DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Spieltheorie im Mathematikunterricht

verfasst von

Gerald Puchinger

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Enzersdorf an der Fischa, Februar 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt	A 190 313 406
Studienrichtung lt. Studienblatt	Lehramtstudium Geschichte, Sozialkunde und politische Bildung & Mathematik
Betreut von	ao. Univ.-Prof. i.R. Mag. Dr. Günter Hanisch

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Menschen meines persönlichen Umfeldes danken, die maßgelblich dazu beigetragen haben, dass diese Diplomarbeit fertiggestellt werden konnte. Sie standen mir immer mit Rat und Tat zur Seite, sei es als fachliche Unterstützung oder als moralische Stütze.

Als Erstes möchte ich meinem Diplomarbeitsbetreuer ao. Univ.-Prof. i.R. Mag. Dr. Günter Hanisch danken, der mir in wichtigen Fragen immer weiterhalf und mich ermutigte, diesen Weg zu gehen.

Auch meinen Studienkollegen, welche mich ein Stück meines Weges begleiteten, gehört mein Dank.

Besonderer besonderen Dank gilt meinen Eltern. Sie haben mich durch ihre Begeisterung für die Mathematik zu diesem Studium geführt und mir dieses durch ihren Einsatz ermöglicht.

Schlussendlich möchte ich noch meiner Freundin und meinem Bruder danken, die mich in die Realität zurückholten und mir Spaß vermittelten, wenn er gebraucht wurde.

Ohne eure Hilfe hätte ich dieses Werk nicht vollenden können. DANKE!

Kurzfassung

Die Spieltheorie hat es geschafft, von einem kleinen Teilbereich der Mathematik zu einem der wichtigsten Instrumente der Wirtschafts-, Sozial-, Politik- und Naturwissenschaften zu werden. In unserem Leben sind wir ständig gezwungen Entscheidungen zu treffen und Situationen zu analysieren. Interessenskonflikte aus dem täglichen Leben, der Wirtschaft oder der Politik werden aufgegriffen und durch eine Analyse in ein mathematisches Modell übersetzt. Dieses Modell dient dann der Spieltheorie zur Lösung des Konfliktes. Damit bildet die Spieltheorie ein gutes Beispiel für eine moderne angewandte Mathematik. Auch der Lehrplan für Mathematik in einer AHS Oberstufe fordert ein modellbildendes Arbeiten und ein Lernen im anwendungsorientierten Kontext. Diese Arbeit geht daher der Frage nach, ob es sinnvoll ist, die Spieltheorie in den Mathematikunterricht zu integrieren. Anhand von vielen Beispielen wird gezeigt, dass die Spieltheorie einen Beitrag zu einem modernen und lebendigen Mathematikunterricht leisten kann. Durch einen intuitiven Zugang, ohne große mathematische Formalismen bringt sie die Mathematik zu den Alltagsproblemen der SchülerInnen.

Abstract

The Theory of Games has become one of the most important instruments of economics, social-science, political-science and science. In our lives, we are forced to make decisions and analyze situations. The Theory of Games picks up a conflict of interests from our everyday life, the political life or an economic situation and put it into a mathematical model by analysis the situation. This model and the Theory of Games help us to solve this conflicts. The Theory of Games is a good example of modern applied mathematics. The curriculum for mathematics claims a model- forming and a learning in an applied context. This degree dissertation concerned with the question, if it is useful to integrate the Theory of Games in mathematical teachings in school. The examples, given in this dissertation, shows us, that the Theory of Games can contribute to a modern teaching. It provides an intuitive access without formal mathematical knowledge and brings mathematics to everyday problems of the students live.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Motivation

Schon von Kindheit an habe ich gerne Spiele gespielt und gerne gewonnen. Irgendwann habe ich angefangen Gründe zu suchen, warum ich verlor oder gewann. Ich begann das Spiel zu analysieren. Egal, ob es Gesellschaftsspiele wie Schach, Poker oder Siedler von Catan waren oder Spiele im Sport wie Fußball oder Tennis. Ich legte mir Strategien zurecht nach dem Prinzip, wenn die anderen dies machen, muss ich jenes machen, um ihnen wieder einen Schritt voraus zu sein.
Als ich vor gut einem halben Jahr darüber nachdachte, welches Thema für meine Diplomarbeit geeignet wäre, las ich gerade ein Buch von Rudolf TASCHNER („*Die Mathematik des Daseins. Eine kurze Geschichte der Spieltheorie“),* einem österreichischen Mathematiker. Er versucht mittels einfacher Beispiele und einer gut erzählten Geschichte die Mathematik für jeden und jede verständlich und interessant zu gestalten. Bis zu diesem Zeitpunkt hatte ich das ein oder andere über Spieltheorie gehört, aber noch nie einen tieferen Einblick in die Thematik bekommen. Ich nahm mir zwei Bücher aus der Bibliothek und vertiefte meine Kenntnis. Durch TASCHNERS Buch stellte ich mir die Frage, ob die Spieltheorie in einfacher Form nicht auch für den Mathematikunterricht geeignet wäre und machte diese Frage zum Gegenstand meiner Diplomarbeit.

1.2. Zielsetzung der Diplomarbeit

Situationen und Entscheidungen sind es, die unser Leben prägen. Oft kennen wir die Folgen dessen noch nicht und viele Entscheidungen hätten große Auswirkungen, würden wir die falsche Wahl treffen.
„Rechts, Mitte oder Links?“, denken sich sowohl StürmerIn als auch Tormänner/ - frauen beim entscheidenden letzten Elfmeter. Eine falsche Wahl von einem von beiden entscheidet über Sieg oder Niederlage für den Anderen. „Bluffen oder

Aussteigen?“ sind die möglichen Strategien beim Poker, welche die SpielerInnen wählen können.

Situationen wie diese ließen sich noch zu Genüge finden. So unterschiedlich diese zwei Beispiele sein mögen, sie haben dennoch Gemeinsamkeiten. Die Beteiligten spielen immer gegen jemand anderen, das heißt der Ausgang der Situation hängt nicht alleine von der Wahl ihrer Tätigkeit ab. Weiters wissen sie nicht, wie die Anderen entscheiden. Dies sind zwei charakteristische Merkmale der Spieltheorie. Damit bildet sie eine Theorie zur Analyse von Entscheidungssituationen bei Interessenskonflikten von mehreren Beteiligten. Was als Teilgebiet der Mathematik begann, ist heute eines der wichtigsten Instrumente der Wirtschafts-, Sozial- und Naturwissenschaften, um Verhaltensstrategien zu analysieren und zu interpretieren. Die Spieltheorie repräsentiert einen angewandten Teil der Mathematik, der einen intuitiven Zugang ermöglicht, ohne große mathematische Vorkenntnisse zu haben. Jeder Mensch ist schon vor Situationen gestanden, deren Ausgang nicht ganz alleine bestimmt werden konnte. Jede/r kennt die grün blinkende Ampel, welche gerade auf Gelb gesprungen ist. Jede/r hat schon einmal Gas gegeben, um gerade noch die Kreuzung zu passieren. Der Ausgang dieser Situation hängt aber nicht alleine von der Entscheidung ab Gas zu geben oder zu bremsen. Unter Umständen kann es gefährlich werden, wenn ein Auto der anderen Spur dieselbe Entscheidung trifft und bei der roten Ampel, welche gerade auf Gelb gesprungen ist, schon voll aufs Gas steigt. Die Spieltheorie begegnet uns täglich und alle von uns haben schon Bekanntschaft mit ihr gemacht. Interessenskonflikte sind ein wesentlicher Bestandteil unseres Lebens. Ein Grundgedanke eines jeden Individuums ist es, diese Konflikte möglichst unbeschadet zu überstehen und im besten Falle, das Optimum für sich herauszuholen.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Spieltheorie vorzustellen und anhand von praxisbezogenen Beispielen zu veranschaulichen. Es ist meine Absicht, nicht das gewohnte Bild der Mathematik als langweilige und trockene Wissenschaft, wie es im Allgemeinen in der Gesellschaft vorherrscht, zu vermitteln. Diese Arbeit soll vielmehr Brücken bauen. Zum einen soll der Laie dazu angeregt werden über die Thematik nachzudenken und somit ein Bild der Mathematik als moderne, praktikable Wissenschaft vermittelt bekommen. Zum anderen richte ich mich an

Lehrkräfte, welche die Mathematik täglich im Klassenzimmer praktizieren und ihr Wissen an die nächste Generation weitergeben. Diese Arbeit soll ein Bindeglied zwischen dem Lernenden und dem Lehrenden sein. Im Schulunterricht findet die Spieltheorie kaum Erwähnung, darum möchte ich die Frage aufarbeiten, ob die Spieltheorie ein geeignetes Thema für den Mathematikunterricht darstellt und gegebenenfalls Beispiele für diesen vorzustellen.

1.3. Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in fünf Kapitel eingeteilt. Neben der Einleitung und dem Anhang mit Literaturverzeichnis, dem Verzeichnis der wichtigsten Definitionen und Abbildungen, bilden die Kapitel 2, 3 und 4 das Kernstück dieser Diplomarbeit.
Zu Beginn wird eine intuitive Definition der Spieltheorie eingeführt und ihr Einsatzgebiet, sowie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur Theorie eines Spieles – im Sinne von Gesellschaftsspielen, Geschicklichkeitsspielen und Glücksspielen – erörtert. Im Anschluss daran findet sich eine kurze Geschichte der Spieltheorie. Diese beschreibt die wichtigsten Stationen und das heutige Forschungsfeld dieser noch jungen Wissenschaft.
Das 3. Kapitel beinhaltet die formale Mathematik der Spieltheorie. Im ersten Teil dieses Abschnittes werden Spiele in Normalform behandelt, gemeinsam mit ihren wichtigsten Definitionen und Sätzen. Ebenso wird anhand anschaulicher Beispiele erklärt, wie dominante, reine und gemischte Strategien zu verstehen und Nash-Gleichgewichte zu finden sind. Im zweiten Teil dieses Abschnittes wird das Konzept der Normalformspiele auf Spiele in Extensivform ausgedehnt und die wichtigsten Definitionen und Sätze zu teilspielperfekten und sequenziellen Gleichgewichten eingeführt. Durch einen Umweg über die Graphentheorie wird das Prinzip des Spielbaumes definiert und durch realitätsnahe Beispiele die Anwendung der Spieltheorie veranschaulicht. Die Spieltheorie weist natürlich einen viel umfangreicheren Inhalt auf, als in diesem Kapitel vorgestellt wurde. Doch sind jene aus zwei Gründen nicht behandelt worden. Erstens erhebe ich keinen Anspruch auf Vollständigkeit der Formalismen der Spieltheorie. Die Spieltheorie ist ein noch aktives Forschungsfeld, welches keinesfalls

abgeschlossen ist, wie auch in der historischen Entwicklung im Kapitel 2 zu sehen sein wird. Dies würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen. Zweitens sind viele andere Teilbereiche der Spieltheorie für den Mathematikunterricht nicht adaptierbar. Ich habe jene Aspekte gewählt, welche die Grundlagen abdecken.

Im Anschluss dreht sich alles um die Frage, inwiefern die Spieltheorie für den Mathematikunterricht adaptiert werden kann. Dieses Kapitel versteht sich als eine didaktische Argumentationshilfe für jene engagierten Lehrkräfte, welche Elemente der Spieltheorie in einem Wahlpflichtfach für einen fächerübergreifenden Unterricht oder den Mathematikunterricht verwenden wollen. Es wird Bezug auf den Lehrplan genommen und geklärt, inwiefern dieser den Sachverhalt der Spieltheorie abdeckt und welches Vorwissen die SchülerInnen mitbringen müssen. Zum Schluss finden sich noch zahlreiche Beispiele für den Unterrichtseinsatz, welche zeigen, welche Chancen und Problemfelder der Einsatz der Spieltheorie im Unterricht hervorbringt.

2. Spieltheorie – Was ist das?

2.1. Spieltheorie, Spiele spielen, Entscheidungen treffen eine Definition

Die Spieltheorie analysiert, anders als der Name vielleicht erwarten lässt, strategische Entscheidungssituationen. Im allgemeinen Volksglauben wird bei diesem Namen jedoch viel öfters an eine Theorie von Gesellschaftsspielen gedacht. Doch so weit ist der Gedanke nicht entfernt. Vor über 60 Jahren bildeten Spiele wie Schach und Poker den Grundstein für die Entwicklung der Theorien. Doch warum gerade diese Spiele und nicht etwa Roulette, und was hat das alles mit strategischen Entscheidungssituationen zu tun?
Um diese Fragen beantworten zu können, müssen wir die grundlegenden Eigenschaften des Spiels kennen:

1. Sie werden von mehr als einer Person gespielt.
2. Die beteiligten Personen üben eine bestimmte Handlung aus.
3. Die Personen erhalten als Ergebnis des Spiels eine Auszahlung (Sieg, Geld, Ruhm und Ehre, usw.).

Es wurde schon angedeutet, dass nicht alle Spiele gleich sind und für eine sinnvolle Analyse durch spieltheoretische Methoden in Frage kommen, daher müssen wir verschiedene Spielformen unterscheiden:

- Geschicklichkeits-Spiele: Sie gewinnt in der Regel derjenige, welcher eine Fähigkeit am besten beherrscht. Zum Beispiel gewinnt der Schnellste einen 100m-Lauf.
- Glücksspiele: Der Zufall entscheidet über Sieg oder Niederlage (z.B. Münzwurf)
- Strategische Spiele: Die Akteure treffen bewusste Entscheidungen und müssen mitberücksichtigen, dass die anderen Spieler ebenfalls bewusste Aktionen ausführen.

Die oben genannten Spielekategorien treten nur in seltenen Fällen in ihrer reinen Form auf, so können auch Geschicklichkeitsspiele strategische Elemente enthalten. Bei einem kurzen Lauf, wie dem 100m–Lauf, sind diese Elemente noch nicht vorhanden. Bei einem Marathon ist die Taktik, also die Einteilung der Kraft, von entscheidender Bedeutung über Sieg oder Niederlage. Ein noch besseres Beispiel liefert uns der Motorsport. In der Formel 1 ist die Boxenstoppstrategie ein wichtiges Element, welches Vor- und Nachteile schaffen kann. Die Teams müssen entscheiden, wie viele Stopps sie vornehmen, welche Reifen sie aufziehen und das in Anbetracht möglicher Strategien der gegnerischen Teams. Auch in vielen Glücksspielen sind strategische Elemente vorhanden, oder diese lassen den Spieler zumindest glauben, dass er Strategien entwickeln kann. Diese machen das Glückspiel im Casino erst interessant. Es würde wohl keiner ein Glücksspiel spielen, wenn immer nur eine Münze geworfen wird. Bei Kopf gewinnt man und bei Zahl verliert man. Auf lange Sicht wäre es ein Nullsummenspiel, da wir aus dem Gesetz der großen Zahlen wissen, dass die Verteilung von Kopf und Zahl ungefähr 50:50 betragen wird. Beim Roulette hingegen glauben viele SpielerInnen eine Strategie entwickeln zu können, um einen sicheren Gewinn vorauszusagen. Dies ist auch bis zu einem gewissen Grad der Fall, wenn man z.B. mit Martingalsystemen spielt. Es wird auf eine Farbe (rot oder schwarz) ein Einsatz gesetzt. Wenn der Einsatz verloren geht, wird der nächste verdoppelt. Dieses Verfahren wird wiederholt, bis man gewinnt. Am Ende entsteht ein Gewinn in Höhe des ersten Einsatzes.

Das Problem hinter der Strategie ist erstens ein negativer Erwartungswert bezüglich des zu erwartenden Gewinnes und zweitens haben Casinos ein Höchstlimit an Geld, welches pro Runde gesetzt werden darf. Poker ist ein strategisches Spiel, auch wenn es große zufällige Elemente wie die Verteilung der Karten gibt. In diesem Spiel hat der Spieler immer die Möglichkeit zu bluffen und somit vielleicht mit einem schlechten Blatt zu gewinnen. Beim Pokern wird ein/e gute/r PokerspielerIn gegen einen Schlechten gewinnen, auch wenn der gute Spieler das Pech hat, die meiste Zeit schlechtere Karten in der Hand zu haben. Der Profi blufft einfach besser und lässt sein Gegenüber glauben, dass er ein gutes Blatt in der Hand hat. Er hat die strategische Entscheidung getroffen, nicht die Wahrheit über seine Karten zu verraten und versucht, diese „Lüge“ gut zu verkaufen. Die richtige Mischung aus Bluff, Wahrheit und guten Karten machen es dem Gegenüber schwer die Strategie zu durchschauen.

Die Spieltheorie entwickelte sich aus klassischen Gesellschaftsspielen. Heute hat sie ein viel breiteres Anwendungsgebiet. Im Grunde benötigen wir sie jeden Tag in jeder Situation, in welcher wir mit anderen Menschen interagieren. Eltern spielen strategische „Spiele" mit ihren Kindern, wenn sie diese dazu bewegen wollen die Hausübungen zu machen oder das Zimmer aufzuräumen. Supermärkte spielen strategische Spiele, wenn sie eine Rabattaktion auf Mineralwasser anpreisen, um Kunden in die Filialen zu locken und sie somit anderen Wettbewerbern abwerben.
Die Spieltheorie ist überall im Einsatz, und wie wir sehen, dürfen wir den Begriff des Spiels nicht nur als Gesellschaftsspiele definieren. Weiters wollen wir das Spielen nicht als Spielen mit Legosteinen, sondern als das Handeln in einer Situation auffassen. Die Spieltheorie geht bei diesem Handeln von AkteurInnen davon aus, dass sie sich im Großen und Ganzen rational verhalten. Das heißt, sie treffen keine Entscheidungen, welche zu ihrem Nachteil sind. Die Bedingung des rationalen Spielers wird vor allem bei der Analyse von Spielen wie Schach, aber auch bei militärischen Konflikten klar. Die Beteiligten wollen das Spiel oder den Krieg gewinnen. Demnach können wir in der Spieltheorie relativ sicher davon ausgehen, dass keine Handlungen gesetzt werden, die zu ihrem Nachteil wären.[1]

Diese ersten Überlegungen bezüglich des Spiels und der Entscheidung führen zu einer ersten Definition der Spieltheorie. Die Spieltheorie ist eine Theorie der sozialen Interaktionen von rationalen SpielerInnen, welche bewusst eine Entscheidung zu Gunsten einer Handlung setzen, die sie aus mindestens zwei Handlungsmöglichkeiten frei wählen können. Der Gegenstand der Spieltheorie ist die Analyse von strategischen Entscheidungssituationen für die gelten:

i. Das Ergebnis ist von der Wahl mehrerer SpielerInnen abhängig. Ein/e SpielerIn allein kann das Ergebnis nicht unabhängig von den Handlungen der anderen beeinflussen.
ii. Die SpielerInnen sind sich der Abhängigkeit ihrer Entscheidungen von den Handlungen der anderen SpielerInnen bewusst.

[1] Joachim BEHNKE, Entscheidung- und Spieltheorie (Baden-Baden 2013) S. 9-16

iii. Die SpielerInnen können davon ausgehen, dass sich auch die anderen SpielerInnen dieser Abhängigkeit bewusst sind.
iv. Bei jeder Entscheidung bedenken die SpielerInnen Punkt (i), (ii) und (iii).

Diese Eigenschaften führen dazu, dass der Interessenskonflikt ein charakteristisches Beispiel für eine strategische Entscheidungssituation ist. Die Spieltheorie hilft uns dabei, diese Situationen zu analysieren, indem wir sie in der Form eines Spieles modellieren.[2]

2.2. Historische Entwicklung der Spieltheorie

> *"Ein Pokerspiel mit nur zwei Karten [Anm. die zwei Karten sind Kreuz König und Herz Ass], das ist ja lächerlich." Oskar Morgenstern blickt John von Neumann verdattert an, der aber in aller Ruhe das Gespräch fortsetzt: „Gedulden Sie sich, bald werden Sie sehen, dass ich damit Ihr Problem löse. Es ist klar, dass Herz Ass den Kreuz König übertrumpft. [...] Zugegeben das Ganze klingt ein wenig verrückt, aber glauben Sie mir, es ist nicht ohne Witz. Nun ziehe ich eine Karte. Wenn ich den König ziehe und eine ehrliche Haut bin, erkläre ich die Runde für vorzeitig beendet und verliere meinen Einsatz. [...] Wenn ich das Ass ziehe, den Einsatz erhöhe, und wenn Sie mit einer Erhöhung Ihres Einsatzes mithalten, gewinne ich die Partie und schreibe einen Gutpunkt für mich. [...] Aber das Reizvolle am Pokern ist, dass ich nach dem Ziehen der Karte keine ehrliche Haut sein muss."* [3]

Rudolf TASCHNER beschreibt in der Szene seines Buches *Die Mathematik des Daseins: eine kurze Geschichte der Spieltheorie* ein Zusammentreffen von Oskar Morgenstern und John von Neumann. So ähnlich könnte es wohl gewesen sein. Tatsache ist, dass die zwei aus solchen Überlegungen heraus das Buch *Theory of Games and Economic Behavior* geschrieben haben, welches sie 1944 veröffentlichten. Heute gilt das Erscheinen des Buches als Gründungsstein für die wissenschaftliche Disziplin der Spieltheorie. Anders als in anderen Disziplinen der Mathematik und der Wirtschaftswissenschaften, bestand ihr Buch nicht aus

---

[2] Manfred J. HOLLER, Gerhard ILLING, Einführung in die Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2003[5]) S. 1
[3] Rudolf TASCHNER, Die Mathematik des Daseins. Eine kurze Geschichte der Spieltheorie (München 2015) S. 114-115

Zusammenfassungen von schon bekannten Inhalten. Es war im Großen und Ganzen ein Werk mit vollkommen neuen Inhalten. Das heißt jedoch nicht, dass sich vor ihnen noch nie jemand mit spieltheoretischen Inhalten beschäftigt hätte. Bereits Antoine-Augustin COURNOT beschäftigte sich zu Beginn des 19. Jahrhunderts mit Gleichgewichtsproblemen im wirtschaftlichen Kontext. Zeitgleich mit John von Neumann untersuchten Emil BOREL und Heinrich Freiherr von STACKELBERG wirtschaftliche Gleichgewichtsprobleme mit mathematischen Mitteln.[4] BOREL untersuchte erstmals 1924 das Spiel „Stein-Papier-Schere" auf ein Gleichgewicht und war bereits 1921 von den Vorteilen gemischter Strategien überzeugt.[5] Seine erste Arbeit zur Spieltheorie veröffentlichte von NEUMANN im Jahr 1928 ehe er mit Oskar MORGENSTERN den Grundpfeiler der heutigen Spieltheorie im oben erwähnten Werk legte. [6]

Dieses Buch stellte einen vollkommen neuen Denkansatz in der ökonomischen Theorie vor. Erstens forderten MORGENSTERN und NEUMANN eine Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften, die – anders als die Physik – auf wenige Formalismen zurückgreifen konnte. Zweitens postulierten sie einen neuen Ansatz für die Analyse von Entscheidungssituationen – das strategische Kalkül. Bis zu diesem Zeitpunkt war das oberste Prinzip der Wirtschaftstheorien der Optimierungsgedanke. Damals ging man in der Mikroökonomie hauptsächlich von vollkommenen Wettbewerbssituationen aus. Also von großen Märkten mit vielen KonsumentInnen und vollkommener Information aller TeilnehmerInnen. Aufgrund der großen Anzahl der ProduzentInnen und der vollkommenen Information über Angebot, Preis und Nachfrage führt dies dazu, dass sich die Beteiligten (also KonsumentInnen und ProduzentInnen) nur als PreisanpasserInnen verhalten können. Die Entscheidungen der KonsumentInnen und der Firmen beruhen rein auf dem Preissignal, aber nicht auf den Entscheidungen der anderen SpielerInnen, somit hängen auch die Zielgrößen (Umsatz, Gewinn, Marktanteile, usw.) nur von den eigenen Entscheidungen (Absatzmenge, konsumierte Gütermenge, Preis, usw.) ab. Mit dem strategischen

[4] Walter SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 1
[5] Jörg BEWERSDORFF, Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen (Wiesbaden 2012) S. 251
[6] Walter SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 1

Kalkül lassen sich auch unvollkommene Wettbewerbssituationen analysieren. Dies sind Situationen mit wenigen AkteurInnen, die alle zueinander in einer Konkurrenzsituation stehen. In solchen Fällen ist es für die SpielerInnen sinnvoll die Entscheidungen der anderen mit zu berücksichtigen.[7]

In den ersten Jahren nach dem Erscheinen des Buches von Oskar MORGENSTERN und John von NEUMANN wurde die Spieltheorie der Spiele in Normalform stark vorangetrieben. Die Normalformspiele betrachten Entscheidungssituationen mit möglichst wenigen Parametern, so benötigen diese nur eine Spieleranzahl und ihre möglichen Handlungen, sowie den Nutzen den die Spieler daraus ziehen. Ein besonderes Augenmerk lag bei den sogenannten Nullsummenspielen. Diese Spiele sind dadurch charakterisiert, dass ein/e SpielerIn immer nur so viel gewinnen kann, wie sein/e GegenspielerIn verlieren kann. Mathematiker wie Lloyd SHAPLEY, Harold KUHN und John NASH waren maßgeblich an der Entwicklung dieser Theorien beteiligt. Das Problem der Nullsummenspiele lag darin, dass sie in der realen Wirtschaft so gut wie nicht existierten, weshalb das Interesse an der Spieltheorie wieder abklang.
Erst in den sechziger Jahren sollte eine zweite Blütephase der Spieltheorie entstehen, welche sich mit den kooperativen Spielformen beschäftigte. Es wurden Lösungskonzepte entwickelt, die den Beteiligten eine möglichst faire Auszahlung garantierten, wenn alle TeilnehmerInnen zusammenarbeiteten. Diese Lösungsansätze waren interessant für das betriebswirtschaftliche Problem der Gemeinkostenzuordnung und der Gewinnausschüttung in Kapitalgesellschaften.
In der Mitte der Siebziger entwickelte sich ein reges Interesse an den extensiven Spielformen. Hier sind vor allem die Arbeiten von Reinhard SELTEN zu erwähnen, welcher das Lösungskonzept des teilperfekten Gleichgewichts entwickelte. Die Extensivformspiele geben die Möglichkeit alle Einzelheiten eines Spieles – wie die Zugabfolge der TeilnehmerInnen, den Informationsstand, die strategischen Möglichkeiten usw. – zu modellieren. Bis zu diesem Zeitpunkt gab es in der Analyse von Entscheidungssituationen keine Informationsmängel bei den SpielerInnen. Erst John HARSANYI hat solche Spiele modelliert. Damit hat er

[7] Siegfried K. BERNINGHAUS, Karl-Martin EHRHART, Werner GÜTH, Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie (Berlin 2010³) S. 1-3

explizite Probleme zugänglich gemacht, in welchen die MarktteilnehmerInnen nicht vollständig über die Nachfragesituation, Produktionsmöglichkeiten oder Absatzzahlen der Konkurrenz informiert waren.
Einen weiteren Eingang fand die Spieltheorie in der Biologie, wo sie helfen sollte, biologische Phänomene zu analysieren. Die evolutionäre Spieltheorie erweiterte das Rationalitätsprinzip durch ein Prinzip des Lernens. Das Rationalitätskonzept, welches bis in die achtziger Jahre verfolgt wurde, hatte das Problem, dass viele theoretische Erkenntnisse durch praktische Experimente nicht bestätigt werden konnten. Erst durch das Konzept der beschränkten Rationalität und des Lernens in Spielen konnten diese bestätigt werden.
Die Bedeutung der Spieltheorie lässt sich auch durch den 1994 verliehenen Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften an John NASH, John HARSANYI und Reinhard SELTEN für ihre Leistungen in der Spieltheorie erahnen. Dies gelang nur wenigen Mathematikern vor ihnen. [8] Die Spieltheorie hat sich von einem Teilgebiet der Mathematik zu einer eigenständigen Disziplin entwickelt, welche im Allgemeinen jede Konfliktsituation analysieren kann. Somit wurde sie zu einem wichtigen Instrument für die Wirtschafts-, Natur- und Sozialwissenschaften.[9]

[8] Christoph ABLEITINGER, Petra HAUER-TYPPELT, Spieltheorie im Unterricht. Kann es das Spielen? In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 40 (2007), Online unter: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2007%20Band%2040/VortragAbleitingerHauerTyppelt.pdf S. 4
[9] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010[3]) S. 3-8

3. Theoretische Grundlagen der Spieltheorie

In diesem Kapitel wenden wir uns den wichtigsten Definitionen, Sätzen und Lösungskonzepten der Spieltheorie zu. Diese Arbeit folgt der allgemein üblichen Unterscheidung der Spielformen in Normalform und Extensivform. Grundsätzlich handelt es sich bei dieser Unterscheidung nicht zwangsweise um unterschiedliche Spiele, sondern nur um verschiedene Modelle von Entscheidungssituationen.

3.1. Spiele in Normalform

3.1.1. Ein erstes Konzept

Normalformspiele (oft auch als strategische Spiele oder Simultanspiele bezeichnet) benötigen für ihre Modellierung nur ein Mindestmaß an vordefinierten „Spielregeln“. Indem wir annehmen, dass alle SpielerInnen gleichzeitig ihre Entscheidungen treffen, werden z.B. unterschiedliche Zugabfolgen nicht berücksichtigt. Weiters können wir – solange nicht anderes angegeben – annehmen, dass alle SpielerInnen über ihre Auszahlungen und die ihrer Gegenspieler informiert sind, wir sprechen auch von vollständiger Information. Sie können sich daher in die Lage des Gegenübers hineinversetzen und so jeden Ausgang des Spieles analysieren. Als Letztes nehmen wir noch an, dass alle Spiele endlich sind. Die Spieler machen einen Zug und dann ist das Spiel vorbei, die Auszahlungen werden getätigt und das Spiel kann (muss aber nicht) von vorne beginnen.

Beispiel 1: Hausübungs-Spiel (a)

Der Schüler Peter steht vor der Entscheidung seine Hausübung zu machen oder mit seinen Freunden spielen zu gehen, in diesem Fall macht er die Hausübung nicht. Er ist sich bewusst darüber, dass die Lehrerin Frau Huber die Hausübung kontrollieren kann, aber sie kann auch darauf verzichten. Der Schüler weiß, dass es für seinen Lernerfolg sehr positiv ist, wenn er die Hausübung macht und die Lehrerin die Hausübung kontrolliert, da er dann ein Feedback über seinen Lernerfolg bekommt. Wenn er die Hausübung macht und sie wird nicht kontrolliert, zieht er noch immer *den Nutzen der Wiederholung des Stoffes daraus. Entschließt sich der Schüler dazu die Hausübung nicht zu machen und sie wird kontrolliert, bedeutet das einen negativen Eintrag für ihn. Wenn die Hausübung nicht gemacht und nicht kontrolliert wird, hat niemand einen Schaden und niemand einen Nutzen daraus.*

Wie wir bereits wissen, haben wir nur dann ein spieltheoretisches Problem, wenn die Akteure mehrere Strategien zur Auswahl haben.

Definition 1: Strategiemenge, Strategiekonfiguration

„Strategiemenge (Σ_i)" ist die Menge aller zur Verfügung stehenden Strategien welche ein/e AkteurIn $i \in I$ wählen kann. I bezeichnet die SpielerInnenmenge und die Menge aller Strategiemengen ist definiert als $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \ldots \times \Sigma_\mathrm{n}$. Ein Element der Strategiemenge Σ_i heißt reine Strategie des/ der SpielerIn i ($\sigma_i \in \Sigma_\mathrm{i}$). Die „Strategiekonfiguration" ist die Menge der gewählten Strategien der Akteure aus ihren jeweiligen Strategiemengen:

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2 \ldots \times \Sigma_\mathrm{n}$$

und σ_{-i} bezeichnet die Mengen der Strategiekonfigurationen aller Spieler mit Ausnahme des i-ten Spielers:

$$\sigma_{-i} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$$

[10,11]

Die Strategiekonfiguration beschreibt einen möglichen Ausgang des Spiels. Weitere Ausgangsmöglichkeiten entstehen durch andere Kombinationen unserer AkteurInnen, wie z.B. (Schüler macht HÜ, Lehrerin kontrolliert HÜ). Die Strategiekonfigurationen können in einer 2×2 Matrix dargestellt werden. Welche Entscheidungen konkret gewählt werden, hängt zum Schluss noch von der Auszahlungsfunktion ab.

[10] Stefan WINTER, Grundzüge der Spieltheorie. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das (Selbst-) Studium, (Berlin/Heidelberg 2015) S. 17
[11] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010^3) S.12, S. 18

Definition 2: Auszahlungsfunktion

Die Strategiekonfiguration ist ein Spielergebnis, das i gemäß seiner Auszahlungsfunktion $H_i: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ bewertet (wobei $\mathrm{H_i}$ die Auszahlungsfunktion des Spielers/ der Spielerin i ist). [12]

Die Auszahlungsfunktion gibt somit jeder Strategiekonfiguration für den/die SpielerIn i einen subjektiven Nutzen an, also einen Wert in den reellen Zahlen. Dieser Wert ermöglicht es eine Präferenzordnung für jede/n SpielerIn bzgl. ihrer Strategien zu treffen.

Definition 3: Spiel in Normalform

Ein Spiel in Normalform G wird durch ein $2n + 1$- Tupel

$$G = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_n;\ \mathrm{H}_1, \dots, \mathrm{H}_n; I)$$

mit I Spielern und $|I| = n$ beschrieben, wobei Σ_i die Strategiemenge des i-ten Spielers und $\mathrm{H_i}$ die Auszahlungsfunktion des i-ten Spielers ist ($\forall i \in I$). [13]

Das Hausübungsproblem beschreibt einen Schüler, der von der positiven Wirkung der Hausübungen überzeugt ist. Daher können wir eine 2×2 –Entscheidungsmatrix mit den Strategiekonfigurationen – wie folgt – darstellen:

Schüler Peter \ Lehrerin Huber	kontrolliert	kontrolliert nicht
macht HÜ	2 (Lehrerin) / 2 (Schüler)	1 (Lehrerin) / 1 (Schüler)
macht HÜ nicht	1 (Lehrerin) / -2 (Schüler)	0 (Lehrerin) / 0 (Schüler)

Abb. 1: Hausübungs-Spiel (a): Entscheidungsmatrix [14]

[12] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 12
[13] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 13
[14] ABLEITINGER, HAUER- TYPPELT, Spieltheorie im Unterricht S. 5

In Abb. 1 sehen wir den Nutzen, welchen die SpielerInnen den jeweiligen Ausgängen zuordnet. Wenn Peter sich entschließt die Hausübung nicht zu machen und die Lehrerin diese nicht zu kontrollieren, dann hat Peter einen Nutzen von 0 und Frau Huber ebenfalls. Die Werte der Matrix sind subjektive Nutzen für die SpielerInnen Peter und Frau Huber.

Der Schüler muss also jeden Tag aufs Neue – unabhängig von der Wahl der Professorin, ob sie die Hausübung kontrolliert oder nicht – die Entscheidung treffen, ob er die Hausübung macht oder nicht. Er weiß nicht, ob die Lehrerin diese kontrolliert oder nicht. Wenn wir das Spiel aus der Sicht des Schülers analysieren, fällt uns auf, dass es für ihn immer besser ist die Hausübung zu machen, als sie nicht zu machen, da beide Auszahlungen höher sind. Wir können in Abbildung 2 sehen, dass sich der Schüler in jeder Situation, in welcher er sich zuerst entschieden hat, die Hausübung nicht zu machen, nachträglich seine Entscheidung ändern und die HÜ doch machen würde. Für Peter können wir daher eine Präferenzordnung finden mit:

(macht HÜ/ kontrolliert) < (macht HÜ/ kontrolliert nicht)
< (macht HÜ nicht/ kontrolliert nicht) < (macht HÜ nicht/ kontrolliert)

Schüler Peter	Lehrerin Huber: kontrolliert	kontrolliert nicht
macht HÜ	2	1
macht HÜ nicht	1	0

Schüler Peter	Lehrerin Huber: kontrolliert	kontrolliert nicht
macht HÜ	2	1
macht HÜ nicht	1	0

Abb. 2 Sicht des Schülers (oben) / Sicht der Lehrerin (unten)

Auch die Lehrerin muss entscheiden, ob sie die Hausübungen kontrolliert oder nicht. Sie weiß nicht, ob der Schüler die Hausübung gemacht hat oder nicht. Wenn wir das Spiel aus Sicht der Lehrerin analysieren, ist auch hier zu sehen, dass es sich für sie nicht lohnt die Hausübung nicht zu kontrollieren. Auch hier sind beide Auszahlungen höher, unabhängig davon, ob der Schüler die Hausübung macht oder nicht. Sie würde sich ebenfalls immer anders entscheiden wollen, wenn sie sich entschlossen hätte die Hausübung nicht zu kontrollieren.
Sowohl die Lehrerin als auch der Schüler werden sich immer dafür entscheiden die Hausübung zu kontrollieren und zu machen. Es handelt sich bei diesen Entscheidungen um sogenannte dominante Strategien.

Definition 4: dominante Strategie

Eine reine Strategie $\sigma_i^0 \in \Sigma_i$ heißt strikt dominant, wenn im Vergleich mit jeder anderen Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i \backslash \{\sigma_i^0\}$ gilt:

$$H_i(\sigma_i^0, \sigma_{-i}) > H_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Eine reine Strategie $\sigma_i^0 \in \Sigma_i$ heißt schwach dominant, wenn im Vergleich mit jeder anderen Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i \backslash \{\sigma_i^0\}$ gilt:

$$H_i(\sigma_i^0, \sigma_{-i}) \geq H_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

D.h. eine streng dominante Strategie ist die beste Entscheidung gegenüber allen anderen möglichen Strategien von allen anderen SpielerInnen. Das ist der Fall, wenn die Auszahlung größer ist als bei jeder anderen beliebigen Strategie, welche dem/der SpielerIn zur Auswahl steht und unabhängig von den Entscheidungen der MitspielerInnen ist. [15],[16]

Da eine dominante und somit beste Strategie existiert, werden die Spieler diese auch wählen, d.h. ihre Strategiewahl ist eindeutig. In unserem Hausübungsfall haben sowohl die Lehrerin als auch der Schüler eine dominante Strategie, die in der Strategiekonfiguration $\sigma =$ (Schüler macht Hausübung, Lehrerin kontrolliert

[15] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010[3]) S. 18
[16] WINTER, Grundzüge der Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2015) S. 34

Hausübung) endet. Hier haben beide Entscheidungsträger keinen Grund von ihrer Entscheidung abzuweichen. Die SpielerInnen würde sich mit jeder anderen Entscheidung schlechter stellen. Wir haben ein Gleichgewicht gefunden.

Definition 5: Gleichgewicht

Eine Strategiekonfiguration heißt „Gleichgewicht", sollte keiner der Akteure im Nachhinein die getroffene Entscheidung ändern wollen.

Unser Beispiel beschreibt natürlich eine/n ideale/n SchülerIn für eine jede Lehrkraft. Diese/r würde immer die Hausübung machen, da die Auszahlung immer am höchsten ist. Die Höhe der Auszahlung hat nicht zwangsläufig etwas mit der zustande gekommenen Strategiekonfiguration zu tun. Dies ist sofort ersichtlich, wenn man beispielsweise jeden Wert der Entscheidungsmatrix -2 rechnet. Der Schüler würde keinen Nutzen mehr aus der Hausübung ziehen, aber einen viel größeren Schaden, wenn er diese nicht macht. Dieser Sachverhalt stellt sich hingegen komplett anders dar, wenn sich die Verhältnisse der Auszahlungswerte zueinander verändern, also die subjektiven Nutzen eines Spielausgangs anders bewerten.

Beispiel 2: Hausübungs-Spiel (b)

Wir können uns dieses Spiel auch mit der Schülerin Sandra ansehen, die vor demselben Problem steht. Sie ist nicht von der positiven Wirkung der Hausübungen überzeugt, weshalb sie die Hausübung am liebsten nicht machen würde.

In diesem Beispiel haben wir nur die Auszahlungsfunktion der Schülerin verändert, weshalb unsere Entscheidungsmatrix folgende Gestalt annimmt:

		Lehrerin Huber	
		kontrolliert	kontrolliert nicht
Schülerin Sandra	macht HÜ	2 1	1 1
	macht HÜ nicht	1 -4	0 4

Abb. 3: Hausübungs-Spiel (b): Entscheidungsmatrix [17]

Die Lehrerin hat keinen Grund ihre Strategie zu ändern, sie wird sich weiterhin dazu entschließen die Hausübung zu kontrollieren und ihrer dominanten Strategie folgen. Sandra hingegen hätte die höchste Auszahlung aus ihrer Sicht, wenn sie die Hausübung nicht macht. Wenn sie diese Entscheidung trifft und sie kontrolliert wird – was sicher passieren wird, da es für die Lehrerin den höchsten Nutzen darstellt – dann hat sie mit einem negativen Eintrag zu rechnen (Auszahlung -4). Sandra wird sich daher entscheiden die Hausübung zu machen, auch wenn sie dadurch nicht mehr die höchstmögliche Auszahlung erhält. Wir haben also in der Strategiekonfiguration $\sigma =$ (Schülerin macht Hausübung, Lehrerin kontrolliert Hausübung) wieder ein Gleichgewicht gefunden, da beide Entscheidungsträger ihre Entscheidungen nach dem Spiel nicht verändern wollen. Dieses Gleichgewicht ist kein Gleichgewicht in dominanten Strategien. Sandra besitzt keine dominante Strategie. Eine jeder ihrer Entscheidungen, muss sie immer von der Wahl der Lehrerin abhängig machen. Dies war in unserem Beispiel 1 anders. Peter konnte mit seiner Strategie die Hausübung zu machen immer darauf vertrauen, eine bessere Auszahlung zu erhalten, als wenn er sie nicht gemacht hätte. Sandra hat hingegen ihre Entscheidung von der Strategie der Lehrkraft abhängig gemacht und ihre „Beste-Antwort“ passend auf die Strategie der Lehrerin gewählt. Durch dieses Vorgehen entwickelte sich wieder ein Gleichgewicht, welches Sandra jedoch nicht mehr ihre höchste Auszahlung liefert. Sie hat reagiert und ihre Auszahlung unter der Nebenbedingung optimiert, dass auch die Lehrerin ihre Auszahlung optimiert.

---

[17] Ableitinger, Hauer- Typpelt, Spieltheorie im Unterricht. S. 6

3.1.2. Das Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien

Das Nash-Gleichgewicht wurde von John Nash 1950 in seiner Dissertation publiziert. Aufgrund seines intuitiven Zugangs gilt dieses Gleichgewicht heute als weit verbreitetes und wohl auch prominentestes Lösungskonzept in der Spieltheorie. Das Nash-Lösungskonzept geht im Großen und Ganzen davon aus, dass ein/e SpielerIn immer die Beste-Antwort auf die Strategien der MitspielerInnen sucht. [18]

Definition 6: **Beste-Antwort**

Die Strategie $\sigma_i^{\sim}$ heißt Beste-Antwort für den Spieler i auf die Strategien der anderen Akteure, wenn sie die höchstmögliche Auszahlung H_i bringt:

$$H_i(\sigma_i^{\sim}, \sigma_{-i}) \geq \; H_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

Sei r_i eine Abbildung der besten Antworten mit den Funktionswerten:

$$r_i(\sigma_{-i}) \coloneqq \{\sigma_i \in \Sigma_i \, : \; H_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \max H_i(\sigma_i^{\sim}, \sigma_{-i})\}$$

Ein Entscheidungsträger i betrachtet die Strategien σ_{-i} der anderen Akteure und entscheidet sich für seine Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i$, welche die höchste Auszahlung liefert unter der Nebenbedingung, dass alle anderen ihre Strategien beibehalten. [19],[20]

Definition 7: Nash-Gleichgewicht (in reinen Strategien)

Eine Strategiekonfiguration $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ heißt Nash-Gleichgewicht, wenn für jede Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i$ eines jeden Spielers $i \in I$ gilt:

$$H_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \; H_i\left(\sigma_{i,} \, \sigma_{-i}^*\right) \; \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

Eine Strategiekonfiguration $\sigma \in \Sigma$ kann auf ein Nash-Gleichgewicht untersucht werden, indem geprüft wird, ob ein einseitiges Abweichen auf eine andere Strategie zu einer höheren Auszahlung führt. Wenn dies nicht der Fall ist, haben

[18] ABLEITINGER, HAUER- TYPPELT, Spieltheorie im Unterricht. S. 4
[19] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 20
[20] ABLEITINGER, HAUER- TYPPELT, Spieltheorie im Unterricht. S. 4

die SpielerInnen auch keinen Grund ihre Strategie zu wechseln und es liegt ein Nash-Gleichgewicht vor. Die Definition des Nash-Gleichgewichtes zeigt uns, dass es sich bei diesem Lösungskonzept um ein Konzept des Reagierens handelt. Der/Die SpielerIn prüft die Strategien auf die Beste-Antwort immer in Abhängigkeit von den Strategien der GegenspielerInnen.[21]

Beispiel 3: Das Gefangenendilemma

Das Gefangenendilemma ist das bekannteste und meist diskutierte Problem der Spieltheorie. Es ist fast immer ein wichtiger Bestandteil eines jeden Lehrbuches zur Spieltheorie und verfügt über zahlreiche Abwandlungen und Verallgemeinerungen. Die Ausgangssituation ist folgende:

Zwei Gefangene (G1 und G2) werden von der Staatsanwaltschaft beschuldigt ein Verbrechen begangen zu haben. Diese Straftat haben sie auch tatsächlich begangen, doch die Staatsanwaltschaft hat nur Indizienbeweise. Die zwei werden in unterschiedliche Räume gesperrt, sodass sie sich nicht absprechen können. Einem jeden wird derselbe Deal vorgeschlagen: wenn beide gestehen, bekommen sie eine leicht verminderte Haftstrafe; wenn nur eine/r gesteht, kommt diese/r durch eine Kronzeugenregelung frei und der/die andere bekommt die Höchststrafe; wenn beide schweigen, bekommen sie nur eine kleine Haftstrafe aufgrund kleiner Delikte, welche man ihnen nachweisen kann.

		G1	
		gestehen	schweigen
G2	gestehen	-4 -4	-5 0
	schweigen	0 -5	-1 -1

Abb. 4 Gefangenendilemma

[21] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010^{3}) S. 24

Das Prinzip hinter dem Gefangenendilemma finden wir in zahlreichen sozialen und ökonomischen Situationen wieder. Ein/e SteuerzahlerIn kann seiner Steuerpflicht nachgehen oder keine Steuern zahlen. In Gruppenarbeiten können sich Schüler und Schülerinnen dafür entscheiden mitzuarbeiten oder die anderen die Arbeit machen zu lassen. Auf den ersten Blick würde man diesem Problem nicht lange Aufmerksamkeit schenken. Wenn beide schweigen, dann bekommen sie nur ein Jahr Haft. Doch wenn man die Situation genauer betrachtet und aus den Blickwinkeln beider Insassen einzeln auf ihre Besten-Antworten analysiert, sieht man Folgendes:

- Blickwinkel G1:
    - Unter der Annahme, dass G2 gesteht, würde sich G1 immer auch für „Gestehen" entscheiden.
    - Unter der Annahme, dass G2 schweigt, würde sich G1 immer für „Gestehen" entscheiden.

    → „Gestehen" ist die Beste-Antwort des G1 auf die Strategien von G2.
- Blickwinkel G2: analog zu G1.

    → „Gestehen" ist die Beste-Antwort des G2 auf die Strategien von G1.

Diese Überlegungen führen zu einem Nash-Gleichgewicht in der Strategiekonfiguration σ^*= (gestehen, gestehen) und bringt beide Gefangenen 4 Jahre hinter Gitter. Diese Lösung ist wenig befriedigend, da dieses Ergebnis nicht ihrer bestmöglichen Auszahlung entspricht. Ihre gewählten Strategien stellen eine dominante Strategie dar, die unabhängig von der Wahl des anderen Gefangenen getroffen werden kann.[22]

Am Beispiel unseres Gefangenendilemmas lassen sich zwei sehr interessante Schlüsse ziehen.

[22] Harald WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 122-124

Satz 1: *Eine Lösung in streng dominanten Strategien ist ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht.*

Die Aussage dieses Satzes hat durch die Überlegungen in unserem Gefangenendilemma durchaus Berechtigung, daher wird an dieser Stelle auf eine genaue Beweisführung verzichtet. Der Beweis folgt direkt aus der Definition der dominanten Strategie.

Satz 2: *Eine Strategiekonfiguration σ^* ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn σ^* wechselseitig die besten Antworten aller SpielerInnen $i \in I$ ist.*

Beweis:

" $\Longrightarrow$ "Sei σ^* ein Nash-Gleichgewicht, dann gilt $H_i(\sigma^*) \geq H_i\left(\sigma_{i,} \sigma^*_{-i}\right) \; \forall \sigma_i \in \Sigma_i$ → $H_i(\sigma^*) = \max H_i(\sigma_i^{\sim}, \sigma^*_{-i})$ und es folgt aus Definition 6, dass $\sigma^* \in r(\sigma^*)$.

"$\Longleftarrow$ " Sei $\sigma^* \in r(\sigma^*)$, d.h. $\sigma_i^* \in r(\sigma^*_{-i})$ für alle i. Daraus folgt, dass $H_i(\sigma^*) = \max H_i(\sigma_i^{\sim}, \sigma^*_{-i})$, d.h., dass $H_i(\sigma^*) \geq \max H_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i}) \; \forall \sigma_i \in \Sigma_i$ und alle $i \Longrightarrow \sigma^*$ ist ein Nash-Gleichgewicht. [23] ∎

3.1.3. Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Bis jetzt hatten alle Spiele ein Gleichgewicht und wie in Satz 1 und Satz 2 gezeigt wurde, waren all diese Gleichgewichte auch immer Nash-Gleichgewichte. Im Folgenden werden wir uns mit Beispielen beschäftigen, welche kein Gleichgewicht in reinen Strategien besitzen.

Beispiel 4: Matching Pennies

Person 1 und Person 2 haben jeweils eine Münze in der Hand und müssen sich dafür entscheiden, welche Seite der Münze sie nach oben legen, Kopf oder Zahl. Sie wissen nicht, welche Entscheidung die andere Person trifft. Wenn das Ergebnis (K, K) oder (Z, Z) lautet, gewinnt Person 1, ist das Ergebnis (K, Z) oder (Z, K), gewinnt Person 2.[24]

---

[23] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 21
[24] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010[3]) S. 28

		Person 2 (P2)	
		Kopf (s_{21})	Zahl (s_{22})
Person 1 (P1)	Kopf (s_{11})	-1 1	1 -1
	Zahl (s_{12})	1 -1	-1 1

Abb. 5: Matching Pennies

Wie wir der Auszahlungsmatrix entnehmen können, gibt es in diesem Spiel kein Gleichgewicht. Eine Person gewinnt, während die andere Person verliert, d.h. eine wird mit der Entscheidung immer unzufrieden sein und diese ändern wollen. Das Problem der Nichtexistenz bzw. der mehrfachen Existenz von Gleichgewichten in reinen Strategien ist vorerst kein gutes Zeugnis für das Nash-Gleichgewicht als Lösungszugang. Dies wird gelöst, indem das bisherige Konzept der reinen Strategien auf gemischte Strategien erweitern wird. Es wird angenommen, dass ein Spiel endlich oft hintereinander ausgeführt wird und die Strategie dabei mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gespielt wird. Gemischte Strategien werden immer dann interessant, wenn in einem Interessenskonflikt ein taktisches Verhalten zur Option steht.

Wir betrachten die zwei Personen wieder getrennt. P1 wird natürlich nicht die ganze Zeit nur Kopf nach oben legen. P2 würde diese Strategie nach kurzer Zeit durchschauen und sich dazu entschließen, immer nur Zahl nach oben zu legen. Das Gleiche gilt auch für P2. P1 wird daher eine Mischung seiner Strategien vorziehen. Das heißt, er wird mit einer Wahrscheinlichkeit p die Strategie Kopf spielen und mit einer Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ die Strategie Zahl. Die Variable von P1 ist jetzt die Wahrscheinlichkeit p mit $p \in [0.1]$. Es bleibt noch die Frage zu klären, wie P1 sein p wählen muss, um einen optimalen Spielausgang zu erzeugen. Wir sehen uns daher die zu erwartende Auszahlung an, welche durch den Erwartungswert von H_i definiert ist.[25]

[25]Florian BARTHOLOMAE, Marcus WIENS, Spieltheorie. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch (Wiesbaden 2016) S. 73-77

Definition 8: Auszahlungsfunktion einer gemischten Strategie

Sei $s = (s_1, \dots, s_n) \in S \coloneqq S_1 \times \dots \times S_n$ eine gemischte Strategiekonfiguration und $s_i \coloneqq (p_{i1}, \dots p_{im_i})$ mit $m_i \coloneqq |\Sigma_i|$ die gemischte Strategie für jede/n SpielerIn i. Dann ist die erwartete Auszahlung definiert durch:

$$H_i(s) \coloneqq \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} p_{1j_1} \cdot \dots \cdot p_{nj_n} \cdot H_i(\sigma_{1j_1}, \dots, \sigma_{nj_n})$$

(zur besseren Unterscheidung sei $s_i \in S_i$ ein Element des Raumes der gemischten Strategien, $\sigma_i \in \Sigma_i$ ein Element des Raumes der reinen Strategien, s eine gemischte und σ eine reine Strategiekonfiguration)[26]

D.h. die Mengen der gemischten Strategien für P1 und P2 sind gegeben durch:

$$S_1 \coloneqq \{(p,(1-p)) : p \in [0,1]\} \qquad S_2 \coloneqq \{(q,(1-q)) : q \in [0,1]\}$$

das ergibt für die zu erwartenden Auszahlungen von P1:

P1 wählt Kopf: $H_1(s_{11}, s_{2\,j}) = 1p + (-1)(1-p) = 2p - 1$

P1 wählt Zahl: $H_1(s_{12}, s_{2,j}) = (-1)p + (1-p) = -2p + 1$

Wie kann ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien charakterisiert werden? Dafür kann Definition 7 herangezogen werden, wobei die reinen Strategien σ gegen gemischte Strateigen s ausgetauscht werden.

Definition 9: Nash-Gleichgewicht (in gemischten Strategien)

Eine Strategiekonfiguration $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ heißt Nash-Gleichgewicht, wenn für jede Strategie $s_i \in S_i$ eines jeden Spielers $i \in I$ gilt:

$$H_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq H_i(s_{i,} s_{-i}^*) \;\; \forall s_i \in S_i$$

Jetzt bleibt noch die Frage zu klären, wann gemischte Strategien bessere Antworten liefern als reine Strategien.

[26] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 31

(1) Aufgrund der Linearität der Auszahlungsfunktion $H_i(s_i, s_{-i})$ und Definition 9, gilt für alle $\sigma_i \in \Sigma_i$, für einen jeden Spieler $i \in I$: $H_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq H_i(\sigma_{i,} s_{-i}^*)$. D.h., wenn es im Raum S_i keine besseren Antworten auf s_{-i}^*, dann gibt es auch keine in Σ_i.

(2) Auf der anderen Seite, sei s' eine gemischte Strategiekonfiguration, dann gilt für alle $\sigma_i \in \Sigma_i$ für einen jeden Spieler $i \in I$: $H_i(s_i', s_{-i}') \geq H_i(\sigma_{i,} s_{-i}')$. Damit kann es auch keine bessere Antwort $s_i \in S_i$ geben, da dies ein Widerspruch zu (1) wäre (da es ansonsten eine reine Strategie geben muss, welche besser ist als s_i').

Aus diesem Grund haben wir in $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ ein Nash-Gleichgewicht mit $s_1^* = (p^*, 1-p^*)$ und $s_2^* = (q^*, 1-q^*)$. Wenn wir o.B.d.A. annehmen, dass $H_1(s_{11}, s_{2,j}) > H_1(s_{12}, s_{2j})$ gilt (also P1 öfter gewinnt, wenn er öfter Kopf als Zahl spielt), dann gilt nach Definition 9:

$$H_1(s_{11}, s_{2j}) > H_1(s_1^*, s_2^*) = p^* \cdot H_1(s_{11}, s_{2j}) + (1-p^*) \cdot H_1(s_{12}, s_{2j}).$$

Dies stellt allerdings einen Widerspruch zum Nash-Gleichgewicht und zum Gezeigten in (1) und (2) dar, weshalb gelten muss:

$$H_1(s_{11}, s_{2j}) = H_1(s_{12}, s_{2j})$$

$$2p - 1 = -2p + 1 \Leftrightarrow p^* = \frac{1}{2}$$

Durch analoges Vorgehen erhalten wir für $q^* = \frac{1}{2}$ und haben ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gefunden $s^* = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$. D.h., wenn P1 seine Strategien mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% spielt – also Kopf und Zahl 50:50 mischt – bekommt er die höchstmögliche Auszahlung. Diese Überlegung wird auch P2 anstellen. Aus diesem Grund bildet sich in s^* ein Gleichgewicht. Dieser Übergang kann mithilfe der Beste-Antwort-Funktion gut verdeutlicht werden. Dafür berechnen wir die erwartete Auszahlung der Strategiekonfiguration (s_1, s_2):[27]

[27] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 31-34

$$H_1(s_1, s_2) = p \cdot [q \cdot 1 + (1-q) \cdot (-1)] + (1-p) \cdot [(q \cdot (-1) + (1-q) \cdot (-1)]$$
$$= p \cdot (2q - 1) + 1 - 2q$$
$$\frac{\partial H_1(s_1, s_2)}{\partial p} = 2q - 1 = 0 \Rightarrow q^* = \frac{1}{2}$$

[28]

$$r_1(q) = \begin{cases} 0 \; falls \; q \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ [0,1] \; falls \; q = \frac{1}{2} \\ 1 \; falls \; q \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \qquad r_2(p) = \begin{cases} 0 \; falls \; p \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ [0,1] \; falls \; p = \frac{1}{2} \\ 1 \; falls \; q \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Die Beste-Antwort-Funktionen sind in Abb.6 als p/q-Diagramm zur besseren Übersicht dargestellt. Sehen wir uns beispielsweise die besten Antworten von P1 an. Wenn P2 seine Strategie Zahl mit einer Wahrscheinlichkeit $q \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ wählt, d.h., mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % Zahl wählt, dann ist es für P1 am besten seine Strategie Kopf mit 0 % zu spielen. Wählt P2 $q = \frac{1}{2}$, dann ist P1 indifferent zwischen Kopf und Zahl. Dies wird durch die lange vertikale grüne Strecke verdeutlicht. Wenn P2 hingegen $q \in [0, \frac{1}{2}]$ wählt, dann ist es für P1 am besten Kopf zu zeigen. Analog lassen sich die Überlegungen aus der Sicht für P2 durchführen. In der Reaktionsabbildung ist zu sehen, wo sich Nash-Gleichgewichte einstellen – nämlich in den Schnittpunkten der Graphen. In diesem Punkt gibt es für keinen der beiden Beteiligten eine Verbesserungsmöglichkeit.[29]

---

[28] Anm.: Die erwartete Auszahlung aller Strategiekonfigurationen zu optimieren kann auch als eine weitere Methode zum Auffinden von Nash-Gleichgewichten in gemischten Strategien verwendet werden.
[29] BARTHOLOMAE, WIENS, Spieltheorie. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch (Wiesbaden 2016) S. 77-80

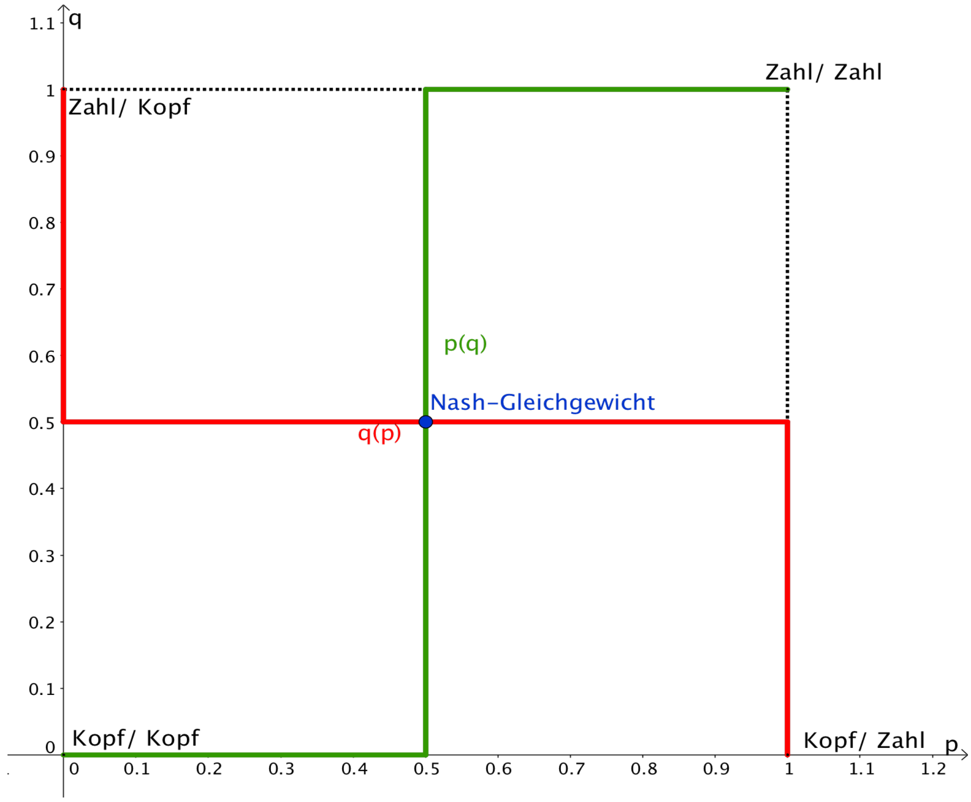

Abb. 6: Reaktionsabbildungen für Matching Pennies

3.1.4. Existenz von Nash-Gleichgewichten

In diesem Kapitel wollen wir uns damit beschäftigen, ob in Normalformspielen ein Nash-Gleichgewicht immer existieren muss oder nicht. Dafür ist ein wenig Vorarbeit notwendig. Zu diesem Zweck wollen wir das Ergebnis des vorherigen Beispiels ein wenig formalisieren. Auf der Menge $[0,1]\times[0,1]$ aller Kombinationen von (p,q) können wir eine Korrespondenz F definieren durch:

$$F: [0,1]\times[0,1], (p,q) \longmapsto (r_2(p), r_1(q))$$

Das Problem der Matching Pennies lässt uns einen Zusammenhang zwischen einem Nash-Gleichgewicht und der Besten-Antwort herstellen:

$$(p^*, q^*) \; ist \; Nash - Gleichgewicht$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(p^*, q^*) \; ist \; Beste - Antwort \; auf \; sich \; selbst.$$

Dieser Zusammenhang lässt sich intuitiv aus der Abb. 6 ableiten. Im Nash-Gleichgewicht haben die AkteurInnen keinen Grund mehr für einen Wechsel ihrer Strategien, weshalb sie auch keine besseren Antworten mehr spielen können. Daher ist (p^*, q^*) ein Fixpunkt der Korrespondenz F und wir können folgenden Zusammenhang herstellen:

$$(p^*, q^*)\ ist\ Nash - Gleichgewicht\ \Leftrightarrow\ (p^*, q^*)\ ist\ Fixpunkt\ von\ F$$

Dieser Zusammenhang wird im Laufe dieses Kapitels noch sehr wichtig werden.

Definition 10: Beste-Antwort-Korrespondenz

Die Beste-Antwort Korrespondenz $g_i: \Sigma_{-i} \to \Sigma_i$ von SpielerIn i ist gegeben durch:

$$g_i(\sigma_{-i}) \coloneqq \{\sigma_i^* \in \Sigma_i :\ \forall \sigma_i \in \Sigma_i: H_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq H_i(\sigma_i, \sigma_{-i})\ \}$$

Die Menge $g_i(\sigma_{-i})$ ist die Menge der Strategien von i, welche die Auszahlung für ein gegebenes σ_{-i} maximieren.

Definition 11: Globale Beste-Antwort Korrespondenz

Die globale Beste-Antwort-Korrespondenz $F: \Sigma \to \Sigma$ ist gegeben durch:

$$F \coloneqq (g_1(\sigma_{-i}), \dots, g_n(\sigma_{-i}))$$ [30]

Satz 3:

$$\sigma^*\ ist\ Nash - Gleichgewicht\ \Leftrightarrow\ \forall i: \sigma_i^* \in\ g_i(\sigma_{-i}^*)\ \Leftrightarrow\ \sigma^*\ \in F(\sigma^*\ )$$

Der Beweis zu diesem Satz folgt direkt aus den Definitionen 10 und 11 (für interessierte Leser verweise ich an dieser Stelle auf die Literatur BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele). [31]

Die Existenz von Nash-Gleichgewichten wurde damit auf die Existenz von Fixpunkten vereinfacht. Dies ist in der Mathematik ein gängiges Problem und

[30] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 35-37
[31] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 37

wurde in vielen Verallgemeinerungen bearbeitet. Die folgenden Sätze 4, 5 und 6 waren zentraler Bestandteil von John NASHS Errungenschaft für die Spieltheorie. Er formulierte darin Bedingungen, unter welchen Nash-Gleichgewichte existieren.

Satz 4: *Existenz von Nash-Gleichgewichten*

Sei G ein Normalformspiel mit folgenden Eigenschaften:

(i) *Die Strategiemenge $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt und konvex für alle $i \in I$.*

(ii) *H_i: $\Sigma_i \times \Sigma_{-i} \to \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt für den i-ten Spieler und $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ sei quasi-konkav in $\sigma_i \in \Sigma_i$.*

Dann besitzt das Spiel in Normalform G ein Nash-Gleichgewicht.[32]

Den Beweis zum Satz werde ich in meiner Diplomarbeit nicht anführen. Dieser würde im Vorfeld noch weitere Formalisierungen notwendig machen. Dem interessierten Leser/der interessierten Leserin sei die Literatur SCHLEE, Spieltheorie und BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele empfohlen. Bislang haben wir nur die Existenz von Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien gezeigt. Im nächsten Schritt werden wir dies auf den Raum der gemischten Strategien ausweiten. [33]

Satz 5: *Sei G_s ein Normalformspiel mit gemischten Strategien $s_i \in S_i$, dann besitzt es unter den Annahmen von Satz 4 ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis: Sei $S_i \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $s_i', s_i'' \in S_i$ zwei beliebige Strategien, dann gilt: $s_i(\lambda) \coloneqq s_i' \cdot \lambda + s_i'' \cdot (1-\lambda)$ mit $\lambda \in [0,1]$ und $s_i' = \left\{p'_{i_j}\right\}_j$, $s_i'' = \left\{p''_{i_j}\right\}_j$. Dann ist $H_i(\lambda) = \lambda p'_{i_j} + (1-\lambda) p''_{i_j}$ und $s_i(\lambda) \in S_i$.

$$\sum H_i(\lambda) = \lambda \sum p'_{i_j} + (1-\lambda) \sum p''_{i_j} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Da $p_i \geq 0$ und $\sum H_i(\lambda) = 1 \implies S_i$ ist abgeschlossen und beschränkt $\implies S_i$ kompakt.

[32] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 33
[33] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010[3]) S. 37-38

Sei $H_i(s)$ die zu erwartenden Auszahlungen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(\sigma) = p_{1j_1} \cdot \ldots \cdot p_{n_{j_n}}$, d.h., die zu erwartenden Auszahlungen sind in ihrer Linearkombination stetig.
Sei $H_i(s) = \pi(\sigma) \cdot C_i(\sigma)$, wobei $C_i(\sigma)$ die Auszahlung von i bei reiner Strategie σ ist. Sei $s_i' = \left\{p_{i_{j_i}}'\right\}$ und $s_i'' = \left\{p_{i_{j_i}}''\right\}$, dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sodass:

$$H_i(s_{-i}, \alpha s_i' + \beta s_i'') = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} [\pi(\sigma)(\alpha p_{i_{j_i}}' + \beta p_{i_{j_i}}'') \cdot C_i(\sigma)] =$$

$$\sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} [\pi(\sigma)\alpha p_{i_{j_i}}' \cdot C_i(\sigma)] + \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} [\pi(\sigma)\beta p_{i_{j_i}}'' \cdot C_i(\sigma)] =$$

$$\alpha H_i(s_{-i}, s_i') + \beta H_i(s_{-i}, s_i'')$$

$\Longrightarrow H_i(s_{-i})$ ist linear, daraus folgt, dass es konkav ist. Da $H_i(s_{-i})$ konkav ist, folgt daraus, dass $H_i(s_{-i})$ quasi konkav ist. ■[34]

Satz 6: *Jedes Spiel in Normalform hat mindestens ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

Beweisidee: Der Satz wird mithilfe des BROUWER'SCHEN Fixpunktsatzes bewiesen. Dafür wird eine Abbildung konstruiert, welche die konvexe und kompakte Menge der gemischten Strategien in sich abbildet. Diese Abbildung ist stetig auf der Menge der gemischten Strategien und nach dem BROUWER'SCHEN Fixpunktsatz folgt, dass es einen Fixpunkt geben muss. Dann ist noch zu zeigen, dass dies äquivalent zu einem Nash-Gleichgewicht ist, ähnlich wie wir es in Satz 3 getan haben.[35],[36]

Die soeben behandelten Sätze sind sehr wichtig für die Spieltheorie. Sie ermöglichen es ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien zu finden, da es sich um eine Spezialform eines Gleichgewichtes in gemischten Strategien handelt, in welcher mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 1$ eine Strategie gewählt wird.

---

34 BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 38-39
35 SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 40
36 Anm.: für eine genaue Beweisführung siehe SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 40-41

3.1.5. Das Minimax-Konzept

In diesem Abschnitt wollen wir uns kurz mit dem Minimax-Konzept beschäftigen, welches ein Spezialfall des Satzes von NASH ist. Während man mit dem NASH-Konzept auf die Strategien des Gegenübers reagiert, ist es das Ziel der Minimax-Regel den eigenen Verlust zu minimieren. Es handelt sich daher mehr um ein Verändern der eigenen Parameter und verfolgt so eine andere Philosophie.

Definition 12: Minimax-Konzept

Die Strategie s_i^* heißt Minimax-Strategie von i mit

$$H_i(s_i^*) \coloneqq \max \{\min\{H_i(s_i, s_{-i}):\ s_{-i} \in S_{-i}\} \, s_i \in S_i\}\,.$$

Eine Strategiekombination (s_i^*, s_{-i}^*) heißt Gleichgewicht.

Diese Strategiewahl erlaubt es dem Spieler i mit einem maximalen Minimalgewinn von $H_i(s_i^*)$ zu rechnen. [37] Dieses Lösungsverfahren wird besonders häufig für Konstantsummenspiele herangezogen. Ein typisches Beispiel für Konstantsummenspiele sind Nullsummenspiele, also Spiele in denen eine/r verliert und eine/r gewinnt.

Definition 13:Konstantsummenspiel

Ein Spiel mit der Auszahlung

$$\sum_{i \in I} H_i(s) = C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

ist ein Konstantsummenspiel. Sei $C = 0$ so heißt es Nullsummenspiel.

[38]

[37] Werner GÜTH, Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele (Berlin/Heidelberg 1992) S. 175

[38] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 27

Beispiel 5: Schere-Stein-Papier

Dieses Spiel ist wahrscheinlich jeder Person bekannt. Es hat drei Strategien: Schere-Stein-Papier. Die SpielerInnen P1 und P2 wählen gleichzeitig ihre Strategie. Bei gleicher Wahl herrscht ein Unentschieden, ansonsten gilt: Schere schneidet Papier, Papier wickelt Stein und Stein schleift Schere. Der Gewinner bekommt einen Gutpunkt, der Verlierer verliert einen. Die Auszahlungen sind der Abb. 7 zu entnehmen.[39]

Bei diesem Spiel handelt es sich um ein Nullsummenspiel, da es nur Unentschieden, Gewinnen und Verlieren gibt.

		P2		
		Schere (s_{21})	Stein (s_{22})	Papier (s_{23})
P1	Schere (s_{11})	0 0 ←	1 -1 →	-1 1
	Stein (s_{12})	-1 1 ←	0 0 ←	1 -1
	Papier(s_{13})	1 -1 →	-1 1 ←	0 0

Abb. 7: Schere-Stein-Papier

In der Abb. 7 ist gut zu erkennen, dass P1 seine Strategie an den niedrigsten Verlust anpassen möchte. Da dieser in einer reinen Strategie nicht vorliegt, muss wieder ein Gleichgewicht in gemischten Strategien gefunden werden. Für dieses Gleichgewicht wird nicht die eigene Strategie fixiert und die von P2 variiert, so wie es im Konzept der Besten-Antwort der Fall ist, sondern es wird die Strategie von P2 fixiert und analysiert, welche eigene Strategie optimal ist.

Sei p die Wahrscheinlichkeit mit der P1 Schere spielt, q die Wahrscheinlichkeit für Stein und $1 - p - q$ die Wahrscheinlichkeit für Papier. Die erwarteten Auszahlungen für P1 gestalten sich dann wie folgt:

[39] Schlee, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 17-18

$$H(s_{1j}, s_{21}) = q - 1 + p + q = 2q + p - 1$$
$$H(s_{1j}, s_{22}) = -p + 1 - p - q = -2p - q + 1$$
$$H(s_{1j}, s_{23}) = p - q$$

Durch Auflösen des Gleichungssystems erhält man für $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$, $(1 - p - q) = \frac{1}{3}$. D.h., wenn P1 seine Strategien im Verhältnis $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ mischt, minimiert er seinen Verlust und entgeht somit dem schlimmsten Fall. Analog berechnet man die Wahrscheinlichkeit für P2. Dies ergibt ebenfalls $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und somit ist das Gleichgewicht in $s^* = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$.[40]

[40] BEWERSDORFF, Glück, Logik und Bluff. (Wiesbaden 2012) S. 251-253

3.2. Spiele in Extensivform

Bislang haben die Beteiligten ihre Spielzüge gleichzeitig gewählt und ausgeführt. Außerdem hatten sie alle Informationen über die möglichen Strategien der MitspielerInnen. Dies hatte den Vorteil, dass die Entscheidungssituationen leicht modellierbar waren und auf Sachverhalte, wie zeitliche Abfolge der Spielzüge oder Informationen über die Möglichkeiten der Strategien, verzichtet werden konnte. In vielen spieltheoretischen Problemen, wie z.B. in ökonomischen Entscheidungsprozessen oder in Gesellschaftsspielen wie Mühle, Schach und vielen mehr, gibt es im Verlauf eines Spiels mehrere Züge. Die Züge der einzelnen Beteiligten wechseln sich möglicherweise ab, wodurch die SpielerInnen die Möglichkeit haben, auf den Zug der GegenspielerInnen zu reagieren. Es kann aber auch der Fall sein, dass die GegenspielerInnen nichts über den Zug des Vorgängers/ der Vorgängerin wissen und die Entscheidung ohne diese Information treffen müssen. Viele Spiele haben daher eine sequenzielle bzw. dynamische Struktur. Diese beschreibt detailliert alle möglichen Spielverläufe in Abhängigkeit von der zeitlichen Struktur und dem Informationsstand zu einem bestimmten Zeitpunkt.[41] Eine Strategie ist demnach nicht mehr ein einzelner Zug, sondern eine festgelegte Zugabfolge, somit sind solche Entscheidungssituation in extensiver Form gegeben. In einem Extensivformspiel ist die Reihenfolge der Züge festgelegt und die Auszahlungen zu jedem Zeitpunkt des Spieles gegeben. Diese Informationen lassen sich am besten in Form eines Spielbaumes darstellen – ähnlich einem Entscheidungsbaum aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.[42] Entscheidungssituationen, welche in Form eines Baumes gegeben sind, bezeichnet man auch als Spiele in Extensivform. Um ein solches Spiel eindeutig modellieren zu können, müssen bestimmte Bedingungen gegeben sein. Diese Bedingungen wollen wir unterscheiden in notwendige und hinreichende.

[41] HOLLER, ILLING, Einführung in die Spieltheorie (Berlin, Heidelberg 2003[5]) S. 13-14
[42] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 213

- Notwendig:
    - die Anzahl der SpielerInnen
    - die Reihenfolge der Züge
    - die Bewertung eines Spielausganges durch eine Auszahlungsfunktion
    - die Zugmöglichkeiten
- Hinreichend:
    - der Informationsstand beim jeweiligen Zug
    - die Wahrscheinlichkeit, welche Züge getätigt werden

Diese vielen Bedingungen an ein Spiel in Extensivform führen dazu, dass die Spielregeln übergenau formuliert sind.[43] Im folgenden Kapitel wollen wir uns eine Definition für ein Spiel in Extensivform erarbeiten und näher mit den Grundlagen von Extensivformspielen beschäftigen.

3.2.1. Das Grundkonzept: Der Spielbaum

Der Spielbaum bildet das Grundkonzept der Extensivformspiele. Seine Knoten sind Entscheidungs- und Endsituationen eines Spieles, die Kanten stellen die jeweiligen Aktionen bzw. Strategien dar, welche die Akteure wählen können.[44] Formal stellt der Spielbaum einen Graphen dar. Ein Graph ist ein System aus Knoten, welcher durch Strecken verbunden ist. Ein Graph ist zusammenhängend, wenn jeder Knoten durch einen Streckenzug mit einem anderen Knoten verbunden ist. Um das Problem eines endlosen Spieles nicht entstehen zu lassen, muss der Graph schleifenlos sein. Zusätzlich sollte der Graph eine Richtung besitzen – wir sprechen von einem gerichteten Graphen – damit keine Rückwärtsbewegung möglich ist.[45] D.h., es gibt Knoten, welche durch Pfeile verbunden sind. Wichtig für die Beschreibung eines Extensivformspieles ist die

[43] Werner GÜTH, Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele (Berlin/Heidelberg 1992) S. 34-35
[44] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 91-92
[45] GÜTH, Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele (Berlin/Heidelberg 1992) S. 35-36

Annahme, dass wir einen Baum mit einer Richtung haben, also einen gerichteten Graphen. Es gibt demnach:

(i) genau einen Knoten, auf welchen kein Pfeil zeigt – der Anfangsknoten.

(ii) auf jeden Knoten zeigt genau ein Pfeil, außer auf den Anfangsknoten.

(iii) von jedem Knoten (außer dem Anfangskonten) kommt man durch eine Bewegung gegen die Pfeilrichtung wieder zum Anfangspunkt. [46]

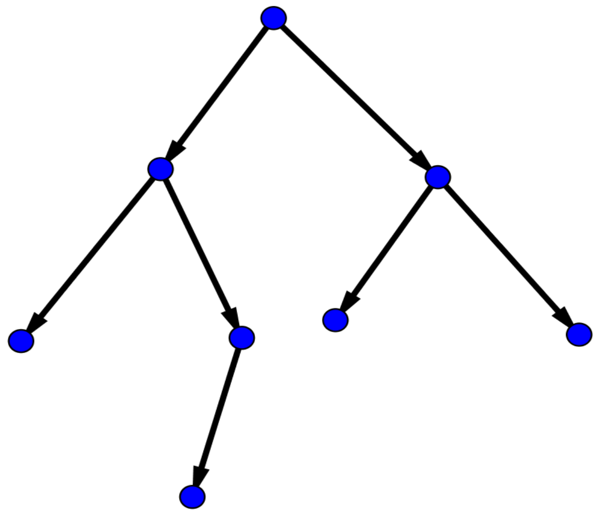

Abb. 8: ein Spielbaum

Dieser Sachverhalt lässt sich formal mithilfe der Graphentheorie beschreiben.

Definition 14: Graph

Ein Graph ist ein Tupel (T, M), wobei T eine nichtleere Menge von Knoten und M eine nichtleere Menge von Kanten ist. Die Abbildung w: $M \to T \times T$ ordnet jeder Kante ein Knotenpaar zu.

[47]

[46] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 221
[47] Manuel GRAF, Ist das Leben ein Spiel. Spieltheorie für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II mit besonderer Berücksichtigung der extensiven Spielform (Wien 2011) S. 39

Die Menge der Endknoten E ist eine Teilmenge von T. Ebenso ist die Menge der Entscheidungsknoten D eine Teilmenge von T, wobei $D \cap E = \{\}$. An den Elementen von D werden die Entscheidungen getroffen, welcher Weg zum nächsten Knoten gewählt wird.[48] Eine SpielerInnenzerlegung $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ für jede/n SpielerIn $i \in I$ ordnet die Entscheidungsknoten P_i zu, wann diese am Zug sind.[49]

Aufgrund der eingangs erwähnten Bedingung, dass es sich bei einem Spielbaum in einem Extensivformspiel um einen Graphen mit einer Richtung handeln muss, muss eine Relation definiert werden, um dem Graphen eine Richtung zu geben.

Definition 15: irreflexive Relation

Sei T eine nichtleere Menge von Knoten und $<^T$ eine Menge geordneter Paare auf T. Für zwei Elemente (=Knoten) $V, W \in T$ gilt $V < W$, wenn V der Vorgänger des Knotens W ist und W der Nachfolger des Knotens V ist. Die Menge $<^T$ heißt irreflexiv falls $\forall V \in T$ das Paar $(V, V) \notin <^T$ ist.

Dies kann man sich graphisch als einen Pfeil von V nach W vorstellen. Der Pfeil verbindet dabei die zwei Knoten. Dies ist eine notwendige Bedingung. Ohne sie könnte man die Bedingungen (i), (ii) und (iii) nicht gewährleisten. Dies hätte zur Folge, dass ein Akteur seine Entscheidung revidieren könnte oder der Gegenspieler die Entscheidung des Vorgängers umkehren könnte. Ein weiteres Problem würde auftreten, wenn wir die Bedingungen (i) - (iii) nicht erfüllen. Ein Graph könnte bei einem beliebigen Knoten enden und an einem anderen Knoten wieder ansetzen, also eine Lücke aufweisen. Aus diesem Grund müssen wir einen gerichteten Graphen definieren.

[48] GÜTH, Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele (Berlin/Heidelberg 1992) S. 36-37

[49] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 92- 93

Definition 16: gerichteter Graph

Sei T eine nichtleere Menge und $<^T$ eine irreflexive Relation auf T. Dann ist das Tupel $(T, <^T)$ ein gerichteter Graph und die Elemente von T nennt man Knoten.

[50]

Mit dem gerichteten Graphen ist es möglich die Bedingungen (i) - (iii) so zu formulieren, dass sie einen Baum definieren.

Definition 17: Baum

Sei T eine endliche oder unendliche Menge von Knoten. Ein gerichteter Graph $(T, <^T)$ ist ein Baum, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(1) es gibt genau einen Anfangsknoten $\{o\}$.

(2) alle Knoten in $T\{o\}$ haben genau einen Vorgänger.

(3) alle Knoten in $T\{o\}$ können zu $\{o\}$ zurückverfolgt werden.

[51]

Der Baum gibt einen Verlauf von Entscheidungssituationen wieder. Diese bilden formal eine Folge von Spielzügen.[52]

Definition 18: Folgen von Spielzügen

Sei D eine nichtleere Menge von Aktionen $\{a_1, a_2, \dots\}$. Seien v und w endliche oder unendliche Folgen, welche durch $< a_k >_{k=1,\dots K}$ mit $K = 0, 1, \dots$ gebildet werden. v und w sind Folgen von Spielzügen, für diese gilt:

- w heißt Teilfolge von Spielzügen von $v =< a_k >_{k=1,\dots,K}$ falls $w =< b_k >_{k=1,\dots,L}$ endlich ist und $L \leq K$ gilt.
- Eine Folge, die keinen Zug enthält, wird als Nullfolge bezeichnet mit: $\pi =< a_k >_{k=1,\dots,K}$ für $K = 0$
- $v' = (a_k)_{k=1,\dots K+1}$ wird als die Verlängerung der Spielzugfolge v um einen Zug betrachtet. [53]

[50] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 222
[51] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 224-225
[52] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S.91
[53] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 217

D.h., der Weg vom Anfangsknoten A zum Knoten F in Abb. 9 kann durch den Verlauf $v = (a_2, a_5)$ beschrieben werden. $w = (a_2)$ ist eine Teilfolge von $v = (a_2, a_5)$ und $v' = (a_2, a_5, a_7)$ ist eine Verlängerung der Spielfolge v um einen Zug. Die SpielerInnenzerlegung für unser Spielbaum in Abb. 9 ist $P = \{P_1, P_2\}$ mit $P_1 = \{A, F\}$ und $P_2 = \{B, C\}$.

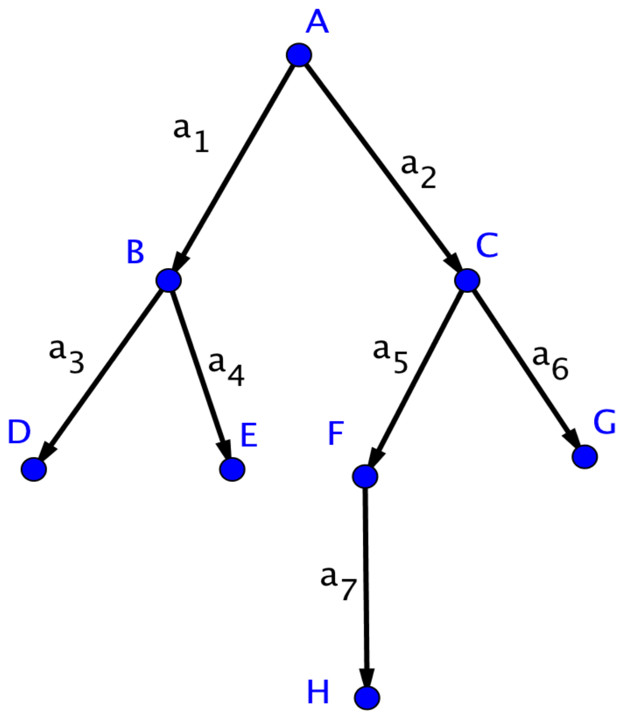

Abb. 9: Folgen von Spielzügen

Die Spielfolgen beschreiben also die Aktionen, welche die AkteurInnen treffen können und stellen in einem Graphen die Kanten bzw. Pfeile dar.

Definition 19: Spielbaum

Eine Menge B von endlichen oder unendlichen Folgen $(a_k)_{k=1,\dots,K}$ mit $K = 0,1,\dots$ heißt Spielbaum, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $\mathfrak{n} \in B$

(2) $(a_k)_{k=1,\dots,K} \in B \implies (a_k)_{k=1,\dots,L} \in B \; \forall L \leq K$

(3) $(a_k)_{k=1,\dots} \in B \implies (a_k)_{k=1,\dots,L} \in B \; \forall L \geq 0$

Die Elemente der Menge B heißen auch Spielstände oder Spielabläufe. Demnach ist eine Folge v ein Spielablauf und v' der Spielablauf um einen Spielzug verlängert.[54] Die Bedingung (3) ist etwas abstrakt, lässt sich aber durch die nächste Definition und einer kleinen Erklärung ganz einfach verstehen. Was würde bei einem Spiel passieren, wenn die letzte Bedingung nicht gilt? Es gäbe eine unendliche Folge $v \notin B$, welche endliche Teilfolgen in B enthält. Keine dieser endlichen Teilfolgen würde zu einem Ende des Spieles führen, da wir ihnen noch keinen Nutzen zuordnen können, denn diese sind beliebig verlängerbar. Durch die dritte Bedingung ist es uns möglich auch Entscheidungssituationen einen Nutzen zuzuordnen, welche eigentlich unendliche Folgen darstellen und noch zu weiteren Entscheidungen führen.[55] Diese Eigenschaft führt zu einer weiteren wichtigen Definition: Wann ist ein Spiel zu Ende? Folgen, welche keine Fortsetzung besitzen, beschreiben ein Spielende.

Definition 20: Spielende

Sei F eine Teilmenge von B. Die Menge F beschreibt ein Spielende, wenn sie alle unendlichen und endlichen Folgen $(a_k)_{k=1,\ldots,K}$ enthält, welche keine Fortsetzung $(a_k)_{k=1,\ldots,K+1}$ in B besitzt. Die Elemente von F heißen finale Folgen.

Definition 21: Spielzüge

Sei $v \in B \backslash F$. Die Elemente der Menge $Z(v) = \{z: (v,z) \in B\}$ heißen Spielzüge (als Fortsetzung an den Spielablauf v).

[56]

Durch diese Vorarbeit ist es uns möglich, einen Spielbaum zu zeichnen und ein Spiel in Extensivform zu beschreiben. Eingangs hatten wir noch Bedingungen an ein Spiel in Extensivform erörtert. Die hinreichenden Bedingungen Informationsstand und die Wahrscheinlichkeit von Zufallszügen wollen wir in unserer ersten Definition außer Acht lassen, indem wir von Spielen mit perfekter

[54] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 91
[55] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 218-219
[56] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 92

Information ausgehen und keine Zufallszüge zulassen. In Kapitel 3.2.3 wird das Konzept auf Spiele mit imperfekter Information erweitert.

Definition 22: Spiel in Extensivform

Ein Tupel $\Gamma = (I, B, \mathcal{P}, \Pi)$ heißt Spiel in extensiver Form, wenn:

- I die Menge der Spieler ist
- B ein Spielbaum ist
- eine Funktion $\mathcal{P}: B\backslash F \to I$, welche eine Entscheidung genau einem/einer SpielerIn i zuordnet, wobei die Menge der Spielverläufe für den/die SpielerIn i gegeben ist durch $B\backslash F := \{v \in B\backslash F: \mathcal{P}(v) = i\}$ und die Menge der Aktion für den/die SpielerIn i gegeben ist durch $Z_i(v)$.
- $\Pi = (\Pi_i)_{i \in I}: F \to \mathbb{R}$ ist eine Auszahlungsfunktion, welche einem jeden Spielende einen Nutzenwert zuordnet.

[57], [58]

3.2.2. Ein erstes Lösungskonzept – Rückwärtsinduktion und teilspielperfekte Gleichgewichte

Im vorangegangenen Kapitel haben wir viel über die Formalismen der Extensivformspiele erfahren, deren Grundlagen in der Graphentheorie liegen. Im folgenden Kapitel wollen wir uns der Anwendung der vorangegangenen Definitionen sowie einem ersten Lösungskonzept widmen.

Beispiel 6: Markteintrittsspiel

Es gibt zwei Unternehmen. Firma 1 und Firma 2. Firma 2 ist als Monopolist am Computermarkt aktiv. Firma 1 überlegt in den Handel mit PCs einzusteigen. Firma 2 hat nun zwei Möglichkeiten:

1. *Sie lässt einen Markteintritt von Firma 1 zu und gibt Marktanteile ab.*
2. *Sie ruft einen Preiskampf aus, um den Konkurrenten zu schwächen.*

[57] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 93
[58] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 95- 96

Die Gewinne für die Firmen verteilen sich wie folgt:

- *Nichteintritt (0,3)*
- *Preiskampf (-4,-1)*
- *Marktanteile abgeben (3,2)*

Die SpielerInnenzerlegung für das Markteintrittsspiel sieht wie folgt aus:

- Firma 1 muss zu Beginn entscheiden, ob in den Markt eingetreten werden soll oder nicht. Wenn sich Firma 1 dafür entscheidet nicht in den Markt einzutreten, entfällt eine mögliche Entscheidung von Firma 2. Aus diesem Grund enthält die Spielerzerlegung für Firma 1 nur den Anfangsknoten, also $P_1 = \{A\}$ (A für Anfangsknoten).

- Firma 2 kann sich danach entscheiden, ob sie einen Preiskrieg anzetteln oder freiwillig Marktanteile abgeben möchte. Da eine Entscheidung aus Sicht von Firma 2 nicht notwendig ist, wenn sich Firma 1 für keinen Markteintritt entscheidet, ist die SpielerInnenzerlegung von Firma 2 ebenfalls nur eine einelementige Menge, $P_2 = \{E\}$ (E für Eintritt).

Die Aktionen der AkteurInnen und damit die Spielverläufe gehen direkt aus der Angabe hervor. $F = \{(e,\ k), (e,\ z), (n, k), (n, z)\}$[59] sind die finalen Spielverläufe. Die Auszahlungsfunktion aus der Angabe ordnet ihnen den jeweiligen Nutzen zu:

$$(e, k) = (-4, -1)$$
$$(e, z) = (3,2)$$
$$(n, k) = (n, z) = (0,3)$$

Mit dem Wissen über die Anzahl der SpielerInnen, der SpielerInnenzerlegung, den möglichen Aktionen und dem Nutzen können wir einen Spielbaum konstruieren (siehe Abb. 10: Markteintrittsspiel).

[59] Anm.: für eine bessere Übersicht, und um die Gemeinsamkeiten von Knoten und Aktion darzustellen, wurden an dieser Stelle die Aktionen durch Kleinbuchstaben, die zum jeweiligen Knoten führen, gekennzeichnet.

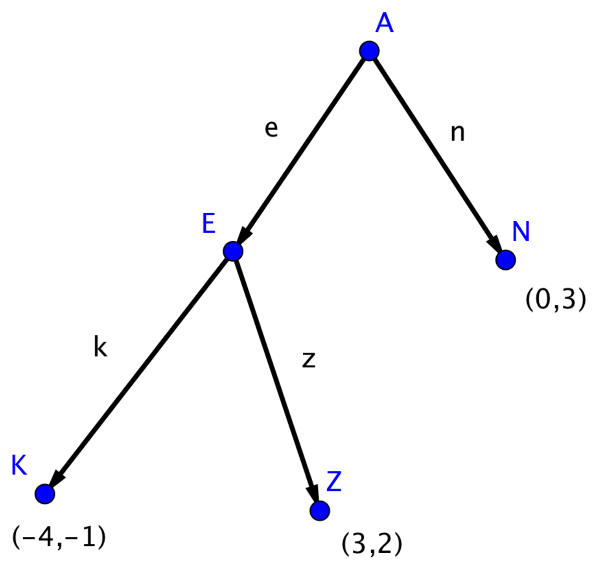

Abb. 10: Markteintrittsspiel

Die Auszahlungen im Beispiel können auch in einer Matrix (Abb.11) niedergeschrieben werden. In diesem Fall kann ein Spiel in Extensivform in ein Spiel in Normalform überführt werden. Es sind zwei Nash-Gleichgewichte in den Strategiekombinationen (n, k) und (e, z) zu sehen. In einem Normalformspiel würde die Lösung in einem gemischten Gleichgewicht ermittelt werden. Es stellt sich nun die Frage, wie wir in einem Spiel in extensiver Form zu einer Lösung kommen? Welche Strategien sollen die Firmen wählen?

		Firma 2	
		K	Z
Firma 1	N	3	3
		0	0
	E	-1	2
		-4	3

Abb. 11: Markteintrittsspiel in Normalform

Definition 23: Strategie

Sei Γ ein Spiel in Extensivform, $B_i = \{v \in B: \mathcal{P}(v) = i\}$ und i ein/e SpielerIn aus I, dann ist jede Abbildung

$$s_i: B/F \to Z \text{ mit } s_i(v) \in Z(v)\ \forall v \in B_i$$

erfüllt, eine Strategie für den/ die SpielerIn i. Die Menge der Strategien wird mit S_i bezeichnet.

[60]

Durch Rückwärtsinduktion lässt sich herausfinden, welches der beiden Nash-Gleichgewichte das „richtige" ist, d.h., wir rollen das Spiel von hinten auf und verfolgen die einzelnen Züge zurück:

- 1. Schritt: Firma 2 kann sich für z entscheiden (zulassen und Marktanteile abgeben) und bekommt dafür eine Auszahlung von 2 oder für k (Preiskrieg) mit einer Auszahlung von -1. Firma 1 wird daher immer Marktanteile abgeben, da es einen höheren Nutzen verspricht.
- 2. Schritt: Firma 1 steht vor der Entscheidung in den Markt einzutreten e oder nicht einzutreten n. Im Falle von n ist die Auszahlungshöhe gleich 0. Da wir aus Schritt 1 wissen, dass sich Firma 2 immer für z entscheiden wird, ist die Auszahlung für die Strategie e von Firma 2 gleich 3.

Das Nash-Gleichgewicht (n, k) ist in einem dynamischen Ablauf, indem die Firmen hintereinander ihre Entscheidungen treffen, nicht sehr plausibel. Reinhard SELTEN führte 1965 ein Konzept ein, welches besagt, dass irrationales Verhalten in Extensivspielformen, welches zu einem Nash-Gleichgewicht führt, nicht verfolgt wird. Firma 2 würde mit Sicherheit keinen Preiskrieg ausrufen, wenn ein Nichteintritt in den Markt von Firma 1 beschlossen wurde. Deshalb brauchen wir diesen Ansatz als Gleichgewicht nicht weiterverfolgen. Die Strategie des Preiskrieges von Firma 2 ist vielmehr eine Drohung an Firma 1, um diese abzuschrecken, in den Markt einzutreten. Wenn Firma 1 trotzdem in den Markt eintritt, wird Firma 2 die Strategie revidieren und einer Marktteilung zustimmen,

[60] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 95

da es mehr Nutzen für sie hat. Die Strategiekombination (e, z) stellt also ein Nash-Gleichgewicht für das ganze Spiel dar und gleichzeitig auch ein Gleichgewicht für ein Teilspiel, welches im Knoten E beginnt. Diese Strategiekonfiguration beschäftigt sich nur mit der Frage, ob Firma 2 einen Markteintritt zulässt oder nicht. [61]

Wie wir sehen, ist das Konzept des Nash-Gleichgewichtes sehr einfach auf die Extensivspielform übertragbar. Wir können daher die Definition des Nash-Gleichgewichtes für Spiele in Normalform einfach für Spiele in Extensivform übernehmen. Dies wird unter anderem dadurch ermöglicht, dass man Teilspiele einzeln betrachten kann.

Definition 24: Nash-Gleichgewicht (in Extensivformspielen)

Eine Strategiekonfiguration $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ heißt Nash-Gleichgewicht, wenn für jede Strategie $s_i \in B_i$ einer/s jeden SpielerIn $i \in I$ gilt:

$$H_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq H_i\left(s_{i,} s_{-i}^*\right) \ \forall s_i \in \mathrm{S}_i$$

[62]

Definition 25: Teilspiel

Sei $v \in B$ und Γ ein Spiel in Extensivform. Dann ist $\Gamma(v) = (I|_v, B, \mathcal{P}|_v, \Pi|_v)$ ein Teilspiel von Γ, mit der Einschränkung, dass $I|_v$ die Menge der SpielerInnen ist, für die es ein $v' \in B$ gibt mit $(v, v') \in D_i$. Für diese SpielerInnenzuordnung gilt: $\mathcal{P}|_v : D|_v \to I|_v$; $v' \longmapsto \mathcal{P}|_v(v') = \mathcal{P}|_v(v, v')$ mit der Auszahlungsfunktion $\Pi|_v : F|_v \to \mathbb{R}$.

[63]

---

[61] HOLLER, ILLING, Einführung in die Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2003[5]) S. 110-112

[62] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010[3]) S. 105

[63] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 310

Definition 26: Teilspielperfektes Gleichgewicht

Ein teilspielperfektes Gleichgewicht eines Extensivformspieles Γ ist eine Strategiekonfiguration s^*, sodass für jedes $v \in B \setminus F$ die Strategiekonfiguration $s^*|_v$eine Nash-Gleichgewicht in Γ(v) ist.[64]

Wenn wir untersuchen wollen, ob ein Nash-Gleichgewicht ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, müssen wir bei jedem einzelnen Entscheidungsknoten untersuchen, ob die SpielerInnen ihren Besten-Antworten folgen, egal ob sie dann den nächsten Entscheidungsknoten erreichen oder nicht. Diese Bedingungen gelten sogar außerhalb des betrachteten Gleichgewichtes. Die Strategiewahl der SpielerInnen muss an allen Entscheidungsknoten optimal sein, auch wenn diese nicht erreicht werden. Es wird also geprüft, wie die anderen Beteiligten reagieren, wenn an einem beliebigen Entscheidungsknoten, der zum Nash-Gleichgewicht führt, von der Strategie abgewichen wird. Wenn ein solches Abweichen zu einer anderen Reaktion führt, kann ein anderer Weg für den Spieler/die Spielerin besser sein als jener zum Nash-Gleichgewicht. Das ursprüngliche Nash-Gleichgewicht ist somit kein teilspielperfektes Gleichgewicht. Dies konnten wir auch in Beispiel 6 beobachten. Im Anfangsknoten A entscheidet sich Firma 1 zwischen Eintreten oder nicht Eintreten. n würde zu einem Nash-Gleichgewicht führen. In diesem Punkt prüft die Firma aber die möglichen Reaktionen der anderen Firma und sie sieht, dass es eine bessere Variante, als das Nash-Gleichgewicht (n, k), gibt.

Das teilspielperfekte Gleichgewicht stellt somit sogar stärkere Bedingungen an ein Gleichgewicht als das ursprüngliche Nash-Gleichgewicht. Es muss optimal sein und ein Nash-Gleichgewicht.[65]

Der Spielaufbau in Beispiel 6, indem ein/e SpielerIn vorlegt und der/die andere nachzieht, wird auch als Stackelberg-Spiel bezeichnet. Es ist nach dem deutschen Ökonomen Heinrich Freiherr von STACKELBERG benannt, der sein Werk *Marktform und Gleichgewicht* 1934 veröffentlichte, in dem das Modell beschrieben wurde. Dies zeichnet sich dadurch aus, dass SpielerIn 1 immer eine Handlung setzt

[64] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 99
[65] HOLLER, ILLING, Einführung in die Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2003[5]) S. 111

(Leader), auf welche SpielerIn 2 reagieren muss (Follower). Häufig wird für diese Art von Extensivformspielen das teilspielperfekte Gleichgewicht als Lösungskonzept gewählt, welches durch eine Rückwärtsinduktion gefunden wird.[66]

3.2.3. Die Existenz von teilspielperfekten Gleichgewichten

Im Folgenden wollen wir die Existenz eines teilspielperfekten Gleichgewichtes sichern und uns eine interessante Eigenschaft zu diesem ansehen.[67]

Korollar: Sei Γ ein Spiel in Extensivform und $l(B) < \infty$ (wobei $l(B)$ die Länge eines Spieles und $l(B)$= das längste Element aus B), dann sind folgende Mengen ident:

- die Menge der teilspielperfekten Gleichgewichte
- die Menge der Strategietupel durch Rückwärtsinduktion.[68]

Satz 7: *Existenz eines perfekten Teilspielgleichgewichts*
Jedes endliche Spiel in extensiver Form mit vollkommener Information hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht in reinen Strategien.

Beweis:

Es sei Γ ein Spiel in Extensivform mit vollkommener Information und $v \in B$. Der Satz wird durch Induktion über die Länge der Teilspiele bewiesen.

Induktionsannahme: Sei $l\big(\Gamma(v)\big) = 0$ dann ist v ein finaler Spielverlauf, welcher zu einem Spielende führt. Diese Strategiekombination $s^*|_v$ ist im Teilspiel $\Gamma(v)$ ein Nash-Gleichgewicht und ein perfektes Teilspielgleichgewicht.

Induktionsvoraussetzung: Sei für jedes Teilspiel der Länge $l\big(\Gamma(v)\big) \leq k$ ein Gleichgewicht gefunden.

[66] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 100
[67] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 102
[68] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 313

Induktionsschritt: Wir betrachten den Spielablauf $v = (v', z) \in B$ mit $z \in Z(v')$. Es sei $l\big(\Gamma(v)\big) \leq k$ und $l\big(\Gamma(v')\big) = k + 1$. Nach dem Spielablauf von v' ist der/ die SpielerIn i am Zug, daher gilt $\mathcal{P}(v') = i$. Aufgrund der Induktionsannahme sind die Nash-Gleichgewichte für alle Teilspiele $\Gamma(v)$ mit $z \in Z(v')$ bereits gefunden. Ist nun $i = 0$ so wird dem Teilspiel $\Gamma(v')$ als Auszahlung der Erwartungswert der Auszahlung der Gleichgewichte der Teilspiele $\Gamma(v', z)$ mit $z \in Z(v')$ zugeordnet. Ist nun i ein/e endliche/r SpielerIn, so wird der Zug aus $z \in Z(v')$ gewählt, der auf das Teilspiel $\Gamma(v)$ führt, welches für den/ die SpielerIn i die höchste Auszahlung liefert. Somit wäre das teilspielperfekte Gleichgewicht für das Teilspiel $\Gamma(v')$ der Länge $l\big(\Gamma(v')\big) = k + 1$ gefunden. Das teilspielperfekte Gleichgewicht wird gefunden, indem dieses Vorgehen für endlich viele Schritte wiederholt wird. Nach jedem Schritt merkt man sich den optimalen Zug und gelangt so zu einem teilspielperfekten Gleichgewicht für das Spiel Γ. ■[69]

3.2.4. Kritik am teilspielperfekten Gleichgewicht

Im Abschnitt 3.2.2 haben wir den Aufbau eines STACKELBERG-Spieles kennengelernt. Dieses wird üblicherweise mit Rückwärtsinduktion auf ein teilspielperfektes Gleichgewicht untersucht. Der amerikanische Wirtschaftswissenschafter und Spieltheoretiker Robert ROSENTHAL veröffentlichte 1981 eine Spieleanordnung mit dem Namen Tausendfüßler-Spiel (Original Centipede-Game). Mit diesem STACKELBERG-Spiel zeigte er, dass teilspielperfekte Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion nicht immer befriedigende Lösungen erzielen.

Beispiel 7: Das Tausendfüßler-Spiel

Es gibt zwei Personen, 1 und 2. Jede Person bekommt zu Beginn des Spieles 1€. In jeder Runde kann eine Person „Weiter“ (W) oder „Stopp“ (S) sagen. Wenn sie „Weiter“ sagt, wird 1€ vom Guthaben von Person 1 genommen und 2€ zum Guthaben von Person 2 dazugelegt (und umgekehrt, wenn Person 2 „Weiter“ sagt). Sobald eine

[69] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 101- 102

Person „Stopp" sagt, ist das Spiel vorbei und sie bekommen das erspielte Guthaben. Das Spiel ist auch vorbei, wenn beide Personen 100€ erspielt haben.[70]

Der Name des Spieles kommt von der Gestalt seines Spielbaumes. Wenn man das Spiel logisch betrachtet, sollte man denken, dass beide Personen so lange warten, bis sie 100€ haben. Das Konzept der Rückwärtsinduktion liefert hier aber ein paradoxes Ergebnis. Dieses Spiel hat genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Die Person, die gerade an der Reihe ist, wählt die Strategie „Stopp".

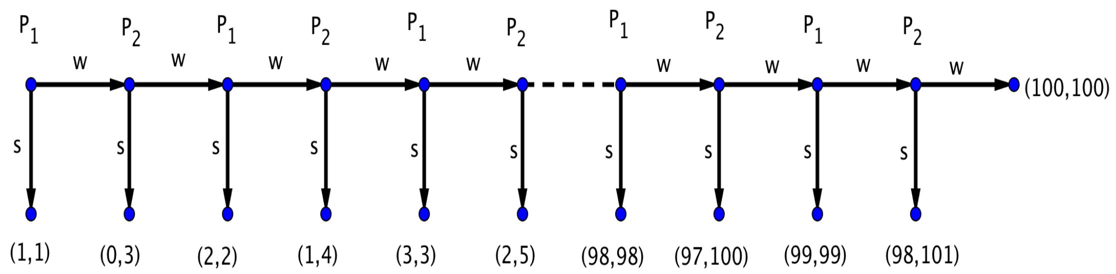

Abb. 12: Tausendfüßler-Spiel[71]

Wenn man das Spiel mittels des Konzeptes der Rückwärtsinduktion betrachtet, sehen wir auch, warum das so ist. Im letzten Knoten wird sich P_2 für „Stopp" entscheiden. Sie bekommt dadurch 101€ ausbezahlt und nicht nur 100€. In der verletzen Runde wird sich P_1 aber denken, dass P_2 in der nächsten Runde „Stopp" sagen wird. Daher wird P_1 in der vorletzten Runde selbst die Strategie s wählen, um 99€ statt 98€ zu erhalten. In der drittletzten Runde würde sich P_2 für s entscheiden, da P_1 sich in der nächsten Runde für „Stopp" entscheiden würde. Dieses Vorgehen können wir auf alle t-Runden übertragen. Die Person, die an der Reihe ist, wird die Strategie s wählen, da sie so eine um 1€ höhere Auszahlung als bei der Strategie w erhält (vorausgesetzt die andere Person wählt in der nächsten Runde s). Dies würde bedeuten, dass P_1 schon in der ersten Runde „Stopp" sagt und beide eine Auszahlung von 1€ erhalten. [72]

[70] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 105
[71] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 319
[72] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 105

Das Tausendfüßler-Spiel ist ähnlich unbefriedigend für die BetrachterInnen wie das Gefangenendilemma. Die AkteurInnen gehen mit einer weitaus schlechteren Auszahlung aus dem Spiel als möglich gewesen wäre. Das Problem liegt wie im Gefangendilemma in der Rationalität, welche wir dem/der Gegenüber unterstellen. Der/Die SpielerIn wird versuchen, durch Antizipieren der Strategien des Gegenübers, die eigene Auszahlung zu maximieren und daher s wählen. Diese Begründungskette wird länger, um je mehr Teilspiele wir sie nach hinten verlängern, bis wir im Anfangsknoten ankommen.[73]

3.2.5. Imperfekte Information, Überzeugungen und Verhaltensstrategien

Die Spieltheorie hat eine Vielzahl an interessanten Erweiterungen des teilspielperfekten Gleichgewichtes hervorgebracht. Zum einen sind sie den ungenügenden Ergebnissen – wie wir im Beispiel des Tausendfüßler-Spiels gesehen haben – geschuldet. Zum anderen müssen bei einem teilspielperfekten Gleichgewicht alle AkteurInnen an jedem Entscheidungsknoten vollkommen über das Spiel informiert sein. D.h., sie müssen an jedem Entscheidungsknoten ihre optimale Strategie berechnen können. Dafür müssen ihnen nicht nur die Auszahlungsfunktionen bekannt sein, sondern auch alle möglichen Strategien der anderen Beteiligten. Zusätzlich müssen sie sich im Klaren darüber sein, in welchen Entscheidungsknoten sie sich befinden. In der Spieltheorie heißen solche Spiele, Spiele mit perfekter Information.

Wenn ein/e SpielerIn die vorangegangenen Züge der anderen Beteiligten nicht beobachten konnte, weiß er/sie nicht, an welchem Entscheidungsknoten er/ sie sich befindet und es ist nicht möglich ein teilspielperfektes Gleichgewicht zu finden.[74] Um diesen Sachverhalt modellieren zu können, führen wir neben der SpielerInnenzerlegung P auch die Informationszerlegung $U = \{U_1, \dots, U_n\}$ für $|I| = n$ ein. U_i ist die Informationszerlegung für den/die SpielerIn i. Diese verfeinert die SpielerInnenzerlegung. Die Informationszerlegung ist $U_i = \{u_{i1}, \dots, u_{iK_i}\}$, wobei u_{ik_i} den Informationsstand von i auf der jeweiligen

[73] WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002) S. 321
[74] HOLLER, ILLING, Einführung in die Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2003[5]) S. 113

Stufe des Spieles beschreibt. Ist diese Menge für eine/n Beteiligte/n einelementig, so besitzt er/sie vollkommene Information. In Beispiel 6 wäre die Informationszerlegung für Firma 1 $U_1 = \{u_{11}\}$ mit $u_{11} = \{A\}$ und für Firma 2 $U_2 = \{u_{21}, u_{22}\}$ mit $u_{21} = \{E\}$ und $u_{22} = \{N\}$, d.h., die Firmen haben vollkommene Information, sie wissen daher immer, in welchen der Entscheidungsknoten sie sich gerade befinden.[75] Das nachfolgende Beispiel orientiert sich am Markteintrittsspiel, wurde aber leicht abgeändert.

Beispiel 8: Markteintrittsspiel mit imperfekter Information

Es gibt zwei Unternehmen*, Firma 1 und Firma 2. Firma 2 ist als Monopolist am Computermarkt aktiv. Firma 1 überlegt in den Handel mit PCs einzusteigen, wenn sie in den Markt einsteigen, stehen ihnen zwei Produktionsverfahren zur Verfügung. Firma 2 weiß nicht, welche Produktionsmöglichkeit (B und C) Firma 1 wählt. Firma 2 hat nun zwei Möglichkeiten:*

1. *Sie lässt einen Markteintritt von Firma 2 zu und gibt Marktanteile ab.*
2. *Sie ruft einen Preiskampf aus, um den Konkurrenten zu schwächen.*

Die Gewinne für die Firmen verteilen sich wie folgt:

		Firma 2	
		K	Z
Firma 1	N	0 / 5	0 / 5
	B	-2 / 1	-3 / -2
	C	-1 / -1	4 / 4

Abb. 13: Markteintrittsspiel mit imperfekter Information in strategischer Form

[75] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 93

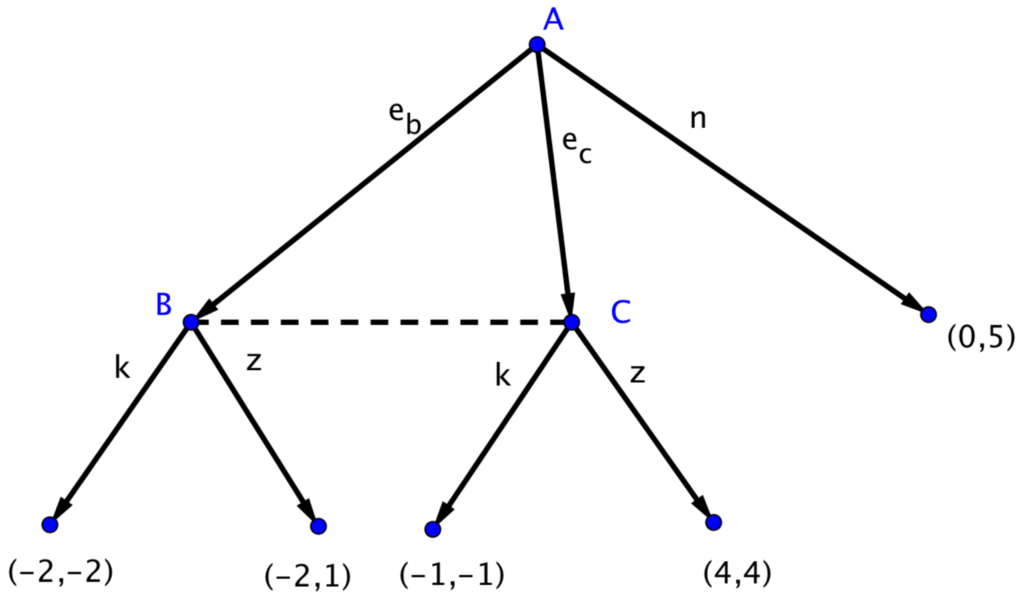

Abb. 14: Markteintrittsspiel mit imperfekter Information

Die Informationszerlegung bildet sich wie folgt:

- Firma 1: $U_1 = \{u_{11}\}$ mit $u_{11} = \{A\}$
- Firma 2: $U_2 = \{u_{21}, u_{22}\}$ mit $u_{21} = \{B, C\}$ und $u_{22} = \{(0,5)\}$

Die Informationszerlegung für u_{21} ist eine zweielementige Menge, daher weiß Firma 2 nicht mehr, in welchem Entscheidungsknoten sie sich befindet, wenn Firma 1 einen Markteintritt vollzieht.

Aus diesem Grund können wir auch kein teilspielperfektes Gleichgewicht finden, da es keine Teilspiele gibt bzw. der gesamte Spielbaum ein Teilspiel ist. Es gibt demnach zwei Nash-Gleichgewichte, die teilspielperfekt sind, (n, k) und (e_c, z). Es ist allerdings für Firma 2 nicht rational im Nash-Gleichgewicht (n, k) die Strategie k zu wählen. In diesem Gleichgewicht kommt sie nicht zum Zug. Doch wenn sie zum Zug kommen, wäre die Strategie z in beiden Fällen, also unabhängig davon, ob man sich in B oder C befindet, besser für Firma 2 als die Strategie k.

Firma 2 wird vielmehr eine Einschätzung darüber treffen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man sich in welchem Knoten wiederfindet. Die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit wird entlang des Gleichgewichtspfades mit der BAYES'schen Regel berechnet. Wenn ein Ereignis außerhalb des Gleichgewichtspfades eintritt, entsteht dann allerdings das Problem, dass die Regeln von BAYES nicht anwendbar sind. Die Wahrscheinlichkeit für dieses

Ereignis wäre gleich Null. Eine Strategie, welche in einem Gleichgewicht mit Wahrscheinlichkeit 0 auftaucht, kann in einem anderen eine positive Wahrscheinlichkeit haben. Wenn wir beispielsweise das Nash-Gleichgewicht (n, z) betrachten, würden die Knoten B und C nie erreicht werden (also mit einer Wahrscheinlichkeit von 0). Wenn Firma 2 doch zum Zug käme, könnten sie sich keine Erwartungen bezüglich ihrer Auszahlung formulieren, da sie nicht wissen, in welchen Knoten sie sich befinden.[76]

Um solche Probleme lösen zu können, führten KREPS und WILSON 1982 das Konzept des sequentiellen Gleichgewichtes ein. Hierfür soll jeder Spieler zu jedem Zeitpunkt des Spieles in der Lage sein, den zu erwarteten Nutzen für sich zu bewerten. Um das Informationsdefizit zu simulieren, welches durch imperfekte Information entsteht, wird eine Wahrscheinlichkeit für die Knoten der Informationszerlegung eines/ einer jeden Spielers/Spielerin angenommen. Dieses Konstrukt wird System aus Überzeugungen genannt.

Definition 27: System aus Überzeugungen

Ein System aus Überzeugungen ist eine Funktion:

$\mu: D \rightarrow [0,1]$ mit der Eigenschaft $\forall\, u \in U\colon \sum \mu(X) = 1$ und $X \in D$.

Anders ausgedrückt, bezeichnet $\mu(X)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Entscheidungsknotenmenge D aus der Informationsmenge U_i von i, d.h., es drückt eine Wahrscheinlichkeit aus, mit der ein/e SpielerIn annimmt, dass man sich bei X befindet, wenn er/ sie in u am Zug ist.[77]

Damit die SpielerInnen ihren zu erwartenden Nutzen bewerten können, wird eine Verhaltensstrategie über der Menge der Informationszerlegung definiert:

[76] HOLLER, ILLING, Einführung in die Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2003[5]) S. 113-115

[77] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010[3]) S. 120-121

Definition 28: Verhaltensstrategie

Sei $\beta_i(U)$ eine unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der Züge $Z(U)$. β_i heißt Verhaltensstrategie von i ($i \in I$) und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ heißt Verhaltenskombination von allen Spielern. [78]

In Abb. 15 sehen wir die relevanten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für unser 8. Beispiel. Über der Informationszerlegung u_{21} ist das System aus Überzeugungen mit $\mu(B) = \frac{1}{2}$ und $\mu(C) = \frac{1}{2}$ gegeben. Die Verhaltensstrategien bilden die Wahrscheinlichkeiten der von u_{21} ausgehenden Aktionen, welche die Firma 2 wählen kann. Wir können also durch β und μ eine bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, mit welcher wir die Endpunkte (E_1, E_2, E_3, E_4) erreichen:

$$P_\mu^\beta(E_1|B) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \qquad P_\mu^\beta(E_2|B) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$P_\mu^\beta(E_3|A) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \qquad P_\mu^\beta(E_4|A) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

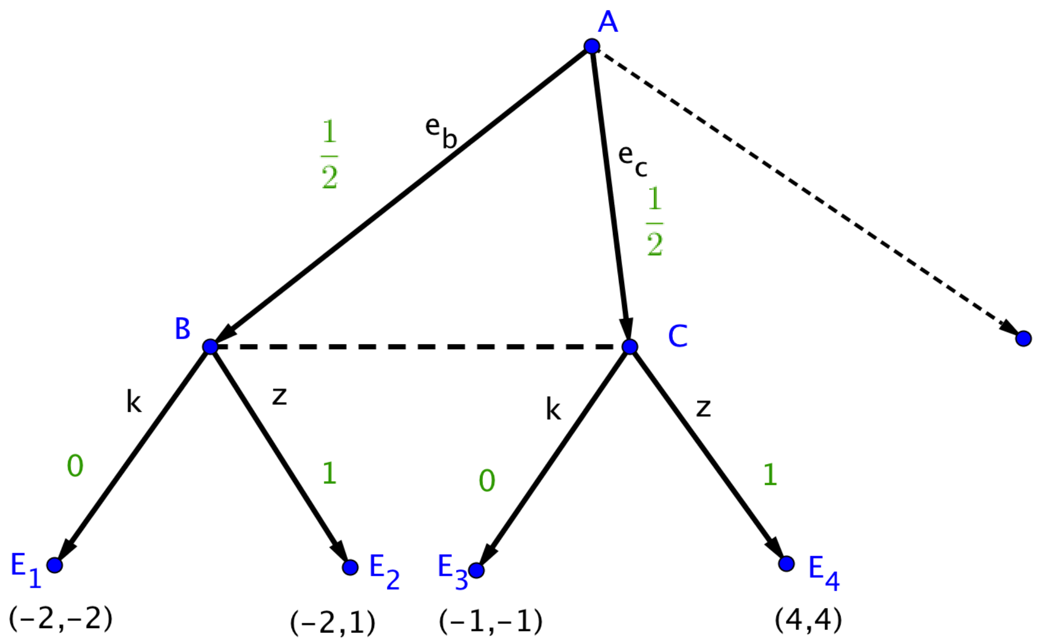

Abb. 15: Markteintrittsspiel mit Wahrscheinlichkeitsverteilung

[78] GÜTH, Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele (Berlin/Heidelberg 1992) S. 99

Durch die bedingte Verteilung, die wir uns soeben errechnet haben, können wir uns den erwarteten Nutzen definieren und berechnen. μ wurde auf der Menge aller Informationszerlegungen definiert. Aus diesem Grund kann ein/e SpielerIn zu jedem Zeitpunkt die erwartete Auszahlung berechnen, auch wenn u_{ik_i} vielleicht gar nicht erreicht wird.

Definition 29: Erwarteter Nutzen

Der erwartete Nutzen für i $(i \in I)$ mit gegebenen β und μ ist der Erwartungswert den Endpunkt zu erreichen mit dieser Kombination aus β und μ.

$$H_i^{\mu}(\beta|u) \coloneqq \sum P_{\mu}^{\beta}(E|U)\Pi_i(E)$$

[79]

3.2.6. Das sequenzielle Gleichgewicht

Der erwartete Nutzen bildet eine Entscheidungsgrundlage für das sequenzielle Gleichgewicht, dessen Konzept wir in diesem Abschnitt erarbeiten werden. KREPS und WILSON stellten zwei Bedingungen auf, welche erfüllt sein müssen, damit ein sequenzielles Gleichgewicht entsteht. Zum einen darf kein/e SpielerIn in der Informationszerlegung einen Grund haben von der Verhaltensstrategie abzuweichen, sollte das Spiel an diesem Punkt starten. Diese Forderung nannten sie sequentielle Rationalität. Sie beruht auf einem System aus Überzeugungen μ und einer Verhaltensstrategie β.[80]

Definition 30: Sequenzielle Rationalität

Sei Γ ein Spiel in Extensivform. Das Tupel (β^*, μ^*) heißt sequenziell rational, wenn für die Auszahlung H_i eines jeden i $(i \in I)$ und für jede Informationszerlegung $u_{ik_i} \in U_i$ gilt:

$$H_i\left(\beta^*, \mu^*, u_{ik_i}\right) \geq H_i\left(\beta_i, \beta_{-i}^*, \mu^*, u_{ik_i}\right) \ \forall \beta_i$$

[81]

---

[79] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 121
[80] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010³) S. 120-121
[81] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 110

Eine Verhaltensstrategie β^* ist also genau dann sequenziell rational, wenn sie in jeder Informationszerlegung die Beste-Antwort von i ist. Durch die Bedingungen der sequenziellen Rationalität werden alle Spiele in das Gleichgewicht mit einbezogen, egal ob sie für das Gleichgewicht relevant sind oder nicht.

Das System von Überzeugungen aus Abb. 15 war vorgegeben. Doch dies könnte auch von den Beteiligten selbstständig berechnet werden. Unter der Annahme, dass alle Akteure rationale Spieler sind, werden sie alle zur Verfügung stehenden Informationen nutzen, um sich ein Bild der Gesamtsituation zu verschaffen. Die Funktion $\mu(x)$ kann daher als bedingte Wahrscheinlichkeit betrachtet werden, wenn eine Informationszerlegung U_i von i gegeben ist:

$$\mu(x) = \frac{P^{\beta}(X)}{P^{\beta}(U_i)}$$

$P^{\beta}(X)$ ist dabei die Realisationswahrscheinlichkeit jedes Knotens $X \in T$ für eine Strategie β_i und $P^{\beta}(u_i)$ die Wahrscheinlichkeit für ein Element der Informationszerlegung für ein i. Diese Berechnung macht keine Probleme, solange wir uns am Pfad der Informationszerlegung U_i bewegen (da $P^{\beta}(u_i) > 0$). Doch wenn sich ein Spielverlauf außerhalb der Informationsmenge ereignet, kommt es zum oben beschriebenen Problem, dass dies mit der Wahrscheinlichkeit von $P^{\beta}(u_i) = 0$ eigentlich nicht auftreten dürfte. KREPS und WILSON lösten dieses Problem durch eine Approximation der Tupel (β, μ). Dieses wird durch eine Folge von positiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen ($P^{\beta}(u) > 0$) durch $\{(\beta^n, \mu^n)\}_n$ angenähert.

Definition 31: Konsistenz

Das Tupel (β, μ) heißt konsistent, wenn eine Folge $\{(\beta^n, \mu^n)\}_n$ existiert mit:

$\mu = \lim_n \mu^n; \beta = \lim_n \beta^n$

$(\beta^n, \mu^n) \in \Omega \coloneqq \{((\beta, \mu): P^{\beta}(u) > 0, \mu(x) = \frac{P^{\beta}(X)}{P^{\beta}(U_i)}$ mit $X \in U\}$

Ein Tupel (β, μ) ist konsistent, wenn es eine andere Strategiekonfiguration gibt, die sich von β kaum unterscheidet und die durch alle Informationsmengen U_i mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann.[82]

Definition 32: Sequenzielles Gleichgewicht
Ein Tupel (β, μ) heißt sequenzielles Gleichgewicht, wenn es sequenziell rational und konsistent ist.

[83]

Satz 8: *Jedes sequentielle Gleichgewicht ist teilspielperfekt.*

Beweis:
Jedes sequenzielle Gleichgewicht (β, μ) ist sequenziell rational. D.h., β^* ist beste Antwort auf sich selbst in jedem Teilspiel $\Gamma(v)$ und daher teilspielperfekt. ■[84]

Kommen wir zurück zum Markteintrittsspiel. Das Gleichgewicht (n, k) kann kein sequenzielles Gleichgewicht sein, da für jedes System aus Überzeugungen die Strategie z einen höheren erwarteten Nutzen bringt als die Strategie k. Es ist demnach nicht sequenziell rational. Wenn Firma 1 in den Markt eintritt, ist die Strategie z noch immer die beste Entscheidung. Diese ist unabhängig von jeder unterstellten Wahrscheinlichkeit μ_C, denn es gilt:

$$4 \cdot \mu_C + 1 \cdot (1 - \mu_C) > -1\mu_C - 2 \cdot (1 - \mu_C).$$

Daher wird Firma 1 immer in den Markt eintreten, da sie weiß – unter der Annahme eines rationalen Gegenspielers –, dass Firma 2 die Strategie z wählen wird. Das einzige sequenzielle Gleichgewicht ist demnach (e, z).[85]

---

[82] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010[3]) S. 122-123
[83] SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004) S. 110
[84] BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, Strategische Spiele (Berlin 2010[3]) S. 131
[85] HOLLER, ILLING, Einführung in die Spieltheorie (Berlin, Heidelberg 2003[5]) S. 116-117

3.2.7. Kritik am sequenziellen Gleichgewicht

Das Beispiel des Markteintrittsspieles zeigt gut, dass die Wahrscheinlichkeitseinschätzungen über ein Ereignis, welches außerhalb des Spielablaufes liegt, nicht eindeutig sein müssen. Dies ist der geforderten Konsistenz geschuldet. Daher entsteht bei der Wahl von μ ein gewisser Freiheitsgrad, welcher dazu beitragen kann, ob eine Strategiekombination ein sequenzielles Gleichgewicht ist oder nicht. Aus diesem Grund sind auch manche Wahrscheinlichkeitseinschätzungen höchst unplausibel. Im nächsten Beispiel – welches auch bei HOLLER und ILLING, zu finden ist – wurden die Auszahlungen für das Markteintrittsspiel ein wenig abgeändert.

Beispiel 9: Wieder ein Markteintritt

Mithilfe des Beispiels 9 wollen wir uns das Problem der unplausiblen Wahrscheinlichkeitseinschätzung vergegenwärtigen. Die Spielregeln des Spieles erfolgen wie in Beispiel 8 mit der Ausnahme, dass eine Auszahlung verändert wurde.

Ein Nash-Gleichgewicht ist immer ein sequentielles Gleichgewicht, welches eine konsistente Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt, die bezüglich der untersuchten Strategie optimal ist. Das Konzept fordert daher nicht, dass die Strategie für all ihre möglichen konsistenten Wahrscheinlichkeitsverteilungen optimal sein soll.

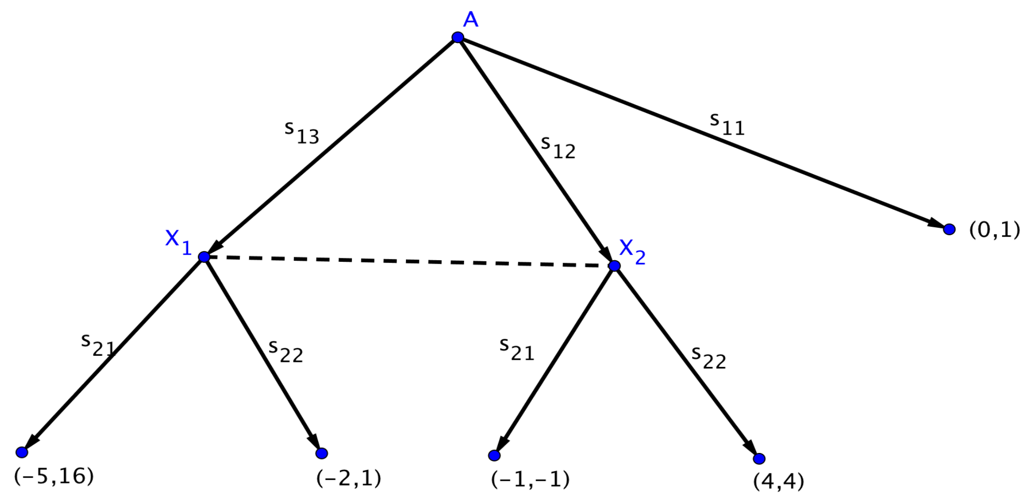

Abb. 16: Spielbaum zu Beispiel 7

Im Falle dieses Spielbaumes wollen wir untersuchen, ob die Kombination $(s_{11,}\, s_{21})$ ein sequentielles Gleichgewicht sein kann. Hier würde Firma 2 nicht am Spielausgang mitwirken können, da Firma 1 nicht in den Markt eintritt. Wenn Firma 1 trotzdem in den Markt eintritt, muss sich Firma 2 eine Einschätzung darüber bilden, in welchen Knoten, X_1 *oder* X_2, sie sich befindet.

- Firma 1 wählt die Aktion s_{13}, dann ist es besser für Firma 2 s_{21} zu wählen.
- Firma 1 wählt s_{12}, dann ist es für Firma 2 besser s_{22} zu wählen.

Aus diesem Grund muss sich Firma 2 für beide Knoten X_1 und X_2 eine Wahrscheinlichkeitsverteilung überlegen. Wenn Firma 2 sicher glaubt sich im Knoten X_1 zu befinden, dann ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung dafür $\mu_{X_1} = 1$ und $\mu_{X_2} = 0$. In diesem Falle ist s_{21} die optimale Antwort für Firma 2 und die Kombination $(s_{11,}\, s_{21})$ ist ein sequenzielles Gleichgewicht. Dies ist der Fall, solange der erwartete Nutzen der Strategie s_{21} größer ist als der Nutzen der Strategie s_{22}:

$$-1 \cdot \mu_{X_2} + 16 \cdot \left(1 - \mu_{X_2}\right) > 4 \cdot \mu_{X_2} + 1 \cdot (1 - \mu_{X_2})$$
$$\Rightarrow \mu_{X_2} < 0{,}75$$

Solange $\mu_{X_2} < 0{,}75$ wird die Strategiekombination $(s_{11,}\, s_{21})$ gespielt. Wenn $\mu_{X_2} = 0{,}75$ ist Firma 2 indifferent, in welchen Knoten sie sich befindet, da sie ohnehin nicht zum Zug kommt. Aus diesem Grund ist eine jede Wahrscheinlichkeitsverteilung über eine mögliche Strategiewahl von s_{21} oder s_{22} zulässig, solange Firma 1 nicht in den Markt eintritt. Dieser wird erst dann für Firma 1 interessant, wenn der erwartete Gewinn bei einem Markteintritt mit der Strategie s_{12} positiv ist (mit der Strategie s_{13} ist für Firma 1 kein positiver Gewinn möglich):

$$-1 \cdot p(s_{21}) + 4 \cdot \big(1 - p(s_{21})\big) \leq 0$$
$$\Rightarrow p(s_{21}) \geq 0{,}8$$

Wenn Firma 2 ihre Strategie s_{21} mit einer Wahrscheinlichkeit von $p(s_{21}) < 0{,}8$ spielt, ist es für Firma 1 rational in den Markt einzusteigen. Ferner ist die Kombination $(s_{11,}\ s_{21})$ in diesem Falle kein Gleichgewicht mehr. Wenn Firma 2 zu der Einschätzung gelangt, dass $\mu_{X_2} > 0{,}75$, so ist es für sie immer optimal die Strategie s_{22} zu wählen. Firma 1 wird dann immer in den Markt einsteigen und die Wahrscheinlichkeitseinschätzung ist mit $\mu_{X_2}(X_2|X_1\ oder\ X_2) = 1$ eindeutig definiert.
Das Spiel weist zwei mögliche Auszahlungen auf (4,4) und (0,1). Während sich die Auszahlung (4,4) nur durch die Strategie $(s_{12}, s_{22};\ \mu_{X_2} = 1)$ erreichen lässt, kann sich die Auszahlung (0,1) durch mehrere sequenzielle Gleichgewichte ergeben, welche sich einzig und alleine nur durch die Wahrscheinlichkeitseinschätzung von Firma 2 $(0 \leq \mu_{X_2} \leq 0{,}75)$ unterscheiden. Bei der zweiten Auszahlung tritt Firma 1 nie in den Markt ein und Firma 2 kommt folglich nie zum Zug. Aus diesem Grund ergeben sich gewisse Freiheiten für das Verhalten von Firma 2. Alle diese Freiheiten führen allerdings zum selben Gleichgewicht und zum selben Ergebnis: (0,1) kein Markteintritt. In der nachstehenden Abbildung sind die Gleichgewichtsstrategien in Abhängigkeit von μ_{X_2} und der Wahrscheinlichkeit $p(s_{21})$ dargestellt.

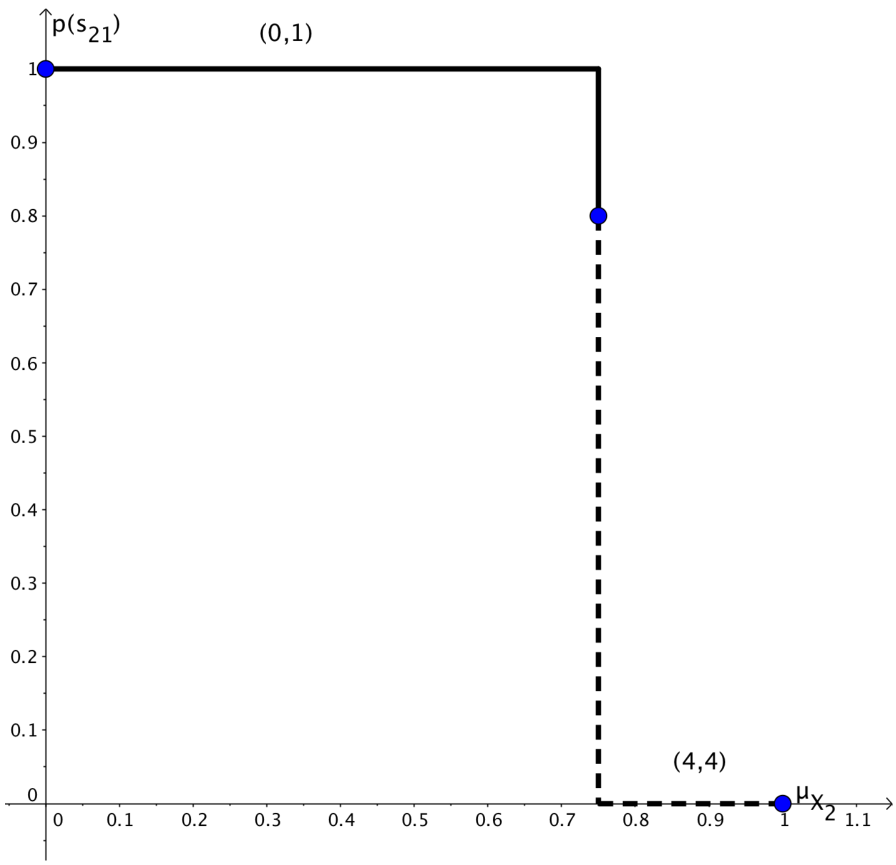

Abb. 17: Menge aller Gleichgewichte

Das Beispiel 7 weist drei wichtige Eigenschaften für extensive Spiele auf:

I. Es gibt eine endliche Menge an Gleichgewichtsauszahlungen.

II. Die Menge aller Gleichgewichtsstrategien ist durch eine endliche Anzahl von zusammenhängenden Mengen charakterisiert.

III. Jede zusammenhängende Teilmenge von Gleichgewichtsstrategien entspricht einem Ergebnis mit derselben Gleichgewichtsauszahlung.

KOHLBERG und MERTENS sowie CHO und KREPS zeigten, dass diese Eigenschaften für fast alle Nash-Gleichgewichte in extensiven Spielen gelten. Warum nur „für fast alle“? Nur wenige Spiele, welchen einen speziell Aufbau aufweisen, haben diese Eigenschaften nicht. Doch sobald die Auszahlungen dieser Spiele nur geringfügig geändert werden, weisen sie die beschriebenen Eigenschaften wieder auf.[86]

[86] HOLLER, ILLING, Einführung in die Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2003⁵) S. 117-119

4. Spieltheorie im Mathematikunterricht

4.1. Voraussetzungen für den Einsatz im Unterricht

Der Lehrplan der AHS Oberstufe weist nicht ausdrücklich darauf hin, dass Spieltheorie im Mathematikunterricht zu unterrichten ist. Es stellt sich also die Frage, ob es sinnvoll ist diese Thematik in den Unterricht zu integrieren. Ist es nicht vielmehr eine Mehrbelastung im sowieso schon vollen Lehrplan? Raubt eine neue Thematik nicht noch mehr kostbare Unterrichtszeit, welche besser damit verbracht werden sollte die Grundkompetenz zu erlernen?

Dieser Abschnitt der Diplomarbeit soll die Frage erörtern, welche Grundlagen die Spieltheorie im Lehrplan für Mathematik hat, und ob es sinnvoll ist diese in den Unterricht mit einzubeziehen. Denn ganz wahr sind die ersten Worte nicht. Der Begriff der Spieltheorie kommt im Lehrplan für das Wahlpflichtfach Mathematik vor.[87] Weiters finden wir viele einzelne Elemente der Spieltheorie im Lehrplan für Mathematik der AHS Oberstufe wieder. Die Statistik- und Wahrscheinlichkeitsrechnung sind Lehrstoff der 6., 7. und 8. Klasse. Relative Häufigkeiten, Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten bilden einen wichtigen Baustein für die Entscheidungsgrundlage in der Spieltheorie und ebenso wichtig sind sie im Schulunterricht. Die Grundlagen für die Spieltheorie bekommt man bereits in der 5. Klasse vermittelt, wenn es darum geht, lineare Gleichungssysteme zu lösen. Das Wesen der Spieltheorie ist allerdings das Analysieren und Optimieren von Entscheidungen, welche zu den Kompetenzen der 7. Klasse gehören. Daher müssen die Begrifflichkeiten der Wahrscheinlichkeit und des Erwartungswertes den SchülerInnen noch nicht bekannt sein. Optimierungsaufgaben gehen weit über das Nullsetzen der ersten Ableitung hinaus und bieten große Vielfalt für den Mathematikunterricht.[88] In der Spieltheorie werden ständig Entscheidungen optimiert, Strategien erarbeitet und

---

[87] Bundesministerium für Bildung, Lehrpläne, Zur Vertiefung und Erweiterung des Bildungsinhaltes von Pflichtgegenständen. Mathematik, online unter: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_29_11884.pdf?5i84ll (zugriff am 22.1.2017)

[88] Hans HUMMENBERGER, Optimieren im Mathematikunterricht, In: Praxis der Mathematik, Heft 3 (1998) S. 101

Strukturen analysiert. Wenn ein Blick in den Lehrplan geworfen wird, findet man den letzten Teil des vorhergehenden Satzes sehr schnell. Schon die Bildungs- und Lehraufgaben geben auf der ersten Seite wieder:

> *„Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problem durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.“* [89]

Dies wird durch die Spieltheorie erreicht. Ein Interessenkonflikt, welcher durchaus einen realitätsnahen Hintergrund haben kann, wird in ein mathematisches Modell übersetzt. Dieses Modell sollte einfach genug sein, um Lösungen zu liefern und komplex genug, um plausible Lösungen zu erarbeiten. Die Spieltheorie liefert hier einen großen Pool an Erfahrungen und Beispielen aus der Praxis, wie ihn auch der Lehrplan in den Aspekten der Mathematik fordert.

> *„Erkenntnistheoretischer Aspekt: „Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt. Sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen. Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.“* [90]

Im weiteren Verlauf eines spieltheoretischen Problems müssen die Ergebnisse beurteilt werden. Sind diese plausibel? Sind sie realistisch? Oder sind sie nicht nachvollziehbar? Hier wird nicht nur ein kritisches Hinterfragen der SchülerInnen gefordert, sondern auch, ihre Erkenntnisse und Argumente in Worte zu fassen. Diese Anforderungen der Spieltheorie an die SchülerInnen finden sich auch im sprachlichen Aspekt der Mathematik wieder:

> *„Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen.“* [91]

Neben den Aspekten der Mathematik soll der Unterricht zugleich Aufgaben erfüllen, um einen Beitrag zu den Bildungsbereichen zu liefern. Ohne Zweifel kann die Spieltheorie hier einen großen Beitrag leisten. So fordert der Lehrplan, dass

---

[89] Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, Jahrgang 2016, Ausgegeben am 9. August 2016. Teil II, 219 Verordnung. Lehrplan Mathematik S. 67
[90] Lehrplan Mathematik S. 67
[91] Lehrplan Mathematik S. 67

der Mathematikunterricht aufzeigt, in welchen Bereichen des Lebens die Mathematik eine wichtige Rolle spielt. Hier kann die Spieltheorie mit ihrer großen Bandbreite an Anwendungsgebieten punkten. Wie im Verlauf der Arbeit schon gezeigt wurde, ist sie nicht nur auf wirtschaftliche Phänomene wie dem Markteintrittsspiel, sondern auch auf Spiele (vgl. Matching Pennies) oder philosophische Problemstellungen wie dem Gefangenendilemma anwendbar. Es lassen sich selbst Beispiele aus dem Erfahrungsschatz der SchülerInnen finden (das Hausübungs-Spiel), um ihnen eine Anwendbarkeit der Spieltheorie für ihr Umfeld aufzuzeigen. An dieser Stelle sei erwähnt, dass der Lehrplan in den didaktischen Grundsätzen ausdrücklich darauf hinweist, dass Lernen in einem anwendungsorientierten Kontext stattfinden soll.

> *„Lernen in anwendungsorientierten Kontexten: Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben.“*[92]

Dass die Spieltheorie diese Funktion erfüllt, wurde schon gezeigt. Gleichsam bildet sie ein Paradebeispiel für den fächerübergreifenden Unterricht. Im Abschnitt 4.4 werden mit dem Kalten Krieg und dem Koalitionsproblem zwei Probleme vorgestellt, welche sich leicht mit dem Geschichtsunterricht vernetzen lassen. Weiteres haben wir mit dem Markteintrittsspiel ein Beispiel für Geografie und Wirtschaftskunde vorgestellt. Somit ist ein vielschichtiges Untersuchen von verschiedenen Phänomenen nicht nur alleine im Mathematikunterricht, sondern auch darüber hinaus durch die Spieltheorie möglich.

> *„Lernen unter vielfältigen Aspekten: Einzelne Inhalte und Problem sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten. Vielfältige Sichtweisen sichern eine große Flexibilität bei* der *Anwendung des Gelernten und Erkennen des Gelernten in neuen bzw. nicht* vertrauten *Zusammenhängen und Problemstellungen.“*[93]

In weiterer Folge fordern die didaktischen Grundsätze eine Durchmischung der Sozialform. Die unterschiedlichen Lernniveaus und die unterschiedliche Erfahrungswelt der SchülerInnen machen eine Differenzierung im heutigen Schulalltag zum unentbehrlichen Bestandteil eines erfolgreichen und guten

[92] Lehrplan Mathematik S. 68
[93] Lehrplan Mathematik S. 68

Unterrichts. Oftmals wird in diesem Zusammenhang von der Methodenvielfalt gesprochen, die leider noch nicht in alle Klassenzimmer Einzug gefunden hat. Ewald TERHART formulierte dies etwas drastischer:

> *„Die methodische Monokultur widerspricht [...] einem elementaren Gerechtigkeitsgebot insofern, als die eine dominierende Methode immer nur eine bestimmte Gruppe von Schülern bevorteilt, andere systematisch benachteiligt."*[94]

Gerade die Spieltheorie kann in diesem Punkt helfen einen lebendigen Unterricht zu etablieren. Den Lehrkräften stehen hier Tür und Tor offen, den SchülerInnen selbstständig eine Modellbildung zu überlassen. Nebenbei lassen sich viele Probleme der Spieltheorie auch mit sehr einfachen Mitteln von den Kindern durchspielen – wie wir später noch sehen werden – um so zu einem Bild von angewandtem Mathematikunterricht zu gelangen.

Neben den viel genannten allgemeinen Aspekten und den didaktischen Grundsätzen des Mathematikunterrichtes dominiert vor allem der Begriff des kompetenzorientierten Unterrichts den Schulalltag. Speziell die Spieltheorie bietet hier eine Plattform, die schwierige Kompetenz des Problemlösens und Reflektierens zu üben.

> *„Problemlösen baut auf Eigentätigkeit und heuristischen Strategien in nicht vertrauten Situationen auf. Reflektieren meint das Nachdenken über Zusammenhänge, die sich aus dem dargelegten mathematischen Sachverhalt nicht von selbst ergeben."*[95]

Die SchülerInnen sehen die Mathematik in einem gänzlich anderen Umfeld als sie es gewohnt sind. Die Aufgabenstellungen sind viel offener und geben mehr Freiraum für eigenständige Kreativität, verlangen aber auch ein großes Maß an argumentativen und reflexiven Handlungen. Dieser hohe Grad an Komplexität muss in der Spieltheorie aber nicht immer erreicht werden. Auch niedrigere Level, wie das *„Einsetzen von Grundwissen"* kann durch sie gut geübt werden. Einige SchülerInnen werden bereits ausreichend mit der Übertragung eines Spieles in Extensivform in ein Baumdiagramm gefordert – dies wäre eine klassische Anwendung von Grundwissen, da nur das Einsetzen in ein schon bekanntes

---

[94] Bärbel BARZEL, Andreas BÜCHTER, Timo LEUDERS, Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II (Berlin 2015[8]) S. 42
[95] Lehrplan Mathematik S. 69

Modell praktiziert wird. Andere SchülerInnen werden sich schon Gedanken über mögliche Zusammenhänge machen oder Gleichgewichte errechnen. Wie wir sehen, kann ein spieltheoretisches Problem im hohen Maße auch eine differenzierende Aufgabe für die gesamte Klasse sein. Das Experimentieren in Mathematik steuert einen wichtigen Bestandteil zu einem differenzierten Unterricht bei und ist auch ein Aspekt, welcher sich in den allgemeinen Bildungsbereichen wiederfinden lässt. Im Rahmen der Kreativität und Gestaltung heißt es:

> *„Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite. Vor allem das Experimentieren im Rahmen der Bearbeitung neuer Aufgaben und Probleme macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden."*[96]

Nebenbei werden alle Handlungsdimensionen abgedeckt. Im Bereich des kritisch-argumentativen Arbeitens heißt es etwa:

> *„Kritisch-Argumentatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründungen zu tun haben."*[97]

Diese Tätigkeiten finden sich z.B. in der Rückwärtsinduktion bei Extensivformspielen und dem Auffinden von Nash-Gleichgewichten in Normalformspielen wieder. Bei der Rückwärtsinduktion müssen die dominanten Strategien von hinten nach vorne verfolgt werden. Durch das schrittweise Hinterfragen an jedem Entscheidungsknoten wird eine Argumentationskette gebildet, welche Step-by-Step alle anderen Strategien eliminiert und ein Gleichgewicht erzeugt.

Das *„Darstellend-modellierende Arbeiten"* als Handlungsdimension umfasst alle Aktivitäten die:

> *„mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik zu tun haben."*[98]

Dieser wichtigen Grundkompetenz haben wir uns im Laufe dieses Abschnittes schon einmal angenähert. Da diese Kompetenz einen zentralen Charakter in der

---

[96] Lehrplan Mathematik S. 67
[97] Lehrplan Mathematik S. 69
[98] Lehrplan Mathematik S. 69

Spieltheorie im Mathematikunterricht bereitstellt, findet sich für diese noch ein Exkurs zum Modellieren im Mathematikunterricht im Kapitel 4.3.
Die Spieltheorie kann somit auch einen wichtigen Beitrag zum Erlangen und Üben der mathematischen Kompetenzen liefern. Obwohl der Begriff der Spieltheorie nicht im allgemeinen Lehrplan für das Pflichtfach Mathematik der AHS Oberstufe zu finden ist, gibt es dennoch ausreichend Grundlagen für einen Einsatz im Mathematikunterricht.

4.2. Modellieren im Mathematikunterricht

Im durchschnittlichen Mathematikunterricht in Österreich wird die Mathematik als Ansammlung von Definitionen, Axiomen, Sätzen und Formeln gelehrt. Diese werden schrittweise den SchülerInnen nach einem Schema vorgestellt und beigebracht. Selbstverständlich kann nicht der gesamte Unterricht aus experimentellem und schülerzentriertem Unterricht bestehen, aber eine stärkere Berücksichtigung der Modellbildung in Mathematik wäre wünschenswert. Das würde auch zu einem besseren Verständnis der Prozesse in der Mathematik führen. HUMENBERGER vertritt die Auffassung, dass es für den Unterricht positiv wäre, wenn ein mathematischer Sachverhalt von realen Problemen abgeleitet werden kann. Dies stärkt zum einen die Motivation der SchülerInnen für den Mathematikunterricht. Zum anderen wird das oben erwähnte Verständnis für die Mathematik als Prozess geschult.[99]
Modellbilden ist ein wichtiger Bestandteil der angewandten Mathematik und bildet einen wichtigen Beitrag für die mathematischen Kompetenzen, wie wir im Kapitel 4.1 gesehen haben. Doch was ist Modellieren genau? Henry POLLAK definierte Mitte der 70er Jahre vier Arten von angewandter Mathematik für den Mathematikunterricht: *klassische angewandte Mathematik, anwendbare Mathematik, vereinfachtes Modellieren und Modellieren.* Diese vier Definitionen beruhen auf unterschiedlichen Aspekten. Während die ersten zwei den Fokus auf

[99] Hans HUMENBERGER, Mathematische Aktivitäten rund um die Leonardobrücke, In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 45 (2012) S. 69-70

mathematische Inhalte legen, widmen sich die letzten beiden dem mathematischen Bearbeitungsprozess. Der Begriff des Modellierens legt sein Augenmerk auf den Prozess des Lösens einer Problemstellung. Nach POLAK wird ein Problem aus der Realität herausgenommen und durch ein mathematisches System ersetzt. Das Ziel dieses Ablaufes ist es, mathematische Methoden einsetzen zu können, um das Problem dann in der Realität lösen zu können. Dieser Schritt kommt einem Rücktransfer von Erkenntnissen durch das Modell zurück in die Realität gleich. Der gesamte Ablauf bildet einen Kreis, welcher im Modellierungszirkel in Abb. 18 dargestellt ist.[100]

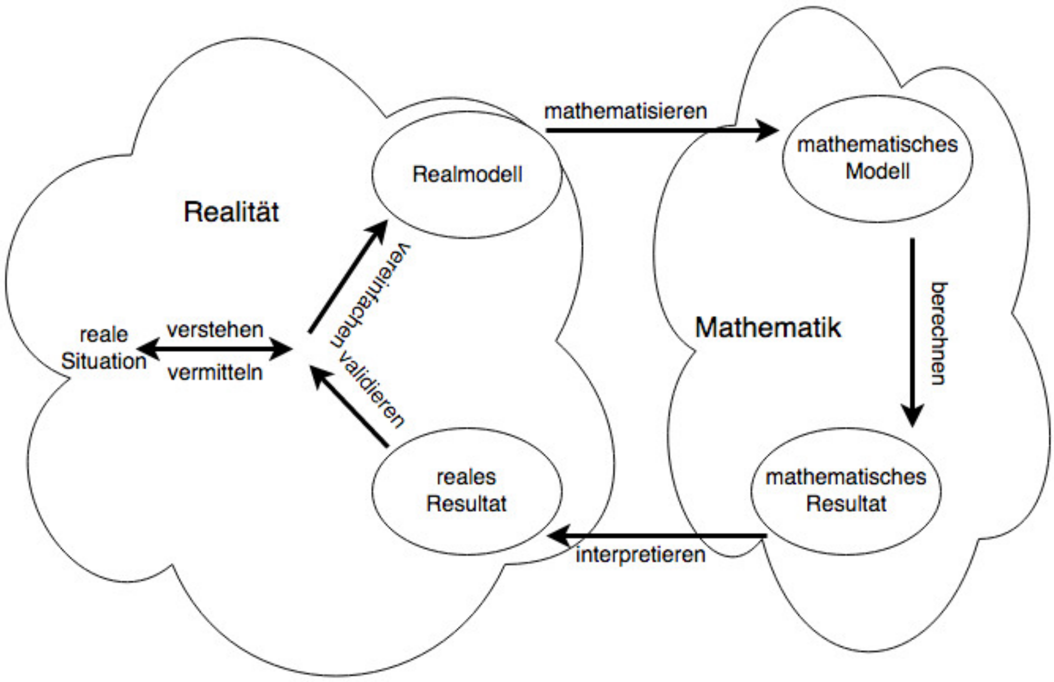

Abb. 18: Modellierungszirkel (nach W. BLUM)[101]

Natürlich hat die Lösung von realen Problemstellungen durch mathematisches Modellieren auch seine Grenzen. Die Realität ist um ein Vielfaches komplexer und kann in ihrem vollen Umfang nie in einem Modell abgebildet werden. Aber gerade

[100] Rita BORROMEO FERRI, Gilbert GREEFRATH, Gabrielle KAISER (Hrsg.), Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe (Wiesbaden 2013) S. 11-12

[101] BORROMEO FERRI, GREEFRATH, KAISER (Hrsg.), Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule (Wiesbaden 2013) S. 18

das mathematische Modell gibt die Möglichkeit die Probleme vereinfacht darzustellen und so einen Überblick über die Gesamtsituation zu erhalten.[102] Werner BLUM versteht daher in der Modellierungskompetenz ein Hin- und Herwechseln zwischen der Realität und dem mathematischen Modell, um so mehr Einsicht in einen komplexen Sachverhalt zu gewinnen.[103] In diesem Prozess sieht man die Bedeutung der Spieltheorie für den Unterrichtseinsatz, weil sie sich genau dem Prinzip der Modellbildung für das Lösen von realen Problemen bedient.

4.3. Notwendige Vorkenntnisse der SchülerInnen

Die Spieltheorie braucht für einen Schuleinsatz nur wenig Vorkenntnisse. Das wichtigste mathematische Instrument ist mit Sicherheit das Aufstellen von linearen Gleichungen und das Lösen linearer Gleichungssysteme. Erstes wird schon in der Unterstufe behandelt und lineare Gleichungssysteme sind Bestandteil des Stoffgebietes der 5. Klasse. Die Begriffe Ereignis und Wahrscheinlichkeit kommen erst in der 6. Klasse vor. Diese sind aber nicht zwingend für die Berechnungen von Spielen in Normalform notwendig, welche nur reine Strategien aufweisen. Auch der Begriff des Erwartungswertes (7. Klasse) kann dadurch umgangen werden.[104] ABLEITINGER und HAUER-TYPPEL sind sogar der Ansicht, dass Themen wie Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert mithilfe der Spieltheorie eingeführt werden können.[105] Auch Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien lassen sich im Unterricht lösen, da diese über relative Häufigkeiten bestimmt werden können. Außerdem werden die Grundlagen der Spieltheorie von den SchülerInnen aufgrund ihrer Erfahrungen sehr schnell intuitiv anhand konkreter Beispiele verstanden. Sie (ABLEITINGER und HAUER-TYPPEL) plädieren in diesem Zusammenhang für einen Unterricht mit möglichst wenig Formalismen. Die grundlegenden Elemente der Strategie, Besten-Antwort,

---

[102] BORROMEO FERRI, GREEFRATH, KAISER (Hrsg.), Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule (Wiesbaden 2013) S. 11-12
[103] BORROMEO FERRI, GREEFRATH, KAISER (Hrsg.), Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule (Wiesbaden 2013) S. 18
[104] Lehrplan Mathematik S. 70-73
[105] ABLEITINGER, HAUER-TYPPELT, Spieltheorie im Unterricht. S. 10

Dominanz oder eines Gleichgewichtes, lernen SchülerInnen am leichtesten durch die Anwendung und das Ausprobieren an konkreten Beispielen. [106]

Spiele in Extensivform benötigen zusätzlich noch den Begriff des Baumdiagramms. Dieser kommt erst in der 6. Klasse mit der beschreibenden Statistik und Wahrscheinlichkeit und dem Ziehen von geordneten Stichproben im Lehrplan vor. Aus der Sicht der Graphentheorie ist der Spielbaum nicht nur ein Werkzeug der Wahrscheinlichkeit und kann somit auch schon früher in den Unterricht integriert werden. Aus diesem Grund steht auch dem Einsatz von Extensivformspielen mit teilspielperfekten Gleichgewichten nichts im Weg. Diese sind gerade für ein kritisch- argumentatives Arbeiten sehr wertvoll. Die sequenziellen Gleichgewichte lassen sich jedoch schwerer im Unterricht behandeln. Der Satz von BAYES ist für das Aufsuchen dieser Gleichgewichte unerlässlich. Dieser kommt im Lehrplan der 6. Klasse vor. [107] Wenn der Satz von BAYES bekannt ist, sind leichte Anwendungen, welche auf sequenzielle Gleichgewichte hinarbeiten, ein gutes Beispiel für den Realitätsbezug im Mathematikunterricht. Außerdem sind selbst bei einfachen Beispielen wie dem Beispiel 6 (Markteintrittsspiel) schon Fallunterscheidungen zu treffen, welche einen argumentativen Zugang erfordern.

Eine besondere Vorsicht ist bei Beispielen geboten, welche an die Grenzen des Rationalitätsprinzips stoßen. Zwei dieser Beispiele haben wir im Verlauf dieser Arbeit schon kennengelernt, das Gefangenendilemma und das Tausendfüßler-Spiel. Diese Beispiele sind bereits für erfahrene Mathematiker schwer zu erfassen und bilden noch heute oft diskutierte Teilthemen der Spieltheorie. Das heißt nicht, dass sie für einen Einsatz vollkommen ungeeignet wären, doch ist die Zielgruppe genauestens auszuwählen. Für wenige interessierte SchülerInnen im Rahmen des Wahlpflichtfaches Mathematik bietet vor allem das Tausendfüßler-Spiel eine gute Möglichkeit einen Einblick in die modernen, noch offenen Problemstellungen der Mathematik zu bekommen. Dieser Einblick ist im herkömmlichen Unterricht oft sehr schwer zu vermitteln, da viele andere Themengebiete der Mathematik komplexer sind und mehr Formalismen benötigen als die Spieltheorie.

---

[106] ABLEITINGER, HAUER-TYPPELT, Spieltheorie im Unterricht. S. 10

[107] Lehrplan Mathematik S. 72

Doch nicht nur das Rationalitätsprinzip zeigt der Spieltheorie für den Unterrichtseinsatz eine Grenze auf. Auch die Zeit, die für den Mathematikunterricht pro Woche zur Verfügung steht, begrenzt den Einsatz. Sie ist wohl der limitierende Faktor. Zum einen sind wir als Lehrkräfte angehalten den Lehrstoff in einem Jahr durchzubringen und zum anderen wird aufgrund der Zentralmatura ein großer Fokus auf die Grundkompetenzaufgaben gelegt. Dieses „Teaching to the Test" macht es schwer andere Themengebiete im Unterricht zu integrieren. Die Spieltheorie wurde hier als ein möglicher Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zu Optimierungsaufgaben dargestellt. Inwieweit dieser Zugang besser ist als die herkömmlichen in Schulbüchern verbreiteten Zugänge, muss jede Lehrkraft für sich entscheiden. Es sollte sich aber ein jeder die Frage stellen, ob es mit den jeweiligen Probanden möglich ist. Wird das Thema der Spieltheorie aus Eigeninteresse behandelt, oder um den SchülerInnen einen schülerzentrierten Zugang zur Mathematik zu ermöglichen? Natürlich müssen stets die allgemeinen Fragen nach dem Lernziel, also was die SchülerInnen aus der Spieltheorie lernen, ausreichend reflektiert und positiv beantwortet werden, bevor ein Unterrichtseinsatz erfolgen kann. Das vorrangige Ziel des Mathematikunterrichtes muss es bleiben den SchülerInnen ein gutes Abschneiden bei der Zentralmatura zu ermöglichen, weshalb die Grundkompetenzen und deren Vernetzung oberste Priorität besitzen.
Zum Schluss kann man sagen, dass die Spieltheorie sehr wohl im Unterricht eingesetzt werden kann. Sie erfordert nur wenige mathematische Voraussetzungen und kann dank ihres intuitiven Zuganges als Ergänzung in wenigen Stunden erarbeitet werden. Wichtig ist natürlich immer, dass die Voraussetzungen, welche die jeweiligen SchülerInnen mitbringen, genauestens geprüft werden.

4.4. Beispiele für den Unterrichtseinsatz

4.4.1. Guessing Game – erste spieltheoretische Elemente

Beispiel 10: Guessing Game

Es können beliebig viele SpielerInnen i ($i \geq 2$) teilnehmen. Jede Person wählt eine natürliche Zahl zwischen 2 und 100. Die TeilnehmerIn, welche am nächsten an $\frac{2}{3}$ des Mittelwertes aller gewählten Zahlen ist, hat gewonnen.

„The Guessing Game" ist ein Spiel von Christoph ABLEITINGER und Petra HAUER-TYPPELT welches in der Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 2012, publiziert wurde. Es eignet sich besonders gut als Einstieg in die Thematik der Spieltheorie, obwohl kein unmittelbarer Interessenskonflikt vorliegt. Das Spiel hat einen experimentellen Charakter und die gesamte Klasse kann am Unterrichtsgeschehen teilnehmen. Als Vorwissen bedarf das Spiel nur den Begriff des Mittelwertes. Dieser sollte den SchülerInnen schon aus der Unterstufe bekannt sein. ABLEITINGER und HAUER-TYPPELT legen auch eine leicht abgeänderte Spieldurchführung vor, in welcher die SpielerInnen zwei Runden spielen:

- In der ersten Runde müssen sie direkt nach der Erklärung des Spiels eine Zahl nennen und auf einen Zettel schreiben. Dann kommt die Auswertung.
- Vor der zweiten Runde bekommen die SchülerInnen die Möglichkeit über die Wahl ihrer Zahl nachzudenken und sich eine „Strategie" zurechtzulegen. Dann wird wieder eine Zahl auf einen Zettel notiert und es wird das Ergebnis ausgewertet.

Eine mathematische Lösung des Spieles würde folgendermaßen aussehen: wenn alle SpielerInnen 100 wählen, wären $\frac{2}{3}$ des Mittelwertes 67. Aus diesem Grund sollte niemand eine Zahl über 67 wählen. Wenn alle Beteiligten die Zahl 67 wählen, dann wären $\frac{2}{3}$ des Mittelwertes 45. Dieses Verfahren kann man fortsetzen, indem alle SpielerInnen immer die nächsten Zahlen der so entstehenden Folge $< 100, 67, 45, 30, 20, 13, 9, 6, 4, 3, 2 >$ wählen. Der logische

Schluss am Ende ist, dass alle TeilnehmerInnen die Zahl 2 wählen und alle gewinnen.

In der Praxis wird dies erwartungsgemäß nicht so ablaufen, aber das Beispiel stellt einen guten Einstieg in die Thematik vor und beinhaltet grundlegende Elemente der Spieltheorie. Es wird nach einer optimalen Wahl gesucht, es wird eine Spielstruktur analysiert und auch schon auf mögliche Züge der GegenspielerInnen Bezug genommen.[108]

4.4.2. Kalter Krieg – ein intuitiver Zugang

Beispiel 11: Kalter Krieg

Die USA und die UdSSR befanden sich in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts im Kalten Krieg. Die Länder hatten die Wahl ihr Nukleararsenal aufzurüsten oder abzurüsten. Die Nuklearwaffen aufzurüsten kostet viel Geld, weshalb es einen negativen Nutzen hat, solange das andere Land auch aufrüstet (-1). Der positive Nutzen einer Aufrüstung kommt erst dann zum Tragen, wenn das andere Land nicht aufrüstet und man diesem technologisch überlegen ist (+5). Dies hat natürlich negative Folgen für das Land, welches nicht aufgerüstet hat (-2). Wenn sich beide Staaten für Abrüsten entscheiden, können sie das Geld, welches nicht für die Nuklearwaffen verwendet wird in die Bildung, Forschung etc. stecken (+4). Welche Strategie würden sie einer Regierung eines der Länder empfehlen.

		USA	
		Aufrüsten	Abrüsten
UdSSR	Aufrüsten	-1 -1	-2 5
	Abrüsten	5 -2	4 4

Abb. 19: Kalter Krieg

108 ABLEITINGER, HAUER-TYPPELT, Spieltheorie im Unterricht. S. 1-2

Auch dieses Beispiel findet sich bei HAUER-TYPPELT und ABLEITINGER wieder und lässt sich sehr intuitiv lösen. Der Vorteil ist, dass es keinerlei Vorwissen benötigt. Das Hauptaugenmerk dieses Beispiels liegt in der Argumentation und in der Begründung, warum die Strategien nicht optimal bzw. nicht Beste-Antworten sind. Hier sei angemerkt, dass es nicht notwendig ist, mit den formalen Definitionen der Besten-Antwort zu arbeiten. Für die SchülerInnen ist es ausreichend, wenn sie selbst herausfinden, dass ein einseitiges Abweichen nicht zu einem besseren Ergebnis führt. Somit schaffen sich die Kinder eine eigene Definition des Nash-Gleichgewichtes. Eine intuitive Argumentation könnte folgendermaßen aussehen:

Wenn sich ein Land für Aufrüsten entscheidet und das andere Land für Abrüsten, so ist einer auf einen eventuellen Krieg besser vorbereitet als der andere. Ein Abrüsten würde beiden am meisten nützen, da das Geld in Infrastrukturprojekte, die Bildung und den Arbeitsmarkt investiert werden könnte. Wenn beide Länder eine Aufrüstung beschließen, ist nichts passiert, außer dass viel Geld verbraucht wurde. Niemand hat ein Druckmittel dem anderen Land gegenüber. Trotzdem liegt ein Nash-Gleichgewicht in der Strategie vor, dass beide Länder eine Aufrüstung beschließen, obwohl der Nutzen negativ ist. Ein einseitiges Abweichen von dieser Strategie könnte zu einem noch größeren negativen Nutzen führen, wenn das andere Land bei der Strategie der Aufrüstung bleibt.

Dieses Beispiel ähnelt dem Gefangenendilemma. Die maximale Auszahlung der Länder kann nicht erreicht werden, wenn die Länder auf ihren individuellen Nutzen beharren.

Durch die gewählte Thematik kann ein fächerübergreifender Unterricht Mathematik und Geschichte entstehen. Durch ähnliche Überlegung dauerte der Kalte Krieg 40 Jahre lang an. Nebenbei lassen sich die wirtschaftlichen Auswirkungen des ständigen Wettrüstens darstellen, da diese schlussendlich zum Niedergang der UdSSR geführt haben.[109]

[109] ABLEITINGER, HAUER- TYPPELT, Spieltheorie im Unterricht. S. 4-5

4.4.3. Chicken-Game – die gemischte Strategie

Beispiel 12: Chicken-Game

Das Chicken-Game ist eine Spielsituation, welche sich unter anderem auf den Spielfilm *„... denn sie wissen nicht, was sie tun"* aus dem Jahr 1955 mit James DEAN in der Hauptrolle, bezieht und eine Mutprobe als Interessenskonflikt zwischen Gewinnen und Verlieren darstellt. Auch Rudolf TASCHNER bedient sich dieser Situation in seinem Werk über die Spieltheorie.

Buzz und Jim lenken ihre Autos mit überhöhter Geschwindigkeit aufeinander zu. In absehbarer Zeit werden die zwei Autos kollidieren, wenn keiner der beiden ausweicht. Wer zuerst ausweicht, hat verloren und ist der Feigling.[110]

		Buzz	
		Weiterfahren ($s_{2,1}$)	Ausweichen ($s_{2,2}$)
Jim	Weiterfahren ($s_{1,1}$)	-2 -2	-1 1
	Ausweichen ($s_{1,2}$)	1 -1	0 0

Abb. 20: Chicken-Game

Die Vorkenntnisse für dieses Beispiel sind schon etwas höher als jene in den Beispielen davor. Lineare Gleichungssysteme sollten aufgestellt und gelöst werden können. Auch die relative Häufigkeit wird gebraucht, um dieses Beispiel zu lösen. Die SchülerInnen können auch hier durch Ausprobieren selbst zu dem Schluss kommen, dass es für keinen der beiden ein befriedigendes Endergebnis gibt. Wenn Jim ausweicht und Buzz weiterfährt, verliert Jim und umgekehrt. Wenn beide weiterfahren, verlieren sie beide. Unter Umständen sind die SchülerInnen der Meinung, dass beide davon profitieren, wenn sie auszuweichen, da sie kein Risiko eingehen etwas zu verlieren. Doch dann kann man die Gegenfrage stellen

110 TASCHNER, Die Mathematik des Daseins (München 2015) S.139-141

und zwar, ob man ausweichen würde, wenn man weiß, dass der andere sicher ausweicht. Dies führt zurück zur Besten-Antwort auf die Strategie des Gegners und bildet wieder einen intuitiven Zugang, welcher ohne formale Definitionen auskommt.

Wie wir anhand der Matrix erkennen können, gibt es hier zwei Nash-Gleichgewichte in σ_1^*=$((s_{2,1}), (s_{1,2}))$ und σ_2^*= $((s_{1,1}), (s_{2,2}))$. D.h., wir haben ein Gleichgewicht in gemischten Strategien. Wir benötigen demnach ein Mischverhältnis, mit dem Buzz und Jim ihre Strategien ausweichen bzw. weiterfahren spielen. Um diese zu ermitteln, betrachten wir die relative Häufigkeit, mit der Jim weiterfährt p und mit der er ausweicht $1-p$ (analog für Buzz mit q für weiterfahren und $1-q$ für ausweichen) wählt. Dies führt uns zu den linearen Gleichungen:

- Jim wählt Weiterfahren: $H_1(s_{11}, s_{2\,j}) = -2p + 1(1-p) = -3p + 1$
- Jim wählt Ausweichen: $H_1(s_{12}, s_{2\,j}) = -1p = -p$
- Buzz wählt Weiterfahren: $H_1(s_{21}, s_{1\,j}) = -2q + 1(1-q) = -3q + 1$
- Buzz wählt Ausweichen: $H_1(s_{22}, s_{1\,j}) = -1q = -q$ [111]

Durch Lösen des jeweiligen Gleichungssystems erhält man für Jim $p = \frac{1}{2}$ und für Buzz $q = \frac{1}{2}$. Die Geraden lassen sich auch grafisch lösen, wie in Abb. 21 für Jim zu sehen ist. D.h., wenn Jim mit einer Mischung von $p = \frac{1}{2}$ ausweicht bzw. weiterfährt, dann spielt er seine optimale Strategie und für Buzz gilt dasselbe. Also lautet das Nash- Gleichgewicht $s^* = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

Zum Abschluss des Beispiels kann das Ergebnis noch interpretiert werden. Was bedeutet es, eine Strategie mit einem Mischverhältnis von $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ zu spielen? Vergleichbar ist diese Situation mit einem Münzwurf von Jim vor dem Losfahren. Bei Kopf fährt er weiter, bei Zahl weicht er aus. Buzz wiederum tut es Jim gleich.

[111] Anm.: Die Notation der erwarteten Auszahlung muss nicht in den Unterricht übernommen werden. Besser ist es an dieser Stelle von einer Geraden mit der Form $y = kx + d$ zu sprechen, wobei $p = x$ ist und $y = H_i$ also die erwartete Auszahlung.

Wenn beide Kopf haben, haben beide Pech gehabt. Unter Umständen ist der Einwand eines beiderseitigen Ausweichens doch nicht so verkehrt. Dieses Ergebnis kann zum Anlass genommen werden über die Grenzen des Rationalitätsprinzips in der Spieltheorie zu reden. Hiermit bekommen die SchülerInnen einen Einblick in ein modernes Forschungsfeld der Mathematik und gleichzeitig ein zum Teil ungelöstes Problem der Spieltheorie präsentiert.

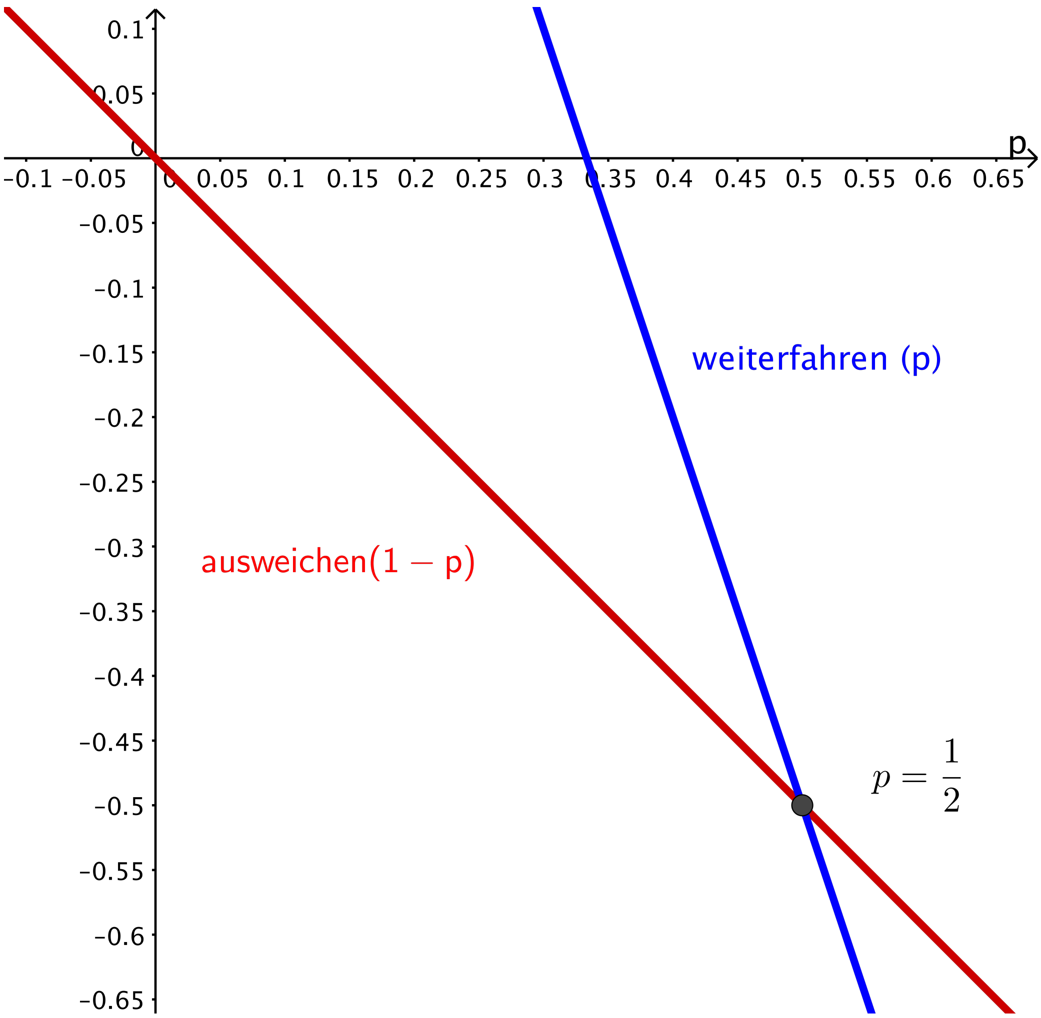

Abb. 21: Beste-Antwort-Geraden für Jim

4.4.4. Schwarzfahrerspiel – ein Vergleich des Minimax-Konzeptes und des Nash-Gleichgewichtes

Beispiel 13: Das Schwarzfahrerspiel

Das Schwarzfahrerspiel für einen Vergleich zweier entgegengesetzter Lösungskonzepte zu verwenden ist nichts Neues. Unter anderem wurde es von ABLEITINGER und HUMMENBERGER in Mathematic Didactis 33 publiziert und für den Unterrichtseinsatz aufbereitet.

Michael fährt jeden Tag mit der Straßenbahn. Jeden Tag entscheidet er, ob er sich ein Ticket kauft, oder schwarzfahrt. Der Schaffner Josef kontrolliert jeden Tag in der Straßenbahn von Michael. Er hat jeden Tag die Möglichkeit ihn zu kontrollieren oder nicht zu kontrollieren. Wenn Michael schwarzfahrt und erwischt wird, muss dieser 30 € Strafe zahlen, wird er nicht erwischt, hat er sich 3 € für das Ticket erspart. Wenn Michael das Ticket kauft und kontrolliert wird, denkt er sich: „nichts gewonnen und nichts verloren" (Auszahlung 0) und zahlt er, wird aber nicht kontrolliert, ärgert er sich über die verlorenen 3 €. Josef wiederum sieht seinen Job als einen Dienst an der Allgemeinheit. Jeder, der für die Straßenbahn zahlt, hat auch an ihrem weiteren Betrieb einen Anteil. Wenn ein/e SchwarzfahrerIn erwischt wird, ist dies gut für die Allgemeinheit (Auszahlung 10) und schlecht, wenn er/sie nicht erwischt wird (Auszahlung -6). Wenn die Fahrgäste die Tickets kaufen und kontrolliert werden, ist dies gut für alle (Auszahlung 1) und wenn sie die Tickets kaufen und eine Kontrolle nicht notwendig ist, sogar noch besser (Auszahlung 3). Die Auszahlungen des Spieles sind in Abb. 22 zu finden:[112]

[112] Christoph ABLEITINGER, Hans HUMMENBERGER, Nash-Gleichgewicht und Minimax-Lösung- Gegenüberstellung zweier Konzepte der Spieltheorie, In Matheamic Didactica 33 (2010) S. 59

		Josef	
		kontrollieren ($s_{2,1}$)	Nicht kontrollieren ($s_{2,2}$)
Michael	schwarzfahren ($s_{1,1}$)	10 -30	-6 3
	zahlen ($s_{1,2}$)	1 0	3 -3

Abb. 22: Das Schwarzfahrerspiel[113]

ABLEITINGER und HUMMENBERGER sind der Ansicht, dass ein intuitiver Zugang zu diesem Beispiel im Schulunterricht automatisch auf das Nash-Gleichgewicht oder das Minimax-Konzept hinausläuft. Aus ihren Erfahrungen gibt es SchülerInnen, die risikoscheu agieren und nicht schwarzfahren wollen (Minimax-Konzept) und welche ein Schwarzfahren von der Häufigkeit der Kontrolle durch den Schaffner (Nash-Gleichgewicht) abhängig machen.[114] An dieser Stelle wird nicht explizit auf die Eigenheiten der zwei Lösungsstrategien hingewiesen, diese findet man in Abschnitt 3.1.

Das Nash-Gleichgewicht

Es handelt sich wieder um ein Gleichgewicht in gemischten Strategien. Für Michael ist es besser zu zahlen, wenn kontrolliert wird und nicht zu zahlen, wenn nicht kontrolliert wird. Auf der anderen Seite ist es für Josef besser zu kontrollieren, wenn schwarzgefahren wird und nicht zu kontrollieren, wenn gezahlt würde.

ABLEITINGER und HUMMENBERGER sind der Auffassung, dass SchülerInnen die Frage nach einem Mischverhältnis der Strategien durch einen Wert für eine

[113] ABLEITINGER, HUMMENBERGER, Nash- Gleichgewicht und Minimax-Lösung (2010) S. 60

[114] ABLEITINGER, HUMMENBERGER, Nash- Gleichgewicht und Minimax-Lösung (2010) S. 62

durchschnittliche Auszahlung nähergebracht werden kann. Diese würden dann für Michael folgendermaßen aussehen:[115]

$$H(s_{11}, s_{2j}) = -30p + 3 \cdot (1-p) = -33p + 3$$
$$H(s_{12}, s_{2j}) = 0p - 3 \cdot (1-p) = 3p - 3$$
$$\Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

Michael weiß nun mit welcher Häufigkeit der Schaffner Josef kontrolliert bzw. nicht kontrolliert. Analog gehen wir für Josef vor, um zu erfahren, mit welcher Wahrscheinlichkeit Michael schwarzfährt.

$$H(s_{1j}, s_{21}) = 10q + 1 \cdot (1-q) = 9q + 1$$
$$H(s_{1j}, s_{22}) = -6q + 3 \cdot (1-q) = -9q + 3$$
$$\Rightarrow q = \frac{1}{9}$$

Das Nash- Gleichgewicht ist $s^* = \left(\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{9}, \frac{8}{9}\right)\right)$.

Das Minimax-Konzept

Durch das Minimax- Konzept lassen sich einerseits die unterschiedlichen Lösungszugänge erarbeiten, wie sie schon durch die SchülerInnenaussagen dargelegt wurden. Außerdem ist gut zu sehen, dass in diesen zwei Optimierungsprozessen unterschiedliche Parameter optimiert werden.[116]

Michael will in dieser Situation dem maximalen Verlust entgehen, also der Situation, dass er kontrolliert wird und schwarzfährt. Er agiert also etwas risikoscheuer und sieht sich an, wie er seine eigenen Strategien mischen muss, um den minimalen Gewinn auf jeden Fall zu bekommen, unabhängig davon, welche Strategie der Schaffner Josef wählt:

---

[115] ABLEITINGER, HUMMENBERGER, Nash- Gleichgewicht und Minimax-Lösung (2010) S. 65

[116] ABLEITINGER, HUMMENBERGER, Nash- Gleichgewicht und Minimax-Lösung (2010) S. 71

$$H(s_{1j}, s_{21}) = -30p$$
$$H(s_{1j}, s_{22}) = 3p - 3(1-p) = 6p - 3$$
$$\Rightarrow p = \frac{1}{12}$$

Michael sollte also mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{12}$ schwarzfahren und in 11 von 12 Fällen ein Ticket kaufen.

Auch Josef kann seinen minimalen Gewinn auf diese Weise berechnen:

$$H(s_{11}, s_{2j}) = 10q - 6 \cdot (1-q) = 16q - 6$$
$$H(s_{11}, s_{2j}) = q + 3 \cdot (1-q) = -2q + 3$$
$$\Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Wenn Josef also mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = \frac{1}{2}$ Michael kontrolliert, bekommt er mindestens den minimalen Gewinn.

Für dieses Beispiel bietet sich eine Gruppenarbeit geradezu an. Durch SchülerInnenpräsentationen können der gesamten Klasse die Unterschiede des jeweiligen Konzeptes nähergebracht werden und die Lehrkraft hat die Möglichkeit jederzeit coachend einzugreifen. Jedoch verlangt dieses Beispiel schon ein fortgeschrittenes Wissen über den Begriff der Strategie. Ohne diesen ist es den SchülerInnen nicht möglich die Unterschiede in den Konzepten zu verstehen. Eine weitere Variante für den Einsatz dieses Beispiels ist die Bearbeitung in Partnerarbeit. Die SchülerInnen sollen Michael und Josef Tipps geben, wie sie sich verhalten sollen. Zum Schluss werden die Ergebnisse verglichen. Aus mehreren Gruppen kommen mit Sicherheit diese zwei Konzepte hervor. Doch auch für diese Anwendung sollten bereits ähnliche Aufgaben behandelt worden oder Optimierungsaufgaben bekannt sein.

4.4.5. Das Koalitionsproblem – ein Extensivformspiel mit der Möglichkeit für politische Bildung im Mathematik Unterricht.

Beispiel 14: Das Koalitionsproblem

Die „Besten" und die „Großen" hätten nach der letzten Nationalratswahl keine absolute Mehrheit zustande gebracht, daher haben sie sich entschlossen in einer Koalition zu regieren. Die „Besten" wollen den Bau eines umstrittenen Tunnelprojektes durch den Nationalrat bringen. Der Tunnel würde den Verkehr durch die Hauptstadt ins Umland verlagern. Die Stadt würde entlastet werden, der Feinstaubgehalt sinken und die Lebensqualität steigen, so die Argumentation der „Besten". Der Tunnel würde allerdings unter einem Fluss errichtet werden, dessen Uferbereich Nationalparkschutzgebiet ist. Aus diesem Grund sind die „Großen" strikt gegen das Projekt und würden zum Schutz der Umwelt nicht zustimmen. Die „Besten" drohen aber damit aus der Koalition auszusteigen, wenn der Regierungspartner dem Bau des Tunnels nicht zustimmt. [117]

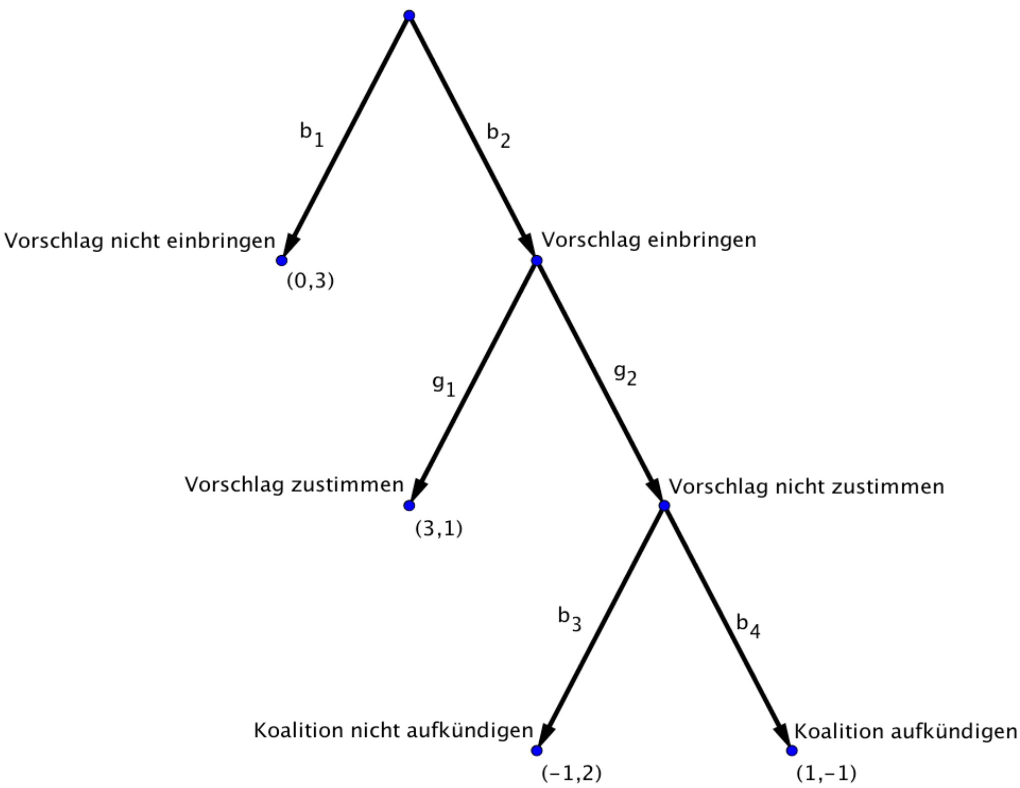

Abb. 23: Das Koalitionsproblem

[117] GRAF, Ist das Leben ein Spiel? (Wien 2011) S. 43

Dieses Spiel findet sich in zahlreichen Büchern in verschiedenen Variationen wieder. Das Grundprinzip ist ein Stackelberg-Spiel, welches wir schon in Abschnitt 3.2.2 kurz besprochen haben. Da es sich um ein Spiel mit einem teilspielperfekten Gleichgewicht handelt, müssen die SchülerInnen kaum mathematische Kenntnisse mitbringen. Das Gleichgewicht des Spiels lässt sich sogar ohne lineares Gleichungssystem finden. Lediglich die Begriffe der Auszahlung und eines Handlungsplanes sollten den SchülerInnen kurz nähergebracht werden. Dies muss aber nicht auf formaler Ebene geschehen. Die SchülerInnen sollen wissen, dass ein Handlungsplan mehrere Züge beinhaltet und die Auszahlung der Nutzen eines Spielausganges ist. Wichtig ist, dass die Kinder begreifen, dass ein Handlungsplan für das gesamte Spiel aufzustellen ist, auch für jene Entscheidungsknoten, die vielleicht nicht erreicht werden, wie z.B. (b_1, b_3, g_1).

Es finden sich hier zwei mögliche Aufgabenstellungen für den Unterricht:

1. Aufgabenstellung:

(a) Sie sind als Berater für die Partei der „Besten“ engagiert worden, um ihnen bei der Entscheidungsfindung in dieser Situation zu helfen. Welche Empfehlung geben Sie der Partei. Die erwarteten Auszahlungen können dem Spielbaum entnommen werden.

(b) Sie sind als Berater für die Partei der „Großen“ engagiert worden, um ihnen bei der Entscheidungsfindung in dieser Situation zu helfen. Welche Empfehlung geben Sie der Partei. Die erwarteten Auszahlungen können dem Spielbaum entnommen werden.

2. Aufgabenstellung:

Sie sind in Österreich PolitikwissenschafterIn und die Journalisten eines großen landesweiten Fernsehsenders fragen Sie nach ihrer Prognose zum Ausgang des aktuellen Koalitionsstreits. Sie wissen über die Auszahlungen der Parteien Bescheid. Welche Prognose geben Sie dem Nachrichtenstudio. Der Handlungsplan und die Auszahlungen der Parteien sehen wie folgt aus:

- die „Großen“:
    - Vorschlag zustimmen (g_1)
    - Vorschlag nicht zustimmen (g_2)
- die „Besten“:
    - Vorschlag nicht einbringen/ Koalition nicht aufkündigen (b_1, b_3)
    - Vorschlag nicht einbringen/ Koalition aufkündigen (b_1, b_4)
    - Vorschlag einbringen/ Koalition nicht aufkündigen (b_2, b_3)
    - Vorschlag einbringen/ Koalition aufkündigen (b_2, b_4)
- Auszahlungen kann man der Tabelle entnehmen:

Auszahlungen		die „Großen“	
		(g_1)	(g_2)
die „Besten“	(b_1, b_3)	$(0{,}3)$	$(0{,}3)$
	(b_1, b_4)	$(0{,}3)$	$(0{,}3)$
	(b_2, b_3)	$(3{,}1)$	$(-1{,}2)$
	(b_2, b_4)	$(3{,}1)$	$(1, -1)$

Die erste Aufgabenstellung beinhaltet bereits den fertigen Spielbaum, doch muss das Konzept des Handlungsplanes mithilfe des Spielbaumes erst durch Experimentieren verstanden werden. Das zweite Beispiel stellt den Spielbaum nicht bereit und dieser muss erst ausgearbeitet werden, auch der Handlungsplan muss erst experimentell erarbeitet werden. Doch hilft hier sicherlich die Tabelle, da sie die Auszahlungen mit den Strategien verknüpft und so den Handlungsplan herleitet.

Bei den Aufgabenstellungen handelt es sich nur um Vorschläge, welche jedoch beide ein selbstständiges Experimentieren der SchülerInnen ermöglichen. Die SchülerInnen werden sehr schnell auf die Idee kommen gewisse Spielausgänge auszuschließen, wie etwa (b_1, b_4, g_1) oder (b_2, b_4, g_1), da sie einfach keine plausiblen Ergebnisse liefern. Nach einer Untersuchungsphase sollten die Lösungsvorschläge der SchülerInnen besprochen werden. Am Ende sollte doch für einen jeden in der Klasse klar sein, warum die Empfehlung (b_2, b_4) für die Partei

der „Besten“ die optimale Wahl ist. Die Koalition aufzukündigen stellt eine Drohung dar, welche dazu führt, dass sie die einzige Strategie für die „Großen“ (g_1) ist. Zum Abschluss dieses Beispiels kann noch das Konzept des Nash-Gleichgewichtes besprochen werden. Die SchülerInnen sollen an dieser Stelle erkennen, dass die jeweiligen Entscheidungen der Parteien die Besten-Antworten sind und somit ein einseitiges Abweichen von ihrer Entscheidung zu keiner besseren Auszahlung mehr führen kann.
Das Koalitionsproblem bietet einen guten Zugang zu einem fächerübergreifenden Unterricht mit dem Fach Geschichte und Politische Bildung. Die Funktionen des Nationalrats, der Regierung und das Zustandekommen von Mehrheiten kann an dieser Stelle besprochen und reflektiert werden. Zudem finden sich im politischen Geschehen immer wieder neue Streitthemen, welche als Ausgangsproblem für dieses Spiel genommen werden können.[118]

4.5. Spieltheorie – Moral und Realität als Problemstellen

In diesem Kapitel wurde erörtert welche Grundlagen die Spieltheorie im didaktischen Lehrplan des Mathematikunterrichtes findet und Beispiele für den Unterrichtseinsatz vorgestellt. Unter anderem wurde darauf Bezug genommen, dass es sich bei Problemen der Spieltheorie meistens um Optimierungsaufgaben handelt. Wir haben schon gesehen wie sich Buzz und Jim im Chicken-Game verhalten können, wie sich Personen im Tausendfüßler-Spiel entgegen jeder Vernunft mit einem Euro begnügen, obwohl alle SpielerInnen mit 100€ aussteigen könnten und wie Gefangene entscheiden 4 Jahre in das Gefängnis gehen, als 1 Jahr. Die spieltheoretischen Gedankengänge, welche zu diesen Ergebnissen führten, beruhen alle auf dem Prinzip der Besten-Antwort. Hierbei handelt es sich um eine sehr egozentrische Strategie, welche die eigene Beste-Antwort auf die möglichen Strategien des/der GegenspielerIn ermittelt. Dies ist das Wesen der Spieltheorie, welche ein Gleichgewicht für alle beteiligten sucht. Doch gerade bei moralisch

[118] GRAF, Ist das Leben ein Spiel? (Wien 2011) S. 96-97

fragwürdigeren Beispielen, ist es auch wichtig die moralische Ebene anzusprechen, denn in den allgemeinen Bildungszielen heißt es wörtlich:

> *„[...] Leben in einer menschenwürdigen Zukunft hat der Unterricht mit einer auf ausreichende Information und Wissen aufbauenden Auseinandersetzung mit ethischen und moralischen Werten und der religiösen Dimension des Lebens zu begegnen. „*[119]

Aus diesem Grund sollte bei manchen der vorgestellten Beispiele auf eine moralische Ebene eingegangen werden. Entscheidungen sollten nach KANT nicht strategisch für das eigene Wohl motiviert sein, sondern wie er in seinem kategorischen Imperativ niederschrieb: *„Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.“*[120] Wenn wir diesen Ansatz auf das Tausendfüßler-Spiel verwenden, wäre es nicht ratsam das Spiel vorzeitig zu beenden, da wir wollen, dass unser Handeln zu einem besseren beiträgt. Ebenso können wir im Schwarzfahrerspiel argumentieren. Wenn Michael sich entschließt schwarz zu fahren, würde er die anderen Personen, welche ihr Ticket gekauft haben, ausbeuten, da er nicht für die Erhaltung und den Betrieb der öffentlichen Verkehrsmittel aufkommt.

Ähnlich verhält es sich beim Chicken-Game in dem Buzz und Jim mit ihren Autos aufeinander zusteuern. In diesem Spiel kann es keine zwei Sieger geben, aber zwei Verlierer. SchülerInnen könnten einwenden, warum man dieses Spiel mitspielen muss. WATZLAWICK würde ein „nicht spielen“, als eine Lösung zweiter Ordnung beschreiben. Demnach gibt es keinen „richtigen“ Lösungsversuch. Das Problem besteht weiterhin trotz der Bemühungen es zu beseitigen. Diese Spiele ohne Ende haben nach WATZLAWICK keine Lösung oder es existiert überhaupt kein Problem. In beiden Fällen wird eine Lösung utopisch.[121]

Warum findet die Spieltheorie trotzdem eine Lösung in Form eines Gleichgewichtes? Darin liegen zugleich ihre Stärken und Schwächen. Zum einen vermag es die Spieltheorie mithilfe von messbaren Größen – dem Nutzen welchen wir einem Spielausgang zuordnen – ein Gleichgewicht zu finden. Zum anderen

---

[119] Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, Jahrgang 2016, Ausgegeben am 9. August 2016. Teil II, 219 Verordnung. Allgemeines Bildungsziel S. 3

[120] Immanuel KANT, Grundlegung zur Metaphysik der Sitten (1785, 1786) BA 52

[121] Paul WATZLAWICK, Lösungen. Zur Theorie und Praxis Menschlichen Wandels (Bern 2008) S. 58-59, S.108

müssen alle Gleichgewichte, welche gefunden werden, auf ihren moralischen Wert hin überprüft werden. Lawrence KOHLBERG beschreibt in seinem Stufenmodell der Moralentwicklung, wie sich das moralische Urteilsvermögen vom Kind bis zum Erwachsenen entwickelt. Die nächst höhere Stufe der Moral kann immer nur erreicht werden, wenn die vorangegangene Stufe abgeschlossen ist. Es können keine Stufen übersprungen werden. Mit zunehmender Höhe der Stufen, werden diese immer weniger Egozentrisch. Nach diesem Modell wäre ein Mensch der ein Kosten-Nutzen-Prinzip als oberstes Kredo seiner Moral ansieht erst auf der 2.Stufe.[122]

Das Problem der Spieltheorie besteht darin, dass nicht die gesamte Realität durch sie beschrieben werden kann. Eine Entscheidungssituation, welche durch spieltheoretisches Modell beschrieben wird, ist immer nur eine Abstraktion der Wirklichkeit. Aus diesem Grund liegt es an den Lehrkräften und den SchülerInnen die Ergebnisse, welche uns das Modell liefert, zu interpretieren und auch auf ihre moralischen Wert hin zu überprüfen.

[122] Arnold LOHAUS, Marc VIERHAUS, Entwicklungspsychologie des Kindes und Jugendalters für Bachelor (Heidelberg 2013) S.220-221

5. Schlussbetrachtung

Der vorgestellte Bereich der Spieltheorie ist bei Weitem nicht vollständig. Es ist nur ein kleiner Teil eines sich ständig weiterentwickelnden und modernen Forschungsfeldes der Mathematik. Die Spieltheorie hat in den letzten Jahrzehnten einen Siegeszug unternommen. Sie ist in der Wirtschaft, der Politik, der Biologie und vielem mehr zu finden. Die Spieltheorie beschreibt unsere Umwelt auf eine Weise, wie wir sie vorher noch nicht gesehen haben und ist in vielen Bereichen unseres Lebens gang und gäbe. Somit müssen wir uns die Frage stellen: *Ist der Unterricht bereit für die Spieltheorie oder ist er es nicht?*

Dieses Spiel ist in reinen Strategien nicht zu beantworten. Wie so oft im Schulalltag ist eine gemischte Strategie die richtige Wahl. Es wurde in vielen Beispielen gezeigt, dass die Spieltheorie einen Beitrag zu einem modernen und lebendigen Mathematikunterricht leisten kann. Sie ermöglicht es, weit weg von Formalismen, einen intuitiven Zugang zu gewährleisten und bringt die Mathematik zu den Alltagsproblemen der SchülerInnen. Doch sollte die Spieltheorie nicht als Allheilmittel für einen modernen differenzierenden Unterricht betrachtet werden. Sie kann, soll aber nicht um jeden Preis, in den Unterricht integriert werden. Vielmehr handelt es sich um einen alternativen Zugang zu mathematischen Sachverhalten, wie in Abschnitt 4. gezeigt wurde. Sie erfüllt viele Anforderungen des Lehrplans und auch die Vorkenntnisse der SchülerInnen bilden keine unüberwindbare Hürde. Zum Teil lassen sich manche Spielsituationen sogar vollkommen ohne mathematische Berechnungen lösen, wie in Abschnitt 4.4 bei einigen Beispielen zu sehen war. Diese haben auch gezeigt, dass die Spieltheorie einen fächerübergreifenden Unterricht ermöglicht, um viele Aspekte eines Sachverhaltes untersuchen zu können. So haben wir Beispiele aus Politik, Geschichte, Wirtschaft und dem Umfeld der Kinder kennengelernt. Ebenfalls lassen sich Verbindungen zur Psychologie und Philosophie herstellen. Das Gefangenendilemma sowie das Tausendfüßler-Spiel bieten hier gute Möglichkeiten über die Grenzen der Spieltheorie zu sprechen. Viele Spielsituationen lassen sich auch leicht nachstellen und geben so großen Raum für Experimente, welche die SchülerInnen selbst durchspielen können. Ein großes potenzial der Spieltheorie liegt sicherlich im Wahlpflichtfach Mathematik sowie als Thema für eine vorwissenschaftliche Arbeit. Die interessierten SchülerInnen können in diesem Rahmen weiter in die Thematik eindringen und eine große mathematische Theorie durch Beispiele nähergebracht bekommen.

Eingangs wurde erwähnt, dass diese Diplomarbeit eine Brücke bauen soll. Eine Brücke zwischen der Spieltheorie und dem Mathematikunterricht. Eine Brücke vom Experten zum Laien. Es liegt an den LeserInnen und den Lehrkräften diese Brücke zu überschreiten. Die Spieltheorie kann dabei helfen den Unterricht eine Spur lebendiger zu gestalten. Sie hilft dabei die Mathematik als eine moderne Wissenschaft zu sehen. Jetzt liegt es an den Lehrkräften ihr Nash-Gleichgewicht für die Spieltheorie im Mathematikunterricht zu finden.

6. Anhang

6.1. Literaturverzeichnis

6.1.1. Monographien

Florian BARTHOLOMAE, Marcus WIENS, Spieltheorie. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch (Wiesbaden 2016)

Bärbel BARZEL, Andreas BÜCHTER, Timo LEUDERS, Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II (Berlin 2015[8])

Joachim BEHNKE, Entscheidung- und Spieltheorie (Baden-Baden 2013)

Siegfried K. BERNINGHAUS, Karl- Martin EHRHART, Werner GÜTH, Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie (Berlin 2010[3])

Jörg BEWERSDORFF, Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel- Methoden, Ergebnisse und Grenzen (Wiesbaden 2012)

Rita BORROMEO FERRI, Gilbert GREEFRATH, Gabrielle KAISER (Hrsg.), Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe (Wiesbaden 2013)

Manuel GRAF, Ist das Leben ein Spiel?. Spieltheorie für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II mit besonderer Berücksichtigung der extensiven Spielform (Wien 2011)

Werner GÜTH, Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele (Berlin/Heidelberg 1992)

Manfred J. HOLLER, Gerhard ILLING, Einführung in die Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2003[5])

Immanuel KANT, Grundlegung zur Metaphysik der Sitten (1785, 1786)

Arnold LOHAUS, Marc VIERHAUS, Entwicklungspsychologie des Kindes und Jugendalters für Bachelor (Heidelberg 2013)

Walter SCHLEE, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004)

Rudolf TASCHNER, Die Mathematik des Daseins. Eine kurze Geschichte der Spieltheorie (München 2015)

Paul WATZLAWICK, Lösungen. Zur Theorie und Praxis Menschlichen Wandels (Bern 2008)

Stefan WINTER, Grundzüge der Spieltheorie. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das (Selbst-) Studium (Berlin/Heidelberg 2015)

Harald WIESE, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002)

6.1.2. Artikel

Christoph ABLEITINGER, Petra HAUER-TYPPELT, Spieltheorie im Unterricht. Kann es das Spielen?, In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 40 (2007), Online unter: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2007%20Band%2040/VortragAbleitingerHauerTyppelt.pdf (Zugriff am 22.1.2017)

Christoph ABLEITINGER, Hans HUMMENBERGER, Nash-Gleichgewicht und Minimax-Lösung. Gegenüberstellung zweier Konzepte der Spieltheorie, In Mathematik Didactica 33 (2010) S. 58-78

Hans HUMENBERGER, Mathematische Aktivitäten rund um die Leonardobrücke, In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 45 (2012) S: 67-86, online unter: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2012%20Band%2045/VortragHumenberger.pdf (Zugriff am 22.1.2017)

Hans HUMMENBERGER, Optimieren im Mathematikunterricht, In: Praxis der Mathematik, Heft 3 (1998) S. 101-108

6.1.3. Lehrpläne

Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, Jahrgang 2016, Ausgegeben am 9. August 2016. Teil II, 219 Verordnung. Lehrplan Mathematik S. 67- 74

Bundesministerium für Bildung, Lehrpläne, Zur Vertiefung und Erweiterung des Bildungsinhaltes von Pflichtgegenständen. Mathematik, online unter: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_29_11884.pdf?5i84ll (Zugriff am 22.1.2017)

6.2. Definitionsverzeichnis

6.3. Abbildungsverzeichnis

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir. Die Abbildungen dieser Arbeit wurden von mir selbst mithilfe der Software GeoGebra bzw. dem online frei zugänglichen Diagrammzeichentool Draw (https://www.draw.io/) erstellt.

6.4. Beispielverzeichnis