder einfacher Rechenoperationen benutzt werden, wie es in manchen Schulbüchern der Fall ist. Jens Holger Lorenz schlägt in seinem Artikel in der Zeitschrift Mathematik Lehren eine Methode zum Addieren von natürlichen Zahlen vor, die mithilfe des Zahlenstrahles eine Veranschaulichung bieten soll. Diese kann meiner Ansicht nach im Zusammenhang mit der Erweiterung des Stellenwertsystems auch

---

[22] Padberg, 2004, 42f

[23] Dazu ist anzumerken, dass die Dezimalzahlen in Deutschland, wo die Studie entstand, erst in der sechsten Schulstufe eingeführt werden und nicht wie in Österreich in der fünften Schulstufe.

hervorragend auf Dezimalzahlen umgelegt werden. Näheres zu der Methode findet sich im erwähnten Artikel[24].

1.1.4 Weitere anschauliche Vorstellungen für Dezimalbrüche

Heckmann stellt fest, dass es für Schüler und Schülerinnen sehr vorteilhaft sein kann, wenn diese bei Rechenoperationen mit Dezimalzahlen auf gewisse Erfahrungen im Umgang mit diversen Größen zurückgreifen können[25]. Auch die eben erwähnte Untersuchung von Padberg zeigt das Potenzial von Vorerfahrungen mit Längenmaßen. Dies kann durch die Wahl geeigneter Sachkontexte durch den Lehrer beziehungsweise die Lehrerin bewirkt werden. Bei einer Studie aus dem Jahr 2006 konnte festgestellt werden, dass die Lösungsquote von teils schwierigen Rechenaufgaben durch Einbettung in einen vertrauten Sachkontext positiv beeinflusst werden konnten[26].

Dabei wird betont, dass es sich dabei um möglichst bekannte Kontexte für Kinder, wie Geldbeträge oder Längenmaße, handeln sollte. Würde man dasselbe Konzept mit weniger vertrauten Sachverhalten anwenden, so würde die gewünschte Wirkung ausbleiben oder nur sehr abgeschwächt auftreten.

Den Hauptgrund dafür und somit auch für die positive Wirkung von Sachkontexten sieht Heckmann in der reflektierten Betrachtung des Ergebnisses durch die Schüler und Schülerinnen. Behandelt ein Schüler oder eine Schülerin beispielsweise die Multiplikation $2{,}35 \cdot 3$, so könnte die Komma-Trennt-Vorstellung hier (für eine Erklärung siehe weiter unten) zum Ergebnis 6,105 führen. Bettet man jedoch das Beispiel in einen geeigneten Kontext ein, also zum Beispiel den Kauf von drei Objekten um je 2,35€, so kann die gute Kenntnis von Geldwerten dazu führen, dass ein falsches Ergebnis selbstständig erkannt und ausgebessert werden kann. Obwohl durch Textaufgaben zusätzlich Schwierigkeiten auftreten können, verursacht durch Probleme mit der Modellbildung, ist also eine Einbettung in geeignete Sachkontexte durchaus wünschenswert und oft sehr effektiv. Das kritische Betrachten des Ergebnisses ist eine sehr positive Tätigkeit, die bei allen Schülern und Schülerinnen gefördert werden sollte. Dennoch ist bei der häufigen Verwendung von Einheiten vor allem anfänglich Vorsicht geboten, um die Entwicklung von Fehlvorstellungen zu vermeiden.

Heckmann stellt in diesem Zusammenhang sogar eine starke Ambivalenz bezüglich der Verwendung von Größen zur Behandlung von Dezimalzahlen fest[27], da in mehreren Untersuchungen sowohl Vorteile als auch Nachteile bestätigt werden (auf diese wird im Laufe der Arbeit noch eingegangen). Alleine aufgrund des Realitätsbezuges ist es jedoch durchaus wichtig diesen Aspekt nicht zu

[24] Lorenz, 2003, 14ff
[25] Heckmann, 2011, 56ff
[26] Ebd.
[27] Heckmann, 2006a, 240

vernachlässigen. Essenziell für Lehrpersonen ist es meiner Meinung nach, die Schwierigkeiten zu kennen um diese bestmöglich zu vermeiden.

1.2 Grundvorstellungen und deren Umbrüche

Wie schon im Abschnitt über Lehrpläne erwähnt, wird das Thema der Dezimalzahlen in Österreich erstmals in der Volksschule aufgegriffen. Bei der Behandlung dieses und auch weiterer Themen kommt es hier natürlich zu gewissen Vorstellungen, welche die Kinder selbstständig finden. Natürlich sind diese in erster Linie von Kind zu Kind (und in weiter Folge natürlich auch von Klasse zu Klasse) unterschiedlich, jedoch lassen sich einige Grundvorstellungen festmachen, die relativ häufig bei Schülern und Schülerinnen, welche die Primarstufe absolvieren, beobachtet werden können. Hierbei handelt es sich beispielsweise um Vorstellungen, die bei der Auseinandersetzung mit natürlichen und ganzen Zahlen angewöhnt beziehungsweise antrainiert worden sind und auf andere Themenbereiche übertragen werden.

In diesem Abschnitt geht es also nicht nur um Umbrüche bei Vorstellungen in Bezug auf Dezimalzahlen, sondern auch um andere Themen, die eine Auswirkung auf die spätere Behandlung und den Umgang mit diesen haben können.

Ergänzend sei erwähnt, dass für alle diese Fehlvorstellungen gilt, dass sie sich dann negativ auswirken, wenn sie unbeachtet beziehungsweise unerkannt bleiben. Das Entstehen dieser Vorstellungen ist meistens nur schwer zu vermeiden, da sie oft durch logisch erscheinende Schlussfolgerungen beziehungsweise Verallgemeinerungen entstehen. Die Schüler und Schülerinnen wissen es oft nicht besser und die Lehrer und Lehrerinnen können nicht alle Problematiken sofort erkennen, beziehungsweise jedem dieser Aspekte entgegenwirken. Wichtig für Lehrpersonen ist es vor allem, über die Fehlvorstellungen Bescheid zu wissen und diese zu erkennen, wenn sie auftreten um schon möglichst früh dagegen vorgehen zu können.

1.2.1 Das Komma als Trennmarke

Selbst wenn man den Lehrplan der Volksschule außer Acht lässt, so stellt man fest, dass die Dezimalzahlen oft schon in der Lebenswelt von Kindern von Bedeutung sind. Vor allem mit Geldbeträgen, Massen- und Längenmaßen (zum Beispiel Gewicht, Entfernungen) oder auch Zeiteinheiten (zum Beispiel beim Sport) haben die Kinder häufig schon Erfahrung gesammelt. Gerade diese Aspekte werden auch oft in der Volksschule aufgegriffen, da es natürlich sinnvoll ist Themen zu behandeln, die von großer Relevanz im täglichen Leben sind.

Wie Padberg richtig bemerkt[28], kann diese frühe Einführung und Behandlung von Dezimalzahlen anhand bekannter Größen zu problematischen Grundvorstellungen führen. Eine dieser Vorstellungen entsteht, wenn das Komma nur als „Trennmarke“ zwischen verschiedenen Einheiten benutzt wird und nicht als „Anzeige“ für die nachfolgenden Bruchteile. Eine detaillierte Betrachtung der Theorie kommt in der Volksschule natürlich nicht in Frage, weswegen diese Vorstellung gut nachvollziehbar ist.

Zum Beispiel entsprechen 3,98 € natürlich drei Euro und 98 Cent (entsprechende Formulierungen gelten auch bei anderen Einheiten). Die Umformulierung ist ja auch nicht falsch, jedoch verbirgt sich die Gefahr in der sehr leicht folgenden Übergeneralisierung beziehungsweise der Schlussfolgerung, dass ein Komma stets ein Trennzeichen für zwei natürliche Zahlen darstellt[29]. Diese Vorstellung wird auch dadurch verstärkt, dass Dezimalzahlen in Schulbüchern oft genau zwei Nachkommastellen aufweisen[30].

Es handelt sich hierbei um eine Grundvorstellung, welche, festgefahren und verallgemeinert, zu einigen weiteren Problemen führen kann (siehe „Komma-Trennt-Fehler“). Diese soll zu einem späteren Zeitpunkt noch vorgestellt und behandelt werden sollen.

Ergänzend sei gesagt, dass dies keine Kritik an dem Lehrplan der Volksschule sein soll, da ich eine Behandlung alltäglicher Größen (wie beispielsweise Geldeinheiten) für durchaus wichtig erachte um einen Bezug zur Realität herzustellen. Heckmann räumt auch ein, dass der Bezug zu Größen bei Rechenoperationen (besonders bei Geldwerten) oft bessere Ergebnisse bewirkt als das Rechnen mit abstrakten Größen[31]. Man muss sich aber jedenfalls, wie schon erwähnt, (vor allem als Lehrer in der Primar- und Sekundarstufe) über diese Problematiken im Klaren sein um, Fehlvorstellungen gezielt entgegenwirken zu können.

In meinen Augen ist es auch nicht problematisch, wenn in der Volksschule das Komma als Trennmarke eingeführt wird[32], da es zu diesem Zeitpunkt ausschließlich im Zusammenhang mit Größen verwendet wird und keine systematische Behandlung stattfindet. In der Sekundarstufe I ist diese Formulierung meiner Meinung nach sehr wohl problematisch, da hier die Verallgemeinerung dieser Vorstellung keineswegs bekräftigt werden sollte. Es wird sich jedoch zeigen, dass in einigen Schulbüchern sehr wohl genau diese Formulierung benutzt wird.

---

[28] Padberg, 2012, 173
[29] Thiemann, 2004b, 582
[30] Heckmann, 2005, 72f
[31] Heckmann, 2011, 56f
[32] Wie zum Beispiel in Grosser/Koth, 2008a, 52

1.2.2 Nachfolger und Vorgänger

Dezimalzahlen haben keinen unmittelbaren Vorgänger oder Nachfolger[33]. Bei den natürlichen Zahlen sind diese Nachbarn einer Zahl leicht zu finden (zum Beispiel hat 5 als Vorgänger 4 und als Nachfolger 6), bei der Betrachtung rationaler Zahlen ist dies nicht mehr möglich.

Die Erfahrung mit Geld oder Längenmaßen ist hier nicht unbedingt von Vorteil. In der Praxis gibt es keine kleinere Geldeinheit als den Cent, weswegen argumentiert werden kann, dass der nächsthöhere Geldbetrag von beispielsweise 11,63 € auf jeden Fall 11,64 € sein muss. Beträge wie 11,634 € existieren in der Erfahrung eines Kindes nicht, da es ja auch die entsprechenden Münzen nicht gibt. Ähnliches gilt beispielsweise bei Längenmaßen und deren praktischer Anwendung (zumeist kennen die Schüler und Schülerinnen nur Zentimeter und Millimeter, kleinere Einheiten sind weder bekannt noch mit den verfügbaren Mitteln messbar). Dies führt beispielsweise auch dazu, dass gewisse „Feinheitsgrade" nicht mehr auf dem Zahlenstrahl darstellbar sind. Viele Dezimalzahlen können also keinem eindeutigen Punkt mehr zugeordnet werden, anders als bei den ganzen Zahlen[34].

1.2.3 Multiplizieren vergrößert und Dividieren verkleinert

Diese Grundvorstellung entsteht durch die Tatsache, dass die Rechenoperationen Multiplikation und Division in der Volksschule nur im Bereich der natürlichen Zahlen gelernt und geübt werden[35]. Multipliziert man zwei ganze Zahlen miteinander, so ist das Ergebnis, zumindest betragsweise, immer größer, als die beiden Zahlen von denen man ausgegangen ist. Bei der Division ganzer Zahlen verhält es sich analog; hier ist das Ergebnis der Division immer betragsweise kleiner als der Dividend. Diese Grundvorstellung geht mit der Einführung der rationalen Zahlen (beziehungsweise der Bruchzahlen) verloren. Für die Veränderung dieser Grundvorstellung ist die Multiplikation und Division mit Zahlen zwischen 0 und 1 verantwortlich. Multipliziert man beispielsweise eine Zahl mit 0,5 so wird diese jedenfalls betragsweise kleiner (analog wird bei der Division die Zahl größer).

Als dritte Fehlvorstellung in diesem Zusammenhang, die allerdings wesentlich seltener thematisiert wird, nennt Thiemann[36] die KDG-Vorstellung. Es handelt sich dabei um die Auffassung, man könne nur größere Zahlen durch kleinere dividieren. Auch diese Vorstellung entsteht durch die üblichen Aufgaben zur Division in der Volksschule.

---

[33] Padberg, 2012, 164
[34] Ebd.
[35] Thiemann, 2004a, 1
[36] Ebd., KDG steht hier als Abkürzung für „Man-kann-**k**eine-kleinere-Zahl-**d**urch-eine-**g**rößere-dividieren"

Ein weiterer Grund für die Entstehung sind die Modelle, welche in der Volksschule zur Erklärung der Multiplikation und Division verwendet werden[37]. So wird beispielsweise die Multiplikation als wiederholte Addition aufgefasst. Diese Sichtweise scheitert jedoch, sobald man Multiplikatoren verwendet, die nicht ganzzahlig sind. Betrachtet man die Aufgabe $4 \cdot 0{,}2$ so kann man diese nicht auf die oben genannte Art interpretieren; man müsste 0,2-mal die Zahl 4 zu sich selbst addieren. Durch die Vertauschung der Faktoren kann man sich in diesem Fall noch helfen, also 4-mal die Zahl 0,2 zu sich selbst addieren, jedoch scheitert auch diese Interpretation sobald zwei Dezimalzahlen miteinander multipliziert werden sollen.

Bei der Division ist es die Deutung als Verteilung, die Schwierigkeiten bereiten kann. So könnte eine Division wie beispielsweise $4:2$ erklärt werden, durch die gleichmäßige Verteilung von vier Äpfeln an zwei Personen. Lautet die Division jedoch $4:0{,}2$ so müsste man vier Äpfel an 0,2 Personen verteilen, was praktisch nicht möglich ist. In diesem Zusammenhang kann auch die KDG-Vorstellung erklärt werden. Lautet die Aufgabe nämlich $3:5$ so müsste man drei Äpfel an fünf Personen gleichmäßig verteilen, was (ohne Teilung der Äpfel) nicht möglich ist.

Hefendehl-Hebeker und Prediger berichten in diesem Zusammenhang, dass Schüler und Schülerinnen bei ersten Erfahrungen mit diesem Phänomen sogar eher dem Taschenrechner misstrauen als die Grundvorstellung zur Multiplikation zu verwerfen[38]. Das zeigt die Hartnäckigkeit der angelernten Vorstellungen und verlangt von der Lehrperson, sehr aufmerksam zu sein und auf solche ‚Entdeckungen' einzugehen. Die Kinder bemerken teilweise offenbar selbstständig die Ambivalenzen und es benötigt somit oft nur die helfende Hand eines Lehrers beziehungsweise einer Lehrerin, um das Missverständnis aufzuklären.

1.2.4 Erweiterung des Stellenwertsystems

Stellenwerte sind ein bewährtes Hilfsmittel um den Umgang mit Zahlen zu erleichtern. Man kann für jede Zahl ihre Einer-, Zehner-, Hunderterstelle (usw.) bestimmen um somit Klarheit über den Wert der Zahl zu verschaffen. Wie bereits erwähnt handelt es sich um ein Modell, das in der Volksschule sehr häufig angewandt wird, um ein besseres Verständnis der Schüler und Schülerinnen zu erzielen. Für das Kapitel der Dezimalzahlen ist die Erweiterung des Stellenwertsystems essenziell, da nur so auch die Rechenoperationen mit Dezimalzahlen tatsächlich verstanden werden können[39].

[37] Ebd.
[38] Hefendehl-Hebeker/Prediger, 2006, 3
[39] Heckmann, 2006b, 245f

Bei den Dezimalzahlen ergeben sich nun mehrere Änderungen, welche für Schüler und Schülerinnen schwer greifbar sein könnten[40]. Eine dieser Umstellungen wird durch einen neuen Bezugspunkt verursacht; der Bezugspunkt einer ganzen Zahl ist immer die letzte Ziffer (also die, die am weitesten rechts steht), als Einer-Ziffer. Von dieser wird ausgegangen, um Zehner, Hunderter, Tausender und so weiter zu bestimmen. Bei den Dezimalzahlen ist das Komma der neue Bezugspunkt. Von dieser Stelle aus findet man nach links gehend Einer, Zehner, Hunderter und so weiter. Geht man aber nach rechts (in Richtung der Nachkommastellen), so ist der erste Stellenwert nicht etwa ein ‚Eintel' (wie man aus Analogiegründen annehmen könnte), sondern ein Zehntel.

Auch der Zusammenhang zwischen den Stellenwerten erweist sich teilweise für Schüler und Schülerinnen als verwirrend. So sind zehn Einer beispielsweise immer ein Zehner, zehn Zehner ein Hunderter und so weiter. Zehn Hundertstel sind aber nicht etwa ein Tausendstel, sondern ein Zehntel. Die Stellenwerte der Nachkommastellen werden also „in die andere Richtung gebündelt".

Untersuchungen von Heckmann zeigen, dass selbst nach der Behandlung von Dezimalzahlen im Unterricht das Verständnis des Stellenwertsystems sehr zu wünschen übrig lässt[41]. Dies mag ein Grund dafür sein, warum von Schülern und Schülerinnen viele Fehlvorstellungen und falsche Lösungsstrategien entwickelt werden, die in der restlichen Schulzeit möglicherweise zu gröberen Problemen führen. Das Stellenwertsystem wird in der Literatur sehr häufig im Zusammenhang mit Dezimalzahlen angeführt und großteils als sehr wichtig und sinnvoll empfunden. Wie Heckmann jedoch bemerkt, wird es in der Schule sehr oft vernachlässigt[42], da es häufig für die Einführung beziehungsweise zum Lösen von „Routineaufgaben" nicht unbedingt notwendig ist. Der tatsächliche Mangel zeigt sich erst später, wenn es zu schwierigeren Aufgaben (die beispielsweise genaueres Verständnis voraussetzen) oder Zahlenbereichserweiterungen (Dezimalzahlen) kommt. Zu diesem Zeitpunkt ist es aber häufig schon sehr schwierig, den falschen Vorstellungen die zuvor entwickelt wurden entgegenzuwirken. Deswegen wird empfohlen im Unterricht gleich zu Beginn einige Punkte zu betonen, die Probleme bereiten können, wie beispielsweise, dass die Reihe der Stellenwerte eine feste Ordnung hat, dass keine „Eintel" existieren und wie genau die Stellenwerte vor und nach dem Komma zusammenhängen (zum Beispiel Zehner, Zehntel, Hunderter, Hundertstel)[43]

---

[40] Padberg, 2012, 164
[41] Padberg, 2012, 176
[42] Heckmann, 2011, 56
[43] Heckmann, 2006b, 246

1.3 Fehlvorstellungen und -strategien beim Arbeiten mit Dezimalzahlen

Die oben erwähnten Grundvorstellungsumbrüche und diverse weitere Einflüsse führen oft zu Fehlern und Fehlvorstellungen beziehungsweise Fehlerstrategien die sich bei einer größeren Anzahl von Schülern und Schülerinnen häufen. Einige dieser Probleme sollen hier aufgeführt und erklärt werden. Die Auflistung erhebt jedoch keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit.

Zusätzlich sei erwähnt, dass sich Fehlvorstellungen dieser Art sehr lang und hartnäckig festsetzen können. Beweis dafür sind Studien, wie die von Pierce et. al., die zeigen, dass das Dezimalzahlverständnis auch bei Studenten beziehungsweise Erwachsenen zum Teil sehr lückenhaft sein kann[44].

1.3.1 Größenvergleich von Dezimalzahlen

In diesem Themenbereich spielt der Größenvergleich von Dezimalzahlen eine wichtige Rolle. Auf den ersten Blick mag das Vergleichen zweier Zahlen nicht unbedingt als große Herausforderung oder guter Indikator erscheinen. Es zeigt sich jedoch, dass sich die Vorstellung von Schülern und Schülerinnen anhand solcher Beispiele sehr gut überprüfen lässt[45]. Wichtig dabei ist die Auswahl der Aufgaben. Werden beispielsweise zwei Dezimalzahlen mit derselben Anzahl an Kommastellen verglichen, so kann fehlerlos auf eine bei den natürlichen Zahlen verwendete Strategie zurückgegriffen werden. Dies ist einerseits nachvollziehbar, andererseits jedoch auch der Hintergrund einiger der genannten Fehlvorstellungen, nämlich eine fehlerhafte Übergeneralisierung von bereits gelernten Methoden[46]. Bei anderen Aufgaben, hauptsächlich beim Vergleich von Dezimalzahlen mit einer unterschiedlichen Anzahl an Kommastellen, kommt man oft mit den gleichen Methoden zu falschen Ergebnissen, die auf diese fehlerhaften Vorstellungen hindeuten. Aufgrund dessen ist es einerseits sehr wichtig, im Unterricht diverse Arten von Beispielen zu behandeln und andererseits auch großen Wert auf das erweiterte Stellenwertsystem zu legen, um fehlerhafte Übertragungen von den natürlichen Zahlen zu vermeiden.

---

[44] Pierce et. al., 2008, 12f oder auch Thiemann, 2004a, 4
[45] Heckmann, 2006a, 75ff bzw. Pierce et. Al., 2008, 3
[46] Moloney/Stacey 1997, 26

1.3.2 Diverse Fehlvorstellungen im Zusammenhang mit Dezimalzahlen

Die Namen der verschiedenen Strategien sind von Padberg und Heckmann übernommen[47], welche die folgenden Fehlvorstellungen zumeist mit dem eben erwähnten Größenvergleich von Dezimalzahlen in Verbindung bringen. Wenngleich dies sehr gut nachvollziehbar ist, da sich die angeführten Strategien gut durch Aufgaben zum Größenvergleich testen lassen, muss dennoch dazu gesagt werden, dass die Auswirkungen teilweise sehr viel weiter gehen[48]. Ist eine Fehlvorstellung bei einem Schüler oder einer Schülerin nachhaltig ausgeprägt, so wirkt sich diese beispielsweise auch auf die Rechenoperationen mit Dezimalzahlen aus. Diese Folgen werden zu einem späteren Zeitpunkt besprochen, wenn es um die Multiplikation und Division von Dezimalzahlen geht.

Padberg erwähnt, dass viele dieser Fehlvorstellungen beziehungsweise Strategien „umgangen" werden können, indem bei den jeweiligen Dezimalzahlen Endnullen angehängt werden, um auf dieselbe Anzahl von Dezimalen zu kommen[49]. Sind bei beiden zu vergleichenden Zahlen gleich viele Stellen nach dem Komma vorhanden, so wird der Größenvergleich aufgrund der Analogie zu den ganzen Zahlen erheblich einfacher. Gleichzeitig wird aber auch vor dieser Vorgehensweise ausdrücklich gewarnt, da hier lediglich Symptome bekämpft werden und nicht, wie es wünschenswert wäre, das grundlegende Verständnis gefördert wird. Die Schüler und Schülerinnen können dann zwar Aufgaben zum Größenvergleich mit einer höheren Erfolgsquote lösen, ihnen ist aber dadurch nicht geholfen, da sie oft keine tatsächliche Einsicht in die Problematik gewinnen. Die jeweiligen Fehlvorstellungen werden immer noch angewandt, aber es kann nicht mehr erkannt werden, da sie „verschleiert" werden.

1.3.2.1 Kein-Komma-Strategie

Die sogenannte KK-Strategie entsteht durch die Anschauung der Dezimalzahlen ohne Berücksichtigung des Kommas. Das bedeutet in anderen Worten, dass anstatt einer Kommazahl eine natürliche Zahl gesehen wird, die entstünde, wenn das Komma gelöscht würde[50].

[47] Vgl. unter anderem Padberg 1991/2012, Heckmann 2005/2006a/2011
[48] Vor allem die KT-Strategie wird bei der Betrachtung der Rechenoperationen noch eine Rolle spielen.
[49] Padberg, 2012, 185f
[50] Padberg, 2012, 182

Die Zahl 4,75 wird also beispielsweise als 475 interpretiert. Dies kann beim Größenbereich zu Problemen führen, die hier kurz veranschaulicht werden sollen:

- $3{,}49 > 4{,}8$ da 349 größer ist als 48
- $0{,}26 < 0{,}247$ da 26 kleiner ist als 247

Die Vorstellung kann aber auch durch unglücklich gewählte Beispiele verstärkt werden, da sie bei der gleichen Anzahl an Kommastellen immer zum richtigen Ergebnis führt. So ist beispielsweise 0,823 tatsächlich kleiner als 0,927. Das bedeutet für Lehrpersonen und Schulbücher, dass es sehr wichtig ist, eine gute Variation von Beispielen anzubieten, damit die Möglichkeit besteht, die fehlerhafte Denkweise aufzudecken und diese nicht durch eine Reihe richtiger Ergebnisse zu bestärken.

1.3.2.2 Komma-Trennt-Strategie

Die sogenannte KT-Strategie ist durch eine Interpretation des Kommas als Trennmarke zwischen zwei natürlichen Zahlen zu erklären[51]. Von Schülern oder Schülerinnen, welche diese Vorstellung haben, wird also beispielsweise 15,87 nicht als eine ‚eigenständige' Zahl angesehen, sondern als die beiden Zahlen 15 und 87, die durch ein Komma getrennt werden.

In Bezug auf den Größenvergleich von zwei Dezimalzahlen wirkt sich diese Anschauung in manchen Fällen negativ aus, nicht aber in allen (die Fälle sind vergleichbar mit der KK-Strategie).

So würde die Strategie beim Vergleich von Zahlen mit derselben Anzahl an Nachkommastellen funktionieren, also beispielsweise $5{,}16 < 5{,}45$ da $5 = 5$ und $16 < 45$. Kommt es jedoch zum Vergleich zweier Zahlen mit einer unterschiedlichen Anzahl an Stellen nach dem Komma, so kann diese Sichtweise zu Problemen führen. Zum Beispiel ist dann $0{,}1 < 0{,}08$ weil die Eins kleiner als Acht ist, oder $2{,}47 < 2{,}114$ weil $47 < 114$ gilt.

Heckmann, Padberg und Thiemann[52] geben in ihren Publikationen besonders einen Aspekt als Begründung für die Entstehung dieser Strategie an; die alltägliche Sprechweise für Dezimalzahlen. So wird beispielsweise die Zahl 3,75 als Drei-Komma-Fünfundsiebzig bezeichnet, obwohl die richtige Formulierung Drei-Komma-Sieben-Fünf lauten würde. Diese Sprechweise fördert die Vorstellung, dass es sich bei dem Teil der Zahl hinter dem Komma tatsächlich um eine natürliche Zahl handelt. Bezüglich dieser Sprechweise finden sich in einem späteren Abschnitt noch einige Beobachtungen.

---

[51] Padberg, 2012, 183

[52] Heckmann, 2005, 74; Padberg, 1991b, 51; Thiemann, 2004b, 582

Mosandl und Sprenger sehen eine weitere Begründung für die Entstehung der Fehlvorstellung in der Art und Weise, wie Geldbeträge von Kindern verstanden werden[53] (In österreichischen Volksschulen ist es durchaus üblich, im Mathematikunterreich mit Euro- und Centbeträgen zu rechnen) und in einer fälschlichen Übergeneralisierung. Im Falle von Geld trennt das Komma ja tatsächlich zwei Einheiten (bzw. Beträge), nämlich Euro und Cent, was die Interpretation durchaus verständlich macht. Der Größenvergleich wird dann wie bei den natürlichen Zahlen von links nach rechts durchgeführt und somit kann es passieren, dass 5,5 für kleiner als 5,48 gehalten wird, da die Zahlen nach dem Komma (welche den Centbeträgen entsprechen würden) auch in diesem Verhältnis zu einander stehen. Dass es sich bei einem Betrag von 5 Cent eigentlich um 0,05 Euro (und eben nicht um 0,5 Euro) handelt wird in diesem Fall nicht beachtet, beziehungsweise von dem Schüler oder der Schülerin nicht eingesehen.

Eine vergleichbare Fehlvorstellung findet sich in einer Studie von Moloney und Stacey[54], angeführt als „Whole-Number-Rule". Der Autor beziehungsweise die Autorin beziehen sich bei der Definition auf eine Studie aus dem Jahr 1985, von Sackur-Grisvard und Leonard, welche die folgende Beobachtung beschreiben[55]:

„Some Students systematically chose the number with more digits after the decimal point as the larger. This is called the whole-number rule. They would say that 4,125 is greater than 4,7 because the whole number 125 is larger than 7. The decimal point is recognised [sic] but only as a separator and the decimal portion is often read as a whole number, for example 'four point one hundred and twenty five' rather than the conventional 'four point one two five'."

Die Beschreibung stimmt also mit der oben angeführten KT-Strategie überein und zeigt somit, dass auch in anderen Teilen der Welt dieselben Probleme zu finden sind wie in Deutschland und Österreich. Besonders interessant ist die Grafik, welche in der Publikation zur Verfügung gestellt wird. Diese veranschaulicht die Vorstellung, die ein Schüler oder eine Schülerin der/die die „Whole-Numer-Rule" (und somit auch die KT-Strategie) verfolgen, von der Reihenfolge von Dezimalzahlen haben (siehe Abbildung 4).

[53] Mosandl/Sprenger, 2014, 16f
[54] Moloney/Stacey, 1997, 26f
[55] ebd

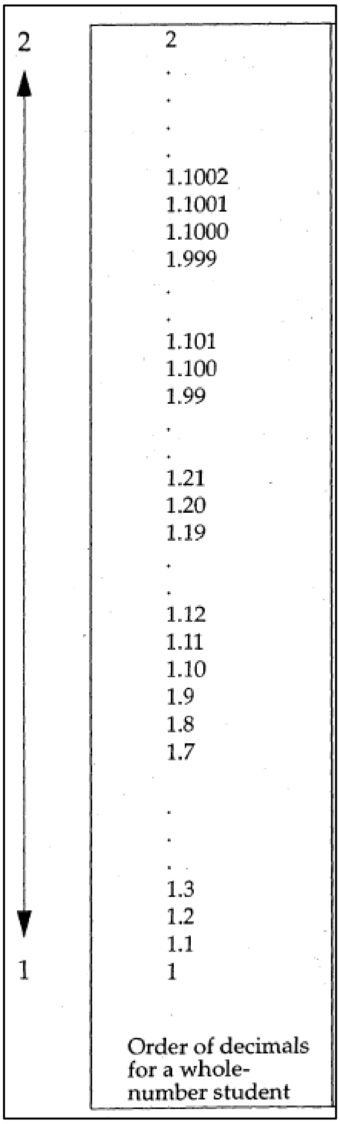


Abbildung 4: Reihenfolge von Dezimalzahlen laut der „Whole-Number-Rule", [Moloney/Stacey, 1997, 28]

Auch Mehmetlioglu und Resnick et. al. berichten von einigen internationalen Studien, die sich mit der „Whole-Number Strategy" auseinandersetzen, was die weite Verbreitung und somit hohe Relevanz der Fehlvorstellung bestätigt[56]. Auch in seiner eigenen Studie, die in der Türkei durchgeführt wurde, bestätigt Mehmetlioglu, dass es sich hierbei um eine der wichtigsten Fehlerquellen handelt.

1.3.2.3 Nullstrategie

Schüler und Schülerinnen, die die Nullstrategie verfolgen, wissen, dass eine oder mehrere Nullen nach dem Komma bedeuten, dass die Zahl in der Regel vergleichsweise klein ist[57]. Das führt dazu, dass beim Größenvergleich diese Zahlen immer vorangeordnet werden. Die restlichen Zahlen, die dieses Kriterium nicht erfüllen, werden dann trotzdem oft nach der KT- oder KK-Strategie geordnet. Die

[56] Mehmetlioglu, 2014, 570 bzw. Resnick et. al, 1989, 11ff
[57] Padberg, 2012, 183

Nullstrategie kann also als eine Verbesserung der anderen beiden, oben genannten Strategien interpretiert werden[58].

Die folgende Größenrelation wäre also beispielsweise laut der Nullstrategie richtig:

$$5.003 < 5.03 < 5.7 < 5.465$$

Die ersten beiden Zahlen werden hierbei nach der Anzahl der Nullen geordnet, die letzten beiden nach der KK- beziehungsweise der KT-Strategie. Klar ist aber, dass die ersten beiden Zahlen, durch die Nullen direkt nach dem Komma, kleiner sind als der Rest.

Zusätzlich sei noch gesagt, dass Moloney und Stacey festgestellt haben, dass die Nullstrategie bei Schülern und Schülerinnen (vor allem im Vergleich zu anderen Fehlvorstellungen) eher selten auftritt[59].

1.3.2.4 Je-mehr-Dezimalen-desto-kleiner-Strategie

Diese Fehlvorstelleng (kurz genannt MK-Strategie[60]) besagt, dass Dezimalzahlen kleiner sind, je mehr Kommastellen sie haben, beziehungsweise größer, je weniger Kommastellen sie haben. Demnach wäre also beispielsweise 0,53 kleiner als 0,4 oder 0,7 größer als 0,835.

Es finden sich mehrere plausible Begründungen für das Auftreten dieser Fehlvorstellung[61]:

- Es handelt sich möglicherweise um eine fehlerhafte Übergeneralisierung des Wissens um die Stellenwerte. Den Schülern und Schülerinnen ist bekannt, dass eine Dezimalstelle Zehntel, zwei Dezimalstellen Hundertstel, drei Dezimalstellen Tausendstel und so weiter bedeuten. Des Weiteren sind Tausendstel kleiner als Hundertstel, welche wiederum kleiner sind als Zehntel. Schlussendlich wird daraus nun fehlerhaft geschlossen, dass mehrere Dezimalstellen einen kleineren Stellenwert und somit auch eine kleinere Zahl bedeuten.
- Eine andere Option ist eine Reaktion auf die erkannte Fehlerhaftigkeit der KT- beziehungsweise der KK-Strategie. Diese ist, wie schon erwähnt, genau dann falsch, wenn eine unterschiedliche Anzahl an Kommastellen vorkommen. Die Zahl mit mehr Stellen wird dann automatisch als größer interpretiert. Wird die Erkenntnis über die Falsifizierung dieser Vorstellung nicht ordentlich reflektiert, so kann die Umkehrung direkt zur MK-Strategie führen.
- Bei Moloney und Stacey heißt diese Strategie auch „Fraction-Rule“. Die Begründung dafür liegt im Verwechseln der Kommazahlen mit Brüchen durch die Schüler und Schülerinnen. Dadurch kann es beispielsweise passieren, dass 0,3 als $\frac{1}{3}$ interpretiert wird. Die Zahl 0,67 wäre damit

[58] Padberg, 2012, 183; Moloney/Stacey, 1997, 27
[59] Moloney/Stacey, 1997, 34ff
[60] Bei Heckmann, 2006a, 78 wird diese Strategie mit KIG (für Kürzer-ist-größer) bezeichnet.
[61] Padberg, 2012, 183f; Moloney/Stacey, 1997, 27

kleiner als 0,3, da es sich ja um $\frac{1}{67}$ handeln würde. Es werden also die Regeln aus der Bruchrechnung übertragen wo ja tatsächlich der Bruch mit dem größeren Nenner kleiner ist, solange der Zähler gleich (oder insbesondere Eins) ist. Diese Begründung ist natürlich nur relevant, wenn die Behandlung der Bruchrechnung (oder zumindest der wesentlichen Elemente) vor der Behandlung der Dezimalzahlen stattfindet.

Heckmann beschreibt außerdem eine LIG-Strategie[62] (Länger-ist-größer), welche das genaue Gegenteil der soeben betrachteten Fehlvorstellung darstellt. Diese ist jedoch ident mit der KT- beziehungsweise der KK-Strategie, weswegen sie hier nicht extra nochmals behandelt wird.

1.3.3 Problematische Sprechweisen

Aus dem Alltag sind gewisse Sprechweisen bekannt, mit denen man Dezimalzahlen bezeichnen kann, welche zu Problemen im Unterricht beziehungsweise beim Verständnis führen können[63]. Diese Adaptierung ist aus Sicht der Schüler und Schülerinnen nur zu verständlich, wenn man bedenkt, dass anfangs ein sehr hoher Bezug zum Alltag herrschen soll. Natürlich werden hier bekannte Formulierungen übernommen. Es ist also vor Allem die Aufgabe der Lehrkraft, auf diese Feinheiten hinzuweisen, um Fehlvorstellungen möglichst früh zu vermeiden.

Betrachtet man beispielsweise die Dezimalzahl 5,34 so sollte diese formal als Fünf-Komma-Drei-Vier ausgesprochen werden. Häufig wird dieselbe Zahl jedoch umgangssprachlich als Fünf-Komma-Vierunddreißig bezeichnet. Vor allem wenn es um Geldwerte geht kann man dies oft beobachten. So spricht man beispielsweise von Fünf-Euro-Vierunddreißig oder kurz einfach nur von Fünf-Vierunddreißig[64].

Problematisch ist diese Formulierung, weil sie zu schwerwiegenden Fehlvorstellungen und Fehlern in Bereichen wie Kürzen/Erweitern, Größenvergleich von Dezimalzahlen und den Rechenoperationen führen kann. Hier ein paar Beispiele dazu, welche alle an die KT-Vorstellung erinnern[65]:

- Die Formulierung kann dazu führen, dass Schülern und Schülerinnen nicht klar ist, dass es sich bei 0,2 und 0,20 um dieselbe Zahl handelt, da zwei und 20 auch nicht dieselbe Zahl sind.
- Beim Größenvergleich kann es durch diese Formulierung sehr leicht zur Bildung einer Analogie kommen, die sich als problematische herausstellt. Aufgrund der Tatsache, dass 25 größer ist als 9 müsste auch 0,25 größer sein als 0,9.

[62] Hackmenn, 2006a, 77f
[63] Padberg, 2012, 164
[64] Thiemann, 2004b, 582
[65] Padberg, 2012, 165

- Ähnliches gilt auch für die Rechenoperationen Addition und Subtraktion. Die Summe von 25 und Neun ist 34, deswegen muss die Summe von 0,25 und 0,9 gleich 0,34 sein. Die gleiche Problematik findet sich analog beim Subtrahieren.

Untersuchungen von Heckmann und Mähr/Padberg[66] zeigen, dass die Kenntnis der richtigen, formalen Sprechweise im Laufe der schulischen Behandlung von Dezimalzahlen deutlich besser wird und die alltägliche, problematische Sprechweise nur noch von wenigen als formal richtig angesehen wird. Welche Sprechweise die Schüler jedoch verinnerlicht haben und somit benutzen, ist nicht festgehalten und scheint auch schwer zu testen.

1.3.4 Probleme beim Erweitern und Kürzen von Dezimalzahlen

Aus bereits erwähnten Gründen muss man dem Erweitern von Dezimalzahlen, welches sich durch Anhängen von Endnullen äußert, skeptisch gegenüberstehen, da die Methode im Falle des Größenvergleiches Fehlvorstellungen ‚verschleiern' kann. Dennoch sollte dieser Aspekt meiner Meinung nach, gemeinsam mit dem Kürzen, in der Schule nicht einfach ausgelassen werden. Worauf es ankommt, ist die richtige Vermittlung der Inhalte.

Vorerst sei kurz geklärt was mit Erweitern und Kürzen von Dezimalzahlen gemeint ist, da die Begriffe eigentlich hauptsächlich aus der Bruchrechnung bekannt sind. Es geht, wie bereits erwähnt, um das Anhängen und Wegstreichen von Endnullen. Die Zahl 1,5 kann auch als 1,50 dargestellt werden, was dem Begriff des Erweiterns entspricht. Dieser passt auch mit dem Konzept des Erweiterns in der Bruchrechnung zusammen, da hier gilt, dass $\frac{15}{10} = \frac{150}{100}$. Würde man die Reihenfolge des Ablaufes vertauschen, so spräche man vom Kürzen. Anhand von Stellenwerttafeln lässt sich dies sehr gut verdeutlichen[67].

Ein Problem ergibt sich bei der Erklärung durch Einheiten. Es liegt nahe, die Aspekte anhand von Beispielen zu verdeutlichen, also etwa die beiden Größen 2,4 Meter und 2,40 Meter zu vergleichen. Eine Umwandlung in eine kleinere Einheit zeigt, dass es sich um die gleichen Längen, nämlich 240 Zentimeter handelt. Diese Art der Erklärung ist zwar sehr einleuchtend, bringt aber eine kleinere Problematik für Anwendungsbeispiele mit sich. Hier dient die Anzahl der Nachkommastellen in der Regel als ein Indikator für die Genauigkeit einer Messung[68]. Die Größe 2,4 würde also bedeuten, dass ein Wert zwischen 2,35 und 2,44 in Frage kommt, da auf Zehntel gerundet wurde. Die Größe 2,40 würde hingegen bedeuten, dass die Bandbreite für den gefragten Wert zwischen 2,395 und 2,404 liegt.

---

[66] Ebd.
[67] Padberg 2012, 178f
[68] Ebd.

Der Unterschied mag zwar nicht signifikant sein, aber es handelt sich dennoch um zwei Werte, die genau genommen für verschieden lange Strecken stehen könnten.

Eine weitere Komplikation kann sich ergeben, wenn die Vorgehensweise mit der gleichen Situation in den natürlichen Zahlen durcheinandergebracht wird. In diesem Zahlenbereich ist das Anhängen von Endnullen gleichbedeutend mit der Multiplikation mit einer Zehnerpotenz. Dies führt bei einer Übergeneralisierung natürlich zu Problemen, vor allem bei der Multiplikation von Dezimalzahlen. Auf diese wird zu einem späteren Zeitpunkt noch genauer eingegangen.

Teil 2:

Multiplikation und Division von natürlichen Zahlen

Im folgenden Teil der Arbeit soll der Zugang zur Multiplikation und Division von natürlichen Zahlen mithilfe der vorhandenen Fach-Literatur erfolgen und von Beginn an aufgerollt werden. Um einen übersichtlichen Ablauf zu gewährleisten, werden zuerst alle Aspekte der Multiplikation behandelt. Anschließend wird dann die Division getrennt betrachtet.

Vorerst werden Konzepte beziehungsweise Modelle zur Einführung der Rechenoperationen vorgestellt (dies geschieht üblicherweise bereits in der Volksschule).

Nachdem ein kurzer Blick auf die Aspekte des Kopfrechnens geworfen wurde, liegt der Fokus anschließend auf den Möglichkeiten der Einführung von Algorithmen zur schriftlichen Multiplikation und Division. Es wird hier bewusst der Zugang über die natürlichen Zahlen gewählt, da diese Vorgehensweisen die Grundlagen bilden, auf denen später auch die Multiplikation und Division von Dezimalzahlen aufgebaut wird. Ergänzend werden zu jeder Rechenoperation bekannte Problembereiche vorgestellt, welche zum Teil die Grundlage für den letzten Teil des Kapitels darstellen.

Abschließend wird der Fokus auf häufig auftretende und typische Fehler beim Erlernen und Anwenden der Multiplikation und Division natürlicher Zahlen gelegt. Diese sind wichtig, weil sie auch später bei den Rechenverfahren mit Dezimalzahlen weiterhin auftreten können, wenn sie nicht ausreichend behandelt werden.

2.1 Zur Multiplikation von natürlichen Zahlen und der Behandlung im Unterricht

2.1.1 Anschauliche Vorstellungen zur Multiplikation

Wenn die Rechenoperationen in der Schule eingeführt werden, so geschieht dies im Normalfall anhand von Modellen, welche helfen sollen, das Konzept besser zu verstehen. Solche Grundvorstellungen können sich sehr lange in den Köpfen von Kindern und Jugendlichen halten und somit die Denkweise über die Grundrechenarten beeinflussen. Auch wenn die Anwendungsbereiche erweitert werden und die Modelle in den Hintergrund rücken, spielen sie zumindest in der Vorstellung der meisten Schüler und Schülerinnen noch eine wichtige Rolle. Die Multiplikation (und auch die Division) von Dezimalzahlen stellt eine eben solche Erweiterung dar, da die Rechenoperationen vorerst mit natürlichen Zahlen gelernt werden. Die ersten Schritte dazu werden schon in der Volksschule gesetzt. In der Sekundarstufe werden diese Grundlagen wiederholt und die Vorgehensweise wird gefestigt[69]. Die Modelle, die dazu benutzt werden, sollen in diesem Kapitel vorgestellt werden, damit ein Einblick in die Denkweise der Schüler und Schülerinnen gelingen kann, welcher eventuell beim Verstehen diverser Problematiken hilfreich sein wird.

In Bezug auf die Multiplikation ist die Interpretation als wiederholte Addition in Österreich wohl eindeutig die am häufigsten verwendete[70]. Alternativen sind äußerst selten zu finden, vor allem in den untersuchten österreichischen Schulbüchern. Auch in Deutschland scheint die Situation nicht anders zu sein, weswegen der folgende Abschnitt relativ kurz ausfallen wird.

2.1.1.1 Wiederholte Addition

Die wiederholte Addition dient schon in der Volksschule bei der erstmaligen Einführung der Multiplikation als Grundvorstellung und Erklärung. Es soll dabei eine wiederholte Addition derselben Zahl anders aufgeschrieben werden. Aus $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ wird dann dementsprechend $6 \cdot 3$.

Bei Padberg findet sich dieser Zugang erst bei der schriftlichen Multiplikation[71]. Er beschreibt den Lösungsweg der wiederholten Addition als sehr intuitive Methode, die auch beim Übergang von der mündlichen zur schriftlichen Multiplikation sehr effektiv erscheint. So kann beispielsweise die Aufgabe $5 \cdot 2934$ mit einem Rückgriff auf die schon erlernte Addition ganz einfach gelöst werden:

$$\begin{array}{r} 2934 \\ 2934 \\ 2934 \\ 2934 \\ 2934 \\ \hline 14670 \end{array}$$

Padberg behauptet sogar, dass Schüler und Schülerinnen von alleine auf eine Vereinfachung dieses Vorgehens stoßen, wenn es zu mühsam wird, immer wieder einzeln zu addieren und alle Summanden aufzuschreiben. Nach und nach werden Zwischenschritte ausgelassen, bis schließlich der Übergang zur Endform der schriftlichen Multiplikation geschieht. Der große Vorteil dabei ist, dass nach diesem

[69] Vergleiche dazu die Lehrpläne im einführenden Kapitel
[70] Diese Vorgehensweise findet sich in allen untersuchten Schulbüchern.
[71] Padberg, 2005, 257ff

Prozess vollkommen klar ist, wo Behalteziffern notiert werden müssen und wo mit dem Algorithmus begonnen wird. Voraussetzung dafür ist natürlich, dass die Addition beherrscht wird. Zur vom Lehrer beziehungsweise von der Lehrerin begleiteten Einführung bietet sich ein Beispiel an, welches auf zwei Arten gelöst wird, einmal mithilfe der wiederholten Addition und einmal mithilfe der Multiplikation. Wichtig ist es dabei, die Parallelen hervorzuheben und klar zu betonen, dass es sich eben nur um eine verkürzte Version eines bereits bekannten Konzeptes handelt.

Diese Vorgehensweise findet sich wie gesagt in sämtliche untersuchten Schulbüchern wieder, wenn auch in sehr verschiedenen Formen und Umfängen. Alternative Zugänge sind nicht zu finden, da sich die wiederholte Addition wohl als einfachste Option erwiesen hat.

2.1.1.2 Weitere Grundvorstellungen zur Multiplikation

Padberg präsentiert drei Grundvorstellungen zur Multiplikation von natürlichen Zahlen, welche von verschiedenen Schulbüchern für das Kopfrechnen verwendet werden[72]. Diese werden jeweils durch eine bildliche Darstellung veranschaulicht, welche den Schülern und Schülerinnen ein Beispiel bieten soll, das erklärt, wie die Multiplikation verwendet wird.

Die zeitlich sukzessiven Handlungen stellen dabei Tätigkeiten mit einem gewissen Zahlen-Bezug dar, die öfters wiederholt werden. So bringt in einer Abbildung ein Lieferant dreimal hintereinander jeweils zwei Kisten Limonade. Der gesamte Prozess kann also durch die Rechnung $3 \cdot 2$ dargestellt werden.

Die räumlich-simultanen Anordnungen stellen einen Bezug zu Ordnungssystemen dar, welche mit der Multiplikation in Verbindung gebracht werden können. So kann beispielsweise eine Kiste mit Äpfeln dargestellt werden, welche in eine gewisse Anzahl von Reihen und Spalten unterteilt ist. Die Anzahl der Reihen multipliziert mit der Anzahl an Spalten ergibt dann die Anzahl der Äpfel.

Die kombinatorischen Aufgabenstellungen, die Padberg erwähnt, stellen meiner Ansicht nach einen sehr komplexen Zugang dar. Es sind im Zuge dessen bei diversen Beispielen alle möglichen Kombinationen von Elementen zweier Mengen zu finden. Was genau dabei kombiniert wird, hängt natürlich immer von der Art der Aufgabe ab. Als Beispiele könnten etwa Tanzpaare aus Jungen und Mädchen, Menüfolgen von Vor- und Hauptspeisen oder Outfits aus Hosen und T-Shirts genannt werden. Ich denke jedoch, dass dieser Zugang als Erklärung zu komplex für Schüler und Schülerinnen im entsprechenden Alter sind.

---

[72] Padberg, 2005, 117ff

2.1.2 Rechenverfahren zur schriftlichen Multiplikation natürlicher Zahlen

Zur Präsentation der diversen Verfahren zur schriftlichen Multiplikation halte ich mich vorwiegend an das Werk von Hans-Dieter Gerster (2012), in dem einige der gängigen Verfahren beschrieben werden. Dasselbe gilt im späteren Verlauf auch für die Division.

Auch Friedhelm Padberg liefert in seinem Werk ‚Didaktik der Arithmetik' (2005) einige wichtige Hinweise. Es ist anzunehmen, dass es auch weitere Verfahren gibt, die hier keine Erwähnung finden, jedoch werden meiner Meinung nach alle Möglichkeiten, die für diese Arbeit relevant sind (und noch mehr) erwähnt.

Es geht in diesem Kapitel großteils um die Anwendung der Multiplikation mehrstelliger Zahlen. Üblicherweise wird in der Sekundarstufe die Multiplikation schrittweise eingeführt, also zuerst mit einstelligen Zahlen (erst ohne, dann mit Überträgen), dann mit Zehnerpotenzen und Vielfachen von Zehn und abschließend der allgemeine Fall[73]. Im folgenden Kapitel wird aus praktischen Gründen nur der allgemeine Fall betrachtet, wie er in der Sekundarstufe I Verwendung findet. Bei den Beschreibungen handelt es sich beim ersten Faktor um den Multiplikanden und beim zweiten um den Multiplikator.

2.1.2.1 Theoretischer Zugang zur schriftlichen Multiplikation

Für die Multiplikation mit einer einstelligen Zahl, kann problemlos auf die wiederholte Addition zurückgegriffen werden[74]. Dabei kann jede Spalte des Additionsschemas als eine Teilmultiplikation interpretiert werden. So würde im folgenden Beispiel, wo $4 \cdot 245$ gerechnet wird, die dritte Spalte der Multiplikation $4 \cdot 5$ entsprechen.

2	4	5
2	4	5
2	4	5
2	4	5
9	8	0

[73] Padberg, 2005, 266
In der Volksschule ist die Einführung natürlich noch vielseitiger, anschaulicher und auf einem niedrigeren Niveau, da noch auf andere Schwerpunkte wertgelegt wird.
[74] Padberg, 2005, 257ff

Damit würde diese Addition, anders aufgeschrieben, schon dem Normalverfahren der Multiplikation entsprechen. Sobald jedoch Multiplikationen mit mehrstelligen Zahlen betrachtet werden, stößt diese Interpretation schon an ihre Grenzen. Deswegen muss für den allgemeinen Fall das Distributivgesetz als zusätzliches Hilfsmittel verwendet werden.

Die Idee dahinter ist es, den Multiplikanden in seine Stellenwerte aufzuspalten. Betrachten wir vorerst erneut eine Multiplikation mit einer einstelligen Zahl, so wird beispielsweise statt der Rechnung $5 \cdot 629$ folgendes notiert: $5 \cdot (600 + 20 + 9)$. In diesem Fall kann also mithilfe des Distributivgesetzes die ursprüngliche Rechnung in drei einfachere Multiplikationen zerlegt werden. Schreibt man diese korrekt untereinander, so ist der Weg zum Normalverfahren bereits klar, da anschließend nur noch die Schreibweise optimiert werden muss.

$5 \cdot 600 =$	3	0	0	0
$5 \cdot 20 =$		1	0	0
$5 \cdot 9 =$			4	5
$5 \cdot 629 =$	3	1	4	5

Der nächste Schritt entsteht, wenn mit einer mehrstelligen Zahl multipliziert wird, also beispielsweise $12 \cdot 629$. Dabei wird die Distributivität auf beide Faktoren angewandt. Somit sieht dieselbe Rechnung dann wie folgt aus: $(10 + 2) \cdot (600 + 20 + 9)$.

Damit bleibt das Konzept dasselbe, es ändert sich nur die Anzahl der Teilmultiplikationen (in diesem Fall sind es sechs). Für das schriftliche Rechenverfahren werden, um einen optimalen Verlauf zu gewährleisten, die Nullen vernachlässigt, da es ausreicht, auf die Stellenwerte zu achten und diese korrekt zu notieren. Die einzelnen Teilmultiplikationen, die in diesem Beispiel noch übrig bleiben, wären also die folgenden: $1 \cdot 6, 1 \cdot 2, 1 \cdot 9, 2 \cdot 6, 2 \cdot 2, 2 \cdot 9$. Zusätzlich ist hier dann auch noch auf Überträge zu achten, welche die Bündelungen im Sinne des Stellenwertsystems darstellen. Die Methoden, welche entwickelt wurden um diesen Zugang zur schriftlichen Multiplikation zu einem möglichst einfachen Algorithmus zu machen, sollen nun im folgenden Abschnitt vorgestellt werden.

2.1.2.2 Normalverfahren der Multiplikation in drei Versionen (Deutschland und Österreich)[75]

Variante 1:

5	7	1	·	1	6
		5	7	1	
		3	4	2	6
		1			
		9	1	3	6

Bei diesem Beispiel zur Multiplikation von natürlichen Zahlen handelt es sich um das normierte Verfahren, wie es in Deutschland vorgeschrieben ist und in den Schulen gelehrt wird. Der Multiplikand wird mit der Ziffer des Multiplikators multipliziert, die den höchsten Stellenwert besitzt (In diesem Beispiel die Zehner-Ziffer 1), wobei die Einer-Ziffer des Ergebnisses unter der entsprechenden Ziffer des Multiplikators notiert wird. Derselbe Vorgang wird nun in absteigender Reihenfolge wiederholt, wobei die folgenden Ergebnisse immer jeweils um eine Stelle nach außen gerückt werden müssen, damit die Einer-Ziffer des Ergebnisses wieder unter der entsprechenden Zahl steht, mit der multipliziert wurde. Zum Schluss erfolgt eine Addition der notierten Zwischenergebnisse, wobei auf die Einhaltung der Stellenwerte geachtet werden muss (die Zwischenergebnisse dürfen nicht mehr „verschoben" werden).

Variante 2:

5	7	1	·	1	6
		3	4	2	6
		5	7	1	
		1			
		9	1	3	6

Bei dieser Vorgehensweise handelt es sich um das gleiche Verfahren, bis auf die Reihenfolge der einzelnen Multiplikationen. Es wird in diesem Fall beim kleinsten Stellenwert des Multiplikators begonnen und dann wird der Vorgang in ansteigender Reihenfolge wiederholt. Die Abschließende Addition ist bis auf die Abfolge der Summanden dieselbe wie zuvor.

[75] Gerster, 2012, 107

Variante 3:

5	7	1	·	1	6
5	7	1			
3	4	2	6		
1					
9	1	3	6		

Diese Version entspricht ebenfalls dem Normalverfahren, das in Deutschland angewandt wird, abgesehen von der Anordnung der Zwischenergebnisse. Diese Version wird üblicherweise in Österreich unterrichtet[76]. Die Einer-Ziffer des ersten Zwischenergebnisses wird zu Beginn direkt unter der Einer-Ziffer des Multiplikanden angeordnet. Die weiteren Produkte werden immer um eine Stelle nach rechts verschoben um die richtigen Stellenwerte einzuhalten. Die Abschließende Addition bleibt abermals gleich.

Bei jeder dieser Varianten können die beiden Faktoren problemlos vertauscht werden. Der einzige Unterschied ist eventuell die Anzahl, Position und Größe der Zwischenergebnisse. Die gleiche Multiplikation würde dann (mit der Variante 3) wie folgt aussehen:

1	6	·	5	7	1
8	0				
1	1	2			
		1	6		
9	1	3	6		

2.1.2.3 In den USA, Großbritannien, Türkei, Griechenland, Spanien und Italien (leicht abgewandelt) übliche Varianten[77]

	5	7	1
·		1	6
3	4	2	6
5	7	1	
1			
9	1	3	6

Bei dieser Variante der schriftlichen Multiplikation werden die beiden Faktoren unter einander geschrieben. Die Rechnung beginnt indem der Multiplikand mit der Einer-Ziffer des Multiplikators multipliziert wird. Der Vorgang wird für die Zehner-, Hunderter-, Tausender-Ziffer und so weiter

[76] In diversen Schulbüchern, die in einem der vorangegangenen Kapitel betrachtet wurden, ist dies nachzulesen.
[77] Gerster, 2012, 108

wiederholt, wobei die Einer-Ziffer jedes Zwischenprodukts um eine Stelle nach links verschoben wird. Abschließend folgt abermals eine Addition der Zwischenergebnisse.

Auch bei diesem Verfahren können die beiden Faktoren vertauscht werden. Abermals ändert sich in gewissen Fällen nur die Anzahl, Position und Größe der Zwischenergebnisse:

		1	6
·	5	7	1
		1	6
1	1	2	
8	0		
9	1	3	6

2.1.2.4 Die Gittermethode[78]

5	7	1	·
0 5	0 7	0 1	1
3 0	4 2	0 6	6

1

0 9 1 3 6

Die Gittermethode gestaltet sich wesentlich aufwendiger als die anderen vorgestellten Methoden, kann aber meiner Ansicht nach sehr hilfreich sein, wenn es um eine bessere Einsicht in die Vorgänge beim Multiplizieren mehrstelliger Zahlen geht. In die oberste Zeile und die ganz rechte Spalte werden die beiden Faktoren ziffernweise eingetragen. Die Anzahlen der Ziffern bestimmen also wie viele Zeilen und Spalten das Gitter haben wird (und natürlich gleichzeitig auch die Anzahl der Teilmultiplikationen). Nun wird für jede Zelle die entsprechende Multiplikation durchgeführt und die Zehner- und Einer-Ziffer des Produktes werden, wie oben angeführt (diagonal von links oben nach rechts unten), notiert. Sind alle einzelnen Produkte gefunden wird diagonal addiert, von links unten nach rechts oben, wobei ganz rechts (bei der Einer-Ziffer des Ergebnisses) begonnen wird. In unserem Beispiel handelt es sich also um vier Additionen (eine davon trivial), wobei eventuell entstehende Behalteziffern in der nächsten Diagonale notiert werden. Die Ergebnisse der Teilsummen stehen für die Ziffern des End-Produktes.

Ich halte diese Methode vor allem für das Erlernen der schriftlichen Multiplikation für sehr sinnvoll. Sie mag aufgrund des Zeitaufwandes nicht immer sinnvoll sein, jedoch bietet sie einen sehr guten Einblick in die übrigen Vorgehensweisen. Dies ist vor allem dann der Fall, wenn sie einer Version des Normalverfahrens gegenübergestellt wird. Wird ein solcher Vergleich durchgeführt, so merkt man

[78] Ebd.

schnell, dass die gleichen Teilrechnungen vorkommen. Durch die weit bessere Übersicht im gezeichneten Gitter ist für Schüler und Schülerinnen eventuell auch besser zu sehen, welche Rolle die Zwischen-Ergebnisse, die zum Rechnen benötigt werden, für das Endergebnis haben.

2.1.3 Probleme des Normalverfahrens der Multiplikation

Betrachtet man eine beliebige Multiplikation und in weiterer Folge das darauf angewandte Normalverfahren, so lässt sich dieses relativ einfach in mehrere Schritte aufschlüsseln. Gerster präsentiert eine solche Aufschlüsselung für die Aufgabe $89 \cdot 23$ und stellt fest, dass es sich um vier Teil-Multiplikationen und vier Teil-Additionen handelt[79], die wiederum aus mehreren Arbeitsschritten bestehen. Jeder dieser Arbeitsschritte kann in weiterer Folge die Ursache eines Fehlers bedeuten, wobei es sich beispielsweise um einfache Rechenfehler oder um die Wahl der falschen Ziffern handeln könnte. Für unser vorangegangenes Beispiel würde eine dieser Teil-Multiplikationen folgendermaßen aussehen[80] (anbei nochmals die Rechenaufgabe, die relevanten Ziffern sind markiert):

5	7	1	·	1	6
		5	7	1	
		3	4	2	6
		1			
		9	1	3	6

Die Arbeitsschritte der gelb markierten Teil-Multiplikation sind die folgenden:

- ➔ Die Ziffer „6“ auswählen (Einer-Ziffer Multiplikator)
- ➔ Die Ziffer „5“ auswählen (Hunderter-Ziffer Multiplikand)
- ➔ Wissen, dass multipliziert werden muss
- ➔ Wissen, dass das Produkt 30 ist
- ➔ Wissen, dass die Behalteziffer von der vorherigen Multiplikation (4) addiert werden muss
- ➔ Wissen, dass das Ergebnis 34 ist
- ➔ Wissen, wo das Ergebnis notiert werden soll

Wenn man bedenkt, dass in dieser Rechnung zehn solcher Arbeitsschritte vorkommen (sechs Multiplikationen und vier Additionen), bei denen sich einige Schritte unterscheiden können, so bekommt man einen Eindruck davon, wie viele verscheiden Arten von Fehlern und Problemen es bei

[79] Gerster, 2012, 111ff

[80] Für die folgende Betrachtung ist es nicht wichtig, ob die österreichische oder die deutsche Version gewählt wird. Die entsprechenden Arbeitsschritte bleiben (Bis auf die Reihenfolge und die Anordnung unter dem „Multiplikationsstrich“) gleich.

einer solchen Aufgabe geben kann. Einige dieser Aspekte, die besonders wichtig erscheinen und die zu Schwierigkeiten führen können, sollen nun behandelt werden[81].

2.1.3.1 Probleme bei der Orientierung

Mit Orientierung ist in diesem Zusammenhang vorwiegend die Wahl der richtigen Ziffern für die richtigen Rechenoperationen und die Notierung des Ergebnisses an der richtigen Stelle gemeint.

Hierbei können vor allem Anfangs, wenn das Verfahren noch neu und ungewohnt ist, einige Verwechslungen und fehlerhafte Platzierungen auftreten, die sich in weiterer Folge natürlich auf das Endergebnis auswirken. Auch die Behalteziffern der Teil-Multiplikationen spielen hierfür eine Rolle, da es aus Platzgründen nicht vorgesehen ist diese zu notieren (erst bei den abschließenden Additionen ist dies wieder möglich). Das führt dazu, dass Schülerinnen und Schüler sich eine Ziffer merken müssen, während sie eine weitere Multiplikation im Kopf durchführen. Anschließend muss, wieder im Kopf, eine Addition des Ergebnisses der Teil-Multiplikation mit der Behalteziffer stattfinden, von dessen Ergebnis eventuell abermals nur die Einerziffer notiert werden darf. Bei der Gittermethode ist dieses Problem weniger relevant, da das Notieren aller Ziffern vorgesehen ist.

Der Schwierigkeitsgrad hängt dabei natürlich von der Anzahl der Stellen der Faktoren und den einzelnen Ziffern ab. Schlussendlich kann dies jedoch für die Rechenaufgabe bedeuten, dass Behalteziffern verloren gehen oder fälschlicherweise mitnotiert werden, was sich natürlich ebenfalls auf das Ergebnis auswirkt.

2.1.3.2 Probleme bei Einmaleins-Aufgaben

Diese Art von Problemen ist relativ einfach einzugrenzen. Es handelt sich um Fehler beim Rechnen mit dem „kleinen Einmaleins“ im Zuge der Teil-Multiplikationen. Da diese keinen Zusammenhang mit der Vorgehensweise beim schriftlichen Multiplizieren aufweisen wird an dieser Stelle nicht genauer darauf eingegangen.

2.1.3.3 Probleme mit auftretenden Nullen

Wie schon bei den Grundlagen der Dezimalzahlen, bedeuten auftretende Nullen auch bei Rechenoperationen einen höheren Schwierigkeitsgrad. Ganz abgesehen von Einmaleins-Fehlern können vor allem bei den Berechnungen, Anzahlen und Anordnungen von Teil-Produkten hierbei leicht Fehler auftreten. Padberg schlägt daher ein gezieltes Thematisieren von Aufgaben dieses Typs im Unterricht vor[82], da auch seine Untersuchungen belegen, dass auftretende Nullen zu mehreren Arten von Fehlern führen können. Sie dürfen keinesfalls vernachlässigt werden, auch wenn die Beispiele (vor

[81] Gerster, 2012, 113ff
[82] Padberg, 2005, 276f

allem für die Lehrkraft) trivial erscheinen mögen. Für Schüler und Schülerinnen sind sie keineswegs einfach oder selbstverständlich.

2.1.3.4 Probleme mit der schriftlichen Addition

Die Addition spielt beim schriftlichen Multiplizieren natürlich immer wieder eine wichtige Rolle. Die Summierung der Teil-Produkte steht hierbei an erster Stelle. Die hierdurch entstandenen Fehler sind natürlich zu berücksichtigen, haben ihren Ursprung aber logischerweise in einem anderen Themenbereich. Deswegen wird in dieser Arbeit nicht genauer darauf eingegangen.

Es zeigt sich also bereits an dieser Stelle, dass die Ursachen vieler Fehler (wenngleich natürlich nicht aller Fehler) in einem Themengebiet liegen können, das bereits zu Beginn behandelt wird und somit eine Grundlage darstellt. Dieser Aspekt wird sich auch an späteren Stellen dieser Arbeit zeigen, wenn die Multiplikation von Dezimalzahlen behandelt wird. Einige Fehler, die in diesem Bereich passieren, haben ihren Ursprung beim Multiplizieren natürlicher Zahlen oder sogar in einem Themenbereich, der noch weiter zurückliegt.

2.1.4 Typische Fehler der Multiplikation

Bevor die häufig auftretenden Fehlermuster in diesem Kapitel vorgestellt und erklärt werden, ist anzumerken, dass die folgende Aufzählung keineswegs vollständig ist. Vor allem in Anbetracht der zahlreichen Schulstandorte, der diversen Schulbücher die in Verwendung sind und den vielen, individuell verschiedenen Lehrern und Lehrerinnen sind die unterschiedlichen Fehlermuster, welche im Zusammenhang mit der Multiplikation (und auch der Division) auftreten können, wohl in ihrer Gesamtheit gar nicht feststellbar. Deswegen wird hier eine Auswahl getroffen, die auf der Plausibilität und der Häufigkeit der Fehler in den diversen Studien beruht. „Triviale“ Fehler wie beispielsweise das reine Vergessen eines (Teil-)Algorithmus sind im Folgenden nicht angeführt.

2.1.4.0 Vorbemerkung zu den Publikationen

In diesem Kapitel geht es nun darum, welche Fehler bei Schülern und Schülerinnen tatsächlich sehr häufig auftreten, weswegen sich gewisse Aspekte des vorangegangenen Themenbereiches hier wiederfinden werden. Grundlage dafür ist eine Arbeit von Stiewe und Padberg[83], die Anregungen von Gerster[84] und die Überlegungen Padbergs im Werk „Didaktik der Arithmetik“[85].

[83] Stiewe/Padberg, 1986
[84] Gerster, 2012
[85] Padberg, 2005

Stiewe und Padberg beziehen sich auf eine 1983 durchgeführte Untersuchung an 16 verschiedenen deutschen Schulen, in 30 Klassen[86]. Es sei festgehalten, dass es sich hierbei um Klassen der vierten Grundschule handelte, die bereits Erfahrung mit der Multiplikation natürlicher Zahlen sammeln konnten. Obwohl die Studie schon mehr als 30 Jahre alt ist, liefert sie immer noch für dieses Thema relevante und interessante Erkenntnisse. Die Unterrichtsmethoden und einige weitere Aspekte mögen seit dieser Zeit natürlich moderner geworden sein, was durchaus bedeutet, dass die Ergebnisse mit einer gewissen Skepsis betrachtet werden dürfen. Dennoch gehe ich davon aus, dass die meisten Grundaussagen und Schlussfolgerungen auch heute noch Gültigkeit haben. Bestärkt wird diese Annahme durch die Tatsache, dass die Überlegungen Padbergs in „Didaktik der Arithmetik“ aufgrund einer Studie von Thiemann getroffen werden, welche mit einer modifizierten Version des von Padberg und Stiewe entwickelten Tests arbeitet[87].

Ähnliche Beobachtungen gelten für die Studie Gersters, welche erstmals 1982 veröffentlicht und in 20 Klassen des vierten bis sechsten Schuljahres durchgeführt wurde[88]. Hierbei ist besonders auf die verschiedenen Altersklassen der untersuchten Schüler und Schülerinnen zu achten, welche eventuell Unterschiede in den Beobachtungen bewirken können. In „Didaktik der Arithmetik“ von Padberg aus dem Jahr 2005 wird, wie bereits erwähnt, eine Untersuchung von Thiemann als Quelle herangezogen, welche aus dem Jahr 2000 stammt.

Stiewe und Padberg führen für ihre Untersuchungen den Begriff der „systematischen Fehler“ ein (Dieser wird auch in Didaktik der Arithmetik (2005) benutzt). Tritt ein solcher auf, so bedeutet dies, dass der betreffende Schüler beziehungsweise die betreffende Schülerin dieselbe Art von Fehler bei mehr als 50% der in Frage kommenden Aufgaben gemacht hat[89] (Die Aufgaben sind zum Teil so gestellt, dass gewisse Fehlertypen „provoziert“ werden). Fehler, die in der gesamten Stichprobe insgesamt relativ häufig vorkommen, werden als „typische Fehler“ bezeichnet[90].

Dabei fällt gleich zu Beginn auf, dass gewisse Fehler nur in bestimmten Klassen auftreten und in anderen gar nicht. Das deutet auf einen großen Einfluss der Lehrperson hin, da diese mit ihrer Art des Unterrichts sowohl positive, als auch (im schlimmsten Fall) negative Einflüsse auf systematische Fehler haben kann. Auch die Lehrunterlagen spielen in diesem Zusammenhang natürlich eine Rolle. Gerster bewertet die auftretenden Fehler, indem er fünf Kategorien beschreibt zu denen es jeweils mehrere Arten der Ausprägung gibt[91]. Bezüglich der Häufigkeit finden sich nur Aussagen zu den Fehler-

[86] Stiewe/Padberg, 1986, 19
[87] Padberg, 2005, 271
[88] Gerster, 2012, 122
[89] Stiewe/Padberg, 1986, 22 oder Padberg, 2005, 245
[90] Padberg, 2005, 245
[91] Gerster, 2012, 122ff

Kategorien, nicht jedoch zu den Arten. Im Folgenden wird versucht die Erkenntnisse der beiden Untersuchungen möglichst sinnvoll zu kombinieren.

Dabei sollen im Allgemeinen übermäßig viele Aussagen über Häufigkeiten vermieden werden, um die Lesbarkeit der Arbeit zu fördern. In meinen Augen ist eine Aufzählung über die Anzahlen diverser Fehler weniger informativ, als eine gut formulierte Zusammenfassung der Erkenntnisse durch die man entsprechende Schlüsse ziehen kann. Sollte sich der Leser beziehungsweise die Leserin dennoch für die genauen Angaben interessieren, so finden sich (falls nicht anders erwähnt) sehr viele in den oben genannten Quellen.

2.1.4.1 Einmaleins-Fehler

Bei Einmaleins-Fehlern handelt es sich im Grunde um reine Rechenfehler, welche mit dem Algorithmus des Mulitplikationsverfahrens nichts zu tun haben. Es geht also nur um den gedanklichen Rechenvorgang des Schülers beziehungsweise der Schülerin. Da diese in vielen verschiedenen Zusammenhängen und Arten vorkommen können, sollen hier nur die wichtigsten genannt werden.

- **Multiplikation mit 0**: Rechnungen der Art „$0 \cdot x$“ oder „$x \cdot 0$“ bereiten Schülern und Schülerinnen offenbar sehr häufig Schwierigkeiten, da als Ergebnis oft fälschlicherweise „x“ statt „0“ lautet. Jede der oben genannten Publikationen (und noch mehrere darüber hinaus[92]) weisen dieser Art von Fehler eine sehr große Bedeutung zu, da er in großer Zahl, sowohl typisch als auch systematisch, in den Untersuchungen auftritt. Interessant ist, dass bei allen drei Studien der Fehler „$0 \cdot x = x$" deutlich häufiger vorkam als das Gegenstück „$x \cdot 0 = x$“. Wie dieser Unterschied zu erklären ist, wird jedoch nicht erwähnt!
  Über die Ursachen sind sich Padberg und Gerster einig. Es handelt sich vermutlich um eine fehlerhafte Übergeneralisierung aus der Addition. Der Gedanke „Die 0 verändert nichts, also $0 + x = x$“ wird auf die Multiplikation übertragen und führt somit zu dem oben genannten Problem. Des Weiteren ist natürlich die anschauliche Vorstellung zu dieser Rechenaufgabe nicht ganz so einfach, wie bei den übrigen Multiplikationen von natürlichen Zahlen, weswegen es vermutlich leichter passiert, dass auf bekannte Vorgehensweisen von der Addition zurückgegriffen wird. Das Konzept der wiederholten Addition kann in diesem Fall nur auf „$x \cdot 0$“ angewandt werden, da „$x \cdot 0 = 0 + 0 + \ldots + 0$“ ist. Für den anderen Fall gestaltet sich diese Vorstellung um einiges schwieriger, was eventuell auch den Unterschied in der Häufigkeit erklären könnte. Auch die bereits erwähnte, weit verbreitete Grundvorstellung, die Multiplikation vergrößere stets, ist für diesen Aufgabentyp kontraproduktiv. Zu guter Letzt wird erwähnt, dass den Aufgaben dieses Typs in der Schule oft sehr wenig Beachtung

[92] Vgl. Stiewe/Padberg, 1986, 19f – Hier werden kurz Ergebnisse anderer Studien skizziert, bei denen Einmaleinsfehler dieser Art ebenfalls zu den markantesten zählen.

geschenkt wird, wenn das Einmaleins erlernt wird. Damit wäre natürlich auch gleich der erste, einleuchtende Ansatz zur Entgegenwirkung gefunden, nämlich das Thema im Unterricht gezielt anzusprechen und Aufgaben dieser Art zu üben.

- **Multiplikation mit 1**: Bei Stiewe und Padberg fällt dieser Fehler zwar nicht unter die fünf häufigsten, aufgrund seiner Nähe zum vorangegangenen möchte ich ihn dennoch kurz erwähnen. Hierbei handelt es sich um folgende fehlerhafte Lösung „$x \cdot 1 = 1$“, welche ähnlich wie zuvor mit mangelnder Behandlung von Aufgaben dieser Art und einer fehlenden anschaulichen Vorstellung erklärt werden kann. Interessanterweise tritt der Fehler „$1 \cdot x = 1$“ deutlich weniger häufig auf. Dies könnte laut Padberg an der falschen Regel liegen, die besagt, dass das Ergebnis einer Multiplikation mit 1 stets so groß ist wie der zweite Faktor.
- **Einmaleins-Fehler in der Nähe**: Hierbei handelt es sich um einen Fehler, der wohl hauptsächlich durch ein mangelndes Verständnis des kleinen Einmaleins zu begründen ist und mit einem reinen auswendig lernen dieser „Rechenergebnisse“ zusammenhängt. Der Einmaleins Fehler in der Nähe passiert dann, wenn beim Finden des Ergebnisses einer Einmaleins-Aufgabe das richtige Produkt um eines verfehlt wird. Also beispielsweise „$6 \cdot 8 = 56$“.

2.1.4.2 Stellenwertfehler

Wie der Name schon sagt handelt es sich hierbei um Fehler, bei denen ein falscher Stellenwert ausschlaggebend ist. Gerster vermutet gerade bei dieser Fehlerart einen starken Zusammenhang mit dem Vorgehen im Unterricht, da laut seinen Untersuchungen die Quoten im Zusammenhang mit Stellenwertfehlern sehr stark schwanken[93]. Padberg teilt diese Vermutung, da der Vergleich der Studien an denen er selbst beteiligt war zeigt, dass die Stellenwertfehler als einzige Fehlergruppe eine geringere Quote aufweise als circa 15 Jahre zuvor. Dieser Unterschied, so vermutet er, wird durch das Schulbuch ausgelöst, welches von den Schülern und Schülerinnen der aktuelleren Studie benutzt wird, in dem großer Wert auf die Stellenwerte und deren Vermittlung gelegt wird[94].

Zwei spezielle, wichtige Stellenwertfehler sollen hier erwähnt sein, welche in den untersuchten Studien als zentral angesehen werden:

- Die **falsche Anordnung der Teilprodukte** bewirkt, dass die abschließende Addition, aufgrund der falschen Stellenwerte, nicht zum richtigen Ergebnis führt. Wie schon erwähnt, ist dieser Fehler vermutlich hauptsächlich auf den Multiplikations-Algorithmus an sich zurückzuführen. Es kann sein, dass das Ausrücken der Teilergebnisse nicht verstanden, vergessen oder (im

[93] Gerster, 2012, 133f
[94] Padberg, 2005, 274

schlimmsten Fall) gar nicht erlernt wurde. Als Gegenmaßnahme kann aufgrund dessen nur empfohlen werden, diesen Teil der schriftlichen Multiplikation nochmals zu wiederholen und besonderen Wert auf die Bedeutung des Ausrückens und den Stellenwert der Zwischenergebnisse zu legen.

- **Rolle der 0 im Multiplikator**: Abermals spielt die Null eine wichtige Rolle und bereitet den Schülern und Schülerinnen Schwierigkeiten bei der Multiplikation. Diesmal sind jedoch nur Kinder betroffen, die den weiter oben erwähnten Fehler „$x \cdot 0 = x$“ nicht machen, da in dieser Situation die Multiplikation mit 0 einfach „ignoriert“ wird. Zur Veranschaulichung ein Beispiel, welches bei Stiewe und Padberg gezeigt wird[95]:

  $$\begin{array}{l} 531 \;\cdot\; 30 \\ \hline 1593 \end{array}$$

  Die Multiplikation „$531 \cdot 0$“ wurde hier ausgelassen und 1593 wurde als Endergebnis interpretiert. Dieser Fehler passiert auch, wenn die Null mitten im Multiplikator vorkommt (zum Beispiel 2709). In diesem Fall wird das darauffolgende Zwischenergebnis dann oft eine Stelle zu weit links notiert, wodurch schlussendlich der Stellenwertfehler entsteht. Meiner Ansicht nach geht die wichtigste Begründung für diesen Fehler von dem (richtigen) Gedanken aus, dass „0 mal eine Zahl“ immer 0 als Ergebnis hat. Aufgrund dessen denkt der Schüler oder die Schülerin fälschlicherweise weiter, dass dieses Zwischenergebnis weggelassen werden kann, da er oder sie nicht erkennt, dass es für den Stellenwert des Endergebnisses ausschlaggebend ist.

  Mittlerweile ist wohl eindeutig, dass auf die besondere Rolle der Null im Unterricht sehr viel Wert gelegt werden muss, da es immer wieder zu Schwierigkeiten in diesem Zusammenhang kommen wird. Auch für die soeben angesprochene Problematik ist eine Behandlung von Beispielen dieser Art ausschlaggebend für den Erfolg der Schüler und Schülerinnen.

  Padberg schlägt außerdem vor, die Überschlagsrechnung als Hilfsmittel zu benutzen[96]. Dadurch sollte dem Schüler beziehungsweise der Schülerin die falsche Dimension des Ergebnisses auffallen, welche dann auf einen Stellenwertfehler zurückzuführen ist.

2.1.4.3 Übertragsfehler

Diese Art von Fehlern zeigt sich durch eine fälschliche Verwendung der sogenannten Übertragsziffer (Gerster beziehungsweise Stiewe/Padberg sprechen im selben Zusammenhang von Behalteziffern[97]). Wird beim Multiplizieren eine Zehnerstelle überschritten, so muss die entsprechende Anzahl der

[95] Stiewe/Padberg, 1986, 23
[96] Padberg, 2005, 277
[97] Gerster, 2012, 131ff und Stiewe/Padberg, 1986, 20ff

Zehner auf die nächste Teilmultiplikation übertragen werden und es wird nur die Einerziffer notiert. So wird beispielsweise bei der Rechnung $27 \cdot 2$ zunächst $2 \cdot 7$ berechnet. Vom Ergebnis 14 wird nur die Einerstelle „Vier" notiert. Die Zehnerstelle „Eins" wird entweder notiert (was im Multiplikations-Algorithmus aber eigentlich nicht vorgesehen ist, da es bei der Multiplikation mehrstelliger Zahlen zu Problemen führen kann) oder eingeprägt (dies führt natürlich zu weiteren Problemen, da der Schüler beziehungsweise die Schülerin sich gleichzeitig eine Zahl merken und weiterrechnen muss). Die Übertragsziffer wird dann zum Ergebnis der darauffolgenden Teilmultiplikation addiert. In unserem Beispiel also $2 \cdot 2 + 1 = 5$. Das Ergebnis der Addition wird wiederum notiert. Wird auch hier eine Zehnerstelle überschritten, so wiederholt sich die Vorgehensweise des Übertragens auch bei der nächsten Teilmultiplikation. Kommt es zu Fehlern bei diesem Prozess, so spricht man von Übertragsfehlern, die sich in folgende, häufig vorkommende Arten unterteilen lassen. Es sind natürlich noch weitere Ausprägungen von Fehlern dieser Art möglich, welche aber in den betrachteten Studien nicht auftraten oder für nicht wichtig befunden wurden.

- **Übertragsziffer als zusätzliche Ziffer im Teilprodukt**: Hierbei handelt es sich im Allgemeinen um den am häufigsten auftretenden Übertragsfehler. Die Übertragsziffer wird fälschlicherweise im Teilprodukt notiert. Würde man diese Methode auf das oben genannte Beispiel anwenden, so wäre das Ergebnis $27 \cdot 2 = 414$. Zur Vermeidung dieser Fehler schlägt Padberg die Einführung einer geeigneten, konsequenten Notation vor, welche im Allgemeinen das Auftreten von Übertragsfehlern (also auch anderer Art) eindämmen soll[98]. Gerster empfiehlt dies ebenfalls, warnt aber ausdrücklich vor einer Notation der Übertragsziffer im Multiplikanden, da dieses Vorgehen zu weiteren Fehlermustern führen kann[99]. Stattdessen schlägt er eine Methode vor, in der die Übertragsziffern neben der eigentlichen Rechnung notiert und nach deren Verwendung sofort wieder durchgestrichen werden sollen (um eine doppelte Verwendung zu vermeiden).
  Meiner Meinung nach würde außerdem die Überschlagsrechnung eine geeignete Hilfe bieten, um auf Fehler wie diesen aufmerksam zu werden, da dieses Fehlermuster oft zu einem falschen Stellenwert im Endergebnis oder zumindest größeren Abweichungen des Wertes führen kann.
- **Einerziffer als Übertragsziffer interpretiert**: In diesem Fall wird die falsche Ziffer des Teilproduktes als Übertragsziffer übernommen. Im obigen Beispiel würde das bedeuten, statt der „1" die Zahl „4" zu übertragen. Das Ergebnis wäre dann also nicht 54, sondern 81 oder 84, je nachdem ob im Teilprodukt die Einer- oder Zehnerziffer notiert wird. Der Fehler deutet

[98] Padberg, 2005, 277
[99] Gerster, 2012, 140f

entweder auf einen missverstandenen Multiplikationsalgorithmus oder auf Unkonzentriertheit beim Durchführen des Verfahrens hin. Padberg und Gerster erwähnen beide, dass der Fehler durch begleitendes Mitsprechen ausgelöst werden kann, indem die Einerziffer des Teilproduktes vom Schüler oder der Schülerin betont und dann fälschlicherweise notiert wird.

- **Übertragsziffer vor Multiplikation addiert**: Dieser Fehler findet sich ausschließlich bei der Untersuchung Gersters, wobei er betont, dass die Ursache wahrscheinlich in der bereits erwähnten Notation der Übertragsziffer im Multiplikanden zu verorten ist[100]. Die Schüler und Schülerinnen werden dazu „verführt“, die Übertragsziffer zu der entsprechenden Ziffer im Multiplikanden zu addieren bevor die nächste Teilmultiplikation durchgeführt wird. Im obigen Beispiel würde also statt $2 \cdot 2 + 1 = 5$ fälschlicherweise $(2 + 1) \cdot 2 = 6$ gerechnet werden, was zu dem falschen Ergebnis 64 führt. Der Fehler kann aber natürlich auch passieren, wenn die Übertragsziffer nicht notiert wird, wenn beispielsweise einfach die Vorgehensweise missverstanden oder vergessen wird. Die Verteilung in verschiedenen Klassen ist sehr unregelmäßig (teilweise kommt er sehr häufig vor, teilweise gar nicht), was einen starken Einfluss des Lehrers beziehungsweise der Lehrerin auf dieses Fehlermuster vermuten lässt.

2.1.4.4 Verfahrensfehler

Auf die sogenannten Verfahrensfehler wird hier nur kurz und abschließend eingegangen, da ihre Relevanz im Vergleich zu den anderen Fehlerarten in meinen Augen sehr gering ist. Der erste Hinweis darauf ist, dass Fehler dieser Art nur in der Untersuchung Gersters vorkommen. Die Tatsache, dass weder Stiewe noch Padberg in Bezug auf die durchgeführten Untersuchungen Fehler dieser Art erwähnen, legt die Vermutung nahe, dass sie nur in einem sehr geringen Ausmaß oder gar nicht gemacht wurden. Ich denke jedoch, dass Verfahrensfehler aus diversen Gründen nicht gänzlich abzustellen sind. Deswegen gehe ich davon aus, dass die Anzahl der Schüler beziehungsweise Schülerinnen, welche einen solchen Fehler gemacht haben, erfreulicherweise sehr niedrig war.

Von einem Verfahrensfehler spricht man, wenn das weiter oben erwähnte Verfahren zur Multiplikation in einer falschen Art und Weise durchgeführt wird. Nun könnte natürlich argumentiert werden, dass auch manche Übertrags- und Stellenwertfehler in diese Kategorie fallen sollten. Aufgrund der besonderen Relevanz und der typischen Zusammenhänge macht es jedoch Sinn, für diese Art von Fehlern eine eigene Kategorie zu schaffen. Bei Verfahrensfehlern sind also hauptsächlich unvollständige Verfahren und Fehler in Bezug auf die Rechenrichtung relevant[101]. Dabei ist auch zu

[100] Gerster, 2012, 132
[101] Gerster, 2012, 136ff

bemerken, dass eine „falsche“ Rechenrichtung (aufgrund der Kommutativität) nicht unbedingt zu einem falschen Ergebnis führen muss.

Werden in der Schule Fehler dieser Art beobachtet, so empfiehlt es sich, das Verfahren nochmals gründlich zu wiederholen und besonders auf den falsch durchgeführten oder ausgelassenen Schritt genauer einzugehen. Um Fehler in Bezug auf die Rechenrichtung zu vermeiden, ist sicherlich eine Wiederholung des Kommutativgesetzes sinnvoll. Des Weiteren sollte aufgezeigt werden, wann genau beim Rechenverfahren eine Vertauschung der Reihenfolge einen Unterschied macht und wann nicht. Im Endeffekt kommt es in weiterer Folge auf die Notation der Zwischenprodukte an, welche bereits in einem anderen Abschnitt behandelt wurde.

2.1.5 Allgemeine Punkte zur Vermeidung von Fehlern bei der schriftlichen Multiplikation

Abschließend sollen einige allgemeine Aspekte erwähnt werden, welche in der Literatur zur Vermeidung und Behebung von Fehlern vorgeschlagen werden. Einige der Punkte wurden schon während des vorherigen Abschnittes erwähnt und sollen hier zum Teil nochmals genauer erklärt werden. Diese Maßnahmen lassen sich in weiterer Folge sicherlich auch auf die Division beziehungsweise auf das Rechnen mit Dezimalzahlen übertragen. Dazu aber mehr in den entsprechenden Abschnitten. Einfache Maßnahmen wie beispielsweise gezieltes Trainieren oder mehrmaliges Wiederholen von bestimmten Aufgaben werden an dieser Stelle nicht weiter aufgezählt, da diese als selbstverständlich vorausgesetzte werden.

2.1.5.1 Halbschriftliches Rechnen

Einfach gesagt handelt es sich beim halbschriftlichen Rechnen um mehrere Methoden, die helfen sollen, einen guten Übergang vom Kopfrechnen zum schriftlichen Rechnen zu ermöglichen[102]. Dieser Aspekt sollte also vor der schriftlichen Multiplikation und der Einführung des Normalverfahrens erfolgen. Der Begriff „halbschriftlich“ ist in meinen Augen etwas unpassend, da er suggeriert, dass weniger (etwa nur die Hälfte) aufgeschrieben wird, als beim schriftlichen Rechnen. Das ist aber keineswegs der Fall, da bei dieser Form des Lösens von Rechenaufgaben durchaus mehr notiert werden kann als bei der schlussendlich benutzten Vorgehensweise.

Neben dem Aspekt des fließenden Überganges liefern die nachfolgenden Methoden auch zum Teil eine gute Möglichkeit, Optionen für eine möglichst rasche und einfache Berechnung scheinbar schwieriger Multiplikationsaufgaben zu finden. Es geht hierbei also gewissermaßen um die

[102] Padberg, 2005, 260ff

„Rechenstrategie“ und somit auch gleichzeitig um das selbstständige Finden eines einfachen und schnellen Verfahrens (Hinleiten zum Normalverfahren).

Bei Padberg hat das halbschriftliche Rechnen einen scheinbar sehr hohen Stellenwert, da er der Methode einen ganzen Abschnitt des Werks „ Didaktik der Arithmetik“ widmet und relativ genau auf die verschiedenen Arten eingeht[103]. Es dient im Grunde als Übergang zur allgemeinen Methode der Multiplikation und soll diese gleichzeitig motivieren. Das Normalverfahren ist somit das Ergebnis der gesammelten Vereinfachungen der diversen Aspekte des halbschriftlichen Rechnens.

Auch Gerster sieht das halbschriftliche Rechnen als Vorbereitung der allgemeinen Vorgehensweise und zeigt diverse Aspekt auf, die zu beachten sind[104].

In den österreichischen Schulbüchern für die Sekundarstufe I, welche im Zuge dieser Arbeit untersucht wurden, finden sich vereinzelt Aspekte der halbschriftlichen Multiplikation, wie sie bei Padberg oder Gerster erwähnt werden[105]. Sehr selten jedoch sind in diesem Zusammenhang Aufgaben an die Schüler und Schülerinnen gestellt, die eine aktive Anwendung der Methoden erfordert. Viel mehr wird beispielsweise das schrittweise oder stellenweise Rechnen (siehe weiter unten) benutzt um das Normalverfahren daraus abzuleiten. Es liegt in diesem Fall also oft an den Lehrpersonen, den Schülern und Schülerinnen die Aspekte des halbschriftlichen Rechnens näher zu bringen, um somit eine gute Basis für das Normalverfahren zu schaffen. Des Weiteren sei erwähnt, dass im Volksschulbuch „Alles Klar! 3“ sehr ausführlich auf diese Vorgehensweise zurückgegriffen wird[106].

Die folgenden Punkte[107] sollen kurz darauf hinweisen, was unter dem Begrifft halbschriftliches Rechnen in Bezug auf die Multiplikation verstanden werden kann. Anzumerken ist, dass hierfür keine bestimmte Notationsform vorgesehen ist[108]. Diese soll sich erst entwickeln, wenn von den angewandten Methoden auf das Normalverfahren geschlossen wird. Dennoch ist auf eine strukturierte und sinnvolle Schreibweise zu achten, um ein gutes Verständnis zu ermöglichen.

Schrittweises Rechnen

Vom schrittweisen Rechnen wird gesprochen, wenn eine Multiplikationsaufgabe in mehrere Teilaufgaben aufgeteilt wird, um mithilfe von leichteren Rechnungen zum Ergebnis zu kommen. Dazu wird einer der Faktoren additiv, subtraktiv oder multiplikativ zerlegt, wie aus dem folgenden, einfachen Beispiel hervorgeht:

[103] Padberg, 2005, 173ff
[104] Gerster, 2012, 150ff
[105] Die genannten Aspekte finden sich im entsprechenden Kapitel zu den Schulbüchern
[106] Grosser/Koth, 2008a/b
[107] Padberg, 2005, 174ff
[108] Padberg, 2005, 159

Zu lösen ist die Rechenaufgabe $6 \cdot 23$

Durch Zerlegen der Zahl 6 können beispielsweise folgende Teilaufgaben gebildet werden:

Zerlegung	1. Teilaufgabe	2. Teilaufgabe	Ergebnis
$6 = 5 + 1$	$5 \cdot 23 = 115$	$1 \cdot 23 = 23$	$115 + 23 = 138$
$23 = 20 + 3$	$20 \cdot 6 = 120$	$3 \cdot 6 = 18$	$120 + 18 = 138$
$23 = 30 - 7$	$30 \cdot 6 = 180$	$7 \cdot 6 = 42$	$180 - 42 = 138$
$6 = 2 \cdot 3$	$3 \cdot 23 = 69$	$\rightarrow$	$2 \cdot 69 = 138$

Dabei gibt es natürlich mehrere Möglichkeiten, von denen sicherlich auch einige unpraktisch sein können. Je nach Präferenz der Schüler und Schülerinnen können durch geschicktes Zerlegen neue, eventuell noch einfachere Lösungswege gefunden werden. Dabei ist es natürlich auch denkbar, in mehr als zwei Teilaufgaben zu zerlegen, vor allem dann, wenn mit größeren Zahlen gearbeitet wird.

In weiterer Folge kann die Aufteilung schematischer erfolgen, indem ein Faktor immer auf dieselbe Art und Weise zerlegt wird. In verschiedenen Stufen kann dann das Verfahren vereinfacht werden, bis es dem Normalverfahren gleicht[109]:

$532 \cdot 7$	
$500 \cdot 7 =$	3500
$30 \cdot 7 =$	210
$2 \cdot 7 =$	14
$532 \cdot 7 =$	3724

Vereinfacht man diese Vorgehensweise indem die einzelnen Teilmultiplikationen auf der linken Seite nicht mehr notiert werden, so kommt man dem späteren Normalverfahren schon sehr nahe. Dieser Übergang sollte meiner Ansicht nach jedoch nicht zu schnell erfolgen, da sonst der Sinn des halbschriftlichen Rechnens verloren geht.

Stellenweises Rechnen

Stellenweises Rechnen kann als Erweiterung der vorangegangenen Methode betrachtet werden. Wie im letzten Beispiel, wird der entsprechende Faktor in seine Stellenwerte zerlegt. 795 wird also beispielsweise zu 700+90+5. Man kann sich nun leicht vorstellen, dass aufgrund des Distributivgesetzes die Anzahl der Teilrechnungen schnell größer wird, vor allem dann, wenn beide Faktoren mehrstellig

[109] Gerster, 2012, 150f

sind[110]. Aufgrund dessen sollte die Übersicht mithilfe eines gewissen Schemas gewahrt werden. Dazu wird ein sogenanntes Malkreuz vorgeschlagen, welches ich in folgendem Beispiel zeigen möchte:

$$62 \cdot 24 =$$

$\cdot$	60	2	
20	1200	40	1240
4	240	8	248
	1440	48	1488

Rein rechnerisch entspricht dieses Schema der zweifachen Anwendung des Distributiv-Gesetzes:

$$62 \cdot 24 = (60 + 2) \cdot (20 + 4)$$

Die einzelnen Teilprodukte finden sich in der Mitte der Tabelle. Am rechten und unteren Rand sind die Zwischensummen zu finden, welche zum Schluss nochmals addiert werden. Unabhängig davon, von welchem der beiden Ränder ausgegangen wird kommt man natürlich zum selben Ergebnis.

Auch bei der weiter oben erwähnten Gittermethode handelt es sich um eine Form des stellenweisen Rechnens mithilfe eines Schemas. Der Unterschied zu dieser Methode liegt in der Notation der Zwischenergebnisse und in der abschließenden Addition.

Hilfsaufgaben

Beim Lösen mit Hilfsaufgaben werden Multiplikationen „in der Nähe“ der gestellten Rechenaufgabe gesucht, vor deren Ergebnis dann auf das Endergebnis geschlossen werden kann[111]. Will man beispielsweise $31 \cdot 6$ berechnen, so kann zuerst die einfachere Aufgabe $30 \cdot 6 = 180$ gelöst werden um dann auf das Ergebnis $31 \cdot 6 = 180 + 6 = 186$ zu schließen. Es handelt sich dabei um eine sehr praktische Strategie, mit der relativ schnell geeignete Aufgaben gelöst werden können. Je mehr Stellen die entsprechenden Zahlen haben, desto schwieriger wird es jedoch, eine geeignete Hilfsaufgabe zu finden und von deren Ergebnis auf die richtige Lösung zu schließen. Diese Methode kann unter anderem auch für das Kopfrechnen sehr hilfreich sein.

Vereinfachen

Das von Padberg als Vereinfachen bezeichnete Vorgehen ist in meinen Augen für das halbschriftliche Rechnen nur bedingt geeignet, da die Hintergründe nicht einfach zu erklären sind (vor allem, wenn

[110] Padberg, 2005, 174
[111] Padberg, 2005, 176

erst wenig von der Multiplikation allgemein bekannt ist) und weil es nur in seltenen Fällen anwendbar ist[112]. Der Vollständigkeit halber soll die Methode trotzdem erklärt werden.

Man macht sich bei dieser Methode die Tatsache zunutze, dass das Ergebnis einer Multiplikation gleichbleibt, wenn man einen Faktor mit einer beliebigen Zahl multipliziert und den anderen durch dieselbe Zahl dividiert. Wie gesagt ist diese Vorgehensweise nur in wenigen Situationen hilfreich, da auch die Division an dieser Stelle vermutlich noch nicht ausführlich behandelt wurde. Als einfaches Beispiel könnte die Aufgabe $50 \cdot 14$ betrachtet werden. Um mithilfe einer einfacheren Rechnung zum Ergebnis zu kommen, reicht es $100 \cdot 7 = 700$ zu berechnen.

Probleme

Eine ausführlichere Behandlung des halbschriftlichen Rechnens im Zuge des Themas Multiplikation bringt natürlich auch einige Probleme mit sich, welche hier kurz erwähnt werden sollen:

- Die Behandlung der oben genannten Aspekte beansprucht Zeit, die eventuell nicht vorhanden ist.
- Alternative Methoden bergen die Gefahr der Vermischung mit anderen Vorgehensweisen (wie zum Beispiel dem Normalverfahren) und somit einer falschen Anwendung.
- Die Methoden sind teilweise für Schüler und Schülerinnen sehr anspruchsvoll. Vor allem leistungsschwächere Schüler und Schülerinnen könnten damit überfordert sein[113].
- Das gewünschte Ergebnis der Methodenvielfalt wird nur selten erreicht. Viel öfter suchen sich Schüler und Schülerinnen eine Strategie aus, die immer wieder angewandt wird[114].
- Die Erfolgsquote ist meistens geringer als bei Anwendung des Normalverfahrens. Vor allem beim Rechnen mit größeren Zahlen sind die Methoden teilweise sehr aufwendig[115].

2.1.5.2 Notieren von Endnullen und Nullzeilen

Stiewe spricht sich für die Notation von Endnullen und Nullzeilen aus, da beobachtet wurde, dass Schüler und Schülerinnen, die dies bei den Aufgaben machten, eine höhere Lösungsquote erzielten[116]. Beide Aspekte sollen Fehler verhindern, bei denen die Teilprodukte falsch angeordnet sind. Die Notation der Endnullen soll helfen, indem jedes Teilergebnis rechtsbündig geschrieben wird um somit eine falsche Anordnung zu verhindern. Dazu muss aber auch die Regel klar sein, wie viele Endnullen jeweils zu notieren sind (Bei einem dreistelligen Multiplikator wären es zwei Endnullen beim ersten

[112] Padberg, 2005, 176
[113] Padberg, 2005, 197
[114] Ebd.
[115] Padberg, 2005, 198
[116] Padberg/Stiewe, 1986, 26f

Teilergebnis, da mit einem Hunderter multipliziert wird). In folgendem Beispiel (aus einem früheren Kapitel) wird veranschaulicht was gemeint ist:

1	6	·	5	7	1
		8	0	0	0
		1	1	2	0
				1	6
		9	1	3	6

Nullzeilen können benutzt werden, wenn im zweiten Faktor eine Null vorkommt. Auch diese Vorgehensweise soll das falsche Anordnen der Teilprodukte verhindern, indem die Zeile, welche Nullen enthält, nicht einfach ignoriert wird. In folgendem Beispiel wird dies vorgeführt, ohne jedoch Endnullen zu notieren:

5	2	8	·	3	0	1
	1	5	8	4		
			0	0	0	
				5	2	8
	1	5	8	9	2	8

In meinen Augen macht diese Schreibweise durchaus Sinn, wenn Schüler und Schülerinnen Probleme in den oben genannten Bereichen haben. Es muss jedoch zu den Strategien erklärt werden, warum es Sinn macht die Endnullen beziehungsweise Nullzeilen zu ergänzen. Ansonsten läuft man Gefahr, nur ein Symptom zu bekämpfen, ohne das tatsächliche Problem zu beseitigen. Es muss also darauf geachtet werden, dass die Schüler und Schülerinnen verstehen was im Zuge dieser Vorgehensweise passiert, um einen positiven Lerneffekt zu gewährleisten.

2.1.5.3 Überschlagsrechnungen

Überschlagsrechnungen haben mehrere Funktionen für Schüler und Schülerinnen, die sich positiv auf die Ergebnisfindung bei Rechenbeispielen auswirken können. Einerseits kann durch geschicktes Runden der Faktoren einer Multiplikationsaufgabe gut erkannt werden, ob das gefundene Ergebnis plausibel ist. Abweichungen führen zur nochmaligen Kontrolle und somit eventuell zur selbstständigen Fehlerfindung.

Dabei ist allein schon die Dimension des Ergebnisses ein wichtiger Faktor. Wie weiter oben schon erwähnt wurde, passiert ein großer Teil der Fehler bei der Anordnung der Teilprodukte, was sich oft auf die Anzahl der Stellen des Ergebnisses auswirken kann. Einige Fehler, die durch einen fehlerhaften Umgang mit der Zahl 0 zu tun haben, bewirken denselben Effekt. Es kommt also zu falschen

Endprodukten, die beispielsweise eine Stelle zu viel oder zu wenig haben. Durch eine simple Überschlagsrechnung kann ein solcher Fehler leicht vom Schüler selbst erkannt und im Optimalfall auch behoben werden.

Sowohl Padberg als auch Gerster schlagen eine konsequente Durchführung von Überschlagsrechnungen vor, um diese Art der Selbstkontrolle einzuführen[117]. Beide sprechen sich außerdem dafür aus, die Überschlagsrechnung auch bei der Notenfindung mit einzubeziehen.

2.2 Zur Division von natürlichen Zahlen und der Behandlung im Unterricht

2.2.1 Anschauliche Vorstellungen zur Division von Dezimalzahlen

Die Division bietet als Rechenoperation einige Interpretationsmöglichkeiten, die helfen können die Vorgehensweise besser zu verstehen. Aufgrund des Umstandes, dass sie als schwierigste der vier Grundrechenarten gilt[118] ist diese Tatsache sehr zu begrüßen, da eine vielfältige Auswahl an anschaulichen Vorstellungen zum Erlernen sehr hilfreich sein kann. In der Literatur und in Schulbüchern finden sich einige entsprechende Konzepte zur Division, von denen ich vier genauer vorstellen möchte, da diese meinem Vernehmen nach in den Schulen häufig verwendet werden. Dabei sei ausdrücklich erwähnt, dass die diversen Interpretationsmöglichkeiten an einigen Stellen in einander übergreifen und sich ergänzen. In Anbetracht dieser Tatsache ist es natürlich sinnvoll, diese inhaltlichen Deutungen zu kombinieren.

2.2.1.1 Messen

Bei dieser Interpretation der Division geht es darum, eine Grundmenge in gleich große Teilmengen aufzuteilen. Dabei ist die Anzahl dieser Teilmengen das Ergebnis der entsprechenden Division. Ein Beispiel dazu könnte folgendermaßen aussehen:

Eine Strecke von 30 Metern Länge soll in Abschnitte von 5 Metern Größe aufgeteilt werden. Wie viele Teilstrecken entstehen dabei?

[117] Gerster, 2012, 156f beziehungsweise Padberg, 2005, 277ff
[118] Padberg, 1991b, 62

Beim Messen (beziehungsweise Aufteilen, wie es in Deutschland oft bezeichnet wird) führt also die Frage: „Wie oft passt der Divisor in den Dividenden?“ zum gewünschten Ergebnis[119]. Ein Beispiel wie das obige ist sicherlich von vielen Schülern und Schülerinnen auch ohne weitere Kenntnis der Division lösbar und eignet sich somit auch gut zur Einführung und Veranschaulichung. Ein weiterer Vorteil liegt in dem natürlichen Zusammenhang mit der Multiplikation[120], welcher ebenfalls eine gute Orientierung für Schüler und Schülerinnen bieten kann und auch für das allgemeine Grundverständnis wichtig ist. Das genannte Beispiel lässt sich auch als Multiplikations-Aufgabe auffassen, da gefragt werden kann: „Mit welcher Zahl muss 5 multipliziert werden, um als Ergebnis 30 zu bekommen?“. Auch die Tatsache, dass der Sachverhalt sehr leicht graphisch darstellbar ist spricht für diese Art von Beispielen beziehungsweise im Allgemeinen für diesen Zugang.

2.2.1.2 Teilen

Das Modell des Teilens (beziehungsweise Verteilen, wie es in Deutschland bezeichnet wird) ist dem zuvor erklärten Modell des Messens sehr nahe, weswegen beide in Schulbüchern oft gemeinsam vorgestellt werden. In diesem Fall geht es zwar auch, mathematisch betrachtet, um die Teilung einer Grundmenge, jedoch ist nun die Anzahl der Teilmengen vorgegeben und die Größe dieser Teilmengen gefragt. Es ist also möglich, das oben genannte Beispiel umzuformulieren, um somit eine andere Interpretationsweise der Division darzustellen:

Eine Strecke von 30 Metern soll in 6 gleich große Streckenabschnitte aufgeteilt werden. Wie groß ist eine solche Teilstrecke.

Wichtig ist dabei, dass es sich um eine faire beziehungsweise gleichmäßige Teilung handelt, da ansonsten der Zusammenhang zur Division verloren gehen würde.

Ein solcher direkter Vergleich der beiden Modelle findet jedoch in den untersuchten Büchern aus gutem Grund nicht statt. Der wichtige Unterschied zwischen den beiden könnte untergehen und würde somit den Lernerfolg mindern. Stattdessen sind Beispiele wie das folgende, welches auch mehr auf den Aspekt des Teilens im eigentlichen Sinne eingeht, öfter zu finden:

Ein Schulkind hat 30 Schokobananen und will diese gleichmäßig unter sich selbst und 5 weiteren Freunden und Freundinnen aufteilen. Wie viele Schokobananen erhält jedes Kind?

Im Gegensatz zum Aufteilen beziehungsweise Messen führt hier also die Frage nach der Größe eines Teiles zum Ziel[121], wodurch die beiden Zugänge auch gut zu unterscheiden sind. Ansonsten sind die Vorteile der beiden Modelle sehr ähnlich, da auch diese Aufgabe ohne weitere Vorkenntnisse zur

[119] Reichel et. al., 2011, 59
[120] Padberg, 2005, 142f
[121] Reichel et.al., 2011, 59

Division lösbar ist und eine gewisse Nähe zur Multiplikation vorhanden ist. Die graphische Darstellung gestaltet sich, denke ich, etwas schwieriger und aufgrund der üblichen Beispiele auch oft abstrakter.

Ein Nachteil, den dieses Modell, vor allem in Anbetracht des Themas dieser Arbeit mit sich bringt ist, dass es nicht auf die Division durch Dezimalzahlen anwendbar ist[122]. Die Begründung hierfür ist ganz einfach anhand der obigen Beispiele zu erklären, da weder 30 Schokobananen auf 5.5 Kinder aufgeteilt werden können, noch eine Strecke von 30 Metern in 5.5 gleich große Teile zerlegt werden kann.

2.2.1.3 Wiederholtes Subtrahieren

Das wiederholte Subtrahieren erinnert schon allein wegen der Bezeichnung stark an das Modell mit dem die Multiplikation erklärt und vermittelt werden soll und hat natürlich auch einige Ähnlichkeiten mit diesem. Die Interpretation weist einen starken Bezug zum Konzept des Messens auf, weswegen es Sinnvoll erscheint eine Aufgabe zu wählen, bei der dieser Zusammenhang genutzt werden kann. Der Zugang kann also zum Beispiel anhand der folgenden Situation erklärt werden:

„24 Liter Apfelsaft soll in Flaschen abgefüllt werden, die jeweils zwei Liter Flüssigkeit fassen können. Wie viele Flaschen werden benötigt um die gesamte Menge Apfelsaft abfüllen zu können?“

Als Lösungsweg kann nun die Zahl 2 immer wieder von 24 (beziehungsweise den folgenden Differenzen) abgezogen werden. Man kann jede der Subtraktionen als einen Vorgang interpretieren, in dem eine Flasche vollständig befüllt wird. Diesen Schritt wiederholt man anschließend, solange bis kein Apfelsaft mehr übrig ist, also die Zahl 0 erreicht wird.

Der Vorteil der wiederholten Subtraktion liegt darin, dass eine bereits bekannte Rechenoperation verwendet werden kann, um die Vorgehensweise zu erklären, beziehungsweise die Vorstellung des Messens zu stärken. Das Durchführen des wiederholten Subtrahierens kann zwar langwierig und mühsam sein, führt aber schlussendlich zum Ziel. Genau diese Tatsache kann dazu genutzt werden, um die Motivation der Schüler und Schülerinnen zum Finden eines einfachen Algorithmus für die Division anzuregen. Laut Padberg dauert dies jedoch sehr lange (je nach Schüler/Schülerin individuell unterschiedlich) und ist mit einem großen Schreibaufwand verbunden[123].

Ich persönlich denke also, dass ein solches Hinführen zum schriftlichen Divisions-Algorithmus in diesem Ausmaß in der Schule nicht sinnvoll ist. Das Modell der wiederholten Subtraktion hat aber sehr wohl eine wichtige Bedeutung, wenn es darum geht, ein tieferes Verständnis des Algorithmus zu schaffen, wenn er bereits erlernt wurde. Insbesondere der enge Zusammenhang zum Konzept des Messens kann sich als sehr hilfreich erweisen.

---

[122] Thiemann, 2004a, 1
[123] Padberg, 2005, 289

2.2.1.4 Die Division als Umkehroperation der Multiplikation

Zuletzt sei noch die Interpretation als Umkehroperation der Multiplikation genannt, da diese, besonders zu späteren Zeitpunkten eine wichtige Rolle spielen kann (man denke zum Beispiel an Äquivalenzumformungen). Der Ansatz funktioniert auch gänzlich ohne auf die Aspekte des Messens und des Teilens zurückzugreifen[124].

Eine Divisionsaufgabe wird mit folgendem Ansatz gelöst: Betrachtet man zum Beispiel die Division $24:6$ so wird als Quotient jene Zahl gesucht, welche mit 6 multipliziert das Produkt 24 ergibt. Wird die Multiplikation ausreichend beherrscht, sollte die Lösung dieses Problems für Schüler und Schülerinnen ohne Hürden möglich sein, vorausgesetzt die Rechnung ist restlos möglich und befindet sich in einem angemessenen Zahlenraum.

Da die Rechenoperation hier jedoch nicht als eigenständiger Vorgang eingeführt wird, empfiehlt es sich laut Padberg nicht, sie auf diesem Weg zum ersten Mal einzuführen. Als ergänzende Interpretation der Division ist dieser Ansatz jedoch sehr wohl von großer Bedeutung, weswegen er an dieser Stelle auch nicht fehlen sollte.

2.2.2 Rechenverfahren zur schriftlichen Division natürlicher Zahlen

In diesem Abschnitt sollen verschiedene Verfahren zur schriftlichen Division vorgestellt und erklärt werden. Darunter befinden sich auch die üblicherweise in Deutschland und Österreich gebräuchlichen Verfahren. Zur Beschreibung der Verfahren wurde abermals hauptsächlich auf das Werk von Hans-Dieter Gerster zurückgegriffen[125]. Problematische Aspekte der diversen Verfahren sollen anschließend ebenfalls diskutiert werden, um eine gute Grundlage zu schaffen, die typischen Fehler von Schülern und Schülerinnen nachvollziehen zu können.

Bei der Einführung der Division in der Schule wird, wie auch bei der Multiplikation, methodisch vorgegangen. Vorerst wird das Verfahren mit einstelligem Divisor eingeführt, anschließend wird der Sonderfall der Zehnerpotenzen besprochen und abschließend wird der allgemeine Fall behandelt[126]. In diesem Kapitel wird abermals nur der allgemeine Fall betrachtet. Bevor jedoch die einzelnen Vorgehensweisen vorgestellt werden, sei noch gezeigt, welcher theoretische Hintergrund dem Divisionsalgorithmus innewohnt.

[124] Padberg, 2005, 146f
[125] Gerster, 2012
[126] Padberg, 2005 (Didaktik der Arithmetik), 286ff

2.2.2.1 Theoretischer Zugang zur schriftlichen Division

Wie schon bei der Multiplikation macht sich auch der Divisionsalgorithmus das Distributivgesetzt zu Nutze, um eine möglichst einfache und nachvollziehbare Vorgehensweise zu gewährleisten. In diesem Fall wird jedoch nur eine der beiden Zahlen, nämlich der Dividend zerlegt. Anhand des folgenden einfachen Beispiels ist zu sehen, auf welchem Grundgedanken der Zugang beruht:

$$84:4 = (80+4):4 = 80:4 + 4:4 = 20 + 1 = 21$$

Es werden also abermals die Stellenwerte benutzt um den Rechenvorgang aufzuschlüsseln. Im Grunde reichen für diese Aufgabe also die sehr einfachen Divisionen 8:4 und 4:4. Wenn die einzelnen Teildivisionen nicht restlos durchführbar sind, so kann der Rest bei der nächsten Teilrechnung hinzugefügt werden. Auch hierzu ein kurzes Beispiel, diesmal werden jedoch Stellenwerte benutzt:

$$96:8 = (90+6):8$$

Nun wird die erste Division mit den Zehnern durchgeführt, welche nicht restlos möglich ist:

$$9Z:8 = 1Z\ R1$$

Der Rest (1 Zehner beziehungsweise 10 Einer) wird anschließend entbündelt und zum nächsten Teildividend hinzugezählt um die folgende Division zu erhalten:

$$(6E + 10E):8 = 2$$

Die beiden Teilergebnisse (1 Zehner und 2 Einer) ergeben dann zusammen den Quotienten 12.

Dieser Vorgang kann natürlich auch durchgeführt werden, wenn sowohl Dividend als auch Divisor mehr Stellen besitzen. Schlussendlich geht es also wieder darum eine Rechnung in mehrere einfachere Teilrechnungen aufzuspalten, wobei die Stellenwerte eine entscheidende Rolle spielen, um die Aufgabe leichter zu machen. Was den Divisionsalgorithmus bedeutend komplexer macht als die Vorgehensweise bei der Multiplikation, ist (neben dem Schätzen des Teilquotienten) der Umgang beziehungsweise der Übertrag der Reste. Mehr Informationen dazu finden sich am Ende des Kapitels.

2.2.2.2 Divisionsverfahren in Deutschland

Da es sich beim österreichischen Verfahren um eine abgekürzte Version der in Deutschland üblichen Vorgehensweise handelt, soll hier mit dieser begonnen werden. Anhand des folgenden Beispiels sollen die Arbeitsschritte dargestellt und erklärt werden:

	9	6	8	0	:	6	4	=	1	5	1	Rest 16
-	6	4										
	3	2	8									
-	3	2	0									
	0	0	8	0								
		-	6	4								
			1	6								

Das Ergebnis der Division wird stellenweise gefunden. Vorerst muss herausgefunden werden, an welcher Stelle die erste Teil-Division durchgeführt werden kann. Im obigen Beispiel wird erkannt, dass 9 (Tausender) nicht durch 64 teilbar ist, weswegen der Dividend der ersten Teil-Division 96 ist[127]. Nun muss geschätzt werden wie oft 64 in 96 enthalten ist. In dieser Aufgabe ist die Schätzung relativ einfach, es sei jedoch angemerkt, dass dies natürlich nicht immer der Fall ist. Ganz im Gegenteil wird sich später zeigen, dass dieser Überschlag eine wichtige Fehlerquelle darstellt.

Da 64 einmal in 96 enthalten ist, wird 1 als erste Stelle des Quotienten notiert. Als nächstes muss der Rest der Teil-Division bestimmt werden. Hierfür wird vorerst die erste Ziffer (in diesem Fall 1) mit dem Divisor multipliziert und das Ergebnis wird an die entsprechenden Stellen unter dem Dividenden notiert. Anschließend wird subtrahiert (also $96 - 64$) um den ersten Rest (hier 32) festzustellen. Zu diesem wird die nächste Ziffer des Dividenden ergänzt (sprich „herabgeholt"/ "heruntergeholt"), um mit der neu entstandenen Zahl (in diesem Fall 328) den Algorithmus fortführen zu können.

Diese Arbeitsschritte werden dann so lange wiederholt, bis keine Stelle vom Dividenden mehr herabgeholt werden kann. Der zuletzt berechnete Teil-Rest ist zugleich der Rest der gesamten Division und wird neben dem Ergebnis notiert. Es gibt natürlich auch die Möglichkeit weiter zu rechnen, jedoch nur, wenn den Schülern und Schülerinnen Dezimalzahlen bekannt sind. Dieser Fall soll zu einem späteren Zeitpunkt behandelt werden (das Ergebnis der obigen Aufgabe wäre dann 151,25).

[127] 9 Tausender werden zu 90 Hundertern entbündelt. Damit ergeben sich 96 Hunderter für die erste Teildivision.

Laut Gerster gab es in Deutschland eine Zeit lang Uneinigkeiten über die Schreibweise des Verfahrens, da die Notation $9680: 64 = 151\ Rest\ 16$ genau genommen mathematisch nicht korrekt wäre[128]. Stattdessen wurde die folgende Schreibweise vorgeschlagen, welche jedoch zusätzliche Schwierigkeiten für Schüler und Schülerinnen bedeutete, da sie offenbar nicht zur Gänze verstanden wurde: $9680 = 64 * 151 + 16$.

2.2.2.3 Divisionsverfahren in Österreich

Das in Österreich angewandte Verfahren ist dem deutschen sehr ähnlich[129]. Im Grunde ist die heimische Variante eine abgekürzte Form der Methode unserer Landes-Nachbarn. Die Teil-Produkte, welche entstehen, wenn der Divisor mit der Ergebnisziffer multipliziert wird, werden nicht mehr angeschrieben. Die folgende Subtraktion wird aufgrund dessen im Kopf durchgeführt und es wir nur das Ergebnis notiert. Unser oben gewähltes Beispiel würde also wie folgt aussehen:

9	6	8	0	:	6	4	=	1	5	1	Rest 16
3	2	8									
		8	0								
		1	6								

Die erste logische Schlussfolgerung, die aufgrund der beiden Verfahren vermutet werden kann, ist, dass es aufgrund der vermehrten Kopfrechnungen bei der österreichischen Version zu mehr Fehlern kommen wird, als bei der deutschen Variante. Es liegen jedoch keine Untersuchungen vor, welche diese Behauptung bestätigen können. Der offensichtliche Nachteil der ersten Variante ist der höhere Schreib-Aufwand, der aber meiner Meinung nach vernachlässigbar ist. Es ist jedoch auch zu bedenken, dass in Deutschland eine andere Vorgehensweise bei der Subtraktion üblich ist. Dieser Unterschied macht einen Vergleich der beiden Ansätze sehr schwierig, da schon vor der Behandlung unterschiedliche Grundvoraussetzungen herrschen.

Der Rest wird auch oft nicht extra im Ergebnis ergänzt. Es ist üblich, einfach in der letzten Zeile der Staffel das Wort „Rest“ oder lediglich den Buchstaben „R“ zu ergänzen, um darauf hinzuweisen.

2.2.2.4 Divisionsverfahren in Italien und der Türkei

In der Türkei und in Italien ist eine andere Notation der schriftlichen Division üblich, wobei es eine ausführliche und eine kurze Form gibt[130]. Beide sollen hier angeführt werden, wobei gleich anzumerken ist, dass die Kurzform (bis auf die räumliche Aufteilung) sehr ähnlich der deutschen

[128] Gerster, 2012, 158ff
[129] Gerster, 2012, 161
[130] Gerster, 2012, 163

Version ist, weswegen diese in weiterer Folge nicht genauer betrachtet wird. Betrachtet wird abermals die Divisionsaufgabe $9680 : 64$.

Ausführliche Form										Kurzform							
	9	6	8	0	:	6	4			9	6	8	0	:	6	4	
-	6	4	0	0		1	0	0		6	4				1	5	1
	3	2	8	0						3	2	8					
-	3	2	0	0			5	0		3	2	0					
			8	0								8	0				
		-	6	4				1				6	4				
			1	6		1	5	1				1	6				

Der Vorteil der ausführlichen Version ist, dass sofort ersichtlich wird, um welche Ziffer es sich handelt, wodurch der Algorithmus vermutlich leichter nachzuvollziehen ist. Ein Zurückführen auf die Kurzform ist dann auch nicht mehr schwierig und eventuell für Schüler und Schülerinnen besser verständlich. In Griechenland und Spanien ist eine ähnliche Variante üblich, wobei dort, ähnlich wie in Österreich, die Ergebnisse der Teilpunkte nicht notiert werden.

2.2.2.5 Divisionsverfahren in Schweden

Das Konzept des schwedischen Verfahrens ist in den Grundzügen das gleiche wie bei den bisher erwähnten Versionen. Der wesentliche Unterschied liegt in der Notation des Ergebnisses, nämlich über dem Dividenden, wodurch die Stellenwerte sofort erkennbar sind[131]. Zur Veranschaulichung ist erneuert die Aufgabe 9680:64 dargestellt:

	1	5	1		
9	6	8	0	6	4
6	4				
3	2	8			
3	2	0			
0	0	8	0		
		6	4		
		1	6		

[131] Gerster, 2012, 163f

Für die letzten beiden Versionen ist anzumerken, dass der Rest nicht zum Ergebnis ergänzt wird, sondern nur in der jeweiligen Staffel zu finden ist.

2.2.3 Probleme des Normalverfahrens der Division

Um nun Probleme des relativ komplexen Divisionsverfahrens zu ergründen, soll wieder ein einzelner Arbeitsschritt genauer betrachtet werden, um potenzielle Schwierigkeiten festmachen zu können. Gleich zu Beginn fällt auf, dass der Algorithmus (im Gegensatz zur Multiplikation) drei verschiedene Rechenoperationen benötigt, nämlich Divisionen, Multiplikationen und Subtraktionen. Allein schon deswegen gilt die Division als schwierigste der vier Grundrechenarten[132], da hier verständlicherweise am meisten schiefgehen kann. Zur Aufschlüsslung des Arbeitsschrittes wird abermals das obige Beispiel herangezogen, welches hier nochmals angeführt wird. Es sei erwähnt, dass dieser Schritt natürlich wiederholt werden muss, bis der Algorithmus beendet ist, was wiederum die Möglichkeit auf Fehler erhöht. Diesmal wird die österreichische Version benutzt, da sie für diese Arbeit am relevantesten erscheint:

9	6	8	0	:	6	4	=	1	5	1	Rest 16
3	2	8									
		8	0								
		1	6								

Erster Arbeitsschritt, Division:

- ➔ Die Ziffer „9“ auswählen (Tausender-Ziffer Dividend)
- ➔ Die Zahl „64“ auswählen (Divisor)
- ➔ Wissen, dass 64 nicht in 9 enthalten ist
- ➔ Die Zahl „96“ auswählen (Tausender- und Hunderter-Ziffer Dividend)
- ➔ Wissen, dass dividiert werden muss
- ➔ Wissen, dass 64 einmal in 96 enthalten ist (Überschlagen)
- ➔ „1“ als erste Ziffer des Ergebnisses notieren
- ➔ Wissen, welche Zahlen multipliziert werden müssen (Erste Ziffer des Ergebnisses und Divisor)
- ➔ Wissen, dass das Produkt 64 ist
- ➔ Das Produkt während der nächsten beiden Schritte im Kopf behalten
- ➔ Wissen, dass das Produkt von den ersten beiden Stellen des Divisors subtrahiert werden muss
- ➔ Wissen, dass die Differenz 32 beträgt
- ➔ Die Differenz unter dem Dividenden an der richtigen Stelle notieren

[132] Gerster, 2012, 164; Auch Padberg, 2005, 286 teilt diese Auffassung

➔ Wissen, dass die Zahl „8“ (nächste Ziffer im Dividenden) herabgeholt werden muss

➔ Wissen, dass anschließend 328 der neue Teil-Dividend ist

Auch hier muss wiederum bedacht werden, dass in jeder Division mehrere solcher Arbeitsschritte durchzuführen sind. Gerster weist darauf hin, dass in Aufgaben wie 768:3 oder 46789:78 in etwa 60 verschiedene aufeinander folgende Einzelschritte festgestellt werden können[133].

Noch genauer sieht man die Vielseitigkeit des Divisions-Algorithmus in folgendem Diagramm, welches Bathelt und Padberg zur Veranschaulichung bietet[134]:

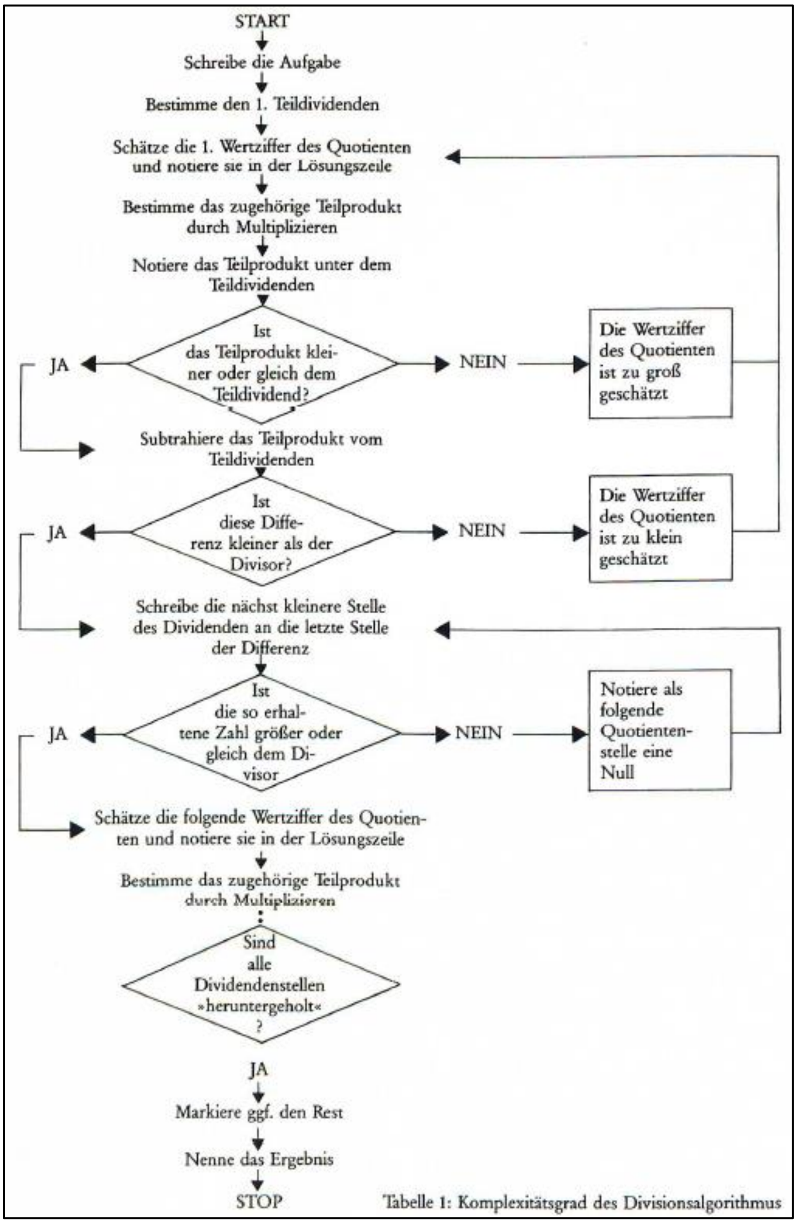


Abbildung 5: Flussdiagramm zum Divisionsalgorithmus [Bathelt, 1986, 30].

[133] Gerster, 2012, 165f

[134] Bathelt et. al., 1986, 30 bzw. Padberg, 1986, 188

Einige der Schwierigkeiten, die laut Gerster im Zuge dieser Arbeitsschritte beim Divisionsalgorithmus entstehen können, sollen hier nun angeführt und kurz erklärt werden[135].

2.2.3.1 Probleme mit der Orientierung

Die Orientierung meint in diesem Fall das Wissen, welcher Schritt als nächstes durchzuführen ist. Beispielsweise kann die Auswahl der falschen Ziffern zu Problemen führen, eventuell bei der ersten Teil-Division oder beim Herabholen von weiteren Ziffern. Die Schwierigkeiten können aber auch auftreten, wenn es darum geht, Teilergebnisse an der richtigen Stelle zu notieren oder zu merken, wann der Algorithmus mit Rest zu beenden ist. Die Vorgehensweise erfordert hierzu eine sehr genaue Durchführung, was bedeutet, dass es vor allem bei Schülern und Schülerinnen mit einem problematischen Schriftbild zu Schwierigkeiten kommen könnte.

2.2.3.2 Probleme beim Überschlagen der Quotienten-Ziffer

Das Überschlagen der nächsten Ziffer im Ergebnis zählt wohl zu den größten Schwierigkeiten im Divisions-Algorithmus[136], da es sich hierbei, verglichen mit den anderen drei Grundrechenarten, um eine für Schüler und Schülerinnen neuartige Vorgehensweise handelt. Es muss geschätzt werden, wie oft der Divisor den Teil-Dividenden teilt. In manchen Fällen, wie in dem oben gezeigten Beispiel, gestaltet sich dies nicht schwer, da es (vermutlich auch für viele Schüler und Schülerinnen) recht leicht zu erkennen ist. Werden die Zahlen jedoch größer, so kann diese Aufgabe sehr schwer sein und es wird immer wieder dazu kommen, dass die falsche Ziffer gewählt wird. Daraus folgen wiederum weitere Schwierigkeiten. Die falsche Schätzung muss vorerst erkannt werden, ansonsten könnte ein (falscher) Weg gefunden werden, der ein weiterrechnen ermöglicht. Und selbst wenn die Überschlagsrechnung als unkorrekt identifiziert wird, so muss diese korrigiert werden, was abermals zu Problemen führen kann. Offenbar ist das Potenzial für Fehler bei diesen Arbeitsschritten also sehr hoch.

2.2.3.3 Schwierigkeiten beim Ausrechnen der Teilprodukte

Sollten Fehler bei diesem Schritt passieren, so sind sie vermutlich auf Schwierigkeiten beim Multiplizieren zurückzuführen. Ein Aspekt, der die Teilprodukte fehleranfälliger macht als gewohnte Multiplikationen, ist das nicht vorhandene (und für viele Schüler und Schülerinnen gewohnte) Multiplikationsschema. Durch Nebenrechnungen kann diese Schwierigkeit jedoch zumindest eingegrenzt werden.

2.2.3.4 Probleme beim Subtrahieren

Diese Fehler sind im Allgemeinen auf Probleme mit der Subtraktion zurückzuführen, wobei die zusätzliche Schwierigkeit hinzukommt, dass innerhalb der Divisions-Staffel keine Behalteziffern

[135] Gerster, 2012, 165
[136] Padberg, 2005, 301f teilt diese Ansicht

vorgesehen sind. Werden diese dennoch notiert kann das wiederum zu Verwechslungen führen, die sich ebenfalls auf das Ergebnis auswirken können.

2.2.3.5 Probleme mit Nullen

Wie auch schon bei der Multiplikation haben Nullen eine gewisse Sonderstellung, die im Zuge der Division ebenfalls zu Komplikationen führen kann. Zum Beispiel könnten Schwierigkeiten entstehen, wenn eine Null herabzuholen ist, wenn im Ergebnis eine Null als nächste Ziffer zu notieren ist (zum Beispiel „19 ist Null-mal in 12 enthalten"), oder wenn Endnullen im Quotienten vorkommen. Padberg bestätigt abermals, dass Fehler bei denen die Ziffer Null involviert ist, sehr häufig auftreten[137]. Vor allem aufgrund der vielfältigen Möglichkeiten mit denen die Ziffer Null Probleme bereiten kann, ist eine ausführliche Thematisierung besonders wichtig. Im folgenden Kapitel wird noch näher auf dieses Thema eingegangen.

2.2.3.6 Probleme mit der Schreibweise für den Rest

Dieser Aspekt meint vor allem wie, wann und wo der Rest der Division zu notieren ist. Bei der Multiplikativen Schreibweise, welche in Deutschland auftreten kann, ist dies besonders relevant. Im Allgemeinen handelt es sich hierbei jedoch eher um eine Formalität.

2.2.4 Typische Fehler der Division

Die Aufschlüsselung des Divisionsalgorithmus in einem der vorherigen Kapitel hat gezeigt, dass dieser sehr viele einzelne Arbeitsschritte erfordert, die zu verschiedenen Arten von Fehlern führen können. Dementsprechend vielfältig sind auch die Fehlermuster, die bei Schülern und Schülerinnen auftreten können. Im folgenden Kapitel soll es also darum gehen eine Übersicht zu schaffen, welche Fehler am häufigsten auftreten, und wo deren Grundlage zu vermuten ist. Natürlich können nicht alle Arten von fehlerhaften Vorgehensweisen hier angeführt werden, es sind aber jene ausgewählt, die am häufigsten auftreten und somit am wichtigsten erscheinen.

Zu Beginn sei gesagt, dass bei der Betrachtung der Fehler, welche bei Divisionsaufgaben häufig vorkommen, dieselben Überlegungen in Bezug auf die Vollständigkeit gelten, wie bei der Multiplikation.

Erschwerend kommt hinzu, dass aufgrund der Komplexität der Division, die Vorbereitung und Auswertung einer Untersuchung zu diesem Rechenverfahren mit einigen Schwierigkeiten verbunden sind. So gibt es sehr viele Aspekte, die schon beim Erstellen der Aufgaben berücksichtigt werden

[137] Padberg, 2005, 302f

müssen. Um in weiterer Folge Einzelfehler von systematischen oder häufigen Fehlern unterscheiden zu können, müssen diese Aspekte öfters vorkommen während gleichzeitig der Umfang der Untersuchung nicht zu groß werden darf. Die Untersuchung Beckmanns beinhaltet beispielsweise 22 Divisionsaufgaben, bei denen auf 16 verschiedene Schwierigkeitsmerkmale geachtet wurde[138] (Bathelt zählt sogar 17 auf[139]).

Allein aufgrund dieser Voraussetzungen ist es logisch, dass sicherlich nicht alle Fehlerarten zur Gänze beobachtet und dokumentiert werden können (das lässt sich sagen, obwohl Bathelt alleine bis zu 40 verschiedene Fehlermuster dokumentiert[140]). Dennoch bin ich davon überzeugt, dass aus solchen Untersuchungen einige wichtige Erkenntnisse gewonnen werden können, die dabei helfen, den Mathematik-Unterricht zu verbessern. Noch größere Aussagekraft haben in Folge dessen natürlich Fehlerarten, welche in allen drei behandelten Untersuchungen vorkommen. Im folgenden Abschnitt sollen also die wichtigsten, beziehungsweise signifikantesten Fehlerarten in diversen Kategorien skizziert werden, um ein Bild zu schaffen, welches über die verschiedenen Schwierigkeiten bei der Division Auskunft geben soll.

Grundlage der folgenden Erörterung sind der Artikel von Bathelt, Post und Padberg[141] beziehungsweise die Anregungen von Gerster[142], wie auch schon im Kapitel zur Multiplikation. Auch die Überlegungen Padbergs in „Didaktik der Arithmetik“ werden abermals eine Rolle spielen[143].

2.2.4.0 Vorbemerkung zu den Publikationen

Bathelt, Post und Padberg beziehen sich auf zwei separate Untersuchungen aus dem Jahr 1984. Bei einer (197 Schüler und Schülerinnen aus 11 Klassen der vierten Schulstufe aus 6 verschiedenen Grundschulen) lag der Fokus auf Divisionen mit einem einstelligen Divisor und bei der anderen (296 Schüler und Schülerinnen aus 11 Klassen der fünften Schulstufe in fünf verschiedenen Realschulen) auf Aufgaben mit einem zweistelligen Divisor[144]. Die Erkenntnisse in „Didaktik der Arithmetik“ beziehen sich auf eine Studie von Beckmann, welche im Jahr 2000 veröffentlicht wurde (302 Schüler und Schülerinnen aus 15 Klassen der vierten Schulstufe aus 7 verschiedenen Grundschulen)[145]. Gersters Untersuchung fand 1979 in 17 Klassen (sowohl in Hauptschulen als auch in Realgymnasien und Gymnasien) des fünften und sechsten Schuljahres statt[146]. Jede Klasse bekam drei Aufgaben mit Rest

[138] Padberg, 2005, 299f
[139] Bathelt et. al., 1986, 32
[140] Bathelt et. al., 1986, 40
[141] Bathelt et. at., 1986
[142] Gerster, 2012
[143] Padberg, 2005
[144] Bathelt et. al., 1986, 29
[145] Padberg, 2005, 298f
[146] Gerster, 2012, 171

und drei ohne, wobei die Rechnungen in der fünften Schulstufe einen einstelligen Divisor aufwiesen und die Divisionen in der sechsten Schulstufe einen zweistelligen Divisor hatten.

Bezüglich des Alters der Studien, der verschiedenen Vorgehensweisen, der Arten von Fehlern und dem Aufzählen genauer Ergebnisse gelten dieselben Überlegungen wie im entsprechenden Kapitel zur Multiplikation (2.1.4).

2.2.4.1 Endnullfehler

Von einem Endnullfehler wird gesprochen, wenn im Quotienten der Division die letzte Stelle, an der eine Null stehen sollte, nicht besetzt wird[147]. Zu erklären ist dieses Versäumnis dadurch, dass der Schüler beziehungsweise die Schülerin die stellenwertstiftende Funktion dieser Null nicht erkennt. Es finden sich diverse Ausformungen dieses Fehlermusters, die grundlegende Art des Fehlers bleibt jedoch dieselbe. In allen drei Untersuchungen wird dieses Fehlermuster als besonders weit verbreitet eingestuft. Gerster beobachtet in einer Klasse sogar eine Fehlerquote von 36%[148], wobei er jedoch nicht zwischen Endnullfehlern und Zwischennullfehlern unterscheidet. Die Beobachtungen bestätigen jedenfalls erneut, wie schon zuvor des Öfteren festgestellt, dass vor allem der Umgang mit Nullen große Schwierigkeiten bei vielen Schülern und Schülerinnen verursachen kann.

2.2.4.2 Zwischennullfehler

Der sogenannte Zwischennullfehler ist sehr ähnlich dem soeben erwähnten Endnullfehler. Die Null, welche im Quotienten notiert werden sollte, befindet sich nun aber nicht am Ende, sondern mitten im Ergebnis. Padberg stellt fest, dass der Fehler fast immer in derselben Situation auftritt: „Die vorhergehende Teildivision geht auf und die ‚heruntergeholte' Ziffer ist kleiner als der Divisor. Statt eine Null zu vermerken wird gleich die nächste Ziffer heruntergeholt“[149].

Als Gegenmaßname zu diesen beiden Fehlerarten (Endnull- und Zwischennullfehler) empfiehlt sich die gesonderte Behandlung von Beispielen dieser Art, um erklären zu können welche Rolle die Null in Situationen wie diesen spielt[150]. Die stellenwertstiftende Eigenschaft der Null wird in diesem Zusammenhang offenbar des Öfteren vergessen, beziehungsweise als selbstverständlich vorausgesetzt. Aufgrund dessen empfiehlt Bathelt auch eine ausführliche Erarbeitung des Stellenwertsystems, da so die Grundlage für das Arbeiten mit den Rechenoperationen geschaffen werden kann. Außerdem schlägt Padberg die Überschlagsrechnung vor, da die Ergebnisse sich um eine

[147] Padberg, 2005, 302f
[148] Gerster, 2012, 178
[149] Padberg, 2005, 301
[150] Bathelt/Post/Padberg, 1986, 42f

(oder mehrere, wenn mehr als eine Null ausgelassen wird) Zehnerpotenz vom tatsächlichen Quotienten unterscheiden[151].

2.2.4.3 Teilproduktfehler

Im Zuge des Divisions-Algorithmus muss immer wieder eine Ziffer des Quotienten mit dem Divisor multipliziert werden, um das neue Teilprodukt zu errechnen, welches anschließend vom Teildividenden subtrahiert wird. Wird diese Multiplikation fehlerhaft durchgeführt, so spricht man von einem Teilproduktfehler[152]. Durch die Schreibweise der Division, welche nur wenig zusätzlichen Platz bietet, um einen Multiplikationsalgorithmus übersichtlich durchzuführen, sind Schüler und Schülerinnen hier mit „erschwerten Bedingungen“ konfrontiert. Das Durchführen von Nebenrechnungen ist zur Vermeidung dieses Problems sicherlich hilfreich, erzeugt jedoch zusätzlichen Aufwand.

Es sei vermerkt, dass Padberg auch die weiter unten angeführten Quotientenfehler zu dieser Kategorie hinzuzählt[153], da die Teilprodukte durch die Multiplikation mit dem Divisor entstehen. Mir erscheint es jedoch sinnvoll diese beiden Arten von Fehlern zu unterscheiden.

2.2.4.4 Subtraktionsfehler

Von einem Subtraktionsfehler ist die Rede, wenn bei der Subtraktion des Teilproduktes vom Teildivisor ein Fehler passiert. Auch hier ist eine andere Rechenoperation innerhalb des Divisionsalgorithmus durchzuführen, was neben diversen Schwierigkeiten mit der Differenzbildung an sich, aufgrund der alternativen Notation zu Problemen führen kann. In Österreich kommt wie bereits erwähnt erschwerend hinzu, dass das Notieren der Teilprodukte im Normalverfahren nicht vorgesehen ist und stattdessen gleich im Kopf subtrahiert werden soll. In Anbetracht dessen halte ich es in diesem Kontext für sinnvoll Nebenrechnungen vorzuschlagen, jedoch nur, wenn die Komplexität der Rechnung es erfordert.

2.2.4.5 Teilquotientenfehler

Das Schätzen einer Quotientenziffer ist wohl für viele Schüler und Schülerinnen aufgrund der Einzigartigkeit und Neuartigkeit des Vorganges (im Vergleich zu den anderen Rechen-Algorithmen) sehr ungewohnt. Hierbei kann es leicht dazu kommen, dass die besagte Ziffer falsch gewählt wird (oft ± 1), wobei dann von einem Teilquotientenfehler die Rede ist[154]. Je weiter der Divisor vom gewohnten Zahlenraum abweicht, desto schwieriger ist natürlich auch die Schätzung.

[151] Padberg, 2005, 303
[152] Gerster, 2012, 172f
[153] Padberg, 2005, 301
[154] Ebd.

Ist die Ziffer im Quotienten zu klein gewählt, so ist die Differenz größer als der Divisor, was das Finden der nächsten Ziffer im Quotienten unmöglich macht, da diese größer als 10 sein müsste. Ist sie zu groß gewählt, so müsste die Differenz einen negativen Wert annehmen, wodurch ebenfalls der nächste Schritt nicht möglich wäre.

Die Tatsache, dass in diesen Fällen eine falsche Quotientenziffer gewählt wurde fällt jedoch nicht immer auf. Stattdessen werden von Schülern und Schülerinnen Strategien entwickelt, die das weiterrechnen ermöglich. Dies führt in weiterer Folge natürlich zu einem falschen Ergebnis.

Padberg verortet die Probleme für diese Art von Fehlern (und auch für Teilproduktfehler) in starken Defiziten beim kleinen 1x1[155], welches auch gründlich wiederholt und gefestigt werden sollte. Sowohl er, als auch Gerster schlagen eine Liste von Vielfachen des Divisors vor[156], welche dabei helfen soll, die geeignete Quotientenziffer zu finden. Diese kann auch nur teilweise ausgefüllt werden, um eine bessere Übersicht zu bewahren und den Rechenaufwand einzuschränken.

2.2.5 Allgemeine Punkte zur Vermeidung von Fehlern bei der Division

Ähnlich wie bei der Multiplikation gibt es auch zur Division einige Vorschläge für den Unterricht, welche das Erlernen und auch die spätere Anwendung des Divisionsalgorithmus erleichtern sollen. Gerade die Division erfordert meiner Ansicht nach eine große Flexibilität der Lehrenden, da es sich mit Sicherheit um die komplizierteste Rechenoperation mit den meisten unterschiedlichen Fehlerquellen handelt. Die Lehrkraft muss also erkennen wo die Schwierigkeiten liegen und diese dann gezielt behandeln. Die folgenden Aspekte stellen vor allem Hilfen dar, die das Verständnis im Allgemeinen stärken sollen, damit viele Probleme erst gar nicht auftreten.

2.2.5.1 Halbschriftliches Rechnen

Das halbschriftliche Rechnen zielt (wie auch bei der Multiplikation) darauf ab, die Rechenoperation der Division durch Zerlegung der Aufgaben in leichtere Teilaufgaben verständlicher zu machen. Das Ziel ist es schlussendlich die Zerlegungen so zu wählen und zu vereinfachen, dass damit das Normalverfahren erklärt werden kann. Auch sogenannte Hilfsaufgaben stellen eine Strategie dar, die bei der Erarbeitung helfen können. Wie Padberg jedoch erwähnt, sind diese im Zusammenhang mit der Division nur sehr selten anwendbar[157].

[155] Padberg, 2005, 303
[156] Gerster, 2012, 188f
[157] Padberg, 2005, 177f

Ein Beispiel wäre die folgende Rechenaufgabe:

$$294{:}\,6 =$$

Durch das Lösen der simpleren Hilfsaufgabe $300{:}\,6 = 50$ kann auf das Ergebnis $50 - 1 = 49$ geschlossen werden.

Wichtiger für das halbschriftliche Rechnen sind jedoch die schrittweisen Zerlegungen einer Rechenaufgabe (oder schrittweises Rechnen), welche wie bereits erwähnt, langsam auf das Normalverfahren der Division hinführen sollen. Für diese Zerlegung des Dividenden gibt es an sich keine Einschränkungen. Wichtig ist meines Erachtens nach, dass von den Schülern und Schülerinnen verstanden wird, warum auch mithilfe der Zerlegung und dem Lösen der Teilaufgaben ein Ergebnis gefunden werden kann. Anhand eines einfachen Beispiels soll hier veranschaulicht werden, wie schrittweises Rechnen aussehen könnte.

Die zu lösende Aufgabe ist $84 : 7$. Die Teilaufgaben sollten natürlich so gewählt werden, dass die entstehenden Rechnungen leicht zu lösen sind. In diesem Fall bietet es sich an, den Dividenden in 70 und 14 zu zerlegen. Die Teildivisionen sind relativ einfach zu berechnen. $70{:}\,7 = 10$ und $14{:}\,7 = 2$ womit man auch leicht zum Ergebnis der Division $84 : 7 = 12$ gelangt.

Die Zerlegung in Vielfache des Divisors biete sich hier natürlich aufgrund der Lösbarkeit der Teildivisionen an und ist für den Anfang sicherlich auch sinnvoll. Padberg ist der Ansicht, dass im Zuge des halbschriftlichen Rechnens die Zerlegung in Anlehnung an die dekadische Struktur im Allgemeinen nicht erfolgen sollte[158]. Der Grund dafür liegt vermutlich bei den damit entstehenden Resten. Für einen Übergang zum Normalverfahren ist dieser Schritt aber dennoch notwendig und in meinen Augen auch sinnvoll, da im Zuge dessen die Hintergründe der Vorgehensweise mithilfe des Konzeptes des schrittweisen Rechnens erklärt werden können. Es sei jedoch erwähnt, dass dieser Schritt sicherlich nicht simpel ist und die Lehrperson vor eine gewisse Herausforderung stellt.

2.2.5.2 Überschlagsrechnung

Die Überschlagsrechnung stellt in vielerlei Hinsicht besonders für die Division ein sehr wichtiges Hilfsmittel dar. Vor allem Gerster legt bei seinen Vorschlägen zur Behebung und Vermeidung von

[158] Padberg, 2005, 177

Fehlern besonderen Wert darauf[159]. Bathelt schlägt vor, die Überschlagsrechnung gezielt einzuüben und anzuwenden[160], da ihr bei der Division eine dermaßen wichtige Rolle zukommt.

Einerseits wird die Überschlagsrechnung der Division zur Abschätzung des Ergebnisses benötigt. Damit können Fehlermuster, welche die Anzahl der Stellen im Quotienten verändern, sehr wirkungsvoll bekämpft werden[161] (zum Beispiel Zwischen- oder Endnullfehler). Natürlich können so auch in manchen Fällen Fehler anderer Art aufgedeckt werden.

Des Weiteren erleichtert ein guter Überschlag im Zuge des Algorithmus auch das Finden der richtigen Quotientenziffer. Diese muss ja, wie bereits erklärt, vorerst abgeschätzt werden, um daraufhin durch eine Multiplikation auf das nächste Teilprodukt zu kommen. Wird bei diesem Schritt gut geschätzt, kann das die Fehlerquote sicherlich einschränken. Besonders bei Aufgaben mit einem mehrstelligen Divisor ist dieser Aspekt besonders wichtig[162].

2.2.5.3 Strukturierte Schreibweise

Bathelt erwähnt in ihren Ausführungen, dass auf eine verkürzte Schreibweise möglichst lange verzichtet werden sollte, da diese der Ursprung einiger Fehlermuster ist[163]. Meiner Meinung nach ist aber nicht nur eine ausführliche, sondern auch eine strukturierte Schreibweise sehr wichtig (Padberg teilt diese Ansicht[164]). Sowohl bei den Teilsubtraktionen, als auch bei den Teilmultiplikationen handelt es sich um Rechenschritte des Divisionsalgorithmus, welche eigentlich von den Schülern und Schülerinnen bereits beherrscht werden sollten. Dennoch sind die beiden Teilschritte bedeutende Fehlerquellen. Eine Erklärung dafür ist aus meiner Sicht (unter anderem) das ungewohnte Setting der Rechenoperationen. So können beispielsweise die Behalteziffern nur sehr begrenzt notiert werden oder werden eventuell sogar leicht vertauscht. Die Subtraktion muss im Kopf gerechnet werden, wenn das Verfahren so durchgeführt wird, wie es in Österreich üblicherweise unterrichtet wird. Um dem entgegenzuwirken ist eine klare und ausführliche Struktur wohl sehr hilfreich. Ein großer Teil dieses Aspektes hängt aber natürlich auch von der Sorgfältigkeit des Schülers beziehungsweise der Schülerin ab.

---

[159] Gerster, 2012, 188ff – Gerster bietet hier auch verschiedene Strategien/Techniken für die Überschlagsrechnung an, auf die ich hier jedoch, aufgrund des Umfanges der Arbeit, nicht näher eingehen kann.
[160] Bathelt et. al., 1986, 43
[161] Padberg, 2005, 305
[162] Gerster, 2012, 189
[163] Bathelt et. al., 1986, 43
[164] Padberg, 2005, 304

2.2.5.4 Gezieltes Ansprechen problematischer Aufgaben

Die enorme Vielfalt der Schwierigkeiten bei der Division erfordert große Geduld und auch ein gutes Einschätzungsvermögen der Lehrkraft[165]. Immer wieder wird in der Literatur vorgeschlagen problembehaftete Beispiele und Situationen, gezielt im Unterricht zu behandeln[166]. Gerade bei der Division erscheint mir dies sinnvoll, da sich gewisse Problembereiche bei bestimmten Aufgaben immer wieder gezeigt haben.

So empfiehlt es sich zum Beispiel gemeinsam mit den Schülern und Schülerinnen eine Strategie zu überlegen, wie erkannt werden kann, dass die gewählte Quotientenziffer zu groß oder zu klein ist. Des Weiteren kann im Zuge dessen besprochen werden, welche Konsequenzen daraus folgen (also warum ein Weiterrechnen nicht sinnvoll ist) und wie der Fehler behoben werden kann.

Ein weiterer wichtiger Aspekt sind die Aufgaben in denen eine Null im Ergebnis vorkommt, sei es eine Zwischennull oder eine Endnull. Hier sollte besonders die Rolle dieser Ziffer betont werden, also, dass in diesem Fall „Null" nicht für „Nichts" steht, sondern eine stellenwertstiftende Bedeutung hat.

Ansonsten bleibt es natürlich auch den diagnostischen Fähigkeiten der Lehrperson überlassen, welche Beispiele gesondert besprochen werden sollten. Eine Empfehlung aus der Literatur ist es, falsch gerechnete Aufgaben durch die Schüler und Schülerinnen richtig stellen zu lassen[167] oder sogenannte Klecksaufgaben zu behandeln[168]. Hierbei handelt es sich um durchgerechnete Aufgaben, bei denen einzelne Ziffern fehlen, die von den Lernenden gefunden und eingesetzt werden müssen.

[165] Ebd.
[166] z.B. Bathelt et. al., 1986, 43
[167] Padberg, 2005, 304f
[168] Bathelt et. al., 1986, 43

Teil 3:

Multiplikation und Division von Dezimalzahlen

Im folgenden Teil der Arbeit soll die Multiplikation und die Division von Dezimalzahlen genauer betrachtet werden. Im anschließenden Kapitel wird erörtert, auf welche Art und Weise das Thema an den österreichischen Schulen vermittelt wird. Natürlich verwenden verschiedene Lehrer und Lehrerinnen auch unterschiedliche Zugänge zu dem Thema, jedoch kann meiner Auffassung nach anhand der Vorgehensweise in Schulbüchern ein relativ guter Überblick gewährleistet werden. Deswegen sollen die in Schulbüchern benutzten Zugänge und Aufgabenstellungen auch schon in diesem Kapitel Erwähnung finden.

Die Ausgangspunkte für den folgenden Abschnitt wurden bereits erarbeitet. Im Kapitel zu den Grundlagen wurden diverse Aspekte behandelt, welche den Umgang mit Dezimalzahlen für Schüler und Schülerinnen prägen und auch teilweise erschweren. Darunter fanden sich sowohl Punkte, die bereits bei der Überleitung von den natürlichen zu den rationalen Zahlen Schwierigkeiten verursachen, als auch Problembereiche, die bei der Handhabung und dem Verständnis dieser Zahlendarstellung erfahrungsgemäß auftreten.

Im darauffolgenden Kapitel zu den Rechenoperationen (im Setting der natürlichen Zahlen) wurden anschließend die Standardverfahren und Problembereiche der schriftlichen Multiplikation und Division abgesteckt. Des Weiteren wurden einige Fehlerquellen und -arten erörtert und Vorschläge geliefert, wie diese verhindert beziehungsweise behandelt werden können.

Im folgenden Teil der Arbeit sollen nun diese Themengebiete kombiniert betrachtet werden, um die Multiplikation und die Division von Dezimalzahlen besser verstehen zu können. Dabei werden die meisten, bereits erarbeiteten Punkte natürlich relevant bleiben und weiterhin eine Rolle spielen. Die Kombination der beiden Bereiche sorgt jedoch für weitere, neuartige problematische Aspekte, die beim Unterrichten beachtet werden müssen. Auf diesen soll im Folgenden der Fokus liegen, da die anderen, bereits bekannten Probleme ihren Ursprung in einem schon zuvor behandelten Themengebiet haben. Es zeigt sich, dass viele dieser Fehlvorstellungen auch in weiterer Folge mitgetragen werden und abermals Irrtümer auslösen.

Zu Beginn der jeweiligen Abschnitte (Multiplikation beziehungsweise Division) sollen die wesentlichen Unterschiede der Rechenoperationen erörtert werden, welche sich ergeben, wenn sie nicht mehr bei natürliche Zahlen, sondern bei Dezimalzahlen angewandt werden.

Anschließend werden die möglichen Zugänge zu dem Themengebiet besprochen, welche in den Schulen üblicherweise gewählt, beziehungsweise in der Literatur vorgeschlagen werden. In diesem Zusammenhang werden auch die österreichischen Schulbücher und deren Ausführungen wichtig sein.

Im Anschluss werden abermals die wichtigsten Fehler und deren Quellen im Mittelpunkt stehen. Dabei wird es interessant sein zu beobachten, welche Arten von Fehlern bereits bekannt sind und sich in diesem Themengebiet fortsetzen und welche neuen Fehlerarten auftreten beziehungsweise wie diese vermieden und behandelt werden können. Daraus sollen natürlich auch Schlüsse gezogen werden, um Vorschläge für eine Verbesserung des Unterrichts liefern zu können.

3.1 Multiplikation von Dezimalzahlen

Bei der Multiplikation von Dezimalzahlen lassen sich aus schulischer Sicht drei Fälle unterscheiden, welche alle verschiedene Besonderheiten mit sich bringen. Der oft anfänglich behandelte Fall der Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl eignet sich meiner Meinung nach sehr gut als Einführung. Mithilfe des Sonderfalls der Multiplikation mit Zehnerpotenzen kann ein guter Übergang zur Multiplikation mit einer Dezimalzahl geschaffen werden.

Die Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Dezimalzahl, welche sich rein mathematisch gesehen, aufgrund der Kommutativität, nicht vom ersten Fall unterscheidet, birgt trotzdem für Schüler und Schülerinnen potenzielle Probleme. Diese ergeben sich vermutlich gerade weil dieser Zusammenhang für Lehrende viel offensichtlicher ist als für Lernende.

Der letzte, allgemeine Fall ist die Multiplikation zweier Dezimalzahlen. Die Fehlerquote dieser Art von Rechnungen ist laut Padberg weit höher als die der ersten beiden Fälle[169]. Warum das so ist, wo der Unterschied liegt und wie Fehlerquellen vermieden beziehungsweise Fehlvorstellungen erkannt und ausgebessert werden können, wird im folgenden Kapitel behandelt.

Die rein syntaktischen Regeln, welche für die Multiplikation von Dezimalzahlen erforderlich sind, sollten im Grunde bereits zu Beginn bekannt sein. Mithilfe der „Kommaverschiebungsregel“ sind die Rechenaufgaben recht einfach auf die Multiplikation von natürlichen Zahlen zurückzuführen. Obwohl das natürlich zu sehr ähnlichen Fehlerarten führt, welche bereits bei der Multiplikation natürlicher Zahlen aufgetreten sind, entstehen dennoch einige neue Probleme, welche damit in Zusammenhang gebracht werden können, dass die Kommaverschiebungsregel und die Hintergründe der Dezimalzahlrechnung nicht verstanden wurden. Genau dann passiert möglicherweise eine

[169] Padberg, 2012, 216

Übergeneralisierung, die so weit gehen kann, dass völlig außer Acht gelassen wird, dass eben nicht mit natürlichen Zahlen gerechnet wird[170]. Dies mag auch daran liegen, dass die inhaltlichen Erklärungen oft vernachlässigt werden, da eine so vermeintlich einfache Regel existiert, welche die Multiplikation von Dezimalzahlen in ein falsches Licht rückt.

3.1.1 Unterschiede zur Multiplikation von natürlichen Zahlen

Wie bereits erwähnt halten sich die Unterschiede zur bereits behandelten Multiplikation von natürlichen Zahlen, zumindest was die Vorgehensweise betrifft, sehr in Grenzen. Rein syntaktisch kann das Standardverfahren zur Multiplikation direkt übernommen werden. Die einzige Anpassung besteht darin die Kommas der Faktoren vorerst zu ignorieren (aus 4,35 wird 435, aus 23,6 wird 236 und so weiter) und dann im Ergebnis so viele Kommastellen zu ergänzen, wie im Multiplikand und im Multiplikator insgesamt vorkommen.

Die Schwierigkeiten zeigen sich jedoch vor allem dann, wenn diese Vorgehensweise von Schülern und Schülerinnen auswendig gelernt wird[171]. Hinter der bereits erwähnten Kommaregel verbirgt sich essenzielles Hintergrundwissen, auf das im Unterricht nicht verzichtet werden sollte. Sobald Sonderfälle auftreten oder Unsicherheiten beim auswendig gelernten Wissen entstehen (zum Beispiel in welche Richtung das Komma verschoben werden soll), kann es sehr leicht zu Fehlern kommen da die gelernten Aspekte durch das mangelnde Verständnis falsch angewandt werden[172]. Dabei sind oft der Bezug und die genauere Kenntnis der Dezimalzahlen nicht vorhanden.

Was genau damit gemeint ist und wie dieses Wissen vermittelt werden kann, wird zu einem späteren Zeitpunkt in diesem Kapitel ausgeführt. Es reicht an dieser Stelle vorweg zu nehmen, dass die Stellenwerte und ein fundiertes, inhaltliches Verständnis eine wichtige Rolle spielen.

3.1.2 Zur Behandlung der Multiplikation von Dezimalzahlen im Unterricht

An dieser Stelle erachte ich es als sinnvoll, einen kurzen Blick auf die Schulbücher zu werfen, mithilfe derer in Österreich häufig unterrichtet wird. Eigentlich ist dieser Schritt erst für das nächste Kapitel vorgesehen, jedoch ist es durchaus auch für den folgenden Abschnitt interessant zu wissen mit welchen Mittel in den Schulen gearbeitet wird.

[170] Wearne/Hiebert, 1986, 79f
[171] Marxer/Wittmann, 2012, 44
[172] Wearne/Hiebert, 1989, 512

Einige der folgenden Aspekte sind in den meisten oder allen Büchern vorhanden, so verschieden diese auch zum Teil sein mögen. Diese Punkte können meiner Ansicht nach als Grundlagen festgelegt werden, welche ich an dieser Stelle vorwegnehmen möchte, da sie vermutlich in vielen Klassenzimmern Anwendung finden:

- Zum Einstieg in das Stoffgebiet wird immer ein Text-Beispiel gewählt, bei dem eine Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl (keine Zehnerpotenz) multipliziert werden muss.
- Es werden zwar verschiedene Zugänge gewählt, jedoch geht es bei den Beispielen immer um den Einkauf einer bestimmten Ware.
- Die Kommaregel wird überall festgelegt (Das Produkt hat gleich viele Kommastellen, wie beide Faktoren zusammen), jedoch meistens ohne genauere Erklärung. Stattdessen werden einfach die Beobachtungen aus dem Beispiel verallgemeinert.
- Die Multiplikation mit Zehnerpotenzen wird in den Schulbüchern (bis auf eine Ausnahme) als Sonderfall erwähnt, jedoch nie als Einführung. Es folgt stets eine Überleitung auf die Kommaverschiebungsregel.
- Die Überschlagsrechnung spielt in jeder der Ausführungen eine Rolle. Die Schüler und Schülerinnen werden dazu angehalten, ihre Ergebnisse damit zu überprüfen.

3.1.3 Multiplikation einer Dezimalzahl mit Zehnerpotenzen und mögliche Zugänge

Die Multiplikation von Dezimalzahlen wird häufig über die Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl eingeführt. Dafür wird, wie bereits erwähnt, in Österreich als Einstieg oft ein Beispiel gewählt, in dem mehrere Artikel gekauft werden, deren Preis eine oder zwei Kommastellen besitzt. Erst anschließend wird der Sonderfall der Zehnerpotenzen behandelt, um die Kommaverschiebungsregel einzuführen. Da Padberg jedoch als Einstieg die Multiplikation von Dezimalzahlen mit Zehnerpotenzen vorschlägt[173] und dies meiner Auffassung nach auch sehr sinnvoll ist, wird die Reihenfolge auch hier angepasst. Für beide Ansätze gibt es natürlich diverse Möglichkeiten, die man sowohl in den Schulbüchern, als auch in der Literatur findet. Wie diese Zugänge motiviert werden können soll nun im Anschluss gezeigt werden, um ein möglichst gutes Bild von den möglichen Vorgehensweisen zu schaffen.

Die Multiplikation mit Zehnerpotenzen entspricht einer Verschiebung von Stellenwerten, welche bereits bekannt sein sollte. Das führt dazu, dass im Zuge dessen sehr häufig die sogenannte

[173] Padberg, 2012, 209

Kommaverschiebungsregel eingeführt wird. Sie ist wichtig, um die entsprechenden Hintergründe für die später folgende allgemeine Regel zu verstehen, da diese sich die Kommaverschiebung zu Nutze macht.

Padberg bietet hierzu drei möglich Zugänge[174] an, wobei einer davon für österreichische Schulen in meinen Augen nicht geeignet ist, da Brüche und Zehnerbrüche üblicherweise erst nach den Dezimalzahlen behandelt werden. Die beiden anderen Möglichkeiten sind auch in den österreichischen Schulbüchern vertreten und sollen nun vorgestellt werden.

3.1.3.1 Der Zugang über Stellenwerttafeln

Die erweiterte Stellenwerttafel und das Konzept des Bündelns sollten den Schülern bereits aus dem allgemeinen Kapitel über Dezimalzahlen bekannt sein. Wenn nicht, sollten diese Grundlagen für den Zugang über Stellenwerttafeln unbedingt nachgeholt werden. Wie bereits erwähnt handelt es sich hierbei um einen Ansatz, der in der Literatur starken Anklang findet[175].

Ziel ist es zu zeigen, welchen Einfluss die Multiplikation einer beliebigen Dezimalzahl mit einer Zehnerpotenz hat und den Vorgang mithilfe der Stellenwerte genau aufzuschlüsseln. Betrachtet man beispielsweise die Multiplikation $4{,}62 \cdot 10$ so besitzt der Multiplikand die folgenden Stellenwerte: 4 Einer, 6 Zehntel und 2 Hundertstel. Wird die Multiplikation durchgeführt, so sind anschließend 40 Einer, 60 Zehntel und 20 Hundertstel vorhanden. Anschließend wird durch die Bündelung der entsprechenden Stellenwerte erreicht, dass abschließend 4 Zehner, 6 Einer und 2 Zehntel, also die Zahl 46,2 als Ergebnis notiert werden kann. Wird dieses Ergebnis mit dem Multiplikanden verglichen so fällt sofort auf, dass im Grunde nur das Komma um eine Stelle verschoben wurde.

Padberg veranschaulicht dies zusätzlich anhand einer Tabelle, was für einen Schulauftritt sehr empfehlenswert ist[176].

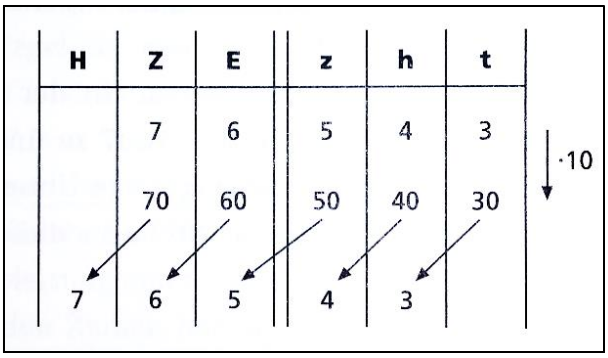


Abbildung 6: Multiplikation mit Zehnerpotenzen, [Padberg, 2012, 210]

[174] Padberg, 2012, 209ff
[175] Zum Beispiel bei Thieman, Heckmann, Padberg und anderen in diversen Publikationen
[176] Padberg, 2012, 210

Wenn dieselbe Vorgehensweise auch mit anderen Zehnerpotenzen wiederholt wurde, kann damit begonnen werden, eine allgemeine Regel für die Multiplikation mit Zehnerpotenzen zu bilden. Dabei ist aus meiner Sicht wichtig, dass diese erarbeitet und nicht einfach vorgesetzt wird. Damit ist der erste Schritt zur Kommaverschiebungsregel gesetzt.

Eine Betonung des Unterschiedes zur Multiplikation von natürlichen Zahlen mit Zehnerpotenzen ist nach meinem Ermessen in diesem Zusammenhang sehr sinnvoll. Von diesem Setting sind die Schüler und Schülerinnen gewohnt, bei der Multiplikation Endnullen beim Multiplikator anzuhängen. Die Übergeneralisierung dieser Regel auf die Dezimalzahlen wäre falsch und sollte somit unbedingt erwähnt werden. Heckmann bestätigt dies anhand mehreren Studien und sieht diesen Transfer als Hintergrund einer wichtigen Hauptfehlerstrategie bei der Multiplikation von Dezimalzahlen mit Zehnerpotenzen[177].

3.1.3.2 Der Zugang über Größen

Ein Zugang über Größen hat den sehr wichtigen Vorteil, dass Schüler und Schülerinnen mit diesen oft schon im alltäglichen Leben Erfahrung sammeln konnten[178]. So sind beispielsweise Geld- oder Längeneinheiten bekannte Maße, die immer wieder verwendet werden. Durch diesen Bezug fällt es oft leichter gewisse Zusammenhänge zu verstehen[179].

Die Vorgehensweise hat gewisse Ähnlichkeiten mit dem zuvor gezeigten Zugang über Stellenwerte. Diese Zusammenhänge sollten auch unbedingt erwähnt und verdeutlicht werden, um Fehlvorstellungen zu vermeiden und den Umgang mit Stellenwerten zu schulen.

Eine konkrete Erklärung der Multiplikation von Dezimalzahlen mit Zehnerpotenzen könnte beispielsweise anhand folgender Aufgabe erklärt werden: $15{,}65€ \cdot 10$. Der gewählte Betrag entspricht in diesem Fall 15 Euro und 65 Cent. Werden diese Größen mit 10 multipliziert so erhält man 150 Euro und 650 Cent. 650 Cent entsprechen einem Wert von 6 Euro und 50 Cent also insgesamt 156 Euro und 50 Cent. Das Ergebnis in Kommadarstellung lautet also 156,5€ (beziehungsweise 156,50€). In diesem speziellen Fall bietet es sich an auf die Rolle der Endnull hinzuweisen. Wie auch schon bei den Stellenwerten sollte auch hier der direkte Vergleich zwischen dem Produkt und dem Multiplikanden erfolgen, um klar zu machen, dass „nur“ das Komma verschoben wurde.

In weiteren Beispielen können folglich andere Größeneinheiten und Zahlen verwendet werden, um schlussendlich auf die Kommaverschiebungsregel hinzuleiten (abermals gilt, dass diese meiner Meinung nach erarbeitet und nicht vorgesetzt werden sollte). Es bietet sich dabei auch an, bereits vor

[177] Heckmann, 2006a, 178
[178] Padberg, 2012, 211
[179] Heckmann, 2011, 56ff

der Rechnung auf die kleinere Einheit umzuformen (also 1565 Cent), dann zu rechnen (also $1565 \cdot 10 = 15650$) und zum Abschluss erneuert auf die ursprüngliche Einheit zurück zu wechseln (also 156,5€).

Hierbei muss verstärkt darauf geachtet werden, dass durch die Vorgehensweise nicht die Komma-Trennt-Vorstellung verstärkt wird. Tritt diese auf, so führt die Rechnung fälschlicherweise zum Ergebnis 150,650€, was als eine Übergeneralisierung der Regeln für die natürlichen Zahlen interpretiert werden kann. Den Euro- und Centbetrag getrennt zu multiplizieren, entspricht im Setting der Dezimalzahlen genau der Logik, die bei der KT-Strategie verfolgt wird. Die darauffolgende Umwandlung der Einheiten (welche im Falle der Stellenwerte der Bündelung entspricht) stellt also einen essenziellen Schritt dar, auf den meiner Ansicht nach besonders geachtet werden muss. Das Ansprechen und erklären des falschen Ansatzes ist meiner Einschätzung nach in diesem Zusammenhang durchaus richtig, da es sich um einen sehr weit verbreiteten Fehler im Themenbereich der Dezimalzahlen handelt[180].

3.1.4 Multiplikation von Dezimalzahlen mit natürlichen Zahlen und mögliche Zugänge

Der nächste Schritt in Richtung des allgemeinen Falles der Multiplikation zweier Dezimalzahlen führt zum Sonderfall der Multiplikation von Dezimalzahlen mit natürlichen Zahlen. Auch für diesen gibt es diverse Zugangsmöglichkeiten, die jeweils kurz skizziert werden sollen. Dabei ist zu beachten, dass einige der Vorgehensweisen nicht auf den allgemeinen Fall der Multiplikation von zwei Dezimalzahlen weitergeführt werden können.

3.1.4.1 Zugang über Stellenwerte

Bei diesem Ansatz soll der Multiplikand, ähnlich wie zuvor, in seine Stellenwerte zerlegt werden, um die Funktionsweise der Multiplikation genauer zu veranschaulichen[181]. Dadurch wird die Vorgehensweise auf die Multiplikation natürlicher Zahlen (welche ja schon bekannt sein sollte) zurückgeführt. Im folgenden Beispiel wird dies demonstriert.

[180] Heckmann, 2006a, 177f

[181] Padberg, 2012, 211

$4{,}289 \cdot 6 =$	Die gestellte Aufgabe
$4E\ 2z\ 8h\ 9t \cdot 6 =$	Der Multiplikand wird in seine stellenwerte zerlegt.
$4E \cdot 6 = 24E$	Die einzelnen Stellenwerte werde mit dem Multiplikator multipliziert
$2z \cdot 6 = 12z$	
$8h \cdot 6 = 48h$	
$9t \cdot 6 = 54t$	
$24E\ 12z\ 48h\ 54t$	Das Ergebnis in Stellenwertschreibweise

Anschließend werden die Stellenwerte gebündelt, um auf das folgende Ergebnis zu kommen:

$25E\ 7z\ 3h\ 4t$

Dieses entspricht der Dezimalzahl 25,734. Um die Vorgehensweise zu verdeutlichen, kann (wie bei den Zehnerpotenzen) eine Tabelle angeführt werden, um eine bessere Übersicht zu wahren.

Es ist klar, dass eine Durchführung der Multiplikation auf diese Art natürlich auf Dauer zu aufwändig wäre. Es bietet sich in der Schule daher an, gemeinsam mit den Schülern und Schülerinnen nach Möglichkeiten zu suchen, die Arbeitsschritte zu vereinfachen. Somit können die Lernenden zum Standardverfahren und der daraus folgenden Kommaregel hingeführt werden. Wichtig ist, zu erkennen, welche Arbeitsschritte einander entsprechen, um ein grundlegendes Verständnis der Vorgehensweise zu schaffen.

3.1.4.2 Zugang über die wiederholte Addition

Die wiederholte Addition sollte schon von der Multiplikation natürlicher Zahlen bekannt sein und bietet sich daher besonders an. Diese Erklärung wird in einigen Schulbüchern Österreichs gewählt, da sie sehr anschaulich ist und die Vorgehensweise auf bereits bekannte Stoffgebiete zurückführt. Anhand desselben Beispiels, welches weiter oben schon verwendet wurde, soll auch dieser Weg veranschaulicht werden:

$4{,}289 \cdot 6 = 4{,}289 + 4{,}289 + 4{,}289 + 4{,}289 + 4{,}289 + 4{,}289$

Zur Berechnung empfiehlt es sich die Addition in einer Staffel zu notieren:

4,289
+4,289
+4,289
+4,289
+4,289
+4,289
25,734

Für den schulischen Gebrauch empfiehlt es sich natürlich mit einem kleineren Multiplikator (wie zum Beispiel 2 oder 3) und einem Multiplikanden mit weniger Kommastellen zu beginnen, um den Rechenaufwand einzuschränken. Dadurch wird gewährleistet, dass sich die Schüler und Schülerinnen auf das Verfahren konzentrieren können. Nach einer stetigen Steigerung der Schwierigkeit wird auch hier der Arbeitsaufwand immer größer, was abermals eine Vereinfachung des Verfahrens motiviert. Somit kann im Anschluss, wie bei den Stellenwerten, auf das Standardverfahren und die Kommaregel hingearbeitet werden. Dazu muss vorerst nur erkannt werden, dass die spaltenweise Addition stets durch eine Multiplikation ersetzt werden kann, weil immer dieselbe Zahl zu sich selbst addiert wird. Da derselbe Arbeitsschritt der Vereinfachung auch schon bei der Multiplikation natürlicher Zahlen vorkommt, sollte dies für Schüler und Schülerinnen relativ einfach zu verstehen sein.

3.1.4.3 Zugang über Größen

Der Zugang über Größen verläuft grundsätzlich gleich wie bei der Multiplikation mit Zehnerpotenzen. Es wird also eine Dezimalzahl mit einer bestimmten Einheit (in den untersuchten Schulbüchern werden hierfür oft Geldbeträge gewählt) mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem der Multiplikand vorerst in eine kleinere Einheit umgewandelt wird (im Falle von Geldbeträgen also in Cent). Anschließend werden also zwei natürliche Zahlen multipliziert, da durch die Umwandlung das Komma nicht mehr benötigt wird. Zum Schluss wird dann wieder in die ursprüngliche Einheit umgewandelt.

Auch dieser Zugang führt natürlich zur allgemein verwendeten Kommaregel und veranschaulicht diese meiner Auffassung nach sehr gut. Durch die doppelte Umwandlung der Einheiten in beide Richtungen wird klar, dass sich die Anzahl der Kommastellen nicht verändert, es sei denn es tritt eine Endnull auf, die vernachlässigt werden kann. Wichtig ist jedoch auch, eine Überleitung auf „einheitenlose“ Rechnungen zu finden um Missverständnisse möglichst gut zu vermeiden.

3.1.5 Multiplikation von natürlichen Zahlen mit Dezimalzahlen

Der Fall der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Dezimalzahl wird in den untersuchten Schulbüchern oft nur sehr kurz erwähnt. Beispielsweise wird er in einem der Bücher nur innerhalb von zwei Zeilen mit dem Vertauschungsgesetz als analog zum vorherigen Fall erklärt und anschließend nicht mehr erwähnt[182]. Obwohl diese Behauptung richtig sein mag, macht es meiner Meinung nach dennoch Sinn, sich diesen Fall und den mathematischen Hintergrund genauer anzusehen. Dass die Reihenfolge einer Multiplikation durchaus Unterschiede mit sich bringen kann, zeigt allein schon die Fehlerquote beim Multiplizieren von natürlichen Zahlen mit 0 im Kapitel 2.1.4.1.

[182] Lewisch et. al., 2005, 123

In diesem Zusammenhang sollte zumindest auf die Bedeutung einer solchen Multiplikation eingegangen werden um klar zu stellen, worum genau es sich dabei handelt. Dies gestaltet sich nicht mehr so einfach wie in vorherigen Fällen, da beispielsweise die Interpretation als wiederholte Addition nicht lückenlos übernommen werden kann[183] und der Zusammenhang mit Größen nicht mehr eindeutig ist (so können beispielsweise nicht einfach 3,6 T-Shirts gekauft oder 15,73 Schritte gegangen werden). Diese Unregelmäßigkeiten setzen sich natürlich auch im allgemeinen Fall der Multiplikation von Dezimalzahlen fort, was eine Betrachtung dieses einfacheren Aspektes als Vorbereitung durchaus sinnvoll erscheinen lässt. Dabei könnte beispielsweise mit der Multiplikation von natürlichen Zahlen mit 0,1, 0,01, 0,001 und weiteren Zehnerpotenzen begonnen werden, um auf die Äquivalenz mit der Division durch Zehnerpotenzen hinzuweisen. Außerdem handelt es sich hierbei auch um einen Umbruch der Grundvorstellung, dass die Multiplikation stets vergrößert.

Des Weiteren kann in diesem Zusammenhang beispielsweise eine Multiplikation der Art $4 \cdot 2{,}5$ genauer betrachtet werden, um auf den Kontext der wiederholten Addition zurück zu kommen. In diesem Fall könnte die Multiplikation in die Addition $4 + 4 + 4 \cdot 0{,}5$ zerlegt werden, was analog auch für andere Dezimalzahlen gilt.

Nach meinem Ermessen können also mit dieser Vorstufe einige wichtige Eigenschaften und Hintergründe des allgemeinen Falles der Multiplikation von Dezimalzahlen leichter erklärt werden. Diese Möglichkeit sollte demnach auch genutzt werden.

3.1.6 Die Multiplikation zweier Dezimalzahlen und mögliche Zugänge

Mithilfe des bereits Gelernten kann anschließend der allgemeine Fall der Multiplikation von Dezimalzahlen eingeführt werden. In den österreichischen Schulbüchern ist diese Überleitung sehr divers gewählt und es fehlt nach meinem Eindruck des Öfteren an Tiefe und genaueren Ausführungen. Man fokussiert hier viel eher die möglichst rasche und direkte Überleitung zur Kommaregel mit der die später folgenden Aufgaben gelöst werden sollen. Einige Erklärungen beziehungsweise auch eine Hinleitung zu dieser Regel sind zwar meist in einer gewissen Form vorhanden, aber meiner Auffassung nach hätte an einigen Stellen diesem wichtigen Aspekt mehr Beachtung geschenkt werden können (genauere Informationen sind im Kapitel Schulbücher zu finden).

Auch hier gibt es natürlich abermals mehrere Optionen, welche als Zugänge gewählt werden können. Einige sollen hier auch angeführt werden. Egal welcher Zugang schlussendlich gewählt wird, es

[183] Padberg, 2012, 215

empfiehlt sich immer, auch die Überschlagsrechnung zu thematisieren, damit die Dimension des Ergebnisses überprüft werden kann.

3.1.6.1 Rückführung auf die Multiplikation natürlicher Zahlen

Die erste Möglichkeit beginnt mit einem Schritt zurück, zu bereits bekannten Tatsachen. Durch eine Multiplikation mit einer Zehnerpotenz kann eine der Dezimalzahl in der Rechnung in eine natürliche Zahl umgewandelt werden[184]. Diese Art der Multiplikation sollte den Schülern und Schülerinnen bereits bekannt sein und ist damit auch problemlos durchführbar. Anschließend wird das Ergebnis durch dieselbe Zehnerpotenz dividiert, um auf das richtige Gesamtergebnis zu kommen. Um möglichen Fehlerquellen vorzubeugen, ist es nach meinem Ermessen empfehlenswert zu betonen, warum diese Schritte möglich sind (Assoziativ-Gesetz). Anhand eines Beispiels würde die Vorgehensweise wie folgt aussehen:

$$6{,}72 \cdot 1{,}6$$

Es wird stattdessen gerechnet: $6{,}72 \cdot 1{,}6 \cdot 10 = 6{,}72 \cdot 16 = 107{,}52$

Für das Endergebnis muss durch 10 dividiert werden: $107{,}52 : 10 = 10{,}752$

Zu diesem Zeitpunkt kann schon auf die Kommaregel hingewiesen werden. Für meine Begriffe ist jedoch ein einzelnes Musterbeispiel noch nicht genug, um auf die Allgemeinheit zu schließen. Weiterführend können noch weitere Aufgaben gelöst werden, bei denen beide Dezimalzahlen in natürliche Zahlen umgewandelt werden, um den Hintergrundgedanken dieser Vorgehensweise zu betonen. Durch die genauere Betrachtung der benutzten Zehnerpotenzen kann dann recht anschaulich die Kommaregel motiviert werden. Nach mehreren Beispielen sollte klar sein, dass durch die Multiplikation zu Beginn immer so viele „Kommastellen weggenommen werden", wie später durch die Division auch wieder „dazu kommen". Folglich reicht es bei den Rechenaufgaben, das Komma vorerst zu „ignorieren", da die Anzahl der Kommastellen im Ergebnis gleich sein muss, wie die der beiden Faktoren insgesamt.

3.1.6.2 Größen

Interessanterweise werden in den untersuchten österreichischen Schulbüchern oft Beispiele mit diversen Größen (Geldbeträge, Gewicht, Entfernungen, …) angeführt, um daran die Multiplikation von Dezimalzahlen zu erklären[185]. Es wird jedoch nicht das Konzept verwendet wie es Padberg vorstellt[186], da die benutzten Größen scheinbar nur als Realitätsbezug dienen.

[184] Padberg, 2012, 214
[185] Vgl. beispielsweise Reichel et. al., 2011, 122 bzw. Salzger et. al., 2014, 101 bzw. Boxhofer et. al., 2006, 168
[186] Padberg, 2012, 214f

Padberg schlägt die Berechnung einer Rechtecks-Fläche als anschauliches Musterbeispiel vor. Wenn die beiden Seitenlängen Dezimalzahlen sind, so läuft es auf die gewünschte Multiplikation hinaus. Diese könnte beispielsweise $6{,}4m \cdot 3{,}7m$ lauten. Sind die angegebenen Maße in Metern gegeben so bietet es sich an, die beiden Größen in Dezimeter umzuwandeln. Die neue Rechnung, deren Ergebnis berechnet werden kann, da nur noch natürliche Zahlen vorkommen, lautet dann $64\ dm \cdot 37\ dm = 2368\ dm^2$. Durch eine Umwandlung auf Quadratmeter erhält man das richtige Ergebnis $23{,}68\ m^2$, vorausgesetzt, die Umwandlung von Flächengrößen wurde bereits behandelt. Diese ist auch gleichzeitig eine Schwäche dieses Zuganges, da die Umwandlung von mehrdimensionalen Größen Schülern und Schülerinnen oft schwerfällt und somit ein Hindernis darstellen könnte.

Im Grunde genommen ist die eben vorgeführte Erklärung äquivalent zum ersten Zugang bei dem die Rückführung auf natürliche Zahlen benutzt wurde. Der wesentliche Unterschied ist die Begründung dafür, warum diese Vorgehensweise möglich ist. Die Hinführung auf die Kommaregel kann hier also gleichermaßen erfolgen, wie bereits erwähnt. Für wichtig halte ich abermals, dass genauer darauf eingegangen wird, wieso in diesem Zusammenhang vorerst das Komma ignoriert und später erst wiedereingesetzt werden darf.

Die in den Schulbüchern oft verwendeten Preisberechnungen eignen sich meiner Meinung nach weniger gut dafür, die Kommaregel herzuleiten und zu erklären. Das liegt daran, dass hierbei gemischte Größen verwendet werden (also beispielsweise Kilogramm und Euro beziehungsweise Liter und Euro oder ähnliches), welche für Schüler und Schülerinnen noch unbekannt sind[187]. Des Weiteren kann es in diesem Zusammenhang leicht vorkommen, dass Bruchteile von Cent-Beträgen auftreten, was im Allgemeinen wenig Sinn macht[188].

3.1.7 Häufig auftretende Fehler und Problembereiche

Im Kapitel zur Multiplikation von natürlichen Zahlen wurden bereits viele Fehler behandelt, die mit der Operation der Multiplikation an sich zusammenhängen. Im folgend Abschnitt soll nur auf die Fehler eingegangen werden, die durch die Multiplikation mit Dezimalzahlen entstehen. Eine fehlerhafte Anwendung des Multiplikationsalgorithmus spielt dabei also keine Rolle, sofern diese auch bei der Multiplikation von natürlichen Zahlen aufgetreten wäre.

Es folgt an dieser Stelle eine Betrachtung der am häufigsten auftretenden Fehler und Problembereiche. Dafür wurden diverse Quellen untersucht und diejenigen Aspekte ausgewählt, die am bedeutendsten und wichtigsten erscheinen. Es kann natürlich nicht das gesamte Spektrum abgebildet werden, jedoch

[187] Postel, 1991, 11
[188] Bei Reichel et. al., 2011 ist dies tatsächlich der Fall. Siehe Kapitel 4.1.

sollten die relevantesten Aspekte möglichst genau und verständlich abgebildet werden. Für eine sehr ausführliche Darstellung diverser Fehler und Probleme wird das Werk von Heckmann „Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde.“ empfohlen[189].

3.1.7.1 Anhängen von Endnullen beim Multiplizieren mit Zehnerpotenzen

Hierbei handelt es sich um einen der wichtigsten Irrtümer in Bezug auf die Multiplikation von Dezimalzahlen mit Zehnerpotenzen[190]. Die Hauptursache für Fehler dieser Art ist eindeutig ein fehlerhafter Transfer von den natürlichen Zahlen, da Aufgaben wie beispielsweise $23 \cdot 10$ sehr einfach durch das Anhängen von Endnullen gelöst werden können. Eine solche Übergeneralisierung ist natürlich nicht unüblich und dementsprechend relativ leicht zu vermeiden, wenn die Lehrperson Bescheid weiß. Gezielte Hinweise gleich bei der Einführung sollten in vielen Fällen genügen, um dem Fehler vorzubeugen.

Der Fehler entsteht bei Aufgaben wie zum Beispiel $7{,}3 \cdot 10$. Als Ergebnis wird $7{,}30$ oder, wenn bekannt ist, dass die Endnullen weggelassen werden können, $7{,}3$ notiert[191]. Die schwierigsten Aufgaben dieser Art sind jene, die eine Überschreitung des Kommas erfordern, wie zum Beispiel $0{,}63 \cdot 1000$. Hier müssen nämlich beide Regeln (Kommaverschiebung und Endnullen anhängen) aus zwei Kapiteln bekannt sein und richtig kombiniert werden, um zum richtigen Ergebnis 630 zu kommen.

3.1.7.4 Grundvorstellungsumbruch

Thiemann beschreibt, dass vor allem ein wichtiger Grundvorstellungsumbruch bei der Multiplikation von Dezimalzahlen Probleme bereitet[192]. Wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert (mit Ausnahme von Null und Eins), so ist das Ergebnis stets größer als der Multiplikand. Dies ändert sich, wenn mit einer Dezimalzahl zwischen Null und Eins multipliziert wird und kann somit zu einer Fehlvorstellung bei Schülern und Schülerinnen werden. Es handelt sich also abermals um eine Übergeneralisierung aus dem Bereich der natürlichen Zahlen[193]. Mögliche Auslöser der Vorstellung sind beispielsweise bei der Auffassung der Multiplikation als wiederholte Addition (auch bei der Addition natürlicher Zahlen wird das Ergebnis immer größer) oder beim täglichen Sprachgebrauch (Vervielfachen) zu verorten.

Da dieser spezielle Fall (Multiplikation mit einer Zahl zwischen Null und Eins) eventuell nicht besonders häufig auftritt, muss darauf geachtet werden, dass Schüler und Schülerinnen damit konfrontiert werden, um genau dieser Fehlvorstellung entgegen wirken zu können. Besonders bietet sich dafür die

[189] Heckmann, 2006a
[190] Heckmann, 2006a, 178
[191] Padberg, 2012, 217
[192] Thiemann, 2004a, 1
[193] Heckmann, 2006a, 134

Multiplikation mit 0,1, 0,01, 0,001 und so weiter an. Abgesehen davon, dass Aufgaben dieser Art rein rechnerisch sehr einfach sind und somit die Kommasetzung schulen[194], wird in diesem Zusammenhang schnell klar, dass die Multiplikation sehr wohl verkleinern kann.

Bemerkenswert ist, dass sich diese Fehlvorstellung teilweise sehr lange in den Köpfen hält und sogar noch Lehramtsstudierenden Schwierigkeiten bereiten kann[195].

3.1.7.5 Die KT-Vorstellung

Hierbei handelt es sich um die sogenannte Komma-Trennt-Vorstellung, welche schon im Kapitel der Grundlagen vorgestellt wurde. Sie tritt auf wenn Schüler oder Schülerinnen das Komma von Dezimalzahlen als Trennmarke zwischen zwei natürlichen Zahlen betrachten und diese in weiterer Folge dann auch so behandeln. Bei der Multiplikation äußert sich das, indem die Zahl vor dem Komma und die Zahl hinter dem Komma getrennt multipliziert werden. Padberg betont in diesem Zusammenhang, dass diese Art von Fehler bei der Bruchrechnung (es handelt sich um einen sehr ähnlichen Fehler der Form $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$) sehr häufig vorkommt, wohingegen sie bei der Dezimalzahlrechnung nur sehr selten systematisch und in wenigen Fällen als Flüchtigkeitsfehler gemacht werden[196].

Anschließend sollen einige Beispiele mit falschem Ergebnis gezeigt werden, die durch den KT-Fehler entstehen. Dabei ist zu beachten, dass vor allem der Aufgabentyp „Dezimalzahl mal natürliche Zahl“ von dieser Fehlerart betroffen ist. Bei dem Spezialfall „Dezimalzahl mal Zehnerpotenz“ handelt es sich hierbei sogar um die häufigste Fehlerursache[197]. Bei anderen Arten von Rechnungen bietet sich die Vorgehensweise grundsätzlich nicht im selben Ausmaß an, da die Logik dahinter nicht lückenlos verfolgt werden kann.

Beispiele für die KT-Strategie bei der Multiplikation:

$5{,}8 \cdot 10 = 50{,}80$	Der Fehler kann schon bei der Multiplikation mit Zehnerpotenzen häufig auftreten und ist hier besonders leicht zu identifizieren.
$4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$	Gerechnet wird zwar richtig, nur das Bündeln bereitet Probleme.
$7{,}3 \cdot 6 = 42{,}18$	

[194] Padberg, 1991b, 61
[195] Thiemann, 2004a, 4 – Natürlich sind bei den untersuchten Studenten und Studentinnen die Häufigkeiten der Fehler weitaus geringer und durch andere Arten von Aufgaben begründet. Dennoch ist die Tatsache, dass die Fehlvorstellung überhaupt noch auftritt sehr interessant.
[196] Padberg, 2012, 217
[197] Heckmann, 2006a, 177

Heckmann machte im Zusammenhang mit dem KT-Fehler die erstaunliche Beobachtung, dass diese in unterschiedlicher Häufigkeit auftreten, wenn verschiedene Sachkontexte bearbeitet werden[198]. So zeigten Aufgaben mit Geldwerten einen deutlich geringeren Anteil an Fehlern dieser Art, als beispielsweise solche mit Längen- oder Gewichtsmaßen. Der Grund liegt sehr wahrscheinlich bei der großen Alltagserfahrung.

Werden zwei Dezimalzahlen miteinander multipliziert, so wird, wie bereits erwähnt, die Deutung dieses speziellen Fehlers schwieriger, da die Strategie nicht mehr eindeutig zu verfolgen ist. Das begründet in diesem Fall auch die stark schwankende Häufigkeit, je nach Art der Aufgabe. Rechnungen wie beispielsweise $3{,}2 \cdot 2{,}4$ oder $15{,}2 \cdot 3{,}24$ werden sehr selten mit der KT-Strategie gelöst[199]. Andere Beispiele, wie $0{,}2 \cdot 0{,}3$ oder $0{,}8 \cdot 0{,}11$ provozieren viel eher ihre Verwendung. Das rührt vermutlich daher, dass die Aufgaben leicht im Kopf gelöst werden können und damit nicht auf den Multiplikationsalgorithmus zurückgegriffen wird. Heckmann schreibt deswegen dieser Art von Aufgaben die höchste Fehlerquote des allgemeinen Falls zu[200], obwohl die Aufgaben scheinbar relativ einfach sind. Auch Wearne und Hiebert kamen in ihrer in Amerika durchgeführten Studie zu dem Schluss, dass genau diese Aufgaben am schwierigsten wären, da hier die Anwendung der Kommaregel am anspruchsvollsten ist[201].

3.1.7.6 Fehlerhafter Transfer von Addition und Subtraktion

Bei dieser Fehler-Strategie wird eine Regel von der Addition und Subtraktion übernommen und auf die Multiplikation übertragen[202]. Diese besagt, dass das Ergebnis so viele Kommastellen hat, wie die Zahl mit den meisten Dezimalstellen. Gerade bei einem Sonderfall (Multiplikation mit 0,1, 0,01 bzw. 0,001) scheint diese Fehlvorstellung sehr viele falsche Ergebnisse zu provozieren. Somit sehen Aufgaben, die nach dieser Strategie gelöst werden in etwa folgendermaßen aus:

$0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$ Dieser Fehler kann allerdings auch als KT-Fehler interpretiert werden.

$5{,}3 \cdot 0{,}01 = 0{,}53$

$6{,}2 \cdot 0{,}001 = 0{,}062$

[198] Ebd.
[199] Padberg, 2012, 219
[200] Heckmann, 2006a, 183
[201] Wearne/Hiebert, 1986, 81
[202] Padberg, 1991b, 61

Bei diesen Aufgaben ist besonders auffallend, dass sie rein rechnerisch sehr einfach sind (Multiplikation mit 1). Damit ist die Regel zur Setzung des Kommas entscheidend für die richtige Lösung und somit vermutlich auch das maßgebliche Problem. So wie beim KT-Fehler ist also der Verzicht auf den Algorithmus ausschlaggebend.

Im allgemeinen Fall der Multiplikation kann dieser Fehler natürlich weiterhin auftreten, wobei aber vermutlich manche Arten von Aufgaben die Fehlvorstellung häufiger provozieren als andere. Außerdem ist anhand einer einzelnen Aufgabe oft nicht eindeutig feststellbar um welche Art von Fehler es sich handelt, wie schon bei dem ersten Beispiel weiter oben demonstriert wurde.

3.1.7.7 Regelkenntnis

Interessanterweise wurde in den Studien, die Padberg für seine Ausführungen verwendet auch nach der Regelkenntnis der Schüler und Schülerinnen gefragt. Dabei wurde festgestellt, dass die Regel für die Multiplikation von Dezimalzahlen mit Zehnerpotenzen von weniger als der Hälfte der Befragten formuliert und von fast niemandem eine konkrete Begründung dafür geben werden konnte[203]. Auch die Regel zum Multiplizieren zweier Dezimalzahlen bereitete im Zuge dieser Untersuchungen große Schwierigkeiten[204]. Zu diesen Ergebnissen sollen an dieser Stelle ein paar Gedanken angeführt werden.

Nun ist es meiner Meinung nach nicht legitim den Ursprung aller Fehlerstrategien in der Tatsache zu suchen, dass die Multiplikationsregeln nicht formuliert werden können. Ich denke es ist durchaus möglich, dass Schüler beziehungsweise Schülerinnen den Kontext verstehen, ohne die dazugehörigen Regeln zum Ausdruck bringen zu können. Man darf nicht vergessen, dass es sich großteils um elf- bis dreizehnjährige Jugendliche handelt, deren mathematisches Vokabular wohl alles andere als ausgereift ist. Dennoch kann hier ein gewisses Problem verortet werden, da ein klares und strukturiertes Reglement sicherlich hilfreich ist, wenn es um die oben angeführten Rechenaufgaben (und natürlich auch andere) geht. Es ist also natürlich in gewisser Weise erschreckend, dass so wenige Schüler und Schülerinnen die Multiplikationsregeln formulieren können, jedoch haben die Fehlerstrategien sicherlich auch andere Ursprünge. Es ist nämlich auch durchaus möglich, eine Regel formulieren zu können und trotzdem nicht zu verstehen, was damit anzufangen ist. Deswegen ist in meinen Augen das Verständnis der Hintergründe noch viel wichtiger, als eine „Verhaltensvorschrift“ zu kennen. Nichts desto trotz stellen die angeführte Tatsachen ein Problem dar, welches den Umgang mit Dezimalzahlen jedenfalls erschwert.

[203] Padberg, 2012, 219
[204] Ebd. Bzw. Padberg, 1991b, 62

3.1.8 Konsequenzen und Vorschläge für den Unterricht

Aus den oben genannten wichtigsten Problembereichen im Stoffgebiet der Multiplikation von Dezimalzahlen lassen sich einige Schlussfolgerungen für den Unterricht ziehen, die auch immer wieder in verschiedenen Quellen betont werden.

Zu Beginn möchte ich auf die Vorschläge von Hefendehl-Hebeker und Prediger eingehen, die in einem interessanten Artikel über Zahlenbereichserweiterungen zu finden sind[205]. Obwohl es hier nicht um Dezimalzahlen oder die Multiplikation im Speziellen geht, sind die Anregungen meiner Ansicht nach sehr passend und gut auf das behandelte Thema anwendbar. Dementsprechend werden ähnliche (oder sogar dieselben) Beobachtungen auch für die Division von Dezimalzahlen gelten.

Die erste Feststellung dreht sich um Formeln (oder in unserem Fall Regeln), denen zurecht eine große Wichtigkeit in der Mathematik zugeschrieben wird. Gleichzeitig muss jedoch klar sein, dass diese aus einer „verständnisvollen Erschließung folgen müssen“. Auch Padberg stimmt in dieser Hinsicht mit Hefendehl-Hebeker und Prediger überein und betont, dass Begründungen von Regeln sehr wichtig sind und nicht vernachlässigt werden dürfen[206].

Das inhaltliche Verständnis stellt also eine äußerst wichtige Komponente dar, welche mit einer guten Erklärung viel eher erlangt und gesichert werden kann. Das bedeutet für den Unterricht, sich in dieser Phase genug Zeit zu nehmen und nicht überhastet den nächsten Schritt zu setzen. Heckmann verortet in diesem Zusammenhang ebenfalls das Problem, dass die Einführung der Dezimalbrüche oft viel zu knapp erfolgt[207]. Hierbei ist also vor allem ein gewisses Bewusstsein der Lehrperson von Bedeutung, da die Thematik oft schwieriger ist, als sie selbst für eine erfahrene Lehrkraft vielleicht erscheinen mag.

Beim betrachteten Thema im Speziellen ist es natürlich wichtig, schon bei den „Vorstufen“ (also Dezimalzahlen und Multiplizieren im Allgemeinen) viel Wert auf dieses Verständnis zu legen, da viele Fehlvorstellungen dort ihren Ursprung haben und anschließend mitgetragen werden.

Der nächste Vorschlag lautet, „Zahlen und Zahlenoperationen vielfältig [zu] deuten“[208].Im Zusammenhang mit der Multiplikation von Dezimalzahlen bedeutet das, dass die vielfältigen Zugänge die bereits vorgestellt wurden auch genutzt werden, also sich und die Schüler und Schülerinnen nicht nur auf einen zu beschränken. Dadurch wird gewährleistet, dass sehr viele Aspekte und Eigenschaften auftreten, welche ein gutes Fundament für die das Zahlen- und Operationsverständnis bedeuten können.

[205] Hefendehl-Hebeker/Prediger, 2006, 5 ff.
[206] Padberg, 2012, 242
[207] Heckmann, 2006a, 555ff
[208] Hefendehl-Hebeker/Prediger, 2006, 6

Zuletzt wird noch betont, dass Lernhürden explizit angesprochen werden sollten, was meiner Auffassung nach sehr sinnvoll ist. Das kann natürlich auch sehr subtil geschehen, ohne die kommenden Aufgaben als „besonders schwer“ oder „wichtig“ anzukündigen. Im Grunde geht es dabei um eine ausgewogene Wahl der Beispiele, sodass sämtliche Sonderfälle erklärt und eventuelle Fehlvorstellungen aufgedeckt werden können. Des Weiteren ist es dabei für Lehrkräfte bestimmt von Vorteil, über die diversen Ausprägungen häufiger Fehlerarten Bescheid zu wissen, um diesen vorzubeugen oder sie zumindest erkennen zu können.

Auch Thiemann spricht sich im Zusammenhang mit Fehlvorstellungen für ein explizites Ansprechen der Problematiken aus[209]. Des Weiteren betont sie, dass eine Aufgabe nicht nach der Feststellung des Ergebnisses enden sollte, sondern erst nach einer Reflexion. Dies ist sicherlich nicht nur bei der von ihr behandelten MG-Vorstellung[210] der Fall, sondern auch bei anderen Problemfällen. So sollte es beispielsweise jedenfalls auffallen, wenn die Dimension des Ergebnisses nicht den Erwartungen entspricht.

Dabei sind auch Überschlagsrechnungen von großer Bedeutung, wie sie von Padberg vorgeschlagen werden[211], da einige der Fehlerstrategien zu deutlich abweichenden Lösungen führen. Die Anwendung muss allerdings auch gezielt behandelt und geübt werden. Dabei ist es wichtig zu erklären, wie eine solche Überschlagsrechnung durchzuführen ist und was es bedeuten kann, wenn die beiden Ergebnisse voneinander abweichen. Dies kann natürlich auch der Fall sein, wenn falsch gerundet wurde, oder der Überschlag nicht gut gewählt wurde.

Für die Abschätzung des Ergebnisses kann es auch hilfreich sein, sich Rechenaufgaben in vertrauten Kontexten vorzustellen[212]. Damit wird eventuell eine Vorstellung davon gewonnen, in welcher Größendimension das Resultat liegen sollte und kann somit dabei helfen, Fehler zu erkennen. So könnte ein Schüler oder eine Schülerin sich beispielsweise bei der Aufgabe $0{,}5 \cdot 7$ vorstellen sieben Schritte von jeweils einem halben Meter Länge zu gehen, um das Ergebnis abschätzen zu können.

Abschließend sei noch erwähnt, dass vor allem Heckmann in diversen Publikationen immer wieder betont wie wichtig ein grundlegendes Stellenwertverständnis der Schüler und Schülerinnen ist, um einen möglichst problemlosen Umgang mit Dezimalzahlen zu gewährleisten[213]. Dies gilt vor allem grundsätzlich für die Einführung der Dezimalzahlen, jedoch mit Sicherheit auch für die

[209] Thiemann, 2004a, 4 f.
[210] MG steht für „Multiplikation vergrößert stets“ und beschreibt die weiter oben behandelte Fehlvorstellung, dass das Ergebnis einer Multiplikation immer größer ist als die Faktoren.
[211] Padberg, 1991b, 62 bzw. Padberg, 2012, 220/242
[212] Wearne/Hiebert, 1986, 84
[213] Heckmann, 2006a, 568ff. Aber auch in anderen Publikationen sind immer wieder Aussagen zur Wichtigkeit des Stellenwertsystems zu finden.

Rechenoperationen, die darauf angewandt werden. Deshalb erachte ich es für essenziell, dass Lehrer und Lehrerinnen von Beginn an großen Wert auf die Behandlung von Stellenwerten legen.

3.2 Division von Dezimalzahlen

Die Behandlung der Division von Dezimalzahlen läuft in vielen Phasen sehr ähnlich ab wie die Multiplikation und es zeigen sich bei genauere Betrachtung einige Parallelen, die im folgenden Kapitel auch aufgezeigt werden sollen.

Für die Motivation der Division zu Beginn gibt es mehrere verschiedene Zugänge, wobei interessant ist, dass auch hier einige gewohnte Vorstellungen obsolet werden, da sie nicht mehr auf Dezimalzahlen anwendbar sind. Der anschließend vorgeschlagene Ablauf verläuft abermals von einfacheren Sonderfällen bis hin zu den schwierigeren allgemeinen Fällen. Dabei tritt jedoch eine Neuerung auf, da es bei der Division einen Fall gibt, bei dem die Rechnungen keine Dezimalzahlen enthalten, dafür aber der Quotient.

Es wird wieder davon ausgegangen, dass die Rechenoperation der Division bereits bekannt ist und diese nun auf den Zahlenbereich der Dezimalzahlen erweitert werden soll. Dabei ist es klar, dass der sehr schwierige Divisionsalgorithmus alleine schon viele Fehler verursachen kann. Im folgenden Abschnitt soll jedoch besonders auf die Fehler eingegangen werden, die durch den Zusammenhang mit den Dezimalzahlen auftreten und somit neu sind. Im Grunde verändert sich der Algorithmus bis auf die Kommasetzung im Ergebnis nämlich nicht, es ist jedoch eine gewisse Vorbereitung notwendig.

Zum Abschluss sollen abermals Empfehlungen beziehungsweise Vorschläge für den Unterricht folgen, um eine möglichst gelungene Vermittlung der Inhalte zu ermöglichen, indem etwaigen Fehlvorstellungen gegengesteuert oder vorgebeugt werden kann.

3.2.1 Unterschiede zur Division von natürlichen Zahlen

Der erste große Unterschied zur Division im Setting der natürlichen Zahlen ist, wie bei der Multiplikation, die Setzung des Kommas im Ergebnis. Dies war zuvor nicht notwendig, da mit Rest gerechnet wurde.

In meinen Augen lässt sich genau dieser Punkt jedoch sehr gut motivierten. Dazu muss vorerst nicht einmal der Zahlenbereich der natürlichen Zahlen verlassen werden. Betrachtet man beispielsweise die Rechnung $6:4$ so lautete das Ergebnis bis zu diesem Zeitpunkt 1 und 2 Rest. Dies stellt jedoch kein zufriedenstellendes Ergebnis dar, da immer noch ein Rest bleibt. Über dieses Problem kann anschließend leicht gezeigt werden, dass die Division einfach über das Komma des Dividenden hinaus fortgeführt werden kann, wenn eine Null ergänzt wird. Hierbei empfiehlt es sich meiner Einschätzung nach zu wiederholen, warum dies möglich ist. Man schreibt also $6{,}0 : 4$ und rechnet weiter. Statt die 2 als Rest zu interpretieren, wird sie mit der Null nach dem Komma auf 20 Zehntel gebündelt. Das bedeutet, dass im Quotienten nun auch das Komma überschritten werden muss, da es sich um einen entsprechenden Stellenwert handelt. Da $20 : 4 = 5$ ergibt müssen also im Ergebnis 5 Zehntel notiert werden, was bedeutet, dass nach dem Komma eine 5 aufgeschrieben wird. Man erhält also das Ergebnis 1,5 (mit 0 Rest). Um diese Erklärung nachvollziehen zu können, müssen natürlich das erweiterte Stellenwertsystem und die Grundlagen der Dezimalzahlen gut beherrscht werden. Dennoch glaube ich, dass mit einem Beispiel dieser Art ein guter Einstieg gelingen könnte. Erweiternd wäre es bestimmt auch hilfreich für Schüler und Schülerinnen dieselbe oder eine ähnliche Aufgabe mit einer Stellenwert-Tabelle durchzuarbeiten.

Die zweite größere Umstellung ist, dass die folgenden Aufgaben zum Teil bereits vor der Division manipuliert werden müssen. Die Multiplikation des Dividenden und des Divisors mit Zehnerpotenzen kann zwar äußerst hilfreich sein, birgt aber auch einige Gefahren für Missverständnisse für Schüler und Schülerinnen. Diese treten nach meinem Eindruck besonders dann auf, wenn nicht verstanden wird, welche Eigenschaft der Division diese Manipulation überhaupt erlaubt. Die Tatsache, dass in Österreich die Brüche in der Regel erst nach den Dezimalzahlen behandelt werden, macht dieses Problem nur schwieriger, da der Aspekt ansonsten mithilfe des Erweiterns sehr einfach erklärt werden könnte.

3.2.2 Zur Behandlung der Division von Dezimalzahlen im Unterricht

Auch im Falle der Division von Dezimalzahlen gibt es in den untersuchten österreichischen Schulbüchern auffallende Überschneidungen, die hier vermerkt werden sollen. Da diese in einigen oder allen Büchern auftreten, kann daraus eine gewisse Tendenz geschlossen werden, wie in Österreich bei diesem Thema vorgegangen wird. Wie schon bei der Multiplikation ist natürlich auch in diesem Fall klar, dass der Unterricht von Klasse zu Klasse unterschiedlich aussieht, jedoch geht es hier in erster Linie darum, eine Art Leitfaden zu erkennen, der von den Schulbüchern vorgeschlagen wird. Es wird im Regelfall großteils mit den Aufgaben aus dem Buch gearbeitet. Folgende Aspekte finden sich in den meisten (oder allen) Schulbüchern wieder:

- Die Einführung der Thematik beginnt immer mit der Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl.

- Wenn ein Textbeispiel die Theorie unterstützt, dann handelt es sich um eine Situation in der eingekauft beziehungsweise bezahlt wird und der Eurobetrag aufgeteilt werden muss.
- Die Division durch Zehnerpotenzen wird (mit einer Ausnahme) erwähnt und es wird daraus eine Kommaverschiebungsregel abgeleitet.
- In den meisten Aufgaben und Musteraufgaben ist der Divisor kleiner als der Dividend. Nur in einem Lehrbuch wird dieser Fall genauer erklärt und es wird näher darauf eingegangen.
- Wie schon bei der Multiplikation, wird auch bei der Division des Öfteren auf eine Überschlagsrechnung zurückgegriffen, um das Ergebnis einzuschätzen.
- Bei der Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl wird ein sehr direkter Ansatz benutzt. Es wird darauf verzichtet, eine Erklärung beziehungsweise einen erläuternden Zugang zur Verfügung zu stellen. Die Anweisung lautet in den meisten Fällen, bis zum Komma im Dividenden zu rechnen, dann das Komma im Quotienten zu setzten und anschließend bis zum Schluss weiterzurechnen[214].
- Die Division zweier Dezimalzahlen wird auf sehr unterschiedliche Weisen eingeführt und erklärt. Hier lässt sich keine einheitliche Linie erkennen. Es läuft aber natürlich immer darauf hinaus, den Divisor ganzzahlig zu machen.

Interessant ist meiner Ansicht nach, dass in zwei Fällen ein Beispiel mit Größen (Geld beziehungsweise Längenmaße) benutzt wird, um die Division von zwei Dezimalzahlen zu zeigen. Trotzdem wird die Kommaverschiebung nicht mithilfe der Umwandlung in kleinere Einheiten erklärt, oder auch nur erwähnt, dass diese so interpretiert werden könnte. Warum dies verabsäumt wurde, ist mir unverständlich, da hier hilfreiche Zusammenhänge ungenutzt bleiben, obwohl diese wohl eine positive Auswirkung auf das Verständnis von Schülern und Schülerinnen hätten.

3.2.3 Division einer Dezimalzahl durch eine Zehnerpotenz und mögliche Zugänge

In den betrachteten Schulbüchern wird dieser Fall als Spezialfall der Division durch natürliche Zahlen abgehandelt. Meiner Meinung nach könnte er jedoch durchaus auch genutzt werden, um die Division von Dezimalzahlen zu motivieren beziehungsweise einzuführen und erst später die Division durch natürliche Zahlen zu betrachten. Der Vorteil dabei liegt laut meiner Einschätzung darin, dass die Vorgehensweise anhand von sehr einfachen Beispielen gezeigt werden kann. Des Weiteren wird damit

[214] Die exakten Formulierungen finden sich in den jeweiligen Schulbüchern und variieren natürlich in den verschiede denen Fällen. Die Grundaussage bleibt aber im Allgemeinen tatsächlich sehr vage.

gleichzeitig die Kommaverschiebungsregel von den natürlichen Zahlen übernommen und es können gleich zu Beginn wichtige Parallelen gezogen werden.

Der Zugang zur Division von Dezimalzahlen durch Zehnerpotenzen kann analog zur Multiplikation auf zwei Arten geschehen[215].

3.2.3.1 Zugang über Stellenwerttafeln

Auch hier ist wieder die Kenntnis der erweiterten Stellenwerttafel gefragt, wenn dieser Ansatz gewählt werden sollte. In diesem Fall gestaltet sich die Bündelung der einzelnen Stellenwerte etwas schwieriger, da „in die andere Richtung" vorgegangen werden muss. Zu Veranschaulichung wird ein einfaches Beispiel gewählt[216]: $8{,}35 : 10 =$

Man stellt fest, dass der Dividend aus den folgenden Stellenwerten besteht; 8 Einer, 3 Zehntel und 5 Hundertstel. Durch eine schrittweise Entbündelung werden daraus 80 Zehntel, 30 Hundertstel und 50 Tausendstel. Damit ist aber klar (aufgrund der Rechenregeln für die Division von natürlichen Zahlen durch Zehnerpotenzen), dass nach der Rechnung noch 8 Zehntel, 3 Hundertstel und 5 Tausendstel vorhanden sind. Das Ergebnis lautet also 0,835.

Veranschaulicht, anhand einer Tabelle, sieht der Vorgang wie folgt aus:

Zehner	Einer		Zehntel	Hundertstel	Tausendstel	
	8		3	5		
	0		80	30	50	:10
	0		8	3	5	

Das gleiche Procedere lässt sich natürlich auch für größere Zehnerpotenzen wiederholen. Somit kann anschließend die Kommaverschiebungsregel für die Division hergeleitet werden. Für diesen Prozess ist es laut meinem Empfinden wichtig auch Divisionen der Art $6{,}89 : 100$ zu behandeln, bei denen Nullen vor der Zahl ergänzt werden müssen um das Komma richtig setzen zu können. Dabei handelt es sich um den wohl schwierigsten Fall, wenn es um Division von Zehnerpotenzen geht (der ja ansonsten recht einfach ist).

3.2.3.2 Zugang über Größen

Die Idee dieses Zuganges ist genau die gleiche, wie bei der Einführung der Multiplikation von Dezimalzahlen mit Zehnerpotenzen. Dieser Zugang bietet auch eine gute Möglichkeit, die

[215] Padberg, 2012, 220f
[216] In Anlehnung an Padberg, 2012, 223

Kommaverschiebungsregel zu motivieren[217]. Man wandelt die gegebene Größeneinheit in eine kleinere um, damit anschließend im bereits bekannten Setting der natürlichen Zahlen gearbeitet werden kann. Um schließlich das Ergebnis interpretieren zu können wird abschließend in die ursprüngliche Einheit zurück umgeformt. Diese Vorgehensweise soll anhand eines Beispiels illustriert werden.

Eine Strecke von 14,7 Kilometern soll in zehn gleich große Stücke geteilt werden. Es muss also $14{,}7\ km : 10$ gerechnet werden. Man weiß, dass 14,7 Kilometer derselben Strecke entsprechen, wie 14700 Meter. Die passende Rechnung wäre also $14700 : 10 = 1470$, was aufgrund der Rechenregeln der natürlichen Zahlen bereits bekannt ist. Anschließend wird nochmals umgeformt um zum Ergebnis 1,47 Kilometer zu kommen.

Auch die andere Variation, welche bei der Multiplikation verwendet wurde ist hier anwendbar, jedoch in meinen Augen im Allgemeinen etwas schwieriger. Die Abfolge würde dann wie folgt aussehen:

14,7 Kilometer entsprechen 14 Kilometern und 700 Metern. Dividiert man durch 10 so erhält man 1,4 Kilometer (also 1 Kilometer und 400 Meter) beziehungsweise 70 Meter. Insgesamt erhält man also 1,47 Kilometer.

Nach einigen Variationen dieser Vorgehensweise (es bieten sich diverse Einheiten, Zehnerpotenzen und Umformungsschritte an) kann auch in diesem Fall recht bald auf die allgemeine Kommaverschiebungsregel geschlossen werden.

3.2.4 Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl und mögliche Zugänge

Im nächsten Schritt geht es darum, die Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl zu vermitteln, um die Grundlage für den allgemeinen Fall zu setzen. Für diesen fehlt dann nur noch ein relativ simpler Schritt, da das Prinzip der Vorgehensweise bei der eigentlichen Rechnung gleichbleibt.

Um das Konzept möglichst klar und verständlich zu vermitteln, bieten sich erneut diverse Zugänge an, die nun kurz vorgestellt werden sollen. Bei Padberg werden abermals Zehnerbrüche für diesen Vorgang vorgeschlagen[218], was natürlich nur möglich ist, wenn die Brüche im Unterricht bereits behandelt wurden. Im Allgemeinen ist das in Österreich nicht der Fall, weswegen diese Methode folglich nicht zur Verfügung steht.

---

[217] Padberg, 2012, 226

[218] Padberg, 2012, 221

3.2.4.1 Zugang über Stellenwerttafel

Eine Erläuterung über die Stellenwerttafel bietet den großen Vorteil, dass der mathematische Hintergrund des Divisionskalküls in den einzelnen Arbeitsschritten gut veranschaulicht wird. Der offensichtliche Nachteil ist, dass die Vorgehensweise viel Zeit kostet und vermutlich für manche Schüler und Schülerinnen nicht einfach zu verstehen ist. Anhand eines Beispiels soll gezeigt werden, was bei der Division passiert und die Arbeitsschritte sollen auf die einzelnen Details heruntergebrochen werden. Das Ziel ist zu zeigen, dass nur wenige Modifikationen im Vergleich zu Division natürlicher Zahlen notwendig sind[219]. Damit kann zum Schluss gefolgert werden mit welchen Anpassungen das bereits bekannte Standardverfahren übernommen werden kann. Dieser Zugang ist natürlich leichter und auch besonders zu empfehlen, wenn er auch schon bei den natürlichen Zahlen gewählt wurde.

Betrachtet man die Rechnung $46{,}72 : 6$ so lässt sich folgender Raster aufstellen mit dessen Hilfe die Vorgehensweise besser verständlich gemacht werden soll:

	Z	E	,	z	h		E	,	z	h
	4	6	,	7	4	: 6 =	7	,	7	9
-	4	2								
		4		7						
	-	4		2						
				5	4					
				5	4					
					0	R				

Der erste Schritt sollte bereits vom Standardverfahren der Division bekannt sein, weswegen an dieser Stelle der zweite, gelb markierte Schritt genauer erklärt werden soll[220]. Von der vorherigen Teildivision sind 4 Rest geblieben. Dabei handelt es sich um Einer, wie anhand der Spalte zu erkennen ist. Für den nächsten Schritt muss die 7 herabgeholt werden, wobei es sich um Zehntel handelt. Durch eine Entbündelung des Restes erhält man also insgesamt 47 Zehntel. Die nächste Teildivision wird als Ergebnis also ebenfalls den Stellenwert Zehntel haben. Das bedeutet es muss ein Komma gesetzt werden bevor der Teilquotient notiert wird. Nun wird wie gewohnt dividiert und anschließend das Teilergebnis (7) und der Rest (3) notiert. Für den nächsten Schritt geht es mit Hundertstel genau so weiter, bis schließlich der Rest 0 oder eine Periode auftritt (wobei in diesem Stadium das Auftreten einer Periode vermieden werden sollte, da dieses Konzept im Allgemeinen noch nicht bekannt ist).

[219] Padberg, 2012, 222f
[220] Angelehnt an Postel, 1991, 18

Lässt man beim obigen Schema die Stellenwerttafel weg, so entspricht die Notation bereits dem üblichen Normalverfahren der Division. Die eigentliche Neuerung ist dabei das Überschreiten des Kommas, welche bereits im oben angeführten Rechenschritt erwähnt wurde. Wie zu sehen ist, kann mit den Stellenwerten sehr genau argumentiert werden, wann und warum das Komma im Ergebnis gesetzt werden muss. Darauf ist also bei der Einführung besonders zu achten.

3.2.4.2 Größen

Der Zugang über Größeneinheiten macht sich einmal mehr die Kommaverschiebung bei der Umwandlung zu Nutze und ist aufgrund des Realitätsbezuges meist auch sehr verständlich für Schüler und Schülerinnen[221]. Es wird hier zwischen zwei Aufgabentypen unterschieden, da teilweise andere Rechenschritte und eine andere Interpretation notwendig sind.

Teilen:

Eine Aufgabe, die im Sinne des Teilens interpretiert werden kann, würde beispielsweise wie folgt aussehen: Eine 41,6 Dezimeter lange Strecke soll in 8 gleich große Teilstrecken geteilt werden. Wie groß ist eine solche Teilstrecke?

Zur Lösung muss die Division $41{,}6\,dm : 8$ gelöst werden. Vorerst wird die Dezimalzahl in eine natürliche Zahl umgewandelt, also $41{,}6\,dm = 416\,cm$. Anschließend kann dividiert werden: $416\,cm : 8 = 52\,cm = 5{,}2\,dm$. Es sollte darauf geachtet werden, dass die Division nach der Umformung der Einheit restlos möglich ist, da sonst im Ergebnis ein Komma gesetzt werden muss, ohne dass dies bereits behandelt wurde. Des Weiteren wäre es meiner Ansicht nach sinnvoll, nach der Durchführung das Beispiel erneut zu rechnen, nur diesmal ohne die Einheiten umzuformen und mit einer genauen Betrachtung der Kommasetzung. Da das Ergebnis bereits bekannt ist, können die Schüler und Schülerinnen vermutlich selbst gut erahnen, was zu tun ist. Die entsprechenden Rechenschritte bleiben dieselben wie zuvor, was den Lernenden ermöglichen sollte, sich auf das wesentliche zu konzentrieren.
Der Nachteil bei diesem Ansatz ist, dass das Teilen als Interpretation für den allgemeinen Fall nicht mehr in Frage kommt (die Strecke könnte beispielsweise nicht in 8,2 gleich große Teilstrecken geteilt werden). Damit ist dieser spezielle Fall der letzte, bei dem diese Art der Auffassung Relevanz hat.

Messen:

Alternativ kann eine Aufgabe gewählt werden, die über die Interpretation des Messens erklärt werden kann. Es wird sich zeigen, dass hier auf andere Aspekte geachtet werden muss als beim Teilen. An dieser Stelle wird ein Beispiel gewählt, das mit denselben Zahlen gerechnet werden kann, wie die

[221] Heckmann, 2005, 84

Aufgabe zuvor: Die Schrittlänge einer Person beträgt 8 Dezimeter. Wie viele Schritte muss diese Person gehen, um eine 41,6 Dezimeter lange Strecke zurückzulegen?

Die zu lösende Division lautet also abermals $41{,}6\ dm : 8\ dm$ mit dem Unterschied, dass diesmal auch der Divisor eine Einheit besitzt. Zum Lösen der Aufgabe wird abermals in Zentimeter umgeformt. Somit lautet die Division nun $416\ cm : 80\ cm$. Hier zeichnet sich schon die Problematik ab, die diese Art von Aufgaben mit sich bringen. Es kommt in der Rechnung zwar keine Kommazahl mehr vor, jedoch ist die Aufgabe nicht restlos lösbar (dies ist aufgrund der mathematischen Gegebenheiten bei einer solchen Aufgabe im Allgemeinen nicht möglich), weswegen für die richtige Lösung auf den Zugang zurückgegriffen werden muss, der zu Beginn des Kapitels erläutert wurde (siehe Kapitel 3.2.1). In diesem Setting muss aber für die Erklärung statt auf Stellenwerte, auf kleinere Einheiten (in diesem Fall Millimeter) zurückgegriffen werden.

Im Vergleich zum Teilen kommt man bei dieser Aufgabe direkt auf das Ergebnis 5,2 (ohne das Zwischenergebnis 52). Der Vorteil dieses Zuganges zeigt sich also darin, dass hier automatisch die Äquivalenz der beiden Rechnungen $41{,}6 : 8$ und $416 : 80$ gezeigt wird. Dies ist auch die Grundlage für die Vorgehensweise im allgemeinen Fall, womit hier also schon vorgegriffen werden kann.

Optimalerweise werden Aufgaben beider Arten behandelt, da es meiner Auffassung nach wichtig ist, klar und deutlich einen Unterschied zu sehen und das Ergebnis interpretieren zu können. Dabei können auch andere gängige Einheiten wie Euro und Cent oder Massen gewählt werden.

3.2.5 Division zweier Dezimalzahlen und mögliche Zugänge

Zum allgemeinen Fall ist es kein großer Schritt mehr, wenn die vorangegangenen Kapitel erledigt sind. Es geht also im Grunde darum, möglichst verständlich zu machen, dass man die Aufgaben auf einen bereits bekannten Fall (Division durch eine natürliche Zahl) zurückführen muss. Dafür ist das Konzept des Erweiterns beziehungsweise die Kommaverschiebung notwendig, welche auf verschiedene Arten erklärt werden können. Einmal mehr werden im Anschluss mögliche Zugänge dargestellt, die eine optimale Einführung des Themas gewährleisten sollen.

3.2.5.1 Zugang über die Kommaverschiebungsregel

Aus dem Kapitel zur Division zweier natürlicher Zahlen sollte schon die „Konstanz des Quotienten“[222] bekannt sein. Das bedeutet, dass der Quotient gleichbleibt, wenn Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliziert werden. Somit haben also beispielsweise die Rechnungen 9:3, 18:6 und 27:9 allesamt dasselbe Ergebnis. Kombiniert mit der Kommaverschiebungsregel der Multiplikation mit

[222] Der Aspekt wird im Schulbuch Das ist Mathematik von Reichel et. al., 2011 so bezeichnet

Zehnerpotenzen liefert dies die Grundlage für die allgemeine Vorgehensweise bei der Division von Dezimalzahlen.

Nimmt man ein beliebiges Beispiel, dann ist es vorerst das Ziel, die Rechnung auf eine bereits bekannte Grundlage zurückzuführen. Die Aufgabe $268{,}962 : 22{,}53$ kann also zu $2689{,}2 : 2253$ gemacht werden, indem das Komma beider Zahlen um zwei Stellen verschoben wird. Wer zusätzlich Dezimalzahlen vermeiden will, kann die Rechnung auch auf die Form $26892 : 22530$ bringen, was jedoch in diesem Fall die zusätzliche Gefahr birgt, dass auf die Endnull im Divisor vergessen wird. Aus meiner Sicht ist dies also nicht unbedingt notwendig, da es sein kann, dass die Nachteile überwiegen.

Unabhängig davon hat man nach der Kommaverschiebung einen bereits bekannten Fall erreicht, dessen Lösung für Schüler und Schülerinnen schon selbstständig möglich ist. Sollte die Konstanz des Quotienten noch nicht bekannt sein, so muss diese nachgeholt werden, bevor dieser Zugang gewählt wird.

3.2.5.2 Zugang über Größen

Die Einführung über Größeneinheiten verläuft analog zum vorangegangenen Kapitel (Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl) und stellt eine weitere gute Möglichkeit dar, die Division von Dezimalzahlen zu erklären und vor allem die Konstanz des Quotienten nochmals verständlich zu vermitteln. Die Möglichkeit, das Konzept des Teilens zu benutzen ist hier, wie bereits erwähnt, nicht mehr möglich, da dieses auf Dezimalzahlen nicht anwendbar ist[223].

Es wird also ein geeignetes Beispiel gewählt, um durch eine Umformung auf kleinere Einheiten, auf den bereits bekannten Fall der Division durch eine natürliche Zahl zurückzuführen[224]. Dabei ist es nun, im Gegensatz zum vorherigen Kapitel, möglich, eine Aufgabenstellung zu wählen, bei der die Division nach der Umformung restlos möglich ist[225].

Das wichtige Prinzip der „Konstanz des Quotienten“, welches in diesem Fall durch die Umwandlung der Größeneinheit dargestellt ist, kann durch diese Vorgehensweise meiner Ansicht nach sehr gut veranschaulicht werden. Diese Tatsache und der Realitätsbezug, welcher Schülern und Schülerinnen eine gute Vorstellung ermöglicht und somit für die Vermittlung der Dezimalzahlen sehr wichtig ist[226], machen diesen Zugang meiner Einschätzung nach sehr praktisch.

---

[223] Dazu müsste man beispielsweise eine gewisse Menge oder Größe in 4,5 gleich große Teile aufteilen. Dies ergibt jedoch, wie bereits in einem vorangegangenen Kapitel erwähnt, keinen Sinn.

[224] Eine genauere Ausführung ist in einem vorangegangenen Kapitel zu finden. Auch Padberg schlägt eine solche Vorgehensweise vor und zeigt dazu einen Ausschnitt aus einem deutschen Schulbuch: Padberg, 2012, 225f

[225] Beispielsweise $41{,}6 : 0{,}8 = 416 : 8 = 52$

[226] Yildiz et. al, 2011, 902f

3.2.6 Häufig auftretende Fehler und Problembereiche

An dieser Stelle sollen die am häufigsten auftretenden Fehler und Problembereiche der Division von Dezimalzahlen besprochen werden. Dabei gilt wie bei der Multiplikation, dass vor allem auf die Schwierigkeiten Wert gelegt werden soll, die durch den Umstand entstehen, dass mit Dezimalzahlen gearbeitet wird. Die Fehler, welche durch die Division und das Standardverfahren an sich ausgelöst werden, wurden bereits in einem vorangegangenen Kapitel erörtert und besprochen. Es ist natürlich anzunehmen, dass diese auch bei der Division von Dezimalzahlen auftreten, wenn nicht dagegen vorgegangen wurde.

Es kann natürlich wieder nur eine Auswahl dargestellt werden, weswegen kein Anspruch auf Vollständigkeit besteht. Auch zu diesem Thema finden sich sehr ausführliche Darstellungen in Heckmanns Werk „Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde.“[227], welches an dieser Stelle abermals für detailliertere Ausführungen empfohlen werden kann.

3.2.6.1 Grundvorstellungsumbrüche

Es kommt im Zuge der Behandlung der Division von Dezimalzahlen zu wichtigen Grundvorstellungsumbrüchen, die einigen Schülern und Schülerinnen Schwierigkeiten bereiten können.

Wie bereits erwähnt ist die Vorstellung des Verteilens nur mehr in Ausnahmefällen auf die Division anwendbar (nämlich, wenn durch eine natürliche Zahl dividiert wird)[228]. Für jene Schüler und Schülerinnen, für die diese Interpretation einen guten Anker dargestellt haben mag, ist es bestimmt schwieriger, sich an die neuen Aspekte der Division zu gewöhnen. Es empfiehlt sich also meiner Meinung nach, diese Besonderheit anzusprechen und Alternativen anzubieten.

Zwei weitere Umbrüche werden von Thiemann besprochen und genauer analysiert. Dabei handelt es sich einerseits um die Fehlvorstellung, dass die Division stets verkleinert[229]. Von den natürlichen Zahlen ausgehend ist klar, dass der Quotient immer kleiner sein muss als der Dividend. Diese Tatsache lässt sich auch mithilfe geeigneter Interpretationen sehr gut veranschaulichen.

Schreitet man jedoch zur Division von Dezimalzahlen voran, so wird diese Vorstellung durch einen Sonderfall umgeworfen. Ist der Divisor eine Zahl zwischen Eins und Null, so wird der Quotient größer

[227] Heckmann, 2006a
[228] Padberg, 2012, 140
[229] Thiemann, 2004a, 1ff

sein als der Dividend. Reflektieren Schüler und Schülerinnen dieses Ergebnis nach der Rechnung (was ja grundsätzlich eine sehr wichtige und wünschenswerte Tätigkeit ist), so kann man zum Teil sehr großes Erstaunen über das Ergebnis feststellen und es wird eventuell sogar verworfen[230]. Wird dieser Aspekt der Division nicht angesprochen oder durch den Lehrer beziehungsweise die Lehrerin erklärt, so besteht die Gefahr, dass bestimmte Ausweich-Strategien gefunden und verallgemeinert werden.

Zum anderen wird auch die Fehlvorstellung behandelt, bei der fälschlicherweise angenommen wird, man könne eine Zahl nicht durch eine größere Zahl dividieren[231]. Auch hierbei liegt der Ursprung bei der Division im Bereich der natürlichen Zahlen, wo eine Division dieser Art tatsächlich keinen Sinn ergibt, weil das Ergebnis stets eine Dezimalzahl zwischen Null und Eins (beziehungsweise 0 mit Rest) ist. Durch eine Übergeneralisierung wird also angenommen, dass dies auch bei Dezimalzahlen der Fall ist. Beispiele dieser Art werden also eventuell für „unlösbar" erklärt oder es werden falsche Lösungswege erfunden. Auch für diese Fehlvorstellung ist also eine gezielte Behandlung mehrerer Aufgaben, die dieses Problem verursachen, sehr sinnvoll. Somit können diese für Schüler und Schülerinnen neuen Aspekte behandelt und erklärt werden bevor sie „Erstaunen" auslösen und eventuell falsche Ausweichstrategien entwickelt werden.

Ein Fehler der laut Padberg und Heckmann sehr häufig aus genau dieser Fehlvorstellung folgt zeigt sich schon bei der vergleichsweise einfachen Division durch Zehnerpotenzen[232]. Dabei werden bei einer Aufgabe, wo der Dividend kleiner ist als der Divisor (beispielsweise 5:10 oder 5:100), einfach die beiden Zahlen vertauscht. Anschließend wird gegebenenfalls noch ein Komma gesetzt, weil geahnt wird, dass der Quotient eine Dezimalzahl sein muss. Es zeigt sich, dass sich diese fehlerhafte Ausweichstrategie vor allem dann anbietet, wenn die umgekehrte Division besonders leicht aufgeht. Rechnungen wie zum Beispiel 3:9, 8:32 oder ähnliche eignen sich also vermutlich gut, um die Fehlvorstellung aufzudecken. Auch Wearne und Hiebert beobachten diese Strategie, beispielsweise bei der Aufgabe $3: 0{,}6$, und stellen fest, dass diese Art von Beispielen für Schüler und Schülerinnen besonders schwierig zu lösen ist[233].

3.2.6.2 Fehler durch KT-Vorstellung

Es zeigt sich, dass die KT-Strategie auch bei der Division eine sehr große Rolle spielt, jedoch nur, wenn sich die Aufgaben dafür eignen. Der Divisor muss also sowohl den natürlichen, als auch den dezimalen Teil des Dividenden teilen[234]. Die Besonderheit, die in diesem Zusammenhang auftritt ist, dass gewisse

[230] Hefendehl-Hebeker/Prediger, 2006, 1ff
[231] Thiemann, 2004a, 1ff
[232] Padberg, 2012, 229 und Heckmann, 2006a, 189f
[233] Wearne/Hiebert, 1986, 81
[234] Heckmann, 2006a, 191f

Aufgaben diese Strategie noch deutlicher „provozieren“. Sie tritt nämlich vor allem dann besonders häufig auf, wenn Rechnungen einfach im Kopf gerechnet werden können[235]. Beispielsweise kann die Aufgabe $36{,}18{:}\,6$ sehr leicht ohne das Standardverfahren gerechnet werden, wenn die KT-Strategie verfolgt wird. Das (falsche) Ergebnis wäre dann 6,3. Diese Art der Durchführung tritt aber nicht nur bei der Division durch natürliche Zahlen auf, sondern zeigt sich auch in anderen Formen, wie beispielsweise $0{,}44{:}\,0{,}11 = 0{,}4$.

Im allgemeinen Fall (Dezimalzahl dividiert durch Dezimalzahl) tritt dieser Fehler deutlich weniger häufig auf, da hier die Vorstellung an ihre Grenzen stößt. Bei einer Rechnung wie beispielsweise $8{,}67{:}\,3{,}7$ ist das Kalkül nicht mehr eindeutig anwendbar und wird daher auch kaum eingesetzt.

3.2.6.3 Anhängen von Endnullen

In diesem speziellen Fall geht es um Aufgaben, die das Anhängen von Endnullen im Dividenden erfordern, welche anschließend heruntergeholt werden müssen. Laut Padberg zeigt sich deswegen ein deutlicher Unterschied bei den Ergebnissen der beiden Aufgaben $7{,}2{:}\,6$ und $7{,}5{:}\,2$[236], die eigentlich auf den ersten Blick einen ähnlichen Schwierigkeitsgrad vermuten lassen. Bei einer Untersuchung wurde jedoch die erste nur von 10% der Schüler und Schülerinnen falsch gelöst, wohingegen bei der zweiten Aufgabe von ca. 25% der Teilnehmer und Teilnehmerinnen ein Fehler gemacht wurde. Hier muss nämlich, nachdem als Zwischenschritt 15:2 dividiert wurde, eine Endnull heruntergeholt werden, um den letzten Schritt durchführen zu können. Dieser kleine Unterschied löst also offenbar größere Schwierigkeiten aus. Das rührt vermutlich daher, dass er im Vergleich zum Standardverfahren mit natürlichen Zahlen für Schüler und Schülerinnen neuartig ist. Je öfter die Endnullen angehängt werden müssen, desto höher wird also verständlicherweise auch die Fehlerquote.

3.2.6.4 Setzen des Kommas

Bei der Division von natürlichen Zahlen durch Dezimalzahlen gibt es wie bereits erwähnt Fälle, welche vermeintlich im Kopf gelöst werden können. Diese veranlassen offenbar dazu, das Standardverfahren nicht zu verwenden und stattdessen eine „Abkürzung“ zu nehmen. Laut Padberg sind beispielsweise Aufgaben wie $5{:}\,0{,}1$, $8{:}\,0{,}004$ oder $35{:}\,0{,}7$ wegen ihrer augenscheinlichen Einfachheit prädestiniert für die beiden folgenden Fehler[237].

Im ersten Fall wird die Anzahl der Kommastellen im Ergebnis, an die in der Rechnung vorkommende Dezimalzahl angepasst. Die Aufgabe $5{:}\,0{,}1$ hätte folglich 0,5 als Ergebnis. Dies kann auch als Übergeneralisierung der Multiplikationsregel interpretiert werden (mehr noch wird hier tatsächlich

[235] Padberg, 2012, 232
[236] Padberg, 2012, 230
[237] Padberg, 2012, 230ff

multipliziert statt dividiert). Die Fehlvorstellung, dass die Division stets verkleinere kann diese Art von Fehler natürlich noch verstärken[238].

Im zweiten Fall wird die sogenannte KK-Strategie (also die Kein-Komma-Strategie) angewandt. Die Rechnung wird also einfach durchgeführt, als ob kein Komma vorhanden wäre. Folglich hätte die Aufgabe $35: 0{,}7$ dann 5 als Ergebnis beziehungsweise wäre der Quotient der Rechnung 8,4:4 gleich 21[239].

Werden Aufgaben bearbeitet, bei denen sowohl im Dividenden als auch im Divisor eine Dezimalzahl auftritt, so kann ein weiterer, ähnlicher Fehler beobachtet werden, der auf eine Übergeneralisierung der Addition schließen lässt[240]. So wird beispielsweise bei der Rechnung $5{,}6: 0{,}1$ die Zahl 5,6 als Ergebnis angegeben, vermutlich, weil Dividend und Divisor jeweils eine Dezimale besitzen.

Eine weitere Strategie, die bei der Kommasetzung auftreten kann, kommt durch den sogenannten Null-Komma-Fehler zum Ausdruck. Dabei werden die gegebenen Zahlen im Kopf dividiert und anschließend hinter einem Null-Komma im Ergebnis notiert[241]. Verstärkt tritt dies in Fällen auf, wo durch eine Zahl zwischen Null und Eins dividiert wird und die Division durch die Nachkommastelle restlos möglich ist[242]. Zum Beispiel wird bei der Rechnung 42:0,6 eine Dezimalzahl als Ergebnis erwartet und erkannt, dass 42:6 leicht zu berechnen ist. Dementsprechend wird 0,7 als Lösung angegeben. Zum Teil kommt es in solchen Fällen jedoch auch vor, dass nach dem Komma zusätzlich eine gewisse Anzahl an Nullen notiert wird, wobei hier aber nicht immer logisch nachvollziehbar ist, nach welchen Kriterien diese gewählt ist.

All diese Fehlertypen haben also gemeinsam, dass sie bei Rechnungen auftreten, die dazu veranlassen, das Standardverfahren nicht anzuwenden und stattdessen im Kopf zu rechnen. Dabei wird dann jedoch eine falsche Regel für die Kommasetzung angewandt. Diese Tatsachen sprechen dafür, dass das Verfahren der Division an sich nicht verstanden wurde, dass von einer anderen Rechenart übergeneralisiert wurde, oder dass der Schüler beziehungsweise die Schülerin schlichtweg unkonzentriert war.

Treten bei der Division zweier Dezimalzahlen Fehler dieser Art auf, so richtet sich die Anzahl der Dezimalen teilweise nach dem Dividenden (stärkere Tendenz) und teilweise nach dem Divisor[243].

238 Heckmann, 2006a, 193
239 Heckmann, 2006a, 192
240 Heckmann, 2006a, 195
241 Padberg, 2012, 231
242 Heckmann, 2006a, 194f
243 Padberg, 2012, 231

3.2.7 Konsequenzen und Vorschläge für den Unterricht

Zu Beginn sei angemerkt, dass einige Aspekte für die Konsequenzen im Unterricht bereits im Kapitel zur Multiplikation angeführt wurden. Welche davon sich (zumindest teilweise) auch auf die Division umlegen lassen, wird zum Abschluss des Kapitels kurz erwähnt, ohne jedoch die Punkte abermals genauer zu beleuchten.

Bei der Untersuchung der am häufigsten vorkommenden Fehler hat sich gezeigt, dass viele Fehler genau dann auftreten, wenn die Aufgabe ein entsprechendes Kriterium erfüllt. Wearne und Hiebert beobachten beispielsweise eine besonders hohe Fehlerquote, wenn durch eine Dezimalzahl zwischen Eins und Null dividiert wird[244]. Diese Eigenschaft deckt sich zum Teil auch mit den anderen oben angeführten Aspekten, wobei die Modalitäten der Beispiele bei Padberg genauer beschrieben werden.

Daraus ergibt sich anfangs ein sehr wichtiger Punkt, welcher nach meinem Ermessen besonders essenziell ist, wenn es darum geht, in der Schule die Division der Dezimalzahlen möglichst gut zu vermitteln. Es muss stets darauf geachtet werden, dass Beispiele verschiedenster Art bearbeitet und auch erklärt werden, wenn es aufgrund des Schwierigkeitsgrades erforderlich ist. Idealerweise werden die Übungsaufgaben so gewählt, dass diese Fehlvorstellungen und bestimmte Probleme provozieren. In diesem Zusammenhang ist es außerdem wichtig, sich eine Rückmeldung der Schüler und Schülerinnen zu holen, da anhand dieser sehr schnell Fehler entdeckt werden können. Neben diesen grundlegenden Kriterien werden in der Literatur einige Aspekte vorgeschlagen, welche auf den Unterricht angewandt werden sollen. Anschließend soll kurz erläutert werden, um worum es sich dabei handelt.

Wie auch schon bei der Multiplikation ist eine verständlich formulierte Einführung und Erklärung der wichtigsten Grundsätze und Regeln essenziell. Sowohl Wearne und Hiebert[245], als auch Padberg[246] stellen fest, dass es vielen Schülern und Schülerinnen schwerfällt, die Rechenregeln zur Division aus dem Gedächtnis abzurufen. Davon, die Regeln genauer zu erklären, ist dabei noch nicht einmal die Rede. Wenn diese Grundelemente jedoch schon fehlen, so ist es nicht verwunderlich, dass es zu gröberen Schwierigkeiten kommt beziehungsweise manche Aufgaben gar nicht erst gerechnet werden.

[244] Wearne/Hiebert, 1986, 81
[245] Wearne/Hiebert, 1986, 83
[246] Padberg, 2012, 232/242

Die Lösung für dieses Problem ist aber natürlich nicht, dass Schüler und Schülerinnen die besagten Regeln einfach auswendig lernen. Dies ist aus bereits erwähnten Gründen nicht sinnvoll[247]. Es sollte jedoch das Ziel sein, diese Grundlagen im Unterricht so zu vermitteln, dass sie für alle klar verständlich sind. Dieser Prozess fängt jedoch schon viel früher an, als bei der Division der Dezimalzahlen.

Des Weiteren stellen Grundvorstellungsumbrüche laut Thiemann eine zentrale Problematik dar, welche Schülern und Schülerinnen immer wieder Schwierigkeiten bereiten[248]. Sie schlägt vor, im Unterricht gezielt die Unterschiede zwischen Dezimalzahlen und natürlichen Zahlen anzusprechen und bewusst Beispiele zu zeigen, welche den bis dahin gewohnten Vorstellungen widersprechen. Besonders hilfreich ist es natürlich, wenn im Zuge dessen verständliche Modelle benutzt werden, welche die Aussagen unterstreichen und eine anschauliche Vorstellung liefern. Schüler und Schülerinnen sollen so ein Gespür dafür bekommen, was die Division bewirkt und welche verschiedenen Auswirkungen sie haben kann.

Konkrete Vorschläge wären in diesem Zusammenhang folgende Aspekte, die in den Unterricht eingebaut werden können:

- Reflexion der Ergebnisse, vor allem bei problematischen und neuartigen Aufgaben.
- Aufgaben in Sachkontexte einbetten und Größenordnung der Lösung abschätzen.
- Nicht nur das Ergebnis, sondern auch die Rechenschritte schwieriger Aufgaben genauer betrachten.
- Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu natürlichen Zahlen diskutieren.
- Diskutieren, welche Rechenoperation zu welcher Sachsituation passen könnte (hierbei sollte meiner Ansicht nach auch besonders auf Überschneidungen geachtet werden).

Die nächste Konsequenz für den Unterricht wurde ebenfalls bereits im Kapitel der Multiplikation erwähnt. Es geht dabei um die Überschlagsrechnungen, die jedoch meiner Einschätzung nach bei der Division noch wichtiger sind. Schon Lothar Flade stellt in einer Publikation aus dem Jahr 1976 fest, dass die Überschlagsrechnung vor allem im Zusammenhang mit der Kommasetzung ein hilfreiches Mittel zur Kontrolle des Ergebnisses darstellt[249]. Auch in den meisten anderen Fällen der zuvor erwähnten Fehler-Arten liegt das falsche Ergebnis außerhalb der Größenordnung des tatsächlichen Quotienten. Oft ruft das nicht einmal Verwunderung bei vielen Schülern und Schülerinnen hervor, was Wearne und Hiebert damit begründen, dass einige nur „für sie unverstandene Symbole manipulieren und wenig

[247] Wearne/Hiebert, 1986, 512 argumentieren dazu, dass durch das reine auswendig lernen ohne Verständnis sehr leicht Fehler entstehen. Die Symbole der Rechenoperation werden dann von Schülern und Schülerinnen benutzt, ohne zu wissen, was sie verursachen.
[248] Thiemann, 2004a, 1-5
[249] Flade, 1976, 374

verstandene Regeln anwenden“[250]. Auf wie viele Kinder und Jugendliche diese doch sehr starke Aussage zutrifft bleibt wohl offen, jedoch denke ich, dass sie dennoch für so manchen Lernenden, zumindest in abgeschwächter Form, passend erscheint.

Eine Überschlagsrechnung kann in diesem Zusammenhang sehr hilfreich sein um zumindest die gröbere Dimension der Rechnung überprüfen zu können[251]. Mit etwas Übung kann dieses Hilfsmittel auch im Kopf eingesetzt werden und schult somit auch die realistische Einschätzung eines Ergebnisses. Die Überschlagsrechnung muss meiner Meinung nach allerdings aktiv geübt werden, da man nicht davon ausgehen kann, dass sie von den meisten Schülern und Schülerinnen beherrscht wird[252]. Das nimmt wiederum Zeit in Anspruch, die oft schon sehr rar ist. Ich denke jedoch, dass diese Zeit in den meisten Fällen mit der Überschlagsrechnung sehr sinnvoll investiert wäre, da sie sich auch in anderen Gebieten als sehr nützlich erweisen kann.

Ganz abgesehen von den bereits erbrachten Argumenten ist die Überschlagsrechnung für den Divisionsalgorithmus selbst unerlässlich, vor allem, wenn mit größeren Divisoren gerechnet wird. Deswegen ist die Behandlung umso wichtiger.

Als weiterer Aspekt wird die Nutzung von Größen als Verständnishilfe angeführt. Interessanterweise zeigt sich bei einer Untersuchung Padbergs ein deutlicher Unterschied zwischen den Lösungsquoten der folgenden beiden Aufgaben[253]:

- $3:0,6 =$
- "Anna macht 0,6 Meter lange Schritte. Wie viele Schritte braucht sie um 3m zurückzulegen?“

Dabei wird die erste Aufgabe deutlich weniger oft richtig gelöst, als die zweite, obwohl es sich genau genommen um dieselbe Rechnung handelt. Man könnte sogar annehmen, dass aufgrund der erforderlichen „Übersetzung“ des Textes in eine Rechnung, die zweite Aufgabe schwieriger ist. Es zeigt sich jedoch, dass die alternativen Lösungswege, welche hier ebenfalls gewählt werden können, die Lösungsquote sehr positiv beeinflussen. Es kann also die Division „umgangen“ werden, was sehr deutlich werden lässt, dass das Problem beim Verständnis und der Durchführung des Algorithmus liegt.

Es bietet sich also eine gute Möglichkeit, wie bereits erwähnt[254], die Sachkontexte und Größeneinheiten zu nutzen um ein besseres Verständnis von Divisionsaufgaben zu erzielen.

[250] Wearne/Hiebert, 1986, 84
[251] Heckmann, 2006a, 241
[252] Padberg, 2012, 233f
[253] Padberg, 2012, 233
[254] Heckmann, 2012, 55-62 oder Thiemann, 2004a, 5

Abgesehen von den bereits genannten Konsequenzen für den Unterricht sind auch andere Aspekte wichtig, die schon zuvor im Setting der Multiplikation ausgeführt wurden. Dazu zählen zum Beispiel die vielfältige Deutung von Zahlen und Operationen, das explizite Ansprechen von Lernhürden, die Reflexion von Ergebnissen (nicht nur mithilfe der Überschlagsrechnung) und ein bestmögliches Stellenwertverständnis (siehe Kapitel 3.1.8). All diese Gesichtspunkte können ebenfalls problemlos auf die Division von Dezimalzahlen umgelegt werden und sollten jedenfalls im Unterricht bedacht werden.

Teil 4:

Untersuchung ausgewählter österreichischer Schulbücher unter besonderer Rücksichtnahme auf die Multiplikation und Division von Dezimalzahlen

Um ein genaueres Bild der Situation bezüglich der Behandlung von Dezimalzahlen im Unterricht in Österreich zu schaffen, werden im folgenden Kapitel diverse Schulbücher untersucht. Die Auswahl der Bücher erfolgte nach Absprache mit Frau Dr. Maria Koth. Es soll ein breites Spektrum von Büchern dargestellt werden, die in Gymnasien und neuen Mittelschulen verwendet werden.

Aufgrund der thematischen Grenzen der Arbeit sind die Abschnitte über das Addieren und Subtrahieren von Dezimalzahlen nicht behandelt worden, obwohl diese in jedem betrachteten Schulbuch in den bearbeiteten Kapiteln zu finden sind und eine genauere Betrachtung sicherlich interessant wäre, da diese Rechenoperationen auch Teil der Multiplikation und Division sind.

Auf folgende Fragen wurde bei der Untersuchung der Schulbücher besonders geachtet:

- **Aufbau:** Wie sieht der grobe Ablauf aus? Welche Aspekte der Dezimalzahlrechnung werden behandelt und in welcher Reihenfolge? Wird die Bruchrechnung vor, nach oder gar gleichzeitig mit der Dezimalbruchrechnung behandelt? Gibt es Besonderheiten beim Ablauf beziehungsweise bei der Wahl der behandelten Themen? Welche Elemente fallen besonders auf oder unterscheiden das Schulbuch von anderen?
- **Theorie:** In welcher Form wird das Thema theoretisch vorgestellt und eingeführt? Wie genau und treffend sind die Erklärungen? Welche Musterbeispiele werden benutzt? Gibt es auffallende Lücken im Ablauf? Wird in den Erklärungen diversen Fehlvorstellungen vorgebeugt? Welche Abschnitte sind besonders gut gelungen?
- **Aufgabenstellungen:** Welche Arten von Aufgaben werden verwendet und passen diese gut zum Theorieteil? Wird auf Diversität der Aufgabenstellungen geachtet? Sind die Aufgaben auf bekannte Fehlvorstellungen abgestimmt (Sensibilisierung)? Sind genügend Aufgaben vorhanden?

Nachdem die Bücher einzeln betrachtet wurden, soll zum Abschluss des Kapitels ein Vergleich stattfinden. Zu jedem der oben angeführten Aspekte sollen besonders positiv auffallende Passagen in den Büchern hervorgehoben und verglichen werden. Auch Verbesserungsvorschläge mit Bezug auf die Literatur und andere Kapitel der Arbeit für einzelne oder alle Bücher werden hier vorgelegt.

4.1 Das ist Mathematik 1

Reichel, Hans-Christian/ Humenberger, Hans (Hrsg.)/ Litschauer, Dieter/ Groß, Herbert/ Aue, Vera. (2011). *Das ist Mathematik 1* (1. Auflage). Wien: ÖBV-Verlag.

4.1.1 Aufbau

Im Schulbuch „Das ist Mathematik" ist das betrachtete Thema in zwei Abschnitte aufgeteilt. Im ersten Kapitel „Dezimalzahlen" werden grundlegende Aspekte besprochen und es wird an Vorwissen angeknüpft. Im zweiten Kapitel „Rechnen mit Dezimalzahlen" werden die Rechenoperationen thematisiert.

Zu Beginn des Kapitels „Dezimalzahlen" finden sich die so genannten Themenseiten (welche auch zu Beginn jedes anderen Kapitels zu finden sind). Auf diesen wird ein Einstieg gewählt, der einen kurzen Blick in die Vergangenheit gestattet - einige Fakten über die Französische Revolution werden geschildert. Der Übergang zum eigentlichen Thema erfolgt über die diversen Einheiten, die zur damaligen Zeit „erneuert" wurden (zum Beispiel wurden Unzen/Pfund auf Gramm/Kilogramm oder Fuß/Klaftern/Meilen auf das metrische System umgestellt).

Damit ist nach meinem Ermessen ein sehr guter Einstieg gelungen, da man die Schüler und Schülerinnen an einige Aspekte erinnert, die schon teilweise aus der Volksschule und dem Alltag bekannt sein sollten – Einheiten und Maßangaben.

Auf den folgenden Seiten wird geschildert, worum es sich bei Dezimalzahlen handelt und es folgt der erste Theorieteil zum Thema „Einführung der Dezimalzahlen". Nach einigen grundlegenden Beispielen dazu werden Geld-, Längen- und Masseneinheiten behandelt. Der Abschluss des ersten Abschnittes geschieht in einem kurzen Unterkapitel, welches das Thema „Ordnung von Dezimalzahlen" behandelt.

Im darauffolgenden Kapitel „Rechnen mit Dezimalzahlen" geht, im Zuge der Themenseiten, der Blick in die Vergangenheit noch weiter zurück bis zum „Rechenmeister" Adam Ries. Dieser hatte in einem Werk ein neues System vorgestellt, mit dem es wesentlich leichter war, zu rechnen. Es handelt sich dabei um das noch heute verwendete System, Zahlen mit Hilfe der Ziffern 0 bis 9 zu schreiben. Auch die Kommaschreibweise geht auf ihn zurück und damit ist, wie auch schon im vorherigen Kapitel, ein sehr interessanter Einstieg in das Thema gelungen.

Im restlichen Abschnitt werden dann zunächst die Addition und anschließend die Subtraktion von Dezimalzahlen behandelt. Darauf folgt die Thematisierung der Multiplikation und Division, welche wiederum in vier Unterkapitel unterteilt wird – „Multiplikation von Dezimalzahlen mit natürlichen Zahlen", „Division von Dezimalzahlen durch natürliche Zahlen", „Multiplikation von Dezimalzahlen", „Division durch Dezimalzahlen" (In der genannten Reihenfolge). Zum Abschluss des Kapitels geht es dann noch um die Verbindung der vier Grundrechenarten.

Am Ende beider Abschnitte folgen jeweils eine Seite mit vermischten Aufgaben und eine Seite mit dem Namen „Wissensstraße". Meiner Meinung nach handelt es sich hier um einen gelungenen Abschluss, da dazu angeregt wird, das erworbene Wissen zu vernetzen. Außerdem sollen die Aufgaben der Wissensstraße dem Schüler beziehungsweise der Schülerin einen Eindruck davon verschaffen, ob alle nötigen Informationen aus dem Kapitel mitgenommen werden konnten.

4.1.2 Theorie

4.1.2.1 Einführung der Dezimalzahlen

Der erste Theorieteil zu den Dezimalzahlen in diesem Schulbuch beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Stellenwertsystem. Nachdem die Bedeutung von Zehntel, Hundertstel und Tausendstel anhand eines Beispiels (Körpertemperatur) erklärt wird, ist die jeweilige „Wertigkeit" in Bezug auf Einer angeführt. Nach der allgemeinen Definition wird noch erwähnt, dass es auch kleinere Teile, wie Zehntausendstel und andere gibt. Erst zum Abschluss der ersten Theorieseiten wird dann der Zusammenhang mit dem Stellenwertsystem hergestellt, welches schon aus der Volksschule bekannt ist.

Das Einstiegsbeispiel ist meinem Eindruck nach gut gewählt, da das Fiebermessen und die Körpertemperatur jedem Kind bekannt sein sollten. Es wird also gut auf die vorhandenen Vorstellungen zurückgegriffen, damit diese erweitert werden können.

Positiv anzumerken ist, dass auch die Sprechweise thematisiert wird (Siehe Abbildung 7). Was hierbei jedoch eindeutig fehlt, ist die Art und Weise, Dezimalzahlen wie Beispielsweise 0,45 oder 5,294 zu benennen, da diese das eigentliche Problem darstellen (es wird oft „Null-Komma-Fünfundvierzig" statt „Null-Komma-Vier-Fünf" gesagt). Mit den angeführten Beispielen 0,1, 0,01 und 0,001 wird also nicht unbedingt der Kern der Problematik getroffen.

Einheit	Schreibweise	Sprechweise
1 Zehntel	0,1	„null Komma eins“
1 Hundertstel	0,01	„null Komma null eins“
1 Tausendstel	0,001	„null Komma null null eins“

Abbildung 7: Neue Einheiten im Stellenwertsystem, [Reichel et. al., 2011, 96]

Was in diesem Teil, meiner Ansicht nach fehlt, ist eine graphische Veranschaulichung von Dezimalzahlen, wie zum Beispiel auf dem Zahlenstrahl. Dieser wird erst viel später, bei der Ordnung der Dezimalzahlen verwendet.

Bevor anschließend die ersten Aufgabenstellungen folgen, wird noch das Runden thematisiert und genauer erklärt.

4.1.2.2 Maßangaben in Dezimalschreibweise

In diesem Kapitel gibt es drei kurze Theorieteile zu Geld, Längen- und Massenmaßen. Es werden jeweils die gängigen Einheiten und deren Zusammenhang vorgestellt. Viele dieser Informationen sind oft schon in der Volksschule behandelt worden, was die sehr kurzen Erläuterungen beziehungsweise Erklärungen teilweise rechtfertigt. Ich denke trotzdem, dass eine ausführlichere Darstellung an dieser Stelle passender wäre. Zumindest ein kurzes Einführungsbeispiel zur Umformung, oder eine Beschreibung des Zusammenhanges mit dem Stellenwertsystem wäre an dieser Stelle, meiner Auffassung nach, dennoch sinnvoll gewesen.

Dieser Abschnitt hat also den Zweck, die Schüler und Schülerinnen an den Gebrauch der Dezimalzahlen zu gewöhnen, beziehungsweise zu zeigen, dass diese Aspekte bereits aus dem Alltag bekannt sind.

Im Kapitel, das die Geldeinheiten behandelt, wird als Sprechweise für 3,65€ entweder „3 Euro und 65 Cent“ und „3 Euro 65“ angeführt. Obwohl diese durchaus üblich sind und für Geldeinheiten auch nicht unbedingt als falsch bezeichnet werden können, sehe ich vor allem die zweite Version als problematisch an, da von dieser umgangssprachlichen Bezeichnung die Gefahr der Verallgemeinerung auf alle Dezimalzahlen ausgeht. Diese fördert beziehungsweise verstärkt bei Schülern und Schülerinnen die KT-Vorstellung[255], weswegen sie aus meiner Sicht nicht in einem Schulbuch erwähnt werden müssen. Vor allem, da die Schüler und Schülerinnen keinen Vorteil daraus ziehen können. In diesem Zusammenhang sollte, nach meinem Ermessen, also zumindest zusätzlich die richtige Sprechweise für Dezimalzahlen angeführt und erklärt werden.

[255] Thiemann, 2004b, 582

4.1.2.3 Ordnung der Dezimalzahlen

Hier wird erstmals in dem Kapitel der Zahlenstrahl angewendet, um zu zeigen wo verschiedene Dezimalzahlen darauf liegen und in welchem Verhältnis sie zu einander stehen. Vorerst wird erläutert, wie man Zehntel findet um danach die Vorgehensweise auf Hundertstel (Hierfür wird die Einheitsstrecke vergrößert) zu erweitern. Für Tausendstel und kleinere Teile wird erklärt, dass es sinnvoll ist, eine noch größere Einheitsstecke zu wählen, um die Übersicht zu bewahren.

Abschließend wird hier recht ausführlich der Größenvergleich anhand eines Beispiels erklärt. Positiv anzumerken ist, dass hierzu zwei Ansätze verwendet und in einen Zusammenhang gebracht werden. Die Veranschaulichung am Zahlenstrahl und das Ergänzen von Endnullen ergeben gemeinsam eine Vorgehensweise, die aus der Erklärung folgt. Meiner Einschätzung nach hätte man zusätzlich die Stellenwerte zur Unterstützung einbringen können, da auf diese erfreulicherweise schon zuvor viel Wert gelegt wurde. Das Erweitern mit Nullen kann, wie bereits erläutert, eine gewisse Problematik mit sich bringen. Padberg warnt vor genau diesem Vorgehen beim Größenvergleich[256] (Nullen anhängen, bis gleich viele Dezimalstellen vorhanden sind), da durch diese sehr einfache Methode bestimmte Fehlvorstellungen verschleiert beziehungsweise umgangen werden.

Im Großen und Ganzen ist es aber als sehr positiv zu betrachten, dass der Ordnung von Dezimalzahlen ein eigenes Unterkapitel gewidmet wird, da dies einen wichtigen, grundlegenden Aspekt darstellt, der einigen Fehlern beziehungsweise Fehlvorstellungen vorbeugen und das Verständnis für die Zahlenart schulen kann.

4.1.2.4 Multiplizieren von Dezimalzahlen mit natürlichen Zahlen

Nachdem die Addition und die Subtraktion behandelt wurden, wird in dem Abschnitt zunächst auf die Multiplikation von Dezimalzahlen mit natürlichen Zahlen eingegangen. Hierzu wird eine Alltagssituation geschildert; Ein Mädchen möchte drei Hefte zu einem Preis von je 1,18 € kaufen. Die drei Lösungswege, welche die die Rechenregel für die Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl plausibel machen sollen, sind folgende:

- den Europreis dreimal zusammen zu addieren,
- eine Multiplikation des Cent Preises (118) mit 3
- und die „Kurzfassung“ ($1{,}18 \cdot 3$).

Die Tatsache, dass hier drei verschiedene Ansätze angeführt sind macht die Erklärung sehr verständlich.

[256] Padberg, 2012, 185f

Positiv anzumerken ist außerdem, dass auf die Überschlagsrechnung zur Kontrolle hingewiesen wird. Gerade zu Beginn stellt diese ein wichtiges Werkzeug dar, da sie das Setzen des Kommas um einiges leichter macht, weil dann die Größenordnung des Ergebnisses bereits bekannt ist. Zusätzlich wird die Regel zur Kommasetzung (wenn auch nur kurz) über Stellenwerte erklärt, was in meinen Augen sehr sinnvoll ist (siehe Abbildung 8), da diese Schreibweise schon aus dem vorherigen Kapitel bekannt sein sollte.

> Die **Regel über das Setzen** des Kommas kann man auch so erklären:
> 0,926 = 926 t (Tausendstel)
> 926 t · 27 = 25 002 t = 25,002

Abbildung 8: Regel zum Kommasetzen anhand des Stellenwertes, [Reichel et. al., 2011, 115]

Auch die Multiplikation mit dekadischen Einheiten, welche auf die Kommaverschiebungsregel hinführt, wird extra in einer übersichtlichen Tabelle gezeigt.

4.1.2.5 Dividieren von Dezimalzahlen durch natürliche Zahlen

Beim Theorieteil zur Division von Dezimalzahlen durch natürliche Zahlen wird wieder auf ein Beispiel mit Geld zurückgegriffen. Diesmal werden fünf Tafeln Schokolade zu einem Preis von 6,25 € gekauft und der Preis für eine Tafel Schokolade soll gefunden werden. Dies geschieht abermals, indem zunächst der Betrag 625 Cent dividiert und das Ergebnis dann in Euro umgewandelt wird. Anschließend wird die allgemeine Regel formuliert und festgehalten, dass durch Null nicht dividiert werden kann. Wie bei der Multiplikation wird auch hier auf Überschlagsrechnungen hingewiesen.

Erst danach wird festgehalten, wo im Ergebnis das Komma zu setzen ist, indem der Zusammenhang mit den Stellenwerten erklärt wird (siehe Abbildung 9).

> **Ermitteln des höchsten Stellenwerts im Ergebnis**
> Stellenwerte können ähnlich wie bei Divisionen natürlicher Zahlen bestimmt werden, wie die folgende Division zeigt: 1 293,3 : 27 bedeutet, dass (1 T + 2 H + 9 Z + 3 E + 3 z) durch 27 geteilt wird. Stellenwertbestimmung: 27 ist nicht in 1 (Tausender), nicht in 12 (Hundertern), aber in 129 (Zehnern) enthalten. Als **höchste Stelle im Ergebnis** erhält man daher **Zehner**. Man markiert vor dem Rechnen den höchsten Stellenwert im Ergebnis durch Setzen von entsprechend vielen Punkten vor dem Komma. Wie viele Dezimalstellen nach dem Komma auftreten werden, weiß man zunächst noch nicht.

Rechnung:	**Probe:**
1 293,3 : 27 = 47,9	47,9 · 27
213	95 8
243	33 5 3
00	**129 3,3**

Abbildung 9: Ermitteln des Stellenwertes, [Reichel et. al., 2011, 118]

Ich halte diesen Ansatz zur Kommasetzung für sehr gelungen und gut erklärt. Auch die Probe, die es erlaubt mithilfe der Multiplikation das Ergebnis zu überprüfen, ist an dieser Stelle gut aufgehoben.

Zum Schluss wird die Division durch Zehnerpotenzen durch eine Rückführung auf die Multiplikation erklärt und die Kommaverschiebungsregel wird erweitert.

4.1.2.6 Multiplizieren von Dezimalzahlen

Der allgemeine Fall der Multiplikation von Dezimalzahlen wird abermals mithilfe eines Geld-Beispiels erklärt. 2,32 Kilogramm Äpfel werden gekauft, wobei ein Kilogramm Äpfel 1,85 € kostet. Der Gesamtpreis wird mithilfe einer Multiplikation berechnet (auch hier wird wieder eine Überschlagsrechnung verwendet).

Die Tatsache, dass hier kein anderer Kontext gewählt wurde ist für mich fragwürdig, da es zu Verwirrungen kommen könnte. Das Ergebnis der Multiplikation hat vier Nachkommastellen, um aber auf einen realistischen Europreis zu kommen, wurde das Endprodukt gerundet. Genau genommen kann hier auf drei Arten interpretiert werden:

1. Das Ergebnis ist 4,29 €, da es keine kleinere Einheit als Cent gibt (Dieses wird auch als Endergebnis präsentiert). Das widerspricht jedoch der Regel, die aufgrund des Beispiels aufgestellt wird; Das Ergebnis muss gleich viele Kommastellen haben, wie Multiplikand und Multiplikator zusammen.
2. Das Ergebnis ist 4,292 €, da die Endnull nach dem Komma weggelassen werden kann. Dies entspricht jedoch weder der angeführten Regel, noch der Tatsache, dass Cent die kleinste Geld-Einheit darstellt.
3. Das Ergebnis ist 4,2920 € welches im Kontext des Beispiels wegen der bereits genannten Gründe nur wenig Sinn macht.

Jede dieser Interpretationen ist natürlich auf ihre Weise (je nach Kontext) richtig und verständlich. Für ein Musterbeispiel hätte jedoch, meiner Meinung nach, ein eindeutigeres Beispiel gewählt werden können. Zumindest eine kurze Klarstellung, dass es keine Tausendstel oder Zehntausendstel Euro gibt und deswegen gerundet werden muss, hätte meiner Ansicht nach nicht fehlen dürfen. Außerdem sollte für eine Veranschaulichung der Regel zur Kommasetzung im Allgemeinen keine Aufgabe gewählt werden, in der eine Endnull im Ergebnis vorkommt, da dies sehr leicht zu Missverständnissen führen kann.

Nachdem die allgemeine Regel aufgrund des Musterbeispiels aufgestellt wurde, ist noch eine alternative Erklärung zur Kommasetzung angeführt. Diese halte ich auch deshalb für durchaus hilfreich, weil sie an bereits bekannte Aspekte aus einem vorangegangenen Kapitel anknüpft.

Die Multiplikation mit dezimalen Einheiten (0,1, 0,01, …) ist ein eigener kurzer Abschnitt und wird mithilfe der Division durch dekadische Einheiten erklärt und verglichen. Damit wird abermals ein wichtiger Zusammenhang von Multiplikation und Division hergestellt.

4.1.2.7 Dividieren von Dezimalzahlen

Das Musterbeispiel für die Division von Dezimalzahlen ist interessanterweise in einem anderen Kontext gewählt. Es geht um ein mehrstöckiges Haus, wobei das Obergeschoß 5,6 Meter über dem Boden liegt und die Stufen die nach oben führen jeweils 0,16 Meter hoch sind. Man soll nun herausfinden wie viele Stufen vorhanden sein müssen. Positiv kann hierbei hervorgehoben werden, dass an die Interpretationen des Messens erinnert wird, welche im Zusammenhang mit der Division schon bekannt sein sollte. Außerdem wird zusätzlich genau ausgeführt, warum beim Dividieren durch Dezimalzahlen die Interpretation des Teilens nicht in Frage kommt. Es wird also ein wichtiger Grundvorstellungsumbruch thematisiert, was in meinen Augen sehr wichtig ist.

Dass man bei einer Division den Dividenden und den Divisor mit derselben Zahl erweitern kann wird als bekannt vorausgesetzt (Dies wird auch im Kapitel „Dividieren natürlicher Zahlen“[257] erklärt), weswegen man die Division von Dezimalzahlen durch Multiplikation mit einer Zehnerpotenz, einfach auf die Division natürlicher Zahlen zurückführen kann.

Mehrere kleine Unterstützungen, wie beispielsweise eine Überschlagsrechnung, die Probe und der Hinweis, dass die Regel zur Erweiterung im angeführten Beispiel einer Umrechnung auf Zentimeter entspricht, tragen allgemein zum besseren Verständnis bei und sind damit sehr positive Aspekte dieses Theorieteiles. Auch die wichtige Tatsache, dass in manchen Fällen eine Null ergänzt werden muss wird kurz erwähnt.

Analog zur Multiplikation wird zum Schluss die Division durch dezimale Einheiten erklärt und auf die Multiplikation mit dekadischen Einheiten zurückgeführt.

4.1.3 Aufgabenstellungen

4.1.3.1 Dezimalzahlen (allgemeiner Teil)

Beim allgemeinen Teil zur Einführung der Dezimalzahlen wird anfangs sehr stark auf das Stellenwertsystem Wert gelegt, was oft sehr hilfreich sein kann[258]. Die Aufgaben zu Geldbeträgen bieten nur wenig Realitätsbezug, da nur eines davon in einem solchen Kontext aufscheint. Im Zusammenhang mit Längen- und Massenmaßen ist dieser Aspekt viel eher im Vordergrund. Es geht

[257] Reichel et. al., 2011, 59

[258] Mosandl/Sprenger, 2014, 18ff; bzw. Heckmann/Padberg, 2007, 201f

hier offenbar in erster Linie darum zu verstehen, wie die verschiedenen Einheiten umgerechnet werden und darum, einen Zusammenhang mit dem Stellenwertsystem zu entdecken.

Die Aufgaben zur Ordnung von Dezimalzahlen sind äußerst vielseitig und schulen das Verständnis der Grundlagen. Vor allem Friedhelm Padberg betont in einem Artikel[259], dass dieser Aspekt einen besonderen Stellenwert bei der erstmaligen Behandlung darstellt.

Besonders den letzten Abschnitt, bei dem die vorher genannten Teilgebiete vermischt werden, halte ich für sehr wichtig und gut gelungen. An dieser Stelle wird das erworbene Wissen verbunden und in einen Zusammenhang gebracht.

Dieses Kapitel gibt der Lehrkraft also eine gute Möglichkeit, um die Grundlagen der Dezimalzahlen zu vermitteln, eventuell sogar Fehlvorstellungen schon frühzeitig zu entlarven und bereits vor den eigentlichen Rechenaufgaben gegenzusteuern.

4.1.3.2 Multiplizieren von Dezimalzahlen mit natürlichen Zahlen

Im ersten Teil zum Multiplizieren von Dezimalzahlen mit einer natürlichen Zahl finden sich einige Aufgabenstellungen, bei denen die Anwendung der gelernten Vorgehensweise im Vordergrund steht. Dabei ist auch auf einige Schwierigkeiten geachtet worden, welche immer wieder auftreten. Dazu gehören unter anderem Aufgaben, die mehrere Nullen enthalten, welche die KT-Vorstellung provozieren und die Kommasetzung schulen.

In Bezug auf Geld, Massen und Längen finden sich auch einige Textaufgaben, welche die Rechenoperation in einen Zusammenhang mit der Realität stellen.

4.1.3.3 Dividieren von Dezimalzahlen durch natürliche Zahlen

In diesem Abschnitt gibt es eine große Anzahl von Beispielen, welche die Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl schulen sollen. Hier fällt auf, dass bei den meisten Aufgaben, vor allem auf die richtige Setzung des Kommas viel Wert gelegt wird, da der Rechenaufwand zu Beginn eher geringgehalten wird. Ich finde diesen Ansatz sehr gut, da es sich dabei in Bezug auf die Division um den wichtigsten, neuartigen Aspekt handelt, der wohl am meisten geübt werden muss. Positiv hervorzuheben ist auch die Erwähnung der Probe in vielen Angaben, da dies eine selbstständige Überprüfung ermöglicht und gleichzeitig die Multiplikation weiter schult. Es finden sich außerdem auch Divisionen zweier natürlicher Zahlen, deren Quotient eine Dezimalzahl ist.

[259] Padberg, 1991b, 50ff

Im Anschluss folgen auch einige schwierigere Aufgaben mit immer mehr Rechenaufwand und anspruchsvolleren Teildivisionen. Textaufgaben sind ebenfalls vorhanden, wenngleich auch eher spärlich.

4.1.3.4 Multiplizieren mit Dezimalzahlen

Auch hier wird zu Beginn auf Aufgaben mit wenig Rechenaufwand gesetzt, um die Kommasetzung, den Umgang mit Nullen und den Einsatz von dekadischen Einheiten zu schulen. Die Aufgaben bieten einige Möglichkeiten, Fehlvorstellungen zu erkennen (darunter beispielsweise der fehlerhafte Transfer von der Addition natürlicher Zahlen in Bezug auf die Kommasetzung oder die Vorstellung, die Multiplikation vergrößere stets). Erst danach finden sich ein paar Aufgabenstellungen, welche mehrere Teilrechnungen erfordern und einige Textbeispiele.

4.1.3.5 Dividieren von Dezimalzahlen

In diesem Abschnitt setzt sich ebenfalls das beobachtete Schema fort, da von vergleichsweise wenig zu deutlich mehr Rechenaufwand vorgegangen wird. Dabei sind zu Beginn vor allem der Einsatz und das Verständnis von dekadischen Einheiten gefragt. Des Weiteren fällt abermals positiv auf, dass sowohl eine Überschlagsrechnung, als auch die Probe verlangt werden. Es werden außerdem einige Textaufgaben bereitgestellt.

4.1.3.6 Verbindung der vier Grundrechenarten

Sehr wichtig sind meiner Auffassung nach die abschließenden Aufgaben, welche alle im Kapitel vorkommenden Aspekte verbinden sollen. Dabei finden sich vier Seiten (inklusive „vermischten Aufgaben“ und „Wissensstraße“) mit vielseitigen Aufgabenstellungen, die eine ausführliche Wiederholung und Vernetzung des gelernten Stoffes erlauben.

Auf das gesamte Kapitel blickend denke ich, dass Anhand der großen Zahl von Aufgabenstellungen, die hier im Zusammenhang mit dem Umgang und Rechnen mit Dezimalzahlen geboten sind, eine gute Basis für den Unterricht gelegt wird.

4.2 Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1

Lewisch, Ingrid/ Zwicker, Thomas/ Mürwald-Scheifinger, Elisabeth/ Breunig, Eva/ Riehs Barbara. (2015). *Mathematik, Verstehen + Üben + Anwenden*, Band 1 (5. Auflage). Linz: Veritas Verlag.

4.2.1 Aufbau

In diesem Schulbuch wird ein interessanter Aufbau gewählt, da im einführenden Kapitel zu den Dezimalzahlen gleichzeitig auch Brüche behandelt werden (wenn auch „nur“ Brüche mit Zehnerpotenzen im Nenner). Bei Heckmann und Padberg wird diese Vorgehensweise als sehr positiv erwähnt, da den Schülern und Schülerinnen von Beginn an klargemacht werden soll, dass Dezimalzahlen und Brüche nur verschiedene Darstellungsformen für rationale Zahlen sind[260].

In diesem Kapitel werden also gewisse Zusammenhänge erklärt und es werden Zehntel, Hundertstel und Tausendstel behandelt. Weitere einführende Themen sind das Stellenwertsystem, Runden von Dezimalzahlen, die Kommaverschiebung (also Multiplikation und Division mit dekadischen Einheiten) und Längenmaße beziehungsweise Massenmaße. Diese folgen jeweils dem gleichen Schema, wobei die Grundlagen in einem kurzen Theorieteil erklärt und anhand eines Musterbeispiels vorgeführt werden. An einigen Stellen finden sich Boxen, in denen die wichtigsten Informationen zusammengefasst werden.

Anschließend wird im folgenden Abschnitt das Rechnen mit Dezimalzahlen behandelt. Vorerst Addition und Subtraktion und dann die Multiplikation. Dabei wird zu Beginn nur zwischen drei Fällen unterschieden: „Ein Faktor ist eine Dezimalzahl“, „Beide Faktoren sind Dezimalzahlen“ und „Ein Faktor ist kleiner als Eins“. Es fällt auf, dass an dieser Stelle einige Erklärungen ausgespart wurden, was zu einem späteren Zeitpunkt noch besprochen wird.

Bei der letzten Rechenoperation wird zwischen natürlicher Zahl und Dezimalzahl als Divisor unterschieden. Auch hier fallen die Erklärungen vergleichsweise kurz aus. Zum Abschluss des Kapitels geht es um die Verbindung der vier behandelten Rechenoperationen. Das Rechnen mit Brüchen wird im Allgemeinen erst später separat behandelt.

[260] Heckmann, 2005, 85f; Padberg, 2012, 245f

4.2.2 Theorie

Vorweg ist zu bemerken, dass in diesem Werk sehr viel mit sogenannten Einführungsbeispielen gearbeitet wird. Die Idee ist meiner Meinung nach gut, allerdings denke ich, dass an einigen Stellen die theoretischen Erklärungen, also mathematische Hintergründe, dadurch zu kurz kommen. Es lässt sich natürlich argumentieren, dass der Inhalt möglichst anschaulich und kinderfreundlich gestaltet werden muss. Trotzdem habe ich den Eindruck, dass (vor allem bei den Rechenoperationen) etwas mehr fachliche Inputs nicht geschadet hätten. Positiv ist anzumerken, dass bei den meisten Theorieabschnitten ein Überblick angeführt ist, bei dem die wichtigsten Informationen nochmals in einem Kästchen zusammenfassend wiederholt werden.

4.2.2.1 Einführung der Dezimalzahlen und Brüche

Die Einführung in das Thema beginnt mit einem Blick auf den Alltag und auf Situationen, in denen die natürlichen Zahlen an ihre Grenzen stoßen.

Gleich im ersten Absatz des Kapitels wird das Komma wie folgt charakterisiert: „Zur Trennung der Ganzen und des Bruchteils wird ein Komma (= ein Beistrich) gesetzt“[261]. Auch wenn diese Aussage natürlich nicht falsch ist, so erachte ich sie doch als äußerst problematisch, da dem so genannten Komma-Trennt-Fehler, der bereits in vorangegangenen Kapiteln Erwähnung fand, in der Literatur eine große Bedeutung zugeschrieben wird. Die in diesem Schulbuch benutzte Wortwahl verstärkt meiner Einschätzung nach diese Fehlvorstellung und sollte deswegen nicht benutzt werden. Vor allem auch, weil die Schüler und Schülerinnen die Dezimalzahlen und die zugehörigen Zeichen zu diesem Zeitpunkt zum ersten Mal erlernen und die Gefahr besteht, dass die Formulierung so in den Köpfen bleibt und sich festsetzt.

Als Einführungsbeispiel soll eine 1dm lange Strecke in 10 gleich große Teile geteilt werden. Als Schreibweise für die Bruchteile wird sowohl 0,1 als auch der entsprechende Bruch angeführt. Dasselbe gilt analog auch für 0,2, 0,3 und so weiter. Als Sprechweise wird unter anderem auch „0 Komma 3 Zehntel“ angegeben, was ich äußerst problematisch finde, da mit diesem Worten auch ein Hundertstel gemeint sein könnte.

Was andererseits in meinen Augen sehr positiv auffällt, ist der Zahlenstrahl mit dessen Hilfe sowohl Brüche, als auch Dezimalzahlen in derselben Abbildung dargestellt werden. Das sollte für das Verständnis des Zusammenhangs der beiden Darstellungen von rationalen Zahlen sehr hilfreich sein.

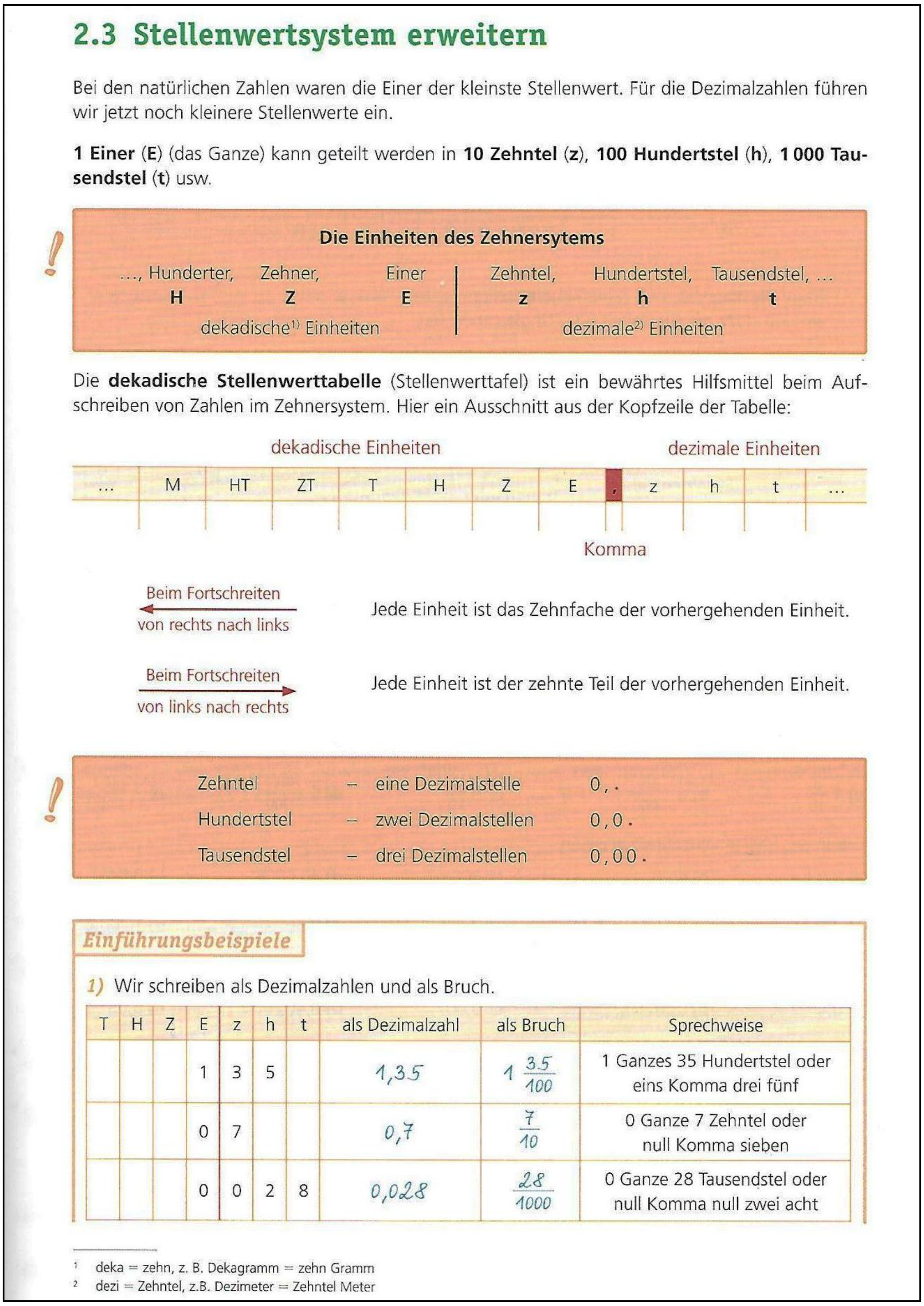
[261] Lewisch et. al., 2015, 126

Auf eine analoge Art zu den Zehntel werden dann auch die Hundertstel und Tausendstel eingeführt. Kleinere Teilstücke werden nicht erwähnt. Auch diese Erklärungen werden mithilfe eines Zahlenstrahls visuell untermauert.

4.2.2.2 Erweiterung des Stellenwertsystems

Wie schon erwähnt ist das Stellenwertsystem für ein ausgeprägtes Verständnis von Dezimalzahlen äußerst wichtig, weswegen ich es für sehr sinnvoll erachte, dem Thema ein eigenes Unterkapitel zu widmen.

In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt der Seiten zu sehen, auf denen die Erweiterung des Stellenwertsystems erklärt wird.



2.3 Stellenwertsystem erweitern

Bei den natürlichen Zahlen waren die Einer der kleinste Stellenwert. Für die Dezimalzahlen führen wir jetzt noch kleinere Stellenwerte ein.

1 Einer (**E**) (das Ganze) kann geteilt werden in **10 Zehntel** (**z**), **100 Hundertstel** (**h**), **1 000 Tausendstel** (**t**) usw.

Die Einheiten des Zehnersytems

..., Hunderter,	Zehner,	Einer	Zehntel,	Hundertstel,	Tausendstel, ...
H	**Z**	**E**	**z**	**h**	**t**
dekadische[1] Einheiten			dezimale[2] Einheiten		

Die **dekadische Stellenwerttabelle** (Stellenwerttafel) ist ein bewährtes Hilfsmittel beim Aufschreiben von Zahlen im Zehnersystem. Hier ein Ausschnitt aus der Kopfzeile der Tabelle:

dekadische Einheiten | dezimale Einheiten

...	M	HT	ZT	T	H	Z	E	,	z	h	t	...

Komma

Beim Fortschreiten von rechts nach links: Jede Einheit ist das Zehnfache der vorhergehenden Einheit.

Beim Fortschreiten von links nach rechts: Jede Einheit ist der zehnte Teil der vorhergehenden Einheit.

Zehntel	–	eine Dezimalstelle	0,.
Hundertstel	–	zwei Dezimalstellen	0,0.
Tausendstel	–	drei Dezimalstellen	0,00.

Einführungsbeispiele

1) Wir schreiben als Dezimalzahlen und als Bruch.

T	H	Z	E	z	h	t	als Dezimalzahl	als Bruch	Sprechweise
			1	3	5		1,35	$1\frac{35}{100}$	1 Ganzes 35 Hundertstel oder eins Komma drei fünf
			0	7			0,7	$\frac{7}{10}$	0 Ganze 7 Zehntel oder null Komma sieben
			0	0	2	8	0,028	$\frac{28}{1000}$	0 Ganze 28 Tausendstel oder null Komma null zwei acht

1 deka = zehn, z. B. Dekagramm = zehn Gramm
2 dezi = Zehntel, z.B. Dezimeter = Zehntel Meter

Abbildung 10: Erweiterung des Stellenwertsystems, [Lewisch et. al., 2015, 131]

Ich möchte abermals darauf hinweisen wie sehr hier suggeriert wird, dass es sich bei dem Kommazeichen um eine strikte Trennlinie oder Grenze handelt. In Anbetracht der bereits erwähnten Komma-Trennt-Vorstellung muss diese Darstellungen in Frage gestellt werden, auch wenn hier nicht unbedingt falsche Inhalte geschildert werden.

Positiv ist wiederum anzumerken, dass weiter unten die richtige Sprechweise erklärt wird. Der Größenvergleich von Dezimalzahlen wird ebenfalls angesprochen. Dies geschieht mithilfe einer

Aufgabe, bei der über acht Dezimalzahlen (darunter 0,7, 0,70, 0,07, 0,007, 0,700 und drei Brüche) eine Aussage über deren Gleichheit getroffen werden soll. Die Lösung der Aufgabe wird mithilfe einer Stellenwerttafel gefunden, in welche die Zahlen eingetragen sind.

Im darauffolgenden Kapitel „Dezimalzahlen darstellen und vergleichen“ wird dann auf den Größenvergleich eingegangen. Dazu werden die angeführten Zahlen auf einem Zahlenstrahl eingetragen, um die Ordnung ablesen zu können.

Obwohl wichtigste Aspekte in den Theorieteilen angeführt sind, erscheinen mir die Erklärungen in den Kapiteln recht vage. Nähere Ausführungen, warum beispielsweise 0,7 gleich 0,70 ist, oder wie begründet werden kann, dass 2,25 kleiner als 2,5 ist, wären meiner Ansicht nach durchaus angebracht gewesen. Gerade in Anbetracht der Tatsache, dass der Größenvergleich von Dezimalzahlen eine wichtige Grundlage darstellt.

4.2.2.3 „Kommaverschieben“ bei Dezimalzahlen

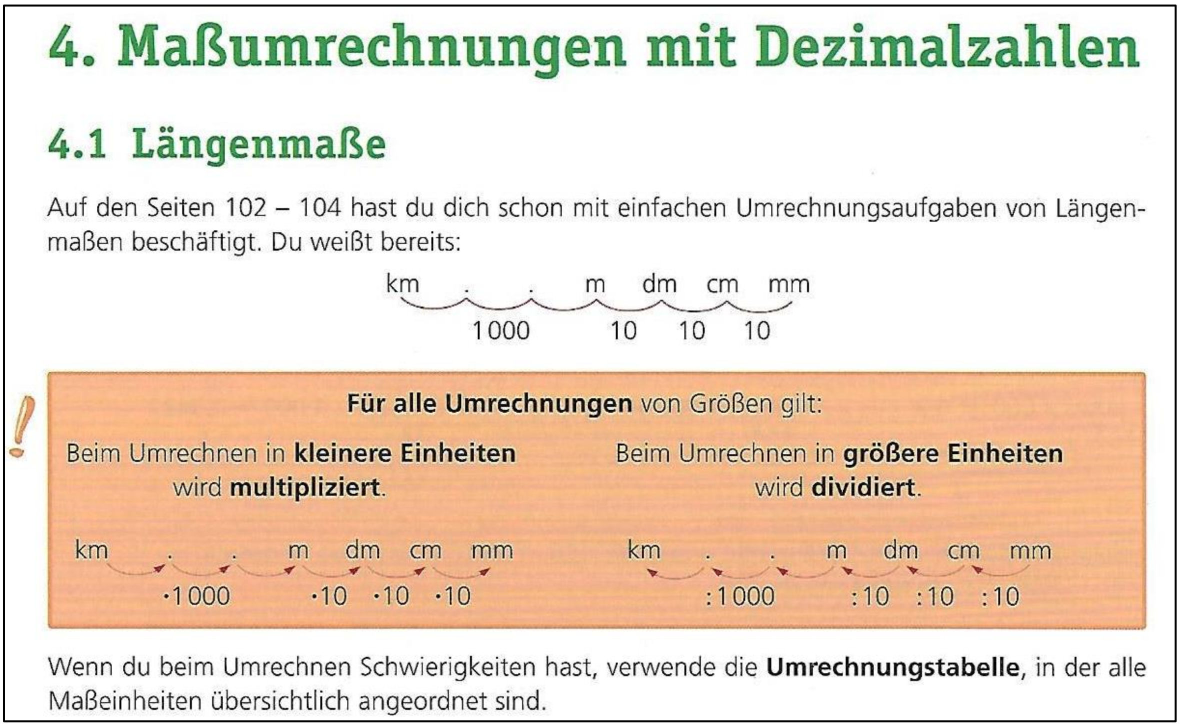
Hierbei handelt es sich um die ersten Rechnungen mit Dezimalzahlen. Die Multiplikation und Division mit dekadischen Einheiten ist für die sogenannte Kommaverschiebung verantwortlich. Auch wenn diese Thematik in anderen Büchern[262] erst bei den Rechenoperationen behandelt wird, kann es dennoch sinnvoll sein, diese einfache aber hilfreiche Art der Manipulation von Dezimalzahlen schon zu einem früheren Zeitpunkt zu behandeln. Die erste Schwierigkeit, die ich hierbei sehe, ist, dass den Schülern und Schülerinnen zu diesem Zeitpunkt noch keinerlei Regel für das Multiplizieren oder Dividieren von Dezimalzahlen bekannt ist und diese auch in dem Abschnitt mit keinem Wort erwähnt werden. Das Multiplizieren mit einer Zehnerpotenz wird hier also als „Kommaverschiebung“ nach rechts definiert, die Division durch eine Zehnerpotenz als „Kommaverschiebung“ nach links. Als Begründung wird eine Analogie zu den natürlichen Zahlen verwendet, die eventuell für einzelne Schüler oder Schülerinnen nicht vollkommen klar sein könnte. Es wäre also wichtig, nochmals auf die Regel zurückzukommen, sobald die allgemeinen Regeln für die Multiplikation und Division von Dezimalzahlen eingeführt sind.

Außerdem fehlt meiner Meinung nach die Erklärung des Sonderfalles, bei dem eine Null ergänzt wird, wie zum Beispiel bei der Rechnung $0{,}03 : 10$. Für jemanden, der Erfahrung im Umgang mit Dezimalzahlen hat, ist klar, dass eine Null ergänzt werden muss und das Ergebnis 0,003 ist. Für einen Schüler oder eine Schülerin der ersten Klasse, der beziehungsweise die zum ersten Mal mit Dezimalzahlen in Berührung kommt, kann dieser Fall leicht für Probleme sorgen, weswegen ich es gut fände, ihn zu erwähnen.

[262] Siehe beispielsweise Reichel et. al., 2011

4.2.2.4 Längenmaße

Die folgende Abbildung zeigt, dass für die Umrechnung von Längenmaßen nur auf ein vorangegangenes Kapitel hingewiesen wird. Ein Zusammenhang zur soeben behandelten Kommaverschiebungsregel wird nicht hergestellt.



4. Maßumrechnungen mit Dezimalzahlen

4.1 Längenmaße

Auf den Seiten 102 – 104 hast du dich schon mit einfachen Umrechnungsaufgaben von Längenmaßen beschäftigt. Du weißt bereits:

km . . m dm cm mm
1 000 10 10 10

Für alle Umrechnungen von Größen gilt:

Beim Umrechnen in **kleinere Einheiten** wird **multipliziert**.

km . . m dm cm mm
·1 000 ·10 ·10 ·10

Beim Umrechnen in **größere Einheiten** wird **dividiert**.

km . . m dm cm mm
:1 000 :10 :10 :10

Wenn du beim Umrechnen Schwierigkeiten hast, verwende die **Umrechnungstabelle**, in der alle Maßeinheiten übersichtlich angeordnet sind.

Abbildung 11: Anfang des Kapitels "Umrechnung von Längenmaßen mit Dezimalzahlen", [Lewisch et. al., 2015, 136]

Ich finde es äußerst bedenklich, dass hier sehr wenig Wert auf Verständnis gelegt wird und anstatt dessen rein „mechanisches“ Umrechnen in den Mittelpunkt gestellt wird. Nichts Anderes wird in meinen Augen nämlich erreicht, wenn die Regeln in dieser Art formuliert werden. Die Umrechnung zwischen verschiedenen Längenmaßen könnte sehr gut verwendet werden, um den Zusammenhang zwischen den Stellenwerten nochmals zu erklären und zu festigen (zum Beispiel „ein Zentimeter entspricht einem Hundertstel eines Meters“ oder Ähnliches). Ich finde es sehr schade, dass dieses Potenzial nicht genutzt wird und dass es in diesem Kapitel offenbar um das reine Anwenden einer Regel geht.

4.2.2.5 Massenmaße

Dieses Unterkapitel ist sehr ähnlich aufgebaut wie das vorherige. Positiv anzumerken ist, dass hier der direkte Zusammenhang zwischen Tonnen, Kilogramm, Dekagramm und Gramm erklärt wird (als 1t=1000kg, 1kg=100 dag und 1dag=10g). Damit ist zumindest ein wenig mehr Einblick in die Hintergründe der Umformungen gegeben, jedoch ist hier für meine Begriffe trotzdem noch Verbesserungspotential vorhanden. Es könnte beispielsweise, wie bereits erwähnt, der Zusammenhang mit dem Stellenwertsystem betont werden.

4.2.2.6 Runden von Dezimalzahlen

Als letztes Kapitel vor den Rechenoperationen, findet sich das Thema „Runden von Dezimalzahlen". Es wird ein anschauliches Beispiel angeführt und genau erklärt, wie man auf bestimmte Stellenwerte runden kann. In Voraussicht auf die folgenden Kapitel finde ich es sehr sinnvoll, diesem Thema extra zwei Seiten zu widmen. Der Abschnitt ist gut gestaltet und beinhaltet auch einige relevante Beispiele.

4.2.2.7 Multiplizieren mit Dezimalen

Nachdem die Addition und Subtraktion behandelt wurde, geht es in dem Buch mit der Multiplikation von Dezimalzahlen weiter. Diese wird anhand von drei Musterbeispielen und eines Merksatzes eingeführt. Im ersten Beispiel wird der Fall „Ein Faktor ist eine Dezimalzahl" behandelt, im zweiten der Fall „Beide Faktoren sind Dezimalzahlen" und im dritten der Fall „Ein Faktor ist kleiner als eins". In allen drei Beispielen geht es um den Einkauf von verschiedenen Mengen an Broten. Dabei bleibt der Preis pro Brot immer gleich und es verändert sich lediglich die gekaufte Menge[263]. Außerdem wird allen Beispielen vorerst die Rechnung mit Cent statt Euro durchgeführt, um dann auf die Dezimalform (in Euro) zurückzukommen.

Positiv anzumerken ist, dass hier eine Überschlagsrechnung verwendet wird, wenn auch kommentarlos. Was eindeutig fehlt, ist eine genauere Beschreibung wie multipliziert werden soll. Ein einfacher Hinweis, dass das Komma bei der Rechnung vernachlässigt beziehungsweise analog zu den natürlichen Zahlen vorgegangen werden kann ist in meinen Augen das Mindeste. Gar nichts dazu anzumerken ist jedoch suboptimal. Zum Schluss des Theorieteiles wird, ohne näher auf die Vorgehensweise einzugehen, von den Beispielen direkt auf eine allgemein gültige Regel geschlossen: „Beim Multiplizieren mit Dezimalzahlen erhält das Ergebnis so viele Dezimalstellen wie beide Faktoren zusammen haben"[264].

Was außerdem abgeht, ist eine Erklärung zur Multiplikation mit dezimalen Einheiten, also mit 0,1, 0,01 und so weiter. Diese hätte sehr gut in das letzte Segment des Theorieteils gepasst, wo ohnehin die Multiplikation mit Zahlen kleiner als Eins vorgestellt wurde, welche durchaus wichtig und gut in den Theorieblock passt. Abgesehen davon hätte außerdem die bei den Grundlagen besprochene Kommaverschiebung erweitert und ein einfacher Zusammenhang mit der Division hergestellt werden können.

[263] Die Mengeneinheit für die Brote ist hier erstaunlicherweise in Metern angegeben. Man kann zwar mehrere Brotscheiben aneinanderreihen und damit ein Längenmaß erreichen, jedoch halte ich die Sinnhaftigkeit dieser Angabe für fragwürdig.
[264] Lewisch et. al., 2015, 149

4.2.2.8 Dividieren von Dezimalzahlen

Dieser Abschnitt wird in zwei Teile gegliedert, wobei vorerst der Fall „Dezimalzahl dividiert durch natürliche Zahl“ behandelt wird. Allgemein fällt auf, dass in diesem Kapitel die Erklärungen verhältnismäßig kurz ausfallen.

Bei der Division wird vorerst, wenn auch nur sehr knapp[265], an die Division der natürlichen Zahlen erinnert und auf die Stellenwertbestimmung aufmerksam gemacht, was ich für gut erachte, da die Stellenwerte eine sehr wichtige Rolle bei der Kommasetzung spielen.

Im Einführungsbeispiel (47,52:3) wird vorerst überschlagsmäßig gerechnet und dann anhand zweier Vorgehensweisen veranschaulicht, wie die Aufgabe gelöst werden soll. Einerseits wird eine ausführliche Durchführung des Divisionsalgorithmus dargestellt, andererseits die verkürzte Schreibweise. Erstaunlicherweise findet sich kein Kommentar zur Setzung des Kommas im Ergebnis.

Der Fall „Dividend ist kleiner als Divisor“ wird in einem weiteren Einführungsbeispiel separat behandelt. Dieser Abschnitt sollte also gegen die entsprechende Fehlvorstellung Wirkung zeigen. Hier wird recht gut veranschaulicht, dass es natürlich auch möglich ist beim Ergebnis eine Zahl zu erhalten, die kleiner als Null ist. Dabei wird auch eindeutig erklärt wo das Komma zu setzen ist, indem klargemacht wird, dass der erste Stellenwert des Quotienten Zehntel sein müssen. Auch eine Alternative wird erklärt, bei der nach der Überschreitung des Kommas im Dividenden das Komma im Quotienten gesetzt wird.

Anschließend wird der allgemeine Fall behandelt, wobei die Schüler und Schülerinnen schon wissen sollten, dass bei einer Division erweitert (also das Komma bei Dividend und Divisor verschoben) werden darf. Hier wird auf eines der vorangegangenen Kapitel verwiesen[266]. Somit wird der allgemeine Fall einfach auf den vorherigen zurückgeführt, indem der Divisor ganzzahlig gemacht wird.

Was in diesem Kapitel meines Erachtens nach fehlt, ist eine Bemerkung über die Interpretation des Dividierens. Im Abschnitt, der die Division der natürlichen Zahlen behandelt[267] wird auf die Auslegung als „Teilen“ und „Messen“ recht ausführlich eingegangen. Die Tatsache, dass bei der Division von Dezimalen nur noch das „Messen“ sinnvoll ist wird nicht erwähnt.

Auffallend ist außerdem, dass bei der Division nur eines von drei Einführungsbeispielen mit einem Sachkontext verbunden ist. Abgesehen davon, dass ein gewisser Realitätsbezug für viele Schülern und Schülerinnen vermutlich hilfreich ist, könnte damit die Umrechnung im allgemeinen Fall gut begründet

---

[265] Die Bestimmung des Stellenwertes wird im Kapitel „Rechnen mit natürlichen Zahlen“/“Schriftlich dividieren“ (4.3) etwas ausführlicher erklärt.
[266] Es wir auf das Kapitel 4.2. „Geschickt und schnell im Kopf dividieren“ verwiesen: Lewisch et. al., 2015, 54f
[267] Lewisch et. al., 2015, 49

und veranschaulicht werden. Anstatt also beispielsweise 5,67 Meter durch 0,8 Meter zu dividieren, könnte einfacher 56,7 Dezimeter durch 8 Dezimeter oder 567 Zentimeter durch 80 Zentimeter gerechnet werden. Das Ergebnis muss immer eine Zahl (keine Längeneinheit) sein, was wiederum mit einer Überlegung zu den Interpretationsmöglichkeiten begründet werden kann. Das Verständnis der Division von Dezimalzahlen könnte also hier mit nur wenig Aufwand durchaus vertieft werden. Des Weiteren wird, wie schon bei der Multiplikation, die Division durch dezimale Einheiten nicht erwähnt.

4.2.3 Aufgabenstellungen

4.2.3.1 Dezimalzahlen (allgemeiner Teil)

Die Aufgaben zu Beginn des Kapitels scheinen sehr gut gewählt und sinnvoll, da vorerst hauptsächlich auf das Grundverständnis, den Zusammenhang mit Brüchen und das Stellenwertsystem Wert gelegt wird. Dies kann zu einer guten Grundlage für die restlichen Abschnitte beitragen. Es sind außerdem einige Aufgaben vorhanden, in denen Nullen an diversen Stellen vorkommen (welche laut Literatur eine große Fehlerquelle darstellen), was das Üben dieses verhältnismäßig schwierigen Aspekts gewährleistet. Auch mit einem Zahlenstrahl wird bei drei Aufgaben gearbeitet, was die anschauliche Vorstellung fördern sollte.

Negativ fällt auf, dass auf den ersten Seiten sehr wenige Aufgaben mit Realitätsbezug oder Textbeispiele zu finden sind, obwohl diese nach meinem Ermessen eine wichtige Rolle spielen, da den Schülern und Schülerinnen klargemacht werden soll, inwiefern die Thematik in ihrem täglichen Leben Relevanz hat und dass sie schon einiges über Dezimalzahlen wissen. Außerdem wirkt sich eine bessere Vorstellung sicherlich positiv auf das Verständnis aus. Nur in Bezug auf Längen- und Massenmaße sind solche Aufgaben zu finden, wenn auch nur verhältnismäßig wenige.

4.2.3.2 Rechnen mit Dezimalzahlen (Multiplizieren und Dividieren)

Die Aufgaben zum Multiplizieren von Dezimalzahlen sind, in Anbetracht häufiger Schülerfehler, recht gut gewählt. Die Fehlvorstellung, dass die Multiplikation stets vergrößere wird bei einer Aufgabe direkt angesprochen und erklärt. Es findet sich außerdem eine Vielzahl an Textaufgaben, zu verschiedenen Themengebieten, wo besonders Längen, Massen und Geldbeträge eine wichtige Rolle spielen.

Aus meiner Sicht könnten dem Kapitel Aufgabenstellungen fehlen, welche die KT-Vorstellung provozieren. Dabei handelt es sich um vergleichsweise einfache Rechnungen, die aber bei falscher Regelkenntnis zu Fehlern führen. Ein Beispiel hierfür wäre $2{,}5 \cdot 3$, da der Rechenaufwand sehr gering ist und die Fehlvorstellung zu einem eindeutig falschen Ergebnis (6,15) führt. Aufgaben dieser Art würden sich auch sehr gut als Einführung anbieten. Die ersten, im Buch gewählten Aufgabenstellungen zur Multiplikation sind deutlich schwieriger (zum Beispiel $346{,}7 \cdot 8$ oder $143{,}78 \cdot 8$).

Bei den Aufgaben zur Division ist der Einstieg meiner Meinung nach etwas besser gelungen, da die Rechnungen zu Beginn deutlich einfacher sind. Aufgaben, welche die KT-Vorstellung verstärkt hervorrufen sind jedoch immer noch nicht zu finden (zum Beispiel $14{,}21:7$). Auch andere bekannte Fehlvorstellungen werden nicht gezielt angesprochen, wie das bei der Multiplikation der Fall war.

Was sowohl bei der Multiplikation, als auch bei der Division sehr positiv auffällt ist, dass großer Wert auf die Überschlagsrechnung gelegt wird. Warum das wichtig ist wurde bereits in vorherigen Kapiteln erläutert.

Im letzten Teil, der sich mit der Verbindung der vier Rechenoperationen mit Dezimalzahlen widmet, findet sich dann doch noch eine größere Zahl an Textaufgaben, die recht vielseitig sind und das Gelernte nochmals zusammenfassen sollen.

4.3 Mathematik verstehen 1

Salzger, Bernhard/ Bachmann, Judith/ Germ, Andrea/ Riedler, Barbara/ Singer, Klaudia/ Ulovec, Andreas. (2014). Mathematik verstehen 1 (1. Auflage). Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

4.3.1 Aufbau

Im Schulbuch „Mathematik verstehen“ wird das Thema Dezimalzahlen sorgfältig aufgebaut. Begonnen wird mit einem sehr allgemeinen Teil, der aufzeigt, woher diese Art von Zahlen bereits bekannt sein könnte und wie sie zusammengesetzt sind. Positiv anzumerken ist hierbei, dass zu Beginn jedes Kapitels eine kurze Aufzählung angeführt ist, die angibt, was in diesem Kapitel gelernt werden soll. Somit wissen die Lernenden schon zu Beginn worauf der Fokus gerichtet sein soll.

Anschließend folgt (wie in anderen Büchern auch) der Größenvergleich und ein Blick auf das Runden von Dezimalzahlen. Ist diese Einführung abgeschlossen werden die Rechenoperationen behandelt, vorerst die Addition und Subtraktion (gemeinsam in einem Kapitel), anschließend die Multiplikation und zum Schluss die Division, wobei die beiden letzten Themen nochmals in zwei Fälle unterteilt sind (siehe unten).

Ein Detail, das bei genauerer Betrachtung des Werks auffällt, möchte ich an dieser Stelle hervorheben. Es ist hier durchwegs von „Zahlen in Dezimaldarstellung“ anstatt von „Dezimalzahlen“ die Rede. Auf den ersten Blick mag dieser Umstand bedeutungslos erscheinen. Ich denke jedoch, dass die Formulierung sehr wohl bewusst gewählt wurde. Man will, meines Erachtens nach, verdeutlichen, dass es sich bei Brüchen und Dezimalzahlen um die gleiche Art von Zahlen handelt, die nur in verschiedenen Darstellungsformen geschrieben werden. Dafür spricht auch, dass der Name des Kapitels, in dem Brüche behandelt werden „Zahlen in Bruchdarstellung“ lautet. In meinen Augen ist dieser Ansatz sehr sinnvoll und gut gewählt.

Auffallend ist, dass Längen-, Massen-, Temperatur- und Zeitmaße erst anschließend in einem separaten Kapitel behandelt werden. Eine Entscheidung der Autoren, die kritisch hinterfragt werden kann, da Einheiten eine gute Möglichkeit bieten, gewisse Rechenregeln zu erklären und vor allem das Stellenwertsystem zu untermauern. Inwiefern die diversen Ausführungen ohne diesen Aspekt auskommen, wird im nächsten Abschnitt besprochen. Meiner Ansicht nach wurde in diesem Zusammenhang jedoch nicht richtig entschieden.

Zum Abschluss der beiden Kapitel finden sich jeweils zwei Seiten, die zum Thema passende Informationen und Anmerkungen beinhalten und zwei Seiten mit Aufgaben, die eine Wiederholung beziehungsweise Zusammenfassung des Gelernten darstellen sollen. Die Themenseiten, welche als „Denkwürdiges" (Aufgaben) und „Merkwürdiges" (Informationen) bezeichnet werden, sind interessant und informativ entworfen. Nach meinem Ermessen eine gelungene Abwechslung für die Schüler und Schülerinnen, da der Realitätsbezug auch das Verständnis fördern kann.

Die Abschlussbeispiele stellen eine gute Möglichkeit dar, zu überprüfen, ob alle wichtigen Aspekte aus dem Kapitel verstanden wurden. Dabei geht es bei den Beispielen weniger um das Berechnen von Ergebnissen, sondern eher um allgemeines Verständnis, was sehr positiv vermerkt werden kann. Eine Aufgabe lautet beispielsweise:

„Ein Stapel von 57 gleich dicken Brettern ist 98,6 cm hoch. Was rechnet man sich mit der Division 98,6:57 aus?"

4.3.2 Theorie

4.3.2.1 Die Unterteilung der Einer

Im einführenden Kapitel wird vorerst anhand des Geldes gezeigt, dass Zahlen existieren, die zwischen zwei natürlichen Zahlen liegen. Anschließend werden diese genauer erklärt und die Erweiterung des Stellenwertsystems wird gezeigt. Neben Beispielen und ausführlicheren Erklärungen (zum Beispiel in Form einer Tabelle), wird auch auf die richtige Sprechweise Wert gelegt. Nach meinem Eindruck ist der Einstieg in das Thema sehr gut gelungen. Es wird Realitätsbezug hergestellt und die wichtigsten Aspekte werden ausreichend besprochen und zusammengefasst.

4.3.2.2 Zahlen in Dezimaldarstellung ordnen

Die Erklärungen in diesem Abschnitt sind, nach einer kurzen Darstellung der Problematik, leider sehr kurz gefasst. Im Grunde wird die Vorgehensweise nur anhand eines Musterbeispiels erklärt. Es wird hier weder auf einen Zahlenstrahl noch auf die zuvor ausführlich erklärten Stellenwerte zurückgegriffen, womit der Größenvergleich sehr gut zu veranschaulichen wäre. Stattdessen wird das Anhängen von Endnullen als Erklärung genutzt, was aus bereits erwähnten Gründen nicht optimal ist.

Erst auf der darauffolgenden Seite wird ein Zahlenstrahl gezeigt und es wird erklärt, wie dieser aufgeteilt und verfeinert werden kann. Nach meinem Ermessen hätten diese Informationen gemeinsam mit dem Größenvergleich, oder bereits bei der Einführung angeführt werden sollen, um schon dort eine Veranschaulichung zu bieten. Natürlich ist nicht viel verloren, da nur eine Seite dazwischenliegt, jedoch ist diese Trennung für mich nicht nachvollziehbar.

Außerdem bin ich der Meinung, dass man hier Geld-, Längen- oder Masseneinheiten benutzen hätte können, um eventuell an Erfahrungswerte anzuknüpfen und eine bessere anschauliche Vorstellung zu schaffen. In denke also, dass dieser Abschnitt durchaus ausführlicher gestaltet hätte werden können, vor allem in Anbetracht der Tatsache, dass es sich hierbei um ein sehr wichtiges Kapitel handelt.

4.3.2.3 Zahlen in Dezimaldarstellung runden

Das Unterkapitel zum Thema Runden stellt im Grunde eine Wiederholung der Vorgehensweise bei den natürlichen Zahlen dar und überträgt diese auf Zahlen in Dezimaldarstellung. Die Gelegenheit zur Wiederholung der Stellenwerte und ihrer Zusammenhänge wurde leider nicht genutzt. Dennoch ist es positiv zu vermerken, dass auf diesen Aspekt Wert gelegt wurde.

4.3.2.4 Zahlen in Dezimaldarstellung multiplizieren

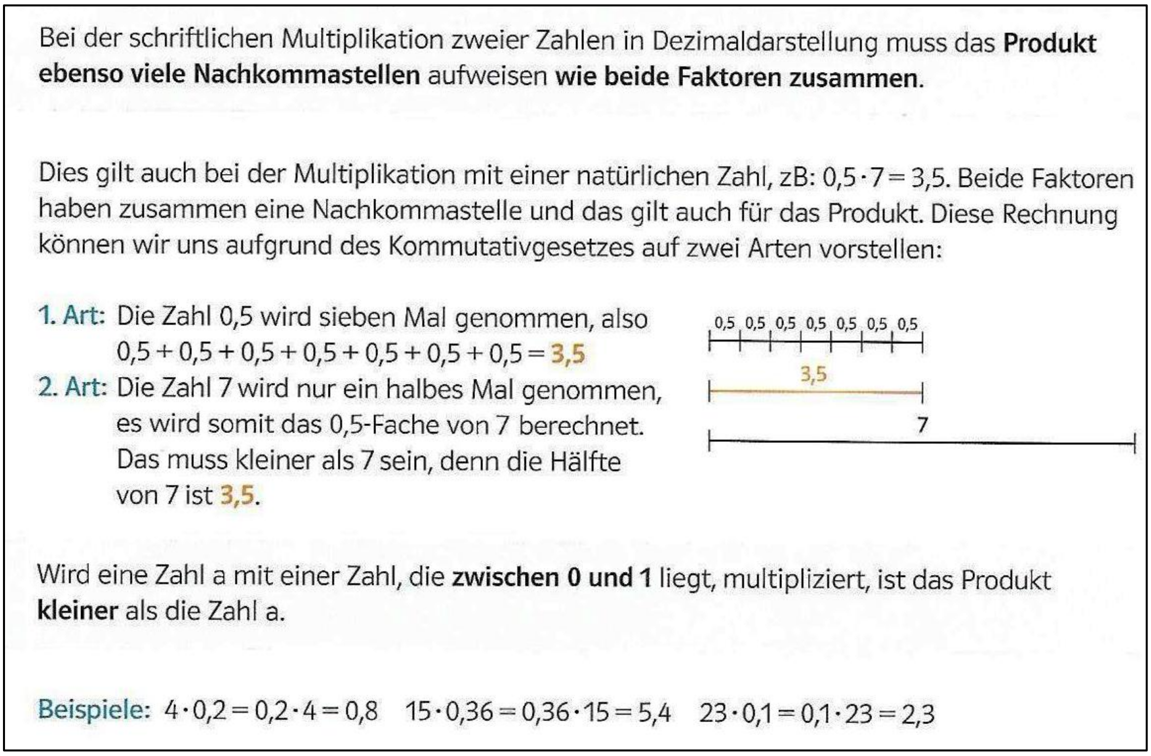
Der erste Fall, der in diesem Abschnitt behandelt wird, ist die Multiplikation von Dezimalzahlen mit natürlichen Zahlen. Diese wird als wiederholtes Addieren interpretiert und erklärt. Relativ schnell wird anhand eines Beispiels dann die allgemeine Regel formuliert, welche besagt, dass das Ergebnis genauso viele Kommastellen aufweisen muss, wie die Dezimalzahl der Multiplikation. Anhand zweier Musterbeispiele (einmal auch mit Überschlagsrechnung) wird diese Vorgehensweise veranschaulicht. Im Zuge dieses Abschnittes hätte meiner Auffassung nach zumindest erwähnt werden können, dass analog zu der Multiplikation natürlicher Zahlen vorgegangen werden kann. Noch besser wäre natürlich eine zusätzliche Erklärung oder Veranschaulichung gewesen, die klarstellt, warum dies so ist. Dabei hätte es sich zum Beispiel angeboten, den Preis, der in der ersten Aufgabe multipliziert wird, in Cent umzuwandeln, um zu zeigen, dass kein Unterschied zur Rechnung in Euro besteht. Auf eine solche Unterstützung wurde jedoch leider verzichtet.

Anschließend wird auch auf die Multiplikation mit Zehnerpotenzen eingegangen, welche auf eine Verschiebung des Kommas hinausläuft. Veranschaulicht wird dieser Sonderfall mithilfe einer Wertetabelle und damit mit einem Rückgriff auf die Stellenwerte.

Nach einigen Aufgabenstellungen wird auf die Multiplikation zweier Zahlen in Dezimaldarstellung eingegangen. Diese wird anhand zweier Beispiele vorgeführt und der vom vorherigen Kapitel bereits bekannte Satz zur Kommasetzung wird verallgemeinert. Abermals sind meiner Ansicht nach die Erklärungen zur genauen Vorgehensweise, ähnlich wie zuvor, zu wenig ausführlich.

Anschließend wird besprochen, dass eine Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl immer auf zwei Arten interpretiert werden kann. Damit soll wohl eine möglichst geschickte Rechenstrategie angeregt werden, was an dieser Stelle durchaus sinnvoll erscheint.

Mithilfe des Zahlenstrahles und der wiederholten Addition wird erklärt, dass die Multiplikation $0{,}5 \cdot 7$ Einerseits als das Siebenfache von 0,5 und andererseits als die Hälfte von der Zahl Sieben angesehen werden kann (Siehe Abbildung). Nach meinem Eindruck handelt es sich dabei um eine sehr gute und anschauliche Erklärung, die aber noch besser ins vorherige Kapitel (Dezimalzahl mal natürliche Zahl) gepasst hätte.



Bei der schriftlichen Multiplikation zweier Zahlen in Dezimaldarstellung muss das **Produkt ebenso viele Nachkommastellen** aufweisen **wie beide Faktoren zusammen.**

Dies gilt auch bei der Multiplikation mit einer natürlichen Zahl, zB: $0{,}5 \cdot 7 = 3{,}5$. Beide Faktoren haben zusammen eine Nachkommastelle und das gilt auch für das Produkt. Diese Rechnung können wir uns aufgrund des Kommutativgesetzes auf zwei Arten vorstellen:

1. Art: Die Zahl 0,5 wird sieben Mal genommen, also $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 3{,}5$

2. Art: Die Zahl 7 wird nur ein halbes Mal genommen, es wird somit das 0,5-Fache von 7 berechnet. Das muss kleiner als 7 sein, denn die Hälfte von 7 ist 3,5.

Wird eine Zahl a mit einer Zahl, die **zwischen 0 und 1** liegt, multipliziert, ist das Produkt **kleiner** als die Zahl a.

Beispiele: $4 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8$ $\quad 15 \cdot 0{,}36 = 0{,}36 \cdot 15 = 5{,}4$ $\quad 23 \cdot 0{,}1 = 0{,}1 \cdot 23 = 2{,}3$

Abbildung 12: Regel zur Multiplikation und Veranschaulichung, [Salzger et. al., 2014, 101]

Sehr positiv anzumerken ist, dass abschließend erklärt wird, dass es ab diesem Zeitpunkt möglich ist, dass eine Multiplikation zu einer Verkleinerung des Multiplikanden führen kann. Hier wird auf einen wichtigen Grundvorstellungsumbruch Bezug genommen, der, wie bereits erwähnt, auch in der Literatur öfters beschrieben wird[268].

Im Zuge dessen wird auch auf den Spezialfall der Kommaverschiebung (also der Multiplikation mit 0,1, 0,01, 0,001,…) eingegangen, was meines Erachtens nach auch sehr sinnvoll und wichtig ist. Dieser wird auch anhand einer Stellenwerttafel gut veranschaulicht.

4.3.2.5 Zahlen in Dezimaldarstellung dividieren

Im nächsten Abschnitt wird die Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl erklärt. Es wird zu Beginn kurz erwähnt, dass der Rest bei einer Division zweier natürlicher Zahlen bedeutet, dass im Ergebnis Kommastellen vorkommen müssen. Diesen Ansatz finde ich sehr sinnvoll, da sich die Schüler

[268] Padberg, 2012, 163f

und Schülerinnen im Zuge dieses Kapitels abgewöhnen müssen, keinen Rest mehr bei den Divisionen zu notieren, es sei denn, das Verfahren wird abgebrochen.

Bevor die allgemeine Regel formuliert wird (Im Quotienten muss ein Komma gesetzt werden, sobald die erste Ziffer des Dividenden nach dem Komma heruntergeschrieben wird), ist ein Beispiel angeführt, in dem diese angewandt und kurz erklärt wird. Obwohl auch hier die Angaben in Euro angeführt sind, wird nicht in Cent umgerechnet, um zu zeigen, dass die Vorgehensweise auch tatsächlich plausibel ist. In meinen Augen ein recht simpler Zusatz, der ohne viel Aufwand für einige Schüler und Schülerinnen hilfreich sein könnte.

Anschließend wird die Kommaverschiebung durch die Division durch Zehnerpotenzen erklärt. Hierbei hätte eventuell darauf aufmerksam gemacht werden können, dass die Vorgehensweise äquivalent zur Multiplikation mit dezimalen Einheiten ist, welche ja bereits behandelt wurde. Dieser Zusammenhang der beiden Rechenoperationen ist für ein tieferes Verständnis durchaus wichtig und deshalb auch erwähnenswert.

Zuletzt wird noch die Division zweier Dezimalzahlen behandelt. Ein Verweis erinnert an die Tatsache, dass die Multiplikation des Dividenden und des Divisors mit derselben Zahl den Quotienten nicht verändert. Dies wurde bereits zu einem früheren Zeitpunkt in dem Buch erklärt. Mithilfe dieser Information ist die Rückführung auf die Division mit einer natürlichen Zahl nicht mehr schwierig. Trotzdem wird hier interessanterweise noch zusätzlich mit der Umrechnung von Euro in Cent gearbeitet, was meiner Ansicht nach sehr positiv ist, jedoch wiederum die offensichtliche Frage aufwirft, warum dieses Hilfsmittel nicht schon früher benutzt wurde.

Ähnlich wie bei der Multiplikation wird auch hier auf einen Grundvorstellungsumbruch eingegangen. Es wird erklärt, dass die Division durch eine Zahl zwischen 0 und 1 (anders als gewohnt) eine Vergrößerung bedeutet. In diesem Fall ist also der Quotient größer als der Dividend.

Abschließend wird die Division durch dezimale Einheiten als Kommaverschiebung erklärt. Auch hier ist meiner Meinung nach abermals verabsäumt worden, eine Verbindung zur Multiplikation mit Zehnerpotenzen herzustellen.

Eine Anmerkung zur den Interpretationsmöglichkeiten des Teilens und des Messens ist nicht zu finden, obwohl zu einem früheren Zeitpunkt die Division von natürlichen Zahlen mithilfe dieser beiden Aspekten erklärt wurde.

4.3.2.6 Länge, Masse, Temperatur, Zeit

Das Kapitel für Maßeinheiten zählt in diesem Schulbuch nicht zum Abschnitt der Dezimalzahlen, sondern gilt als eigener Teil des Werkes. Aus der Literatur, vor allem aus den Artikeln von Heckmann[269], geht hervor, dass die Zusammenhänge, die zwischen den beiden Themen bestehen, sehr gut genutzt werden könnten, um diverse Sachverhalte besser zu erklären. Wie schon weiter oben angesprochen, finde ich es schade, dass bei den Ausführungen und den Aufgabenstellungen großteils darauf verzichtet wurde, diesen Konnex auszunutzen. Es tauchen zwar immer wieder Sachkontexte auf, bei denen Einheiten vorkommen, jedoch meistens nicht, um das Potenzial für bessere Erklärungen zu nutzen, sondern nur, um Aufgaben „einzukleiden" beziehungsweise einen Bezug zur Realität herzustellen.

4.3.3 Aufgabenstellungen

4.3.3.1 Dezimalzahlen (allgemeiner Teil)

Die Beispiele in diesem Buch sind meiner Auffassung nach sehr gut gewählt. Es wird auf sehr vielfältige Art und Weise auf einige Aspekte eingegangen, die zuvor auf den Theorieseiten besprochen wurden. Schon vor den Rechenoperationen ist eine große Zahl an Aufgaben von mehreren Schwierigkeitsstufen angeführt, die auch die in der Literatur zu findenden Fehlvorstellungen abdecken.

Weniger positiv anzumerken ist, dass eine Vielzahl der Textaufgaben nur einen rein wirtschaftlichen Kontext (also Aufgaben, die Geld/Euro beinhalten) abdecken. Damit ist es nicht unbedingt gelungen, den Schülern und Schülerinnen vor Augen zu führen, wie vielseitig das Thema ist und wie breit die Anwendungsmöglichkeiten des Gebrauchs von Dezimalzahlen sind. Begründet werden kann diese Tatsache dadurch, dass Längen-, Massen-, Temperatur- und Zeitmaße erst später in einem eigenen Kapitel behandelt werden, was die vorzeitige Behandlung der Themen offenbar leider ausschließt. Dies zeigt nochmals welche Nachteile eine getrennte Behandlung dieser Themen nach sich zieht.

Gleichzeitig ist es somit sehr wahrscheinlich, dass einige Schnittstellen mit der Erfahrungswelt der Lernenden erst später gefunden werden. Würden diese schon früher aufgezeigt werden, so würde dies meiner Einschätzung nach eine positive Auswirkung haben.

Die ausführliche Einführung in diese Art der Darstellung von Zahlen liefert nach meinem Ermessen aber trotzdem eine sehr gute Grundlage für die später folgende Ausdehnung auf das Rechnen mit Dezimalzahlen.

[269] Siehe beispielsweise Heckmann, 2005 oder Thiemann, 2004a

4.3.3.2 Multiplizieren von Dezimalzahlen

Dieser Abschnitt zeichnet sich durch eine Mischung von reinen Übungsaufgaben und Textaufgaben aus. Während die erste Art auf die richtige Durchführung des Algorithmus ausgelegt ist, ist die andere sehr gut dafür geeignet, das Gelernte in gewissen Kontexten einzubetten. Auffallend ist auch bei diesen Aufgaben, dass hierfür abermals hauptsächlich wirtschaftliche Kontexte zu finden sind. Die Gründe dafür sind wohl dieselben, die schon zuvor erwähnt wurden.

In meinen Augen ist die Anzahl der angebotenen Übungen (vor allem bei der Multiplikation mit einer natürlichen Zahl) zu klein und es gibt zu wenige Aufgaben, deren Rechenaufwand gering ist. Diese würden eine gute Möglichkeit bieten zu überprüfen, ob der Multiplikationsalgorithmus richtig angewandt wird. Dazu würden beispielsweise auch Rechnungen zählen, welche die Benutzung von Fehlerstrategien provozieren. Dies ist in diesem Werk nur bei vergleichsweise wenigen Übungen der Fall.

Positiv anzumerken ist, dass an einigen Stellen eine Überschlagsrechnung verlangt wird, wenngleich dies bei den Textaufgaben nicht mehr erwähnt wird.

4.3.2.3 Division von Dezimalzahlen

Auch hier findet sich eine gute Mischung aus Übungs- und Textaufgaben. Die Auswahl der Aufgaben finde ich aus ähnlichen Gründen wie im letzten Kapitel nicht ganz ausreichend. Rechnungen wie beispielsweise $21{,}49 : 7$, welche die KT-Vorstellung provozieren, finden sich in diesem Abschnitt leider nicht. Die Probe und Überschlagsrechnungen werden nur selten erwähnt, was jedoch durchaus vorteilhaft wäre.

Positiv zu vermerken ist (dies gilt auch für die Multiplikation) die Vielzahl und die Kreativität der Textaufgaben, welche die Aufgabenstellungen gut abrunden und vielseitige Anwendungsmöglichkeiten bieten.

4.3.2.4 Verbindung der Grundrechenarten

Zum Abschluss finden sich zwei Seiten, welche der Verbindung der vier Grundrechenarten und der Nutzung des Taschenrechners gewidmet sind. In meinen Augen ist dies, wie auch schon in anderen Büchern, ein gut gewähltes Ende des Kapitels, da hier nochmals die Möglichkeit geboten wird, alles Gelernte kurz zu wiederholen und gleichzeitig mehrere Aspekte zu kombinieren. Die Anzahl der Aufgaben ist jedoch meiner Ansicht nach etwas zu klein.

4.4 MathematiX 1

Boxhofer, Emmerich/ Huber, Franz/ Lischka, Ulrike/ Panhuber, Brigitta. (2015). *MathematiX 1* (4. Auflage). Linz: Veritas Verlag.

4.4.1 Aufbau

Bei dem Schulbuch MathematiX fällt auf, dass die Bruchzahlen (Grundlagen und Rechenoperationen[270]) vor den Dezimalzahlen behandelt werden. Es wird also im folgenden Abschnitt interessant sein, zu beobachten, ob und in welchem Ausmaß dieses bereits vorhandene Wissen der Schüler und Schülerinnen genutzt werden kann, um diverse Sachverhalte einfacher darzustellen, oder auf schon bekannte Tatsachen zurückzuführen.

Die Kapitel, welche für das Thema dieser Arbeit interessant erscheinen, sind „Dezimalzahlen 1-3“. Warum den Abschnitten derart wenig aussagende Namen gegeben wurden, ist unklar. Zwischen den ersten beiden relevanten Abschnitten gibt es einen kurzen Einschub über Diagramme, auf den hier jedoch nicht genauer eingegangen wird[271]. Zu Beginn jedes Kapitels findet sich eine Aufzählung, die Auskunft darüber gibt, was am Ende des Kapitels gekonnt werden soll. Meiner Einschätzung nach ist diese kurze Übersicht sehr sinnvoll, da von Anfang an klar ist, welche Aspekte wichtig sind.

Im ersten Teil werden die Grundlagen der Dezimalzahlen erklärt. In „Dezimalzahlen 2“ werden die ersten Rechenoperationen behandelt, also die gesamte Addition und Subtraktion. Im Kapitel „Dezimalzahlen 3“ geht es um die Multiplikation und Division von Dezimalzahlen, wobei die einfacheren Fälle zuerst separat behandelt werden (Multiplikation und Division mit natürlichen Zahlen und dekadischen Einheiten).

Die Aufgaben sind in drei verschiedene Schwierigkeitsgrade getrennt, Level 1-3. In den Kapiteln „Dezimalzahlen 2“ und „Dezimalzahlen 3“ sind jedoch auch sogenannte Level-X-Beispiele zu finden. Hierbei handelt es sich um Seiten, welche „besondere Aufgaben“ beinhalten. Diese sind teilweise etwas schwieriger als andere, haben ausgefallene Aufgabenstellungen, regen zum Nachdenken an oder stellen eine Verknüpfung von verschiedenen bereits gelernten Aspekten dar.

[270] Interessant ist dabei, dass zwar die Multiplikation und Division von Brüchen mit natürlichen Zahlen bearbeitet wird, nicht jedoch die Multiplikation und Division zweier Brüche.
[271] Warum sich dieser Abschnitt genau an dieser Stelle befindet ist gänzlich unklar, da die behandelten Aspekte für die Dezimalzahlen irrelevant sind und hier auch nicht weiterverwendet werden.

In jedem Kapitel gibt es zum Abschluss einen kurzen Abschnitt mit dem Namen „Kompetenz Kontrolle“, der einer Zusammenfassung der Theorie und Beispielen zur Kontrolle des erworbenen Wissens gewidmet ist.

4.4.2 Theorie

4.4.2.1 Dezimalzahlen 1

Die Einführung der Dezimalzahlen, mithilfe von Realitätsbezug durch den Satz „Viele Preisangaben in Geschäften, Prospekten oder Katalogen haben ein Komma“ neben der Abbildung einer Speisekarte, ist in diesem Werk vergleichsweise dürftig ausgefallen. Gleich darauf folgt eine kurze Definition durch die Aussage, dass Zahlen mit Komma Dezimalzahlen heißen.

Was auf dieser Seite auffällt, ist die Tatsache, dass die umgangssprachlichen Sprechweisen „zweifünfundfünfzig“ und „zwei Komma Fünfundfünfzig“ für die Zahl 2,55 angegeben sind. Obwohl auch die mathematisch korrekte Aussprache angegeben ist, finde ich es trotzdem nicht unbedingt notwendig, in einem Lehrbuch die genannten Optionen anzubieten. Meiner Meinung nach entsteht dadurch kein Mehrwert. Vielmehr wird der Eindruck erweckt, es sei unproblematisch, diese Versionen zu benutzen, was aus bereits angeführten Gründen nicht der Fall ist.

Kurz darauf folgt im Zuge derselben Einführung eine weitere Formulierung, die mir ungünstig erscheint. Es wird erklärt, dass das Komma Einer und Zehntel trennt. Obwohl die Aussage nicht unbedingt falsch ist, wird, wie auch schon im Werk von Lewisch, suggeriert, dass das Komma eine Grenze darstellt. Eine Ansicht, die bei Schülern und Schülerinnen unter anderem zur Komma-Trennt-Vorstellung führen kann, welche nach dem besagten Aspekt benannt wurde.

Es folgt eine Tabelle, welche die unterschiedlichen Schreibweisen für Dezimalzahlen erläutern soll. Das Komma wird hier wiederum sehr deutlich als Trennmarke dargestellt (siehe Abbildung 13). Durch die vorherige Behandlung von Bruchzahlen ergibt sich in diesem Schulbuch die Möglichkeit, Dezimalzahlen durch Brüche genauer zu beschreiben, was in dem einführenden Theorieteil auch gemacht wird. Dafür werden jedoch gemischte Brüche verwendet (zum Beispiel $2\frac{3}{10}$), was meiner Auffassung nach nicht optimal ist. Neben der Tatsache, dass diese Schreibweise generell problematisch sein kann[272], suggeriert sie in diesem Zusammenhang noch deutlicher eine Trennung der Stellen vor und nach dem Komma. Die Schreibweise hat jedoch auch einen wesentlichen Vorteil, da mithilfe der Zehnerbrüche sehr gut auf die Stellenwerte hingewiesen werden kann.

[272] Padberg, 2012, 78

Bedeutung und Schreibweisen

Das Komma trennt Einer und Zehntel.
Links vor dem Komma stehen Einer (E), Zehner (Z) usw.,
rechts neben dem Komma stehen die Zehntel (z), Hundertstel (h), Tausendstel (t) usw.

Du kannst eine **Dezimalzahl** auf verschiedene Arten **anschreiben**.

Dezimalzahl	Einheitenschreibweise	Stellenwerttabelle						Dezimalbruch
		Z	E		z	h	t	
2, 3	2 E 3 z		2	,	3			$2\frac{3}{10}$
12,43	1 Z 2 E 4 z 3 h	1	2	,	4	3		$12\frac{43}{100}$
0,075	7 h 5 t		0	,	0	7	5	$\frac{75}{1000}$

Abbildung 13: Schreibweise von Dezimalzahlen, [Boxhofer et. al., 2015, 142]

Neben einer Erklärung unserer Währung (dem Euro) und der Vorgehensweise beim Runden von Dezimalzahlen, findet sich auf der Theorieseite auch ein kurzer Abschnitt zum Darstellen und Vergleichen von Dezimalzahlen, wo mit Zahlenstrahlen gearbeitet wird. Positiv zu vermerken ist, dass hier, wenn auch nur kurz, auf die Problematik des Vergleiches zweier Dezimalzahlen mit unterschiedlicher Anzahl an Nachkommastellen eingegangen wird. Jedoch wäre zumindest eine kurze schriftliche Erklärung (zum Beispiel anhand der Stellenwerte) wünschenswert gewesen, da dies eine wichtige Grundlage darstellt, die an dieser Stelle eventuell „untergehen" könnte.

Nach einigen Beispielen findet sich ein zweiter Theorieteil in dem Kapitel, der sich mit Längen und Massen in Dezimalschreibweise auseinandersetzt. Das Potenzial, welches die Einheiten haben um die Dezimalschreibweise genauer zu erklären, wird hier nur zum Teil genutzt, indem in einer Tabelle statt der Stellenwerte die unterschiedlichen Einheiten angeschrieben sind. Der Bezug zu bekannten Größen und Einheiten könnte das Verständnis einiger Schüler und Schülerinnen positiv beeinflussen. Die relativ kurzen Erklärungen in diesem Abschnitt überlassen es den Lehrern und Lehrerinnen, diese Notationen genauer zu erklären.

4.4.2.2 Dezimalzahlen 2

Nach einem kurzen Einschub über Diagramme folgt das nächste Kapitel, welches sich mit Dezimalzahlen auseinandersetzt. Da es hier ausschließlich um die Addition und Subtraktion geht, wird es in dieser Arbeit nicht genauer besprochen.

4.4.2.3 Dezimalzahlen 3

In diesem Kapitel werden vorerst die Multiplikation und Division von Dezimalzahlen mit natürlichen Zahlen beziehungsweise mit dekadischen Einheiten (also Zehnerpotenzen) erklärt.

Die Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl ist in diesem Kapitel meines Erachtens nach sehr gut erklärt. Einführend ist ein Beispiel genannt, bei dem sechs Flaschen einer Limonade gekauft werden. Vorerst wird durch Addieren die richtige Lösung gefunden, um anschließend den einfacheren und kürzeren Weg der Multiplikation vorzuschlagen.

Es wird mit einer Überschlagsrechnung begonnen, was auch später oft hilfreich sein kann, um die Dimension des Ergebnisses einzuschätzen. Danach wird darauf hingewiesen, dass genau wie bei den natürlichen Zahlen multipliziert werden kann, da das Komma erst nach der Rechnung gesetzt wird. Hierfür wird einerseits auf die Überschlagsrechnung hingewiesen und andererseits die Merkregel erwähnt, die besagt, dass das Ergebnis gleich viele Kommastellen haben muss, wie der Faktor mit Dezimalstellen. Zusätzlich wird eine Erklärung anhand der Stellenwerte angeboten, welche die Ausführungen nochmals bestätigt und es wird das Kommutativ- beziehungsweise das Assoziativgesetz erwähnt. Es handelt sich also um eine sehr ausführliche und verständliche Erklärung, was in meinen Augen durchwegs positiv ist.

Der Abschnitt, welcher die Multiplikation einer Dezimalzahl mit dekadischen Einheiten behandelt enthält in der benutzten Ausgabe des Buches einen Rechenfehler an einer wichtigen Stelle (siehe Abbildung), was für Schüler und Schülerinnen sehr verwirrend wirken kann ($72{,}4 \cdot 100 = 724$ [sic]). Die Conclusio, dass beim Multiplizieren mit Zehnerpotenzen das Komma um entsprechend viele Stellen verschoben wird, ist dennoch wichtig und vorhanden. Zusätzlich wird auch erklärt, dass in manchen Fällen Nullen ergänzt werden müssen.

Multiplizieren einer Dezimalzahl mit dekadischen Einheiten

Multiplizieren mit 10: $\underline{7{,}24 \cdot 10}$ / $72{,}40$ oder kurz: $7{,}24 \cdot 10 = 72{,}40$ ÜR: $7 \cdot 10 = 70$

Multiplizieren mit 100: $\underline{72{,}4 \cdot 100}$ / $724{,}00$ $7{,}24 \cdot 100 = 724{,}00$ ÜR: $7 \cdot 100 = 700$

Kommaregel: Das **Produkt** hat wieder genau **so viele Dezimalstellen wie** der **Faktor mit Dezimalstellen.**

Das **Komma** rückt beim **Multiplizieren mit 10, 100, 1 000** … um **eine, zwei, drei … Stellen nach rechts.**

Manchmal musst du dabei fehlende Nullen ergänzen.

$7{,}24 \cdot 1\,000 = 7\,240{,}00 = 7\,240$ ÜR: $7 \cdot 1\,000 = 7\,000$

Abbildung 14: Multiplikation mit dekadischen Einheiten, [Boxhofer et. al., 2015, 164]

Die Division wird mit einem Beispiel eingeführt, bei dem es um die Aufteilung eines Geldbetrages auf mehrere Kinder geht. Begonnen wird erneut mit einer Überschlagsrechnung, welche die Dimension des Ergebnisses zeigt. Besonders interessant ist hier, wie die Setzung des Kommas erklärt wird. Vor dem Dividieren werden die Stellen im Dividenden markiert, welche für die erste Teildivision relevant sind (Diese Markierung ist in diesem Werk ein Bogen, der bereits im Kapitel zur Division natürlicher Zahlen genau erklärt wird). Anschließend sollen die Stellen von dieser Markierung aus bis zum Komma abgezählt werden. Die Zahl entspricht dann der Anzahl an Ziffern im Quotienten vor dem Komma.

Dividieren einer Dezimalzahl durch eine natürlichen Zahl

Die Abrechnung einer Sportwoche ergab für die 1. Klasse ein Guthaben von 308,40 €. Der Geldbetrag wird auf alle 24 Kinder gleich aufgeteilt. Wie viel Euro erhält jedes Kind?

1 ÜR: 300 : 25 = 12
Ermittle zuerst den ungefähren Betrag durch eine **Überschlagsrechnung**.

2 **Rechnung:**
Bestimme den **Stellenwert des Quotienten**!
Zähle dazu die Stellen vom Ende des Bogens bis zum Komma. So viele Stellen hat der Quotient vor dem Komma, schreib sie mit Punkten auf und setze das Komma.

308,40 : 24 = . . ,

Dividiere anschließend so **wie mit natürlichen Zahlen!**
Sollte ein Rest übrig bleiben, so darfst du so viele Nullen in den Dezimalstellen ergänzen, wie du benötigst. Wie viele Dezimalstellen du nach dem Komma erhältst, kannst du zu Beginn der Rechnung nicht wissen.

308,40 : 24 = 12,85
68
204
120
0 Rest

3 **Antwort:** *Jedes Kind erhält 12,85 €.*

4 **Probe:**
Multiplikation!

12,85 · 24
2570
5140
308,40

Abbildung 15: Verfahren bei der Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl, [Boxhofer et. al., 2006, 165]

Obwohl eine Erinnerung an die Bedeutung des Bogens wünschenswert gewesen wäre[273], wirkt die Vorgehensweise, die hier gewählt wird, sehr verständlich. Eine kurze Erklärung dieser Regel, zum Beispiel anhand der Stellenwerte, wäre dennoch durchaus nützlich gewesen, um das Verständnis der Vorgehensweise zu stärken, da ansonsten die Gefahr besteht, dass nur auswendig gelernt wird.

Auch Spezialfälle für die Regel, wie beispielsweise bei der Division einer Zahl zwischen 0 und 1, müssten noch extra erklärt werden, um den Theorieteil zu vervollständigen. Positiv zu vermerken ist die Probe durch eine Multiplikation, welche die Richtigkeit des Ergebnisses zeigt und des Weiteren die Multiplikation nochmals wiederholt.

[273] Die Methode wird beim Dividieren natürlicher Zahlen eingeführt und benutzt.

Abgeschlossen wird dieser Theorieteil durch die Erklärung der Division durch dekadische Einheiten. Plausibel gemacht wird dies durch die Umkehrung der bereits bekannten Multiplikation mit dekadischen Einheiten. Diese Vorgehensweise ist sehr einfach und verständlich und deswegen auch eine gute Wahl. Abschließend wird, wie bei der Multiplikation, eine Kommaverschiebungsregel formuliert und es wird erneut auf Situationen hingewiesen, in denen Nullen ergänzt werden müssen.

Nach einigen Aufgaben wird in einem zusätzlichen Abschnitt die Multiplikation und Division zweier Dezimalzahlen behandelt. Beim Einführungsbeispiel zur Multiplikation werden Seemeilen in Kilometer umgewandelt. Dabei fehlt es nicht an Erklärungen der Vorgehensweise und es werden auch zusätzliche Aspekte, wie eine Überschlagsrechnung und die Kommaregel inklusive einer plausiblen Begründung angeführt. Ergänzend wird die Multiplikation mit dezimalen Einheiten behandelt und durch die Rückführung auf die Division durch Zehnerpotenzen erklärt. An dieser Stelle hätte es sich meiner Einschätzung nach angeboten, zu erwähnen, dass hierbei ein Fall auftritt, bei dem die Multiplikation verkleinert, da dies eine Neuerung für Schüler und Schülerinnen darstellt, die in manchen Fällen zu einer bereits erwähnten Fehlvorstellung führen kann.

Die Division wird, wie üblich, durch den Prozess erklärt, der hier „kommafrei machen“ genannt wird. Damit ist die Multiplikation des Dividenden und des Divisors mit derselben Zehnerpotenz gemeint, sodass der Divisor anschließend eine natürliche Zahl ist. Diese Rückführung auf die Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl wird hier meiner Auffassung nach nicht ausreichend erklärt, da keine Begründung für die Vorgehensweise angeführt ist. Auch im Kapitel zur Division natürlicher Zahlen taucht das Konzept nicht auf, was bedeutet, dass hier eine Methode ohne verständlichen Hintergrund angeboten wird.

Abschließend wird kurz auf die Verbindung der vier Grundrechenarten eingegangen und betont, dass bereits bekannte Regeln (Vorrang-Regeln und Klammer-Regel) weiterhin gelten.

4.4.3 Aufgabenstellungen

4.4.3.1 Dezimalzahlen 1

Im ersten Kapitel zu Dezimalzahlen in diesem Schulbuch gibt es zwei Abschnitte, denen Aufgaben zugeordnet werden. Zuerst findet sich eine Vielzahl an Aufgabenstellungen zur allgemeinen Einführung der Dezimalzahlen, anschließend wird vor allem mit Längen und Massen gearbeitet.

Der erste Teil beinhaltet gut gewählte Aufgaben, die bei geschickter Anwendung und Überprüfung durch den Lehrer beziehungsweise die Lehrerin auf diverse Fehlvorstellungen aufmerksam machen können. Positiv sind die Übungen mit Verwendung eines Zahlenstrahls und die Beispiele zum Thema Größenvergleich von Dezimalzahlen hervorzuheben. Abgesehen davon gibt es viele

Aufgabenstellungen bei denen die Umwandlung in eine andere Darstellung im Vordergrund steht. Nach meinem Ermessen wäre es zusätzlich sinnvoll gewesen auch andere Arten von Aufgaben damit zu verbinden (zum Beispiel erst umformen, dann ordnen).

Durch die Besonderheit des Werks, dass bereits zu einem früheren Zeitpunkt Brüche behandelt wurden, finden sich auch Beispiele, die den Zusammenhang zu dem Thema festigen sollen.

Im zweien Abschnitt zu den Grundlagen der Dezimalzahlen werden sehr ähnliche Aufgabenstellungen wie im ersten benutzt, in diesem Fall jedoch passend zum Thema Längen und Massen. Dies fördert zwar eventuell weiterhin das Verständnis von Dezimalzahlen, jedoch fehlt nach meinem Eindruck der Bezug zur Realität, der für diesen Abschnitt eigentlich entscheidend wäre. Was im ersten Teil komplett verabsäumt wurde, wird in diesem nur sehr spärlich nachgeholt. Lediglich drei Aufgaben finden sich zum Schluss, die als Textaufgaben beziehungsweise Anwendungsaufgaben bezeichnet werden können. Das ist in meinen Augen entschieden zu wenig, vor allem, da es sich hier um ein sehr realitätsnahes Thema handelt.

4.4.3.2 Dezimalzahlen 3

Auch dieses Kapitel gliedert sich, wie weiter oben beschrieben, in zwei Abschnitte. Vorerst wird die Multiplikation und Division mit natürlichen Zahlen thematisiert. Wenngleich sofort auffällt, dass hier (im Gegensatz zu „Dezimalzahlen 1“) darauf geachtet wurde Textaufgaben zu verwenden, sind diese jedoch großteils recht kurz formuliert und einfach gestaltet. Sehr viel Kreativität ist bei der Auswahl der Beispiele leider nicht zu bemerken.

Die Auswahl an Rechnungen ist meiner Auffassung nach bei beiden Rechenoperationen gut gelungen, da einige Schwierigkeitsstufen und Eventualitäten abgedeckt werden. Positiv anzumerken ist auch, dass auf Überschlagsrechnungen Wert gelegt wird.

Zum zweiten Abschnitt, wo es um die Multiplikation und Division mit Dezimalzahlen geht, können meiner Meinung nach sehr ähnliche Aussagen getroffen werden. Die Wahl der Aufgaben ist recht vielseitig und stellt eine gute Sammlung zum Wiederholen der Inhalte des Themengebietes dar. Auf den ersten Blick stellt sich jedoch die Frage ob die Anzahl der Übungen auch für weiteres, selbstständiges Lernen ausreicht. Ohne Erfahrungswerte ist diese Frage jedoch nur sehr schwer zu beantworten und mit Sicherheit auch von Klasse zu Klasse unterschiedlich auszuwerten.

Positiv fällt auf, dass gegen Ende des Kapitels immer mehr realitätsnahe Aufgaben geboten werden, die es erlauben, eine etwas vielseitigere Vorstellung mit dem Konzept der Dezimalzahlen zu verbinden.

Allgemein lässt sich zu den Aufgabenstellungen in diesem Schulbuch sagen, dass zwar viele davon mit Bedacht gewählt und gut einsetzbar sind, jedoch der Bezug zur Realität beziehungsweise die

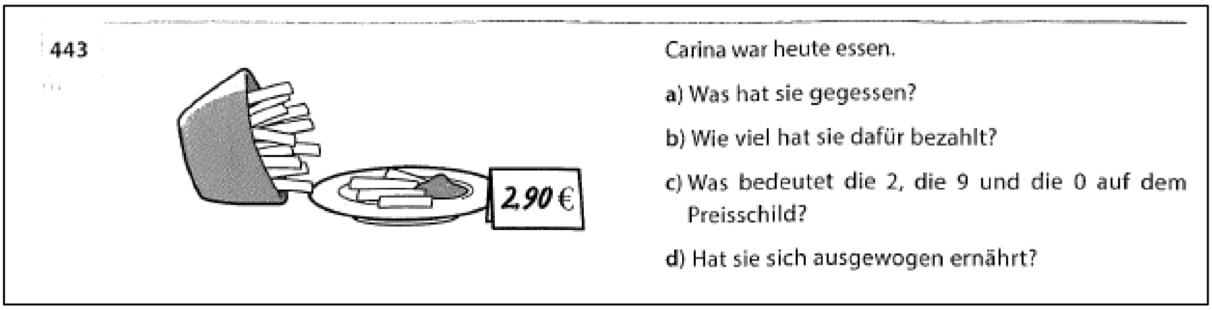
Anwendungsorientiertheit an manchen Stellen ausbaufähig wären. Ich denke jedoch, dass mithilfe der angeführten Übungen ein produktives Arbeiten im Unterricht möglich ist.

4.5 Genial! Mathematik

Beer, Rufolf/ Chelly, Astrid/ Ilias, Petra/ Jilka, Susanna/ Steffan, Christina/ Varelija, Gordan. (2014). *Genial! Mathematik: Lehr- und Arbeitsbuch für die 1. Klasse*. Wien: Bildungsverlag Lemberger.

4.5.1 Aufbau

Bei der ersten Betrachtung des Schulbuches fällt sofort auf, dass sich der Aufbau sehr stark von dem der anderen Bücher unterscheidet. Der erste Grund dafür liegt darin, dass mehr Wert auf Bilder gelegt wurde. Dabei handelt es sich großteils jedoch nicht um Fotos, wie es in den meisten vergleichbaren Büchern oft der Fall ist, sondern um Zeichnungen. Diese scheinen mir für die Altersklasse der Schüler und Schülerinnen passend, da der Eindruck entsteht, dass die Themen kindgerecht vermittelt werden können. Mathematik wird oft (sowohl von Kindern, als auch von Erwachsenen) als sehr „steril“ beziehungsweise „exakt“ angesehen, was meiner Erfahrung nach schon für einige Kinder abschreckend erscheinen kann. Die Autoren versuchen diesen Eindrücken schon mit dem Layout, aber auch beispielsweise mit den gewählten Formulierungen entgegenzuwirken. Zum Teil entsteht dadurch aber auch der Eindruck, dass die Aufgaben zu leicht wären beziehungsweise, dass das Niveau nicht dem einer Sekundarstufe entspricht. Das folgende Beispiel könnte dies unterstreichen:


443

Carina war heute essen.

a) Was hat sie gegessen?

b) Wie viel hat sie dafür bezahlt?

c) Was bedeutet die 2, die 9 und die 0 auf dem Preisschild?

d) Hat sie sich ausgewogen ernährt?

Abbildung 16: Aufgabe zu Stellenwerten, [Beer et. al., 2014, 158]

Fakt ist aber, dass die meisten anderen Aufgaben sehr wohl gut gewählt und sinnvoll sind, worauf zu einem späteren Zeitpunkt noch eingegangen wird.

Ein weiterer Punkt, der sich von einigen anderen Büchern unterscheidet, ist, dass in diesem die Bruchrechnung vor den Dezimalzahlen behandelt wird. Dies schafft einige didaktische Möglichkeiten, die bei einer anderen Reihenfolge nicht möglich wären. Inwiefern diese genutzt wird soll später noch geklärt werden.

Außerdem fällt auf, dass in dem Buch ein eigenes Kapitel zu Größen angeboten wird, das aber hinter das Dezimalzahlkapitel gereiht wurde. Wie schon beim Werk „Mathematik Verstehen 1“ (Kapitel 4.3) ist diese Entscheidung kritisch zu hinterfragen. Meiner Ansicht nach entsteht dadurch für das Dezimalzahlkapitel ein deutlicher Nachteil, weswegen ich diese Einteilung nicht bevorzuge.

Die Kapitel an sich sind ebenfalls etwas anders aufgebaut, als es in den restlichen Schulbüchern der Fall ist. Anstatt eines Theorieteils und eines Teils mit Aufgaben in jedem Abschnitt, werden in diesem Schulbuch weniger deutliche Grenzen gezogen. Die wichtigsten Regeln werden anhand von Beispielen erklärt und dann in speziell gekennzeichneten Boxen zusammengefasst. Theorie und Aufgaben sind also nicht strikt getrennt, sondern gehen in einander über. Zwischendurch finden sich immer wieder Aufgaben, die weniger auf Mathematik als auf Allgemeinwissen abzielen sind, bei denen die Kinder selbstständig überlegen, oder auch recherchieren müssen. Beispiele dafür wären:

„Welche Arten von Fieberthermometern gibt es? Welche verwendest du zu Hause?“

„Finde die fünf längsten Tunnel? Wo sind sie und wie lang sind sie ungefähr?“

Diese Aufgaben hängen natürlich, zumindest inhaltlich, immer mit den weiteren Beispielen zusammen.

Nach dem ersten Teil jedes Kapitels, in dem der Lehrstoff vermittelt wird, gibt es stets einen sogenannten „Kompetenz Lernen“-Abschnitt. Dieser besteht aus einer Geschichte, bei der ein Zusammenhang mit dem behandelten Thema hergestellt werden kann. Bei den Dezimalzahlen geht es beispielsweise um drei Freunde, die Pizza essen gehen. Nachdem die Geschichte (in Form eines Comics) erzählt ist werden diverse kompetenzorientierte Fragen zu der Erzählung gestellt. In meinen Augen eine sehr gute Möglichkeit zur Zusammenfassung des Gelernten, die eine Anwendung auf eine realistische Situation darstellt. Gleichzeitig kann die Behandlung dieser Aufgaben sehr auflockernd wirken, da sie eine Abwechslung zum sonstigen Unterricht bieten.

Des Weiteren finden sich zu jedem Abschnitt „spielerische und handlungsorientierte Aufgaben“ und „vernetzendes Wissen und fächerübergreifende Inhalte“ auf eigens dafür gestalteten Themenseiten.

Als Abschluss gibt es in jedem Kapitel eine Lernzielkontrolle. Diese umfasst eine Seite, auf der Aufgaben angegeben sind, die jeder Schüler und jede Schülerin nach dem Durcharbeiten des Kapitels lösen können sollte. Außerdem kann diese Seite auch als gute Orientierung, sowohl für Schüler und Schülerinnen als auch für Lehrpersonen, vor der Behandlung des Themas dienen, um sich einen Eindruck zu verschaffen, welche Inhalte vermittelt werden sollen.

Es kann also schon zu Beginn gesagt werden, dass es sich hierbei um ein recht vielseitiges Buch handelt, bei dem viel Wert auf Abwechslung und auf die Gestaltung gelegt wurde, welche jedoch meiner Einschätzung nach nicht immer dem Alter der Zielgruppe entspricht. Aufgrund des Aufbaus des Kapitels zum Thema Dezimalzahlen wird im Folgenden von der Aufteilung in Theorie- und Aufgabenteil abgesehen. Stattdessen werden die einzelnen Abschnitte nach der Reihe bearbeitet, wobei beiden Aspekten gleichermaßen Aufmerksamkeit gewidmet werden soll.

4.5.2 Theorie und Aufgabenstellungen

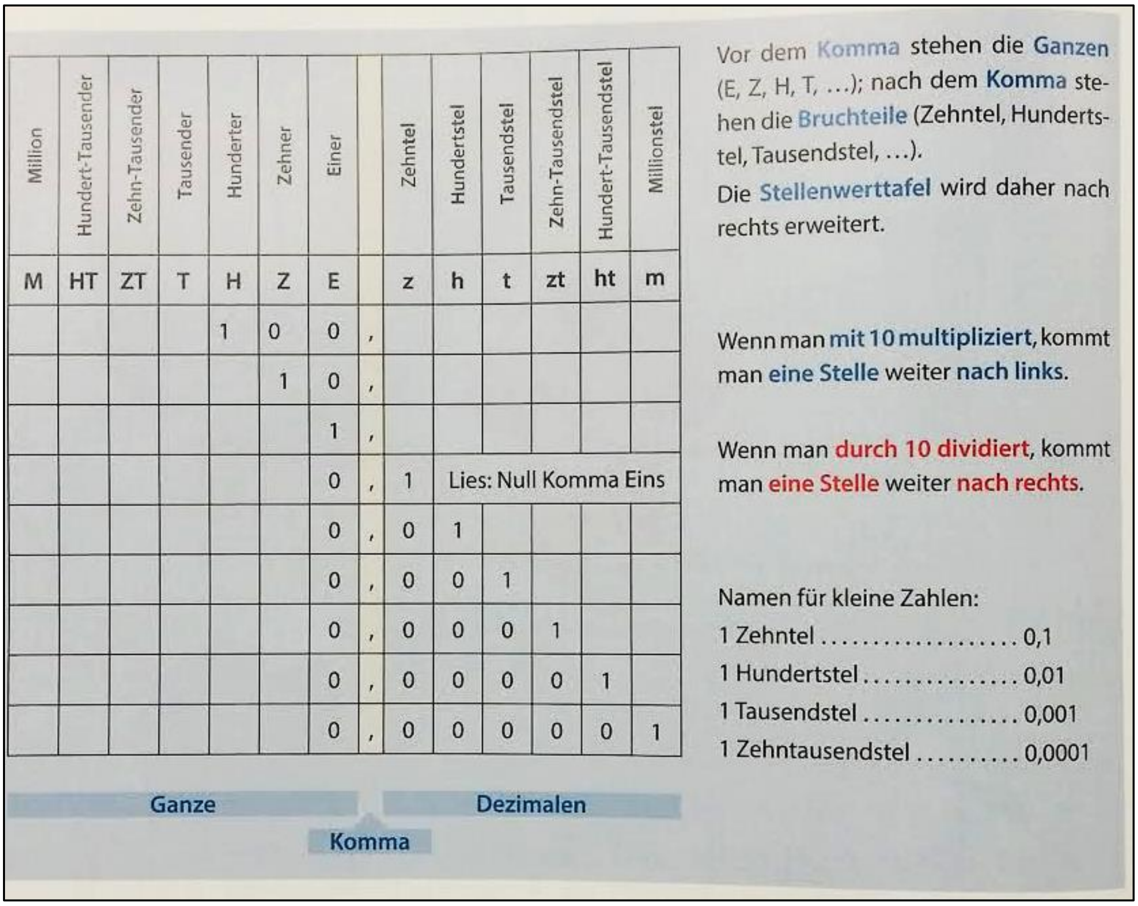
4.5.2.1 Dezimalzahlen

Das Kapitel Dezimalzahlen wird mit einer Doppelseite eröffnet, auf der verschiedene Gegenstände mit Preisschildern abgebildet sind. Die Aufgabe besteht darin, den Bezeichnungen die passenden Preise zuzuordnen. Diese Einführung soll augenscheinlich dazu dienen, die Schüler und Schülerinnen darauf hinzuweisen, dass sie bereits wissen, was Dezimalzahlen sind und wo sie im täglichen Leben vorkommen. Die Tatsache, dass dafür ausschließlich Geldbeträge verwendet werden ist wohl darauf zurückzuführen, dass zu einem späteren Zeitpunkt im Buch ein eigenes Kapitel zum Thema Größen folgt. Dennoch hätte man meiner Meinung nach diesbezüglich auf etwas mehr Diversität Wert legen können.

4.5.2.2 Stellenwert

Zu Beginn wird anhand einer Stellenwerttafel erklärt, wie diese im Vergleich zu den natürlichen Zahlen um Zehntel, Hundertstel, Tausendstel und so weiter erweitert wird. In meinen Augen wurde hier eine ungünstige Formulierung für die Regel zum Multiplizieren und Dividieren mit der Zahl Zehn gewählt. Es wird beschrieben (Siehe auch Abbildung 17):

„Wenn man mit 10 multipliziert, kommt man eine Stelle weiter nach links. Wenn man durch 10 dividiert, kommt man eine Stelle weiter nach rechts.“



Million	Hundert-Tausender	Zehn-Tausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer		Zehntel	Hundertstel	Tausendstel	Zehn-Tausendstel	Hundert-Tausendstel	Millionstel
M	HT	ZT	T	H	Z	E		z	h	t	zt	ht	m
				1	0	0	,						
					1	0	,						
						1	,						
						0	,	1	Lies: Null Komma Eins				
						0	,	0	1				
						0	,	0	0	1			
						0	,	0	0	0	1		
						0	,	0	0	0	0	1	
						0	,	0	0	0	0	0	1

Ganze

Dezimalen

Komma

Vor dem **Komma** stehen die **Ganzen** (E, Z, H, T, …); nach dem **Komma** stehen die **Bruchteile** (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, …).
Die **Stellenwerttafel** wird daher nach rechts erweitert.

Wenn man **mit 10 multipliziert**, kommt man **eine Stelle** weiter **nach links**.

Wenn man **durch 10 dividiert**, kommt man **eine Stelle** weiter **nach rechts**.

Namen für kleine Zahlen:
1 Zehntel 0,1
1 Hundertstel 0,01
1 Tausendstel 0,001
1 Zehntausendstel 0,0001

Abbildung 17: Stellenwerttafel, [Beer et. al., 2015, 158]

Gemeint sind hierbei die Werte der einzelnen Stellen in der Stellenwerttafel. Befindet man sich also zum Beispiel auf der Einerstelle (Im Grunde suggeriert die Formulierung sich vorzustellen, sich tatsächlich in der Tafel zu befinden), so führt eine Multiplikation mit Zehn (was genau hier mit Zehn multipliziert wird, wird nicht erwähnt) zu einer Positionsveränderung um eine Stelle nach links. Man befindet sich dann also auf der Zehnerstelle.

Problematisch ist in meinen Augen, dass es für die Schüler und Schülerinnen wohl schwierig ist nachzuvollziehen, welche Bedeutung diese Aussage tatsächlich hat. Noch schwerwiegender ist für mich jedoch die Gefahr der Verwechslung mit einer Kommaverschiebungsregel, welche für die Schüler und Schülerinnen vermutlich einfacher zu verstehen wäre. Diese lautet nämlich genau umgekehrt.

Didaktisch gesehen ist es vermutlich sogar sinnvoller, sich auf die Veränderung der Stellenwerte und nicht auf die Verschiebung des Kommas zu beziehen. Letzteres ist genau genommen nur eine Folge des zuerst genannten. Eine genauere Formulierung wäre an dieser Stelle dennoch sehr wünschenswert, um einer Verwechslung vorzubeugen.

Es folgen anschließend einige Aufgaben, bei denen mit Stellenwerttafeln gearbeitet werden muss. Diese führen zu einer genauen Betrachtung und Zerlegung der Zahlen in ihre Bruchteile. Laut

Heckmann und anderen[274] kann diese Vorgehensweise zu einem tieferen Verständnis des Aufbaus einer Dezimalzahl führen, was für spätere Themen sehr hilfreich sein kann. Dieser Abschnitt stellt also eine sehr wichtige Vorarbeit dar. Auch eine Aufgabe, welche die richtige Sprechweise fördert, ist vorhanden, was positiv vermerkt werden kann.

4.5.2.3 Dezimalzahlen vergleichen und ordnen

Im nächsten Abschnitt wird zu Beginn anhand eines Beispiels gezeigt, welche Bedeutung Nullen am Ende einer Dezimalzahl haben, woraufhin das Kürzen und Erweitern von Dezimalzahlen (also Anhängen und Wegstreichen von Endnullen) erklärt wird. Zum Vergleichen von Dezimalzahlen wird diese Regel jedoch nicht benutzt, was durchaus wichtig ist, da sich beispielsweise Padberg, aus bereits erwähnten Gründen, gegen diese Vorgehensweise ausspricht[275]. Stattdessen wird ein stellenweises Vorgehen von links nach rechts eingeführt. Zuerst werden die Ziffern vor dem Komma verglichen, dann die Zehntel, Hundertstel, Tausendstel und so weiter. Das Wissen zu den Endnullen ist hierfür dennoch wichtig, da die Schüler dann auch mit Fällen umgehen können, wo zwei Dezimalzahlen vorkommen, die eine unterschiedliche Zahl an Kommastellen besitzen.

Man könnte jedoch argumentieren, dass dieser Fall bei den folgenden Aufgabestellungen zu wenig oft auftritt, um dieses Wissen tatsächlich anwenden zu können. Bei den meisten Aufgaben werden nämlich Dezimalzahlen verglichen, welche dieselbe Anzahl an Kommastellen aufweisen.

Auch der Zahlenstrahl wird hier ausführlich thematisiert, was sehr positiv zu vermerken ist. Vor allem, weil auch die unterschiedlichen Skalierungen angesprochen, gezeigt und anhand von Beispielen überprüft werden.

4.5.2.4 Dezimalzahlen runden

Dieser Abschnitt des Werks bezieht sich auf das Runden von Dezimalzahlen. Dies bedarf keiner umfangreichen Erklärungen, da es analog zu den natürlichen Zahlen funktioniert. Dementsprechend finden sich hierzu hauptsächlich Beispiele auf den beiden Seiten die dem Thema gewidmet sind. Diese sind sehr vielseitig gewählt und beziehen sich auch auf die bereits gelernten Aspekte (also Stellenwerte, Größenvergleich und den Zahlenstrahl).

4.5.2.5 Dezimalzahlen in Brüche umwandeln

Wie bereits erwähnt bietet sich für dieses Schulbuch die Möglichkeit, einen Zusammenhang mit Brüchen herzustellen. In vielen anderen Büchern ist die Reihenfolge der Behandlung umgekehrt, weswegen analoge Kapitel in diesen wohl im Abschnitt zur Bruchrechnung zu finden sind.

---

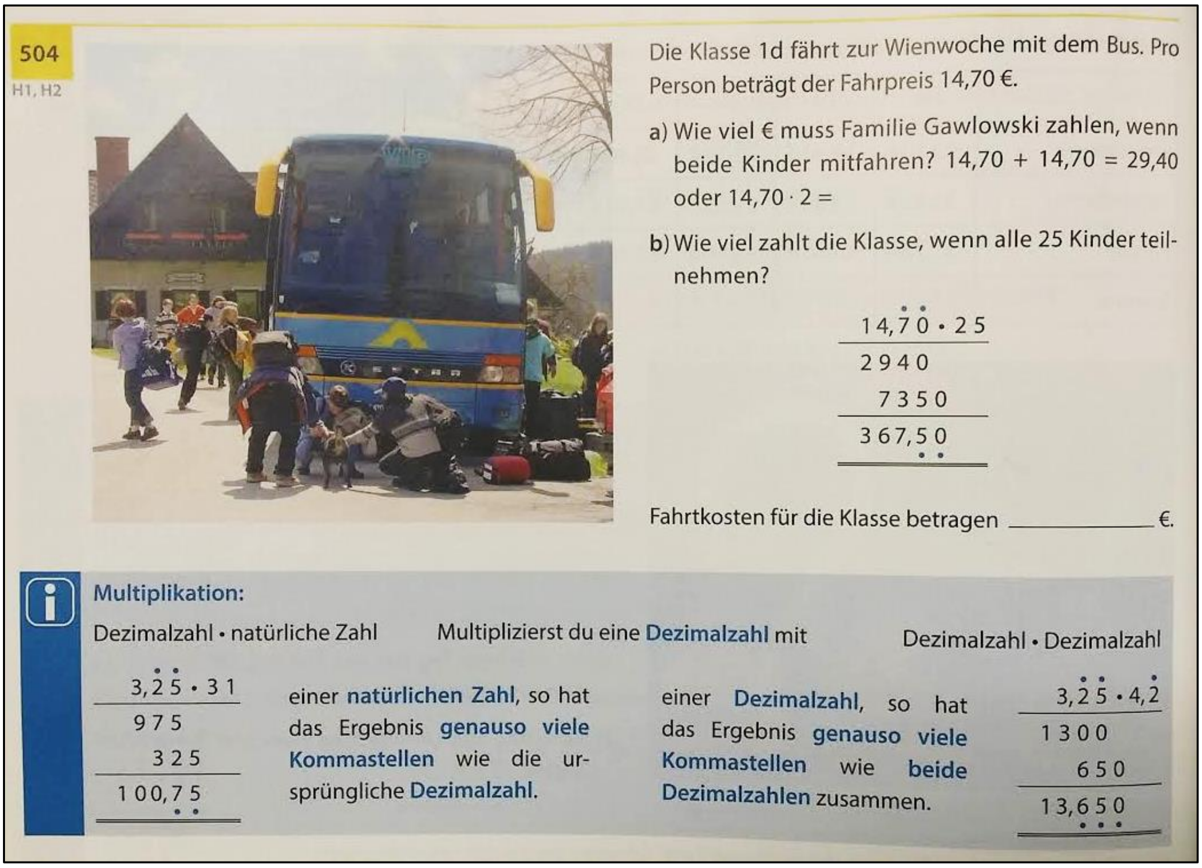
[274] Heckmann, 2005
[275] Padberg, 2012, 185f

Der Einstieg wird über eine Stellenwerttafel gewählt, indem jedem Stellenwert nach dem Komma ein Bruch zugewiesen wird (Der Name der Stellenwerte suggeriert ja schon den gesuchten Bruch). Die folgenden Aufgaben schulen dann auf vielfältige Art und Weise die Umwandlung von Dezimalzahlen in Zehnerbrüche. Für einige im Alltag häufig verwendete Brüche (zum Beispiel $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$) werden die Umrechnungen zusammenfassend gezeigt. Des Weiteren ist positiv anzumerken, dass abermals auf bereits gelernte Aspekte der Dezimalzahlen zurückgegriffen wird (Ähnlich wie beim Runden). Diese sind in einige Beispiele eingebettet, was eine gute Möglichkeit bietet, diverse Zusammenhänge aufzuzeigen.

4.5.2.6 Dezimalzahlen multiplizieren und dividieren

Die Multiplikation von Dezimalzahlen wird anhand eines Musterbeispiels eingeführt. In der Aufgabe geht es um einen Klassenausflug, bei dem die Fahrtkosten pro Person gegeben sind. Vorerst wird durch eine Addition berechnet wieviel für zwei Kinder gezahlt werden muss, anschließend sind die Fahrtkosten für die gesamte Klasse gesucht. Es wird also vom wiederholten Addieren auf die Multiplikation geschlossen.

Die darauffolgende Zusammenfassung (Siehe Abbildung 18) stellt parallel die Vorgehensweise bei der Multiplikation von Dezimalzahlen mit einer natürlichen Zahl und den Fall der Multiplikation zweier Dezimalzahlen dar. Zur Veranschaulichung wird der bereits gelernte Multiplikationsalgorithmus durchgeführt, wobei jedoch nicht erwähnt wird, dass vorerst ohne Beachtung des Kommas gerechnet wird. Obwohl dieser Aspekt durch die vorgerechneten Beispiele vermutlich klar wird, wäre er in meinen Augen dennoch erwähnenswert gewesen, um Unklarheiten vorzubeugen.



504
H1, H2

Die Klasse 1d fährt zur Wienwoche mit dem Bus. Pro Person beträgt der Fahrpreis 14,70 €.

a) Wie viel € muss Familie Gawlowski zahlen, wenn beide Kinder mitfahren? 14,70 + 14,70 = 29,40 oder 14,70 · 2 =

b) Wie viel zahlt die Klasse, wenn alle 25 Kinder teilnehmen?

14,70 · 25
2940
7350
367,50

Fahrtkosten für die Klasse betragen ________ €.

Multiplikation:

Dezimalzahl · natürliche Zahl

3,25 · 31
975
325
100,75

Multiplizierst du eine **Dezimalzahl** mit einer **natürlichen Zahl**, so hat das Ergebnis **genauso viele Kommastellen** wie die ursprüngliche **Dezimalzahl**.

Multiplizierst du eine **Dezimalzahl** mit einer **Dezimalzahl**, so hat das Ergebnis **genauso viele Kommastellen** wie **beide Dezimalzahlen** zusammen.

Dezimalzahl · Dezimalzahl

3,25 · 4,2
1300
650
13,650

Abbildung 18: Multiplikation von Dezimalzahlen, [Beer et. al., 2015, 168]

Positiv anzumerken ist, dass in einem Beispiel ein Ergebnis mit einer Null als letzte Kommastelle vorkommt. Diese soll zeigen, dass das Endergebnis genau genommen eine andere Anzahl an Kommastellen haben kann, als die beiden Faktoren zusammen (was ja eigentlich als Regel formuliert wird). Dadurch soll klar werden, dass die Endnull für das Setzen des Kommas wichtig ist.

Die Erklärungen fallen hier im Allgemeinen äußerst knapp aus, obwohl Potenzial für weitere Anmerkungen und Erläuterungen gegeben wäre. Beispielsweise hätte eine Umrechnung in Cent das Verfahren plausibel machen können, oder es hätte eine weitere Aufgabe für die Multiplikation zweier Dezimalzahlen gezeigt werden können.

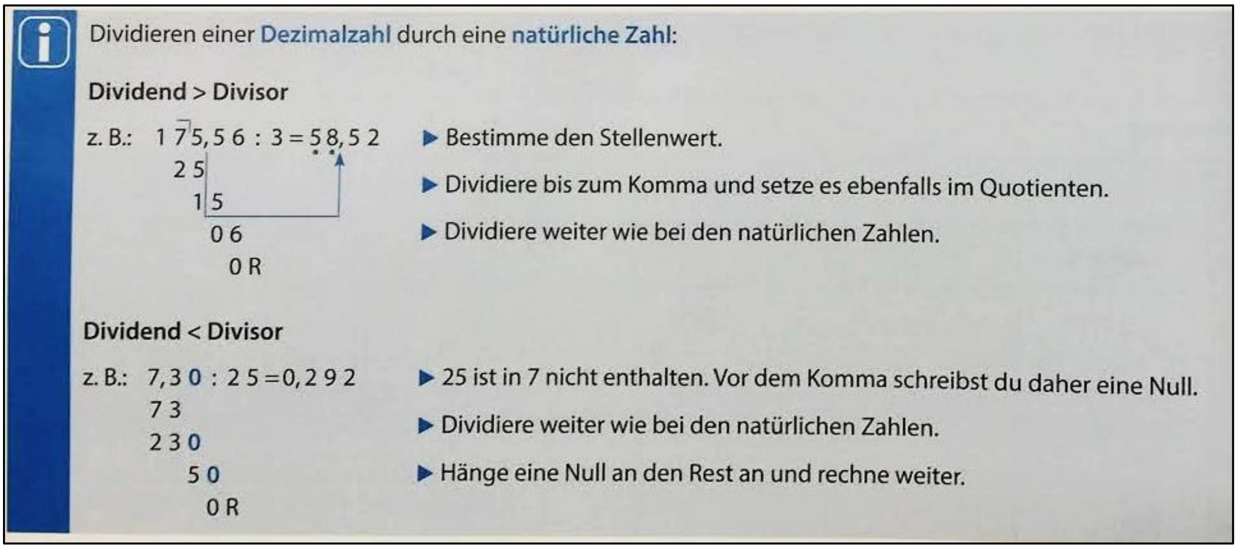
Anschließend finden sich drei Aufgaben, anhand derer die soeben gelernte Multiplikation geübt werden kann. Die Auswahl enthält noch keine Textaufgaben, also geht es in erster Linie nur um die Wiederholung der Vorgehensweise.

Zum Abschluss des Abschnittes wird die Multiplikation mit dekadischen Einheiten veranschaulicht und als Kommaverschiebung erklärt. Die zuvor erklärten Stellenwerte werden hier nicht mehr erwähnt, obwohl dadurch eine zusätzliche, hilfreiche Erklärung möglich wäre. Hierzu gibt es ebenfalls einige Beispiele, wobei nun auch drei kurze Textaufgaben hinzukommen.

Die Anzahl der Aufgaben, die hier angeboten werden, ist meiner Einschätzung nach nicht ausreichend, um eine Wiederholung der Inhalte und selbstständiges Üben der Schüler und Schülerinnen zu gewährleisten. Nachdem die Division behandelt wird, sind zwar noch einige Aufgabenstellungen zum Thema Multiplikation zu finden, dennoch bezweifle ich, dass dies für den Unterricht (und Hausübungen) genügt.

Die Division wird anhand einer Fortsetzung des oben erwähnten Beispiels erklärt. Nach dem Klassenausflug sind 88,75 Euro übergeblieben, welche auf die Klasse aufgeteilt werden sollen. Es wird also eine Division durchgeführt, um zu bestimmen, wieviel Euro jedes Kind zurückbekommt. Hier wird vorerst noch keine Erklärung bezüglich der Vorgehensweise geboten. Anschließend wird gezeigt wie gerechnet wird, wobei in einem Fall der Dividend größer ist als der Divisor und im anderen umgekehrt der Divisor größer als der Dividend. Dadurch wird sofort geklärt, dass das Ergebnis des zweiten Falles immer zwischen 0 und 1 liegen muss und es wird der entsprechenden Fehlvorstellung entgegengewirkt.

Die Kommasetzung wird mit der Überschreitung des Kommas im Dividenden gezeigt (Siehe Abbildung 19). Ansonsten wird nur darauf hingewiesen, dass die Stellenwertbestimmung und der restliche Divisions-Algorithmus analog zu den natürlichen Zahlen erfolgen. Auf die Interpretation der Division durch Messen oder Teilen und andere ergänzende Aspekte wird hier nicht eingegangen. Der Theorieabschnitt ist also abermals wenig ausführlich gestaltet.


Dividieren einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl:

Dividend > Divisor

z. B.: 175,56 : 3 = 58,52
25
15
06
0 R

▶ Bestimme den Stellenwert.
▶ Dividiere bis zum Komma und setze es ebenfalls im Quotienten.
▶ Dividiere weiter wie bei den natürlichen Zahlen.

Dividend < Divisor

z. B.: 7,30 : 25 = 0,292
73
230
50
0 R

▶ 25 ist in 7 nicht enthalten. Vor dem Komma schreibst du daher eine Null.
▶ Dividiere weiter wie bei den natürlichen Zahlen.
▶ Hänge eine Null an den Rest an und rechne weiter.

Abbildung 19: Division von Dezimalzahlen, [Beer et. al., 2015, 170]

Die folgenden Aufgaben sollen eine kurze Möglichkeit zum Üben bieten. Anschließend folgt, ähnlich wie bei der Multiplikation, eine Erweiterung der Kommaverschiebung durch die Division mit dekadischen Einheiten.

Als letzter Theorieteil findet sich die Division von Dezimalzahlen durch Dezimalzahlen, welche mithilfe der Erweiterung (beziehungsweise Kommaverschiebung) auf den zuvor behandelten Fall zurückgeführt wird. Sehr fragwürdig ist, dass nicht erklärt wird, warum diese Vorgehensweise möglich ist, besonders wenn man bedenkt, dass das Erweitern einer Division auch bei den natürlichen Zahlen nicht erklärt wurde. Es wird kein Wert darauf gelegt, dass die Schüler und Schülerinnen verstehen, was hinter der Regel steckt, sondern nur darauf geachtet, dass Aufgaben gelöst werden können. Abermals bestätigt sich also die Beobachtung, dass die Erklärungen in diesem Abschnitt des Buches sehr kurz gestaltet sind und auf viele nützliche Aspekte verzichtet wird.

Nachdem alle Teilgebiete behandelt wurden, finden sich noch zwei Seiten mit weiteren Aufgaben, sowohl zur Multiplikation als auch zur Division. Die zuvor sehr kleine Anzahl an Übungsbeispielen wird hier zum Abschluss nochmals aufgestockt. Textaufgaben beziehungsweise Beispiele mit Realitätsbezug sind leider dennoch nur sehr wenige vorhanden.

Was in dem Kapitel vollständig fehlt, ist die Überschlagsrechnung. Diese wäre meiner Meinung nach jedoch äußerst wichtig, da sie sehr einfach zur Überprüfung der Dimension des Ergebnisses verwendet werden kann und somit ein wichtiges Hilfsmittel darstellt. Auch die Probe zur Division (durch eine Multiplikation von Quotienten und Divisor) wird nicht nochmals in Erinnerung gerufen, obwohl diese Option schon in einem früheren Abschnitt des Schulbuches erklärt wurde.

4.5.2.7 Verbindung der vier Grundrechnungsarten mit Dezimalzahlen

Auf den letzten Seiten des Kapitels geht es um die Verbindung der vier Grundrechenarten, bevor die Themenseiten zur Abrundung des Kapitels folgen. Hier wird keine Theorie mehr erklärt, da alles Benötigte bereits zuvor erwähnt wurde. Ansonsten sind diese letzten beiden Seiten nach meinem Ermessen sehr gelungen, da sich eine ausgewogene Mischung an Aufgaben findet, mit der es möglich ist, das Gelernte nochmals zu wiederholen.

4.6 Vergleich ausgewählter Aspekte der betrachteten Schulbücher

Es soll nun zum Abschluss dieses Kapitels eine Übersicht geboten werden, um die soeben gesammelten Informationen in eine anschauliche Form zu bringen. Dafür werden die einzelnen Aspekte mit Werten von 1 bis 10 beurteilt, wobei 10 das beste Ergebnis ist. In die Bewertung fließen sämtliche Beobachtungen, die in Kapitel 4 gemacht wurden, mit ein. Die unten attestierte Gesamtnote ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der einzelnen Aspekte. Eine Gewichtung der diversen Gesichtspunkte wurde nicht vorgenommen.

Es ist klar, dass alle Einzelnoten natürlich sehr subjektiv sind und nur für die Behandlung der Dezimalzahlen eine gewisse Gültigkeit haben. Keinesfalls dürfen sie als allgemeine Bewertung verstanden werden, sondern müssen immer im Kontext des Themas betrachtet werden. Kurz gesagt, es handelt sich hierbei um die bescheidene Auffassung des Autors zu den Abschnitten über die Dezimalzahlen. Begründungen für die Bewertung sind aus den jeweiligen Kapiteln herauszulesen.

Die Titel der Schulbücher werden in der Tabelle wie folgt abgekürzt:

- Das ist Mathematik 1: DM
- Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1: MVÜA
- Mathematik verstehen 1: MV
- MathematiX 1: MX
- Genial! Mathematik: GM

	DM	MVÜA	MV	MX	GM
Aufbau und Einteilung	9	8	9	7	8
Erklärungen, Theorie und Musterbeispiele	7	4	7	6	4
Auswahl der Aufgabenstellungen[276]	9	8	8	7	7
Berücksichtigung von Fehlvorstellungen	6	6	8	4	5
Layout, Abbildungen, Übersichtlichkeit	8	7	8	6	8
Gesamtnote	7,8	6,6	8,0	6,0	6,4

Abbildung 20: Tabelle zur Bewertung der Schulbücher

[276] Dabei wurde in erster Linie auf die Anzahl, die Vielfältigkeit, und die Berücksichtigung häufiger Fehler Wert gelegt

Bei der Betrachtung fällt auf, dass vor allem im Bereich der theoretischen Erklärungen und bei der Berücksichtigung von Fehlvorstellungen Verbesserungspotenzial besteht. Diese beiden Aspekte hängen natürlich eng zusammen, wobei jedoch auch im Zuge der Aufgabenstellungen die Möglichkeit besteht, auf fehlerhafte Vorstellungen einzugehen. Dabei fällt vor allem das Werk „Mathematik Verstehen" auf, in dem sowohl bei den Aufgaben auf diesen Aspekt geachtet wird, als auch im Zuge der Theorie einige Problembereiche angesprochen werden.

Warum die Bücher „Mathemaik – Verstehen + Üben + Anwenden 1" und „Genial! Mathematik" vor allem bei der Theorie eine verhältnismäßig niedrige Bewertung erhalten haben, ist in den entsprechenden Kapiteln (4.4.2 und 4.5.2) nachzulesen.

Beim Aspekt Layout, Abbildungen und Übersichtlichkeit wurde vor allem darauf geachtet, ob mit anschaulichen Bildern, Tabellen und sonstigen Darstellungen gearbeitet wurde und ob die Seiten schematisch gut aufbereitet wurden.

Teil 5: Abschlussbemerkungen

In den Erkenntnissen der Arbeit spiegeln sich einige Punkte wieder, welche einen möglichen Bedarf an weiterer Forschung oder Umsetzung von Inhalten aufzeigen. Diese sollen hier in einer kurzen Liste zusammengefasst werden. Es handelt sich dabei um Ideen beziehungsweise Vorschläge des Autors, denen absichtlich keine Gewichtung bezüglich der Dringlichkeit beigefügt wurde. Die Auflistung soll denjenigen als Anstoß dienen, die sich für das behandelte Gebiet besonders interessieren beziehungsweise die in diese Richtung weiter forschen möchten.

- Die Umsetzung der Erkenntnisse in Österreichs Schulbüchern ist wohl die offensichtlichste der Entwicklungsmöglichkeiten, da sich gerade im letzten Kapitel gezeigt hat, dass an dieser Stelle (selbst bei den besten Büchern) noch einiges an Potenzial vorhanden ist. Dabei ist vieles sogar sehr einfach umsetzbar, da oft einige Ergänzungen oder kleine Änderungen für eine Verbesserung völlig ausreichen würden.
- Ein weiterer wichtiger Vorschlag wäre meiner Ansicht nach eine ausgedehnte Studie an österreichischen Schulen zum Thema Dezimalzahlen. Keine der benutzten Untersuchungen und Diskurse haben ihren Hintergrund im Inland, sondern kommen zu einem großen Teil aus dem Nachbarland Deutschland. Gerade die Tatsache, dass in den beiden Ländern unterschiedliche Schulsysteme und Lehrpläne bestehen, lässt vermuten, dass eine ähnliche Studie vermutlich (zumindest teilweise) unterschiedliche Ergebnisse hätte. Ganz abgesehen davon würden vergleichbare Outputs die Möglichkeit bieten, weitere Schlüsse zu ziehen, die beispielsweise Auskunft über Vor- und Nachteile des Lehrplans geben könnten. Padberg schlägt sogar vor, wie Testaufgaben einer solchen Untersuchung aussehen sollten, um einen guten Querschnitt an Fehlvorstellungen abzudecken[277].
- Der Zusammenhang der Dezimalzahlen mit Brüchen wäre ebenso ein interessanter Aspekt, dessen genauere Betrachtung wohl Vorzüge für die Vermittlung in der Schule bringen würde. Dabei geht es um die Frage, welche Vor- und Nachteile entstehen, wenn die Reihenfolge der Behandlung alterniert wird. Dafür bietet das deutsche Schulsystem eine willkommene Alternative zum österreichischen, da dort die systematische Behandlung der Bruchzahlen vor den Dezimalzahlen erfolgt[278]. In den inländischen Schulbüchern war zwar schon ein Trend

[277] Padberg, 1991a, 50ff
[278] Padberg, 1989, 394 bzw. Padberg, 2012, 346

dahingehend zu erkennen, dass Teile der Bruchrechnung sogar schon vor die Behandlung der Dezimalzahlen gezogen wurden, jedoch handelt es sich dabei immer nur um einzelne Teilgebiete.

- Abgesehen von der Reihenfolge bei der Behandlung der beiden Themengebiete, wäre es außerdem interessant zu untersuchen, ob eine parallele Behandlung von Dezimalzahlen und Brüchen nicht die meisten Vorteile bringen würde. Dieser Trend ist in Deutschland bereits eindeutig zu beobachten[279]. Hiermit würde man vor allem betonen, dass es sich lediglich um verschiedene Darstellungsformen beziehungsweise Schreibweisen derselben Zahlen handelt (was den meisten Schülern und Schülerinnen in vielen Klassen oft unklar sein dürfte)[280]. Die gleichzeitige Behandlung würde aber vermutlich noch weitere Vor- und Nachteile mit sich bringen, deren Auslotung sicherlich einen wichtigen Beitrag für die curriculare Entwicklung leisten würde. Padberg beobachtete einen solchen Trend bereits in manchen Bundesländern beziehungsweise Schulbüchern in Deutschland[281], was dafürspricht, dass bereits Erfahrungswerte bestehen, wenngleich auch keine empirischen Studien vorhanden sind. Ich persönlich halte die parallele Behandlung jedenfalls für einen interessanten Ansatz mit viel Potenzial. Marxer und Wittmann bieten zu diesem Thema einige Vorschläge an, die das Verständnis des Zusammenhanges zwischen Dezimalzahlen und Brüchen stärken sollen[282].
- Ein zusätzlicher Ansatzpunkt für eine Verbesserung der Unterrichtsqualität betreffend Dezimalzahlen ist bei der Lehrerinnenbildung zu finden. Padberg verortet hier in Deutschland in diesem Zusammenhang einen Mangel an den Universitäten und pädagogischen Hochschulen[283], der in weiterer Folge auch in Österreich nicht unrealistisch ist. Studien, die das belegen, sind mir zwar nicht bekannt, jedoch halte ich es für eine gewagte Annahme, dass diverse Fehlvorstellungen, typische Rechenfehler oder gar Konsequenzen für den Unterricht bei vielen Lehramt-Studierenden bekannt sind. Interessant wären diese Themen natürlich nicht nur für den tertiären Bildungssektor, sondern auch für Weiterbildungen für praktizierende Lehrer und Lehrerinnen. Zuvor wäre aber eine Evaluierung notwendig, welche diesen Bedarf tatsächlich bestätigen und womöglich auch eingrenzen kann. Eine Implementierung dieser Inhalte ist natürlich, nebenbei gesagt, nicht nur für den Bereich der Dezimalzahlen sinnvoll, sondern auch für viele andere Themengebiete.

[279] Vom Hofe, 2007, 12f
[280] Neumann, 2000, 48
[281] Padberg, 2012, 245f
[282] Marxer/Wittmann, 2013, 30ff
[283] Padberg, 2012, 252

Literaturverzeichnis

Bathelt, Inge/ Post, Susanne/ Padberg, Friedhelm. (1986). Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen. In: *Der Mathematikunterricht* (S. 29-44), Heft 3/1986. Hannover: Friedrich Verlag.

Beer, Rufolf/ Chelly, Astrid/ Ilias, Petra/ Jilka, Susanna/ Steffan, Christina/ Varelija, Gordan. (2014). *Genial! Mathematik: Lehr- und Arbeitsbuch für die 1. Klasse*. Wien: Bildungsverlag Lemberger.

Bigalke, Hans-Günther/ Hasemann, Klaus. (1978). *Zur Didaktik der Mathematik in den Klassen 5. und 6. 2*. Frankfurt am Main [u.a.]: Diesterweg.

Boxhofer, Emmerich/ Huber, Franz/ Lischka, Ulrike/ Panhuber, Brigitta. (2015). *MathematiX 1* (4. Auflage). Linz: Veritas Verlag.

Büchter, Andreas/ Henn, Hans-Wolfgang. (2010). *Elementare Analysis, Von der Anschauung zur Theorie*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Flade, Lothar. (1976). Zur Entwicklung von Rechenfertigkeiten und zu einigen typischen Schülerfehlern. In: *Mathematik in der Schule* (S. 371-376). Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag.

Gerster, Hans-Dieter. (2012). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie*. Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien. (Unveränderter Nachdruck der Originalausgabe. Diese erschien 1982 im Herder Verlag, Freiburg i.Br.)

Grosser, Notburga/ Koth, Maria. (2008a). *Alles klar! 3. Mathematik für wissbegierige Schulkinder*. Teil A. (2. Auflage). Linz: Veritas Verlag.

Grosser, Notburga/ Koth, Maria. (2008b). *Alles klar! 3. Mathematik für wissbegierige Schulkinder*. Teil B. (2. Auflage). Linz: Veritas Verlag.

Gravemeijer, Koeno. (1997). Informelles Rechnen mit Dezimalzahlen. In: *Mathematik lehren* (S. 21-49), Heft 83. Hannover: Friedrich Verlag.

Heckmann, Kirsten. (2005). Von Euro und Cent zu Stellenwerten, Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses. In: *Mathematica Didactica* (S. 71-87), Heft 28.

Heckmann, Kirsten. (2006a). Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde. Berlin: Logos Verlag.

Heckmann, Kirsten. (2006b). Zehntel, Hundertstel und andere Unbekannte – Zum Stellenwertverständnis von Sechstklässlern. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 243-246), Hildesheim und Berlin: Verlag Franzbecker.

Heckmann, Kirsten/ Padberg, Friedhelm. (2007). Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses bei Schülerinnen und Schülern der Klasse 6. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Teil 1) (S. 199-202), Hildesheim und Berlin: Verlag Franzbecker.

Heckmann, Kirsten. (2011). Ausbildung von Dezimalbruchverständnis über Sachprobleme? – Eine differenzierte Analyse. In: Der *Mathematikunterricht* (S. 55-62), Heft 3/2011. Hannover: Friedrich Verlag.

Hefedehl-Hebeker, Lisa/ Prediger, Susanne. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlenbereiche erweitern – Zahlenvorstellungen wandeln, In: *Praxis der Mathematik in der Schule* (S. 1-7), Heft 11. Köln/Leipzig: Aulis Verlag Deubner.

Helme, Sue/ Stacey, Kaye. (2000). Can Minimal Support for Teachers Make a Difference to Students' Understanding of Decimals?. In: *Mathematics Teacher Education and Development* (S. 105-120), Vol. 2.

Kramer, Jürg. (2008). *Zahlen für Einsteiger, Elemente der Algebra und Aufbau der Zahlenbereiche*. Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag.

Lewisch, Ingrid/ Zwicker, Thomas/ Mürwald-Scheifinger, Elisabeth/ Breunig, Eva/ Riehs Barbara. (2015). *Mathematik, Verstehen + Üben + Anwenden*, Band 1 (5. Auflage). Linz: Veritas Verlag.

Lorenz, Jens Holger. (2003). Der leere Zahlenstrahl, Eine Hilfe für das Rechnen in der Grundschule. In: *Mathematik Lehren*, Heft 117. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Marxer, Michael/ Wittmann, Gerald. (2012). Den Stellenwerten eine Bedeutung geben, Dezimalbrüche multiplizieren jenseits der Kommaverschiebung. In: *Mathematik lehren* (S. 44-48), Heft 171. Hannover: Friedrich Verlag.

Marxer, Michael/ Wittmann, Gerald. (2013). Auch Dezimalbrüche sind Brüche. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* (S. 30-34), Heft 52. Köln/Leipzig: Aulis Verlag Deubner.

Mehmetlioglu, Deniz. (2014). Misconceptions of elementary school students about comparing decimal numbers. In: *Science Direct, Procedia - Social and Behavioral Sciences* (S. 569-574), Vol. 152.

Moloney, Kevin/ Stacey, Kaye. (1997). Changes with Age in Students' Conceptions of Decimal Notation. In: *Mathematics Education Research Journal* (S. 25-38), Vol. 9, No. 1.

Mosandl, Corinna/ Sprenger, Lara. (2014). Von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalzahlen – Nicht immer ein einfacher Weg. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* (S. 16-21), Heft 56. Köln/Leipzig: Aulis Verlag Deubner.

Neumann, Rainer. (2000). Sind gemeine Brüche und Dezimalbrüche zwei verschiedene Arten von Zahlen oder zwei verschiedene Schreibweisen für ein und dieselben Zahlen?. In: *Der Mathematikunterricht* (S. 38-49), Heft 2/2000. Hannover: Friedrich Verlag.

Padberg, Friedhelm. (1986). *Didaktik der Arithmetik.* Zürich: Bibliographisches Institut.

Padberg, Friedhelm. (1989). Dezimalbrüche – Problemlos und leicht?. In: *Mathematisch Naturwissenschaftlicher Unterricht* (S. 387-395), 42/7. Bonn: Ferd. Dümmler Verlag.

Padberg, Friedhelm. (1991a). Testaufgaben bei Dezimalbrüchen, Diagnostische Tests zur Analyse von Problembereichen bei Dezimalbrüchen. In: *Mathematik lehren* (S. 49-58), Heft 46. Hannover: Friedrich Verlag.

Padberg, Friedhelm. (1991b). Problembereiche bei der Behandlung von Dezimalbrüchen – Eine empirische Untersuchung an Gymnasialschulen. In: *Der Mathematikunterricht* (S. 39-69), Heft 2/1991. Hannover: Friedrich Verlag.

Padberg, Friedhelm/ Danckwerts, Rainer/ Stein, Martin. (1995). *Zahlbereiche*. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, Friedhelm. (2004). Die Einführung der Dezimalbrüche – Ein Selbstläufer?. In: *Mathematik lehren* (S. 41-45), Heft 123. Hannover: Friedrich Verlag.

Padberg, Friedhelm. (2005). *Didaktik der Arithmetik, für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. (3. Auflage). München: Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, Friedhelm. (2012). *Didaktik der Bruchrechnung, für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. Auflage). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Pierce, Robyn/ Steinle, Vicky/ Stacey, Kaye/ Widjaja, Wanty. (2008). Understanding Decimal Numbers: A Foundation for Correct Calculations. In: *International Journal of Nursing Education Scholarship* (S. 1-15), Vol. 5, Issue 1, Article 7.

Postel, Helmut. (1991). Konzeption zur Behandlung der Dezimalbruchrechnung in der Bundesrepublik Deutschland. In: *Der Mathematikunterricht* (S. 5-21), Heft 2/1991. Hannover: Friedrich Verlag.

Reichel, Hans-Christian/ Humenberger, Hans (Hrsg.)/ Litschauer, Dieter/ Groß, Herbert/ Aue, Vera. (2011). *Das ist Mathematik 1* (1. Auflage). Wien: ÖBV-Verlag.

Resnick, Lauren/ Nesher, Pearla/ Leonard, Francois/ Magone, Maria/ Omanson, Susan/ Peled, Ipit. (1989). Conceptual Bases of arithmetic Errors: The case of Decimal Fractions. In: *Journal for Research in Mathematics Education* (S. 8-27), Vol. 20, No. 1.

Salzger, Bernhard/ Bachmann, Judith/ Germ, Andrea/ Riedler, Barbara/ Singer, Klaudia/ Ulovec, Andreas. (2014). Mathematik verstehen 1 (1. Auflage). Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Stiewe, Susanne/ Padberg, Friedhelm. (1986). Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Multiplikation natürlicher Zahlen. In: *Der Mathematikunterricht* (S. 18-28), Heft 3/1986. Hannover: Friedrich Verlag.

Thiemann, Kirsten. (2004a). Problematische Schülervorstellungen bei der Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* (S. 1-5), Heft 1. Köln/Leipzig: Aulis Verlag Deubner.

Thiemann, Kirsten. (2004b). Von Euro und Cent zum Stellenwert – Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses, In: *Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 581-585)*, Hildesheim und Berlin: Verlag Franzbecker.

Vamvakoussi, Xenia/ Vosniadou, Stella. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. In: *Learning and Instruction* (453-467), Vol. 14.

Vom Hofe, Rudolf. (2007). Varianten im Unterrichtsgang, Von den natürlichen zu den rationalen Zahlen. In: *Mathematik lehren* (S. 12-13), Heft 142. Hannover: Friedrich Verlag.

Wearne, Diane/ Hiebert, James. (1986). Über typische Schülerfehler im Bereich der Dezimalbrüche. In: *Der Mathematikunterricht* (S. 78-88), Heft 3/1986. Hannover: Friedrich Verlag.

Wearne, Diana/ Hiebert, James. (1989). Cognitive Changes During Conceptual Based Instruction on Decimal Fractions. In: *Journal of Education Psychology* (S. 507-513), Vol. 81, No. 4.

Yildiz, Cemalettin/ Taskin, Duygu/ Aydin, Mehmet/ Kögce, Davut. (2011). The effect of instructional materials on decimal fractions to the conceptual change. In: *ScienceDirect, Procedia - Social and Behavioral Science 15* (899-903).

Internetquellen

Homepage des BMB (letzter Zugriff: 4.2.2017):

https://www.bmb.gv.at/

Mathematik-Lehrplan für die AHS-Unterstufe (letzter Zugriff: 4.2.2017):

https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?5i81nt

Mathematik-Lehrplan für die Volksschule (letzter Zugriff: 4.2.2017):

https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/VS7T_Mathematik_3996.pdf?5i81op

Abbildungsverzeichnis