



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT/ DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Kompetenzorientierte Analyse von Typ-2-Aufgaben  
nach dem O-M-A-Modell“

verfasst von / submitted by

Christina Fuchs

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt/  
degree programme code as it appears  
on the student record sheet:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears  
on the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik  
UF Geschichte, Sozialkunde und  
Politische Bildung

Betreuer / Supervisor:

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz



## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während der Erarbeitung dieser Diplomarbeit unterstützt sowie motiviert haben und somit wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Zu Beginn möchte ich mich bei Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz für die tolle Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. Bereits zu Beginn hat er mir bei meiner Themenfindung wertvolle Tipps gegeben und mich überhaupt auf die Idee einer Zusammenarbeit mit dem BMB gebracht. Danke für die konstruktiven Hilfestellungen und die genauen Korrekturvorschläge.

Ein besonderer Dank gilt auch dem Bundesministerium für Bildung (BMB), allen voran Eva Sattlberger, für die vielen Unterlagen und Daten, die mir zur Verfügung gestellt wurden. Besonders geschätzt habe ich die Treffen mit Frau Sattlberger und Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Götz, bei denen wertvolle Überlegungen und Vorgehensweisen besprochen wurden.

Des Weiteren möchte ich mich bei allen Lehrerinnen und Lehrern für die Durchführung der Ratings und ihre damit zur Verfügung gestellte Zeit bedanken.

Herzlichen Dank an Johannes Schadenhofer für die vielen Ideen, wertvollen Überlegungen und Tipps sowie an Janine Schick und Lisa Dangl für das Korrekturlesen meiner Arbeit.

Ein riesiges Dankeschön gilt meiner Familie und meinem Freund Peter, die mich während meines gesamten Studiums unterstützt und vor allem während dem Verfassen dieser Arbeit immer wieder motiviert haben.





## Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung .....	7
2.	Allgemeines zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik .....	9
2.1.	Das Konzept .....	9
2.2.	Grundkompetenzen .....	10
2.3.	Aufgabentypen.....	12
2.4.	Aufgabenentwicklung.....	15
2.5.	Hilfsmittel und Technologie.....	16
2.6.	Das Beurteilungsschema .....	16
3.	Kompetenzmodelle .....	18
3.1.	Allgemeines zu Kompetenzmodellen.....	18
3.2.	Das Kompetenzmodell der österreichischen Bildungsstandards am Ende der achten Schulstufe .....	21
3.3.	Ein Modell mathematischer Kompetenzen der Kultusministerkonferenz in Deutschland.....	23
3.4.	Das Schweizer Modell für mathematische Grundkompetenzen .....	27
4.	Das O-M-A-Modell.....	30
4.1.	Ziele .....	30
4.2.	Die drei Handlungsdimensionen.....	30
4.3.	Die Stufung .....	33
4.4.	Das Modell.....	35
4.5.	Das Kompetenzdreieck.....	36
5.	Quantitative Untersuchung .....	38
5.1.	Die Forschungsfragen .....	38
5.2.	Das Rating .....	38
5.3.	Die Lösungshäufigkeiten .....	43
5.4.	Analyse einzelner Typ-2-Aufgaben.....	45
6.	Resümee .....	65
7.	Verzeichnisse .....	69
7.1.	Abbildungsverzeichnis .....	69
7.2.	Abkürzungsverzeichnis.....	70
7.3.	Literaturverzeichnis.....	70
8.	Anhang .....	75
8.1.	Grundkompetenzkatalog.....	75
8.2.	Handout zum Rating .....	81
8.3.	Typ-2-Aufgaben des Haupttermins 2016 der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik.....	82



## 1. Einleitung

Seit dem Schuljahr 2014/15 findet in Österreich an allen Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS) eine standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung statt. Diese zielt in erster Linie darauf ab, gleiche Bedingungen für alle Schülerinnen und Schüler zu schaffen und durch kompetenzorientierte standardisierte Aufgaben Objektivität, Vergleichbarkeit und Transparenz zu gewährleisten.

Die neue standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (SRPM) wurde von den Medien am häufigsten diskutiert und zählt auch bei den Schülerinnen und Schülern als Angstfach Nummer 1 (vgl. BRÜHL 2016). Der Grund dafür ist deren neuartige Gestaltung mit dem Fokus auf grundlegende mathematische Kompetenzen.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht das vom Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE)<sup>1</sup> entwickelte Kompetenzmodell, das O-M-A-Modell, das die Einteilung und die Vergleichbarkeit von Prüfungsaufgaben der SRPM ermöglichen soll.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in die vier Abschnitte: „Allgemeines zur SRPM“, „Kompetenzmodelle“, „Das O-M-A-Modell“ und „Quantitative Untersuchung“, welche nachfolgend kurz beschrieben werden:

Um einen Einblick in die SRPM zu geben, werden im ersten Teil der Arbeit die wichtigsten Rahmenbedingungen zur SRPM, die Grundkompetenzen, die beiden Aufgabentypen sowie die erlaubten Hilfsmittel erläutert und das Beurteilungsschema der SRPM kurz erklärt.

Der zweite Abschnitt der Arbeit beschäftigt sich mit Kompetenzmodellen. Es soll geklärt werden, wie Kompetenzmodelle aufgebaut sind und wie sich Kompetenzmodelle von Kompetenzstufenmodellen unterscheiden. Anschließend werden drei verschiedene Kompetenzmodelle aus Österreich, Deutschland und der Schweiz präsentiert.

Im dritten Teil wird das neu entwickelte O-M-A-Modell vorgestellt und dessen Ziele, dessen Verwendung und die grundlegenden Inhalte werden genauer erläutert.

Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit einer quantitativen Untersuchung zum O-M-A-Modell. Dabei ordneten Mathematik-AHS-Lehrerinnen und -Lehrer mittels Ratingbögen Aufgaben des

---

<sup>1</sup> Der (hier relevante) Wiener Teil des BIFIE ist seit 1. Jänner 2017 in das Bundesministerium für Bildung eingegliedert worden.

Haupttermins 2016 der SRPM dem O-M-A-Modell zu. Diese Ratings wurden ausgewertet und mit dem Ergebnis des BMB verglichen. Zusätzlich wurde anhand der Lösungshäufigkeiten der Kappa-Wert zur Überprüfung der Übereinstimmung der Raterinnen und Rater berechnet. Einzelne Items der Aufgaben wurden genauer analysiert und das Ergebnis wurde durch eine persönliche Stellungnahme abgerundet.

Die Arbeit schließt mit einem Vorschlag für einen Signalwörterkatalog und einer Einschätzung der Funktion des O-M-A-Modells ab.

## 2. Allgemeines zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik

### 2.1. Das Konzept

Das aktuelle Konzept der neuen SRPM wurde von der Projektgruppe „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen“ im Auftrag vom BIFIE Wien entwickelt. Die SRPM orientiert sich an bildungstheoretisch begründeten, im Lehrplan enthaltenen, grundlegenden mathematischen Kompetenzen und versucht dem Ruf nach Transparenz, Vergleichbarkeit und Objektivität gerecht zu werden. Im Zuge dieser zentralen, kompetenzorientierten Abschlussprüfung sollen die Grundkompetenzen, also mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten, die für das Fach grundlegend, längerfristig verfügbar und gesellschaftlich relevant sind, überprüft werden. Das Ziel des Mathematikunterrichts muss es jedoch nach wie vor sein, neben dem nachhaltigen Aufbau dieser Grundkompetenzen gleichzeitig den im Lehrplan enthaltenen Bildungsauftrag mit allen weiteren festgelegten Kompetenzen zu erfüllen. (Vgl. BIFIE 2013d, S.2-4.)

#### Bildungstheoretische Grundlage des Konzepts

Eine der grundlegendsten Aufgaben der Schule ist die Lebensvorbereitung. Das bedeutet, die Heranwachsenden mit dem notwendigen Wissen und Können auszustatten, damit sie für das Leben in unserer Gesellschaft gewappnet sind.

Die bildungstheoretische Orientierung des Konzepts beruht auf Überlegungen von Roland Fischer, der der Frage nach der Erwartungshaltung der Gesellschaft an das Fach Mathematik nachgeht (vgl. BIFIE 2013d, S.4).

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Fähigkeit zur Kommunikation mit Expertinnen und Experten ebenso wie mit der Allgemeinheit erwerben und auch als Vermittler agieren können. Voraussetzung dafür ist ein fundiertes Grundwissen über grundlegende mathematische Begriffe, Konzepte, Darstellungsformen und Anwendungsgebiete. Ein verständiger Umgang mit diesem Grundwissen erfordert auch Reflexion(-swissen), um fachliche Expertisen zu beurteilen und diese in den jeweiligen Kontext zu integrieren. Dabei spielt auch der Technologieeinsatz eine wesentliche Rolle. Der verstärkte Einsatz elektronischer Hilfsmittel ermöglicht neue Einblicke in die Schulmathematik. Die Ausführung von Problemlösungen wird immer seltener, dafür rücken die Planung und die anschließende Reflexion über die Ergebnisse in den Mittelpunkt.

Ein weiterer wesentlicher Aspekt ist die Weltorientierung: *„Die Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik als eine mögliche Art der Weltbegegnung erfahren [...] und für die mathematische Weltbegegnung typische Denktechnologien und Problemlösekompetenz kennen und anwenden lernen.“* (BIFIE 2013a, S.6)

Schließlich ist auch das Anknüpfen an weiterführende Bildungseinrichtungen (Universität, Fachhochschule, Pädagogische Hochschule) notwendig. Um diese Anforderungen zu erfüllen, muss vor allem der Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln sowie von Reflexion und Kommunikation mit und über Mathematik verstärkt werden. (Vgl. BIFIE 2013a, S.5 und BIFIE 2013d, S.1-5.)

## 2.2. Grundkompetenzen

Um dem wesentlichen Ziel der SRPM, der Sicherung mathematischer Grundkompetenzen an Österreichs AHS, gerecht zu werden, wurde im Auftrag des BMB ein Katalog von Grundkompetenzen entwickelt. Dieser ist im Konzept der SRPM *„Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik – Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung der mathematischen Grundkompetenzen“* (BIFIE 2013c und BIFIE 2013d) enthalten und somit für jeden zugänglich.

Diese grundlegenden Kompetenzen müssen den Schülerinnen und Schülern im Unterrichtsgegenstand Mathematik vermittelt werden. Der Katalog gilt auch als inhaltliche Basis für Prüfungsaufgaben der SRPM.

Der Grundkompetenzkatalog umfasst die vier Themenbereiche „Algebra und Geometrie“, „Funktionale Abhängigkeiten“, „Analysis“ und „Wahrscheinlichkeit und Statistik“. Jeder Inhaltsbereich ist bildungstheoretisch begründet und enthält mehrere Teilabschnitte, denen die Grundkompetenzen zugeordnet sind.

### Algebra und Geometrie

Die Algebra gilt als die Sprache der Mathematik und verdeutlicht Generalisierung und operative Beweglichkeit. Im Mittelpunkt stehen Variablen, deren verständiger Umgang und die Algebra als ein System von Regeln zur formal-operativen Umformung. Der Bereich „Algebra und Geometrie“ beinhaltet Grundkompetenzen zu den Themen Zahlenmengen und algebraische Begriffe, (Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme, Vektoren und Trigonometrie (vgl. BIFIE 2013d, S.6).

### Funktionale Abhängigkeiten

Der Inhaltsbereich „Funktionale Abhängigkeiten“, speziell der Umgang mit Funktionen sowie die Beziehung zwischen zwei (oder mehreren) Größen in verschiedenen Kontexten, erfordert vor allem entsprechendes Grundwissen und Kommunikationsfähigkeit.

Dieses Grundwissen im Bereich „Funktionale Abhängigkeiten“ beinhaltet den Funktionsbegriff (reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften), lineare Funktionen sowie Potenz-, Polynom-, Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktionen (vgl. BIFIE 2013d, S.9).

## Analysis

Im Mittelpunkt der Analysis stehen formale, kalkulatorische Beschreibungen von diskretem und stetigem Änderungsverhalten, die sowohl in der Mathematik als auch in vielen Anwendungsgebieten benötigt werden. Eine Kommunikation mit Expertinnen und Experten sowie mit der Allgemeinheit ist nur möglich, wenn mathematische Begriffe in verschiedenste Kontexte übergeleitet werden können und Zusammenhänge von Fachbegriffen erkannt, definiert und benannt werden können. Der Inhaltsbereich „Analysis“ umfasst Grundkompetenzen zu Änderungsmaßen (Differenzen- und Differenzialquotient), Differenzieren, Ableitungs- bzw. Stammfunktion sowie Summation und Integral (vgl. BIFIE 2013d, S.13).

## Wahrscheinlichkeit und Statistik

Für die Kommunikation mit der Allgemeinheit aber auch mit Expertinnen und Experten spielen die Interpretation, die Einschätzung und die Bewertung von stochastischen Begriffen und statistischen Darstellungen im jeweiligen Anwendungsgebiet eine bedeutende Rolle. In den vierten Inhaltsbereich „Wahrscheinlichkeit und Statistik“ fallen Grundkompetenzen zur beschreibenden Statistik, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (Grundbegriffe und Verteilungen) und zur schließenden bzw. beurteilenden Statistik (Konfidenzintervalle) (vgl. BIFIE 2013d, S.16).

Abbildung 1 veranschaulicht einen Ausschnitt aus dem Kompetenzkatalog, der die vier Grundkompetenzen zu Potenzfunktionen aus dem Inhaltsbereich „Funktionale Abhängigkeiten“ beschreibt.

Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$ , $z \in \mathbb{Z}$ , oder mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{z}} + b$	
FA 3.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 3.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter $a$ und $b$ ermitteln und im Kontext deuten können
FA 3.3	Die Wirkung der Parameter $a$ und $b$ kennen und die Parameter im Kontext deuten können
FA 3.4	Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = \frac{a}{x}$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$ ) beschreiben können
Anmerkung: Wurzelfunktionen bleiben auf den quadratischen Fall $a \cdot x^{\frac{1}{z}} + b$ beschränkt.	

Abbildung 1: Ausschnitt aus dem Kompetenzkatalog

## 2.3. Aufgabentypen

Bei der SRPM werden zwei Aufgabenformen, die Typ-1-Aufgaben und die Typ-2-Aufgaben, unterschieden. Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt insgesamt 270 Minuten. In Teil 1 müssen 24 Typ-1-Aufgaben, von denen jeweils sechs aus einem Inhaltsbereich stammen, innerhalb von 120 Minuten bearbeitet und anschließend abgegeben werden. Der anschließende Teil 2 umfasst vier bis sechs Typ-2-Aufgaben mit jeweils zwei bis sechs Teilaufgaben und dauert 150 Minuten. In den zwei folgenden Abschnitten werden die beiden Aufgabentypen näher erläutert (vgl. BIFIE 2013b, S.21-22 bzw. BIFIE 2013c, S.23, 26-31).

### 2.3.1. Typ-1-Aufgaben

Typ-1-Aufgaben konzentrieren sich auf die einzelnen Grundkompetenzen, die im Grundkompetenzkatalog enthalten sind. Jede Typ-1-Aufgabe hat genau eine Grundkompetenz im Visier. Typ-1-Aufgaben überprüfen kompetenzorientiert (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten und erfordern keine darüberhinausgehende Selbstständigkeit. Sie können acht unterschiedliche Antwortformate aufweisen. Diese gliedern sich in drei offene sowie fünf geschlossene Formate und werden nun kurz vorgestellt:

#### Offene Antwortformate:

- Das *offene Antwortformat* erfordert eine eigenständige Antwort zur Aufgabenstellung mit eigenen Worten.
- Beim *halboffenen Antwortformat* muss die korrekte Antwort oder ein vorgegebenes bzw. passendes mathematisches Objekt in eine vorgegebene Formel, Funktion etc. eingesetzt werden. Abbildung 2 zeigt ein Beispiel für ein halboffenes Antwortformat, bei dem ein Wert für einen Parameter angegeben werden muss.

Man kann mithilfe der Geradengleichung $X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$ den Mittelpunkt $M$ der Strecke $AB$ bestimmen.
<b>Aufgabenstellung:</b>
Geben Sie an, welchen Wert der Parameter $t$ bei dieser Rechnung annehmen muss!
$t =$ _____

Abbildung 2: Beispiel für das halboffene Antwortformat

- Das *Konstruktionsformat* erfordert das Eintragen von Graphen, Punkten, Vektoren o. Ä. in ein vorgegebenes Koordinatensystem. Beispielsweise könnte das Einzeichnen eines Graphen einer Stammfunktion verlangt sein, wie in der nachfolgenden Abbildung 3 dargestellt ist.



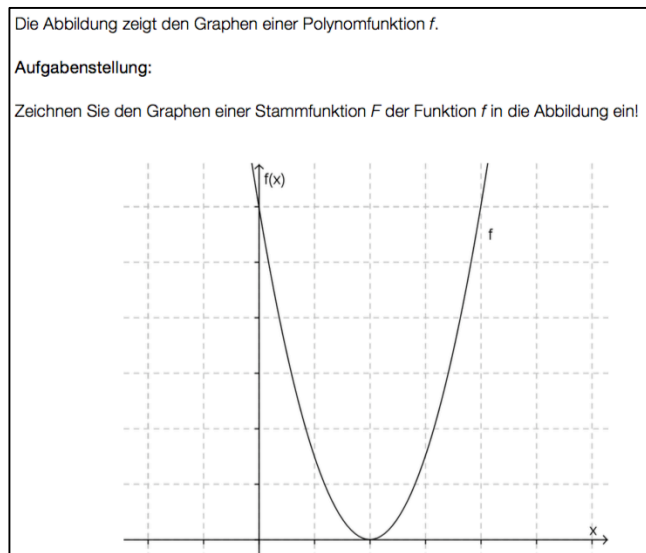


Abbildung 3: Beispiel für das Konstruktionsformat

**Geschlossene Antwortformate:**

- Es gibt drei unterschiedliche *Multiple-Choice-Aufgabenformate*, bei denen jeweils genau die richtigen Antworten angekreuzt werden müssen.
  - *2 aus 5*: Aus fünf Antwortmöglichkeiten müssen zwei ausgewählt werden. Aufgabenstellung: „Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!“
  - *1 aus 6*: Aus sechs Auswahlmöglichkeiten muss genau eine korrekte gewählt werden. Aufgabenstellung: „Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!“
  - *x aus 5*: Aus fünf Möglichkeiten müssen eine, zwei, drei, vier oder fünf Antworten angekreuzt werden. Aufgabenstellung: „Kreuzen Sie alle zutreffende(n) Aussage(n)/Gleichung(en) ... an!“

Abbildung 4 zeigt ein Multiple-Choice-Beispiel „x aus 5“. Hier muss erkannt werden, ob eine, zwei, drei, vier oder fünf Antworten korrekt sind.

Für die Oberfläche  $O$  eines Zylinders mit dem Radius  $r$  und der Höhe  $h$  gilt  $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$ .

**Aufgabenstellung:**  
Welche der folgenden Aussagen sind im Zusammenhang mit der gegebenen Formel zutreffend? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$O > 2r^2\pi + r\pi h$ ist eine Formel.	<input type="checkbox"/>
$2r^2\pi + 2r\pi h$ ist ein Term.	<input type="checkbox"/>
Jede Variable ist ein Term.	<input type="checkbox"/>
$O = 2r\pi \cdot (r + h)$ entsteht durch Umformung aus $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$ .	<input type="checkbox"/>
$\pi$ ist eine Variable.	<input type="checkbox"/>

Abbildung 4: Beispiel für eine Multiple-Choice-Aufgabe x aus 5

- Beim *Zuordnungsformat* müssen vier richtige von sechs gegebenen Aussagen korrekt zugeordnet werden. Abbildung 5 zeigt eine Aufgabenstellung im Zuordnungsformat, bei dem die Kandidatinnen und Kandidaten den vier Funktionen die richtige Ableitungsfunktion zuordnen müssen.

Gegeben sind vier Funktionen und sechs Ableitungsfunktionen.

**Aufgabenstellung:**

Ordnen Sie den Funktionen die richtige Ableitungsfunktion  $f'$  zu!

$f(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$		A $f'(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$
$f(x) = \cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$		B $f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)$
$f(x) = -2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$		C $f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$
$f(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$		D $f'(x) = -\cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
		E $f'(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
		F $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + \cos(x)$

Abbildung 5: Beispiel für das Zuordnungsformat

- Das achte Aufgabenformat, der *Lückentext*, besteht aus einem Satz mit zwei Lücken. Wie das nachfolgende Beispiel (Abbildung 6) zeigt, muss für jede Lücke die korrekte von drei möglichen Antworten gewählt werden. (Vgl. BIFIE 2013d, S.26-31 und BIFIE2013b, S.21-22.)

Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0 \text{ mit } p, q \in \mathbb{R}$$

**Aufgabenstellung:**

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die quadratische Gleichung hat jedenfalls für  $x$  ① in  $\mathbb{R}$ , wenn ② gilt.

①		②	
keine Lösung	<input type="checkbox"/>	$p \neq 0$ und $q < 0$	<input type="checkbox"/>
genau eine Lösung	<input type="checkbox"/>	$p = q$	<input type="checkbox"/>
zwei Lösungen	<input type="checkbox"/>	$p < 0$ und $q > 0$	<input type="checkbox"/>

Abbildung 6: Beispiel für das Lückentext-Format

### 2.3.2. Typ-2-Aufgaben

Typ-2-Aufgaben sind „*Aufgaben zur Anwendung und Vernetzung der Grundkompetenzen in definierten Kontexten und Anwendungsbereichen. Es handelt sich dabei um umfangreichere kontextbezogene oder auch innermathematische Aufgabenstellungen, bei denen eine selbstständige Anwendung von Wissen und Können erforderlich ist*“ (BIFIE 2013b, S.21).

Vor allem bei den Typ-2-Aufgaben kommt die bildungstheoretische Orientierung des Konzepts zum Vorschein. Folgende Charakteristika sind für Typ-2-Aufgaben bedeutend:

- Als Einleitung jeder Typ-2-Aufgabe dient ein informativer (erklärender) Text über den gegebenen (mathematischen) Kontext. Nicht alle Informationen darin sind zwingend für die Bearbeitung der Teilaufgaben erforderlich.
- Zu einem Kontext gibt es zwischen zwei und sechs inhaltlich zusammenhängende Teilaufgaben, wodurch die Aufgaben umfangreicher und komplexer sind.
- Diese Teilaufgaben sind jedoch unabhängig voneinander, d. h. die Bearbeitung einer Aufgabe ist auch möglich, wenn die vorhergehende nicht gelöst werden konnte.
- Die Aufgabenstellungen können anwendungsorientiert, kontextorientiert oder innermathematisch sein.
- Bei Anwendungsgebieten, die nicht im Kontextkatalog<sup>2</sup> enthalten sind, werden notwendige Begriffe, Sachzusammenhänge und Größen im einleitenden Text erklärt.
- Die Anwendungs- oder Realitätsbezüge sollen zu einer inhaltlich sinnvollen und verständnisorientierten Anwendung der Mathematik führen. (Vgl. BIFIE 2013d, S.23-24.)

### 2.4. Aufgabenentwicklung

Jede Aufgabe der SRPM durchläuft im Vorhinein eine mehrteilige Qualitätsschleife: Zuerst wird eine Aufgabe mit Texten, Formeln, Abbildungen und Darstellungen von einer Aufgabenerstellerin bzw. einem Aufgabenersteller entwickelt. Anschließend erfolgt eine Überprüfung der Aufgabe in Kleingruppen. Sie wird auf ihre Verständlichkeit und die mathematische Korrektheit hin überprüft. Bei Typ-1-Aufgaben wird zusätzlich überprüft, ob eine eindeutige Zuordnung zu genau einer Grundkompetenz möglich ist. Wenn nötig, wird die Aufgabe nochmals von der Aufgabenerstellerin bzw. dem Aufgabenersteller überarbeitet.

Im nächsten Schritt wird die Aufgabe durch eine Expertengruppe, die sich aus Universitätsprofessorinnen bzw. -professoren, Fachdidaktikerinnen bzw. Fachdidaktikern sowie Vertreterinnen bzw. Vertretern der Schulaufsicht zusammensetzt, zusätzlich zu den

---

<sup>2</sup> Der Kontextkatalog enthält verschiedene Kontexte, die bei der SRPM vorausgesetzt und nicht erneut erklärt werden. Dieser Katalog ist im Kontextblatt der SRPM enthalten und online unter [https://www.srdp.at/fileadmin/user\\_upload/downloads/Bgleitmaterial/07\\_MAT/srdp\\_ma\\_konzept\\_2013-03-11.pdf](https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf) abrufbar.

Aspekten Qualität, Verständlichkeit und Korrektheit auf ihre Lehrplankonformität und ihren Schwierigkeitsgrad hin untersucht. Schließlich wird die Aufgabe bei Feldtestungen<sup>3</sup> eingesetzt und damit nochmals auf Qualität und Eignung für die Klausur überprüft. (Vgl. BIFIE 2013d, S.25 und BIFIE 2013e, S.8-10)

## 2.5. Hilfsmittel und Technologie<sup>4</sup>

Während der gesamten Klausur dürfen gewohnte Hilfsmittel<sup>5</sup> verwendet werden. Die Aufgaben in Teil 1 sind jedoch (weitgehend) ohne Technologie lösbar. Bis zum Haupttermin 2017/18 dürfen in Teil 2 die gewohnten Hilfsmittel verwendet werden.

Ab dem Haupttermin 2018 wird jedoch der Einsatz von höherwertiger Technologie verpflichtend. Laut Reifeprüfungsverordnung (RPVO) muss diese Technologie mindestens eine Dynamische-Geometrie-Software, eine Tabellenkalkulation sowie ein Computer-Algebra-System enthalten. Weitere Minimalanforderungen sind grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen, zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen, zur numerischen Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik (vgl. BIFIE 2013c, S.24 und BIFIE 2013d, S.24).

## 2.6. Das Beurteilungsschema

Die Korrektur der Klausur wird durch die Fachlehrerin bzw. den Fachlehrer anhand zentral vorgegebener Korrektur- und Beurteilungsanleitungen unter Berücksichtigung der Bestimmungen der Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO) durchgeführt.

Typ-1-Aufgaben spielen dabei eine wesentliche Rolle, da sie laut LBVO den „wesentlichen Bereich“ darstellen. Dazu kommen lediglich einzelne Komponenten von Typ-2-Aufgaben, die ebenfalls zur Überprüfung von einzelnen Grundkompetenzen herangezogen werden und als Aufgabenteile mit Ausgleichspunkten bezeichnet werden. Typ-1-Aufgaben werden grundsätzlich mit 0 Punkten (falsch) oder 1 Punkt (richtig) beurteilt.

Die Typ-2-Aufgaben sind für die Vergabe der Noten „Befriedigend“, „Gut“ und „Sehr gut“ relevant. Sie stellen die „(weit) über das Wesentliche hinausgehenden Bereiche“ dar. Bei Typ-2-Aufgaben mit offenen Antwortformaten können zwischen 0 und 2

---

<sup>3</sup> Bei *Feldtestungen* werden verschiedene, neu entwickelte Aufgaben, also potenzielle Maturaaufgaben, von Schülerinnen und Schülern der 10. und 11. Schulstufe der AHS bearbeitet. Anschließend werden die Ergebnisse statistisch ausgewertet, wodurch Informationen über die Verständlichkeit und die Schwierigkeit der Aufgaben gewonnen werden können (vgl. BIFIE 2013e, S.9-10).

<sup>4</sup> *Technologie* meint in diesem Zusammenhang die elektronischen Werkzeuge wie einfache und grafikfähige Taschenrechner, CAS-Rechner, Tabellenkalkulation (z. B. Excel) und dynamische Geometriesoftware (z. B. GeoGebra) (vgl. BIFIE 2013b, S.92-93).

<sup>5</sup> Als *gewohnte Hilfsmittel* gelten neben dem Taschenrechner und GeoGebra auch die herkömmlichen Schreibgeräte – Bleistifte, Lineal, Geo-Dreieck und Zirkel – sowie ab dem Haupttermin 2017/18 eine standardisierte Formelsammlung des BMB (vgl. BIFIE 2013d, S.24).

Punkte pro Teilaufgabe erreicht werden. Die untenstehende Grafik (Abbildung 7) zeigt das Beurteilungsmodell der SRPM. Darin wird versucht, die Notenstufung zu verdeutlichen.

		Typ-1-Aufgaben		Typ-2-Aufgaben	
Stufen – verbale Beschreibung		„Schülerinnen und Schüler verfügen über ein mathematisches Grundwissen, welches durch einen Katalog von Grundkompetenzen festgelegt ist, und das sie in einer elementaren, für jeweils eine bestimmte Grundkompetenz (proto-)typischen Anwendungs- bzw. Kommunikationssituation (direkt) einsetzen können. Besondere Eigenständigkeit in der Anwendung, Reflexion und Vernetzung dieses Grundwissens ist dabei nicht erforderlich.“		Einzelne Komponenten aus Typ-2-Aufgaben werden zusätzlich zur Überprüfung der Grundkompetenzen herangezogen.	
gradueller Abstufungen		wesentliche Bereiche		über das Wesentliche	
		„überwiegend erfüllt“		„zur Gänze erfüllt“	
				„hinausgehend“	
				„weit hinausgehend“	
Genügend *	entw.	[Bar chart: 16 green bars]		[Bar chart: 8 green bars]	
	oder	Defizit ← [Bar chart: 8 green bars]		[Bar chart: 8 green bars]	
Befriedigend *	entw.	[Bar chart: 16 green bars]		[Bar chart: 8 green bars]	
	oder	Defizit ← [Bar chart: 8 green bars]		[Bar chart: 8 green bars] „hinausgehend“	
Gut *	entw.	[Bar chart: 16 green bars]		[Bar chart: 8 green bars]	
	oder	Defizit ← [Bar chart: 8 green bars]		[Bar chart: 8 green bars] „hinausgehend“	
Sehr gut *	entw.	[Bar chart: 16 green bars]		[Bar chart: 8 green bars]	
	oder	Defizit ← [Bar chart: 8 green bars]		[Bar chart: 8 green bars] „hinausgehend“ „weit hinausgehend“	

\* Es werden die jeweiligen Minimalvarianten dargestellt.

Abbildung 7: Beurteilungsmodell der SRPM

Wie in Abbildung 7 erkennbar ist, müssen für ein positives Prüfungsergebnis die „wesentlichen Bereiche überwiegend erfüllt“ sein. Für ein „Genügend“ müssen mindestens zwei Drittel der Punkte erreicht, also 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst werden. Schafft die Kandidatin bzw. der Kandidat im ersten Teil keine 16 Punkte, werden die Ausgleichspunkte aus Teil 2 herangezogen. Werden dadurch 16 Punkte erreicht, ist die Arbeit positiv, bei weniger als 16 Punkten wird sie negativ beurteilt.

Nur jene Kandidatinnen und Kandidaten, die in Teil 1 inklusive der Ausgleichspunkte 16 oder mehr Punkte erreichen, können je nach Anzahl der erfolgreich gelösten Teil-2-Aufgaben die Noten „Befriedigend“ (24–32 Punkte), „Gut“ (33–40 Punkte) und „Sehr gut“ (41–48 Punkte) erhalten. (Vgl. BIFIE 2013d, S.33-35.)

### 3. Kompetenzmodelle

#### 3.1. Allgemeines zu Kompetenzmodellen

Die Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen definiert „Kompetenzmodelle“ als „prozessorientierte Modellvorstellungen über den Erwerb von fachbezogenen oder fächerübergreifenden Kompetenzen. Sie strukturieren Bildungsstandards innerhalb eines Unterrichtsgegenstandes und stützen sich dabei auf fachdidaktische sowie fachsystematische Gesichtspunkte“ (VO BIST §2.4.).

Im Allgemeinen können Kompetenzmodelle unterschiedliche Dimensionen aufweisen. Ein Beispiel für ein eindimensionales Kompetenzmodell ist das *Kompetenzmodell Deutsch/Lesen/Schreiben 4. Schulstufe*, das in den österreichischen Bildungsstandards festgehalten ist. Die nachfolgende Grafik (Abbildung 8) zeigt die wesentlichen Bereiche des Deutschunterrichts in der 4. Schulstufe.

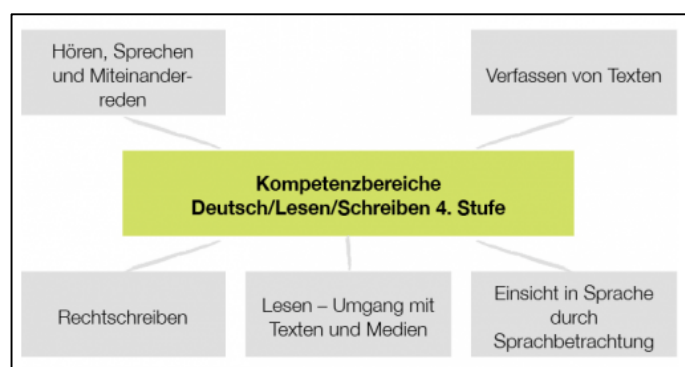


Abbildung 8: Kompetenzmodell Deutsch/Lesen/Schreiben 4.Schulstufe

Das *Kompetenzmodell Mathematik 4. Schulstufe* kann als zweidimensionales Kompetenzmodell betrachtet werden. Wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist, stellt eine Kompetenz immer eine Verknüpfung aus einem allgemeinen und einem inhaltlichen Bereich dar. Die in Abbildung 9 dargestellte Kompetenz meint das Kommunizieren im Bereich Arbeiten mit Ebene und Raum (vgl. BIFIE 2017).

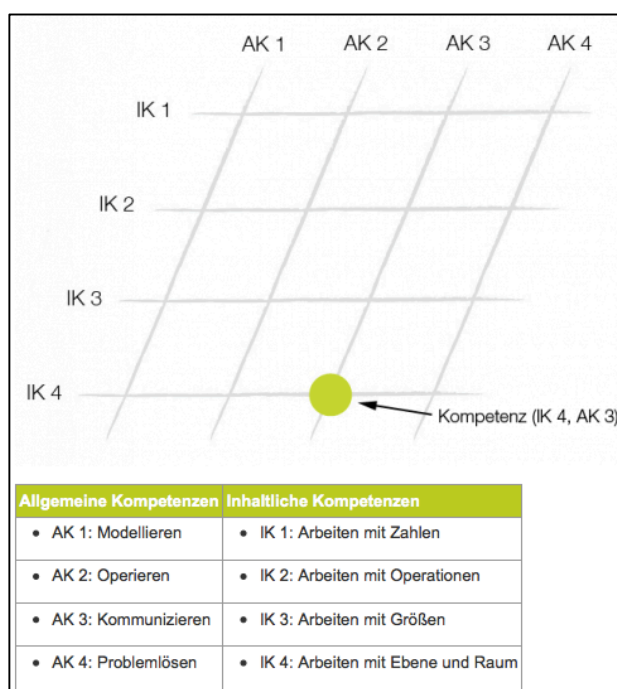


Abbildung 9: Kompetenzmodell Mathematik 4. Schulstufe

Hilbert Meyer, ein deutscher Professor für Schulpädagogik, definiert ein Kompetenzstufenmodell als „ein *theoretisches Konstrukt, in dem ein bestimmtes Bildungsverständnis und empirische Einsichten in die Gesetzmäßigkeiten des Lehrens und Lernens enthalten sind*“ (MEYER 2007, S.2).

Gemeinsam mit den Lehrerinnen Liane Paradies und Christel Wopp entwickelte Hilbert Meyer ein allgemeines Strukturmodell (Abbildung 10) mit normativ-theoretischer und zugleich praktischer Orientierung mit dem Ziel, die Selbstregulierungskräfte der Schülerinnen und Schüler zu unterstützen. Zusätzlich empfiehlt er jedem Lehrenden, ein eigenes fachliches oder unterrichtsmethodisches Kompetenzstufenmodell zu entwickeln<sup>6</sup> (vgl. MEYER 2015, S.156).

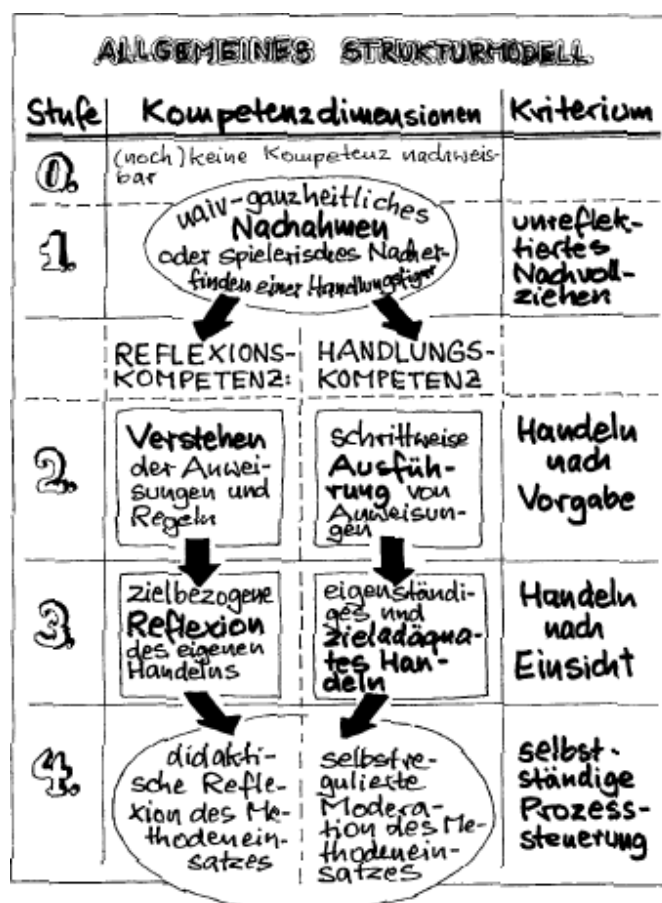


Abbildung 10: Allgemeines Strukturmodell

Meyer schlägt vor, sich auf vier Kompetenzstufen zu beschränken und diese als unreflektiertes Nachvollziehen einer Handlung, Handeln nach Vorgabe, Handeln nach Einsicht und selbstständige Prozesssteuerung zu definieren. Zusätzlich betont er, dass die Stufen aufeinander aufbauen und Kompetenzen einer höheren Stufe nur gemeistert werden können, wenn die darunterliegenden Stufen auch beherrscht werden, dies nennt er die „Tektonik“ einer Kompetenz (vgl. MEYER 2015, S.156-257).

<sup>6</sup> Eine Anleitung dazu gibt Meyer in seinem Buch Leitfaden Unterrichtsvorbereitung (2015) Sechste Lektion – Abschnitt 3.4. (S.156-158)

Allgemeine Kompetenzstufenmodelle erfüllen die zwei grundlegenden Funktionen Diagnose und Bewertung. Sie sollen einerseits die Entwicklung von Kompetenzen beschreibbar und andererseits den Kompetenzstand der Lernenden messbar machen.

Für mathematische Kompetenzstufenmodelle werden folgende weitere Ziele formuliert: Sie sollen die Komplexität und Art der Vernetzung der in den Grundkompetenzen geforderten mathematischen Handlungen beschreiben. Des Weiteren können sie zum Vergleich für das Anforderungsniveau der Prüfungsaufgaben dienen, bei der Erstellung von Prüfungsaufgaben helfen, aber auch zur Orientierung für das Anforderungsniveau des Unterrichts verwendet werden. Zusätzlich eignet sich ein Kompetenzstufenmodell zur Analyse von Kompetenzen, zur Begleitung eines Lernprozesses und zur Beschreibung sowie zur Analyse von Kompetenzerwartungen. Für Lehrerinnen und Lehrer bietet es ein Konstrukt zur Kompetenzbeurteilung und es hilft bei der Auswahl von Prüfungsaufgaben hinsichtlich einer vergleichbaren Anforderungsbreite und -tiefe.

Vor allem in internationalen Vergleichsstudien<sup>7</sup> zum Mathematikunterricht werden Kompetenzstufen konkretisiert, wodurch Testleistungen inhaltlich gedeutet werden können. Erfüllen Schülerinnen und Schüler die Anforderungen einer bestimmten Kompetenzstufe, so lässt sich daraus schließen, dass sie auch Anforderungen niedrigerer Kompetenzstufen gerecht werden, aber nicht unbedingt jenen einer höheren Kompetenzstufe. Somit dienen Kompetenzstufenmodelle auch der Vergleichbarkeit und der Einstufung von vorhandenen Aufgaben und helfen bei der Erstellung dieser.

Kompetenzmodelle im deutschsprachigen Raum umfassen Inhaltsbereiche, allgemeine mathematische Kompetenzen und Kompetenzniveaus. Die Kompetenzniveaus sind dabei oft nicht klar definiert und können nur anhand der empirischen Schwierigkeit beschrieben werden. Siller et al. betonen, dass es nicht nur ein einziges Kompetenzstufenmodell geben kann, sondern sowohl Voraussetzungen als auch Zielsetzungen je nach Einsatzbereich (Lehr-, Lern- oder Prüfungssituation) variabel sind. Außerdem würden sie als Stufung in Kompetenzmodellen nicht nur die empirische Schwierigkeit verwenden, sondern auch auf fachdidaktische und bildungswissenschaftlich begründete Vorarbeiten aufbauen. (Vgl. SILLER et al. 2015, S.77.)

In den folgenden Unterkapiteln werden drei verschiedene Kompetenzstufenmodelle betrachtet: das österreichische Modell der Bildungsstandards in Mathematik am Ende der 8. Schulstufe, ein Kompetenzstufenmodell der Kultusministerkonferenz (KMK) aus Deutschland und schließlich das Schweizer Konzept zu mathematischen Grundkompetenzen.

---

<sup>7</sup> Zu den bekanntesten internationalen Vergleichsstudien zählen u.a. OECD, PISA und TIMSS.



### 3.2. Das Kompetenzmodell der österreichischen Bildungsstandards am Ende der achten Schulstufe

Das Modell mathematischer Standards für den Mathematikunterricht am Ende der achten Schulstufe baut auf einem Standardkonzept des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur (BMBWK) aus dem Jahr 2004 auf und wurde 2006 von einem Team des Instituts für Didaktik der Mathematik der Universität Klagenfurt überarbeitet (vgl. IDM 2007, S.3). Es liegt ebenso wie das Konzept der SRPM den bildungstheoretischen Anforderungen der Lebensvorbereitung und der Anschlussfähigkeit (vgl. Abschnitt 2.1.) zugrunde. Das Modell beinhaltet die in den Bildungsstandards für Mathematik formulierten Kompetenzen und umfasst wesentliche Kernbereiche des Mathematikunterrichts. (Vgl. IDM 2007, S.7-9.)

Die mathematischen Kompetenzen enthalten drei unterschiedliche Dimensionen: Die erste Dimension ist die Handlungsdimension. Diese gibt an, welche Art von mathematischer Tätigkeit die mathematische Kompetenz verlangt – also was getan werden muss. Der zweite Bereich – die Inhaltsdimension – zeigt, auf welche Inhalte sich die Kompetenz bezieht, also womit etwas getan wird. Die dritte Dimension ist die Komplexitätsdimension und verdeutlicht die Art und den Grad der Vernetzung. (Vgl. IDM 2007, S.9.)

Das Modell mathematischer Kompetenzen fasst ähnliche mathematische Handlungen zu vier Handlungsbereichen (H1–H4) zusammen. „Verwandte“ Inhalte werden in vier Inhaltsbereiche (I1–I4) gegliedert und die Komplexitätsdimension teilt sich in drei Bereiche (K1–K3) auf.

In diesem Modell kamen neben dem Handlungsbereich Rechnen und Operieren (H2) auch die drei weiteren Handlungsbereiche Darstellen und Modellbilden (H1), Interpretieren (H3) sowie Argumentieren und Begründen (H4) dazu.

Die vier Inhaltsbereiche gliedern sich in Zahlen und Maße (I1), Variable, funktionale Abhängigkeiten (I2), geometrische Figuren und Körper (I3) sowie statistische Darstellungen und Kenngrößen (I4).

Die drei Komplexitätsbereiche umfassen den Einsatz von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K1), das Herstellen von Verbindungen (K2) und schließlich das Einsetzen von Reflexionswissen bzw. das Reflektieren (K3). (Vgl. IDM 2007, S.9-14.)

Jede mathematische Kompetenz wird also durch genau eine Handlung, einen bestimmten Inhalt und einen Komplexitätsbereich charakterisiert. Dadurch ergibt sich ein Tripel aus je einem Handlungs-, Inhalts- und Komplexitätsbereich. Insgesamt gibt es 48 Möglichkeiten für ein solches Tripel, also 48 mathematische Kompetenzen. (Vgl. IDM 2007, S.9.) In der untenstehenden Abbildung 11 wird beispielsweise die Kompetenz H3-I2-K2 dargestellt. Diese mathematische Kompetenz erfordert die Interpretation (H3) von Variablen bzw. funktionalen

Abhängigkeiten (I2) die miteinander in Verbindung gebracht werden müssen (vgl. IDM 2007, S. 7-14).

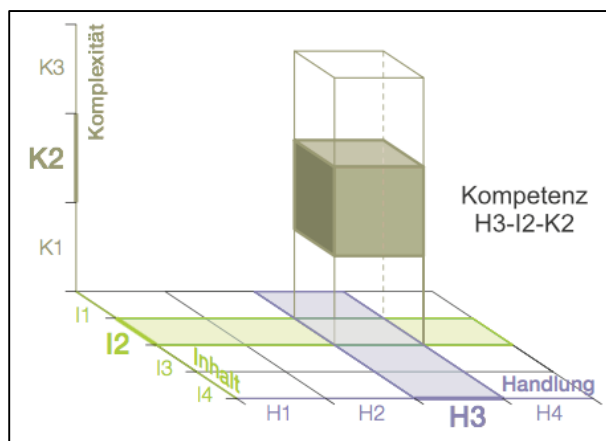


Abbildung 11: Kompetenzmodell am Ende der 8. Schulstufe

Im Allgemeinen müssen die Schülerinnen und Schüler bei der Kompetenz H3-I2-K2 algebraisch, tabellarisch oder grafisch dargestellte Strukturen und (funktionale) Zusammenhänge beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten, wobei dafür auch Verbindungen mit anderen mathematischen Inhalten (Begriffen, Sätzen, Darstellungen) oder Tätigkeiten hergestellt werden müssen.

Eine Beispielaufgabe zur Kompetenz H3-I2-K2 ist die in Abbildung 12 dargestellte Aufgabe „Polynommultiplikation“. Interpretieren (H3) erfolgt in diesem Zusammenhang, indem der Flächeninhalt der Gesamtfigur im Kontext als Produkt von Polynomen und die Teilflächen als Teilprodukte gedeutet werden. Die Aufgabe stammt aus dem Inhaltsbereich Variablen, funktionale Abhängigkeiten (I2) und meint im Speziellen grafisch dargestellte Rechenoperationen mit Termen. Der Komplexitätsbereich K2, das Herstellen von Verbindungen, erfordert bei dieser Aufgabe das Wissen um die Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks. Dieses Wissen wird wiederum mit der Fähigkeit verknüpft, das Verbinden mehrerer Strecken als Summe mehrerer Zahlen zu deuten (vgl. BIFIE 2011, S.52).

Die folgende Grafik stellt das Produkt von zwei Polynomen grafisch dar. Welche Polynome werden miteinander multipliziert? Lies aus der Grafik auch ab, welche Teilprodukte entstehen. Schreibe die Multiplikation der beiden Polynome sowie das Ergebnis der Multiplikation an.

$ay$	$by$	$cy$	$y$
$ax$	$bx$	$cx$	
$a \quad b \quad c$			

**Lösung bzw. möglicher Lösungsweg:**

$$(a+b+c) \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y + c \cdot x + c \cdot y$$

Abbildung 12: Beispiel für die Kompetenz H3-I2-K2

### 3.3. Ein Modell mathematischer Kompetenzen der Kultusministerkonferenz in Deutschland

In Deutschland steht der Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe im Zeichen einer vertieften Allgemeinbildung, allgemeiner Studierfähigkeit und wissenschaftspropädeutischer Bildung. Ziel ist es, Grundlagen zu schaffen, um den Anforderungen der Wissenschaft und der beruflichen Bildung gerecht zu werden.

Folgende drei Grunderfahrungen sollen den Schülerinnen und Schülern im Unterrichtsfach Mathematik laut KMK vermittelt werden:

- *„Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,*
- *Mathematik als geistige Schöpfung und auch deduktiv geordnete Welt eigener Art,*
- *Mathematik als Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden, insbesondere heuristischen Fähigkeiten.“ (KMK 2015, S.8)*

Die deutschen Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife können als Fortsetzung der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss gesehen werden, da die Kompetenzen der Sekundarstufe I auf jene der Sekundarstufe II aufbauen. Des Weiteren wird betont, dass für den Erwerb der Kompetenzen neben der Vernetzung der mathematischen Inhalte ebenso eine Kooperation mit anderen Fächern von Bedeutung ist.

Die KMK hat ebenfalls ein Kompetenzstufenmodell zu diesen Bildungsstandards entwickelt. Es umfasst sechs allgemeine mathematische Kompetenzen und fünf inhaltliche Leitideen. Zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), Mathematisch modellieren (K3), Mathematische Darstellungen verwenden (K4), Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) und schließlich Mathematisch kommunizieren (K6) gezählt. Die inhaltlichen Leitideen umfassen Algorithmus und Zahl (L1), Messen (L2), Raum und Form (L3), Funktionaler Zusammenhang (L4) sowie Daten und Zufall (L5). Anfänge der Analysis finden sich dabei in den Inhalten Algorithmus und Zahl, Messen und Funktionale Zusammenhänge. Lineare Algebra baut auf die Inhalte von L1 auf, erste analytische Geometrie findet man in L2 und L3 und Stochastik kommt bereits in den Inhaltsbereichen Messen, Funktionaler Zusammenhang sowie Daten und Zufall vor.

Allgemein gibt es drei Anforderungsbereiche, die unterschiedliche kognitive Ansprüche verlangen. Diese werden folgendermaßen beschrieben:

*„Anforderungsbereich I umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang, die Verständnissicherung sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren.*

*Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten, Erklären und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.*

*Anforderungsbereich III umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler selbstständig geeignete Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung der Aufgabe, wenden sie auf eine neue Problemstellung an und reflektieren das eigene Vorgehen.“ (KMK 2015, S.22)*

Allgemeine mathematische Kompetenzen können dabei nur in Verbindung mit den Leitideen, den Fachinhalten, erlangt werden und sind so untrennbar miteinander verknüpft. Jede der sechs allgemeinen Kompetenzen kann eigens gestuft betrachtet werden, d. h. jede der mathematischen Kompetenzen besitzt drei Kompetenzstufen, die nicht unbedingt dieselben sein müssen.

Im Konzept des Kompetenzmodells der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife wird jede mathematische Kompetenz mit den jeweiligen Ausprägungen der Anforderungsbereiche genau beschrieben. Abbildung 13 zeigt als Beispiel dazu eine Beschreibung der zweiten allgemeinen mathematischen Kompetenz K2, „Probleme mathematisch lösen“. Abbildung 14 beschreibt konkrete Ziele zu den drei Anforderungsbereichen.

**Die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ (K2)**

Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege. Das Spektrum reicht von der Anwendung bekannter bis zur Konstruktion komplexer und neuartiger Strategien. Heuristische Prinzipien, wie z. B. „Skizze anfertigen“, „systematisch probieren“, „zerlegen und ergänzen“, „Symmetrien verwenden“, „Extremalprinzip“, „Invarianten finden“ sowie „vorwärts und rückwärts arbeiten“, werden gezielt ausgewählt und angewendet.

Abbildung 13: Die Kompetenz Probleme mathematisch lösen

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

**Anforderungsbereich I:** Die Schülerinnen und Schüler können

- einen Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, z. B. durch Analogiebetrachtung, finden

**Anforderungsbereich II:** Die Schülerinnen und Schüler können

- einen Lösungsweg zu einer Problemstellung, z. B. durch ein mehrschrittiges, strategiestütztes Vorgehen, finden

**Anforderungsbereich III:** Die Schülerinnen und Schüler können

- eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems, z. B. zur Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heuristiken oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege, entwickeln und anwenden

Abbildung 14: Die Anforderungsbereiche zu Probleme mathematisch lösen

Grafisch lässt sich das deutsche Kompetenzstufenmodell ähnlich wie das österreichische Modell der Bildungsstandards als dreidimensionales Modell (Abbildung 15) darstellen. Jedoch unterscheidet sich das deutsche vom österreichischen Modell dadurch, dass einerseits eine andere Schulstufe angesprochen wird und andererseits die Anforderungsbereiche von Kompetenz zu Kompetenz variieren. (Vgl. KMK 2015, S.11-22 und MEYER 2015, S.148-150.)

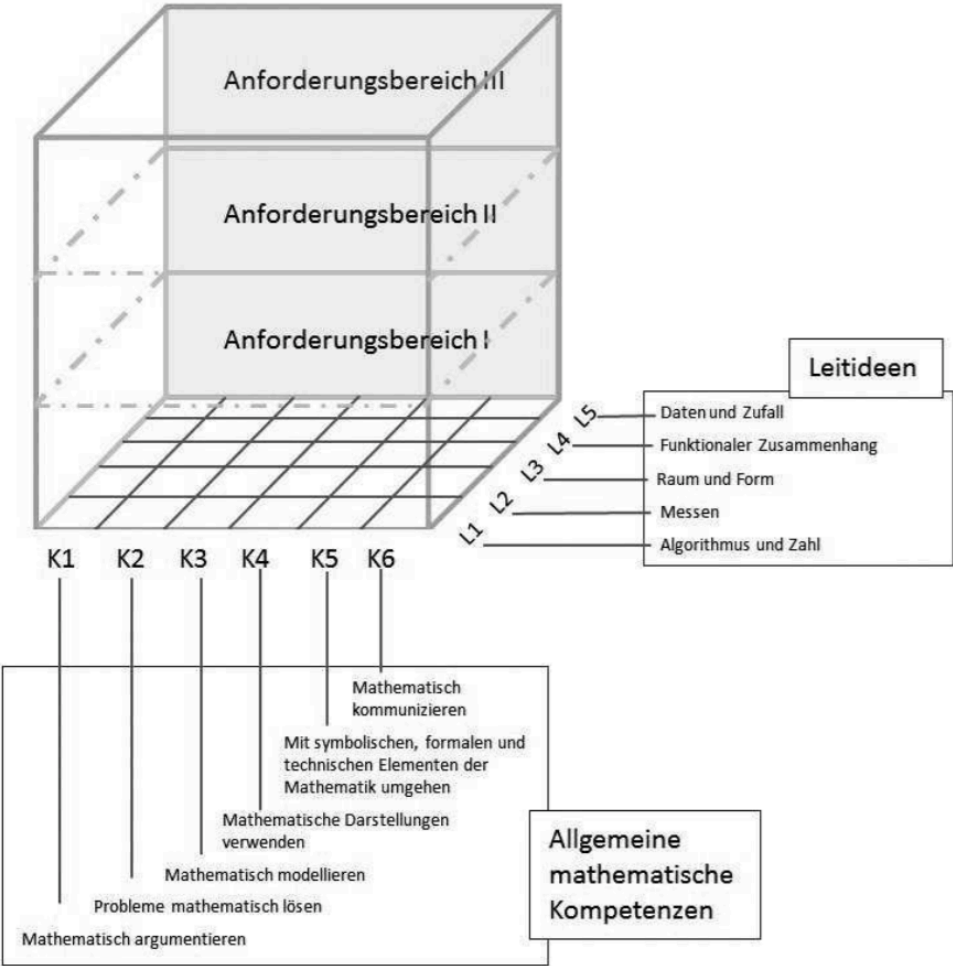
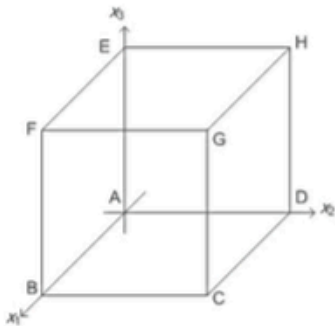


Abbildung 15: Modell mathematischer Kompetenzen der KMK

Die folgende Abbildung 16 zeigt ein Aufgabenbeispiel zum Kompetenzmodell der KMK. Bei dieser innermathematischen Aufgabe mit der Leitidee L3, Raum und Form, steht die Kompetenz K2, „Probleme mathematisch lösen“ im Mittelpunkt. Um die komplexe räumliche Situation zu verstehen, müssen die Schülerinnen und Schüler durch eine geeignete Strategie einen Lösungsweg finden. Dieser Vorgang wird dem Anforderungsbereich I (siehe Abbildung 14) zugeordnet. (Vgl. KMK 2015, S.11-32.)

In einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ist der Würfel  $ABCDEFGH$  durch die Eckpunkte  $A(0|0|0)$ ,  $B(4|0|0)$ ,  $D(0|4|0)$  und  $E(0|0|4)$  gegeben.



a)  
Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte  $C$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$  an.

Abbildung 16: Beispielaufgabe zu K2, L3 im Anforderungsbereich I

### 3.4. Das Schweizer Modell für mathematische Grundkompetenzen

In der Schweiz entwickelte die Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren ein mehrdimensionales Kompetenzmodell für mathematische Grundkompetenzen in Anlehnung an internationale Kompetenzmodelle. Dieses Modell umfasst Handlungsaspekte, (inhaltsbezogene) Kompetenzbereiche, verschiedene Kompetenzniveaus, eine Entwicklungsdimension und nichtkognitive Dimensionen.

Abbildung 17 zeigt die fünf Kompetenzbereiche („Zahl und Variable“, „Form und Raum“, „Größen und Masse“, „Funktionale Zusammenhänge“ und „Daten und Zufall“) sowie die acht Handlungsaspekte („Wissen, Erkennen und Beschreiben“, „Operieren und Berechnen“, „Verwenden von Instrumenten und Werkzeugen“, „Darstellen und Kommunizieren“, „Mathematisieren und Modellieren“, „Argumentieren und Begründen“, „Interpretieren und Reflektieren der Resultate“ und „Erforschen und Explorieren“). Die Tabelle kann zur Beschreibung einzelner Grundkompetenzen verwendet werden, indem man einem inhaltlichen Kompetenzbereich einen Handlungsaspekt zuordnet.



Abbildung 17: Beschreibung von mathematischen Kompetenzen

Das Besondere an diesem Modell ist, dass gleich drei Jahrgangsstufen darin behandelt werden. Es werden Grundkompetenzen nach der vierten Schulstufe sowie nach dem achten (am Ende der Primarstufe) und nach dem elften Schuljahr (am Ende der Sekundarstufe I) beschrieben. Die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen im Hinblick auf diese drei Jahrgangsstufen wird als Entwicklungsdimension bezeichnet.

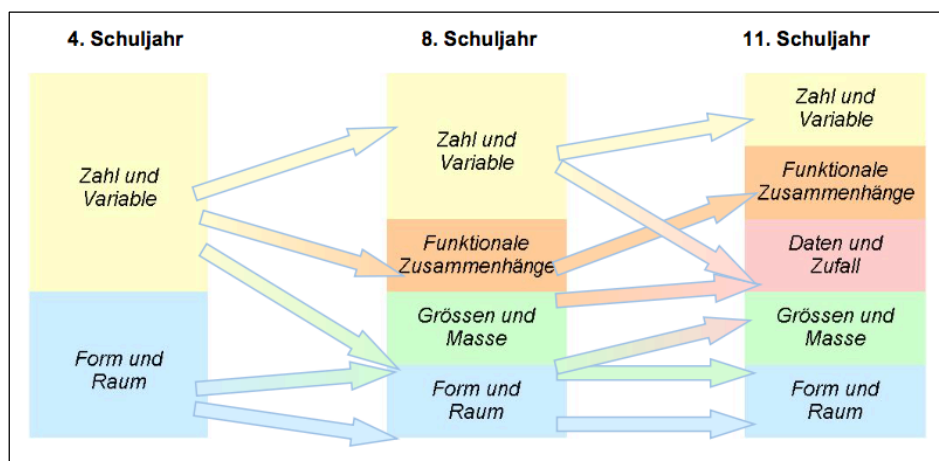


Abbildung 18: Kompetenzbereiche nach Schulstufen

Abbildung 18 macht deutlich, dass die Kompetenzbereiche im Laufe der Schuljahre zunehmen. Die Pfeile in der Grafik verdeutlichen die Entwicklung der Kompetenzbereiche, wodurch wieder neue Kompetenzbereiche entstehen können. Im achten Schuljahr werden die Kompetenzbereiche „Zahl und Variable“ und „Form und Raum“ um die Bereiche „Funktionale Abhängigkeiten“ und „Größen und Masse“ erweitert. Im elften Schuljahr kommt schließlich noch der Bereich „Daten und Zufall“ dazu. (Vgl. EDK 2011, S.6-9.)

Kompetenzniveaus legen unterschiedliche Ausprägungen einer mathematischen Kompetenz fest. Die folgende Tabelle (Ausschnitt aus LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN 2009, S.39) zeigt die vier Kompetenzniveaus, die für den Handlungsaspekt „Erforschen und Explorieren“ der 11. Schulstufe bestimmt wurden.

	<b>Kompetenzniveau I<sub>11</sub></b>	<b>Kompetenzniveau II<sub>11</sub></b>	<b>Kompetenzniveau III<sub>11</sub></b>	<b>Kompetenzniveau IV<sub>11</sub></b>
<b>Erforschen und Explorieren</b>	Zu einer Aussage oder von einem Sachverhalt ausgehend von einem Beispiel weitere Beispiele finden. Systeme mit wenigen Elementen und einfacher Struktur durch Variieren einzelner Elemente untersuchen.	Zu Aussagen oder Sachverhalten Beispiele finden und daraus Vermutungen gewinnen bzw. Vermutungen bestärken oder widerlegen. Die Struktur von Systemen durch systematisches Variieren einzelner Elemente untersuchen, dabei wird die Methode der Untersuchung durch die Aufgabenstellung oder durch Beispiele angeregt.	Einen Sachverhalt durch systematisches Ausprobieren und Durchspielen mehrerer oder gar aller Möglichkeiten explorieren. Strukturen durch systematisches Variieren verschiedener Elemente untersuchen und daraus situativ gültige Aussagen gewinnen.	Zu einem Sachverhalt Hypothesen aufstellen und durch geeignete Verfahren testen. Strukturen durch systematisches Variieren verschiedener Elemente untersuchen, optimale Lösungen identifizieren und aufgrund der gewonnenen Ergebnisse Vermutungen über allgemeine Gesetzmäßigkeiten formulieren.

Der Aspekt der „nichtkognitiven Dimensionen“ bezieht sich auf das Interesse und die Motivation sowie die Fähigkeit und Bereitschaft von Schülerinnen und Schülern zur Teamarbeit, welche ebenfalls zur Bildung von mathematischen Kompetenzen beitragen.

Im Konzept wird auch eine Stufung der Grundkompetenzen nach Handlungsbereichen vorgenommen, dabei kommen auch die Unterschiede zwischen den Jahrgängen sehr deutlich zum Vorschein. Die folgende Tabelle (Ausschnitt aus EDK 2011, S.44) zeigt, welche Kompetenzen beim Handlungsaspekt „Erforschen und Explorieren“ für die Kompetenzbereiche „Zahl und Variable“ und „Daten und Zufall“ je nach Schuljahr vorausgesetzt werden. Da der Kompetenzbereich „Daten und Zufall“ erst im 11. Schuljahr dazukommt, gibt es in der Tabelle für das 4. und 8. Schuljahr keine Auflistung von Zielen. (Vgl. EDK 2011, S.6-44.)



## Erforschen und Explorieren

4. Schuljahr

8. Schuljahr

11. Schuljahr

Die Schülerinnen und Schüler können

<b>ZAHL UND VARIABLE</b>	- Angesichts eines Problems Versuche durchführen und dabei verschiedene Lösungsmöglichkeiten berücksichtigen.	- Durch systematische numerische Versuche einige mögliche Fälle bestimmen, die die Bedingungen einer gegebenen Situation erfüllen; - Die Gültigkeit einer Behauptung mithilfe vorgegebener oder frei gewählter Beispiele testen.	- Versuchen, durch geeignetes systematisches Variieren von Zahlen und Berechnungen eine Lösung herauszufinden; - Eine Vermutung testen, um ein adäquates und generalisierbares Lösungsverfahren zu finden.
<b>DATEN UND ZUFALL</b>			- Einfache Zufallsexperimente mit Würfeln, Münzen oder Karten durchführen, die möglichen Fälle auszählen und die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen durch Versuche bestimmen.

Abbildung 19 zeigt ein Aufgabenbeispiel aus dem Kompetenzbereich „Daten und Zufall“. Als Handlungsaspekt wurde Erforschen und Explorieren und als Kompetenzniveau wurde die erste Ebene zugeordnet (vgl. LINNEWEBER-LAMMERS-KITTEN 2009, S.70)

M91804, Aufgabentext:

Jeanine und Olivier streiten sich, wer abwaschen muss. Sie entscheiden, eine Münze zu werfen:

«Kopf»: Jeanine wäscht ab.

«Zahl»: Olivier wäscht ab.

Die beiden finden aber nur einen Spielwürfel mit 6 Seiten. Wie können Sie den Spielwürfel wie eine Münze verwenden?

Abbildung 19: Aufgabenbeispiel zu Erforschen und Explorieren

## 4. Das O-M-A-Modell

### 4.1. Ziele

Um eine Einordnung und Vergleichbarkeit von Prüfungsaufgaben der SRPM zu gewährleisten, wurde das vorliegende Kompetenzstufenmodell O-M-A im Auftrag des BIFIE Wien entwickelt. Der Name „O-M-A-Modell“ beruht dabei auf den drei grundlegenden Handlungsbereichen Operieren, Modellieren und Argumentieren (vgl. SILLER et al. 2014, S.1135).

Insgesamt zielt *„das Kompetenzstufenmodell O-M-A [...] darauf ab, alle wesentlichen Anforderungen hinsichtlich der Konzeption mathematischer Lernergebnisse im österreichischen Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auf der Handlungsebene abzubilden.“* (SILLER et al. 2016, S.7)

Durch dieses Modell werden die Komplexität und die Art der Vernetzung der mathematischen Handlungen und Inhalte, die in den Grundkompetenzen beschrieben werden, verdeutlicht. Wie bereits erwähnt, dient das O-M-A-Modell als Vergleichsgrundlage für das Anforderungsniveau der Prüfungsaufgaben. Um auch unterstützend bei der Erstellung von Prüfungsaufgaben zu sein, orientiert sich das O-M-A-Modell an der Definition eines Kompetenzstufenmodells nach Leuders, das *„(i) a priori Stufen beim Erwerb einer bestimmten Kompetenz postuliert, (ii) durch gestufte Aufgabensituationen und durch (iii) hierarchisch geordnete, kategoriale latente Fähigkeitsvariablen beschreibt. Dies erlaubt (iv) Feststellungen darüber, welche Schülerinnen und Schüler welche Kompetenz auf welcher Stufe besitzen.“* (LEUDERS 2014, S.10)

Als Kompetenzstufenmodell konzentriert sich das O-M-A-Modell somit auf die Diagnose hinsichtlich der Kompetenzentwicklung und auf die Bewertung des Kompetenzstandes der Lernenden. Es kann zwar zur Orientierung für das Anforderungsniveau des Unterrichts verwendet werden, jedoch ist es kein Modell, das die individuelle Kompetenzentwicklung darstellt (vgl. SILLER et al. 2016, S.3).

### 4.2. Die drei Handlungsdimensionen

Die Handlungsdimensionen Operieren, Modellieren und Argumentieren sind grundlegende mathematische Tätigkeiten. Problemlösen und Kommunizieren werden in diesem Modell nicht als eigenständige Handlungsbereiche angeführt, fließen aber in die anderen Dimensionen ein. Existierende Modelle beinhalten meist noch den Bereich des Interpretierens. Dieser ist jedoch bereits im Bereich des Argumentierens (beinhaltet immer vorausgehende Interpretationsarbeit, wenn es sich um mathematische Texte oder Kontexte handelt) und des Modellierens (benötigt immer eine Interpretation mathematischer Resultate in der Realität) enthalten.

Das BIFIE definiert die drei Handlungsdimensionen wie folgt:

**Operieren** meint „die Planung sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- oder Konstruktionsabläufen und schließt z. B. geometrisches Konstruieren oder (...) das Arbeiten mit bzw. in Tabellen und Grafiken mit ein.“ (BIFIE, 2013a, S.21)

**Modellieren** verlangt „in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen (...), allenfalls Annahmen zu treffen, Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen und Ähnliches.“ (BIFIE, 2013a, S.21)

**Argumentieren** erfordert „eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften, Beziehungen und Regeln sowie der mathematischen Fachsprache.“ (BIFIE, 2013a, S.22)

### Beispielaufgabe zum Handlungsbereich Operieren:

Die folgende Abbildung 20 zeigt eine Beispielaufgabe aus dem Handlungsbereich Operieren. Dabei müssen zuerst korrekte Rechenabläufe durchgeführt werden und anschließend die Lösungen angegeben werden.

Gegeben ist die Gleichung  $4x \cdot (x^2 - 2x - 15) = 0$ .

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Lösungen dieser Gleichung an!

Abbildung 20: Beispielaufgabe zu Operieren

### Beispielaufgabe zum Handlungsbereich Modellieren:

Die untenstehenden beiden Grafiken (Abbildungen 21 und 22) zeigen eine Aufgabe aus dem Bereich Modellieren. Ziel ist eine Interpretation der gegebenen Modellierungen, d. h. zuerst muss der gegebene Sachverhalt realisiert, also die Grafik identifiziert werden. Erst danach können die Aussagen überprüft werden.

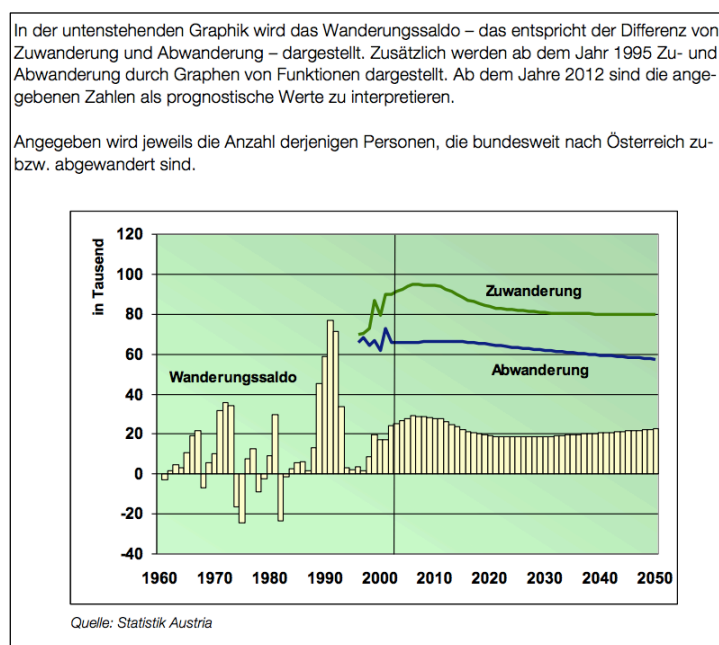


Abbildung 21: Beispielaufgabe zu Modellieren (Angabe)

**Aufgabenstellung:**

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Werden die Graphen der Funktionen „Zuwanderung“ und „Abwanderung“ bis 1960 weitergezeichnet, verläuft der Graph der Zuwanderungsfunktion stets oberhalb des Graphen der Abwanderungsfunktion.	<input type="checkbox"/>
Es gibt Jahre, in denen sich die Zuwanderungs- und die Abwanderungszahlen um weniger als 5 000 voneinander unterscheiden.	<input type="checkbox"/>
Wird der Graph der Abwanderungsfunktion bis 1960 gezeichnet, verläuft er genau achtmal unterhalb der Nulltausenderlinie.	<input type="checkbox"/>
Wenn die Graphen der Zuwanderungs- und der Abwanderungsfunktion über einen längeren Zeitraum parallel verlaufen, bleibt der Wanderungssaldo in diesem Zeitraum konstant.	<input type="checkbox"/>
Ab 2020 wird eine lineare Abnahme der Abwanderungszahlen prognostiziert, d. h., die jährliche prozentuale Abnahme der Abwanderungszahlen wird als konstant angenommen.	<input type="checkbox"/>

Abbildung 22: Beispielaufgabe zu Modellieren (Aufgabenstellung)

### Beispielaufgabe zum Handlungsbereich Argumentieren:

Die nachfolgende Abbildung 23 zeigt eine Aufgabe aus dem Bereich Argumentieren. Dieses Beispiel erfordert die Verifizierung bzw. Falsifizierung verschiedener Eigenschaften zur gegebenen Funktion, dies findet in Form von „innerem“ Argumentieren<sup>8</sup> statt.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion  $f$ , die vom Grad 4 ist.

**Aufgabenstellung:**

Kreuzen Sie die beiden für die Funktion  $f$  zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion besitzt drei Wendepunkte.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der $y$ -Achse.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion ist streng monoton steigend für $x \in [0; 4]$ .	<input type="checkbox"/>
Die Funktion besitzt einen Wendepunkt, der gleichzeitig auch Tiefpunkt ist.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion hat drei Nullstellen.	<input type="checkbox"/>

Abbildung 23: Beispielaufgabe zu Argumentieren

<sup>8</sup> „Inneres“ Argumentieren meint, dass für sich selbst, also in Gedanken, Argumente geprüft werden müssen.

### 4.3. Die Stufung

Das O-M-A-Modell unterscheidet sich von anderen Kompetenzmodellen im Bereich der normativen Setzung der Stufen, denn die Stufen der einzelnen Handlungsbereiche werden nicht nur wie nach Leuders empirisch modelliert, sondern tätigkeitstheoretisch inhaltsspezifisch nach Lompscher (vgl. LINNEMANN et al. 2015, S.588). Die Stufung des O-M-A-Modells lehnt sich dabei an Theorien des Pädagogen Meyer, des Psychologen Lompscher und des Didaktikers Galperin (vgl. LINNEMANN et al. 2015, S.589-590 und SILLER et al. 2013, S.951).

Als Grundlage für die Stufung des O-M-A-Modells dient das allgemeine Strukturmodell<sup>9</sup> von Meyer. Es umfasst die Stufen Ausführen einer Handlung durch weitgehend unreflektiertes Nachvollziehen (Stufe 1), Ausführen einer Handlung nach Vorgabe (Stufe 2), Ausführen einer Handlung nach Einsicht (Stufe 3) und selbstständige Prozesssteuerung (Stufe 4) (vgl. SILLER et al. 2013, S.951).

Von Galperin und Lompscher können Inhalte der Tätigkeitstheorie zur Beschreibung von Lernprozessen nützlich sein. Galperin prägte den Begriff Orientierungsgrundlage einer Handlung. Dabei wies er nach, dass der Lernverlauf bzw. die Lernergebnisse von der Orientierung der Lernhandlung abhängen. Lernhandlungen können auch mit Fragen nach dem Was, dem Wie, dem Warum und dem Wozu konkretisiert werden. Galperin unterscheidet bei Lernhandlungen zwischen einem Orientierungs- und Ausführungsteil. Den Orientierungsteil gliedert Galperin in drei hierarchisch gestufte Typen von Orientierungsgrundlagen (vgl. GIEST et al. 2006, S.192). Bruder gibt diesen drei Typen die Bezeichnungen Probier-, Muster- und Feldorientierung (vgl. BRUDER 2006, S.2-3).

Bei Typ 1, der Probierorientierung, wird die Orientierungsgrundlage nach dem Prinzip von Versuch und Irrtum während einer Handlung erst entwickelt. Lernen findet demnach durch Probieren und durch gemachte Fehler statt, nicht durch Strategie- oder Verfahrensreflexion.

Die Orientierungsgrundlage ist bei Typ 2, der Musterorientierung, bereits durch vorliegende übertragbare Muster, z. B. Beispiellösungen, direkt entwickelbar und effektiver als bei Typ 1, jedoch ist noch keine Übertragung von Kenntnissen ins Allgemeine möglich.

Erst bei der Feldorientierung, dem Typ 3, ist eine vollständige, allgemeine Orientierungsgrundlage möglich. Es kommt zu einer selbständigen Betrachtung der Anforderungen und zu einem Transfer vom Allgemeinen zum speziell erforderten Kontext. So würde etwa das eigenständige Generieren von Aufgaben, ähnlich zu Beispielen des Typs II, in den Bereich der Feldorientierung fallen. (Vgl. GIEST 2006, S.196-200 bzw. BRUDER 2006, S.2-3 bzw. SCHMITT 2003, S.895.)

---

<sup>9</sup> Meyers allgemeines Strukturmodell wurde bereits in Abschnitt 3.1. genauer erläutert.

Diese drei beschriebenen Orientierungsgrundlagen können mit Meyers Stufung von Kompetenzstufenmodellen verknüpft werden: Dabei stimmen Stufe 1 und 2 bei Meyer mit einer elementaren bzw. schematischen Musterorientierung überein und unterscheiden sich nur in der Komplexität der Anforderungen durch Mehrschrittigkeit. Die Stufe 3 bei Meyer deckt sich mit der Feldorientierung, die unter anderem die Entwicklung eigener Beispiele beinhaltet (vgl. LINNEMANN et al. 2015, SILLER et al. 2013, SILLER et al. 2014).

Die Stufenmodellierung der einzelnen Handlungsbereiche baut teilweise auf Überlegungen von verschiedenen Fachdidaktikern auf. Im Bereich Argumentieren bietet das Stufenmodell zum Kompetenzaufbau von Bruder und Pinkernell eine Grundlage für das O-M-A-Modell (vgl. SILLER 2016, S.5). Dabei gliedert sich das Argumentieren in vier Stufen. Die erste Stufe umfasst das Ausführen von Begründungen nach einem von fünf Grundtypen zum Argumentieren bzw. Begründen im Mathematikunterricht (Bezug auf eine Definition, Bezug auf einen Satz, Anwenden eines Verfahrens, Widerspruchsbeweis, Angeben eines Gegenbeispiels). Die zweite Ebene verlangt das Verstehen, Nachvollziehen und Wiedergeben von mathematischen Argumentationsketten. In der dritten Stufe müssen mehrschrittige Argumentationen überprüft bzw. vervollständigt werden und die vierte Stufe erfordert die selbständige Bildung von mehrschrittigen Argumentationsketten (vgl. BRUDER 2011, S.24-32).

Beim Handlungsbereich Modellieren konnte auf Arbeiten von Niss, Böhm, Götz und Siller aufgebaut werden (vgl. SILLER 2016, S.5). Böhm formuliert die vier Stufen unmittelbares Modellieren (Stufe 1), idealisierendes Modellieren (Stufe 2), anzupassendes Modellieren (Stufe 3) und kritisches Modellieren (Stufe 4). Das unmittelbare Modellieren meint die Bearbeitung eines Sachproblems mit mathematischen Mitteln. Im Vordergrund steht das Suchen nach einem sinnvollen und angemessenen mathematischen Lösungsweg für den gegebenen Sachkontext. Das idealisierende Modellieren besteht darin, eine außermathematische Situation in ein mathematisches Modell zu übersetzen, dies kann mehrere Schritte oder Zyklen enthalten. Das anzupassende Modellieren verlangt zusätzlich zum idealisierenden Modellieren das Anpassen von Parametern im mathematischen Modell. Beim kritischen Modellieren ist eine kritische Reflexion der mathematischen Modellierung erforderlich. Diese Überlegungen können sich auf verschiedene Aspekte des Kontextes beziehen. (Vgl. BÖHM 2013, S.130,149-150,195,228.)

Für den Bereich Operieren gibt es laut Siller et al. nur wenig nützliche Grundlagen. Siller et al. betonen jedoch, dass eine höhere Stufe im Bereich Operieren nicht nur den Einsatz komplexerer Algorithmen notwendig macht, sondern auch das Finden von sinnvollen Einsatzgebieten für Verfahren und die Verbindung unterschiedlicher Algorithmen (vgl. SILLER et al. 2016, S.5).

#### 4.4. Das Modell

Die folgende Abbildung 24 zeigt das O-M-A-Modell mit seinen Operationalisierungen der drei Handlungsbereiche und den 4 Stufen.

Stufe	Operieren	Modellieren	Argumentieren
<b>1</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifizieren der Anwendbarkeit eines gegebenen bzw. vertrauten Verfahrens</li> <li>Abarbeiten / Ausführen einer gegebenen bzw. vertrauten Vorschrift</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifizieren eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation und umgekehrt</li> <li>Realisieren eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation und umgekehrt</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>einfache fachsprachliche Begründung ausführen (realisieren), durch die Verwendung eines Begriffs, Zusammenhangs oder Verfahrens um ein Ergebnis zu begründen bzw. eine Aussage zu verifizieren</li> <li>verständliche/vertraute Aussagen (über Zusammenhänge oder Verfahren) auf eine gegebene innermathematische Situation prüfen und entscheiden</li> <li>die Passung eines Begriffes auf eine gegebene (innermathematische) Situation prüfen (Verwendung von Operatoren)</li> <li>Beispiele und Gegenbeispiele zu mathematischen Aussagen finden</li> </ul>
<b>2</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Abarbeiten / Ausführen mehrschrittiger Verfahren / Vorschriften</li> <li>Nutzung von Technologie zum Abarbeiten/Ausführen mehrschrittiger Verfahren/ Vorschriften wird erwartet</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Verwendung vertrauter und direkt erkennbarer Standardmodelle unter der Berücksichtigung (dem Setzen) von Rahmenbedingungen</li> <li>Erkennen unter welchen Voraussetzungen die erzielten Ergebnisse unter Einsatz des mathematischen Standardmodells zur Situation passen</li> <li>Deuten der math. Resultate im gegebenen Kontext</li> <li>(deskriptive) Beschreibung der vorgegebenen Situation durch mathematische Standardmodelle</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Nachvollziehen mathematischer Begriffe, Sätze, Verfahren, Darstellungen in Argumentationsketten und Kontexten</li> <li>Erläutern mathematischer Begriffe, Sätze, Verfahren, Darstellungen in Argumentationsketten und Kontexten</li> </ul>
<b>3</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Erkennen ob ein bestimmtes Verfahren / eine bestimmte Vorschrift auf eine gegebenen Situation passt</li> <li>das Verfahren / die Vorschrift passend machen und ausführen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Anwenden von Standard-Modellen auf neuartige Situationen</li> <li>Finden einer Passung zwischen geeignetem mathematischen Modell und realer Situation</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>fachlich und fachsprachlich korrekte Formulierung und Erklärung von mathematischen Sachverhalten</li> <li>mehrschrittige mathematische Argumentationen punktuell prüfen bzw. vervollständigen</li> <li>mehrschrittige mathematische Standard-Argumentationen durchführen und analog zu bekannten Mustern notieren beschreiben</li> <li>unterschiedliche Begründungen eines Sachverhaltes vergleichen und beurteilen</li> </ul>
<b>4</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Makros<sup>1</sup> entwickeln/bilden und bereits verfügbare Makros neu zusammenfügen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>komplexe Modellierung einer vorgegebenen Situation; Reflexion der Lösungsvarianten bzw. der Modellwahl und Beurteilung der Exaktheit bzw. Angemessenheit zugrunde gelegter Lösungsverfahren</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>eigenständige Argumentationsketten aufbauen</li> <li>eine Beweisidee bzw. Vorgehensstrategie einer Herleitung erläutern</li> <li>Begründung von Resultaten und Entscheidungen (z.B. auch über ein gewähltes Beweisverfahren; Unterscheidung z.B. zwischen Existenz- und Allaussagen)</li> <li>Erklären von Gültigkeitsbereichen bestimmter Aussagen</li> </ul>

<sup>1</sup> aggregierte mathematische Vorschriften

Abbildung 24: Das O-M-A-Modell



Die Übergänge zwischen den einzelnen Stufen verlaufen fließend und schwierigkeitsgenerierende Faktoren (z. B. Verwendung komplexer Sprache oder kognitive Ansprüche beim Verstehen der Aufgaben) werden nicht explizit beschrieben. Durch die theoretisch abgesicherte Modellierung (vgl. Abschnitt 4.3.) soll es möglich sein, Aufgabenschwierigkeiten abzuschätzen. (Vgl. LINNEMANN et al. 2015, S.589.)

Typ-1-Aufgaben der SRPM sollten die Stufe 1 der drei Handlungsbereiche des O-M-A-Modells nicht überschreiten und immer nur eine Grundkompetenz abprüfen (vgl. Abschnitt 2.4.1. und Abschnitt 2.6.). Bei Typ-2-Aufgaben hingegen könnten einzelne Items den Stufen 1 bis 3 zugeordnet werden und eine Vernetzung von Grundkompetenzen aufweisen. Stufe 4 wird in einer Testsituation kaum einsetzbar sein, da diese eine selbstständige Prozessentwicklung beinhaltet. Trotzdem sollten Schülerinnen und Schüler im Unterricht eigenständiges Arbeiten erlernen. (Vgl. BIFIE 2013a, S.7 und LINNEMANN et al. 2015, S.3-4.)

#### 4.5. Das Kompetenzdreieck

Die drei Handlungsbereiche des O-M-A-Modells lassen sich grafisch in einem „Kompetenzdreieck“ bzw. einem „mathematischen Handlungsdreieck“ darstellen. Wie Abbildung 25 zeigt, befinden sich an den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks die drei involvierten Handlungsbereiche Operieren, Modellieren und Argumentieren. Ziel ist es, darin die mathematischen Handlungsaspekte einer Aufgabe übersichtlich darzustellen (vgl. LINNEMANN 2014, S.747-749).

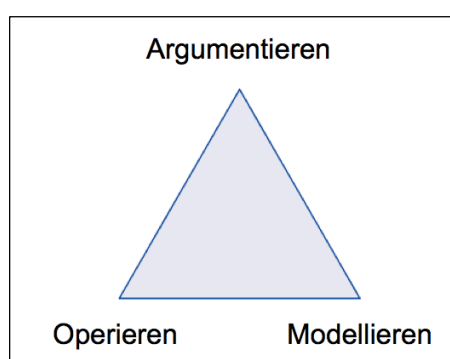


Abbildung 25: Das Kompetenzdreieck

Die Teil-1-Aufgaben würden sehr deutlich in den jeweiligen Ecken stehen. Teil-2-Aufgaben machen jedoch eine eindeutige und exakte Einordnung schwierig, da der Anspruch hinsichtlich einer Vernetzung von Grundkompetenzen diese erschwert (vgl. SILLER et al. 2014, S.1138).



### Handytarife, (KMK 2014)

„Katja kauft sich ein Handy. Ihr werden verschiedene Tarife angeboten:

Normaltarif N: Monatsgrundpreis 10,95 €, Kosten pro Minute 0,15€, sekundengenaue Abrechnung

Spezialtarif S: Monatsgrundpreis 0€. Kosten pro Minute 0,39€, sekundengenaue Abrechnung.

... c) Berate Katja bei der Wahl des Tarifs.“

Es braucht eine Modellierung der Gesprächsgewohnheiten von Katja, diese wird bezogen auf die Tarife (modellieren). Dabei wird operiert, bei der Entscheidung dann argumentiert. Diese Aufgabe ist also eine komplexere Aufgabe, die mehrere Handlungsaspekte anspricht, mit Schwerpunkt auf dem Modellieren.

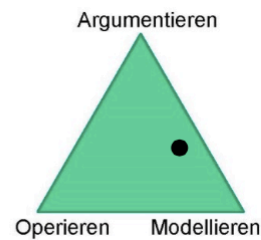


Abbildung 26: Aufgabe Handytarife und Kompetenzdreieck

Abbildung 26 zeigt im oberen Teil eine Aufgabenstellung, die auf eine Stellungnahme zweier Handytarife abzielt. Linnemann sieht in dieser Aufgabe alle drei Handlungsaspekte involviert – jedoch mit dem Schwerpunkt Modellieren – und stellt dies im Kompetenzdreieck dar (vgl. LINNEMANN 2014, S.747-749).

Ein Kompetenzdreieck kann mithilfe eines Dreiecksdiagramms konstruiert werden. In einem gleichseitigen Dreieck fungieren die drei Seiten als Achsen, die jeweils Werte von 0 bis 1 ( $0 \hat{=} 0$  Prozent,  $0,2 \hat{=} 20$  Prozent,  $1 \hat{=} 100$  Prozent, etc.) annehmen können. Durch Parallel-scharen zu den jeweiligen Achsen entsteht ein Gitter im Inneren des Dreiecks. Im Hinblick auf das O-M-A-Modell wird jeder Achse einer der drei Handlungsbereiche zugeordnet.

Abbildung 27 verdeutlicht, dass Linnemann die Aufgabe aus Abbildung 26 zu 50 Prozent dem Handlungsbereich Modellieren, zu 40 Prozent dem Handlungsbereich Argumentieren und zu 10 Prozent dem Handlungsbereich Operieren zuordnet.

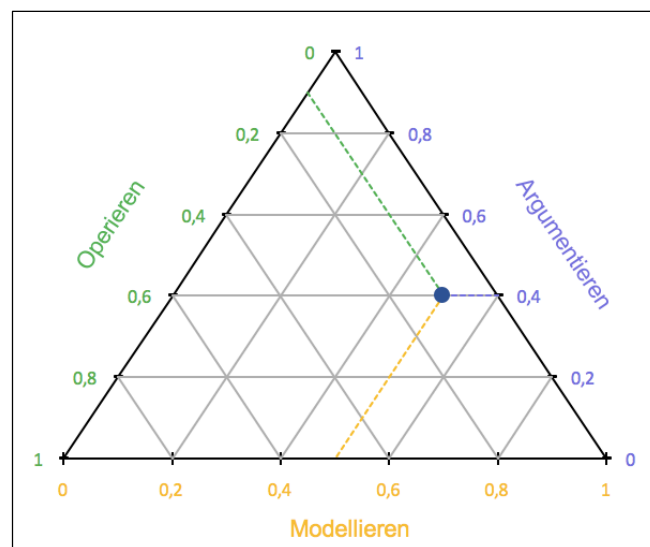


Abbildung 27: Kompetenzdreieck aus Abbildung 26 im Detail

## 5. Quantitative Untersuchung

### 5.1. Die Forschungsfragen

Die folgende Untersuchung zielt auf eine Überprüfung der Verwendbarkeit des O-M-A-Modells ab. Folgende Fragestellungen sollen bearbeitet werden:

1. Ermöglicht das O-M-A-Modell eine eindeutige Zuordnung von Aufgaben zu einem Handlungsbereich und einer Schwierigkeitsstufe?
2. Können mit Hilfe des O-M-A-Modells Kriterien entwickelt werden, um Aufgaben vorab nach ihrer Schwierigkeit einzustufen?
3. Wurden Aufgaben, die einer höheren Schwierigkeitsstufe zugeordnet wurden, auch seltener von den Schülerinnen und Schülern gelöst?
4. Wurden Aufgaben eines bestimmten Handlungsbereiches von den Schülerinnen und Schülern häufiger gelöst als jene anderer Bereiche?

### 5.2. Das Rating

Das BMB führte bereits im Vorfeld in einem eigenen Rating eine Einordnung der Typ-2-Aufgaben der SRPM vom Haupttermin 2016 (Abkürzung: SRPM HT 2016) in das O-M-A-Modell durch. Dabei wurden jeder Teilaufgabe der Typ-2-Aufgaben genau ein Handlungsbereich und eine Komplexitätsstufe zugeordnet. Die vom BMB dankenswerterweise zur Verfügung gestellten Ergebnisse wurden als Grundidee für weitere Ratings verwendet und auch anschließend zum Vergleich herangezogen.

Sechs AHS-Lehrerinnen bzw. AHS-Lehrer stellten sich der Herausforderung und führten ebenfalls dieses Rating durch. Als Einstieg in die Thematik erhielten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer ein Handout (siehe Anhang 8.2.) zum O-M-A-Modell mit Definitionen zu *Operieren*, *Modellieren* und *Argumentieren* sowie eine kurze Erklärung zum Ablauf des Ratings. Um die genaue Zuordnung der Beispiele zum O-M-A-Modell festzuhalten, wurde ein Ratingbogen erstellt. Jeder Raterin bzw. jedem Rater wurden die Typ-2-Aufgaben des SRPM HT 2016 und die dazugehörigen Lösungserwartungen zur Verfügung gestellt.

In Anlehnung an die *Think-Aloud-Methode*<sup>10</sup> wurden die Kandidatinnen bzw. Kandidaten angehalten, während des Ratings ihre Gedanken und eventuelle Unsicherheiten laut preiszugeben. Dies wurde mittels Tonaufnahme aufgezeichnet und konnte anschließend zur Analyse der einzelnen Beispiele verwendet werden. Aufgrund vieler Hintergrundgeräusche und Störungen (z. B. durch Kolleginnen und Kollegen) während der Ratings wurde auf eine Transkription dieser Aufnahmen verzichtet.

---

<sup>10</sup> Nähere Informationen zur *Think-Aloud-Methode* (deutsch: Lautes-Denken-Methode) finden sich unter: [https://www.e-teaching.org/didaktik/qualitaet/usability/Lautes%20Denken\\_e-teaching\\_org.pdf](https://www.e-teaching.org/didaktik/qualitaet/usability/Lautes%20Denken_e-teaching_org.pdf), 10.6.2017

### 5.2.1. Der Ratingbogen

Der untenstehende Ratingbogen (Abbildung 28) wurde so gestaltet, dass jede Lehrerin bzw. jeder Lehrer kurze Angaben zur Person machen konnte, anschließend zu jeder Teilaufgabe eine Zuordnung mit je einem Handlungsbereich und einer Komplexitätsstufe wählen und in die Tabelle eintragen konnte. War die Kandidatin bzw. der Kandidat unsicher, konnte sie bzw. er eine weitere Möglichkeit angeben. Schließlich wurde noch durch das Feld „Anmerkungen“ ein Raum für wichtige Überlegungen, die während des Ratings auftreten konnten, geschaffen.

Diplomarbeit „Analyse von Typ-2-Aufgaben nach dem O-M-A-Modell“ von Christina Fuchs  
Betreuer: Mag. Dr. Stefan Götz

**Rating von Typ-2-Aufgaben der sRPM HT 2016**

O männlich   O weiblich   Sie sind als Lehrer tätig seit ..... Ihre weiteren Unterrichtsfächer sind .....

Sie waren bereits Betreuer einer Maturaklasse mit sRPM:   O Ja   O Nein

Bitte ordnen Sie jedem Teilbeispiel jeweils eine Handlungsdimension und eine Stufe des O-M-A-Modells zu!  
Sind Sie sich bei der Zuordnung nicht sicher, können Sie im Feld „Weitere Möglichkeiten“ eine 2. Wahl angeben!

Beispiel 1	Nr.	Zuordnung O/M/P + Stufe	Weitere Möglichkeiten	Beispiel 2	Nr.	Zuordnung O/M/P + Stufe	Weitere Möglichkeiten	Beispiel 3	Nr.	Zuordnung O/M/P + Stufe	Weitere Möglichkeiten
Intercity Express	1a <sub>1</sub>			Wetterballon	2a <sub>1</sub>			Einkommenssteuer	3a <sub>1</sub>		
	1a <sub>2</sub>				2a <sub>2</sub>				3a <sub>2</sub>		
	1b <sub>1</sub>				2b <sub>1</sub>				3b <sub>1</sub>		
	1b <sub>2</sub>				2b <sub>2</sub>				3b <sub>2</sub>		
Würfel mit unterschiedlichen Zahlen	4a <sub>1</sub>			2c <sub>1</sub>			3c <sub>1</sub>				
	4a <sub>2</sub>			2c <sub>2</sub>			3c <sub>2</sub>				
	4b <sub>1</sub>						3d <sub>1</sub>				
	4b <sub>2</sub>						3d <sub>2</sub>				
	4c <sub>1</sub>										
	4c <sub>2</sub>										

Anmerkungen:

Herzlichen Dank für Ihre Unterstützung!

Abbildung 28: Ratingbogen

### 5.2.2. Die Auswertung, der Kappa-Wert und erste Eindrücke

Die folgende Abbildung 29 gibt einen Überblick über die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben des Ratings und vor allem deren Streuung. Für jede Teilaufgabe ist ein rotes Kreuz zu finden, das für die Zuordnung des BMB steht. Die restlichen, schwarzen Kreuze stehen für die Zuordnung der Lehrerinnen und Lehrer. Um die Lesbarkeit der Tabelle zu verbessern, wurden die einzelnen Teilaufgaben (Zeilen) mit unterschiedlichen Farben markiert.

Beim Betrachten dieser Grafik fällt auf, dass nur bei einem Beispiel, 3a<sub>2</sub>, alle Kandidatinnen und Kandidaten mit dem BMB einer Meinung sind. Hinsichtlich der restlichen Aufgaben ist die Streuung meist sehr groß: Es gibt nicht nur Unterschiede bei der Wahl der Komplexitätsstufe innerhalb eines Handlungsbereiches, sondern auch die Zuordnung zu einem Handlungsbereich stellt bereits eine Hürde dar.

Auswertung der Ratings von Typ-2-Aufgaben der SRPM HT 2016

Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
<b>Intercity-Express (ICE)</b>									
1a <sub>1</sub>	xxxxx	x					x		
1a <sub>2</sub>				xx			xxxxx		
1b <sub>1</sub>	xx	x		xx				xx	
1b <sub>2</sub>	xxxx	xxx							
<b>ZAMG-Weiterballon</b>									
2a <sub>1</sub>	xxxxxx	x					xxx	x	
2a <sub>2</sub>					xx		xxx		
2b <sub>1</sub>					xx		xxxxx		
2b <sub>2</sub>	xxxxx	x			x				
2c <sub>1</sub>				x	xxx	xx			
2c <sub>2</sub>	xxxxxx	x							
<b>Einkommensteuer</b>									
3a <sub>1</sub>	xx	xx		xx	x				
3a <sub>2</sub>					xxxxxx				
3b <sub>1</sub>	x	xx	x	xxx				xxxx	x
3b <sub>2</sub>					xx			x	xxxx
3c <sub>1</sub>							xx	x	xxxx
3c <sub>2</sub>							xx	x	xxxx
3d <sub>1</sub>					xxx		x		xxx
3d <sub>2</sub>					xxxxxx	x			
<b>Würfel mit unterschiedlichen Zahlen</b>									
4a <sub>1</sub>	xxxx			xx			x		
4a <sub>2</sub>		xxxx			xx			x	
4b <sub>1</sub>	xx	xx	xx		x				
4b <sub>2</sub>		xx			xx	xxx			
4c <sub>1</sub>	xxx	xx		xx					
4c <sub>2</sub>	xxx	xxx			x				

Abbildung 29: Auswertung der Ratings

Um die Zuverlässigkeit und Objektivität der Zuordnungen der Ratings einzuschätzen, wurde ein statistisches Verfahren zur Berechnung der Beurteiler-Übereinstimmung (auch Interrater-Reliabilität genannt) verwendet. Als Messverfahren wurde der Fleiss' Kappa gewählt, da dieser die Berechnung der Übereinstimmung von mehreren (und nicht nur zwei) Raterinnen und Ratern zulässt und die zufällig erwartete Übereinstimmung berücksichtigt.

Zuerst werden der gemessene Übereinstimmungswert der Rater  $p_o$  und die zufällig erwartete Übereinstimmung  $p_c$  berechnet. Anschließend wird mittels der Gleichung  $\kappa = \frac{p_o - p_c}{1 - p_c}$  der Kappa-Wert berechnet.

Zur Einschätzung des Kappa-Werts gibt es verschiedene Überlegungen. Laut Greve und Wentura sind  $\kappa$ -Werte von 0,40 bis 0,60 „noch annehmbar“, Werte von 0,75 bis 1 scheinen „gut“ bis „ausgezeichnet“. Landis und Koch hingegen sprechen bei  $\kappa$ -Werten zwischen 0 und 0,20 von „etwas Übereinstimmung“, bei Werten zwischen 0,21 und 0,40 von „ausreichender (fairer) Übereinstimmung“, zwischen 0,41 und 0,60 von „mittelmäßiger Übereinstimmung“, zwischen 0,61 und 0,80 von „beachtlicher Übereinstimmung“ und zwischen 0,81 und 1 von „(fast) vollkommener Übereinstimmung“. Bortz und Döring (2006) bezeichnen den Bereich zwischen 0,60 und 0,75 als eine „gute Beurteiler-Übereinstimmung“. Brennan und Prediger (1981) sprechen ab 0,70 von einer angemessenen Übereinstimmung. (Vgl. HAMMANN et al. 2014, S.1-4, und WIKIPEDIA 2017.)

Für die Berechnungen der Kappa-Werte gilt die Rater-Anzahl  $d = 7$  (BMB-Zuordnung und sechs Ratings) und die Anzahl an Aufgaben  $N = 24$ .

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
Intercity-Express (ICE)	1a <sub>1</sub>	5	1					1		
	1a <sub>2</sub>				2			5		
	1b <sub>1</sub>	2	1		2				2	
	1b <sub>2</sub>	4	3							
ZAMG-Wetterballon	2a <sub>1</sub>	6	1							
	2a <sub>2</sub>					2		4	1	
	2b <sub>1</sub>					2		5		
	2b <sub>2</sub>	4	1			1				
	2c <sub>1</sub>				1	4	2			
	2c <sub>2</sub>	5	1							
Einkommensteuer	3a <sub>1</sub>	2	2		2	1				
	3a <sub>2</sub>					7				
	3b <sub>1</sub>	1	2	1	3					
	3b <sub>2</sub>					2			4	1
	3c <sub>1</sub>							2	1	4
	3c <sub>2</sub>							2	1	4
	3d <sub>1</sub>					3		1		3
	3d <sub>2</sub>					6	1			
Würfel mit unterschiedlichen Zahlen	4a <sub>1</sub>	4			2			1		
	4a <sub>2</sub>		4			2			1	
	4b <sub>1</sub>	2	2	2		1				
	4b <sub>2</sub>		2			2	3			
	4c <sub>1</sub>	3	2		2					
	4c <sub>2</sub>	3	3			1				

Abbildung 30: Auswertung der Ratings mit Anzahlen

Zuerst wird der Kappa-Wert anhand der Auswertung des Ratings des regulären O-M-A-Modells mit drei Handlungsbereichen und jeweils drei Stufen (siehe Abbildung 30) berechnet. Zum Vergleich werden auch jeweils alle drei Stufen der einzelnen Handlungsbereiche zu einer Kategorie zusammengefasst (siehe Abbildung 31) und davon der Kappa-Wert bestimmt.<sup>11</sup>

<sup>11</sup> Die Berechnungen wurden nach Anleitungen auf [https://de.wikipedia.org/wiki/Cohens\\_Kappa#Fleiss.27\\_Kappa](https://de.wikipedia.org/wiki/Cohens_Kappa#Fleiss.27_Kappa) durchgeführt.

	Nr.	Operieren	Modellieren	Argumentieren
Intercity-Express (ICE)	1a <sub>1</sub>	6	0	1
	1a <sub>2</sub>	0	2	5
	1b <sub>1</sub>	3	2	2
	1b <sub>2</sub>	7	0	0
ZAMG-Wetterballon	2a <sub>1</sub>	7	0	0
	2a <sub>2</sub>	0	2	5
	2b <sub>1</sub>	0	2	5
	2b <sub>2</sub>	6	1	0
	2c <sub>1</sub>	0	7	0
	2c <sub>2</sub>	7	0	0
Einkommensteuer	3a <sub>1</sub>	4	3	0
	3a <sub>2</sub>	0	7	0
	3b <sub>1</sub>	4	3	0
	3b <sub>2</sub>	0	2	5
	3c <sub>1</sub>	0	0	7
	3c <sub>2</sub>	0	0	7
	3d <sub>1</sub>	0	3	4
	3d <sub>2</sub>	0	7	0
Würfel mit unterschiedlichen Zahlen	4a <sub>1</sub>	4	2	1
	4a <sub>2</sub>	4	2	1
	4b <sub>1</sub>	6	1	0
	4b <sub>2</sub>	2	5	0
	4c <sub>1</sub>	5	2	0
	4c <sub>2</sub>	5	1	0

Abbildung 31: Auswertung der Ratings mit drei Handlungsbereichen ohne Stufung

Ziel ist es, neben der Übereinstimmung der Ratings festzustellen, inwiefern sich der Kappa-Wert bei einer Zuordnung zu lediglich den drei Handlungsbereichen verändert und ob die Beurteiler-Übereinstimmung dadurch bedeutend steigt.

Der berechnete Kappa-Wert für die Auswertung des Ratings des O-M-A-Modells beträgt 0,284, d. h. nach Greve und Wentura ist die Übereinstimmung nicht annehmbar, Landis und Koch sprechen hingegen von „ausreichender Übereinstimmung“. Betrachtet man hingegen den Kappa-Wert mit nur drei Handlungsbereichen ohne Stufung, liegt er bei  $\kappa = 0,481$  und gilt daher nach Greve und Wentura als „noch annehmbar“ und bei Landis und Koch als mittelmäßige Übereinstimmung.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sowohl die Berechnung mit drei Handlungsbereichen und drei Stufen als auch die Berechnung mit nur drei Handlungsbereichen eine zu niedrige Beurteiler-Übereinstimmung ergibt.

Beim Rating äußerten die AHS-Lehrerinnen und AHS-Lehrer folgende allgemeine Anmerkungen:

- Bei mehreren Aufgaben wurde das Fachvokabular, allen voran das Signalwort „Begründen“, als nicht passend empfunden.
- Generell empfanden die Befragten die Zuordnung zu genau einem Handlungsbereich als sehr schwierig. Da die Stufen der einzelnen Handlungsdimensionen oft fließend ineinander übergehen, stellte auch die Zuordnung zu einer Stufe eines Handlungsbereiches eine Herausforderung dar.

### 5.3. Die Lösungshäufigkeiten

Die folgende Tabelle in Abbildung 32 zeigt die Lösungshäufigkeiten der einzelnen Typ-2-Aufgaben. Diese stammen von der SRPM vom Haupttermin 2016 und wurden vom BMB dankenswerterweise zur Verfügung gestellt. Um die weniger häufig gelösten Aufgaben deutlich zu machen, wurden in der Tabelle jene Aufgaben, die eine Lösungshäufigkeit von 0 bis 15 Prozent aufweisen, dunkelrot markiert und jene mit einer Lösungshäufigkeit zwischen 16 und 30 Prozent mit hellrot. Zusätzlich wurden sowohl die Handlungsbereiche als auch die Stufen in unterschiedlichen Farben hinzugefügt.

Dadurch ist eine allgemeine Interpretation der Lösungshäufigkeiten in Bezug auf die vom BMB getätigte Zuordnung der Beispiele zum O-M-A-Modell möglich. In Abschnitt 5.4. folgt eine Analyse der einzelnen Aufgabenstellungen unter Einbezug der Lösungshäufigkeiten.

#### Lösungshäufigkeiten der einzelnen Typ-2-Aufgaben

Aufgabe (Nummer und Titel)	Lösungshäufigkeit	Handlungsbereich	Stufe
1a <sub>1</sub> Intercity-Express (ICE)	0,62	O	I
1a <sub>2</sub> Intercity-Express (ICE)	0,83	M	I
1b <sub>1</sub> Intercity-Express (ICE)	0,53	M	I
1b <sub>2</sub> Intercity-Express (ICE)	0,40	O	II
2a <sub>1</sub> ZAMG-Wetterballon	0,65	O	I
2a <sub>2</sub> ZAMG-Wetterballon	0,42	A	I
2b <sub>1</sub> ZAMG-Wetterballon	0,70	A	I
2b <sub>2</sub> ZAMG-Wetterballon	0,37	O	II
2c <sub>1</sub> ZAMG-Wetterballon	0,25	M	II
2c <sub>2</sub> ZAMG-Wetterballon	0,26	O	I
3a <sub>1</sub> Einkommensteuer	0,57	M	II
3a <sub>2</sub> Einkommensteuer	0,41	M	II
3b <sub>1</sub> Einkommensteuer	0,22	M	I
3b <sub>2</sub> Einkommensteuer	0,25	M	II
3c <sub>1</sub> Einkommensteuer	0,26	A	III
3c <sub>2</sub> Einkommensteuer	0,14	A	III
3d <sub>1</sub> Einkommensteuer	0,29	M	II
3d <sub>2</sub> Einkommensteuer	0,20	M	II
4a <sub>1</sub> Würfel mit unterschiedlichen Zahlen	0,86	O	I
4a <sub>2</sub> Würfel mit unterschiedlichen Zahlen	0,22	A	II
4b <sub>1</sub> Würfel mit unterschiedlichen Zahlen	0,15	O	II
4b <sub>2</sub> Würfel mit unterschiedlichen Zahlen	0,05	M	III
4c <sub>1</sub> Würfel mit unterschiedlichen Zahlen	0,52	O	II
4c <sub>2</sub> Würfel mit unterschiedlichen Zahlen	0,18	O	II

Abbildung 32: Lösungshäufigkeiten und Zuordnung des BMB

Die Lösungshäufigkeiten wurden der Zuordnung der Aufgaben zum O-M-A-Modell durch das BMB gegenübergestellt (siehe Abbildung 32). Folgende Schlüsse können gezogen werden: Abbildung 32 zeigt, dass jene Aufgaben, die am seltensten gelöst wurden, aus den Komplexitätsstufen 2 und 3 stammen. Die Aufgaben 2a<sub>2</sub>, 2c<sub>2</sub> und 3b<sub>1</sub>, welche der ersten Komplexitätsstufe zugeordnet wurden, stechen aufgrund ihrer niedrigen Lösungshäufigkeit heraus. Bis auf diese drei Ausnahmen wurden alle Aufgaben mit der Komplexitätsstufe 1 von über 50 Prozent der Maturantinnen und Maturanten gelöst. Somit kann die Hypothese, dass ein Zusammenhang zwischen der Lösungshäufigkeit und der Komplexitätsstufe besteht, erhärtet werden.

Betrachtet man ferner nur die Zuordnung durch das BMB, wurden im Durchschnitt<sup>12</sup> Aufgaben im Bereich Operieren von 45 Prozent der Kandidatinnen und Kandidaten gelöst. Im Vergleich dazu konnten im Bereich Modellieren nur 36 Prozent und im Bereich Argumentieren nur 35 Prozent die Aufgaben korrekt lösen. Diese Reihenfolge kann wieder damit begründet werden, dass Operieren für die Schülerinnen und Schüler die bekannteste Handlungsdimension ist und im Unterricht am besten geschult wird. Die beiden Bereiche Modellieren und Argumentieren weisen einen ähnlichen Lösungserfolg auf, dieser liegt jedoch fast 15 Prozentpunkte unter dem des Operierens.

Eine weitere interessante Beobachtung zu den Lösungshäufigkeiten ergibt sich im Hinblick auf die Reihenfolge der Aufgaben. Die ersten acht Aufgaben des Prüfungsbogens wurden von mehr als 37 Prozent der Kandidatinnen und Kandidaten im Durchschnitt gelöst. Danach fällt die Lösungshäufigkeit bis auf vier Ausnahmen auf unter 30 Prozent. Eine Vermutung dazu ist, dass die Schülerinnen und Schüler zu Beginn des zweiten Teils noch konzentrierter und bemühter sind, diese Aufmerksamkeit jedoch im Laufe der Bearbeitung der Aufgaben abnimmt.

Eine andere These dazu ist, dass je nach Aufgabenthematik ein Unterschied in der Lösungshäufigkeit besteht. So wurden beispielsweise alle Teilaufgaben der Aufgabe 1, dem Intercity-Express (ICE), und drei von sechs Items des Beispiels 2, dem ZAMG-Wetterballon, jeweils von über 40 Prozent gelöst. Bei den beiden anderen Aufgaben zur Einkommensteuer und zu den Würfeln mit unterschiedlichen Zahlen konnten dann nur mehr zwei von acht bzw. zwei von sechs Aufgaben jeweils von über 40 Prozent der Kandidatinnen und Kandidaten richtig beantwortet werden.

---

<sup>12</sup> „Im Durchschnitt“ meint in diesem Zusammenhang das arithmetische Mittel der Lösungshäufigkeiten aus allen Aufgaben, die vom BMB dem Handlungsbereich Operieren zugeordnet wurden und in Abbildung 30 „grün“ hinterlegt sind. (Berechnung:  $\frac{0,62+0,4+0,65+0,37+0,26+0,86+0,15+0,52+0,18}{9} \approx 0,45$ )



## 5.4. Analyse einzelner Typ-2-Aufgaben

Im folgenden Abschnitt werden einzelne Teilaufgaben der Typ-2-Aufgaben vom Haupttermin 2016 der SRPM analysiert. Dabei wird zu Beginn die Aufgabe einem Inhaltsbereich und einer (oder mehreren) Grundkompetenz(en) zugeordnet. Danach wird die Zuordnung zum O-M-A-Modell durch das BMB betrachtet und versucht, diese anhand des Modells zu begründen. Anschließend werden die Ergebnisse der sechs Ratingkandidatinnen und -kandidaten mit der Zuordnung des BMB verglichen und analysiert. Letztlich wird noch zur Lösungshäufigkeit Stellung genommen.

Die eingerahmten Aufgabenstellungen und die dazugehörigen Lösungserwartungen (teilweise mit Lösungsschlüssel) im folgenden Abschnitt wurden mit Genehmigung des BMB aus den veröffentlichten Dokumenten „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 10. Mai 2016. Mathematik. Teil-2-Aufgaben“<sup>13</sup> (BIFIE 2016a) und „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 10. Mai 2016. Mathematik. Teil-2-Aufgaben. Korrekturheft“<sup>13</sup> (BIFIE 2016b) übernommen und werden daher nicht explizit im Abbildungsverzeichnis angeführt.

Die zitierten Tabellenausschnitte beziehen sich auf Abbildung 29 (siehe S.40) und alle verwendeten Diagramme wurden von der Autorin selbst erstellt.

### Aufgabe 1

#### Intercity-Express (ICE)

Als ICE werden verschiedene Baureihen von Hochgeschwindigkeitszügen der Deutschen Bahn bezeichnet. Mit einer Höchstgeschwindigkeit von bis zu 330 km/h (rund 91,7 m/s) handelt es sich dabei um die schnellsten Züge Deutschlands. Sie sind ca. 200 Meter lang und ca. 400 Tonnen schwer und bestehen aus jeweils acht Wagen. Im Rahmen von Zulassungsfahrten müssen Beschleunigungs- und Brems tests absolviert werden. Ergebnisse dieser Tests können grafisch dargestellt werden.

#### Aufgabenstellung 1b<sub>1</sub>:

Bei einem Brems test werden Daten aufgezeichnet. Diesen Daten kann man für den zurückgelegten Weg  $s(t)$  entnehmen:  $s(t) = 70 \cdot t - 0,25 \cdot t^2$  mit  $t$  in Sekunden und  $s(t)$  in Metern ab Bremsbeginn.

Geben Sie die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion  $v_2$  für den Brems test in Form von  $v_2(t) = k \cdot t + d$  an und deuten Sie die auftretenden Parameter  $k$  und  $d$  im gegebenen Kontext!

<sup>13</sup> Die vollständigen Dokumente befinden sich im Anhang.

### Lösungserwartung zu 1b<sub>1</sub>:

$$v_2(t) = 70 - 0,5 \cdot t$$

Mögliche Deutungen von  $k$ :

Die Geschwindigkeit nimmt während des Bremsvorgangs in jeder Sekunde (konstant) um 0,5 m/s ab.

oder:

Die Beschleunigung (ist konstant und) beträgt  $-0,5 \text{ m/s}^2$ .

oder:

Die Verzögerung durch das Bremsen (ist konstant und) beträgt  $0,5 \text{ m/s}^2$ .

Mögliche Deutung von  $d$ :

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs beträgt 70 m/s.

Diese Aufgabe wird dem Inhaltsbereich Analysis zugeordnet und erfordert laut BMB die Grundkompetenz AN 3.2. Diese verlangt die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Funktion und Ableitungsfunktion in deren grafischer Darstellung.

Da im zweiten Teil der Fragestellung explizit die Deutung der Parameter  $k$  und  $d$  formuliert wird, prüft diese Aufgabe auch die Grundkompetenz FA 2.3., die aus dem Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten stammt und die Deutung der Parameter in unterschiedlichen Kontexten erfordert. Möglicherweise hat das BMB nur die überwiegende Grundkompetenz angegeben, da für eine Deutung der Parameter die Ableitung der Wegfunktion vorausgesetzt wird.

Laut BMB fällt diese Teilaufgabe in den Handlungsbereich Modellieren mit der Komplexitätsstufe 1. Das BMB sieht somit in diesem Beispiel als überwiegende Anforderung das Identifizieren bzw. Realisieren eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation und umgekehrt.

Zuerst muss die Schülerin bzw. der Schüler die erste Ableitung der gegebenen Funktion  $s$  bilden. Dies kann als Ausführen einer vertrauten Vorschrift gesehen werden, was dem Bereich Operieren auf Stufe 1 zuzuordnen wäre. Die Herausforderung dieser Aufgabe besteht jedoch viel mehr in der Deutung der Parameter  $k$  und  $d$  im Kontext, was eigentlich dem Modellieren auf der 2. Komplexitätsebene entspricht. Angenommen, dieses Beispiel würde dem Modellieren auf Stufe 2 zugeordnet werden, dann könnte auch das Bilden der ersten Ableitung als die Verwendung vertrauter und direkt erkennbarer Standardmodelle unter der Berücksichtigung von Rahmenbedingungen begründet werden.

Beim Rating durch die AHS-Lehrerinnen und AHS-Lehrer hat keine eindeutige Zuordnung zu M1 stattgefunden. Wie im nachfolgenden Tabellenausschnitt erkennbar ist, gab es nur eine Übereinstimmung mit dem BMB. Es wurden auch die Handlungsbereiche Operieren auf Stufe 1 und 2 und Argumentieren auf Stufe 2 gewählt.

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
Intercity-Express (ICE)	1b <sub>1</sub>	xx	x		xx				xx	

Die untenstehende Abbildung 33 zeigt die durchschnittliche Zuordnung der Aufgabe 1b<sub>1</sub>, dargestellt in einem Kompetenzdreieck<sup>14</sup>. Da von den AHS-Lehrerinnen und AHS-Lehrern alle drei Handlungsbereiche gewählt wurden, liegt der Punkt „Rating“ eher mittig im Dreieck.

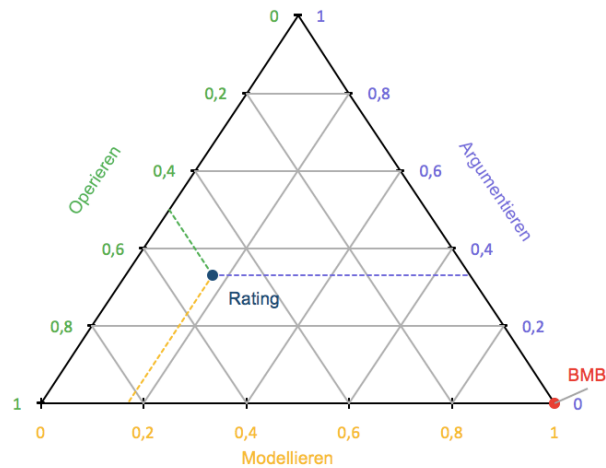


Abbildung 33: Kompetenzdreieck zu Aufgabe 1b<sub>1</sub>

Folgende Überlegungen könnten dafür ausschlaggebend sein:

- Einige Befragte äußerten Unsicherheiten bei der Zuordnung zu einem Handlungsbereich aufgrund der Tatsache, dass zwei Signalwörter („angeben“ und „deuten“) in einer Fragestellung auftreten. Einerseits würden sie der Aufgabe aufgrund der Bildung der Geschwindigkeitsfunktion den Handlungsbereich Operieren zuordnen, andererseits verbinden sie mit der Beschreibung der Parameter den Handlungsbereich Argumentieren. Auffallend ist, dass der Bereich Modellieren, der eigentlich der überwiegende Handlungsanteil ist, nur einmal gewählt wurde.
- Wie bereits erwähnt, löste die Zahl von zwei erforderlichen Grundkompetenzen in einem Beispiel Bedenken aus. Die Befragten waren sich nicht sicher, ob in einer Teilaufgabe, die mit nur einem Punkt bewertet wird, mehrere Grundkompetenzen abgeprüft werden dürfen.

Lösungshäufigkeit:

Die Aufgabe 1b<sub>1</sub> wurde von 53 Prozent aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer erfolgreich bearbeitet. Es ist überraschend, dass die Aufgabe so selten gelöst wurde, da den Kandidatinnen und Kandidaten die Begriffe Wegfunktion und Geschwindigkeitsfunktion und deren Verbindung aus dem Physikunterricht bekannt sein sollten. Des Weiteren ist die Beziehung zwischen diesen Funktionen auch im Kontextkatalog der SRPM enthalten und sollte den Schülerinnen und Schülern daher vertraut sein.

<sup>14</sup> Eine Erläuterung zum Begriff Kompetenzdreieck befindet sich im Abschnitt 4.5.

### Aufgabenstellung 1b<sub>2</sub>:

Bestimmen Sie die Länge derjenigen Strecke, die der ICE vom Bremsbeginn bis zum Stillstand zurücklegt!

### Lösungserwartung zu 1b<sub>2</sub>:

$$v_2(t) = 0 \Rightarrow t = 140 \text{ s} \Rightarrow s(140) = 4900 \text{ m}$$

Diese Aufgabenstellung wird laut BMB dem Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten zugeordnet und überprüft die Grundkompetenz FA 2.3., das Kennen der Wirkung der Parameter  $k$  und  $d$  und die Deutung der Parameter in unterschiedlichen Kontexten.

Das BMB gliedert dieses Beispiel in den Handlungsbereich Operieren auf der zweiten Komplexitätsstufe ein. Diese Zuordnung kann folgendermaßen belegt werden: Im ersten Schritt muss die Geschwindigkeitsfunktion gleich null gesetzt werden, um die Zeit für den Bremsvorgang zu berechnen. Zur Berechnung der Länge des Bremsweges muss die Zeit noch in die Wegfunktion eingesetzt werden. Diese zwei Berechnungen sind eindeutig dem Operieren auf Stufe 2 zuzuordnen, da ein Abarbeiten bzw. Ausführen mehrschrittiger Verfahren stattfindet.

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
Intercity-Express (ICE)	1b <sub>2</sub>	xxxx	xxx							

Wie im Tabellenausschnitt zu erkennen ist, wählten alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer des durchgeführten Ratings ebenfalls den Handlungsbereich Operieren. Lediglich bezüglich der Bewertung der Stufe gibt es leichte Unterschiede: Vier Beurteilerinnen bzw. Beurteiler wählten die Komplexitätsstufe 1, da sie nur eine Abarbeitung bzw. Ausführung einer vertrauten Vorschrift erkannten.

Zu betonen ist, dass für die Bearbeitung dieser Aufgabe eine korrekte Bildung der Geschwindigkeitsfunktion aus der vorherigen Aufgabe, 1b<sub>1</sub>, vorausgesetzt wird.

### Lösungshäufigkeit:

Diese Aufgabe konnten nur 40 Prozent aller Kandidatinnen und Kandidaten erfolgreich lösen. Das sind um 13 Prozentpunkte weniger als bei Aufgabe 1b<sub>1</sub>. Klar ist, dass der Lösungsanteil bei dieser Aufgabe geringer sein muss, da, wie bereits erwähnt, die Geschwindigkeitsfunktion des vorigen Beispiels vorausgesetzt wird.

Möglicherweise stellt bei dieser Fragestellung die Einbettung in den Kontext eine Schwierigkeit dar, obwohl dieser bereits in vorherigen Teilaufgaben verlangt wird. Eine weitere Hürde könnte der Ansatz  $v(t) = 0$  sein.

## Aufgabe 2:

### ZAMG-Wetterballon

Ein Wetterballon ist ein mit Helium oder Wasserstoff befüllter Ballon, der in der Meteorologie zum Transport von Radiosonden (Messgeräten) verwendet wird. Die Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik (ZAMG) lässt an 365 Tagen im Jahr zwei Mal am Tag einen Wetterballon von der Wetterstation *Hohe Warte* aufsteigen. Während des Aufstiegs werden kontinuierlich Messungen von Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Luftdruck, Windrichtung und Windgeschwindigkeit durchgeführt.

Die bei einem konkreten Aufstieg eines Wetterballons gemessenen Werte für den Luftdruck und die Temperatur in der Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel liegen in der nachstehenden Tabelle vor.

Höhe $h$ des Ballons über dem Meeresspiegel (in m)	Luftdruck $p$ (in hPa)	Temperatur (in °C)
1 000	906	1,9
2 000	800	-3,3
3 000	704	-8,3
4 000	618	-14,5
5 000	544	-21,9
6 000	479	-30,7
7 000	421	-39,5
8 000	370	-48,3

### Aufgabenstellung 2a<sub>2</sub>:

Die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Beschreiben Sie, wie dies anhand obiger Tabelle begründet werden kann!

### Lösungserwartung zu 2a<sub>2</sub>:

Eine Exponentialfunktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe  $h$  stets eine Verminderung des Luftdrucks um den annähernd gleichen Prozentsatz vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z. B. Höhenzunahme um 1 000 m ↔ Luftdruckabnahme um ca. 12 %).

Diese Aufgabe fällt in den Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten und überprüft die Grundkompetenz FA 5.6., welche die Bewertung der Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion beinhaltet.

Das BMB ordnet diesem Beispiel den Handlungsbereich Argumentieren auf der ersten Komplexitätsebene zu. Die Kandidatinnen und Kandidaten müssen typische Eigenschaften einer Exponentialfunktion wissen und mittels der gegebenen Tabelle überprüfen, ob eine annähernd gleiche prozentuelle Abnahme des Luftdrucks erfolgt. Dabei werden einfache fachsprachliche Begründungen ausgeführt, um die näherungsweise Exponentialfunktion zu begründen bzw. die Passung der Exponentialfunktion auf die gegebenen Situationen zu überprüfen.

Im folgenden Tabellenausschnitt wird die Rating-Auswertung dieses Beispiels dargestellt. Sie zeigt, dass zwei der Befragten nicht den Bereich des Argumentierens, sondern den Bereich Modellieren auf der Stufe 2 gewählt haben.

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
ZAMG-Wetterballon	2a <sub>2</sub>					xx		xxx <del>x</del>	x	

Folgende Begründungen wurden für die Zuordnung zu M2 gegeben:

- Man sah als notwendigen Handlungsbereich das Modellieren, da die Exponentialfunktion als mathematische Beziehung erkannt werden musste. Dies wird jedoch bereits in der Angabe deutlich.
- Die Aufgabe wurde dem Punkt „Erkennen, unter welchen Voraussetzungen die erzielten Ergebnisse unter Einsatz des mathematischen Standardmodells zur Situation passen“ zugeordnet.

Lösungshäufigkeit:

Nur 42 Prozent aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer konnten diese Aufgabe erfolgreich lösen. Möglicherweise hatten die Maturantinnen und Maturanten Probleme mit dem Begriff „beschreiben“. Vermutlich war es für sie auch schwierig zu erkennen, welche Eigenschaft der Exponentialfunktion sie für die Prüfung der Daten verwenden müssen. Wahrscheinlich hielten sie an den Grundvorstellungen  $y=e^x$  und dem Graphen der Exponentialfunktion fest und verwendeten nicht die Eigenschaft der konstanten prozentuellen Änderung.

#### Aufgabenstellung 2c<sub>1</sub>:

Das Volumen des Wetterballons ist näherungsweise indirekt proportional zum Luftdruck  $p$ . In 1 000 Metern Höhe hat der Wetterballon ein Volumen von 3 m<sup>3</sup>.

Beschreiben Sie die funktionale Abhängigkeit des Volumens (in m<sup>3</sup>) vom Luftdruck (in hPa) durch eine Gleichung!

$V(p) =$  \_\_\_\_\_

#### Lösungserwartung zu 2c<sub>1</sub>:

$$V(p) = \frac{2718}{p}$$

Aufgabe 2c<sub>1</sub> wird nicht näher analysiert, da alle Raterinnen und Rater den Handlungsbereich Modellieren wählten und sich nur hinsichtlich der Komplexitätsstufen vom BMB unterschieden. Dennoch wird die Aufgabenstellung hier dargestellt, um die nächste analysierte Aufgabenstellung – 2c<sub>2</sub>, welche mit 2c<sub>1</sub> verknüpft ist – besser nachvollziehen zu können.

### Aufgabenstellung 2c<sub>2</sub>:

Berechnen Sie die absolute Änderung des Ballonvolumens im Höhenintervall [1 000 m; 2 000 m]!

### Lösungserwartung zu 2c<sub>2</sub>:

$$V(800) - V(906) = 0,3975$$

Die absolute Änderung des Ballonvolumens in diesem Höhenintervall beträgt 0,3975 m<sup>3</sup>.

Diese Aufgabe fällt in den Inhaltsbereich Analysis und überprüft die Grundkompetenz AN 1.1., welche die Berechnung von absoluten und prozentuellen Änderungsmaßen beinhaltet.

Das BMB ordnet diesem Beispiel den Handlungsbereich Operieren auf der ersten Komplexitätsebene zu. Um die Aufgabe erfolgreich zu lösen, wird eine korrekt erarbeitete Formel aus Aufgabe 2c<sub>1</sub> benötigt. Wie die Lösungserwartung zeigt, muss danach nur noch das Volumen des Luftdrucks in 2000m vom Volumen des Luftdrucks in 1000m subtrahiert werden, wodurch die absolute Änderung des Ballonvolumens berechnet wird.

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
ZAMG-Wetterballon	2c <sub>2</sub>	xxxxxx	x							

Wie der Tabellenausschnitt zeigt, ist auch bei diesem Beispiel eine eindeutige Zuordnung zum Handlungsbereich Operieren gegeben und lediglich eine Person wählte für diese Aufgabe die zweite Komplexitätsstufe.

### Lösungshäufigkeit:

Das Interessante an diesem Beispiel ist jedoch die trotz der Zuordnung zur ersten Komplexitätsstufe niedrige Lösungshäufigkeit. Diese liegt bei nur 26 Prozent und ist somit eine der drei in Abschnitt 5.3 genannten Ausnahmen. Der Grund dafür liegt mit hoher Wahrscheinlichkeit darin, dass die korrekte Lösung der Aufgabe 2c<sub>1</sub>, die Gleichung für das Volumen des Ballons, vorausgesetzt wird. 2c<sub>1</sub> wurde jedoch nur von 25 Prozent der Teilnehmerinnen und Teilnehmer gelöst. Interessant ist aber, dass die vorliegende Aufgabe um einen Prozentpunkt öfter gelöst wurde als 2c<sub>1</sub>.



### Aufgabe 3:

#### Einkommensteuer

Erwerbstätige Personen müssen einen Teil ihrer Einkünfte in Form von Einkommensteuer an den Staat abführen. Im Steuermodell für das Kalenderjahr 2015 unterscheidet man vier Steuerklassen mit den sogenannten Steuersätzen: 0 %, 36,5 %, 43,2 % und 50 %.

Modellhaft wird angenommen:

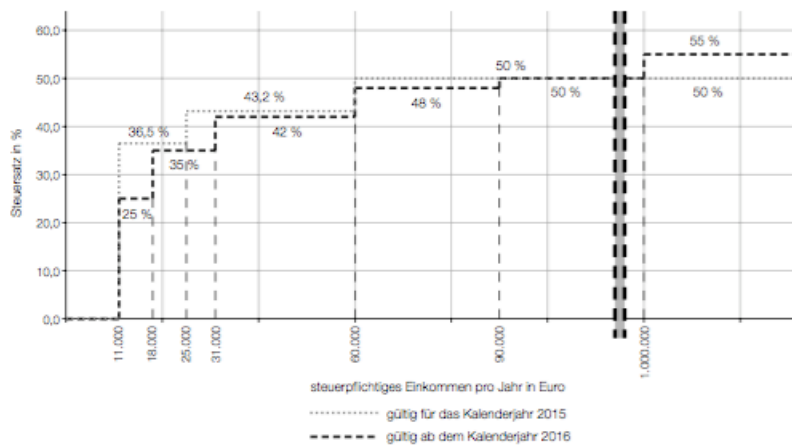
Jahresnettoeinkommen = steuerpflichtiges Jahreseinkommen – Einkommensteuer

Die Berechnung der Einkommensteuer bezieht sich auf das steuerpflichtige Jahreseinkommen und unterliegt für das Kalenderjahr 2015 den folgenden Regeln:

- Einkommen bzw. Einkommensteile bis € 11.000 sind steuerfrei.
- Einkommensteile über € 11.000 bis € 25.000 werden mit 36,5 % besteuert. Das heißt: Liegt das Einkommen über € 11.000, sind die ersten verdienten € 11.000 steuerfrei, die darüber hinausgehenden Einkommensteile bis € 25.000 werden mit 36,5 % besteuert.
- Einkommensteile über € 25.000 bis € 60.000 werden mit 43,2 % (genau:  $43\frac{3}{14}$  %) besteuert.
- Einkommensteile über € 60.000 werden mit 50 % besteuert.

Am 7. Juli 2015 wurde vom Nationalrat das Steuerreformgesetz 2015/2016 beschlossen. Das ab dem 1. Jänner 2016 gültige Steuermodell ist ein Modell mit sieben Steuersätzen.

Das 2015 gültige Modell (mit vier Steuerklassen) und das ab 2016 gültige Modell (mit sieben Steuerklassen) sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



Datenquelle: [http://www.parlament.gv.at/ZUSD/BUDGET/BD\\_-\\_Steuerreform\\_2015\\_und\\_2016.pdf](http://www.parlament.gv.at/ZUSD/BUDGET/BD_-_Steuerreform_2015_und_2016.pdf), S. 15 [11.11.2015]

### Aufgabenstellung 3b<sub>1</sub>:

Der sogenannte *Durchschnittssteuersatz* ist wie folgt definiert:

$$\text{Durchschnittssteuersatz} = \frac{\text{gezahlte Einkommensteuer}}{\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen}}$$

Jemand bezog im Jahr 2015 ein steuerpflichtiges Jahreseinkommen von € 40.000. Berechnen Sie für diese Person für das Jahr 2015 den Durchschnittssteuersatz!

### Lösungserwartung zu 3b<sub>1</sub>:

$$\frac{14000 \cdot 0,365 + 15000 \cdot 0,432}{40000} \approx 0,29, \text{ d.h. ca. } 29 \% \text{ Durchschnittssteuersatz}$$



Diese Aufgabe wird vom BMB dem Inhaltsbereich Algebra und Geometrie zugeordnet und erfordert die Grundkompetenz AG 2.2. Diese Grundkompetenz beinhaltet das Aufstellen, Interpretieren, Umformen bzw. das Lösen von Gleichungen sowie die Deutung der Lösung im gegebenen Kontext.

Zusätzlich kann die Grundkompetenz WS 1.1. aus dem Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik als erforderlich betrachtet werden. Diese beinhaltet das Ablesen von Werten aus elementaren grafischen Darstellungen.

Laut BMB fällt diese Teilaufgabe in den Handlungsbereich Modellieren mit der Komplexitätsstufe 1. Dies lässt sich folgendermaßen begründen: Zuerst müssen die Zusammenhänge bzw. die Struktur der Formel für den Durchschnittssteuersatz erkannt werden. Die Aufgabe erfordert im nächsten Schritt die Berechnung der gezahlten Einkommensteuer anhand des einleitenden Textes und der grafischen Darstellung. Dies kann als Identifizieren eines Darstellungswechsels zwischen dem Kontext, also dem einleitenden Text und der Grafik, und mathematischer Repräsentation gesehen werden und daher der Komplexitätsstufe 1 des Bereiches Modellieren zugeordnet werden. Schließlich wird durch Einsetzen der gezahlten Einkommensteuer in die Formel der Durchschnittssteuersatz berechnet. Diese Abarbeitung der gegebenen Vorschrift entspricht dem Operieren auf Stufe 1. Die dominierende mathematische Handlung in dieser Aufgabe ist jedoch das Modellieren auf der ersten Stufe, denn erst dadurch kann der gesuchte Durchschnittssteuersatz berechnet werden.

Der Ausschnitt aus der Rating-Ergebnis-Tabelle zeigt, dass eine eindeutige Zuordnung zu M1 nicht möglich ist und mehrmals auch der Bereich Operieren auf den unterschiedlichen Stufen gewählt wurde.

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
Einkommensteuer	3b <sub>1</sub>	x	xx	x	xxx					

Eine befragte Person wählte Operieren auf der ersten Komplexitätsstufe mit der Begründung, dass man keine Formel aufstellen, sondern nur in die Formel einsetzen und diese berechnen muss.

Folgende Überlegungen könnten in diesem Zusammenhang von Bedeutung sein<sup>15</sup>:

- Einerseits überwiegt in dieser Aufgabe der Operier-Anteil, d. h. bis auf die Erstellung des mathematischen Modells zur gezahlten Einkommensteuer sind die weiteren Schritte der Aufgabe (die anschließende Berechnung dieser gezahlten Einkommensteuer und die Berechnung des Prozentsatzes) dem Bereich des Operierens zuzuordnen.

<sup>15</sup> Die Aufnahmen der entsprechenden Ratings geben darüber keine Auskunft.

- Anhand des Tabellenausschnittes sieht man, dass eine eindeutige Zuordnung zu einer bestimmten Komplexitätsstufe im Bereich des Operierens ebenfalls nicht erfolgte. Dies könnte einerseits dadurch begründet sein, dass sowohl die Berechnung der gezahlten Einkommensteuer als auch die Berechnung des Durchschnittssteuersatzes als mehrschrittige Operierprozesse gesehen werden können und so dem Bereich O2 zuzuordnen wären. O3 verlangt das Passendmachen eines Verfahrens und die anschließende Berechnung, was ebenfalls mit den Anforderungen dieser Aufgabe übereinstimmen würde. Andererseits könnte man auch annehmen, dass erst die gezahlte Einkommensteuer als bestimmtes Verfahren passend gemacht und anschließend berechnet werden muss. Dies deutet aber eher auf ein Modellbilden hin. Möglicherweise sah man die Berechnung mithilfe der gegebenen Formel für den Durchschnittssteuersatz als ein Ausführen einer gegebenen Vorschrift an und ordnete die Aufgabe daher O1 zu.

#### Lösungshäufigkeit:

Diese Aufgabe wurde beim Haupttermin 2016 der SRPM von 22 Prozent der Teilnehmerinnen und Teilnehmer gelöst.

Ein Grund für das seltene Lösen dieser Aufgabe könnte darin liegen, dass die Einkommensteuer für die Kandidatinnen und Kandidaten einen völlig neuen Kontext darstellt. Zudem ist gut vorstellbar, dass die Schülerinnen und Schüler vor allem bei der Deutung und der Interpretation der Grafik Schwierigkeiten hatten und nicht ausreichend Zeit für das Verstehen der Angabe und der damit verbundenen Grafik investierten. Eine weitere Begründung könnte sein, dass der etwas längere Text bereits abschreckte, zu oberflächlich gelesen wurde oder das nötige Textverständnis fehlte. Insgesamt zeigt dieses Beispiel, wie wichtig es ist, die Schülerinnen und Schüler bereits im Mathematikunterricht auf umfangreichere, in Kontexte eingebettete Aufgaben vorzubereiten.

#### Aufgabenstellung 3b<sub>2</sub>:

Interpretieren Sie unter Verwendung der gegebenen Grafik, was für diese Person mit dem Term  $7000 \cdot 0,115 + 7000 \cdot 0,015 + 6000 \cdot 0,082 + 9000 \cdot 0,012$  berechnet wird!

#### Lösungserwartung zu 3b<sub>2</sub>:

Mit dem Term wird die Steuerersparnis (in Euro) dieser Person durch das neue Steuermodell (im Vergleich zum 2015 gültigen Modell) berechnet.

Diese Aufgabenstellung fällt ebenfalls in den Inhaltsbereich Algebra und Geometrie und prüft die Grundkompetenz AG 2.1. ab. Diese meint das Aufstellen, das Umformen und die Deutung im Kontext von einfachen Termen und Formeln.

Das BMB ordnete dieser Teilaufgabe den Handlungsbereich Modellieren auf der zweiten Komplexitätsstufe zu. Dies lässt sich folgendermaßen begründen: Um richtig interpretieren zu können, was mit dem Term berechnet wird, muss der mathematische Term im gegebenen Kontext, also anhand der Grafik, gedeutet werden. Beim Lösen der Aufgabe muss erkannt werden, dass eine Person mit einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 40.000 gemeint ist und sich der Term darauf bezieht.

Das nachfolgende Dreiecksdiagramm (Abbildung 34) zeigt sowohl die BMB-Zuordnung der Aufgabe (BMB) zum Handlungsbereich Modellieren als auch den durchschnittlichen Handlungsbereich, den das Rating durch die AHS-Lehrerinnen und AHS-Lehrer („Rating“) ergab. Die Grafik bringt den großen Unterschied zwischen BMB und Rating deutlich zum Ausdruck.

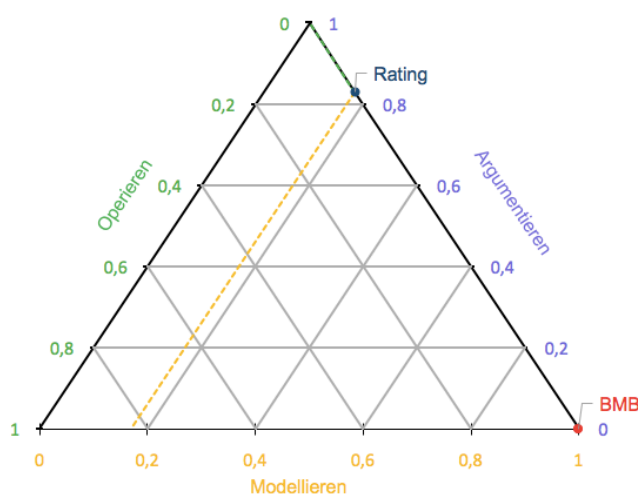


Abbildung 34: Kompetenzdreieck zu 3b<sub>2</sub>

Eine konkrete Aufschlüsselung der Zuordnungen sowohl zu einem Handlungsbereich als auch zu einer Kompetenzstufe zeigt der untenstehende Tabellenausschnitt. Darin wird ersichtlich, dass der Großteil der Befragten den Handlungsbereich Argumentieren auf der zweiten bzw. dritten Komplexitätsstufe wählte und nur eine Person mit dem BMB übereinstimmte.

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
Einkommensteuer	3b <sub>2</sub>					xx			xxxx	x

Folgende Gründe könnten dafür von Bedeutung sein<sup>16</sup>:

- Das Signalwort „Interpretieren“ könnte ausschlaggebend sein: Oft wird Interpretieren sofort mit Argumentieren verbunden. Argumentieren meint jedoch laut Definition (siehe 4.2., S.31) die Verwendung mathematischer Eigenschaften, Beziehungen und Regeln sowie der mathematischen Fachsprache. Dieses Beispiel erfordert jedoch vielmehr das Erkennen von relevanten mathematischen Beziehungen in einem gegebenen Sachverhalt, was auf die Definition des Modellierens zurückführt.

<sup>16</sup> Die Aufnahmen der entsprechenden Ratings geben darüber keine Auskunft.

- Generell wird durch diese Aufgabe sehr deutlich, dass Interpretieren viel zu überhastet mit Argumentieren verbunden wird, obwohl im Bereich Modellieren ebenfalls vorausgehende Interpretationen mathematischer Resultate in der Realität erforderlich sind.

Lösungshäufigkeit:

Dieses Beispiel wurde beim Haupttermin 2016 der SRPM nur von einem Viertel aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer gelöst. Interessant ist, dass diese Aufgabenstellung öfter gelöst wurde als das vorherige Beispiel 3b<sub>1</sub>, obwohl es einem höheren Komplexitätsgrad zugeordnet wird. Dies könnte daran liegen, dass bei längerer Auseinandersetzung mit der Grafik die Bedeutung des Terms klar wird.

Aufgabenstellung 3c<sub>1</sub> und 3c<sub>2</sub>:

Jemand behauptet:

- (1) „Bei einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 tritt trotz der Gesetzesänderung keine Veränderung hinsichtlich der abzuführenden Einkommensteuer ein.“
- (2) „Der Steuersatz für steuerpflichtige Jahreseinkommen von über € 11.000 bis € 18.000 ändert sich um 11,5 Prozent.“

Sind diese Behauptungen richtig? Formulieren Sie jeweils eine mathematisch begründete Antwort!

Lösungserwartung zu 3c<sub>1</sub> und 3c<sub>2</sub>:

Beide Behauptungen sind falsch.

- (1) Auch Bezieher/innen von einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 bezahlen beim neuen Steuermodell weniger Einkommensteuer, nämlich für die Einkommensanteile unter € 90.000.
- (2) Tatsächlich ändert sich der Steuersatz für das steuerpflichtige Jahreseinkommen um 11,5 *Prozentpunkte*, das sind  $\frac{11,5}{36,5} \approx 31,5$  *Prozent*.

Auch diese beiden Aufgabenstellungen fallen in den Inhaltsbereich Algebra und Geometrie und überprüfen die Grundkompetenz AG 2.1., die das Aufstellen, das Umformen und die Deutung im Kontext von einfachen Termen und Formeln erfordert.

Das BMB einigte sich bei beiden Teilaufgaben auf den Handlungsbereich Argumentieren jeweils auf der dritten Komplexitätsstufe („inneres“ Argumentieren, siehe S.32). Dies lässt sich folgendermaßen begründen:

Bei Behauptung 1 muss anhand der Grafik erkannt werden, dass das Steuermodell ab dem Kalenderjahr 2016 stets unter bzw. gleich jenem des bis zum Kalenderjahr 2015 geltenden Modells ist. Durch diese mathematisch argumentierte Stellungnahme muss die Behauptung korrigiert werden. Dieser Vorgang ist eindeutig der dritten Komplexitätsstufe des O-M-A-Modells zuzuordnen.

Bei Behauptung 2 würde als Argumentation reichen, dass sich der Steuersatz nicht um 11,5 Prozent, sondern um 11,5 Prozentpunkte ändert. Es kann aber auch zuerst die prozentuelle

Änderung berechnet oder  $25 \cdot 1,115 < 36,5$  abgeschätzt werden, und erst dann eine mathematisch begründete, auf den Kontext bezogene Stellungnahme erfolgen.

Da die Zuordnung der beiden Teilaufgaben ident ist, kann die Auswertung der Ratings sowohl in einer Grafik (Abbildung 35) dargestellt als auch gemeinsam betrachtet werden.

Es zeigt sich, dass bei dieser Aufgabe zwar eine eindeutige Zuordnung zum Handlungsbereich Argumentieren vorgenommen wurde, dass jedoch im Hinblick auf die Komplexitätsstufen Unterschiede bestehen.

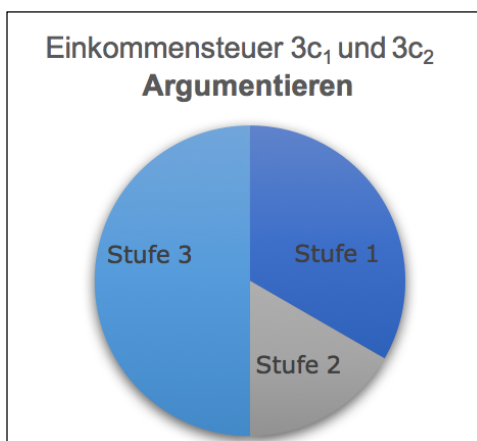


Abbildung 35: Kreisdiagramm zu 3c<sub>1</sub> und 3c<sub>2</sub>

Folgende Ursachen können für die unterschiedliche Stufung ausschlaggebend sein:

- Eine befragte Lehrperson ordnete die Aufgabe 3c<sub>2</sub> der Komplexitätsstufe 1 zu, da sie bzw. er eine einfache Berechnung (Anmerkung: Eine Berechnung ist bei diesen Beispielen nicht zwingend notwendig!) und eine anschließende Schlussfolgerung erkannte, was sie dem Punkt „durch die Verwendung eines Verfahrens ein Ergebnis begründen“ zuordnete.
- Eine weitere befragte Person sieht im Beispiel 3c<sub>1</sub> ein Nachvollziehen und Erläutern mathematischer Verfahren im Kontext und ordnet es daher der Stufe 2 zu.

Lösungshäufigkeit:

Aufgabe 3c<sub>1</sub> wurde insgesamt von 26 Prozent aller Teilnehmerinnen und Teilnehmern gelöst. Dass diese Aufgabe so selten gelöst wurde, könnte daran liegen, dass diese Art der Überprüfung einer Aussage und die anschließende zugehörige Argumentation für die Schülerinnen und Schüler eine neue, ungewohnte Situation darstellt.

Die zweite Aufgabe 3c<sub>2</sub> wurde sogar nur von insgesamt 14 Prozent erfolgreich beantwortet. Das schlechte Ergebnis deutet darauf hin, dass die Kandidatinnen und Kandidaten Schwierigkeiten bei der exakten Unterscheidung zwischen prozentueller Änderung und dem Begriff Prozentpunkten hatten.

Möglicherweise war es den Schülerinnen und Schülern zu aufwändig oder es war ihnen nicht klar, dass vor der Argumentation eine Berechnung erforderlich ist. Eine weitere Überlegung ist, dass Lerninhalte der Unterstufe sowie der 5. und 6. Klasse AHS weniger präsent sind als Themen aus der 7. und 8. Klasse.

### Aufgabenstellung 3d<sub>1</sub>:

Das Bundesministerium für Finanzen gibt auf seiner Website die Berechnung der Einkommensteuer 2015 (ESt) für die Einkommensklasse über € 25.000 bis € 60.000 steuerpflichtiger Jahreseinkommen mit folgender Formel an:

$$\text{ESt} = \frac{(\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen} - 25\,000) \cdot 15\,125}{35\,000} + 5\,110$$

Deuten Sie den Faktor  $\frac{15\,125}{35\,000}$  und den Summanden 5 110 im Hinblick auf die Berechnung der Einkommensteuer!

### Lösungserwartung zu 3d<sub>1</sub>:

$\frac{15\,125}{35\,000} \approx 0,432$  ist der Steuersatz für diese Einkommensklasse.  
5 110 ist die Einkommensteuer für die ersten € 25.000 an steuerpflichtigem Jahreseinkommen.

Das BMB ordnet dieser Aufgabe den Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten sowie die Grundkompetenz FA 2.3., welche die Deutung der Parameter  $k$  und  $d$  in unterschiedlichen Kontexten überprüft, zu.

Dieses Beispiel fällt laut BMB in den Bereich Modellieren auf der 2. Komplexitätsstufe. Dies lässt sich folgendermaßen begründen: Der Summand 5110 meint die Einkommenssteuer für die ersten € 25.000 an steuerpflichtigem Jahreseinkommen und kann als Parameter  $d$  gedeutet werden. Der Faktor  $\frac{15125}{35000}$  ergibt gerundet 0,432 und muss als Steuersatz für die Einkommensklasse über € 25.000 bis € 60.000 erkannt werden. Das Deuten mathematischer Resultate, in diesem Fall der Parameter  $k$  und  $d$ , fällt anhand des O-M-A-Modells eindeutig in den Bereich Modellieren auf der zweiten Stufe.

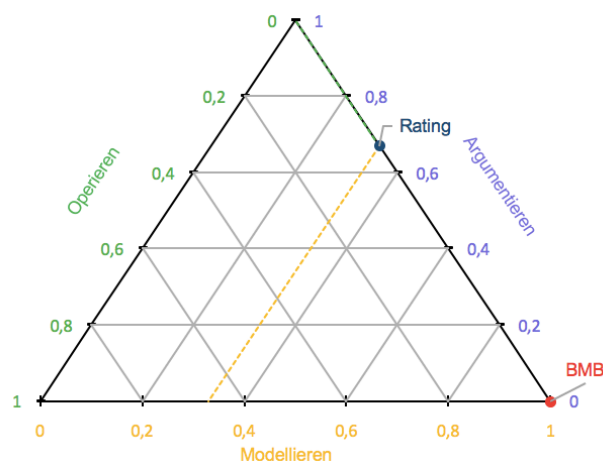


Abbildung 36: Kompetenzdreieck zu 3d<sub>1</sub>

Im Dreiecksdiagramm (Abbildung 36) stellt der Punkt BMB die Zuweisung der Aufgabe zum Handlungsbereich Modellieren durch das BMB dar. Der Punkt Rating ergibt sich aus dem Durchschnitt der zugeordneten Handlungsbereiche. Da keine Ratingteilnehmerin bzw. kein Ratingteilnehmer Operieren gewählt hat, befindet sich dieser Punkt auf der Dreiecksseite „Argumentieren“.

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
Einkommensteuer	3d <sub>1</sub>					xxx		x		xxx

Wie der obige Tabellenausschnitt zeigt, ergibt die Auswertung des Ratings nur zwei Übereinstimmungen mit dem BMB. Die anderen vier Teilnehmerinnen und Teilnehmer ordneten diese Aufgabe dem Bereich Argumentieren zu und begründeten dies wie folgt:

- Eine teilnehmende Person wählte den Komplexitätsbereich 1 des Argumentierens und sah als Anforderung das Ausführen einer fachsprachlichen Begründung.
- Die restlichen drei Teilnehmerinnen bzw. Teilnehmer gliederten diese Aufgabe in die Stufe 3 des Argumentierens ein. Dies begründeten sie teilweise damit, dass sie eine bereits vorgegebene Formel erkannten und als Lösungsanforderung eine mathematische Argumentationskette sowie eine Begründung eines Sachverhaltes verstanden. Wo die Kandidatinnen und Kandidaten eine „Argumentationskette“ sehen, geht aus der Umfrage leider nicht hervor und kann nicht nachvollzogen werden. Generell fehlt für eine Zuordnung zum Handlungsbereich Argumentieren der Bezug zum Kontext.

Lösungshäufigkeit:

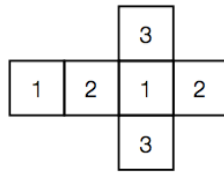
Diese Aufgabe wurde von nur 29 Prozent aller Kandidatinnen und Kandidaten bei der SRPM gelöst. Möglicherweise stellte die Deutung der Parameter  $k$  und  $d$  eine Schwierigkeit dar, da eine vorausgehende Berechnung dieser Parameter erforderlich ist.

## Aufgabe 4

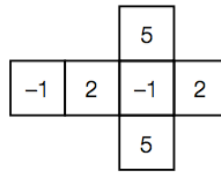
### Würfel mit unterschiedlichen Zahlen

Gegeben sind die Netze von drei fairen Würfeln, deren Seitenflächen auf unterschiedliche Weise mit verschiedenen Zahlen beschriftet sind. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle Seitenflächen gleich groß ist.)

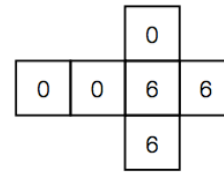
Würfel A



Würfel B



Würfel C



#### Aufgabenstellung:

- a) Herr Fischer wirft Würfel A zweimal. Die Zufallsvariable  $X$  gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an. Die Zufallsvariable  $X$  kann die Werte 2, 3, 4, 5 und 6 annehmen. Frau Fischer wirft die Würfel A und B. Die Zufallsvariable  $Y$  gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an.

A) Geben Sie für die Zufallsvariable  $Y$  alle möglichen Werte an!

mögliche Werte für  $Y$ : \_\_\_\_\_

#### Lösungserwartung zu 4a<sub>1</sub>:

mögliche Werte für  $Y$ : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

#### Aufgabenstellung 4a<sub>2</sub>:

Es gibt Werte der Zufallsvariablen, die bei Herrn Fischer wahrscheinlicher auftreten als bei Frau Fischer. Geben Sie denjenigen Wert an, bei dem der Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeiten am größten ist, und berechnen Sie diesen Unterschied!

#### Lösungserwartung zu 4a<sub>2</sub>:

Bei  $Y$  hat jeder Wert die gleiche Wahrscheinlichkeit ( $= \frac{1}{9}$ ), bei  $X$  hat 4 die größte Wahrscheinlichkeit ( $= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ). Der Unterschied ist bei 4 am größten, er beträgt  $\frac{2}{9}$ .

oder:

Die Wahrscheinlichkeit für 4 ist bei Herrn Fischer dreimal so groß wie bei Frau Fischer.

Diese Aufgabenstellung fällt in den Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik und überprüft die Grundkompetenz WS 3.1., welche die Deutung sowie den Einsatz des Begriffes *Zufallsvariable* beinhaltet.

Zur Lösung der Aufgabe soll einerseits verstanden werden, dass bei der Zufallsvariable  $Y$  alle Werte gleich wahrscheinlich sind. Andererseits muss bei der Zufallsvariable  $X$  zuerst erkannt werden, welche Werte wie oft vorkommen. Anschließend können beide Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestimmt und der Unterschied kann berechnet werden. Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn sowohl der gesuchte Wert als auch der korrekte Unterschied angegeben werden.



Das BMB ordnete dieser Teilaufgabe den Handlungsbereich Argumentieren auf der zweiten Komplexitätsstufe zu. Dieser Bereich umfasst das Nachvollziehen und Erläutern mathematischer Begriffe, Sätze, Verfahren sowie Darstellungen in Argumentationsketten und Kontexten.

Diese Zuordnung wirkt auf den ersten Blick nicht gleich gänzlich nachvollziehbar, doch bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass bei dieser Aufgabe Argumentieren in Form eines inneren Monologes erforderlich ist, da der entscheidende Aspekt der richtigen Lösung das Finden der maximalen Differenz ist.

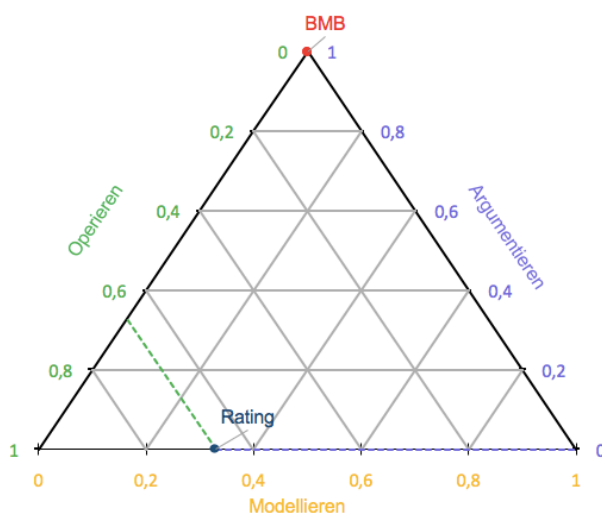


Abbildung 37: Kompetenzdreieck zu 4a2

Das Dreiecksdiagramm aus Abbildung 37 zeigt die völlig konträre Zuordnung der AHS-Lehrerinnen und Lehrer im Vergleich zur BMB-Zuordnung. Es gibt keine Übereinstimmung bei der Wahl des Handlungsbereiches, daher liegt der Punkt „Rating“ im Dreiecksdiagramm „gegenüber“ vom Punkt „BMB“.

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
Würfel mit unt. Zahlen	4a <sub>2</sub>		xxxx			xx			x	

Bei Betrachtung des obigen Tabellenausschnitts ist zu erkennen, dass vier Teilnehmerinnen bzw. Teilnehmer des Ratings Operieren auf der zweiten Komplexitätsstufe wählten, da sie in der Aufgabenstellung eine Abarbeitung eines mehrschrittigen Verfahrens sehen. Die anderen beiden Lehrerinnen bzw. Lehrer ordneten die Aufgabe dem Handlungsbereich Modellieren auf der zweiten Stufe zu. Die Begründung dafür war, dass die Schülerinnen und Schüler erst erkennen müssen, welches Modell zur Situation passt (Anmerkung: Obwohl sehr deutlich zu erkennen ist, dass es sich um eine Laplace-Wahrscheinlichkeit handelt.), und anschließend die Wahrscheinlichkeiten bzw. deren Unterschied berechnen müssen.

**Lösungshäufigkeit:**

Dieses Beispiel wurde von 22 Prozent aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer gelöst. Interessant ist, dass diese Aufgabe eher schlecht ausfällt, obwohl die Aufgabe 4a<sub>1</sub>, die als

Voraussetzung für das Lösen der vorliegenden Aufgabe gilt, von 86 Prozent der Kandidatinnen und Kandidaten gelöst wurde. Dies wird aber eher daran liegen, dass das vorige Beispiel als Ausgleichspunkt gezählt wurde.

Im Allgemeinen ist die Fragestellung 4a<sub>2</sub> eher ungewöhnlich und kommt so (Berechnung von Unterschieden) im Mathematikunterricht nur selten vor. Zusätzlich ist diese Aufgabe sehr aufwändig und umfangreich, wenn man bedenkt, dass es dafür nur einen Punkt gibt.

#### Aufgabenstellung 4c<sub>1</sub>:

Peter wirft den Würfel C 100-mal. Die Zufallsvariable Z beschreibt die Anzahl der gewürfelten Sechser.

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von Z!

#### Lösungserwartung zu 4c<sub>1</sub>:

$n = 100$  und  $p = 0,5$

Erwartungswert:  $E(Z) = 50$   
Standardabweichung:  $\sqrt{V(Z)} = 5$

Da die Aufgabe 4c<sub>2</sub> auf 4c<sub>1</sub> aufbaut, werden die Aufgabenstellung der Aufgabe 4c<sub>1</sub> und ihre Lösungserwartung hier zum besseren Verständnis und Nachvollziehen eingefügt.

#### Aufgabenstellung 4c<sub>2</sub>:

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der geworfenen Zahlen größer als 350 ist!

#### Lösungserwartung zu 4c<sub>2</sub>:

Mögliche Berechnung (z. B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):

Die Summe ist größer als 350, wenn die Anzahl der Sechser mindestens 59 ist.

Es ist möglich, die (für die Anzahl der Sechser) zugrunde liegende Binomialverteilung mit  $n = 100$  und  $p = 0,5$  durch die Normalverteilung mit  $\mu = 50$  und  $\sigma = 5$  zu approximieren.

$P(Z \geq 59) \approx 0,036 = 3,6 \%$

#### Lösungsschlüssel zu 4c<sub>2</sub>:

– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind.

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Toleranzintervall: [0,035; 0,045] bzw. [3,5 %; 4,5 %]

Laut BMB fällt diese Aufgabe in den Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik und überprüft die Grundkompetenz WS 3.4., welche die Interpretation und die Anwendung der Normalapproximation der Binomialverteilung verlangt.

Um die Aufgabe erfolgreich lösen zu können, müssen die Kandidatinnen bzw. Kandidaten zuerst erkennen, dass die Anzahl der Sechser mindestens 59 sein muss, um eine Summe größer als 350 zu erreichen. Dann kann die im Beispiel 4c<sub>1</sub> verwendete Binomialverteilung mit  $n = 100$  und  $p = 0,5$  durch die Normalverteilung mit  $\mu = 50$  und  $\sigma = 5$  approximiert werden und schließlich kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

Wie der Lösungsschlüssel zu 4c<sub>2</sub> zeigt, kann das richtige Ergebnis nicht nur mittels Normalapproximation der Binomialverteilung, sondern auch mittels Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung berechnet werden. Da die Ergebnisse je nach Rechenart variieren, wurde im Lösungsschlüssel ein Toleranzintervall angegeben.

Mittels Technologieeinsatzes minimieren sich sogar die Anforderungen für diese Aufgabe. Wird der Wahrscheinlichkeitsrechner von GeoGebra verwendet, erhält man bei einer Binomialverteilung mit  $n = 100$ ,  $p = 0,5$  und  $P(59 \leq X \leq 100)$  die exakte Wahrscheinlichkeit 0,0443 (Abbildung 38).

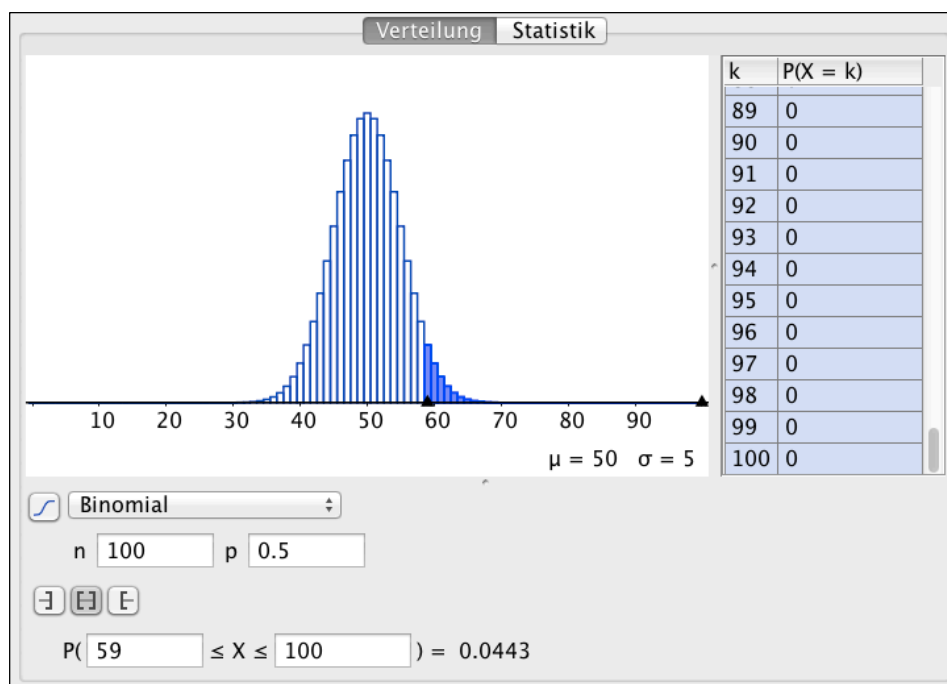


Abbildung 38: Ausschnitt aus GeoGebra-Wahrscheinlichkeitsrechner

Das BMB ordnet diese Aufgabe anhand des O-M-A-Modells dem Handlungsbereich Operieren auf der zweiten Komplexitätsstufe zu. Dies lässt sich folgendermaßen begründen: Im Lösungsverfahren findet ein Ausführen eines mehrschrittigen Verfahrens statt. Beide Tätigkeiten werden eindeutig dem Operieren auf Stufe 2 zugeordnet. Auch die Nutzung einer Technologie würde zur zweiten Komplexitätsstufe passen, jedoch ist die Aufgabe auch mit einer Wahrscheinlichkeitstabelle lösbar.

Die Auswertung des Ratings ergibt, dass fünf der sechs Teilnehmerinnen bzw. Teilnehmer den Handlungsbereich Operieren wählten und nur eine Person den Bereich Modellieren.

Im nachfolgenden Dreiecksdiagramm (Abbildung 39) befindet sich daher der Punkt „Rating“ sehr nahe beim Punkt „BMB“.

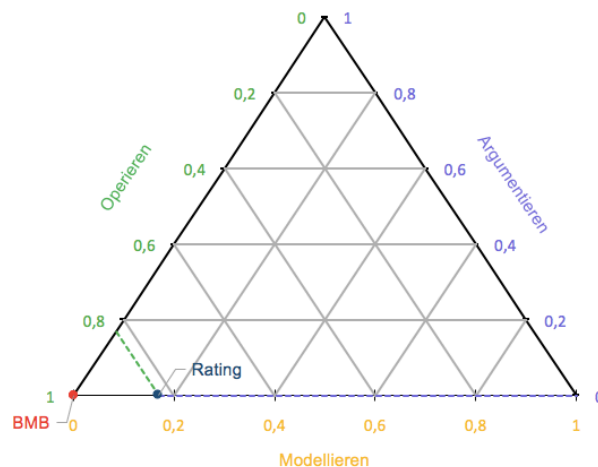


Abbildung 39: Kompetenzdreieck zu 4c<sub>2</sub>

	Nr.	O1	O2	O3	M1	M2	M3	A1	A2	A3
Würfel mit unt. Zahlen	4c <sub>2</sub>	xxx	xxX			x				

Der obige Tabellenausschnitt zeigt zusätzlich, dass zwei Teilnehmerinnen bzw. Teilnehmer mit der vom BMB gewählten Stufe des Operierens übereinstimmten, drei von ihnen Operieren auf der ersten Stufe wählten und dass nur eine Lehrperson die Aufgabe dem Handlungsbereich Modellieren auf zweiter Stufe zuordnete.

Folgende Überlegungen waren für eine andere Zuordnung als die des BMB bedeutend:

- Drei Teilnehmerinnen bzw. Teilnehmer sahen in der Fragestellung ein Identifizieren der Anwendbarkeit eines vertrauten Verfahrens (mit Technologieunterstützung) sowie das Abarbeiten dessen und ordneten die Aufgabe daher dem Operieren auf Stufe 1 zu. Eine Approximation mittels Normalverteilung zieht allerdings ein mehrschrittiges Verfahren (Stufe 2) nach sich.
- Eine befragte Person wählte den Bereich Modellieren auf zweiter Komplexitätsstufe, da sie die Aufgabe dem Punkt „Erkennen, unter welchen Voraussetzungen die erzielten Ergebnisse unter Einsatz des mathematischen Standardmodells zur Situation passen“ zuordnete. Dies scheint aufgrund der Normalapproximation einleuchtend.

Lösungshäufigkeit:

Diese Aufgabe konnte nur von 18 Prozent aller Kandidatinnen bzw. Kandidaten gelöst werden und war somit im Hinblick auf die Lösungshäufigkeit die viertschlechteste bei der SRPM des Haupttermins 2016.

## 6. Resümee

In Bezug auf die in Abschnitt 5.1. formulierten Überlegungen und Forschungsfragen lassen sich folgende Beobachtungen festhalten: Eine eindeutige Zuordnung zu einem der drei Handlungsbereiche des O-M-A-Modells gestaltet sich schwierig. Meist werden in einer Aufgabe mehrere Kompetenzen aus verschiedenen Handlungsbereichen benötigt, aber nur selten alle drei Handlungsbereiche verlangt. Dann ist es wichtig, den Kernbereich bzw. den wichtigsten Handlungsaspekt herauszufinden, um der Aufgabe den passenden Handlungsbereich zuzuordnen. Anschließend wird dem jeweiligen Handlungsbereich die passende Komplexitätsstufe zugewiesen.

Die Auswertung des Ratings (siehe Abschnitt 5.2.2.) zeigt, dass bei allen Aufgaben, denen das BMB den Handlungsbereich Operieren zugeordnet hat (1a<sub>1</sub>, 1b<sub>2</sub>, 2a<sub>1</sub>, 2b<sub>2</sub>, 2c<sub>2</sub>, 4a<sub>1</sub>, 4b<sub>1</sub>, 4c<sub>1</sub>, 4c<sub>2</sub>), fast immer alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Ratings zumindest mit dem Handlungsbereich Operieren, häufig aber auch mit der Komplexitätsstufe übereinstimmten. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass Aufgaben des Handlungsbereiches Operieren am einfachsten und eindeutigsten zu erkennen sind. Diesem Umstand könnten folgende Überlegungen zugrunde liegen:

- Einerseits können die in den Aufgaben verwendeten Signalwörter wie z. B. *bestimmen*, *angeben*, *berechnen* und *ermitteln* eindeutig dem Bereich Operieren zugeordnet werden.
- Andererseits war vor der Erneuerung des Lehrplans und der Matura in Österreich das Operieren die dominierende mathematische Handlung. Möglicherweise ist durch die jahrelange Erfahrung im Umgang mit dem „Operieren“ dieser Bereich vertrauter und somit besser erkennbar. Der Bereich des Operierens rückt im Rahmen der neuen SRPM jedoch immer mehr in den Hintergrund und wird von einer Nutzung des Grundwissens und des Reflektierens abgelöst (vgl. Abschnitt 2.1.).

Bei den Beispielen 2a<sub>1</sub> und 2c<sub>2</sub> des Haupttermins 2016 der SRPM ordneten lediglich jeweils eine AHS-Lehrerin bzw. ein AHS-Lehrer die Aufgaben nicht der ersten Stufe des Operierens, sondern der zweiten Komplexitätsstufe zu. Weitere Beispiele für diese Beobachtung, mit nur je einem Ausreißer in einem anderen Handlungsbereich, sind 1a<sub>1</sub>, 2b<sub>2</sub> und 4c<sub>2</sub>. Alle Aufgabenstellungen dazu befinden sich im Anhang (Kapitel 8).

Im Vergleich zum Operieren sind die Handlungsbereiche Modellieren und Argumentieren vielen noch eher unbekannt bzw. neu. Häufig wurde im Rating der Handlungsbereich Modellieren anstelle des Operierens gewählt, interessanterweise aber der Bereich Argumentieren anstelle des Modellierens. Wie bereits in Abschnitt 4.2. (siehe S.31) erläutert, wird das Interpretieren durch die zwei Handlungsbereiche Argumentieren und Modellieren aufgefangen.

Als Unterstützung bei der Zuordnung der Handlungsbereiche könnte ein Signalwörter-Katalog, ähnlich jenem aus dem Bereich der Angewandten Mathematik<sup>17</sup>, entworfen werden. Dabei werden jedem Signalwort die passende(n) Handlungskompetenz(en), eine Beschreibung und Beispiele zugeordnet. Abbildung 40 zeigt dazu einen Entwurf, der anhand der Aufgaben der SRPM des Haupttermins 2016 und der Zuordnung durch das BMB entwickelt wurde.

Signalwort	Handlungsbereich	Beschreibung	Beispiel
bestimmen	Operieren	- Werte (nicht zwingend numerisch) von einem Ansatz ausgehend gewinnen	1a <sub>1</sub> : <i>Bestimmen</i> Sie die mittlere Änderungsrate ... 1b <sub>2</sub> : <i>Bestimmen</i> Sie die Länge ... 2a <sub>1</sub> : <i>Bestimmen</i> Sie die relative (prozentuelle) Änderung ...
berechnen	Operieren	- numerische Werte von einem Ansatz ausgehend unter Umständen auch mit Technologieeinsatz gewinnen bzw. algebraische Symbole durch Umformen mit gezielten Rechenschritten ermitteln	2b <sub>2</sub> : <i>Berechnen</i> Sie für diese Funktion ... 2c <sub>2</sub> : <i>Berechnen</i> Sie die absolute Änderung ... 3b <sub>1</sub> : <i>Berechnen</i> Sie [...] den Durchschnittssteuersatz!
ermitteln	Operieren	- Werte numerisch, algebraisch oder grafisch von einem Ansatz ausgehend gewinnen	4c <sub>2</sub> : <i>Ermitteln</i> Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ...
angeben	Operieren	- numerische Werte von einem Ansatz ausgehend gewinnen	1a <sub>1</sub> : [...] <i>geben</i> Sie einen Zeitpunkt an, ... (in Bezug auf momentane Änderungsrate)
interpretieren	Modellieren	- mathematisch formale Ergebnisse und Abhängigkeiten auf einen inhaltlichen Bezug zurückführen	3b <sub>2</sub> : <i>Interpretieren</i> Sie unter Verwendung der Grafik ... 1a <sub>2</sub> : <i>Interpretieren</i> Sie das bestimmte Integral ...
deuten	Modellieren	- den Einfluss von Parametern abschätzen und beschreiben	1b <sub>1</sub> : <i>Deuten</i> Sie die auftretenden Parameter $k$ und $d$ ... 3d <sub>1</sub> : <i>Deuten</i> Sie den Faktor ...
beschreiben	Modellieren	- Beschreibung eines Vorgangs oder Sachverhalts durch Formeln oder Gleichungen	2c <sub>1</sub> : <i>Beschreiben</i> Sie die funktionale Abhängigkeit ... durch eine Gleichung!
aufstellen	Modellieren	- mathematische Darstellungen finden und für das Problem adaptieren - einen Sachverhalt als Gleichung, Gleichungssystem oder Formel formulieren	3d <sub>2</sub> : <i>Stellen</i> Sie eine Formel zur Berechnung ... auf!
angeben	Modellieren	- einen Sachverhalt als Gleichung oder Formel angeben	1b <sub>1</sub> : <i>Geben</i> Sie die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion an ... 3a <sub>2</sub> : <i>Geben</i> Sie die Formel für das Jahresnettoeinkommen an ...
formulieren	Argumentieren	- mathematische Begründungen entwickeln	3c <sub>1</sub> und 3c <sub>2</sub> : <i>Formulieren</i> Sie jeweils eine mathematisch begründete Antwort!
beschreiben	Argumentieren	- Beschreibung eines Vorgangs oder Sachverhalts	2a <sub>2</sub> : <i>Beschreiben</i> Sie, wie dies anhand der [...] Tabelle begründet werden kann!
begründen	Argumentieren	- den Einsatz mathematischer Modelle und Rechenverfahren erläutern und begründen	2b <sub>1</sub> : <i>Begründen</i> Sie dies anhand der [...] Tabelle!

Abbildung 40: Entwurf Signalwörter-Katalog SRPM

<sup>17</sup> Siehe Angewandte Mathematik. Signalwörter-Katalog. (2014), online abrufbar unter: [https://www.srdp.at/fileadmin/user\\_upload/downloads/Bgleitmaterial/08\\_AMT/srdp\\_am\\_signalwoerter\\_2014-09-29.pdf](https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/08_AMT/srdp_am_signalwoerter_2014-09-29.pdf), 12.6.2017

Die Betrachtung des Signalwortes „Beschreiben“ zeigt, dass das BMB „Beschreiben“ sowohl dem Modellieren als auch dem Argumentieren zugeordnet hat. Hierbei ist es wichtig, die komplette Fragstellung und den gegebenen Kontext genau zu betrachten. Dann ist erkennbar, dass einmal ein „Beschreiben durch eine Gleichung“ (Modellieren) und das andere Mal ein „Beschreiben anhand von Begründungen“ (Argumentieren) erforderlich ist. Dieses Beispiel verdeutlicht einmal mehr die Problematik der Unterscheidung zwischen Modellieren und Argumentieren.

Aber auch für die Handlungsbereiche Operieren und Modellieren wählte das BMB ein gleiches Signalwort: „Angaben“. In Form einer Berechnung soll ein Zeitpunkt berechnet werden, dies wird dem Operieren zugeordnet. Das „Angaben einer Formel“ (3a<sub>2</sub>) bzw. das „Angaben einer Funktion“ (1b<sub>1</sub>) fallen in den Bereich Modellieren.

Dies verdeutlicht, dass das Signalwort allein nicht ausreicht, um eine Aufgabe einem Handlungsbereich zuzuordnen. Es kann zwar als Unterstützung dienen, jedoch sind meist genauere Überlegungen zur Handlungsabsicht einer Aufgabe notwendig.

Abschließend kann festgehalten werden, dass es schwierig ist, Aufgaben nur anhand des O-M-A-Modells und einer kurzen Definition von Operieren, Modellieren und Argumentieren und der drei Komplexitätsstufen einzuordnen.





## 7. Verzeichnisse

### 7.1. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Ausschnitt aus dem Kompetenzkatalog (BIFIE 2013d, S.11) .....	11
Abbildung 2: Beispiel für das halboffene Antwortformat (BIFIE 2017a, S.77).....	12
Abbildung 3: Beispiel für das Konstruktionsformat (BIFIE 2017a, S.1) .....	13
Abbildung 4: Beispiel für eine Multiple-Choice-Aufgabe x aus 5 (BIFIE 2017a, S.3) .....	13
Abbildung 5: Beispiel für das Zuordnungsformat (BIFIE 2017a, S.15) .....	14
Abbildung 6: Beispiel für das Lückentext-Format (BIFIE 2017a, S.73).....	14
Abbildung 7: Beurteilungsmodell der SRPM (BIFIE 2013d, S.35) .....	17
Abbildung 8: Kompetenzmodell Deutsch/Lesen/Schreiben 4.Schulstufe (BIFIE 2017).....	18
Abbildung 9: Kompetenzmodell Mathematik 4. Schulstufe (BIFIE 2017).....	18
Abbildung 10: Allgemeines Strukturmodell (MEYER 2015, S.157).....	19
Abbildung 11: Kompetenzmodell am Ende der 8. Schulstufe (BIFIE 2017).....	22
Abbildung 12: Beispiel für die Kompetenz H3-I2-K2 (BIFIE 2011, S.52).....	22
Abbildung 13: Die Kompetenz Probleme mathematisch lösen (KMK 2015, S.15) .....	24
Abbildung 14: Die Anforderungsbereiche zu Probleme mathematisch lösen (KMK 2015, S.15).....	25
Abbildung 15: Modell mathematischer Kompetenzen der KMK (KMK 2015, S.12).....	25
Abbildung 16: Beispielaufgabe zu K2, L3 im Anforderungsbereich I (KMK 2015, S.31) .....	26
Abbildung 17: Beschreibung von mathematischen Kompetenzen (EDK 2011, S.7).....	27
Abbildung 18: Kompetenzbereiche nach Schulstufen (EDK 2011, S.7) .....	27
Abbildung 19: Aufgabenbeispiel zu Erforschen und Explorieren (LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN 2009, S.70) .....	29
Abbildung 20: Beispielaufgabe zu Operieren (BMB 2017, S.5) .....	31
Abbildung 21: Beispielaufgabe zu Modellieren (Angabe) (BMB 2017, S.23) .....	31
Abbildung 22: Beispielaufgabe zu Modellieren (Aufgabenstellung) (BMB 2017, S.23).....	32
Abbildung 23: Beispielaufgabe zu Argumentieren (BMB 2017, S.65) .....	32
Abbildung 24: Das O-M-A-Modell (zur Verfügung gestellt von BIFIE Wien).....	35
Abbildung 25: Das Kompetenzdreieck (nach LINNEMANN 2014, S.747) .....	36
Abbildung 26: Aufgabe Handytarife und Kompetenzdreieck (LINNEMANN 2014, S.749).....	37
Abbildung 27: Kompetenzdreieck aus Abbildung 26 im Detail (selbst entworfen) .....	37
Abbildung 28: Ratingbogen (selbst entworfen).....	39
Abbildung 29: Auswertung der Ratings (selbst entworfen).....	40
Abbildung 30: Auswertung der Ratings mit Anzahlen (selbst entworfen).....	41
Abbildung 31: Auswertung der Ratings mit drei Handlungsbereichen ohne Stufung (selbst entworfen) .....	42
Abbildung 32: Lösungshäufigkeiten und Zuordnung des BMB (selbst entworfen).....	43

Abbildung 33: Kompetenzdreieck zu Aufgabe 1b <sub>1</sub> (selbst entworfen) .....	47
Abbildung 34: Kompetenzdreieck zu 3b <sub>2</sub> (selbst entworfen).....	55
Abbildung 35: Kreisdiagramm zu 3c <sub>1</sub> und 3c <sub>2</sub> (selbst entworfen) .....	57
Abbildung 36: Kompetenzdreieck zu 3d <sub>1</sub> (selbst entworfen) .....	58
Abbildung 37: Kompetenzdreieck zu 4a <sub>2</sub> (selbst entworfen) .....	61
Abbildung 38: Ausschnitt aus GeoGebra-Wahrscheinlichkeitsrechner (selbst entworfen).....	63
Abbildung 39: Kompetenzdreieck zu 4c <sub>2</sub> (selbst entworfen) .....	64
Abbildung 40: Entwurf Signalwörter-Katalog SRPM (selbst entworfen) .....	66

## 7.2. Abkürzungsverzeichnis

AHS	Allgemeinbildende höhere Schule
BIFIE	Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens
BMB	Bundesministerium für Bildung
KMK	Kultusministerkonferenz
LBVO	Leistungsbeurteilungsverordnung
RPVO	Reifeprüfungsverordnung
SRPM	standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik

## 7.3. Literaturverzeichnis

BIFIE 2011:

BIFIE (Hrsg.). Praxishandbuch für „Mathematik“ 8. Schulstufe (Wien 2011)

[https://www.bifie.at/system/files/dl/bist\\_m\\_sek1\\_praxishandbuch\\_mathematik\\_8\\_2012-04-16.pdf](https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_praxishandbuch_mathematik_8_2012-04-16.pdf), 11.6.2017

BIFIE 2013a:

BIFIE (Hrsg.). Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1. 2., aktualisierte Auflage (Wien 2013)

Online abrufbar unter:

[https://www.srdp.at/fileadmin/user\\_upload/downloads/Bgleitmaterial/07\\_MAT/Publikationen/srdp\\_ma\\_praxishandbuch\\_mathematik\\_2013-11-05.pdf](https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/Publikationen/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_2013-11-05.pdf), 2.3.2017

BIFIE 2013b:

BIFIE (Hrsg.). Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 2 (Wien 2013)

Online abrufbar unter:

[https://www.srdp.at/fileadmin/user\\_upload/downloads/Bgleitmaterial/07\\_MAT/Publikationen/srdp\\_ma\\_praxishandbuch\\_mathematik\\_teil2\\_2013-12-23.pdf](https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/Publikationen/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_teil2_2013-12-23.pdf), 2.3.2017

BIFIE 2013c:

BIFIE (Hrsg.). Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: März 2013)

Online abrufbar unter:

[https://www.srdp.at/fileadmin/user\\_upload/downloads/Bgleitmaterial/07\\_MAT/srdp\\_ma\\_konz\\_ept\\_2013-03-11.pdf](https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konz_ept_2013-03-11.pdf), 2.3.2017

BIFIE 2013d:

BIFIE (Hrsg.). Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen – gültig für alle Schüler/Innen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren (Stand: Oktober 2015). (2013)

Online abrufbar unter:

[https://www.srdp.at/fileadmin/user\\_upload/downloads/Bgleitmaterial/07\\_MAT/srdp\\_ma\\_konz\\_ept\\_neuaufgabe\\_2018\\_2015-10-19.pdf](https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konz_ept_neuaufgabe_2018_2015-10-19.pdf), 2.3.2017

BIFIE 2013e:

BIFIE (Hrsg.). Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung. Reife- und Diplomprüfung. Grundlagen – Entwicklung – Implementierung (2013)

Online abrufbar unter:

[https://www.srdp.at/fileadmin/user\\_upload/downloads/SRDP/SRDP-Grundlagen-Entwicklung-Implementierung-2013-11-04.pdf](https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/SRDP/SRDP-Grundlagen-Entwicklung-Implementierung-2013-11-04.pdf), 2.3.2017

BIFIE 2016a:

BIFIE (Hrsg.). Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 10.Mai 2016. Mathematik. Teil-2-Aufgaben (2016)

Online abrufbar unter:

[https://www.srdp.at/fileadmin/user\\_upload/downloads/Matura\\_2015-16/12\\_MAT/KL16\\_PT1\\_AHS\\_MAT\\_T2\\_CC\\_AU.pdf](https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Matura_2015-16/12_MAT/KL16_PT1_AHS_MAT_T2_CC_AU.pdf), 15.4.2017

BIFIE 2016b:

BIFIE (Hrsg.). Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 10.Mai 2016. Mathematik. Teil-2-Aufgaben. Korrekturheft (2016)

Online abrufbar unter:

[https://www.srdp.at/fileadmin/user\\_upload/downloads/Matura\\_2015-16/12\\_MAT/KL16\\_PT1\\_AHS\\_MAT\\_T2\\_CC\\_LO.pdf](https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Matura_2015-16/12_MAT/KL16_PT1_AHS_MAT_T2_CC_LO.pdf), 11.6.2017

BIFIE 2017:

BIFIE (Hrsg.). Kompetenzen und Modelle (2011-2017)

Online abrufbar unter:

<https://www.bifie.at/node/49>, 27.5.2017

BMB 2017:

BMB. Aufgabenpool (2017)

Online abrufbar unter:

<https://aufgabenpool.srdp.at>, 22.4.2017

BÖHM Ulrich. Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern. Tätigkeits-theoretische Analyse des mathematischen Modellierens in der Sekundarstufe I. Darmstadt 2013

BRUDER Regina. E-Learning. Qualitätsstandards und Lernszenarien (2006)

Online abrufbar unter:

<http://www.math-learning.com/files/061023mmt.pdf>, 29.5.2017

BRUDER Regina. Langfristiger Kompetenzaufbau im mathematischen Argumentieren in den Sekundarstufen – ganz konkret (2011)

Online abrufbar unter:

<http://www.math-learning.com/files/111114fu.pdf>, 29.5.2017

BRÜHL Ute. Warum sich viele vor Mathe fürchten. Zentralmatura. Erstmals wird auch in den berufsbildenden Schulen zentral geprüft (2016)

Online abrufbar unter:

<https://kurier.at/leben/zentralmatura-warum-sich-viele-vor-mathe-fuerchten/193.932.798>, 9.6.2017

EDK - Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren. Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards. (2011)

Online abrufbar unter:

[https://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp\\_math\\_d.pdf](https://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp_math_d.pdf), 22.4.2017

GIEST, Hartmut / Lompscher, Joachim. Lerntätigkeit – Lernen aus kulturhistorischer Perspektive. Berlin 2006

HAMMANN, Marcus / Jördens, Janina / Schecker, Horst. Übereinstimmung zwischen Beurteilern. Cohens Kappa ( $\kappa$ ) (2017) – Zusatzmaterial zu: Krüger, Dirk / Parchmann, Ilka / Schecker, Horst (Hrsg.). Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung. Berlin, Heidelberg 2014

Online abrufbar unter:

<http://static.springer.com/sgw/documents/1426183/application/pdf/Cohens+Kappa.pdf>, 19.6.2017

IDM 2007:

Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik. Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe (2007)

Online abrufbar unter:

[https://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept\\_Version\\_4-07.pdf](https://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf), 22.4.2017

KMK (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland) (Hrsg.). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012 (2015)

Online abrufbar unter:

[http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2012/2012\\_10\\_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf](http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf), 19.6.2017

LEUDERS, Timo. Modellierung mathematischer Kompetenzen – Kriterien für eine Validitätsprüfung aus fachdidaktischer Sicht (2014). In: Journal für Mathematik-Didaktik. Volume 35 (2014) / Heft 1, S.7 – 48

Online (über Universitäts-Account der UNI WIEN) abrufbar unter:

<https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs13138-013-0060-3>, 31.5.2017

LINNEMANN, Torsten. Elementare mathematische Handlungsaspekte. In: Roth, Jürgen / Ames, Judith (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Band 2. Münster 2014, S.747 – 750

Online abrufbar unter:

<https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/33243/1/BzMU14-4ES-Linnemann-166.pdf>, 29.5.2017

LINNEMANN, Torsten / Siller, Hans-Stefan / Bruder, Regina / Hascher, Tina / Sattlberger, Eva / Steinfeld, Jan. Kompetenzstufenmodellierung am Ende der Sekundarstufe II (2015). In: Caluori, Franco / Linneweber-Lammerskitten, Helmut / Streit, Christine (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Band 2. Münster 2015, S.588 – 591

LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Helmut / Wälti, Beat / Moser Opitz, Elisabeth (Hrsg.). HarmoS Mathematik. Wissenschaftlicher Kurzbericht und Kompetenzmodell (2009)

Online abrufbar unter:

[http://www.edudoc.ch/static/web/arbeiten/harmos/math\\_kurzbericht\\_2009\\_d.pdf](http://www.edudoc.ch/static/web/arbeiten/harmos/math_kurzbericht_2009_d.pdf), 12.6.2017

MEYER, Hilbert. Einführung in die Arbeit mit unterrichtsmethodischen Kompetenzstufenmodellen (2007) – Ergänzung zu Meyer 2015, Abschnitt 3.4.

Online abrufbar unter:

[http://www.member.uni-oldenburg.de/hilbert.meyer/download/5.Einfuehrung\\_in\\_den\\_Aufbau\\_eines\\_Kompetenzstufenmodells.pdf](http://www.member.uni-oldenburg.de/hilbert.meyer/download/5.Einfuehrung_in_den_Aufbau_eines_Kompetenzstufenmodells.pdf), 30.5.2017

MEYER, Hilbert. Leitfaden Unterrichtsvorbereitung. 8. Auflage. Berlin 2015

<http://www.member.uni-oldenburg.de/hilbert.meyer/27591.html>, 22.4.2017

SCHMITT, Oliver. Tätigkeitstheoretischer Zugang zu Grundwissen und Grundkönnen (2013). In: Greefrath, Gilbert / Käpnick, Friedhelm / Stein, Martin (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Band 2. Münster 2013, S.894 – 897

Online abrufbar unter:

<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Schmitt.pdf>, 29.5.2017

SILLER, Hans-Stefan / Bruder, Regina / Hascher, Tina / Linnemann, Torsten / Steinfeld, Jan / Schodl Martin. Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II (2013). In: Greefrath, Gilbert / Käpnick, Friedhelm / Stein, Martin (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Band 2. Münster 2013, S.950 – 953

Online abrufbar unter:

<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Siller.pdf>, 10.3.2017

SILLER, Hans-Stefan / Bruder, Regina/Linnemann, Torsten / Hascher, Tina / Sattlberger, Eva / Steinfeld, Jan / Schodl, Martin. Stufung mathematischer Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe II - eine Konkretisierung (2014). In: Roth, Jürgen / Ames, Judith (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Band 2. Münster 2014. S.1135-1138.

Online abrufbar unter:

<https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/33324/1/BzMU14-4ES-Siller-135.pdf>,  
10.3.2017

SILLER, Hans-Stefan / Bruder, Regina / Linnemann, Torsten / Hascher, Tina. Kompetenzstufen- und Kompetenzentwicklungsmodelle (2015). In: Caluori, Franco / Linneweber-Lammerskitten, Helmut / Streit, Christine (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Band 1. Münster 2015. S.77 – 78

Online abrufbar unter:

[https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/34737/1/BzMU15\\_Siller\\_Kompetenzstufen.pdf](https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/34737/1/BzMU15_Siller_Kompetenzstufen.pdf), 10.3.2017

SILLER, Hans-Stefan / Bruder, Regina / Hascher, Torsten / Linnemann, Tina / Steinfeld, Jan / Sattlberger, Eva. Kompetenzstufenmodell zu Reifeprüfungsaufgaben und deren Eignung für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht (2016). In: Keller, Stefan / Reintjes, Christian (Hrsg.). Aufgaben als Schlüssel zur Kompetenz: Didaktische Herausforderungen, wissenschaftliche Zugänge und empirische Befunde. Münster 2016, S.371 – 388

VO BIST:

Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich. Verordnung der Bundesministerien für Unterricht, Kunst und Kultur über Bildungsstandards im Schulwesen. Bildungsstandards im Schulwesen (2009)

Online abrufbar unter:

[https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA\\_2009\\_II\\_1/BGBLA\\_2009\\_II\\_1.html](https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2009_II_1/BGBLA_2009_II_1.html),  
10.3.2017

WIKIPEDIA. Cohens Kappa. (2017)

Online abrufbar unter:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Cohens\\_Kappa](https://de.wikipedia.org/wiki/Cohens_Kappa), 19.6.2017

## 8. Anhang

### 8.1. Grundkompetenzkatalog

Die folgende Auflistung der Grundkompetenzen für die SRPM wurden aus dem Dokument „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen – gültig für alle Schüler/Innen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren (Stand: Oktober 2015)“ (BIFIE 2013d) übernommen.

#### Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (AG)

##### Grundbegriffe der Algebra

- AG 1.1 Wissen über die Zahlenmengen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  verständig einsetzen können
- AG 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

##### Anmerkungen:

Bei den Zahlenmengen soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage kontinuierlicher Modelle kennen. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über  $\mathbb{R}$  hinausgehen.

Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben/erklären und verständig verwenden können.

##### (Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme

- AG 2.1 einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können
- AG 2.2 lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können
- AG 2.3 quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können
- AG 2.4 lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können
- AG 2.5 lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

##### Anmerkungen:

Einfache Terme können auch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Sinus etc. beinhalten.

Mit dem Einsatz elektronischer Hilfsmittel können auch komplexere Umformungen von Termen, Formeln und Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen durchgeführt werden.

##### Vektoren

- AG 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können
- AG 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können
- AG 3.3 Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können
- AG 3.4 Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können
- AG 3.5 Normalvektoren in  $\mathbb{R}^2$  aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

##### Anmerkungen:

Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.

Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ ) meint hier nur den Spezialfall  $a \cdot b = 0$ . Geraden sollen in Parameterform, in  $\mathbb{R}^2$  auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.

## Trigonometrie

AG 4.1 Definitionen von *Sinus*, *Cosinus* und *Tangens* im rechtwinkligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkliger Dreiecke einsetzen können

AG 4.2 Definitionen von *Sinus* und *Cosinus* für Winkel größer als  $90^\circ$  kennen und einsetzen können

### Anmerkungen:

Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.

## Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten (FA)

### Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

FA 1.1 für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann

FA 1.2 Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können

FA 1.3 zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können

FA 1.4 aus Tabellen, Graphen<sup>6</sup> und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA 1.5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen

FA 1.6 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können

---

<sup>6</sup> Der Graph einer Funktion ist als Menge der Wertepaare definiert. Einer verbreiteten Sprechweise folgend nennen wir die grafische Darstellung des Graphen im kartesischen Koordinatensystem jedoch ebenfalls kurz „Graph“.

FA 1.7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständlich arbeiten können

FA 1.8 durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können

FA 1.9 einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können

### Anmerkungen:

Auf eine sichere Unterscheidung zwischen funktionalen und nichtfunktionalen Zusammenhängen wird Wert gelegt, auf theoretisch bedeutsame Eigenschaften (z. B. Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit) wird aber nicht fokussiert. Im Vordergrund steht die Rolle von Funktionen als Modelle und die verständige Nutzung grundlegender Funktionstypen und deren Eigenschaften sowie der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (auch  $f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$ ).

Die Bearbeitung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen beschränkt sich auf die Interpretation der Funktionsgleichung im jeweiligen Kontext sowie auf die Ermittlung von Funktionswerten.

Der Verlauf von Funktionen soll nicht nur mathematisch beschrieben, sondern auch im jeweiligen Kontext gedeutet werden können.

### Lineare Funktion [ $f(x) = k \cdot x + d$ ]

FA 2.1 verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA 2.2 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter  $k$  und  $d$  ermitteln und im Kontext deuten können

FA 2.3 die Wirkung der Parameter  $k$  und  $d$  kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können



FA 2.4 charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können:

$$f(x + 1) = f(x) + k; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$$

FA 2.5 die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können

FA 2.6 direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ  $f(x) = k \cdot x$  beschreiben können

Anmerkungen:

Die Parameter  $k$  und  $d$  sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

Potenzfunktion mit  $f(x) = a \cdot x^z + b$ ,  $z \in \mathbb{Z}$  oder mit  $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$

FA 3.1 verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA 3.2 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter  $a$  und  $b$  ermitteln und im Kontext deuten können

FA 3.3 die Wirkung der Parameter  $a$  und  $b$  kennen und die Parameter im Kontext deuten können

FA 3.4 indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ  $f(x) = \frac{a}{x}$  (bzw.  $f(x) = a \cdot x^{-1}$ ) beschreiben können

Anmerkungen:

Wurzelfunktionen bleiben auf den quadratischen Fall  $a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$  beschränkt.

Polynomfunktion [  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$  mit  $n \in \mathbb{N}$  ]

FA 4.1 typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen

FA 4.2 zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können

FA 4.3 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können

FA 4.4 den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Anmerkungen:

Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen sollte für beliebige  $n$  bekannt sein, konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf Polynomfunktionen mit  $n \leq 4$ .

Mithilfe elektronischer Hilfsmittel können Argumentwerte auch für Polynomfunktionen höheren Grades ermittelt werden.

Exponentialfunktion [  $f(x) = a \cdot b^x$  bzw.  $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ]

FA 5.1 verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA 5.2 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA 5.3 die Wirkung der Parameter  $a$  und  $b$  (bzw.  $e^\lambda$ ) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

FA 5.4 charakteristische Eigenschaften ( $f(x + 1) = b \cdot f(x)$ ;  $[e^\lambda]^\lambda = e^\lambda$ ) kennen und im Kontext deuten können

FA 5.5 die Begriffe *Halbwertszeit* und *Verdoppelungszeit* kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können

FA 5.6 die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

Anmerkungen:

Die Parameter  $a$  und  $b$  (bzw.  $e^\lambda$ ) sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

## Sinusfunktion, Cosinusfunktion

- FA 6.1 grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$  als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- FA 6.2 aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
- FA 6.3 die Wirkung der Parameter  $a$  und  $b$  kennen und die Parameter im Kontext deuten können
- FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können
- FA 6.5 wissen, dass  $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- FA 6.6 wissen, dass gilt:  $[\sin(x)]' = \cos(x)$ ,  $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

### Anmerkungen:

Während zur Auflösung von rechtwinkligen Dreiecken Sinus, Cosinus und Tangens verwendet werden, beschränkt sich die funktionale Betrachtung (weitgehend) auf die allgemeine Sinusfunktion. Wesentlich dabei sind die Interpretation der Parameter (im Graphen wie auch in entsprechenden Kontexten) sowie der Verlauf des Funktionsgraphen und die Periodizität.

## Inhaltsbereich Analysis (AN)

### Änderungsmaße

- AN 1.1 absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
- AN 1.2 den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differenzialquotient („momentane“ Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können
- AN 1.3 den Differenzen- und Differenzialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differenzialquotienten beschreiben können
- AN 1.4 das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können

### Anmerkungen:

Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzenquotienten und durch Differenzialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist auch die Berechnung von Differenzen- und Differenzialquotienten beliebiger (differenzierbarer) Funktionen möglich.

### Regeln für das Differenzieren

- AN 2.1 einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für  $[k \cdot f(x)]'$  und  $[f(k \cdot x)]'$  (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*)

### Ableitungsfunktion/Stammfunktion

- AN 3.1 den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
- AN 3.2 den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können
- AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mithilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

### Anmerkungen:

Der Begriff der *Ableitung(sfunktion)* soll verständlich und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist das Ableiten von Funktionen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Differenzierungsregeln eingeschränkt.

## Summation und Integral

- AN 4.1 den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
- AN 4.2 einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel,  $\int k \cdot f(x) dx$ ,  $\int f(k \cdot x) dx$  (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können
- AN 4.3 das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

### Anmerkungen:

Analog zum Differenzialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist die Berechnung von bestimmten Integralen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Integrationsregeln eingeschränkt.

## Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)

### Beschreibende Statistik

- WS 1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können

### Anmerkungen:

(un-)geordnete Liste, Strichliste, Piktogramm, Säulen-, Balken-, Linien-, Stängel-Blatt-, Punktwolkendiagramm, Histogramm (als Spezialfall eines Säulendiagramms), Prozentstreifen, Kastenschaubild (Boxplot)

- WS 1.2 Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können
- WS 1.3 statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können
- WS 1.4 Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können

### Anmerkungen:

Wenn auch statistische Kennzahlen (für einfache Datensätze) ermittelt und elementare statistische Grafiken erstellt werden sollen, liegt das Hauptaugenmerk auf verständigen Interpretationen von Grafiken (unter Beachtung von Manipulationen) und Kennzahlen. Speziell für das arithmetische Mittel und den Median (auch als Quartile) müssen die wichtigsten Eigenschaften (definitive Eigenschaften, Datentyp-Verträglichkeit, Ausreißerempfindlichkeit) gekannt und verständlich eingesetzt bzw. berücksichtigt werden. Beim arithmetischen Mittel sind allenfalls erforderliche Gewichtungen zu beachten („gewogenes arithmetisches Mittel“) und zu nutzen (Bildung des arithmetischen Mittels aus arithmetischen Mitteln von Teilmengen).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Grundbegriffe

- WS 2.1 Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können
- WS 2.2 relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können
- WS 2.3 Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können

### Anmerkungen:

Die Multiplikationsregel kann unter Verwendung der kombinatorischen Grundlagen und der Anwendung der Laplace-Regel (auch) umgangen werden.

- WS 2.4 Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können

## Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)

- WS 3.1 die Begriffe *Zufallsvariable*, (*Wahrscheinlichkeits-*)*Verteilung*, *Erwartungswert* und *Standardabweichung* verständlich deuten und einsetzen können
- WS 3.2 Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen
- WS 3.3 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann
- WS 3.4 Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können

### Anmerkungen:

Kenntnis und Anwenden der Faustregel, dass die Normalapproximation der Binomialverteilung mit den Parametern  $n$  und  $p$  dann anzuwenden ist und gute Näherungswerte liefert, wenn die Bedingung  $n \cdot p \cdot (1 - p) \geq 9$  erfüllt ist. Die Anwendung der Stetigkeitskorrektur ist nicht notwendig und daher für Berechnungen im Zuge von Prüfungsbeispielen vernachlässigbar. Kenntnis des Verlaufs der Dichtefunktion  $\varphi$  der Standardnormalverteilung mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ . Arbeiten mit der Verteilungsfunktion  $\Phi$  der Standardnormalverteilung und korrektes Ablesen der entsprechenden Werte.

## Schließende/Beurteilende Statistik

- WS 4.1 Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekanntem Anteil  $p$  interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können

Diplomarbeit „Kompetenzorientierte Analyse von Typ-2-Aufgaben nach dem O-M-A-Modell“  
von Christina Fuchs  
Betreuer: Mag. Dr. Stefan Götz

### „Kompetenzorientierte Analyse von Typ-2-Aufgaben nach dem O-M-A-Modell“

Die Diplomarbeit beschäftigt sich mit dem **O-M-A-Modell**. Dies ist ein Kompetenzmodell mit **drei Handlungsbereichen** (Operieren, Modellieren und Argumentieren) und jeweils **4 Stufen** (je nach Komplexität).

Ziel dieses Modells ist es, alle wesentlichen Anforderungen hinsichtlich der Konzeption mathematischer Lernergebnisse im österreichischen Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auf der Handlungsebene abzubilden.

**Operieren** meint „die Planung sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- oder Konstruktionsabläufen und schließt z.B. geometrisches Konstruieren oder (...) das Arbeiten mit bzw. in Tabellen und Graphiken mit ein.“<sup>1</sup>

**Modellieren** verlangt „in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen (...), allenfalls Annahmen zu treffen, Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen und Ähnliches.“<sup>1</sup>

**Argumentieren** erfordert „eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften, Beziehungen und Regeln sowie der mathematischen Fachsprache.“<sup>1</sup>

Stufe 1 beinhaltet das Ausführen einer Handlung durch weitgehend unreflektiertes Nachvollziehen, Stufe 2 das Ausführen einer Handlung nach Vorgabe, Stufe 3 das Ausführen einer Handlung nach Einsicht und Stufe 4 eine selbstständige Prozesssteuerung.

Typ-1-Aufgaben sollen die Stufe 1 dieses Kompetenzmodells nicht überschreiten und jeweils genau eine Grundkompetenz abdecken.

Typ-2-Aufgaben hingegen können den Stufen 1 bis 3 zugeordnet werden und eine Vernetzung von Grundkompetenzen aufweisen.

Stufe 4 wird in einer Testsituation kaum einsetzbar sein, sollte jedoch im Unterricht umgesetzt werden.

Im folgendem Rating, welches von AHS-Lehrerinnen und AHS-Lehrern durchgeführt wird, soll jede Teilaufgabe der Typ-2-Aufgaben der schriftlichen standardisierten Reifeprüfung in Mathematik (SRPM) vom Haupttermin 2016 genau einer Handlungsdimension und einer Stufe des O-M-A-Modells zugeordnet werden.

(Anmerkung: Das Rating wurde ebenfalls von einer Arbeitsgruppe des Bundesministeriums für Bildung durchgeführt und für diese Diplomarbeit zur Verfügung gestellt.)

Ziel ist es, die Ergebnisse der Ratings zu analysieren und anschließend diese Erkenntnisse mit den Lösungshäufigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu vergleichen.

Folgende Fragen sollen geklärt werden:

- Ist die Zuordnung anhand des O-M-A-Modells eindeutig?
- Wurden Aufgaben, die einer höheren Schwierigkeitsstufe zugeordnet wurden, auch von den Schülerinnen und Schülern seltener gelöst werden?
- Wurden Aufgaben eines bestimmten Handlungsbereiches von den Schülerinnen und Schülern häufiger gelöst als in den anderen?

Vielen Dank für Ihre Unterstützung.

<sup>1</sup> BIFIE (Hrsg.), Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1. Wien 2013, S.21-22  
(online unter: [https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp\\_ma\\_praxishandbuch\\_mathematik\\_2013-11-05.pdf](https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_2013-11-05.pdf), 27.11.2016)

### 8.3. Typ-2-Aufgaben des Haupttermins 2016 der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik

Die folgenden Aufgabenstellungen bzw. die anschließenden Lösungserwartungen und Lösungsschlüssel wurden den veröffentlichten Dokumenten „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 10. Mai 2016. Mathematik. Teil-2-Aufgaben“ (BIFIE 2016a) bzw. „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 10. Mai 2016. Mathematik. Teil-2-Aufgaben. Korrekturheft“ (BIFIE 2016b) entnommen.

#### 8.3.1. Aufgabenstellungen

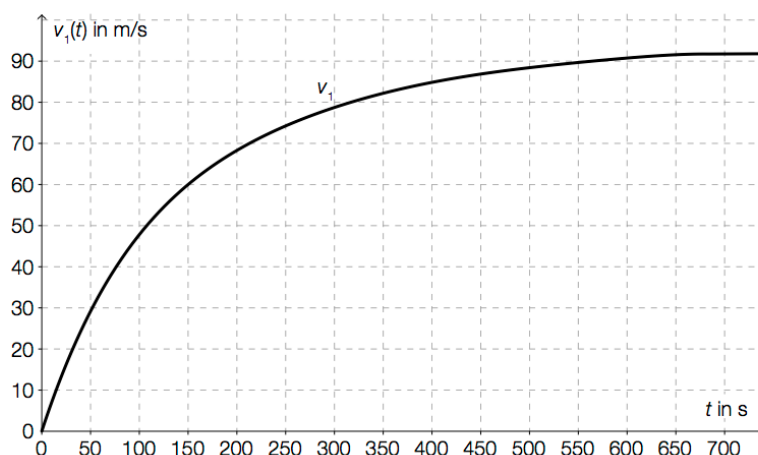
### Aufgabe 1

#### Intercity-Express (ICE)

Als ICE werden verschiedene Baureihen von Hochgeschwindigkeitszügen der Deutschen Bahn bezeichnet. Mit einer Höchstgeschwindigkeit von bis zu 330 km/h (rund 91,7 m/s) handelt es sich dabei um die schnellsten Züge Deutschlands. Sie sind ca. 200 Meter lang und ca. 400 Tonnen schwer und bestehen aus jeweils acht Wagen. Im Rahmen von Zulassungsfahrten müssen Beschleunigungs- und Bremsstests absolviert werden. Ergebnisse dieser Tests können grafisch dargestellt werden.

#### Aufgabenstellung:

- a) Die Daten eines Beschleunigungstests vom Stillstand bis zur Höchstgeschwindigkeit (die Geschwindigkeit  $v_1(t)$  ist in Metern pro Sekunde und die Zeit  $t$  in Sekunden angegeben) sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm näherungsweise dargestellt.



Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit im Zeitintervall  $[0 \text{ s}; 700 \text{ s}]$  und geben Sie einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit größer ist als die ermittelte mittlere Änderungsrate!

Interpretieren Sie das bestimmte Integral  $\int_0^{700} v_1(t) dt$  im gegebenen Kontext!

- b) Bei einem Bremsstest werden Daten aufgezeichnet. Diesen Daten kann man für den zurückgelegten Weg  $s(t)$  entnehmen:  $s(t) = 70 \cdot t - 0,25 \cdot t^2$  mit  $t$  in Sekunden und  $s(t)$  in Metern ab Bremsbeginn.



Geben Sie die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion  $v_2$  für den Bremsstest in Form von  $v_2(t) = k \cdot t + d$  an und deuten Sie die auftretenden Parameter  $k$  und  $d$  im gegebenen Kontext!

Bestimmen Sie die Länge derjenigen Strecke, die der ICE vom Bremsbeginn bis zum Stillstand zurücklegt!

## Aufgabe 2

### ZAMG-Wetterballon

Ein Wetterballon ist ein mit Helium oder Wasserstoff befüllter Ballon, der in der Meteorologie zum Transport von Radiosonden (Messgeräten) verwendet wird. Die Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik (ZAMG) lässt an 365 Tagen im Jahr zwei Mal am Tag einen Wetterballon von der Wetterstation *Hohe Warte* aufsteigen. Während des Aufstiegs werden kontinuierlich Messungen von Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Luftdruck, Windrichtung und Windgeschwindigkeit durchgeführt.

Die bei einem konkreten Aufstieg eines Wetterballons gemessenen Werte für den Luftdruck und die Temperatur in der Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel liegen in der nachstehenden Tabelle vor.

Höhe $h$ des Ballons über dem Meeresspiegel (in m)	Luftdruck $p$ (in hPa)	Temperatur (in °C)
1 000	906	1,9
2 000	800	-3,3
3 000	704	-8,3
4 000	618	-14,5
5 000	544	-21,9
6 000	479	-30,7
7 000	421	-39,5
8 000	370	-48,3

#### Aufgabenstellung:

- a)  Bestimmen Sie die relative (prozentuale) Änderung des Luftdrucks bei einem Anstieg des Wetterballons von 1 000 m auf 2 000 m!

Die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Beschreiben Sie, wie dies anhand obiger Tabelle begründet werden kann!

- b) Die Temperatur in Abhängigkeit von der Höhe lässt sich im Höhenintervall [5 000 m; 8 000 m] durch eine lineare Funktion  $T$  beschreiben.

Begründen Sie dies anhand der in der obigen Tabelle angegebenen Werte!

Berechnen Sie für diese Funktion  $T$  mit  $T(h) = k \cdot h + d$  die Werte der Parameter  $k$  und  $d$ !

- c) Das Volumen des Wetterballons ist näherungsweise indirekt proportional zum Luftdruck  $p$ . In 1 000 Metern Höhe hat der Wetterballon ein Volumen von  $3 \text{ m}^3$ .

Beschreiben Sie die funktionale Abhängigkeit des Volumens (in  $\text{m}^3$ ) vom Luftdruck (in hPa) durch eine Gleichung!

$$V(p) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Berechnen Sie die absolute Änderung des Ballonvolumens im Höhenintervall [1 000 m; 2 000 m]!

## Aufgabe 3

### Einkommensteuer

Erwerbstätige Personen müssen einen Teil ihrer Einkünfte in Form von Einkommensteuer an den Staat abführen. Im Steuermodell für das Kalenderjahr 2015 unterscheidet man vier Steuerklassen mit den sogenannten Steuersätzen: 0 %, 36,5 %, 43,2 % und 50 %.

Modellhaft wird angenommen:

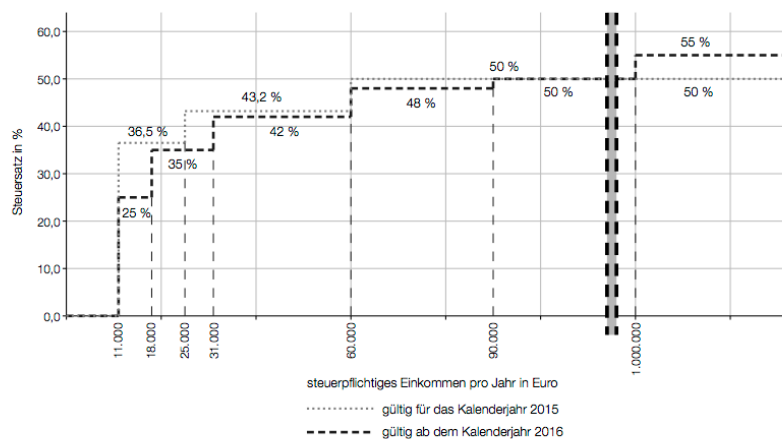
Jahresnettoeinkommen = steuerpflichtiges Jahreseinkommen – Einkommensteuer

Die Berechnung der Einkommensteuer bezieht sich auf das steuerpflichtige Jahreseinkommen und unterliegt für das Kalenderjahr 2015 den folgenden Regeln:

- Einkommen bzw. Einkommensteile bis € 11.000 sind steuerfrei.
- Einkommensteile über € 11.000 bis € 25.000 werden mit 36,5 % besteuert. Das heißt: Liegt das Einkommen über € 11.000, sind die ersten verdienten € 11.000 steuerfrei, die darüber hinausgehenden Einkommensteile bis € 25.000 werden mit 36,5 % besteuert.
- Einkommensteile über € 25.000 bis € 60.000 werden mit 43,2 % (genau:  $43\frac{3}{14}$  %) besteuert.
- Einkommensteile über € 60.000 werden mit 50 % besteuert.

Am 7. Juli 2015 wurde vom Nationalrat das Steuerreformgesetz 2015/2016 beschlossen. Das ab dem 1. Jänner 2016 gültige Steuermodell ist ein Modell mit sieben Steuersätzen.

Das 2015 gültige Modell (mit vier Steuerklassen) und das ab 2016 gültige Modell (mit sieben Steuerklassen) sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



Datenquelle: [http://www.parlament.gv.at/ZUSD/BUDGET/BD\\_-\\_Steuerreform\\_2015\\_und\\_2016.pdf](http://www.parlament.gv.at/ZUSD/BUDGET/BD_-_Steuerreform_2015_und_2016.pdf), S. 15 [11.11.2015]

### Aufgabenstellung:

- a)  Berechnen Sie mithilfe der 2015 geltenden Steuersätze das Jahresnettoeinkommen einer Person, deren steuerpflichtiges Jahreseinkommen € 20.000 beträgt!

Geben Sie (für das Jahr 2015) eine Formel für das Jahresnettoeinkommen  $N$  einer Person an, deren steuerpflichtiges Jahreseinkommen  $E$  zwischen € 11.000 und € 25.000 liegt!

- b) Der sogenannte *Durchschnittssteuersatz* ist wie folgt definiert:

$$\text{Durchschnittssteuersatz} = \frac{\text{gezahlte Einkommensteuer}}{\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen}}$$

Jemand bezog im Jahr 2015 ein steuerpflichtiges Jahreseinkommen von € 40.000. Berechnen Sie für diese Person für das Jahr 2015 den Durchschnittssteuersatz!

Interpretieren Sie unter Verwendung der gegebenen Grafik, was für diese Person mit dem Term  $7\,000 \cdot 0,115 + 7\,000 \cdot 0,015 + 6\,000 \cdot 0,082 + 9\,000 \cdot 0,012$  berechnet wird!



- c) Jemand behauptet:
- (1) „Bei einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 tritt trotz der Gesetzesänderung keine Veränderung hinsichtlich der abzuführenden Einkommensteuer ein.“
  - (2) „Der Steuersatz für steuerpflichtige Jahreseinkommen von über € 11.000 bis € 18.000 ändert sich um 11,5 Prozent.“

Sind diese Behauptungen richtig? Formulieren Sie jeweils eine mathematisch begründete Antwort!

- d) Das Bundesministerium für Finanzen gibt auf seiner Website die Berechnung der Einkommensteuer 2015 (ESt) für die Einkommensklasse über € 25.000 bis € 60.000 steuerpflichtiger Jahreseinkommen mit folgender Formel an:

$$\text{ESt} = \frac{(\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen} - 25\,000) \cdot 15\,125}{35\,000} + 5\,110$$

Deuten Sie den Faktor  $\frac{15\,125}{35\,000}$  und den Summanden 5 110 im Hinblick auf die Berechnung der Einkommensteuer!

Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Einkommensteuer ( $\text{ESt}_{\text{neu}}$ ) für ein steuerpflichtiges Jahreseinkommen von über € 31.000 bis € 60.000 für das ab 2016 gültige Steuermodell auf!

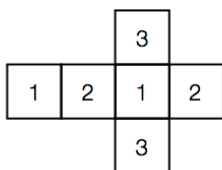
$$\text{ESt}_{\text{neu}} = \underline{\hspace{10cm}}$$

## Aufgabe 4

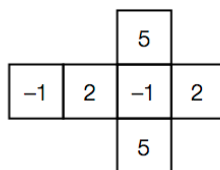
### Würfel mit unterschiedlichen Zahlen

Gegeben sind die Netze von drei fairen Würfeln, deren Seitenflächen auf unterschiedliche Weise mit verschiedenen Zahlen beschriftet sind. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle Seitenflächen gleich groß ist.)

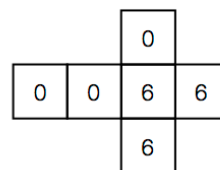
Würfel A



Würfel B



Würfel C



#### Aufgabenstellung:

- a) Herr Fischer wirft Würfel A zweimal. Die Zufallsvariable  $X$  gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an. Die Zufallsvariable  $X$  kann die Werte 2, 3, 4, 5 und 6 annehmen. Frau Fischer wirft die Würfel A und B. Die Zufallsvariable  $Y$  gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an.

A Geben Sie für die Zufallsvariable  $Y$  alle möglichen Werte an!

mögliche Werte für  $Y$ : \_\_\_\_\_

Es gibt Werte der Zufallsvariablen, die bei Herrn Fischer wahrscheinlicher auftreten als bei Frau Fischer. Geben Sie denjenigen Wert an, bei dem der Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeiten am größten ist, und berechnen Sie diesen Unterschied!

- b) Bei einem Spiel wird Würfel B dreimal geworfen. Der Einsatz des Spiels für eine Spielerin/einen Spieler beträgt € 2. Die jeweilige Auszahlung ist von der Summe der drei geworfenen Zahlen abhängig und wird in der nachstehenden Tabelle teilweise angegeben.

Summe der drei geworfenen Zahlen	Auszahlung an die Spielerin/den Spieler
positiv	0
null	2
negativ	?

Eine Person spielt dieses Spiel fünfmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau zweimal die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist!

Berechnen Sie, welchen Betrag der Anbieter des Spiels für das Würfeln einer negativen Summe höchstens auszahlen darf, um langfristig mit keinem Verlust rechnen zu müssen!

- c) Peter wirft den Würfel  $C$  100-mal. Die Zufallsvariable  $Z$  beschreibt die Anzahl der gewürfelten Sechser.

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von  $Z$ !

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der geworfenen Zahlen größer als 350 ist!

## 8.3.2. Lösungserwartungen und Lösungsschlüssel

### Aufgabe 1

#### Intercity-Express (ICE)

##### a) Lösungserwartung:

mittlere Änderungsrate:  $0,131 \text{ m/s}^2$

möglicher Zeitpunkt für die momentane Änderungsrate:  $t = 150 \text{ s}$

Der Wert des angegebenen bestimmten Integrals entspricht dem im Zeitintervall  $[0 \text{ s}; 700 \text{ s}]$  zurückgelegten Weg (in Metern).

##### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe sowohl einer korrekten mittleren Änderungsrate als auch eines entsprechenden Zeitpunkts, wobei die Einheiten „ $\text{m/s}^2$ “ bzw. „ $\text{s}$ “ nicht angeführt sein müssen.

Toleranzintervall für die mittlere Änderungsrate:  $[0,130 \text{ m/s}^2; 0,133 \text{ m/s}^2]$

Toleranzintervall für den Zeitpunkt:  $[0 \text{ s}; 230 \text{ s}]$

- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

##### b) Lösungserwartung:

$$v_2(t) = 70 - 0,5 \cdot t$$

Mögliche Deutungen von  $k$ :

Die Geschwindigkeit nimmt während des Bremsvorgangs in jeder Sekunde (konstant) um  $0,5 \text{ m/s}$  ab.

oder:

Die Beschleunigung (ist konstant und) beträgt  $-0,5 \text{ m/s}^2$ .

oder:

Die Verzögerung durch das Bremsen (ist konstant und) beträgt  $0,5 \text{ m/s}^2$ .

Mögliche Deutung von  $d$ :

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs beträgt  $70 \text{ m/s}$ .

$$v_2(t) = 0 \Rightarrow t = 140 \text{ s} \Rightarrow s(140) = 4900 \text{ m}$$

##### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung beider Parameter. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ $\text{m}$ “ nicht angeführt sein muss.

### Aufgabe 2

#### ZAMG-Wetterballon

##### a) Lösungserwartung:

$$\frac{800 - 906}{906} \approx -0,117$$

Der Luftdruck nimmt bei diesem Anstieg um ca.  $11,7 \%$  ab.

Eine Exponentialfunktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe  $h$  stets eine Verminderung des Luftdrucks um den annähernd gleichen Prozentsatz vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z. B. Höhenzunahme um 1 000 m  $\leftrightarrow$  Luftdruckabnahme um ca. 12 %).

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Gleichungspunkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall:  $[-0,12; -0,115]$  bzw.  $[-12\%; -11,5\%]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

**b) Lösungserwartung:**

Eine lineare Funktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe  $h$  stets eine gleiche Verminderung der Temperatur vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z. B. Höhenzunahme um 1 000 m  $\leftrightarrow$  Temperaturverminderung um 8,8 °C).

$$k = -0,0088$$

$$d = 22,1$$

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt die korrekte Angabe beider Parameterwerte  $k$  und  $d$ .  
Toleranzintervall für  $k$ :  $[-0,009; -0,0088]$

**c) Lösungserwartung:**

$$V(p) = \frac{2718}{p}$$

$$V(800) - V(906) = 0,3975$$

Die absolute Änderung des Ballonvolumens in diesem Höhenintervall beträgt 0,3975 m<sup>3</sup>.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m<sup>3</sup>“ nicht angeführt sein muss.  
Toleranzintervall:  $[0,39\text{ m}^3; 0,4\text{ m}^3]$

## Aufgabe 3

### Einkommensteuer

**a) Lösungserwartung:**

$$20000 - 9000 \cdot 0,365 = 16715 \Rightarrow \text{€ } 16.715$$

Mögliche Formeln:

$$N = E - (E - 11000) \cdot 0,365$$

oder:

$$N = 11000 + (E - 11000) \cdot 0,635$$

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Gleichungspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.  
Toleranzintervall:  $[\text{€ } 16.700; \text{€ } 16.720]$
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Formel für das Jahresnettoeinkommen.  
Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$$\frac{14\,000 \cdot 0,365 + 15\,000 \cdot 0,432}{40\,000} \approx 0,29, \text{ d. h. ca. } 29 \% \text{ Durchschnittssteuersatz}$$

Mit dem Term wird die Steuerersparnis (in Euro) dieser Person durch das neue Steuermodell (im Vergleich zum 2015 gültigen Modell) berechnet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [0,28; 0,29] bzw. [28 %; 29 %]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation.

c) Lösungserwartung:

Beide Behauptungen sind falsch.

- (1) Auch Bezieher/innen von einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 bezahlen beim neuen Steuermodell weniger Einkommensteuer, nämlich für die Einkommensanteile unter € 90.000.
- (2) Tatsächlich ändert sich der Steuersatz für das steuerpflichtige Jahreseinkommen um 11,5 Prozentpunkte, das sind  $\frac{11,5}{36,5} \approx 31,5$  Prozent.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (1) falsch ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (2) falsch ist.

d) Lösungserwartung:

$$\frac{15\,125}{35\,000} \approx 0,432 \text{ ist der Steuersatz für diese Einkommensklasse.}$$

5 110 ist die Einkommensteuer für die ersten € 25.000 an steuerpflichtigem Jahreseinkommen.

$$ESt_{\text{neu}} = (\text{steuerpflichtiges Jahreseinkommen} - 31\,000) \cdot 0,42 + 6\,300$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation beider Zahlenwerte.
- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

## Aufgabe 4

### Würfel mit unterschiedlichen Zahlen

a) Lösungserwartung:

mögliche Werte für Y: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Bei Y hat jeder Wert die gleiche Wahrscheinlichkeit  $\left(= \frac{1}{9}\right)$ , bei X hat 4 die größte Wahrscheinlichkeit  $\left(= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\right)$ . Der Unterschied ist bei 4 am größten, er beträgt  $\frac{2}{9}$ .

oder:

Die Wahrscheinlichkeit für 4 ist bei Herrn Fischer dreimal so groß wie bei Frau Fischer.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Gleichgewichtspunkt für die vollständige Angabe der korrekten Werte für  $Y$ .
- Ein Punkt für die Angabe des gesuchten Wertes und einer korrekten Berechnung des Unterschieds.

**b) Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

Zufallsvariable  $X$  = Anzahl der Spiele, bei denen die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist

$$P(\text{„Summe der drei geworfenen Zahlen ist null“}) = p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{9}$$

Binomialverteilung mit den Parametern  $n = 5$ ,  $k = 2$ ,  $p = \frac{1}{9}$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 0,087 \Rightarrow \text{Die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. 8,7 \%}$$

Mögliche Berechnung:

$x$  ... Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe

$$2 \cdot \frac{1}{9} + x \cdot \frac{1}{27} < 2 \Rightarrow x < 48$$

Die Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe darf höchstens € 48 betragen, damit der Anbieter des Spiels langfristig mit keinem Verlust rechnen muss.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.  
Toleranzintervall: [0,08; 0,09] bzw. [8 %; 9 %]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

**c) Lösungserwartung:**

$n = 100$  und  $p = 0,5$

Erwartungswert:  $E(Z) = 50$

Standardabweichung:  $\sqrt{V(Z)} = 5$

Mögliche Berechnung (z. B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):

Die Summe ist größer als 350, wenn die Anzahl der Sechser mindestens 59 ist.

Es ist möglich, die (für die Anzahl der Sechser) zugrunde liegende Binomialverteilung mit  $n = 100$  und  $p = 0,5$  durch die Normalverteilung mit  $\mu = 50$  und  $\sigma = 5$  zu approximieren.

$$P(Z \geq 59) \approx 0,036 = 3,6 \%$$

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte für den Erwartungswert und die Standardabweichung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind.  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.  
Toleranzintervall: [0,035; 0,045] bzw. [3,5 %; 4,5 %]