DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Handlungsorientierte Unterrichtsmethoden und Kapiteleinstiege unter Berücksichtigung der Prozess-Objekt-Dualität

Aufarbeitung anhand der Differentialrechnung

verfasst von / submitted by

Felix Woltron

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 482
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Bewegung und Sport
Betreut von / Supervisor:	Univ. Doz. Dr. Franz Embacher

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, Mai 2017.

Zusammenfassung

Die Vermittlung von langfristig verfügbaren und flexibel anwendbaren mathematischen Konzepten der Differentialrechnung im schulischen Kontext setzt eine grundlegende didaktische Analyse geeigneter Theorien bezüglich der Wissensvermittlung, der jeweiligen Inhalte und der Methodik voraus. Eine solche Analyse wird im Rahmen dieser Diplomarbeit vollzogen, um im Anschluss geeignete handlungsorientierte Planungen zu Kapiteleinstiegen der Differentialrechnung erstellen zu können.

Das erste Kapitel behandelt die gegenseitige Abhängigkeit von Wissensformen. Hierfür werden mehrere diesbezügliche Theorien, vor allem jene der APOS-Theorie, in der sogenannten Prozess-Objekt-Dualität verknüpft, welche das rein prozedurale, algorithmische Wissen als Voraussetzung für das statische, konzeptuelle sehen. Zusätzlich sehen sie die letztere Wissensform als Grundlage für neue algorithmische Vorgänge – eine aufeinander aufbauende Spirale von sogenannten Aktionen und Objekten entsteht.

Das zweite Kapitel widmet sich der Analyse diverser Methoden hinsichtlich ihrer Kompatibilität bezüglich der erarbeiteten Theorien und der Handlungsorientierung. Mithilfe einer grundlegenden und detaillierteren Analyse, welche sich auf zuvor entwickelte, für das Ziel dieser Diplomarbeit als sinnvoll erachtete Kriterien stützt, wurden geeignete Methoden für die im vierten Kapitel vorgestellte Unterrichtsplanung festgelegt.

Da der Schwerpunkt der Umsetzung der theoretischen Grundlage auf der Planung von Kapiteleinstiegen liegt, werden diese im dritten Kapitel analysiert. Zusätzlich dient dieses Kapitel der theoretischen Aufarbeitung der Überprüfung des zuvor festgelegten Zieles – der Entwicklung von mathematischen Konzepten.

Der letzte Teil diese Diplomarbeit widmet sich der Analyse und der Diskussion verschiedener Zugänge und Grundvorstellungen der Differentialrechnung, welche anschließend unter Berücksichtigung der Ergebnisse der vorhergegangenen Kapitel zu drei Kapiteleinstiegen von Unterkapiteln der Differentialrechnung verbunden werden.

Die daraus resultierenden Planungen lassen erkennen, dass die Umsetzung des Erwerbs von langfristig verfügbaren und flexibel anwendbaren mathematischen Konzepten viel Engagement und vor allem Zeit benötigt. Es bedarf der passenden Auswahl von Methoden, der genauen Analyse des Inhaltes, Kriterien für die Festlegung der aktuell erreichten mentalen Ebene der APOS-Theorie seitens der SchülerInnen und geeignete Aufgabenstellungen, um den Lernenden den Übergang in eine höhere Ebene überhaupt zu ermöglichen.

Abstract

Teaching long-term available and flexible exercisable mathematical concepts of differential calculus in school context requires a basic didactical analysis of adequate theories concerning the transfer of knowledge, the content and the methodology. This will be given within this Diploma Thesis. The last chapter includes the development of three activity-oriented subchapter-introductions related to differential calculus.

The first chapter contains the mutual dependency of contrary types of knowledge. Therefore, several theories, especially the APOS-Theory, will be connected to the so-called Process-Object-Duality which understands pure procedural, algorithmic knowledge as a requirement for a static and conceptual one. Furthermore, the conceptual knowledge can be seen as the basis for new algorithms – a constructive helix of so-called Actions and Objects develops.

The following chapter is concerned with the analysis of diverse methods in consideration of the aforementioned theories and their activity-orientation. Due to a basic and detailed analysis based on the previously developed criteria, appropriate methods for subchapter-introductions could be defined.

The third chapter provides the main part of the implementation of the theoretical basis – the subchapter-introduction and the possibilities to control the development of mathematical concepts.

The last part of this Diploma Thesis sheds light on the analysis and the discussion of diverse approaches and basic ideas concerning differential calculus. The combination of these basic ideas with the results of the former chapters gives rise to three subchapter-introductions which should provide the optimal prerequisites to develop mathematical concepts.

The resulting subchapter-introductions show that the implementation of the acquisition of long-term available and flexible exercisable mathematical concepts of differential calculus in school context needs a lot of dedication and time. Besides the selection of appropriate methods, the accurate analysis of the content, and the definition of criteria for the currently reached level regarding the APOS-Theory, the selection of right tasks is indispensable to enable the students to reach a higher level.

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei meinem Betreuer Franz Embacher für seine konstruktive Kritik und seine Ideen bedanken, welche meine Vorstellungen und Ausarbeitungen in eine angemessene und sinnvolle Form gebracht haben. Zusätzlich möchte ich mich vor allem für die anschließenden Gespräche bezüglich des momentanen Standes der mathematischen Fachdidaktik bedanken, welche meine Diplomarbeit stark beeinflusst haben.

Der größte Dank gilt meiner Familie, wobei ich mich speziell bei meinen Eltern für die jahrelange Unterstützung in allen meinen Vorstellungen und Zielen, und bei meiner Großmutter für ihre Vorbildwirkung bedanken möchte. Meiner Freundin Lisbeth möchte ich ebenfalls für ihre Geduld mit mir und für die von ihr ausgehende Motivation danken.

Bezüglich der Korrektur dieser Arbeit sei vor allem meinem Kollegen und Freund Johannes Waldherr gedankt.

Inhalt

1. Einleitung

Ein Kernthema der Oberstufenmathematik bildet die Differentialrechnung, welche eine unglaubliche Vielfalt an inner- wie auch außermathematischen Anwendungsmöglichkeiten besitzt. Sie verbindet vorhergegangene Inhalte und bildet gleichzeitig die Basis für spätere. Somit kann sie als ein Schlüsselelement der Oberstufenmathematik angesehen werden, welches sich dementsprechend im Rahmen diverser Maturaaufgabenstellungen niederschlägt. Man kann also davon ausgehen, dass das Wissen bezüglich dieses Themas nach bestandener Reifeprüfung noch längere Zeit vorhanden und vor allem sinnvoll einsetzbar sein sollte. Eine Untersuchung von Hanisch (1985), welche StudentInnen der Universität Wien befragte, deren Reifeprüfung nicht länger als fünf Jahre zurück lag, zeigte jedoch Gegenteiliges. Sie konnten sich nur noch schemenhaft an Formulierungen bzw. Rechenregeln erinnern. Manche gaben sogar an, dass sie mit diesem Thema nie etwas anfangen konnten (vgl. ebd.). Es scheint so, als wären vier bis fünf Jahre der Oberstufenmathematik in der gleichen Zeit nahezu aus dem Gedächtnis gelöscht worden.

Genau an diesem Punkt setzt diese Diplomarbeit an. Es werden geeignete Rahmenbedingungen der Unterrichtsplanung (theoretische Grundlage, Methodik, etc.) gesucht, mithilfe welcher ein grundlegendes Verständnis dieser Thematik in den SchülerInnen erzeugt werden kann, und welches zusätzlich langfristig verfügbar ist.

Ein möglicher Ansatzpunkt diesbezüglich sind Überlegungen hinsichtlich der zu vermittelnden grundlegenden Prinzipien der Mathematik. Hier stehen einander zwei Extrempositionen gegenüber. Einerseits die Vermittlung des reinen Handlungswissens, zum Beispiel der ausschließlichen rezeptartigen Problemlösung, und andererseits jene des rein theoretischen Hintergrundwissens der Rezepte. Ein langfristig verfügbares Verständnis der Mathematik kann jedoch nur dann erfolgen, wenn sowohl rein eingeübte, rezeptartige Berechnungen durchgeführt werden können, und gleichzeitig die ihnen zugrunde liegenden theoretischen Überlegungen bekannt sind. Dieser Wissensstatus ist natürlich nicht einfach zu erreichen, jedoch liefert die sogenannte Prozess-Objekt-Dualität, welche die gegenseitige Abhängigkeit von reiner Anwendung und Hintergrundwissen berücksichtigt, eine geeignete Möglichkeit, um Studienergebnissen wie jener von Hanisch (1985) in Zukunft vorzubeugen. Neben der erwähnten Theorie benötigt die Entwicklung von dauerhaft verfügbarem Wissen jedoch wesentlich mehr als eine rein theoretische Grundlage.

Die Erarbeitung einer umfassenden methodischen und didaktischen Aufarbeitung der Differentialrechnung unter Berücksichtigung der theoretischen Grundlage der Prozess-Objekt-Dualität ist somit der Kern dieser Diplomarbeit und wird in folgender wissenschaftlichen Fragestellung festgehalten:

Welche Bedingungen soll eine didaktische und methodische Aufarbeitung des Themengebiets der Differentialrechnung, basierend auf der Prozess-Objekt-Dualität erfüllen, um das erworbene Wissen möglichst langfristig und flexibel abruf- und vor allem anwendbar zu speichern?

2. Einführung in die Prozess-Objekt-Dualität

Das höchste Ziel jedes didaktischen und methodischen Vorgehens im Mathematikunterricht ist zweifelsfrei der Aufbau des altersgemäßen Verständnisses von mathematischen Konzepten. Um dieses Vorhaben umsetzen zu können, benötigt es wissenschaftlich fundierte Theorien, welche sich mit dieser Thematik beschäftigen.

Eine dieser Theorien, nämlich jene der Wissensstrukturierung, wird von Prediger, Barzel, Leuders und Hussmann (2011) näher beschrieben. Mathematisches Wissen ist gemäß dieser theoretischen Grundlage in ein konzeptuelles und ein prozedurales Wissen unterteilbar. Ersteres bezeichnet den richtigen Umgang mit Fakten, Vorstellungen, Zusammenhängen und Konzepten, und die Fähigkeit, Eigenschaften von Operatoren und Zahlen zu verstehen (vgl. ebd., S. 4). Das konzeptuelle Wissen gipfelt somit in mathematischen Definitionen, Sätzen und fachspezifischen Termini (vgl. Walzebug 2015, S. 94). Prozedurales Wissen hingegen wird im richtigen Umgang mit mathematischen Verfahren und Algorithmen ersichtlich (vgl. Prediger, Barzel, Leuders & Hussmann 2011, S.4). Diese unterschiedlichen Formen wirken zunächst gegensetzlich, jedoch benötigen sie einander für die Entwicklung eines mathematischen Verständnisses. Um dies zu verdeutlichen, werden rationale Zahlen als Beispiel herangezogen. In Bezug auf das prozedurale Wissen steht der Bruch stellvertretend für die Division des Zählers durch den Nenner bzw. für das Ergebnis dieser Division. Die konzeptuelle Betrachtungsweise hingegen lässt den Bruch als Paar ganzer Zahlen erscheinen (vgl. Sfard 1991, S.5). Der Bruch steht also nur für eine weitere Darstellungsmöglichkeit einer abbrechenden oder periodischen Dezimalzahl. Die Frage, welche dieser beiden Wissensformen zu bevorzugen ist, erübrigt sich, da beide für einen flexiblen Umgang mit rationalen Zahlen vonnöten sind. In gewissen Situationen wird die Rechnung, also das prozedurale Wissen, benötigt bzw. gefördert, in anderen das konzeptuelle. Zusätzlich geht das prozedurale Wissen laut der „APOS-Theorie“ (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Fuentes, Trigueros & Weller 2014), welche später genauer erklärt wird, dem konzeptuellen Verständnis voraus. Konzeptuelles und prozedurales Wissen sind zwar verschieden, jedoch herrscht eine sogenannte Dualität zwischen ihnen (vgl. Parzer 2015, S. 21). Sfard (1991) vertritt in ihrer „Theory of Reification“ dieselben, bisher genannten Grundideen. Jedoch bezeichnet sie das konzeptuelle als strukturelles Wissen. Grundlegend beschäftigt sich Sfard (1991) mit dem Übergang vom prozeduralen zum strukturellen Wissen, welcher als Reifikation bezeichnet wird und als „Verdinglichung“ verstanden werden kann. Dieser mentale Vorgang ermöglicht es, die bereits bekannten mathematischen Inhalte unter einem neuen Blickwinkel zu betrachten. Die Lernenden sind nach dieser Verdinglichung in der Lage, mathematische Inhalte als „Tätigheiten“, also als statische Strukturen, und nicht mehr nur als „Prozesse“, also

Operationen, zu verstehen (vgl. Parzer 2015, S. 55). Somit können allgemeine Eigenschaften von Objekten und Beziehungen zwischen ihren Vertretern untersucht werden (vgl. ebd.). Das Objekt löst sich von den ursprünglichen Prozessen und wird als eigenständige, statische Struktur erkannt, auf welcher wiederum Prozesse, jedoch auf höherer Ebene, durchgeführt werden können. Sfards (1991) Theorie besteht aus weiteren mentalen Vorgängen („interiorization“, „condensation“), welche der Reifikation voraus gehen, jedoch in diesem Kapitel nicht näher beschrieben werden. Um den Unterschied zwischen strukturellem und operationellem Wissen zu verdeutlichen, werden in der folgenden Tabelle mathematische Konzepte und ihre Darstellungen separat, bezüglich ihrer jeweiligen Sichtweise angegeben. Die Beispiele zu Funktionen sind zum Teil der universitären mathematischen Ausbildung zuzuordnen, zum Teil der schulischen (letzteres wird mittels kursiver Schrift dargestellt).

Tab. 1: Strukturelle und operationelle Beschreibungen mathematischer Konzepte

	Strukturell	**Operationell**
Funktion	Menge geordneter Paare	Rechenprozess oder wohldefinierte Methode, um von einem System (z.B. Definitionsbereich) in ein anderes (z.B. Wertebereich) zu gelangen (vgl. Skemp 1986, S.231)
	Eindeutige Zuordnung von Elementen einer Menge A zu Elementen einer Menge B	*Berechnung von Funktionswerten einzelner Argumente mittels Einsetzen in einen Funktionsterm*
	Kann als Graph, Term, und Wertetabelle verstanden werden	*Zeichnen des Graphen aus Werten einer Wertetabelle*
	Eigenschaften, wie z.B. die maximale Anzahl an Nullstellen, können ohne Berechnung genannt werden	*Nullstellen einer konkreten Funktion durch „Nullsetzen“ berechnen können, ohne genaue Vorstellungen über Nullstellen im Allgemeinen*

Symmetrie	Eigenschaft einer geometrischen Form	Abbildung (Transformation) einer geometrischen Form
Kreis	Die Linie, die sich durch alle Punkte gleicher Entfernung von einem bestimmten Punkt ergibt	[eine Kurve, die man durch] Rotation eines Zirkel um einen fixen Punkt [erhält]

Quelle: mod. n. Sfard, 1991, S. 5

Neben Sfard (1991) gibt es weitere Vertreter dieser Theorie (z.B. Dienes, Davis, Greeno, Gray & Tall).

Eine weitere Theorie, welche die Entwicklung des Verständnisses mathematischer Kontexten beschreibt, stammt von Vom Hofe (2003). Er führt bereits 1995 in seinem Buch „Grundvorstellungen mathematischer Inhalte“ Grundvorstellungen als entscheidende Faktoren für den Erwerb von mathematischem Verständnisen. Sie beziehen sich auf die vielseitigen, je nach Kontext unterschiedlichen Vorstellungen von mathematischen Begriffen. So können nach Malle (2004, S. 4 ff.) rationale Zahlen einerseits als Anteile eines Ganzen, als Vergleichsoperatoren, als Verhältnisoperatoren, als Quasikardinalzahlen oder auch als Quasiordinalzahlen gesehen werden. Welche dieser Grundvorstellungen aktiviert wird ist situationsabhängig - somit ist keine davon zu bevorzugen.

Ein Beispiel soll verdeutlichen, in welchem Fall nicht von einer solchen Aktivierung gesprochen werden kann.

Genauso stand vor kurzer Zeit in einer Tageszeitung, dass in Ostdeutschland jede zweite Mutter regelmäßig an Sonn- und Feiertagen arbeitet, während dies in Westdeutschland jede dritte tut. Die Überschrift der Meldung lautet: „Jede fünfte Mutter arbeitet auch Sonntag“'. Ist doch ganz einfach: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ *ergibt* $\frac{1}{5}$ *oder?* (Reiss, Hammer 2012, S.5)

Reiss & Hammer (ebd.) unterstellen der Autorin bzw. dem Autoren ein fehlendes prozedurales Wissen bezüglich der Addition von Brüchen. Ob diese Person die offensichtlich falsche Schlussfolgerung aus der falschen Addition rationaler Zahlen gezogen hat, oder ob diese Fehlvorstellung simpel durch die Rechnung „zwei Mütter plus drei Mütter ergibt fünf Mütter“ entstanden ist, ist nicht relevant. Das Hauptaugenmerk liegt in diesem Fall auf der Korrektur der Aussage durch den Aufbau von geeigneten Grundvorstellungen. Hätte sich die Autorin oder der Autor dieser Schlagzeile die Phrase „jede zweite Mutter“ mithilfe der symbolischen Darstellung $\frac{1}{2}$ vorstellen können, wäre ihr bzw. ihm anhand der daraus resultierenden ikonischen Darstellung dieses Objektes als Anteil eines Tortendiagramms sofort aufgefallen, dass die Hälfte und das Drittel wesentlich größer sein müssen als ein Fünftel. Eine weitere Möglichkeit der Fehlerbehebung wäre der Aufbau der Quasiordinalzahl-Grundvorstellung von rationalen Zahlen. Jede Zweite und jede Dritte muss eine größere Anzahl an Müttern beschreiben als jede Fünfte.

Die Theorie von Vom Hofe (2003) zeigt also, dass richtige Grundvorstellungen im Alltag hilfreich sein können. Zusätzlich zeigt sie wiederum den Zusammenhang von verschiedenen, jedoch einander bedingenden bzw. aufeinander aufbauenden mathematischen Vorstellungen und Zugängen. Ohne passende Vorstellungen (konzeptuelles bzw. strukturelles Wissen) wird die Durchführung von Operationen bzw. Algorithmen (prozedurales Wissen) erheblich erschwert. Beide Wissensformen bedingen einander.

All die bisher erwähnten Theorien dienen dem Aufbau eines Grundverständnisses der sogenannten Prozess-Objekt-Dualität. Um jedoch einen genaueren Einblick in diese Thematik zu erlangen, wird im folgenden Kapitel die „APOS-Theorie“ vorgestellt. Zusätzlich dient diese Theorie der Generierung von Kriterien für eine zielorientierte Methodik und Didaktik.

2.1. APOS-Theorie

Diese Theorie beschreibt die Art und Weise, wie mathematische Konzepte verinnerlicht werden (vgl. Parzer 2015, S. 57). „APOS“ ist ein Akronym und steht für „Action“, „Process“, „Object“ und „Schema“- zu Deutsch „Aktion“, „Prozess“, „Objekt“ und „Schemata“. Diese vier Begriffe spiegeln die Ebenen des Wissensstandes von mathematischen Inhalten wider. Bevor diese Ebenen und ihr Zusammenhang näher beschrieben werden, wird der Ursprung der „APOS-Theorie“, welcher in Piagets (1966) Theorie der reflexiven Abstraktion wurzelt, vorgestellt.

2.2. Piagets Theorien der kognitiven Entwicklung

Grundlegend beschäftigte sich Piaget (1896-1980) mit den Wechselwirkungen des Lernens zwischen dem Individuum und seiner Umwelt. Seine Erkenntnisse fasste er in der Stadientheorie der Denkentwicklung zusammen, welche die Grundlage für die Theorie der reflexiven Abstraktion darstellt (vgl. Reiss & Hammer 2012, S. 28).

Die zuvor erwähnte Wechselwirkung basiert auf drei Grundbegriffen:

1. Assimilation
2. Akkommodation
3. Äquilibration

Das Individuum versucht, neue Erfahrungen in sein vorhandenes Wissen so einzufügen, dass es mit der Welt im Gleichgewicht („Äquilibration") ist. Für die Umsetzung dieses Vorganges gibt es zwei Möglichkeiten. Einerseits können neue Erfahrungen in ein bereits vorhandenes, kognitives Schema eingefügt werden - man spricht dann von „Assimilation". Andererseits besteht die Möglichkeit der Akkommodation, falls der Prozess der Assimilation nicht möglich ist. „Akkommodation" beschreibt die Anpassung bereits vorhandener Schemata, bzw. die Kreation neuer, um somit ein Gleichgewicht herstellen zu können (vgl. ebd., S.28). Der Begriff der „Stadien" bezieht sich auf die unterschiedlichen, altersabhängigen Entwicklungsabschnitte, welche das Lernen beeinflussen. Die Theorie unterscheidet sensomotorische, präoperatorische, konkret-operatorische und formaloperatorische Stadien, welche stringent aufeinander aufbauend sind (vgl. ebd., S.2).

Um den Grundgedanken der Stadientheorie der Denkentwicklung (Piaget, 1972) auf eine mathematische Basis umzumünzen, wird im folgenden Abschnitt Piagets Theorie der reflexiven Abstraktion (1966) erläutert.

Laut Arnon et al. (2014, S. 6) beschreiben reflexive Abstraktionen den mentalen Mechanismus, bei welchem alle logisch-mathematischen Strukturen im Geiste des Individuums entwickelt werden. Zuerst muss sich das Individuum mit den mathematischen Inhalten auseinandersetzen, sie reflektieren, sich ihrer bewusst werden und Operationen, also Prozesse auf ihnen, oder mit ihnen ausführen. Anschließend können mehrere Prozesse zu Objekten einer höheren Stufe zusammengefasst und dort rekonstruiert bzw. reorganisiert werden (vgl. ebd.). Diese neuen Objekte dienen der Ausführung neuer Prozesse, welche wiederum zu Objekten höherer Stufe führen. Um dies zu verdeutlichen, folgt ein Beispiel von Arnon et al. (2014, S. 6):

Funktionen werden zuerst als Prozesse eingeführt, welche Elemente der Definitionsmenge in Elemente der Wertemenge verwandeln. Zunächst müssen Operationen, wie das Aufstellen einer Wertetabelle durch Einsetzen des Arguments in den Funktionsterm, stattfinden. Ist dieser Prozess verstanden worden, kann er mit anderen Prozessen (z.B. die Angabe der x-Koordinate eines Punktes bei bekanntem Funktionswert mit Hilfe eines Terms oder des Funktionsgraphs) zu einem Objekt verbunden werden. Diesen Vorgang nennt Sfard (1991) „Reification". Funktionen bekommen Eigenschaften, sind darstellbar und Prozesse höherer Ebene können auf sie angewandt werden. Die Funktion als Prozess geht also in ein Objekt über, mit welchem wiederum operiert werden kann.

Der Zusammenhang der Stadientheorie der Denkentwicklung und der reflexiven Abstraktion lässt sich anhand dieses Beispiels zeigen. Angenommen Funktionen werden bereits als Objekt erkannt, und es sollen nun erstmals neue Prozesse auf diese Strukturen angewandt werden. Ist dieser kognitive Schritt möglich, wurde also das vorhandene Schema um eine neue Erfahrung erweitert, so hat die Assimilation stattgefunden. Ist diese Anwendung des Prozesses auf das Objekt nicht möglich, könnte es neben anderen Bedingungen (dieser Schritt passiert nicht von alleine und bedarf der Motivation und des Engagements seitens des Individuums) an dem bisher vorhandenen Schema liegen, welches durch falsche Vorstellungen die Assimilation verhindert. Es bedarf einer Veränderung der bestehenden Grundvorstellungen bzw. der Kreation neuer. Man spricht von Akkommodation.

2.3. APOS-Theorie nach Dubinsky

Auf Grundlage der bereits erwähnten Theorien von Piaget (1966/1972) entwickelte Dubinsky (1983-1995) die sogenannte „APOS-Theorie“, welche von Arnon et al. (2014) weiterentwickelt wurde. Im folgenden Kapitel werden die einzelnen Begriffe des Akronyms („Aktion“, „Prozess“, „Objekt“, „Schemata“) und der Übergang zwischen ihnen genauer beschrieben. Diese Übergänge beruhen auf unterschiedlichen Arten der reflexiven Abstraktion, also auf unterschiedlichen mentalen Mechanismen (vgl. ebd., S. 18). Zu diesen zählen:

- Interiorization (Verinnerlichung)
- Coordination (Koordination)
- Reversal (Umkehrung)
- Encapsulation (Einkapselung)
- De-Encapsulation (Entkapselung)
- Thematization (Thematisierung)

Der Sinn der eben genannten Begriffe hinsichtlich der „APOS-Theorie“ wird im Laufe der folgenden Absätze erläutert. Um zu klären, welche dieser Abstraktionen zu welcher der 4 mentalen Strukturen („Aktion“, „Prozess“, „Objekt“, „Schemata“) führt, dient folgende Abbildung:

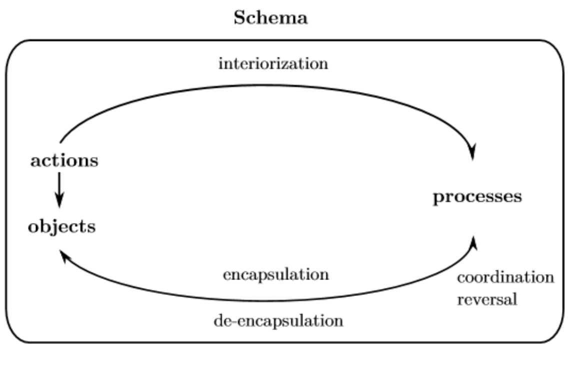


Abb. 1: Mentale Strukturen und Mechanismen für die Entwicklung mathematischen Wissens (mod. n. Arnon u.a. 2014, S. 18).

2.3.1. Aktion

Aktionen sind der Grundstein für das Erschaffen neuer mathematischer Konzepte. Unter Aktionen versteht die APOS-Theorie extern geleitete Umgestaltungen eines zuvor erlernten Objekts. (vgl. ebd., S. 19) Wichtig dabei ist, dass im Rahmen einer Aktion jeder Schritt extern geleitet ist, und kein Zwischenschritt ausgelassen wird. Zusätzlich ist ein rein mentaler Vollzug der Schritte nicht möglich (vgl. ebd.). Als Beispiel kann die Integralrechnung herangezogen werden. Aktionen werden benötigt, um eine Schätzung des bestimmten Integrals als Fläche unter der Kurve durchführen zu können. Dafür muss das Intervall in Subintervalle unterteilt werden, in welche wiederum Rechtecke eingezeichnet werden können. Die Fläche dieser Rechtecke wird berechnet und aufsummiert. All diese Operationen sind vorgegeben, es herrscht jedoch kein tieferes Verständnis der Integralrechnung (vgl. ebd., S.20).

Die Aktion ist zwar die unterste Stufe des Wissens in der APOS-Theorie, aber keineswegs vernachlässigbar. Das Konzept der Aktion ist unabdingbar für die folgenden Stufen (vgl. ebd., S.20).

Parzer (2015, S.66) untersuchte im Rahmen seiner Diplomarbeit Übungsbeispiele (Aufgabenpool des BIFIE zur schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik und Beispiele aus Schulbüchern) zum Thema Funktionen. Für diese Untersuchung entwickelte er Kriterien, um die Zuordnung in die einzelnen Stufen („Aktion“, „Prozess“, „Objekt“, „Schemata“) zu erleichtern. Diese Kriterien dienen in diesem Fall dem besseren Verständnis der Aktion.

- Die Aufgabenstellung enthält kleinschrittige Anweisungen, die den Lernenden durch die Aufgabe führen.
- Hinweise sind direkt formuliert und lassen unmittelbar auf eine bestimmte Handlung schließen.
- Die Aufgabenstellung führt in ein neues Konzept ein.

2.3.2. Prozess

Ein Prozess entsteht, wenn auf eine Aktion die reflexive Abstraktion der Verinnerlichung bzw. der Koordination wirkt. Aktionen werden öfters ausgeführt und verinnerlicht. Die Individuen haben Kontrolle über die Aufgabenstellung und können sie rein mental lösen. Dabei verändert sich die durchgeführte Operation jedoch nicht. Zusätzlich können Zwischenschritte ausgelassen oder umgekehrt werden (vgl. Arnon et al. 2014, S.20). Die Aufgabe der Koordination in Bezug auf Prozesse wird später erwähnt.

Als Beispiel für den Prozess dient wieder das bestimmte Integral. Die Aktion der Berechnung der Riemann-Summe ist zu einem Prozess verinnerlicht, wenn das Individuum erklären kann, wie dieselbe Operation für eine unbestimmt kleine Unterteilung des Intervalls vor sich gehen würde, ohne sie tatsächlich durchführen zu müssen.

Parzers (2015, S. 68) Kriterien für die Stufe des Prozesses lauten:

- Um die Aufgabe zu lösen, ist eine Folge von Handlungen notwendig; auf einzelne Schritte wird in der Aufgabenstellung nicht explizit hingewiesen.
- Die konkrete Handlungsanweisung ist durch den Kontext der Aufgabe versteckt und muss von Lernenden selbst gefunden werden.
- Der Lösungsalgorithmus muss durch richtige Interpretation des Kontextes selbst gewählt werden, unterschiedliche Lösungswege sind möglich.

2.3.3. Objekte

Objekte entstehen durch die sogenannte Einkapselung. Dabei werden Aktionen auf bereits bekannte Prozesse angewandt, was zu einem Sichtweisenwechsel führt. Dynamische Strukturen (Prozesse) werden dabei zu statischen (vgl. Arnon et al. 2014, S.21). Dubinsky (2005, S. 339) definiert Objekte auf universitären Niveau folgendermaßen:

If one becomes aware of the process as a totality, realizes that transformations can act on that totality and can actually construct such transformations (explicitly or in one's imagination), then we say the individual has encapsulated the process into a cognitive object. For the function concept, encapsulation allows one to apply transformations of functions such as forming a set of functions, defining arithmetic operations on such a set, equipping it with a topology, etc.

Ein Objekt bezeichnet also ein tieferes Verständnis für die vorliegende mathematische Thematik. Es wird nicht mehr bloß an Inhalten operiert, sondern diese Inhalte werden als statische Struktur verstanden, mithilfe welcher neue Operationen durchgeführt werden können. Es ist ersichtlich, dass laut der APOS-Theorie Aktionen, Prozesse und Objekte einander bedingen. Objekte sind nicht ohne Aktionen erreichbar. Gleichzeitig bedingen Aktionen vorab gefestigte Objekte. Es ist somit keine der Stufen zu bevorzugen.

Im Rahmen einer neuen mathematischen Bewegung der 1960er Jahre versuchte man, aufgrund des Sputnik-Schocks, den Mathematikunterricht grundlegend neu zu gestalten. Vertreter der „New Math“ (z.B. Jean Dieudonné und Georges Papy) versuchten Zusammenhänge und Strukturen vor Operationen zu stellen (vgl. Parzer 2015, S.27). Somit wurde bereits früh mit abstrakten Strukturen gearbeitet. Das Ergebnis war laut Simmons (1987, S. 33) alles andere als zufriedenstellend. Er beschreibt diese, damals neue Bewegung als „ill-fated educational experiment“. Laut APOS-Theorie würden die SchülerInnen zuerst das Einmaleins lernen, bevor das Kommutativgesetz überhaupt erwähnt werden würde. Im Rahmen der „New Math“ beherrschten viele Lernende zuerst Zweiteres bzw. nur Zweiteres. Es ist somit ersichtlich, dass eine reine Fokussierung auf konzeptuelles Wissen nicht zielführend ist. Gleichermaßen ist rein prozedurales Wissen nicht erstrebenswert, da die Mathematik nicht nur aus bloßen Anwendungen besteht. Beide Sichtweisen, wie man sie auch nennen mag, sind miteinander verbunden. Diese Verbindung, bzw. diese Dualität bezeichnet Sfard (1991) als die Prozess-Objekt-Dualität.

Um auf die APOS-Theorie, bzw. auf die Stufe des Objektes zurückzukommen, muss klar festgestellt werden, dass die gewünschte reflexive Abstraktion der Einkapselung schwer zu erreichen ist. Schwartz (1997, S. 166) spricht in Bezug auf die Einkapselung von einer Frage der Zeit und der Energie. Diese reflexive Abstraktion passiert nicht innerhalb einer Unterrichtseinheit, sie benötigt Zeit und vor allem Anstrengung seitens der Individuen. Ein weiteres Beispiel, welches jedoch nur indirekt mit der Einkapselung zu tun hat, liefert der renommierte Mathematiker und Entdecker des Orthogonalisierungsverfahrens Erhard Schmidt. Im Rahmen eines Gespräches wird er zu seinen häufigen Spaziergängen befragt. Seine Antwort lautet wie folgt: „Die Mathematik ist so schwer, daß (sic!) man immer nur ganz kurze Zeit mathematisch arbeiten kann.“ (Lowsky 2011, S.244) Effektives mathematisches Arbeiten ist also zeitlich begrenzt. Diese Art der Auseinandersetzung mit mathematischen Konzepten wird jedoch für die Einkapselung benötigt. Die Schlussfolgerung ist eine leichte. Es benötigt viele, dafür zeitlich ideal abgestimmte Übungseinheiten, um das Ziel zu erreichen.

Um den Kreis des Objektes zu schließen, folgt ein Beispiel für die stattgefundene Einkapselung anhand der Integralrechnung.

Die Fläche unter der Kurve für eine Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist der Grenzwert der Riemann-Summe. Es wird also eine Aktion (Grenzwert) auf den „Prozess“ der Riemann-Summe angewandt. Um diesen Grenzwert zu berechnen, bzw. seine Existenz zu prüfen, muss das Individuum den Prozess der Riemann Summe einkapseln (vgl. Arnon et al. 2014, S.22).

Parzers (2015, S. 69) Kriterien für die Zuordnung in die Stufe des Objektes lauten wie folgt (hier am Beispiel der Einkapselung der Funktion):

- Auf die Funktion werden Prozesse angewandt.
- Der Funktion werden Eigenschaften zugeordnet.
- Unterschiedliche Funktionen werden miteinander verglichen und kategorisiert.
- Auf Details der Funktion wird nicht eingegangen, sie wird als statisches Ganzes, losgelöst von Handlungen, betrachtet.

2.3.4. Reflexive Abstraktionen

Neben den bereits erläuterten Abstraktionen der Verinnerlichung (A $\longrightarrow$ P) und der Einkapselung (P $\longrightarrow$ O) folgt nun die Erklärung der übrigen, in Abb. 1 dargestellten Abstraktionsformen. Der Vorgang der Entkapselung (de-encapsulation) entspricht dem Übergang des Objektes zurück zum Prozess (vgl. Arnon et al. 2014, S. 22). Dies ist für einen flexiblen Umgang mit mathematischen Inhalten unumgänglich. Die Entkapselung verwandelt somit die statische Sichtweise des Objektes zurück zur dynamischen des Prozesses (vgl. ebd.). Koordination (coordination) baut auf der Entkapselung auf. Hier werden zwei Objekte entkapselt, ihre zugrunde liegenden Prozesse werden miteinander koordiniert, und ein neues Objekt entsteht wiederum durch ihre Einkapselung (vgl. ebd., S.23). Arnon et al. (ebd.) geben als Beispiel die Verknüpfung zweier Funktionen an, welche separat entkapselt werden müssen, um anschließend die gerade beschriebenen reflexiven Abstraktionen zu durchlaufen. Erst danach kann die Verknüpfung von Funktionen gekapselt werden. Erfolgt eine reine Umkehrung des Objektes zum Prozess, ohne neue Kombinationen durchzuführen, spricht man von der Umkehrung (reversal). Ein Zitat von Dubinsky (1991, S.118) soll die Abstraktion der Umkehrung verdeutlichen, die Wichtigkeit der Flexibilität der mathematischen Konzepte näherbringen und in die letzte Stufe der APOS-Theorie, der Schemata, überführen.

Another situation in which relative difficulty can be explained by the requirement of reversing a Process occurs in the development of children`s ability in arithmetic. According to Riley, Greeno and Heller (1983, p. 157), "Problems represented by sentences where the unknown is either the first (?+a=b) or second (a+?=c) number are more difficult than problems represented by equations where the result is the unknown (a+b=?)." The first two problem types involve a reversal of the Process, which, in the third type can be applied directly.

2.3.5. Schemata

Das Zitat von Dubinsky (1991, S. 118) zeigt, wie wichtig ein flexibler Umgang mit mathematischen Aufgabenstellungen ist. Je nach Fragestellung wird entweder eine Aktion, ein Prozess oder ein Objekt benötigt. All diese Stufen der APOS-Theorie und ihre Transformation ineinander, mittels reflexiver Abstraktionen, werden in einem Schema zusammengefasst. Je nach Anforderung können die passenden mentalen Konstruktionen abgerufen werden (vgl. Arnon et al. 2014, S. 24 f.).

2.4. Spiralprinzip der APOS-Theorie

Aus Aktionen werden, mittels Verinnerlichung, Prozesse, aus welchen wiederum mit Hilfe von Koordination bzw. Einkapselung Objekte werden. Der Vorgang des Lernens stoppt hier jedoch nicht. Aktionen höherer Ebenen basieren auf Objekten „tiefer" gelegener Objekte. Die mentale Konstruktion von mathematischem Wissen baut also auf bereits eingekapselten Inhalten auf und entwickelt davon ausgehend neue. (vgl. ebd., S.26) Dieses Prinzip kann nun beliebig fortgesetzt werden. Gleichermaßen funktioniert die Entkapselung höherer Ebenen. Vorausgegangene Prozesse und Aktionen gehen bei der Einkapselung nicht verloren und sind jederzeit abrufbar bzw. koordinieren sich mit neuen Prozessen (vgl. Dubinsky 1997, S. 98) Grosser (2016) fasst diese Vorstellung etwas vereinfacht in seiner Prozess-Objekt-Spirale (Abb. 2) zusammen.

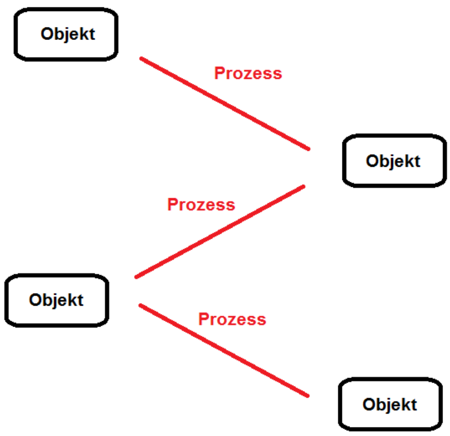


Abb. 2: Prozess-Objekt Spirale nach Grosser

Der amerikanische Entwicklungs- und Kognitionspyschologe Bruner (1976) greift in seinem Buch „The Process of Education" dieselbe Grundidee der Spirale auf. Nach seiner Theorie funktioniert Lernen erst dann ideal, wenn sich die Lernenden immer wieder mit denselben fundamentalen Dingen befassen, jedoch stets auf höheren Ebenen. Inhalte sollen somit entwicklungs- bzw. altersgerecht erlernt und zu späteren Zeitpunkten konkretisiert (koordiniert) werden (vgl. Lauter 1997, S. 52).

All die bisher genannten Theorien, von Piaget über Brunner bis zu Dubinsky, haben ein gemeinsames Ziel: Die Bildung langfristiger, flexibel verfügbarer mathematischer Konzepte. Allen ist die Dualität von Prozessen und Objekten gemein, obwohl die verwendeten Begriffe durchaus verschieden sind. Zusätzlich beschreiben sie alle dieselben, bereits des Öfteren erwähnten Vorteile der Prozess-Objekt-Dualität, welche Dienes (1965) treffend zusammenfasst.

Prädikate werden Subjekte für andere Prädikate, die ihrerseits wieder Subjekte für weitere Prädikate werden, und der Himmel ist die Grenze in diesem mathematischen Rennen. Menschen, die gut Prädikate zähmen und auf Subjekte reduzieren können, sind gute Mathematiker.

2.5. Kriterien für die folgenden Unterrichtmethoden und Kapiteleinstiege

Um die folgenden Kapitel zu handlungsorientierten Unterrichtsmethoden, Kapiteleinstiegen und Objektwerdung auf ihre Kompatibilität hinsichtlich der Prozess-Objekt-Dualität zu überprüfen, sind vorab Kriterien notwendig, welche sich aus den bisher erwähnten Theorien und Ansichten zusammensetzen. Nach der APOS-Theorie (Arnon et al. 2014) und dem Spiralprinzip von Brunner (1976) werden beim Erlernen neuer Inhalte bereits bekannte Objekte weiterentwickelt. Idealerweise werden zunächst extern gesteuerte Aufgabenstellungen angeboten, welche der Stufe der „Aktion" zu zuordnen sind (vgl. Arnon et al. 2014). Zusätzlich können, im Sinne der Differenzierung, bereits erste Prozesse angepeilt werden. Diese sind ohne externe Anleitungen durchzuführen und dienen deshalb bereits eher fortgeschrittenen SchülerInnen. Das bedeutet, dass die Verinnerlichung, also der Übergang von Aktionen zu Prozessen, bereits in Kapiteleinstiegen realisiert werden kann. Es sollte jedoch nicht das gemeinschaftliche Ziel sein, sondern lediglich eine Differenzierungsmaßnahme darstellen. Die Einkapselung, also die reflexive Abstraktion zwischen Prozessen und Objekten sollte nicht das Ziel einer einzelnen Einheit, sondern von mehreren sein. Zusätzlich ist es möglich, dass diese mentale Stufe nie erreicht wird, da sie Energie und Zeit seitens der SchülerInnen erfordert (vgl. Schwartz 1997, S. 166).

Weitere wichtige Eigenschaften, welche Unterrichtsmethoden und Kapiteleinstiege bezüglich der Prozess-Objekt-Dualität mitbringen sollten, sind nach Dörfler (1979) eine vielseitige Darstellung (z.B. in enaktiver, ikonischer und symbolischer Form) und nach Vom Hofe (2003) diverse, situationsabhängige Grundvorstellungen der Inhalte. Sfard und Linchevski (1994, S. 119 f.) geben folgendes Beispiel für diese Theorie an:

$$3 * (x + 5) + 1$$

Diese Symbolik kann als Rechenprozess, als Zahl oder als Funktionsterm gesehen werden. Zusätzlich kann die Sichtweise des Funktionsterms als Funktionsgraph dargestellt werden. Je nach Kontext sollten alle möglichen Sichtweisen und Darstellungen einsetzbar sein. Nur so ist ein zielführendes, flexibles Problemlösen möglich.

In Bezug auf Kapiteleinstiege sollten nach Malle (2007, S. 60) nicht fertige Endprodukte geliefert werden. Vielmehr sollte die historische Entwicklung dieser mathematischen Konzepte für die SchülerInnen nachvollziehbar sein.

Malle (ebd.) unterstreicht seine Meinung anhand eines Beispiels:

Komplexe Zahlen a+b·i werden in der Literatur manchmal als Zahlenpaare (a, b) eingeführt. Wenn man so vorgeht, setzt man den Lernenden das Endprodukt einer langen Entwicklung vor und verschüttet die Möglichkeit, diese Entwicklung nachzuvollziehen.

Ein weiteres, interessantes Kriterium für die Planung von Unterricht auf Basis der Prozess-Objekt-Dualität liefert Parzers (2015, S. 82 ff.) Untersuchung der Übungsaufgaben zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung des BIFIE. Sie ergab, dass vor allem innermathematische Fragestellungen das Entwickeln von mentalen, mathematischen Konzepten begünstigen (vgl. ebd.). Anwendungsaufgaben benötigen vermehrt rein prozedurales Wissen, das konzeptuelle bleibt dabei meist auf der Strecke.

Zusammengefasst und mit Kürzel versehen, wurden die Kriterien für folgende Unterrichtsmethoden und Kapiteleinstiege auf Grundlage der Prozess-Objekt-Dualität (POD) wie folgt gewählt:

- POD 1: Es wird auf Vorwissen aufgebaut.
- POD 2: Objekte sind das höhere Ziel - dieses kann aber nicht in wenigen Einheiten erreicht werden.
- POD 3: Aktionen sind bei Kapiteleinstiegen zu bevorzugen.
- POD 4: Prozesse dienen der Differenzierung.
- POD 5: Inhalte werden mithilfe vielseitiger Darstellungsmöglichkeiten präsentiert.
- POD 6: Innermathematische Fragestellungen sind bei der Einführung neuer mathematischer Kapitel zu bevorzugen.

3. Handlungsorientierte Unterrichtsmethoden

Die bereits erläuterte theoretische Grundlage zur Entwicklung von mathematischen Konzepten im schulischen Kontext benötigt für die praktische Umsetzung vor allem den passenden organisatorischen Rahmen. Dieser Rahmen lässt sich unter dem Begriff der Unterrichtsplanung zusammenfassen und beinhaltet neben dem Thema, dem Zeitmanagement und der Zielsetzung vor allem die gewählte Methode. Bevor jedoch in diesem Kapitel genauer auf den Begriff der „Methode" eingegangen wird, werden Bostelmanns (2010, S. 50) Phasen der Unterrichtsplanung aufgelistet. In seinem Konzept zur zentrischen Streckung mittels Pantographen entwickelt er folgenden Ablauf (Abb. 3) für die gelungene Konzipierung eines sogenannten „Lernprozesses", welcher, im Gegensatz zum „Lehrprozess", die SchülerInnen miteinbezieht, also Rückkopplungen zulassen sollte (vgl. ebd.).

Diese Art der Planung generiert gewisse Freiräume auf der SchülerInnenseite, welche jedoch im vorgegebenen Rahmen bleiben müssen, um das vorab festgelegte Ziel zu erreichen.

1. Phase: Problemfeld erkunden
   - Problemstellung entdecken
   - Vorstellungen entwickeln
2. Phase: Erkenntnisse absichern
   - Informationen auswerten
   - Lernprodukt diskutieren
3. Phase: Ergebnisse sichern und festigen
   - Lernzugewinn definieren
   - Sicher werden und üben

Abb. 3: Lernprozess aus SchülerInnensicht betrachten (mod. nach ebd.)

Bostelmanns (ebd.) „Lernprozess“ eignet sich ideal für Kapiteleinstiege. Zuerst muss der neue Inhalt entdeckt werden, bevor er abgesichert, also an das Fachwissen angepasst werden kann. Anschließend müssen die neuen Erkenntnisse geübt und gefestigt werden. Diese Phasen, vor allem die letzte, sollten laut APOS-Theorie mittels extern geleitenden Aufgabenstellungen (Aktionen) bzw. mit Prozessen umgesetzt werden, um die Entwicklung von mathematischen Konzepten, also von Objekten ideal unterstützen zu können. Die Definition des Lernzugewinns ist im Rahmen der Prozess-Objekt-Dualität eine unumgängliche Phase des Unterrichts, da erst neue Ebenen angestrebt werden können, wenn die vorhergegangenen erreicht wurden. Zusätzlich bedarf es eine Kontrolle der Umsetzung des vorab festgelegten Ziels - der Objektivierung mathematischer Inhalte.

Neben Bostelmanns (ebd.) Vorschlag zur Unterrichtsplanung, sollten stets Meyers (2004) zehn Merkmale guten Unterrichts berücksichtigt werden. Diese dienen jedoch eher der allgemeinen, pädagogischen Konzipierung des Unterrichts, und nicht speziell der mathematischen, methodischen Umsetzung. Das Merkmal „Methodenvielfalt“ wird speziell in den nächsten Kapiteln forciert und soll Kapiteleinstiege effizienter, aber auch unterhaltsamer und abwechslungsreicher für die SchülerInnen gestalten.

3.1. Definition

Der Begriff der „Methode“ besitzt mehrere Definitionen. Barzel et al. (2015, S. 21 f.) geben in ihrem Werk zur mathematischen Methodik folgende an:

Unter einer Methode versteht man im Allgemeinen ein planmäßiges, folgerichtiges Handeln, ein bestimmtes Verfahren, eine bestimmte Art und Weise der Durchführung - und zwar weniger die konkrete Durchführung als deren geistige, theoretische Grundlage.

Eine Methode ist somit ein geistiges Konstrukt, welches die praktische Durchführung vorab plant und stützt. Dieser Umstand wird mithilfe des Ursprungs des Begriffs „Methode“ („Méthodos“), welcher aus dem griechischen stammt, klarer. „Méthodos“ setzt sich aus den Wörtern „méta“ (zwischen, hinter, über), und hodós (Weg) zusammen (vgl. ebd., S.22). Die Methode beschreibt somit den dahinter, dazwischen und darüber liegenden Weg bei der Erreichung der Zielsetzung (vgl. ebd.). Sie ist jedoch nicht explizit für den eigentlichen Weg, also für die praktische Umsetzung, verantwortlich, sondern gibt lediglich die Rahmenbedingungen vor. Somit liegt das Hauptaugenmerk von Methoden auf der klaren Strukturierung des Unterrichts und der Entwicklung von sinnstiftender Kommunikation und individueller Förderung (vgl. ebd., S.10).

Barzel et al. (2015, S. 22 f.) definieren ihren Methodenbegriff mittels folgender Charakteristika noch genauer:

- Methoden haben allgemeinen Charakter und sind nicht an Inhalte oder Fächer gebunden.
- Methoden sind zielorientiert.
- Methoden sind strukturiert und geben somit Rahmenbedingungen und Organisationsformen vor.
- Methoden sind eng umrissene Handlungsformen (z.B. Gruppenpuzzle).
- Methoden geben Sozialformen vor (z.B. Teamarbeit).
- Zu Methoden zählen auch unterrichtsbegleitende Verfahren (z.B. das Lerntagebuch).

Die Vielzahl an Unterrichtsmethoden kann nach Uhlig (In Peterßen, 2000, S. 400) in folgende Grundformen der Lehr- und Lernmethoden gegliedert werden:

Tab. 2: Grundformen für Lehr- und Lernmethoden

LehrerInnenseite (Lehrmethode)	**SchülerInnenseite (Lernmethode)**	**Beispiel für Lehrtätigkeiten**
Darbietend	rezeptiv	Vortrag, Demonstration, Anschreiben/Anzeichnen
Anleitend	geleitet-produktiv	Gesprächsführung, Richtigstellung, Beispiel geben
Anregend	selbstständig-produktiv	Aufgabenstellung geben, Problem aufzeigen, Material bereitstellen

Quelle: mod. nach Uhlig, 2000, S. 400

Im Hinblick auf die Entwicklung von Kapiteleinstiegen sollten vor allem anleitende bzw. anregende Methoden ausgewählt werden. Diese unterstützen die aktive, teilweise selbstständige Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten. Die SchülerInnen müssen aktiv an der Problemstellung arbeiten, und nicht, wie im Rahmen von darbietenden Methoden, passiv der Lehrperson folgen. Um Verbindungen zur APOS-Theorie aufzustellen, bieten sich wiederum vor allem anleitende und anregende Methoden an. Diese sind aufgrund der externen Leitung („Aufgabenstellungen geben" zählt zur externen Leitung), der mentalen Ebene der Aktion zuzuordnen, auf welcher wiederum, mittels reflexiver Abstraktionen, mathematische Konzepte aufgebaut werden können.

3.2. Rahmenbedingungen für Unterrichtsmethoden

Wie bereits festgehalten wurde, sind Methoden zielorientiert. Die Mindestanforderungen des Unterrichts werden jedoch von den jeweiligen Lehrplänen festgelegt. Die Auswahl von Methoden hängt also davon ab, welche Kompetenzen bezüglich welcher Inhalte mit welchen Handlungsdimensionen und Komplexitätsbereichen seitens der SchülerInnen erreicht werden sollen. Die Bildungsstandards sind somit ein wichtiger Einflussfaktor auf die Auswahl von Methoden (vgl. Barzel et al., 2015, S. 34). Zusätzlich muss eine klare Unterscheidung zwischen langfristigen (makro), mittelfristigen (meso), und kurzfristigen (mikro) Zielen stattfinden. Mikroziele müssen stets Zwischenschritte auf der Entwicklung von Makrozielen (sogenannte Kompetenzen bzw. mathematische Konzepte) sein (vgl. ebd., S.27). Es bedarf somit einer langfristigen Zielsetzung, auf welche sich die mittelfristige und die kurzfristige beziehen. Dies muss im Rahmen der Methodenauswahl berücksichtigt werden. Zusätzlich sollte, unabhängig von der Wahl der Methode, stets das Systematisieren und Absichern von Wissen Platz im Rahmen der Planung finden. Nach Bostelmann (2010, Abb.3) entdecken die SchülerInnen in der ersten Phase des

Lernprozesses die Thematik selbstständig und entwickeln eigene Vorstellungen. Freudenthal (1983) unterstützt diese Didaktik des Übens und Erkundens, welche die SchülerInnen zum eigenständigen Nachempfinden anregt (vgl. Prediger, Barzel, Leuders & Hussmann, 2011, S. 2). Die problematische Komponente dieser Art der Methodik ist jedoch die Phase zwischen dem Erkunden und der anschließenden Übungsphase. Hier bedarf es einer Systematisierung und Sicherung von Wissen (vgl. ebd.). Unter der Systematisierung wird die Überführung der Ideen und Erfahrungen der SchülerInnen aus der Erkundungsphase in eine vernetzte, mit den existierenden Sätzen und Definitionen übereinstimmende Vorstellung verstanden (vgl. ebd.). Die Lernenden tragen also all ihre Erkenntnisse zusammen, welche in der Gruppe, unter der Leitung der Lehrperson, soweit besprochen und angepasst werden, bis sie mit den mathematischen Vorgaben (Sätze, Definitionen, Eigenschaften, etc.) kompatibel sind. Anschließend muss dieses nun inhaltlich richtige Wissen abgesichert, also langfristig verfügbar gemacht werden. Dieser Vorgang kann mit der Verschriftlichung der wichtigsten Wissenselemente, z.B. in ein Lerntagebuch, vollzogen werden. Hier ist auf ein hohes Aktivitätsniveau seitens der SchülerInnen zu achten, da die reine Kopie des Vorgegebenen noch lange kein Verständnis dafür hervorruft (vgl. ebd. S. 6). Das Systematisieren und Sichern erfüllt nach Prediger et al. (2011, S. 2) den Reflexions-, Vernetzungs- und den Dokumentationsbedarf. Ohne diese Vorgänge würden Erfahrungen nur kurz verfügbar, bruchstückhaft, also isoliert und teilweise falsch bzw. unvollständig vorhanden sein (vgl. ebd.). Die Entwicklung von mathematischen Konzepten auf dieser Basis würde sich als äußerst schwierig bzw. als unmöglich erweisen. Jede Methode sollte somit diese Vorgänge beinhalten.

3.3. Handlungsorientierte Unterrichtsmethoden

Parallel zu Uhligs Lehr- und Lernmethoden (Tab. 2) existiert eine weitere Kategorie der Unterrichtsmethoden - die handlungsorientierten Methoden. Das Ziel der sogenannten Handlungsorientierung kann mit einem einleitenden Zitat von Konfuzius (551-497 v. Chr., zit. n. Sauerborn & Brühne 2009, S.54) erläutert werden: „Erkläre mir und ich vergesse, zeige mir und ich erinnere. Lass es mich tun, und ich verstehe."

Mathematisches Verstehen erfolgt, wie bereits erwähnt, nicht von selbst. Es ist ein langandauernder, mit viel Mühe und Energie verbundener Prozess. Die SchülerInnen müssen sich selbstständig mit der Materie auseinandersetzen. Diese Selbstständigkeit wird jedoch oft im schulischen Alltag, aufgrund von Zeitmangel, durch darbietende Unterrichtsmethoden abgelöst, welche den Lernenden wenige bis keine aktiven Phasen ermöglichen. Es kommt, in Bezug auf Konfuzius' Zitat, zur reinen Erklärung, welche ein rasches Vergessen mit sich bringt.

Diesen darbietenden Methoden steht die Handlungsorientierung gegenüber. Ihr kommt aus lernpsychologischer Sicht eine besondere Bedeutung zu, da sich die SchülerInnen selbsttätig mit Inhalten auseinandersetzen und somit individuelle Interessen gefördert werden können (vgl. Kaiser, 2015, S. 32 f.). Handlungsorientierte Unterrichtsmethoden fordern also vor allem Selbsttätigkeit auf Seiten der SchülerInnen, aber auch Selbstständigkeit und Eigenverantwortung. Sie müssen bereit sein, die extern gegebene Aufgabenstellung nach bestem Wissen und Gewissen durchzuführen und den dadurch entstehenden zeitlichen Aufwand in Kauf zu nehmen. Es steht außer Frage, dass darbietende Methoden (z.B. gewisse Formen des Frontalunterrichts) mit wesentlich weniger SchülerInnenengagement umgesetzt werden können. Das Entwickeln von mathematischen Konzepten, also das höhere Ziel des pädagogischen Vorgehens im Mathematikunterricht, kann ohne intrinsische Motivation, also ohne Engagement der Lernenden, jedoch nicht erfüllt werden. Es muss also der Einfluss des eigenen Einsatzes von Energie und Zeit im Hinblick auf das Ziel explizit erläutert werden. Da einige handlungsorientierte Methoden als exotisch, also nicht als alltäglich zu bezeichnen sind, könnten sie eine Chance darstellen, um aus dem Unterrichtsalltag auszubrechen und selbst aktiv zu werden. Zusätzlich sollte den Lernenden vorab klar vermittelt werden, dass Konfuzius‘ Zitat zutrifft - das eigene Tun und Handeln bewirkt nachweislich die höchste Behaltensleistung. Außerdem dient das auf diese Weise Erlernte dem besseren, flexibleren Umgang in Bezug auf Problemstellungen und Anforderungen (vgl. Klippert, 2005, S. 30 ff.). Freudenthal (1973, S. 107) bekräftigt die Handlungsorientierung mittels eines Beispiels aus der Schwimmmethodik. Die Fertigkeit des Schwimmens kann nicht durch Passivität erlernt werden. Lernende, welche sich rein von der Theorie des Schwimmens berieseln lassen ohne sie selbstständig unter realen Bedingungen anzuwenden, werden scheitern. Natürlich scheitern auch jene anfangs, die es selbst versuchen. Durch die richtige Methodik seitens der Lehrperson besteht jedoch eine höhere Chance, die richtige Technik umzusetzen. Diejenigen, die es nie selbst versucht haben, können nur scheitern.

Nun stellt sich die Frage, inwieweit handlungsorientierte Methoden mit der zuvor beschriebenen Prozess-Objekt-Dualität, bzw. exakter mit der APOS-Theorie vereinbar sind. Laut der zuvor entwickelten Kriterien zur Prozess-Objekt-Dualität sind bei Kapiteleinstiegen Aktionen zu bevorzugen. Diese Aktionen fordern eine externe Anleitung jedes Schrittes, wobei kein Zwischenschritt ausgelassen werden soll (vgl. Arnon et. al., 2014, S.18). Dies schränkt zwar die Freiheiten der Lernenden ein, ermöglicht aber auch eine zielgerechte Umsetzung der Inhalte. Der entscheidende Unterschied zwischen den darbietenden und den handlungsorientierten Methoden unter der Berücksichtigung der Prozess-Objekt-Dualität ist die Selbsttätigkeit. Im Rahmen der erstgenannten Methoden folgt eine rein rezeptive Schüleraktivität (vgl. Peterßen, 2000, S.400). Sie nehmen Wissen passiv auf, die aktive Verarbeitung bleibt jedoch aus. Die zweite Methodengruppe generiert Wissen mithilfe handlungsorientierter Aufgabenstellungen. Die SchülerInnen werden zwar zu Handlungen aufgefordert, sie müssen sie jedoch selbstständig durchführen. Durch diese externe Anleitung und die daraus folgende aktive Tätigkeit kann Wissen methodisch aufgebaut werden. Zusätzlich kann das Abdriften vom eigentlichen Sinn und Zweck der Planung, wie es bei offenen Aufgabenstellungen möglich ist, verhindert werden. Sind Aktionen verinnerlicht worden, haben sich also bereits Prozesse entwickelt, ist wiederum der Freiheitsgrad der Aufgabenstellung zu erhöhen. Die Handlungsorientierung wird nicht eingeschränkt, sie wird lediglich angeleitet. Es kann somit festgehalten werden, dass die Prozess-Objekt-Dualität und handlungsorientierte Methoden kompatibel sind und einander sogar bereichern.

Zusammenfassend bedeutet die Handlungsorientierung eine aktive, selbsttätige Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten. Mittels dieser Aktivität seitens der Lernenden bleibt Wissen länger verfügbar, und ist flexibler einsetzbar. Brouwer (1881-1996) untermauert die Legitimation von handlungsorientierten Unterrichtsmethoden mit folgendem Zitat: „Mathematik ist mehr ein Tun als eine Lehre.“

Für die folgende Auswahl an Methoden, werden aus den bisherigen Erkenntnissen wiederum Kriterien für ziel- und handlungsorientierte Methoden angeführt:

- HOM 1: Eine klare Strukturierung des Unterrichts ist möglich.
- HOM 2: Die gewählte Methode gewährleistet die Umsetzung des vorab definierten Ziels.
- HOM 3: Die Methode gewährt den Lernenden ein maximales Maß an selbsttätiger Arbeitszeit und fordert Selbstständigkeit und Eigenverantwortung.
- HOM 4: Die Methode bietet ausreichend Platz für die Systematisierung und Absicherung.
- HOM 5: Die Methode unterstützt mittels nicht alltäglichen Organisationsrahmens und Sozialformen das Engagement der Lernenden.

3.4. Analyse ausgewählter Methoden

Barzel et al. (2015) geben in ihrem Buch zur Mathematik-Methodik 31 Methoden zur Unterrichtsgestaltung und Kriterien für ihre Kompatibilität mit bestimmten Tätigkeiten an (siehe Tab.3). Um die Masse an Informationen in dieser Tabelle zu kanalisieren, wurden bestimmte Kriterien, welche die bisherige theoretische Aufarbeitung dieser Diplomarbeit stützen, ausgewählt und grau hinterlegt. Zu diesen gewählten Kriterien zählt z.B. das Üben und Anwenden, welches auf die mentale Ebene der „Aktion“ abzielt, und somit einen wichtigen Bestandteil der Entwicklung von mathematischen Konzepten darstellt. Zusätzlich sollte im Rahmen der Handlungsorientierung ein eigenverantwortliches Arbeiten ermöglicht werden, wobei der Vorgang des Systematisierens bei explorativen Tätigkeiten nicht vernachlässigt werden darf. Um das eigentliche Ziel des Mathematikunterrichts, die nachhaltige Verfügbarkeit von selbstständigen Problemlösefähigkeiten, umsetzen zu können, bedarf es des Kriteriums der Langfristigkeit. Zu den übrigen Kriterien zählen das Begriffsbilden, das Erarbeiten und Vertiefen von mathematischen Kenntnissen und Fertigkeiten, das Argumentieren, das Schreiben und die individuelle Aktivierung. Aufgrund der Eignung der einzelnen Methoden (siehe Tab.3) bezüglich dieser Kriterien wurden folgende ausgewählt, welche im Anschluss genauer beschrieben und analysiert werden:

- Gruppenpuzzle
- Lerntagebuch
- Stationenzirkel
- Tandemübung
- Was bin ich?

Hier muss erwähnt werden, dass keine dieser Methoden für alle gewählten Kriterien geeignet ist. Sie erfüllen jedoch den überwiegenden Teil, mit Ausnahme der Tandemübung, welche absichtlich als vermutlicher Kontrapunkt analysiert wurde. Zusätzlich wird die Methode des „Experimentierens“ analysiert. Sie wurde teils aus eigenem Interesse gewählt, jedoch hauptsächlich aufgrund eines Zitates von Grosser (2016) während seines Vortrages zur Prozess-Objekt-Dualität am Institut für Mathematik der Universität Wien. Er sprach die nachhaltige Verfügbarkeit von Wissen an, welche im Rahmen von außergewöhnlichen Situationen im Unterricht entstanden ist. Als Beispiel wurde eine Explosion im Physikunterricht erwähnt. Die Methode des Experimentierens wird im Rahmen der vorab gewählten Kriterien von Barzel et al. (2015, S. 262 f.) als weniger geeignet eingestuft. Ihr Potential bezüglich des höheren mathematischen Ziels im schulischen Kontext sollte trotzdem untersucht werden.

Tab.3: Übersicht der Unterrichtsmethoden

Methoden	Methode ist geeignet, folgende mathematische Tätigkeiten anzuregen: +=besonders geeignet ~=kann geeignet sein -=eher ungeeignet				Methode ist geeignet, folgende übergreifende Tätigkeiten anzuregen: +=besonders geeignet ~=kann geeignet sein -=eher ungeeignet									Methode hat das Merkmal +=ausgeprägt ~=je nach Ausgestaltung ausgeprägt				Methode vollzieht sich vornehmlich in der Sozialform +=besonders geeignet ~=kann geeignet sein			
	Begriffsbilden	Mathematische Kenntnisse/Fertigkeiten erarbeiten /vertiefen	Problemlösen/Modellieren	Argumentieren	Eigenverantwortliches Arbeiten	Kooperieren/Kommunizieren	Präsentieren/Darstellen	Recherchieren/Lesen	Reflektieren	Schreiben	Systematisieren	Üben/Anwenden	Leistungsüberprüfung/Diagnose	Differenzierend	Individuell aktivierend	Organisatorisch komplex	Langfristig	Einzelarbeit	Partnerarbeit	Gruppenarbeit	Klasse
Aufgabenkartei	-	+	-	-	+	+	-	-	~	~	-	+	+	+	+		+	+	+		
Erarbeitungsspiel	+	-	~	+	-	+	-	-	-	-	-	-							+	+	~
Experimentieren	+	~	~	~	+	+	-	-	-	-	-	-	-					+	+	+	~
Freiarbeit	~	+	+	~	+	-	-	+	-	-	-	+	-	+	+	+	+	+	~	~	
Gruppenarbeit	~	+	+	+	~	+	~	-	-	-	+	-	+							+	
Gruppenexploration	+	+	+	~	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+			+	+		+
Gruppenpuzzle	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-		+	+				+	
Gutachten	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	+	+	+			+	+	~	
Hausaufgaben	~	+	~	+	+	-	-	+	~	+	-	+	+	+	+			+			
Ich-Du-Wir	+	+	+	+	~	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+			+	+	+	+
Knobelteam	+	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-		+					+	
Lawine	+	-	~	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-		+	+		+	+	+	+
Lerntagebuch	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		~	
Mathe-Panini	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+			+	+	
Mathe-Quiz	+	+	-	-	-	~	+	+	-	+	-	+	-			+			+	+	+
Passt!-Passt nicht!	+	+	-	~	-	-	-	-	-	-	-	+	-							+	+
Placemat	+	-	+	~	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	+			+		+	
Portfolio	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+			
Poster	+	-	+	-	~	-	+	-	-	+	+	-	+						+	+	+
Präsentation	+	-	+	~	+	+	+	+	-	+	+	-	+						+	+	+
Projekt	-	-	+	-	+	+	+	+	-	~	-	+	+	+		+	+			+	~
Redaktion	+	-	+	~	-	+	~	+	-	+	+	+	-	+						+	
Sammeln-Ordnen-Strukturieren	+	-	-	+	-	-	+	+	+	+	+	-	+						+	+	~
Schreibgespräch	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	+				+	+	
Stationenzirkel	+	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+	+	+	~	+	+	~	
Steckbrief	+	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+				+	+	+
Stille Post	+	+	-	-	-~	-	-	~	-	~	-	+	-	+	+				+	+	
Streitgespräch	+	-	-	+	~	+	+	-	-	-	-	+	-						+	+	+
Tandemübung	-	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	-	+	+				+		
Übungsspiel	-	+	-	-	-	+	-~	-	-	-	-	+	-	+	+				+	+	
Was bin ich?	+	+	-	~	-	-	~	-	-	-	-	+	-							+	+

Quelle: mod. nach ebd. S.262 f.

3.4.1. Gruppenpuzzle

Die Methode des Gruppenpuzzles wurde 1978 von Aronson unter dem Namen „Jigsaw-technique“ eingeführt und zielt speziell auf kooperatives Lernen ab (vgl. Gerholz, 2014, S.1). „Jigsaw“ bezeichnet den Prozess des Zersägens, und des anschließenden Zusammensetzens der einzelnen (Puzzle-)Teile. Nach Barzel et al. (2015, S. 96), besteht die Methode des Gruppenpuzzles aus 4 Phasen, wobei die erste, die Einführung, rein der Erklärung des Inhaltes und des Organisationsrahmens dient. Zusätzlich werden die SchülerInnen in dieser Phase in mehrere Gruppen aufgeteilt. Im Anschluss folgt die zweite Phase, die sogenannte Expertenrunde. Im Rahmen dieser Phase setzen sich die Lernenden zuerst einzeln, dann in Gruppen mit einem vorab definierten Teilgebiet des Hauptthemas auseinander. Sie werden sozusagen zu Experten ihres Themenbereichs (vgl. ebd., S.96). Hier ist es unumgänglich, dass alle SchülerInnen aktiv beteiligt sind, da sie in der anschließenden dritten Phase, der Unterrichtsrunde, ihr erworbenes Fachwissen weitergeben müssen (vgl. ebd., S.98). Die Organisation dieser Unterrichtsrunde erfordert eine neue Gruppenzusammensetzung, da nun jeweils zumindest ein Experte eines jeden Themenbereiches pro neuer Gruppe vorhanden sein muss. Die alten Expertengruppen werden somit aufgelöst, um ihr erlangtes Wissen an ihre KollegInnen weiter zu geben. Die vierte und letzte Phase dient dem Abschluss der Methode. Die SchülerInnen präsentieren ihre Ergebnisse bezüglich der Problemstellung, eine Diskussion könnte geführt bzw. noch offene Fragen könnten beantwortet werden. Zusätzlich existiert die Möglichkeit einer abschließenden Lernerfolgsüberprüfung, welche jedoch vorab angekündigt werden muss, um die aktive Teilnahme der SchülerInnen zusätzlich zu steigern (vgl. ebd., S. 96).

Der Ablauf dieser Unterrichtsmethode kann nach Belieben variiert werden. Gerholz (2014, S. 2) gibt in seiner Auslegung dieser Unterrichtsmethode drei, statt der vorher erwähnten vier, Phasen an. Während der ersten entscheiden die Lernenden in sogenannten Stammgruppen, welches Mitglied Experte zu welchem Themenbereich sein soll. Die SchülerInnen sind somit in der Lage, selbstständig zu entscheiden, welches Puzzlestück des Themas sie genauer bearbeiten möchten. Anschließend werden alle Experten eines Themenbereichs zusammengezogen, und diskutieren über ihre Expertisen. Im Anschluss kehren alle Experten zu ihrer ursprünglichen Stammgruppe zurück, und erläutern den KollegInnen ihren Lernzuwachs. Anschließend wird gemeinsam ein Handlungsergebnis für die Problemstellung beschlossen (vgl. ebd.).

Die zwei erwähnten Arten der Durchführung lassen zwar kleinere Unterschiede erkennen, das Grundkonzept der Expertengruppen, der Unterteilung der Inhalte und des letztendlichen Zusammenfügens von Informationen bleibt jedoch unverändert. Unabhängig von der Auslegung der Durchführung muss vorab eine klare Definition des Stundenziels erfolgen, um den SchülerInnen die Sinnhaftigkeit ihres Vorgehens aufzuzeigen (vgl. Barzel et al., 2015, S. 98). Das bereits erwähnte, unumgängliche hohe Aktivitätsniveau während der zweiten Phase der Lernenden sollte vorab explizit angesprochen werden, da die Expertenrunde ansonsten nicht durchführbar ist. Die geforderte Selbsttätigkeit, bzw. die Aktivität im Rahmen der Gruppe unterstützt den handlungsorientierten Gedanken dieser Unterrichtsmethode, welcher zusätzlich von der passiven Rolle der Lehrperson gestützt wird. Sie sollte kein externes Leiten anstreben, sondern eher als Beobachter des Lernprozesses dienen, und eventuelle Hilfestellungen leisten (vgl. ebd.). Die fehlende externe Leitung widerspricht an sich der mentalen Ebene der „Aktion" bezüglich der APOS-Theorie. Jedoch existieren durchaus externe, kleinschrittige Aufgabenstellungen, welche die Lernenden anleiten (vgl. Parzer, 2015, S.66). Während der ersten Phase der Methode des Gruppenpuzzles erfolgen explizite Anweisungen seitens der Lehrperson, an welche sich die SchülerInnen halten müssen. Während der Durchführung dieser Aufgabenstellungen kann somit eine Kontrolle von außen wegfallen. Zusätzlich muss das Endprodukt der Expertenrunde kontrolliert werden, um eventuelle Fehlvorstellungen während der Unterrichtsrunde nicht weiter zu verbreiten. Die SchülerInnen werden zu ExpertInnen der von ihnen durchgeführten Aktionen, welche durch die spätere Verbalisierung in der Unterrichtsrunde zusätzlich gefestigt werden und somit die Verinnerlichung, also den Übergang von Aktionen zu Prozessen, ebnen. Somit sind die APOS-Theorie und das Gruppenpuzzle kompatibel.

Die Anwendungsmöglichkeiten des Gruppenpuzzles im Mathematikunterricht sind enorm. Idealerweise dient diese Methode dem Erarbeiten neuer Themen, jedoch ist sie gleichermaßen geeignet für das Systematisieren von Erkundungen, den Abschluss einer Unterrichtsreihe oder für die Vorbereitung einer Klausur (vgl. ebd., S. 100). Essenziell für die Durchführung des Gruppenpuzzles ist das zugrunde liegende Thema. Dieses muss verschiedene Zugänge, verschiedene Darstellungsmöglichkeiten und verschiedene Grundvorstellungen der Inhalte zulassen, welche einander ergänzen (vgl. ebd.). Beispiele für geeignete Inhalte wären die rationalen Zahlen bzw. alle, im Rahmen der Prozess-Objekt-Dualität bereits genannten, geeigneten Themen. Erfüllt ein Thema diese Kriterien, muss zusätzlich kontrolliert werden, inwieweit eine selbstständige, jedoch vorab explizit formulierte, Aufgabenstellung von den Lernenden umsetzbar ist. Des Weiteren sollten die diversen Teilbereiche des Themas gleichermaßen relevant und komplex sein (vgl. ebd.). Hier bieten sich Möglichkeiten für die Differenzierung. Ist ein Themenbereich komplexer als die anderen, sollte er von bereits fortgeschritteneren SchülerInnen bearbeitet werden. Die mentale Ebene des Prozesses kann, bei bereits stattgefundener Verinnerlichung der Thematik, ebenso als Möglichkeit der Differenzierung dienen.

Die Aufteilung der SchülerInnen in Gruppen wirkt auf den ersten Blick, aufgrund der verschiedenen Phasen des Gruppenpuzzles, aufwendig, jedoch geben Barzel et al. (2015, S. 102) folgendes Schema vor, welches diesen Vorgang erleichtern soll:

Tab.4: Gruppeneinteilung des Gruppenpuzzles

Beim Gruppenpuzzle relevante Anzahlen	Division mit Rest	Beispiele		
Anzahl der SchülerInnen	n	20	17	29
Anzahl der Teilaspekte (Expertengruppen)	t	5	5	6
Anzahl der Unterrichtsgruppen	$n{:}\,t = u\ (+Rest)$	4	3	4
Anzahl der Doppelexperten	$Rest$	0	2	5

Quelle: mod. nach ebd.

Diese Methode ist in der Lage, alle vorab festgelegten Kriterien der Prozess-Objekt-Dualität zu erfüllen. Vor allem das Kriterium POD 3 („Aktionen sind bei Kapiteleinstiegen zu bevorzugen“) ist durch eine vorab festgelegte Aufgabenstellung, welche explizite Handlungsanweisungen beinhaltet, umsetzbar. Das Kriterium POD 4 („Prozesse dienen der Differenzierung“) kann mittels passender Auswahl von Expertengruppen erfüllt werden, indem die Arbeitsaufträge nicht konkrete Handlungsanweisungen beinhalten, und somit die Lernenden zum eigenständigen Denken anregen. Das fünfte Kriterium, die vielseitige Darstellungsmöglichkeit des Inhaltes, ist ein Kernelement des Gruppenpuzzles. Die übrigen Kriterien der Prozess-Objekt-Dualität können im Rahmen dieser Unterrichtsmethode ebenso, bei geeigneter Planung, umgesetzt werden. Die Kriterien der handlungsorientieren Unterrichtsmethoden (HOM1 - HOM5) werden zur Gänze erfüllt. Zusätzlich ist, nach Barzel et al. (2015, S. 262) das Gruppenpuzzle für die Mehrheit der, in der Tabelle 3 grau hinterlegten Kriterien besonders geeignet. Lediglich die Kriterien des Schreibens und der Langfristigkeit variieren je nach Auslegung der Methode.

Zusammenfassend ist das Gruppenpuzzle eine Chance, das alltägliche Unterrichtsgeschehen aufzubrechen, kooperatives und vor allem handlungsorientiertes Lernen zu forcieren und gleichzeitig, bezüglich der Prozess-Objekt-Dualität, an der Entwicklung mathematischer Konzepte zu arbeiten, bzw. im Rahmen von Kapiteleinstiegen ein solides Fundament für diese Konzepte zu schaffen. Deshalb wird diese Methode Teil einer der Kapiteleinstiegsplanungen sein, welche am Ende dieser Diplomarbeit präsentiert werden.

3.4.2. Lerntagebuch

Das Lerntagebuch ist keine Unterrichtsmethode im klassischen Sinn, da sie nicht der Organisation von separaten Einheiten dient. Viel mehr ermöglicht sie eine langfristige, dauerhafte und vor allem individuelle Lernbegleitung (vgl. ebd., S. 130). Im Rahmen dieser Methode führen die SchülerInnen selbstständig, begleitend zum Unterricht, ein sogenanntes Lerntagebuch. In diesem Heft sollen sie ihre Gedanken, Vorstellungen, Fehler, Gefühle und vor allem ihre Erkenntnisse festhalten (vgl. ebd.). Um eine gewisse Qualität dieses Lerntagebuchs gewähren zu können, sollten die Lernenden bereits vorab mit einer geeigneten Heftführung vertraut gemacht werden. Dabei sollten jedoch lediglich die Rahmenbedingungen konkretisiert werden. Explizite Vorgaben bezüglich der Durchführung sind zu vermeiden, da ansonsten die Kreativität der SchülerInnen und der individuelle Aspekt dieser Methode gehemmt wären. Die Lerntagebücher sollten gelegentlich von der Lehrperson kommentiert, jedoch nicht kontrolliert bzw. bewertet werden (vgl. ebd.). Die Lernenden sollen somit spüren, dass ihre Gedanken und Emotionen durchaus auch falsch sein können und Fehler den Erkenntniszuwachs erst ermöglichen.

Die Zielsetzung dieser langfristigen und unterrichtsbegleitenden Methode ist das Aufzeigen des abgeschlossenen Entwicklungsprozesses der Lernenden (vgl. ebd.). Am Ende eines Kapitels, eines Semesters oder eines Schuljahres sollte der Inhalt des Lerntagebuchs nochmals selbstständig durchdacht werden. Somit reflektieren die Schüler, welche Probleme sie mit gewissen Inhalten und Operationen hatten, und welche Vorstellungen ihnen zu Grunde lagen. Sie nehmen also eine Metapostion ein, welche es ihnen ermöglicht, ihre unterschiedlichen Vorstellungen von ein und demselben mathematischen Kontext zu verschiedenen Zeitpunkten zu vergleichen, sie gegeneinander abzuwiegen bzw. sie zu einer vielschichtigeren Version zusammenzufügen. Im Sinne der Prozess-Objekt-Dualität könnte das bedeuten, dass gewisse Inhalte zuerst rein als Aktion gesehen werden, dann, im Laufe der Zeit, als Prozess, und idealerweise zuletzt als Objekt. Die Inhalte werden also zu Beginn mittels externen Anleitungen lediglich berechnet, danach fallen diese Anleitungen weg und eigenständige, kognitive Verbindungen müssen angewandt werden. Diese Methode generiert somit für die Lehrperson eine gewisse Überprüfbarkeit, welche mentalen Ebenen die SchülerInnen bisher erreicht haben, und welche weiteren Maßnahmen gesetzt werden müssen. Den meisten Profit ziehen jedoch die Lernenden aus dieser Methode. Erst durch die Möglichkeit der Reflexion des Erlernten kann der eigene Fortschritt festgestellt und danach wiederum verschriftlicht werden. Zusätzlich bietet sie Raum für Experimente. Die SchülerInnen können Beispiele nach ihren Vorstellungen lösen und dürfen dabei Fehler machen, solange sie diese erkennen, benennen und anschließend verschriftlichen. Aus diesen Fehlern, vor allem aus der Reflexion dieser Fehler, entsteht ein tieferes Verständnis des mathematischen Inhalts. Eine konstruktive Fehlerkultur ist somit für diese Methode unumgänglich. Schäfer (2014, S. 175) definiert im Rahmen seiner Lobschrift des Irrtums erfolgreiches Arbeiten mit folgendem Zitat: „Scheitere früh, scheitere schnell, scheitere häufig.“ Dieses Motto verhalf Internetriesen wie „Google“ zu ungeahnten Erfolgen, indem Mitarbeiter zu Experimenten aufgefordert wurden, welche durchaus scheitern durften, solange die begangenen Fehler analysiert wurden (vgl. ebd., S. 176). Dieses Motto sollte die Kreativität und Experimentierfreudigkeit der SchülerInnen unterstützen, indem es Fehler als nützlich anpreist. Werden Irrtümer nicht selbst erkannt, helfen Kommentare der Lehrperson. Dieses Vorgehen des Kommentierens statt Korrigierens griffen Gallin und Ruf (1999) in ihrer Didaktik des „Dialogischen Lernens“ auf, welche das Lerntagebuch als Hilfsmittel verwendet. Gallin (2016) spricht in einem Vortrag an der mathematischen Fakultät der Universität Wien über das seiner Ansicht nach existierende Problem des herkömmlichen Weges der extern vorgegebenen Lösungsfindung. Die Vorgehensweise der Lösung von Problemstellungen mittels Algorithmen bzw. Formeln kann nach Gallin (2016) keine subjektive Sinnperspektive erzeugen. Es bedarf einer auf SchülerInnenseite als sinnvoll empfundenen Kernidee, mit welcher sie sich individuell auseinandersetzen können. Die entstandenen Ideen werden im Lerntagebuch festgehalten. Diese Phase des Unterrichts bezeichnen Gallin und Ruf (1999) als die „Ich-Phase“, welcher im Anschluss die „Du-Phase“ folgt. In dieser zweiten Phase gibt die Lehrperson Kommentare zu den jeweiligen Tagebucheinträgen ab, wirft neue Fragen auf und versucht somit das Wissen der Lernenden an das Lehrbuchwissen anzupassen. Die wiederholte Abwechslung dieser Phasen führt in die dritte Phase, die „Wir-Phase“ über. Ein Beispiel für das dialogische Lernen könnte nach Gallin (2016) folgendermaßen aussehen:

Die Lehrperson positioniert mehrere geometrische Körper in der Klasse. Die Aufgabe der SchülerInnen besteht darin, das Netz dieser Körper zu zeichnen, wobei vorab keine Vorgaben bzw. Einschränkungen erfolgen. Nun startet die erste Phase, die selbstständige Auseinandersetzung der Lernenden mit der Problemstellung. Anschließend werden die Notizen abgesammelt und von der Lehrperson in der zweiten Phase kommentiert. Danach können die SchülerInnen, mithilfe dieser Kommentare, weiterarbeiten.

Gallin (2016) betont in seinem Vortrag die Wichtigkeit des Zutrauens. Die Lehrperson muss ihren SchülerInnen aktiv zuhören, sich ihnen zuwenden und vor allem sollte sie ihnen einen Vertrauens- bzw. Zutrauensvorschuss ermöglichen. Zusätzlich betont er die unumgängliche Notwendigkeit der intrinsischen Motivation seitens der SchülerInnen, welche nach Ryan und Deci (2008) durch die Erfüllung folgender Grundbedürfnisse umgesetzt werden kann:

- Bedürfnis nach Autonomie
- Bedürfnis nach sozialer Eingebundenheit
- Bedürfnis nach Kompetenzerleben

Gallin (2016) ist der Meinung, dass die Methode des „dialogischen Lernens“ all diese benötigten Bedürfnisse befriedigen kann. Bacon (1561-1626) legitimiert mithilfe seines, nun folgenden Zitats die Durchführung der Methode von Gallin und Ruf (1999):

„Lesen macht Menschen vielseitig. Verhandeln geistesgegenwärtig. Schreiben genau“.

Die Nachteile des dialogischen Lernens liegen vor allem in der Leistungsfeststellung und in der Kompatibilität mit dem Lehrplan bzw. mit den Bildungsstandards (Barzel et al., 2015, S. 135). Die Schwierigkeit der Beurteilung des subjektiven Lernfortschrittes bzw. die, auf Grund der individuellen Auslegung des Stoffes, erschwerte verallgemeinerte Überprüfung (Schularbeiten, Tests), wie sie die Leistungsbeurteilungsverordnung vorsieht, sind nicht zu vernachlässigende Kritikpunkte dieser Vorgehensweise.

Das Fehlen von externen Aufgabenstellungen im Rahmen der Methode des Lerntagebuchs widerspricht der ersten Stufe der APOS-Theorie, nämlich der sogenannten Aktion. Vor allem das dialogische Lernen überspringt diese mentale Ebene zur Gänze. Zusätzlich wird, im Rahmen des dialogischen Lernens, die Ebene des Prozesses ebenso ausgelassen, da schon zu Beginn den Inhalten Eigenschaften zugeschrieben werden sollen („Wie sieht das Netz eines geometrischen Körpers aus?“). In Bezug auf die Prozess-Objekt-Dualität ist das Lerntagebuch eher als Mittel der Reflexion, also als Lernbegleiter geeignet, und nicht wie im Rahmen des dialogischen Lernens als Unterrichtsmethode. Das Lerntagebuch könnte somit in Verbindung mit anderen Methoden (z.B. Gruppenpuzzle) eingesetzt werden, um eine ideale Reflexion des Gelernten und des Lernfortschrittes zu ermöglichen.

Die Kriterien der Handlungsorientierung werden größtenteils erfüllt. Vor allem die durchgehende Selbsttätigkeit und die ständige Systematisierung und Absicherung des Wissens mittels Kommentar der Lehrperson und Festhalten der Erkenntnisse im Lerntagebuch sprechen für diese Methode. Die Umsetzung des vorab definierten Ziels (HOM 2) gestaltet sich als problematisch, da hauptsächlich die SchülerInnen die Richtung vorgeben und die Lehrperson nur nachträglich eingreifen kann. Wird ihnen jedoch vorab das Ziel verdeutlicht, könnte auch dieses Kriterium erfüllt werden.

3.4.3. Stationenbetrieb

Die Methode des Stationenbetriebs bietet eine vielseitige, handlungsorientierte und individuelle Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten, welche, wie der Name bereits erkennen lässt, mithilfe von mehreren Stationen, unter verschiedensten Sichtweisen und Anwendungen von den SchülerInnen selbstständig bearbeitet werden (vgl. Barzel et al., 2015, S. 198). Diese Bearbeitung kann mittels verschiedenen Sozialformen (Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit) erfolgen. Grundlegend kann der Stationenbetrieb in vier Phasen unterteilt werden (vgl. ebd.). Die erste Phase dient der Vorbereitung. Hier werden die einzelnen Stationen aufgebaut, sei es nun im Klassenraum oder im Freien, und die dazu passende Aufgabenstellung erklärt. Im Rahmen jeder Station werden diverse Arbeitsaufträge und Materialien bereitgestellt, welche eine vielschichtige und differenzierte Auseinandersetzung mit den Inhalten gewähren. Das Komplexitätsniveau der einzelnen Stationen kann zusätzlich stark variieren, da die Möglichkeit von Pflicht-, Wahl- und Zusatzstationen besteht. Das bedeutet, dass nicht alle SchülerInnen alle Aufgabenstellungen durchführen müssen, und somit Differenzierungsmöglichkeiten geschaffen werden (vgl. ebd.). Im Anschluss folgt die Bearbeitungsphase der SchülerInnen. In dieser Phase wäre ein vorab erstellter und für die Lernenden ersichtlich positionierter Zeit- und Ablaufplan von großer Bedeutung, um eventuell auftretende organisatorische Probleme vorzubeugen (vgl. ebd.). Mithilfe dieser Pläne bewegen sich die Lernenden von Station zu Station und versuchen die dort vorgefundenen Aufgabenstellungen zu bearbeiten. Um die Korrektheit der individuellen Lösungen zu überprüfen, besteht die Möglichkeit der Selbst-, Fremd- bzw. der LehrerInnenkontrolle, wobei die ersten zwei eher die soziale Komponente unterstützen (vgl. Schaumberger, 2009, S. 32). Die Korrektur bzw. die Kontrolle durch die Lehrperson hat den großen Vorteil, dass eine Station erst als abgeschlossen gilt, falls die Lehrperson die Lösung der SchülerIn bzw. der Gruppe als richtig beurteilt. Ist dies nicht der Fall, kann weiter am Problem gearbeitet werden. Am Ende des vorab festgelegten Ablaufes sollten die Ergebnisse systematisiert und abgesichert werden. Dies könnte mithilfe von Präsentationen von Ergebnissen und Erkenntnissen erfolgen, welche wiederum an das Lehrbuchwissen angepasst und verschriftlicht werden. Nach Barzel et al. (2015, S. 204) sollten für einen Stationenbetrieb mindestens zwei aufeinanderfolgende Unterrichtseinheiten eingeplant werden. Wird diese Methode über mehrere Unterrichtseinheiten und mehrere Tage hinweg eingesetzt, spricht Weber (1998) von einer Lernwerkstatt, welche jedoch nur einmal pro Semester erfolgen sollte.

Der größte Vorteil des Stationenbetriebs liegt in den verschiedenen Zugängen und den daraus folgenden unterschiedlichen Grundvorstellungen eines Themas, welche das Fundament für ein statisches mathematisches Konzept bilden (vgl. 2015, Barzel et al., S.

198). Zusätzlich kann mithilfe der unterschiedlichen Stationen jeder Lerntyp angesprochen werden. Aus diesem Grund fordert Wallaschek (1991) die Berücksichtigung möglichst vieler Sinne im Rahmen des Stationenbetriebs, was wiederum durch eine Vielfalt an Materialien und unterschiedlichen Aufgabenstellungen erreicht werden kann. Durch die Fokussierung der SchülerInnentätigkeit wird der Lehrperson viel Zeit gegeben, um individuell auf die Lernenden einzugehen und sie somit bestmöglich zu unterstützen (vgl. Schaumberger, 2009, S.34). Ein weiterer Vorteil dieser Methode ist die vielseitige Anwendbarkeit im Rahmen des Unterrichtsgeschehens. Jürgens (2006, S. 90 f.) gibt folgende Einsatzmöglichkeiten an:

- Abdecken der Gesamtthematik
- Einstiege
- Unterbrechung und Auflockerung einer längeren Lernphase
- Abschluss einer Lernphase

Die Planung eines Stationenbetriebs bedarf natürlich eines enormen Zeitaufwands seitens der Lehrperson, da nicht nur mehrere Stationen vorzubereiten sind, sondern der organisatorische Ablauf genau durchdacht werden muss, um eventuelle Doppelbelegungen der Stationen zu verhindern und somit eine möglichst lange und effektive Bearbeitungszeit gewährleisten zu können. Barzel et al. (2015, S. 204) raten deshalb dazu, einige Pflichtstationen doppelt anzubieten. Neben dem Planungsaufwand muss bereits vorab das zu erarbeitende Thema analysiert werden, da sich nicht jeder Kontext für eine vielseitige Bearbeitung mittels Stationenbetriebs eignet (vgl. ebd., S.203). Nach Barzel et al. (ebd.) sollte sich die Lehrperson deshalb vorab folgende Fragen stellen:

- Welche verschiedenen Darstellungsformen gibt es bei einem Thema?
- Welche verschiedenen Grundvorstellungen gibt es zu dem relevanten Begriff?
- Welche verschiedenen Anwendungen gibt es bei einem Thema?
- Welche verschiedenen Zugänge bieten sich bei dem Thema an?

Mithilfe dieser Fragen lässt sich abschätzen, ob das Thema mit dieser Methode vereinbar ist und zusätzlich wie viele Stationen sinnvoll wären. Geeignet wären z.B. Stationenbetriebe zur Integralrechnung oder zur Vektorrechnung, da beide sehr breit gefächerte Themen mit unterschiedlichsten Anwendungsmöglichkeiten und Zugängen sind. Weniger geeignet wäre im Rahmen des Stationenbetriebs die Erarbeitung der Rentenrechnung.

Der, aus Sicht der Lehrperson, durchaus aufwendig zu gestaltende Stationenbetrieb birgt eine Vielzahl an Möglichkeiten, speziell im Hinblick auf die Prozess-Objekt-Dualität. Nach Barzel et al. (2015, S. 262, Tab. 3) hat diese Methode vor allem Aufholbedarf bezüglich des Erlernens der Argumentation, des Schreibens und der Systematisierung. Diese drei

Kritikpunkte hängen jedoch sehr von der Gestaltung der Stationen bzw. des Ablaufes ab und sind somit nicht pauschal als „Schwäche“ dieser Methode festzulegen. Bezüglich der Kriterien der Prozess-Objekt-Dualität können, je nach Auslegung, alle erfüllt werden. Die Gestaltung der Aufgabenstellung von Pflichtstationen sollte, im Rahmen von Kapiteleinstiegen, vor allem die mentale Ebene der Aktion beinhalten. Hier sind somit explizite Handlungsanweisungen zu bevorzugen. Wahlstationen hingegen könnten bereits erste Schritte der Verinnerlichung, also den Übergang von Aktionen zu Prozessen, unterstützen, indem sie offenere Aufgaben beinhalten. Die vielseitige Herangehensweise dieser Methode ist natürlich das Kriterium für die Kompatibilität mit der Prozess-Objekt-Dualität. Zusätzlich sind nach Barzel et al. (2015, S. 202) auch innermathematische Inhalte für den Stationenbetrieb geeignet. Somit kann das Kriterium POD 6 („Innermathematische Fragestellungen sind bei der Einführung neuer mathematischer Kapitel zu bevorzugen“) ebenfalls erfüllt werden. Die Kriterien der Handlungsorientierung werden aufgrund der hohen Selbsttätigkeit der SchülerInnen und der Strukturiertheit des Ablaufes zur Gänze erfüllt.

Zusammenfassend eignet sich diese Methode ideal für die Planung und Umsetzung eines Kapiteleinstiegs mit vielseitigem Inhalt. Sárvári (2012, S. 28) legitimiert den Einsatz des Stationenbetriebs zusätzlich mit folgendem Zitat, welches eines der wichtigsten pädagogischen Ziele anspricht: „Stationenlernen ist eine Unterrichtsform, die in den Kindern Begeisterung auslöst und die Lust am Lernen fördert.“

3.4.3. Tandemübung

Der Name dieser Unterrichtsmethode lässt bereits die Sozialform der Durchführung erkennen - die SchülerInnen bearbeiten jeweils in Paaren die Aufgabenstellung. Die Grundidee dieser Methode ist grob formuliert die selbstständige Entwicklung von Fragestellungen, welche der Partner bzw. die Partnerin beantworten soll und ebenso die Bearbeitung der Aufgaben des Gegenübers. Dabei sollen diese zu entwickelten Aufgaben in einem gewissen Rahmen bleiben, welcher vorab von der Lehrperson festgelegt wurde (vgl. Barzel et al., 2015, S. 222). Falls die SchülerInnen nicht in der Lage sind, selbstständig, zum vorgegebenen Rahmen passende Fragen zu entwerfen, kann die Lehrperson unterstützend eingreifen, indem sie Leitfragen stellt oder den Lernenden Vorlagen aus Schulbüchern zeigt (vgl. ebd., S. 224). Diese Beispiele sollten jedoch noch von den Lernenden adaptiert werden, um ein Mindestmaß an kognitiven Vorgängen einzufordern. Nach der Entwicklung der Fragenstellungen folgt die Bearbeitungsphase, in welche die SchülerInnen selbständig an den gestellten Aufgaben arbeiten und diese lösen sollen. Im Anschluss wechseln die Lernenden wieder ihre Rolle und kontrollieren die Ausarbeitungen der selbst entwickelten Beispiele ihrer Partner (vgl. ebd., S. 222). Da in dieser Phase

Konflikte entstehen können, sollte im Anschluss eine Reflexionsphase stattfinden, in welcher über die Sinnhaftigkeit der entwickelten Beispiele, ihre Richtigkeit und vor allem über mögliche Verbesserungsvorschläge gesprochen werden sollte. Diese Phase kann zwischen den TandempartnerInnen, bzw. im Plenum erfolgen (vgl. ebd.). Die Diskussion im Plenum hat jedoch den großen Vorteil, dass die Lehrperson direkt eingreifen, und somit eine Systematisierung von Wissen stattfinden kann (vgl. ebd., S. 226).

Um eine genauere Vorstellung dieser Unterrichtsmethode zu ermöglichen, vor allem bezüglich des extern vorgegebenen Rahmens, folgt nun eine mögliche Aufgabenstellung zum Thema „lineare Funktionen" der Lehrperson an die jeweiligen TandemparnterInnen:

„Erstelle mindestens drei Aufgaben für deinen Partner oder Partnerin, bei welchen sich die Graphen dreier linearer Funktionen in einem Punkt schneiden, welcher von deinem Gegenüber berechnet werden soll. Das Ergebnis, also der Schnittpunkt dieser drei Graphen, soll immer gleichbleiben, die Funktionen müssen sich jedoch verändern."

Anhand dieses Beispiels ist erkennbar, dass hier bereits kognitive Vorgänge einer höheren mentalen Ebene verlangt werden, welche jenen der Aktion bei weitem übersteigen. Durch das selbstständige Kreieren von Fragestellungen kann überprüft werden, ob der vorab bearbeitetete mathematische Inhalt verstanden worden ist, da das Erstellen von Aufgabenstellungen zu einem vorgegebenen Rahmen ansonsten nicht realisierbar wäre. Somit zeigt sich, dass diese Aufgabenstellung vor allem der Automatisierung und Reflektion von bereits erlernten Inhalten dient (vgl. ebd., S. 222). Zusätzlich eignet sich die Methode der Tandemübung für die Entwicklung, bzw. Festigung von sozialen Strukturen innerhalb der Klasse. Da die SchülerInnen die Aufgaben selbstständig erstellen müssen, sollten sie sich vorab überlegen, welcher Schwierigkeitsgrad für den jeweiligen Partner überhaupt möglich und sinnvoll wäre. Somit kann zusätzlich zur Automatisierung von mathematischen Inhalten die soziale Kompetenz der Empathie forciert werden (vgl. ebd., S. 224).

Die Unterrichtsmethode der Tandemübung kann zu der Methodengruppe „Lernen durch Lehren" gezählt werden, da die Beispiele selbstständig entwickelt, kontrolliert und analysiert bzw. reflektiert werden. Hanel (1991, S.31) definiert diese Methodengruppe wie folgt:

Wenn Schüler einen Lernstoffabschnitt selbständig erschließen und ihren Mitschülern vorstellen, wenn sie ferner prüfen, ob ihre Informationen wirklich angekommen sind, und wenn sie schließlich durch geeignete Übungen dafür sorgen, dass der neue Stoff verinnerlicht wird, dann entspricht dies der Methode „Lernen durch Lehren".

Die Tandemübung erfüllt zwar nicht das selbstständige Erschließen von Inhalten, jedoch ermöglicht sie den SchülerInnen geeignete Übungen für ihr Gegenüber zu finden um das Stoffkapitel zu festigen und die darin enthaltenen Prozesse zu automatisieren.

Zinn (2009, S. 328) führte Pilotversuche zur Methodengruppe „Lernen durch Lehren“ durch und konnte feststellen, dass das situationelle Interesse gegenüber dem traditionellen Unterricht gestiegen war. Das, im Rahmen dieser Methode ermöglichte eigenverantwortliche Arbeiten der SchülerInnen scheint somit einen positiven Effekt auf das Unterrichtgeschehen zu haben.

Die Aufgabe der Lehrperson bezüglich dieser Unterrichtsmethode besteht hauptsächlich in der Planung des Rahmens. Barzel et al. (2015, S. 225) geben hierfür folgende Vorschläge an:

Die *Aufgabenimitation* ist die, aus kognitiver Sichtweise, am leichtesten durchführbare Rahmenbedingung für die SchülerInnen. Hier können bereits existierende Aufgaben bereitgestellt werden, welche die Lernenden nur leicht abändern bzw. adaptieren müssen.

Die *Einschränkung des Lösungsraums* ist die Erweiterung der *Aufgabenimitation*. Hierbei müssen bestimmte, vorab definierte Einschränkungen erfüllt werden. Ein Beispiel wäre der Entwurf einer Aufgabenstellung einer quadratischen Gleichung, welche jedoch nur eine Lösung haben soll.

Unter *strukturierten Aufgabenstellungen* verstehen Barzel et al. (ebd.) die Entwicklung von Beispielen, welche nicht den Lösungsraum einengen, sondern Beziehungen zwischen den Aufgaben fordern. In Bezug auf quadratische Gleichungen würde das bedeuten, dass die SchülerInnen neue Aufgaben erstellen müssen, indem sie z.B. nur einzelne Parameter verändern. Eine weitere Möglichkeit wäre die Verdopplung aller Parameter.

Während der Übungsausführung steht die Lehrperson den SchülerInnen beratend zur Seite und tritt erst in der optionalen Phase des Plenums am Ende der Methode wieder aktiv in Erscheinung.

Wie bereits in der Beschreibung der Tandemübung festgehalten wurde, dient sie vor allem dem Automatisieren von bereits Erlerntem bzw. der Kontrolle des Verständnisses. Da sie einiges an Vorkenntnissen bezüglich der zu erarbeitenden Inhalte voraussetzt, eignet sie sich nicht für Kapiteleinstiege. Die mentale Ebene der Aktion wird in dieser Unterrichtsmethode nicht angesprochen. Die externen Aufgabenstellungen der Lehrperson geben nur grobe Rahmenbedingungen an, keine expliziten Aufgabenstellungen. Die SchülerInnen können jedoch durch das offene Setting frei agieren und befinden sich, aufgrund der nicht explizit vorgegebenen Handlungsanweisung, somit auf höheren mentalen Ebenen (vermutlich eher auf der Ebene des Prozesses bzw. des Objektes). Durch verschiedene Aufgabenstellungen, und den vorausgegangen, ihnen zugrunde liegenden Vorstellungen der TandempartnerInnen, eröffnen sich den Lernenden neue Ansichten und Ideen bezüglich der behandelten Inhalte, welche durch die anschließende Kommunikation und Reflexion verbunden und schließlich systematisiert werden können. Die Lernenden müssen den behandelten mathematischen Begriffen Eigenschaften zuordnen können, Beziehungen müssen erkannt werden und die gewählten Aufgabenstellungen bedürfen einer geeigneten Argumentation. Somit eignet sich diese Methode zwar nicht für Kapiteleinstiege aber umso mehr für die Kontrolle der erfolgten Objektivierung am Ende eines Lernprozesses.

Barzel et al. (ebd.) bezeichnet die Tandemübung als eher ungeeignet bezüglich der Kriterien „Argumentieren“ und „Systematisieren“. Aus der vorhergegangen Beschreibung der Methode lässt sich jedoch Gegenteiliges ableiten. Eine Systematisierungsphase kann und sollte im Rahmen der Tandemübung integriert werden, um mögliche Fehlvorstellungen an das Lehrbuchwissen anzupassen. Außerdem finden im Rahmen der Kontrolle der Aufgaben durchaus Gespräche mit Konfliktpotential statt, welche die SchülerInnen zur Argumentation anregen. Sie müssen ihren eigenen Standpunkt mit passenden Argumenten vertreten und ihr Gegenüber davon überzeugen, bzw. gemeinsam einen Konsens finden.

Die Kriterien der Handlungsorientierung werden zur Gänze erfüllt, solange das definierte Ziel „Festigung und Automatisierung der vorab erarbeitenden Inhalte“ lautet. Vor allem der hohe Grad an Selbsttätigkeit muss hierbei festgehalten werden.

Zusammenfassend ist die Tandemübung, welche vorab als Kontrapunkt zu geeigneten Methoden für Kapiteleinstiege unter Berücksichtigung der Prozess-Objekt-Dualität gewählt wurde, durchaus mit Ideen dieser Theorie kompatibel.

3.4.4. Was bin Ich?

„Was bin Ich?“ bezieht sich auf eine Fernseh-Rate-Show, in welcher ein Rateteam, je nach Format der Sendung, die Berufsgruppe der befragten Personen mittels Entscheidungsfragen herausfinden musste. Jedes Mitglied dieses Rateteams durfte bei jeder Frage, die mit „Ja“ beantwortet wurde, eine weitere stellen. War die Antwort jedoch „Nein“, hatte die nächste Person die Möglichkeit, die richtige Antwort zu finden. Nach einer vorgegebenen Anzahl an verneinten Fragestellungen wurde die Fragerunde beendet und der Kandidat nannte seine Berufsgruppe.

Dieses Konzept kann ohne gravierende Veränderungen als Unterrichtsmethode übernommen werden. Um jedoch den Bezug zur Mathematik gewährleisten zu können, müssen die SchülerInnen passende mathematische Objekte aufgrund ihrer Eigenschaften erraten (vgl. ebd., S. 238). Die Art der Durchführung, vor allem die Mitgliederanzahl des bzw. der Rateteams, kann individuell gestaltend werden. So kann die gesamte Klasse gemeinsam an passenden Fragestellungen arbeiten oder es werden kleinere Gruppen gebildet, welche in Konkurrenz zueinander stehen (vgl. ebd.). Zusätzlich sind Variationen bezüglich der Auswahl der zu erratenden Objekte möglich, da sie entweder von der Lehrperson oder von SchülerInnen ausgewählt werden können. Hier ist jedoch zu beachten, dass nicht alle mathematischen Objekte geeignet sind, da sie sich klar von anderen abgrenzen müssen, um mit einer vorgegebenen, eher niedrigen Anzahl von Entscheidungsfragen gefunden werden zu können (vgl. ebd., S. 239). Somit ist zumindest die Kontrolle des gewählten Objekts durch die Lehrperson, bevor die Unterrichtsmethode effektiv startet, sinnvoll. Barzel et al. (ebd.) verwesen bei jüngeren SchülerInnen darauf, dass bereits vorab eine Vielzahl an möglichen Objekten angeboten werden sollte, da bereits ihre Auswahl einen nicht zu unterschätzenden, kognitiven Prozess auslöst. Jene Personen, welche Fragen zu ihrem gewählten Objekt beantworten müssen, sollten all seine Eigenschaften kennen, um somit eine Irreführung der Rateteams vorbeugen zu können. Bei falschen Aussagen bezüglich des zu erratenden, mathematischen Objektes muss die Lehrperson korrigierend eingreifen, um die Entwicklung von Fehlvorstellungen zu unterbinden. Das Ziel dieser Unterrichtsmethode auf Seiten der Mitglieder der Rateteams ist die Entwicklung von Fragestellungen, welche die möglichen Objekte auf ein Minimum reduzieren. Dies funktioniert jedoch nur, wenn ein entsprechendes Vorwissen bezüglich der behandelten Thematik existiert und somit eine geeignete Zuordnung der Eigenschaften zu den Objekten stattfinden kann. Die Rateteams sollten deshalb in der Gruppe mögliche Fragestellungen besprechen, gegeneinander abwägen und erst nach reichlicher Überlegung zu einer gemeinsamen Lösung kommen. Dies fördert neben der Wiederholung von Eigenschaften mathematischer Objekte noch zusätzlich die Kommunikation- und Argumentationsfähigkeit der SchülerInnen.

Ein mögliches, zu erratendes Objekt wäre z.B. die quadratische Funktion, wenn vorab verschiedene Funktionen (linear, quadratisch, kubisch, etc.) und ihre Eigenschaften im Mathematikunterricht besprochen wurden.

Im Anschluss an die Raterunde sollte, entweder gemeinsam oder im Rahmen der einzelnen Rategruppen, eine Reflexionsphase stattfinden. In dieser Phase werden die Sinnhaftigkeit der Fragestellungen, ihre Verbesserungsmöglichkeiten und eventuelle Defizite bezüglich der Eigenschaften von Objekten auf Seiten der SchülerInnen besprochen (vgl. ebd.). Zusätzlich besteht hier die Möglichkeit der Systematisierung und Sicherung des neu erlangten bzw. ausgebesserten Faktenwissens.

Barzel et al. (ebd.) sehen die Unterrichtsmethode „Was bin Ich?“ als kumulativ, also als Möglichkeit der Wiederholung und Vernetzung von bereits Erlerntem an. Das widerspricht natürlich den Anforderungen von Kapiteleinstiegen, da diese das im Rahmen dieser Methode bereits geforderte Wissen erst entwickeln sollen. Dieser Widerspruch zeigt sich zusätzlich bezüglich der Prozess-Objekt-Dualität, da „Was bin Ich?“ vor allem das Wissen bezüglich der Eigenschaften von mathematischen Objekten voraussetzt, und somit die mentale Ebene des Objektes (nach APOS-Theorie) forciert wird. Dies ist mit den vorab definierten Kriterien für Kapiteleinstiege bezüglich der Prozess-Objekt-Dualität nicht kompatibel. Jedoch eignet sich „Was bin Ich?“ durchaus für das von Barzel et al. (ebd.) angesprochene Hauptaugenmerk dieser Methode. Durch die Entwicklung von sinnhaften Fragestellungen, welche die möglichen mathematischen Objekte auf ein Minimum eingrenzen sollen, eröffnet sich den SchülerInnen ein tieferes Verständnis bezüglich der Eigenschaften von Objekten und es entstehen Verbindungen zwischen ihnen. So kann z.B., in Bezug auf das vorab angegebene Beispiel, festgehalten werden, dass jede der besprochenen Funktionen einen Startwert besitzt und somit Fragestellungen bezüglich dieser Eigenschaft wenig sinnvoll wären. Sinnvoller wäre es deshalb, die Anzahl der maximal möglichen Extremwerte, Nullstellen oder Wendepunkte zu erfragen. Somit eignet sich diese Methode idealerweise für die Überprüfung der Erreichung der mentalen Ebene des Objektes am Ende eines Kapitels.

Da die SchülerInnen im Rahmen dieser Methode durchgehend selbstständig mit kognitiven Vorgängen (Fragestellung entwickeln, andere Fragestellungen und die darauf folgende Antwort überdenken, eigene Fragestellungen wiederum auf diese Antworten abstimmen) beschäftigt sind und alle weiteren Kriterien der Handlungsorientierung bei geeigneter Planung umgesetzt werden können, kann „Was bin Ich?“ durchaus als handlungsorientiert bezeichnet werden.

Zusammenfassend bietet diese Unterrichtsmethode einen abwechslungsreichen, für die Lernenden unterhaltsamen, aber auch kognitiv fordernden Organisationsrahmen, welcher zusätzlich Verknüpfungen zwischen mehreren mathematischen Objekten ermöglicht.

3.4.5. Experimentieren

Die Methode des Experimentierens wirkt, in einer nicht empirischen Wissenschaft wie der Mathematik, eher wie eine nicht allgemeingültige Verzweiflungstat, nachdem andere, konventionelle Methoden, wie die streng mathematische Beweisführung, versagt haben. Jedoch eignet sie sich für die Strukturierung, Erklärung und Vorhersage von Erfahrungen in bzw. mit der Welt (vgl. Ludwig & Oldenburg, 2007, S. 4 ff.). Zusätzlich ermöglicht das Experimentieren den SchülerInnen auch ohne an sich benötigtem Vorwissen, die Auseinandersetzung mit einer Problemstellung auf einer individuellen Basis, welche wiederum langfristiger verfügbar ist als eine herkömmliche mathematische Beweisführung.

Im Rahmen des Mathematikunterrichts zielt diese Methode auf eine Auseinandersetzung der SchülerInnen mit mathematischen Objekten, Zusammenhängen oder realen Phänomenen unter Berücksichtigung einer vorab definierten bzw. erarbeiteten

Fragestellung ab (vgl. Barzel et al., 2015, S. 70). Die Lernenden sollen aufgrund von Beobachtungen Vermutungen aufstellen, welche im Anschluss konkretisiert und überprüft werden (vgl. ebd.). Somit lassen sich folgende, von Kaiser (2015, S.78) definierten Zielsetzungen dieser Unterrichtsmethode festhalten:

- Vorstellungen der SchülerInnen offenlegen
- Grundvorstellungen entwickeln
- Arbeitstechniken einüben
- Phänomene erfassen und darstellen
- Zusammenhänge untersuchen

Für die Umsetzung dieser Zielvorgaben braucht es eine geeignete Strukturierung des Ablaufes. Zu Beginn eines Experiments bedarf es einer Fragestellung, welche bezüglich der Unterrichtsmethode entweder von der Lehrperson, oder der gesamten Klasse mit der Lehrperson entwickelt wird. Hier ist vor allem auf die Sinnhaftigkeit des zu bearbeitenden Problems zu achten, welches natürlich vor allem den SchülerInnen bewusst gemacht werden sollte (vgl. Barzel et al., 2015, S. 74). Im Anschluss planen die Lernenden in Paaren bzw. in Gruppen ihr eigenes Experiment und verfassen dazu einen sogenannten Untersuchungsplan (vgl. ebd., S.70). Sie müssen sich also einen geeigneten Versuchsaufbau überlegen, welcher die Problemstellung so realistisch wie möglich darstellt, jedoch gleichzeitig Erkenntnisse zulässt. Da dieser Teil des Experimentierens über den weiteren Erfolg dieser Unterrichtsmethode entscheidet, und aufgrund seiner Komplexität nicht von allen SchülerInnen in geeigneter Art und Weise umgesetzt werden kann, sollte eine Plenumsphase durchgeführt werden, bei welcher alle Gruppen ihren Plan präsentieren (vgl. ebd., S. 74). Somit kommt es zur Sammlung von diversen Herangehensweisen und Verbesserungsvorschlägen, welche wiederum eine Steigerung der Qualität dieser Unterrichtsmethode nach sich ziehen.

Nach dieser Planungsphase folgt die Durchführung des Experiments, bei welchem die Beobachtungen seitens der SchülerInnen festgehalten werden müssen. Hier bietet sich unter anderem die Methode des Lerntagebuchs an, um die neuen Erkenntnisse zu verschriftlichen. Da das Experiment durchaus nicht wie geplant ablaufen könnte, sind in dieser Phase der Unterrichtsmethode Adaptionen des Untersuchungsplans erwünscht und in den meisten Fällen auch notwendig, um die vorab definierte Fragestellung beantworten zu können (vgl. ebd., S. 70). Die wichtigste Phase bezüglich der Absicherung und Systematisierung von Wissen erfolgt im Anschluss an die Durchführungsphase. Der abschließende Teil der Methode dient der Auswertung von Ergebnissen und dem Diskurs der daraus resultierten Erkenntnisse. Hier kann wiederum eine Plenums- oder Gruppendiskussion (Kleingruppen) durchgeführt werden, bei welcher die Lehrperson versucht, die Erlebnisse und Ansichten der SchülerInnen an das Lehrbuchwissen heranzuführen. Roth (2014) gibt eine weitere Phaseneinteilung des Ablaufes von Experimenten im Rahmen des Mathematikunterrichts an, welche jene von Barzel et al. (2015, S. 70) zusammenfasst:

1) Vorbereitungsphase: Hypothesen werden ausgehend von einer konkreten Situation aufgestellt.
2) Phase des Experimentierens: Hypothesen werden in einer neuen Situation getestet.
3) Nachbereitungsphase: Neue Erkenntnisse werden aus den gemachten Erfahrungen generiert.

Diese Methode eignet sich primär für die Entwicklung neuer Erkenntnisse - somit vor allem für die Bearbeitung von noch unbekannten Inhalten und deshalb wiederum für Kapiteleinstiege (vgl. ebd., S. 73). Die Einsatzmöglichkeiten des Experimentierens reichen von innermathematischen Fragestellungen (vor allem arithmetische und algebraische, z.B. die Herleitung von Teilbarkeitsregeln), über die Realisierung mathematischer Objekte und Simulationen (z.B. experimentelles Vorgehen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie - wiederholtes Würfeln) bis hin zur Mathematik als Werkzeug des Erkenntnisgewinns (reale Problemstellungen, welche erst mithilfe von mathematischen Werkzeugen gelöst werden können, z.B. „Wie ist ein Holzbalken aus einem Baumstamm zu sägen, sodass dieser die maximale Tragfähigkeit besitzt?“) (vgl. ebd., S.73 f.). Der Wahrscheinlichkeitstheorie wird bezüglich des Experimentierens ein hoher Stellenwert zugeordnet, da eine Vielzahl an Aufgabenstellungen durch reines „Ausprobieren“ gelöst werden kann. Experimentieren liefert zwar auch hier keine absoluten Aussagen, sondern reine empirische Evidenzen, welche jedoch in den meisten Fällen vollkommen ausreichend sind (vgl. ebd., S, 72). Nicht ohne Grund ist dieses Themengebiet das einzige, in welchem das Wort „Experiment“ Teil eines verwendeten Begriffs ist („Zufallsexperiment“).

Diese möglichen Anwendungsfelder der Methode ermöglichen den SchülerInnen neben der Entwicklung von neuen Erkenntnissen vor allem die Verbesserung ihres problemlösenden Denkens, welches wiederum im postschulischen Alltag von großer Bedeutung sein kann. Um jedoch außermathematische Aufgaben mit mathematischen Werkzeugen lösen zu können, bedarf es des Vorgangs der Modellierung. Humenberger (2016) beschreibt in seinem Skript zur Lehrveranstaltung „Angewandte Mathematik“ den Ablauf des Modellbildens mithilfe folgender Abbildung:

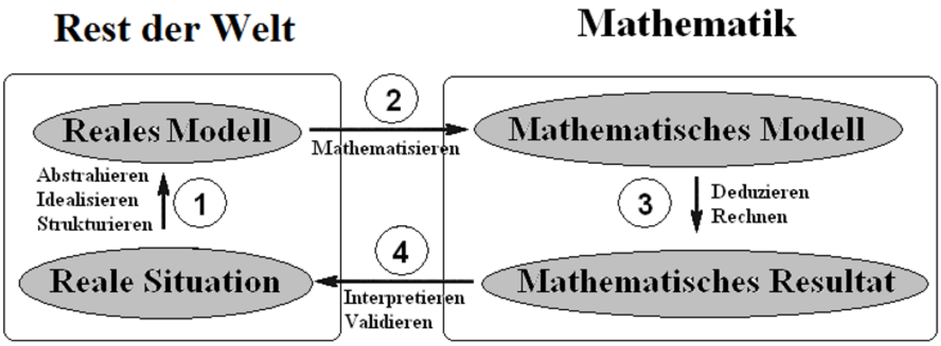


Abb. 4: Modellierungskreislauf (Humenberger, 2016, S. 1)

Eine reale Situation muss somit zuerst „mathematisiert“, also in eine mathematische Schreibweise gebracht werden. Anschließend werden in der Realität vorkommende, für die Berechnung jedoch störende bzw. überflüssige Gegebenheiten nicht berücksichtigt (Deduktion). Danach kann die Aufgabenstellung berechnet, und das Ergebnis auf die ursprüngliche reale Situation zurückgeführt werden, um daraus Schlüsse zu ziehen bzw. Interpretationen zu ermöglichen. Dieser Vorgang sollte den SchülerInnen bereits vor der ersten Phase der Unterrichtsmethode nähergebracht werden, um effektiver an außermathematischen Problemstellungen arbeiten zu können.

Die Aufgabe der Lehrperson im Rahmen des Experimentierens besteht wiederum aus passiven Aktivitäten, wie das Anbieten von Hilfestellungen bzw. der Kontrolle des Fortschrittes. Diese Kontrolle ist von großer Bedeutung, da zwar die SchülerInnen selbstständig aktiv sind, jedoch „Hands on“ nicht gleichzeitig „Minds on“ impliziert (vgl. Ludwig et al., 2007, S. 10). Somit ist stets darauf zu achten, dass nicht bloß unüberlegte Versuche durchgeführt, sondern vor allem mentale Prozesse hervorgerufen werden.

Die Methode des Experimentierens bietet natürlich eine Vielzahl an Variationsmöglichkeiten. Es kann z.B. neben der Anzahl der Teammitglieder zusätzlich das Setting variieren. Somit können Experimente im Klassenraum, im Freien, und dank stetig steigender Anzahl technologischer Hilfsmittel auch im Computerraum durchgeführt werden. Eine weite Möglichkeit der Variation wäre das Vorführen von Experimenten durch die Lehrperson. Diese Vorgehensweise ist jedoch nicht zu empfehlen, da dadurch der Aspekt der Handlungsorientierung und vor allem die, für die Entwicklung mathematischer Konzepte wichtige, Planungsphase verloren gehen würde. Barzel et al. (2015, S. 75) bezeichnen das Vorführen von Experimenten durch die Lehrperson nicht als Unterrichtsmethode. Deshalb ist es für die folgenden Planungen von Kapiteleinstiegen ungeeignet.

Experimentieren, also der Versuch, die uns umgebende, noch nicht bekannte Umwelt zu verstehen, ist nach Freudenthal (1983) einer der wichtigsten Aspekte der Schule und sollte vermehrt in den Fokus des Unterrichts gesetzt werden (vgl. Ludwig et al., 2007, S. 5). Jedoch ist diese Methode, trotz aller bisher erwähnten Vorteile, nicht die gewünschte Wundermethode für die Entwicklung von mathematischen Konzepten. Vor allem Untersuchungen bezüglich des Experimentierens im Unterrichtsfach Physik, in welchen es bereits seit 1905 (vgl. Kirchner, Girwidz & Häußler, 2000, S. 69) gefordert wurde, zeigen, dass der erhoffte Ertrag oft nicht die Erwartungen der Lehrperson erfüllen konnte (vgl. Ludwig et al., 2007, S. 10). Es existieren wie bei jeder bisher erläuterten Unterrichtsmethode sowohl Vor- als auch Nachteile.

Der größte Nachteil in Bezug auf die APOS-Theorie ist das Fehlen von expliziten Anweisungen im Rahmen der Experimente. Es existiert zwar eine Leitfragestellung, welche jedoch den SchülerInnen enorme Freiheit in der Planung der Versuche lässt. Die Einschränkung dieser Freiheit würde den Charakter und vor allem viele Vorteile dieser Methode zu Nichte machen und ist somit nicht erstrebenswert. Die einzigen externen Vorgaben erfolgen bei der Auseinandersetzung mit außermathematischen Problemstellungen, da hier die Schritte des Modellbildens Schritt für Schritt abgearbeitet werden müssen. Diese explizite Anleitung wurde bereits zu Beginn der Erklärung dieser Methode durch die Zielsetzung von Kaiser (2015, S.78) erwähnt, da sie das Einüben von Arbeitstechniken fordert. Zusätzlich fördert diese Unterrichtsmethode die Entwicklung von Grundvorstellungen (vgl. ebd.). Durch die aktive Auseinandersetzung mit bis dato unbekannten Inhalten entstehen in jeder Gruppe unterschiedliche Ideen bezüglich der Lösung der Fragestellung, welche wiederum diverse Ansichten des bearbeiteten Objektes nach sich ziehen. Werden diese Ansichten im Rahmen der reflexiven Phase miteinander ausgetauscht, entsteht eine vielseitige Vorstellung bezüglich des Inhaltes. Das Kriterium POD 5 („Inhalte werden mithilfe vielseitiger Darstellungsmöglichkeiten präsentiert.“) wird somit erfüllt. Zusätzlich ermöglicht diese Unterrichtsmethode die Auseinandersetzung mit innermathematischen Inhalten, welche laut Kriterium POD 6 („Innermathematische Fragestellungen sind bei der Einführung neuer mathematischer Kapitel zu bevorzugen.“) bei der Entwicklung von mathematischen Konzepten zu bevorzugen sind. Somit kann festgehalten werden, dass diese Methode bezüglich der Prozess-Objekt-Dualität polarisiert, da einige Kriterien gar nicht, dafür andere umso mehr erfüllt werden. Zusätzlich muss an dieser Stelle nochmals aus Prof. Grossers Vortrag (2016) bezüglich der Prozess-Objekt-Dualität hingewiesen werden, in welchem er festhielt, dass nicht alltägliche Vorkommnisse im Unterricht, wie z.B. Explosionen im Physikunterricht, langfristiger verfügbar sind. Diese Situationen sind im Rahmen des Mathematikunterrichts jedoch nur im Rahmen von

Experimenten möglich. Da die langfristige Verfügbarkeit von Wissen ein Hauptziel der Prozess-Objekt-Dualität darstellt, sollten Experimente im Mathematikunterricht nicht fehlen.

Die Handlungsorientierung dieser Methode steht außer Frage, da die SchülerInnen durchgehend gefordert werden, Hypothesen aufzustellen, diese mit geeigneten Maßnahmen zu überprüfen und sie im Anschluss zu interpretieren.

Die vorab ausgewählten Kriterien von Barzel et al. (2015, S. 262 f.) müssen anhand der erfolgten Beschreibung dieser Methode wiederum korrigiert werden, da z.B. die Systematisierung sehr wohl im Rahmen dieser Methode durchgeführt werden kann. Gleichzeitig müssen die SchülerInnen ihre Ideen bezüglich der Hypothesenprüfung gegenüber jener der anderen verteidigen bzw. im Laufe der Planungsphase aneinander anpassen. Dieser Vorgang erfordert sowohl Argumentationsbereitschaft als auch Argumentationsgeschick. Zusätzlich kann aufgrund der vorab erwähnten Aussage von Prof. Grosser (2016) angenommen werden, dass diese Methode durchaus in der Lage ist eine langfristige Verfügbarkeit von mathematischem Fachwissen hervorzurufen, und vor allem Transferleistungen zu außermathematischen Problemen und ihren Lösungen ermöglicht.

Zusammenfassend erfüllt diese Methode strenggenommen nicht alle Kriterien der Prozess-Objekt-Dualität, sie vernachlässigt sogar die wichtigste mentale Ebene („Aktion“) bei der Entwicklung von mathematischen Konzepten. Jedoch ermöglicht sie die Umsetzung einer Vielzahl an anderen, mindestens ebenbürtigen Kriterien und unterstützt somit einen interessanten, abwechslungsreichen, einprägsamen und erstrebenswerten Einstieg in ein neues Kapitel, welches zusätzlich von den SchülerInnen in selbsttätiger Art und Weise behandelt wird.

Conclusio der Unterrichtsmethodenanalyse

Die erste Auswahl geeigneter Methoden erfolgte mithilfe der Tabelle von Barzel et al. (2015, S. 262 f.), indem geeignete Kriterien für die Prozess-Objekt-Dualität und die Handlungsorientierung festgelegt wurden. Anhand dieser Kriterien gelangen folgende vier Methoden in die engere Auswahl:

- Gruppenpuzzle
- Lerntagebuch
- Stationenbetrieb
- Was bin Ich?

Zusätzlich wurde die Tandemübung als Kontrapunkt und die Methode des Experimentierens aufgrund von Eigeninteresse hinzugezogen.

Die zweite Phase der Analyse diente der vertieften Auseinandersetzung mit den genannten Unterrichtsmethoden und lieferte teilweise überraschende Ergebnisse. Vor allem konnten einige Aussagen der Tabelle nach Barzel et al. (ebd.), bei passender Auslegung der jeweiligen Methode, widerlegt werden.

Aus sechs ausgewählten Methoden kristallisierten sich nach dieser zweiten Analysephase drei als geeignet für Kapiteleinstiege heraus (Gruppenpuzzle, Stationenbetrieb und Experimentieren). Zusätzlich eignen sich die Methoden „Was bin Ich?“ und die Tandemübung ideal für die Kontrolle der jeweils erreichten mentalen Ebene im Rahmen der APOS-Theorie am Ende eines Kapitels. Das Lerntagebuch umspannt den gesamten Ablauf des später folgenden empirischen Teils dieser Diplomarbeit.

4. Schwerpunkte der methodischen Planung

4.1. Kapiteleinstiege

Die emotionale Beziehung zu Mitmenschen, Tieren oder Gegenständen wird durch den ersten Kontakt, aufgrund subjektiver Einflussfaktoren festgelegt. Diese relativ stabile Gefühlslage, welche auf meist unbegründeten Vorstellungen beruht, ist wegweisend für zukünftige Ansichten und Handlungen über bzw. mit dem jeweiligen Gegenüber. Gleich verhält es sich mit noch unbekannten mathematischen Kapiteln und den Lernenden. Der erste Kontakt, also die Kapiteleinstiege, entscheiden bereits über die zukünftige Einstellung der SchülerInnen bezüglich dieser Kontexte. Schneider (1999) vergleicht die Einführung neuer Inhalte im Unterrichtsgeschehen mit dem ersten Zug eines Schachspieles, welcher bereits über den Ausgang der Partie entscheiden kann, und zeigt somit ihren nicht zu unterschätzenden Beitrag zu zielführendem Unterricht auf. Einstiege haben somit einen enormen Einfluss auf das zukünftige Unterrichtsgeschehen und werden deshalb im Rahmen dieser Diplomarbeit einer genaueren Analyse unterzogen. Zuvor muss jedoch noch geklärt werden, was unter Kapiteleinstiegen zu verstehen ist. Einerseits können Kapiteleinstiege als Einführung in ein größeres mathematisches Themengebiet (z.B. Differentialrechnung) verstanden werden. Andererseits sind Kapiteleinstiege zusätzlich in der Lage, Unterkapitel eines größeren Themas (z.B. Rechenregeln der Differentialrechnung) zu eröffnen. Im Rahmen des anschließenden empirischen Teils werden beide Ansichten dieses Begriffes verwendet.

Brühne & Sauerborn (2011) unterscheiden in ihrem Phasenmodell zum Unterrichtsaufbau drei Phasen, wobei die Phase des Einstiegs getrennt von der Erarbeitung und der Sicherung gesehen wird. Einstiege sind somit eigenständige Phasen, welche diverse Aufgaben innehaben. Die Kernaufgabe der Kapiteleinstiege liegt in der Generierung von motivationalen Prozessen auf Seiten der SchülerInnen:

„Wie sehr Schüler motiviert sind, sich interessiert und aktiv am Unterricht zu beteiligen, entscheidet sich bereits zu Beginn einer Unterrichtsstunde, also in der Einstiegsphase.“ (Mietzel, 2007, S. 384)

Dieses Zitat lässt erkennen, dass gelungene Erstkontakte mit neuen Inhalten Interesse in den SchülerInnen wecken können, in ihnen Fragen aufwerfen und die Lernenden von sich aus diese Fragen lösen wollen (vgl. Brühne et al., 2011, S.29). Die Entwicklung von intrinsischer, also von den Individuen selbst stammender Motivation ist somit eine Aufgabe, aber natürlich auch das Ziel dieser Unterrichtsphase. Dieses Ziel fordert jedoch bereits vorab ein gewisses Maß an Motivation seitens der Lehrperson, welche sich der zeitaufwendigen und komplexen Planung dieser Kapiteleinstiege stellen muss.

Eine weitere Aufgabenstellung der Kapiteleinstiege ist die Entwicklung einer gemeinsamen Organisationsstruktur und somit auch von Transparenz (vgl. Heckmann & Padberg, 2012, S. 71). Die SchülerInnen sollen durch geeignete Aufgabenstellungen und Inhalte dieser speziellen Unterrichtsphase einen Einblick in die Ziele und Anwendungsmöglichkeiten der Thematik bekommen, um die Sinnhaftigkeit der selbstständigen Auseinandersetzung damit zu erkennen. Bleibt die Vermittlung des Sinnes aus, wird die Lehrperson zwangsläufig mit der Frage: „Wofür brauche ich das eigentlich?“ konfrontiert, was wiederum ein Indikator für eine ausgebliebene intrinsische Motivation ist. Zusätzlich hält Hattie (2013) den enormen positiven Einfluss der Verdeutlichung der Zielsetzung in Bezug auf den Lernerfolg seitens der SchülerInnen in seiner umfassenden Studie fest.

Kapiteleinstiege haben somit grundlegend die Aufgabe, motivationale Prozesse anzuregen und gleichzeitig eine transparente Vorschau des zu behandelnden Inhaltes den SchülerInnen zu vermitteln. Brühne & Sauerborn (2011, S. 39) definieren diese zwei Funktionen der Einstiege noch genauer mithilfe folgender Grafik:

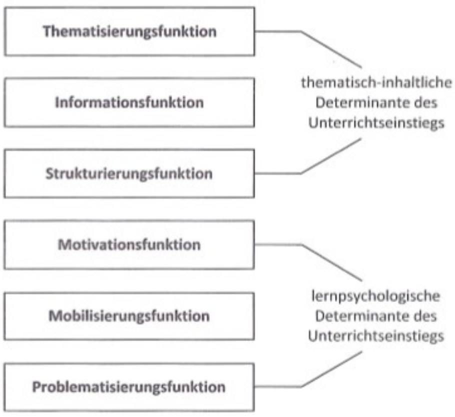


Abb. 5: Funktionen des Unterrichtseinstieges (ebd.)

Zu diesen Funktionen fügen Greving & Paradies (2012) noch zusätzlich die Komponente der Verantwortungsbereitschaft für Lernprozesse seitens der SchülerInnen hinzu, welche vorab bereits durch die intrinsische Motivation beschrieben wurde.

Die von Brühne und Sauerborn (2011) als Thematisierungsfunktion bezeichnete Aufgabe der Kapiteleinstiege beinhaltet das Anknüpfen an das Vorwissen der Lernenden. Diese allgemeine methodische Vorgehensweise, welche nach Meyer (2004) ein Kriterium für guten Unterricht ist, sollte im Rahmen von Kapiteleinstiegen gleichermaßen beachtet werden. Neue Informationen müssen somit mit bereits bestehenden Grundvorstellungen verknüpft werden. Die Aufnahme von neuen Erkenntnissen sollte nach Heckmann et al. (2012, S. 72) ganzheitlich und spontan erfolgen. Sie fordern somit vor allem den Einsatz von Visualisierungen und auch von Provokationen (bezüglich mathematischer Inhalte), und die Vermeidung langer, komplexer Texte.

Die soeben erfolgte erste Analyse von Kapiteleinstiegen zeigt die grundlegenden Aufgaben und Ziele dieser Unterrichtsphase auf. Da jedoch mehrere Konzepte bezüglich der Einstiege existieren, folgt nun die Klassifikation.

4.1.1. Klassifikation der Kapiteleinstiege

Kapiteleinstiege besitzen eine Vielzahl an Auslegungsmöglichkeiten. So können z.B. Einstiege aufgrund der ins Zentrum gestellten Partei (SchülerInnen, LehrerInnen) beurteilt werden (vgl. Mühlhausen & Wegner, 2006). Gleichermaßen existieren Unterschiede bezüglich der Art und Weise der Wissensvermittlung (rein kognitiv, ganzheitlich). Um diese Menge an Varianten systematisieren zu können, schlägt Meyer (1987) vor, sie nach konventionellen, sinnlich-anschaulichen, erfahrungsorientierten und schüleraktiven Einstiegen zu klassifizieren. Diese speziellen Zuordnungen können jedoch allgemeiner in schüleraktives und lehreraktives Vorgehen zusammengefasst werden (vgl. Meyer & Paradies, 1992). In Bezug auf lehreraktive Einstiege wird die Methode eher eine darbietende sein. Die Lehrperson setzt vermehrt auf einen referierenden und demonstrierenden Unterrichtsverlauf (vgl. Kaiser, 2015, S. 32). Schüleraktivierende Methoden können dem Konzept der Handlungsorientierung zugeordnet werden, da hier vor allem die Aktivität der Lernenden im Vordergrund steht und die Lehrperson eher als Lernbegleiter gesehen wird. Brühne et al. (2011) fügen zusätzlich neben dem Aktivitätsniveau der zwei Parteien (SchülerInnen, LehrerInnen) die Handlungsorientierung als Klassifikationsmöglichkeit für Kapiteleinstiege hinzu. Sie ändern den Begriff der Aktivität in jenen der Zentrierung um und stellen mithilfe folgender Grafik den Zusammenhang der drei Stufen der Klassifikation auf. Dabei ist zu erkennen, dass ein hohes Maß an Handlungsorientierung eine hohe SchülerInnen- und eine geringe LehrerInnenzentrierung fordert. Dieser Zusammenhang wurde bereits im Rahmen der Unterrichtsmethodenanalyse festgestellt und beeinflusste die Wahl der Methode für die später folgende Entwicklung von handlungsorientierten Kapiteleinstiegen unter Berücksichtigung der Prozess-Objekt-Dualität.

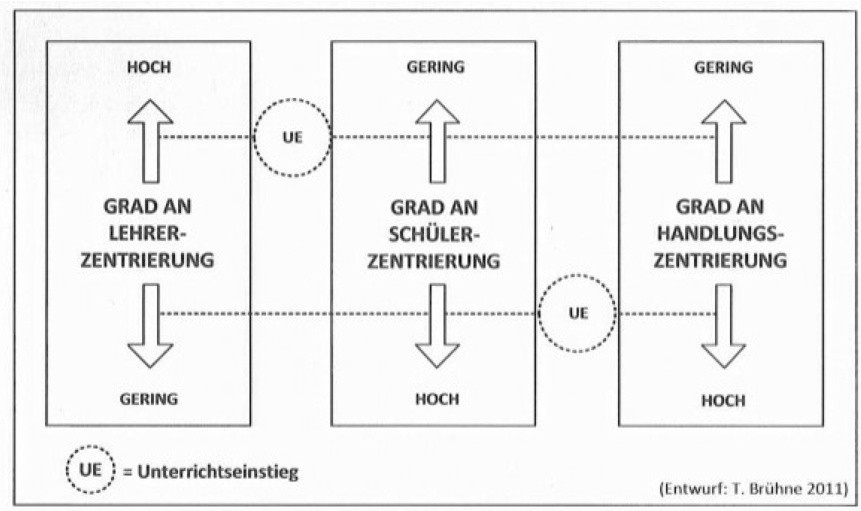


Abb. 6: Klassifikation der Kapiteleinstiege (ebd.)

Jeder Lehrperson sollte bewusst sein, dass ein Kapiteleinstieg, egal wo er in diesem Modell von Brühne et al. (2011) eingeordnet werden kann, in manchen Klassen ideal umsetzbar ist, und in wiederum anderen nicht fruchtet. Einstiege haben zwar enormes Potential hinsichtlich der Entwicklung von motivationalen Prozessen seitens der SchülerInnen, was wiederum das höhere Ziel des Mathematikunterrichts, nämlich die Generierung mathematischer Konzepte, unterstützt, jedoch ist ein gelungener Einstieg nicht überzubewerten.

„Unterrichtseinstiege sollten demnach in zweifacher Weise nicht überschätzt werden: Ein gelungener Unterrichtseinstieg ist kein Garant für das Gelingen einer Unterrichtsstunde. Ein missglückter Einstieg zieht nicht zwangsläufig ein Scheitern des weiteren Vorhabens nach sich.“ (Mühlhausen et al., 2006, S.67)

4.1.2. Zusammenfassung

Kapiteleinstiege haben das Potential, Interesse und Motivation in den SchülerInnen zu wecken und ihnen das Thema und das Ziel der Lehrperson näher zu bringen. Sie sollten an das Vorwissen anknüpfen, abwechslungsreiche Methoden und Aufgabenstellungen einsetzen, die SchülerInnenaktivität in den Mittelpunkt setzen (vor allem bei handlungsorientierten Einstiegen) und somit die Entwicklung von mathematischen Konzepten unterstützen. Diese hohen Erwartungen, welche an diese Phase des Unterrichts gestellt werden, sollten jedoch relativiert werden, da selbst der durchdachteste Einstieg nicht fruchten muss. Für die nun folgende Analyse bereits bestehender Kapiteleinstiege bedarf es wiederum Kriterien, welche neben jenen der Prozess-Objekt-Dualität und jenen der Handlungsorientierung ihre Eignung bezüglich des Themas dieser Diplomarbeit festlegen sollen. Nach Gallin & Ruf (1998) soll ein Einstieg zum Problem hinführen und für keinen Lernenden eine unüberwindbare Hürde darstellen. Barzel, Holzäpfel, Leuders & Streit (2011) fordern von Kapiteleinstiegen, dass sie tatsächlich auf das zu behandelte Thema hinführen und keinen effekthascherischen Selbstzweck erfüllen, dass sie abwechslungsreich gestaltet sein müssen und dass zusätzlich die Lehrperson zur Gänze von dem von ihr gewählten Einstieg überzeugt sein muss. Des Weiteren fordert die Prozess-Objekt-Dualität von den Kapiteleinstiegen den idealen Beginn bezüglich der Konstruktion mathematischer Konzepte, was wiederum das Hauptaugenmerk auf die mentale Stufe der „Aktion“ lenkt. Zusammengefasst ergeben sich dadurch folgende Kriterien für Einstiege:

- E1: Kapiteleinstiege werfen subjektiv bedeutsame Fragen in den Lernenden auf und steigern somit ihr Interesse und ihre Motivation.
- E2: Kapiteleinstiege geben mithilfe einer geeigneten Organisationsstruktur einen Einblick in die noch unbekannte Thematik und zeigen die Ziele der Lehrperson auf.
- E3: Kapiteleinstiege erzeugen mithilfe geeigneter Aufgabenstellungen (Provokation, Problemstellung, etc.) eine subjektive Sinnperspektive.
- E4: Kapiteleinstiege sind abwechslungsreich.
- E5: Kapiteleinstiege führen direkt auf das zu behandelnde Thema hin und erfüllen keinen effekthascherischen Selbstzweck.

4.2. Überprüfung der Realisierung der mentalen Ebene des Objektes

Neben den Kapiteleinstiegen konzentriert sich der folgende empirische Teil zusätzlich auf die Kontrolle der Zielerreichung. Es stellt sich die Frage, wie die Realisierung der mentalen Ebene des Objekts (nach der APOS-Theorie) kontrolliert werden kann. Hierfür werden die zuvor festgelegten Kriterien für Objekte (Eigenschaften zuordnen, Beziehungen herstellen können, Verwendung der passenden Begriffe – vor allem Hauptwörter) herangezogen, welche wiederum mit den zuvor festgelegten Methoden (Tandemübung, Was bin Ich?, Lerntagebuch) für diese spezielle Phase des Unterrichts kontrolliert werden. Das Objektkriterium „Aktionen werden auf Prozesse angewandt“ wird ebenso berücksichtigt, jedoch zielt es vermehrt auf universitäre mathematische Inhalte ab, für welche die APOS-Theorie auch ursprünglich konzipiert wurde.

5. Zusammenfassung des theoretischen Teils

Neben der Aufarbeitung der theoretischen Grundlage der Prozess-Objekt-Dualität, der Handlungsorientierung und der Schwerpunkte der methodischen Planung wurden Kriterien für die nun im empirischen Teil folgende Planung eines Themenbereiches mit mehreren Unterkapiteln festgelegt. Diese Kriterien werden in folgender Tabelle zusammengeführt:

Tab. 5: Übersicht der Kriterien

Prozess-Objekt-Dualität	**Handlungsorientierung**	**Kapiteleinstiege**
POD 1: Es wird auf Vorwissen aufgebaut.	HOM 1: Eine klare Strukturierung des Unterrichts ist möglich.	E1: Kapiteleinstiege werfen subjektiv bedeutsame Fragen in den Lernenden auf und steigern somit ihr Interesse und ihre Motivation.
POD 2: Objekte sind das höhere Ziel - dieses kann aber nicht in wenigen Einheiten erreicht werden.	HOM 2: Die gewählte Methode gewährleistet die Umsetzung des vorab definierten Ziels.	E2: Kapiteleinstiege geben mithilfe einer geeigneten Organisationsstruktur einen Einblick in die noch unbekannte Thematik und zeigen die Ziele der Lehrperson auf.
POD 3: Aktionen sind bei Kapiteleinstiegen zu bevorzugen.	HOM 3: Die Methode gewährt den Lernenden ein maximales Maß an selbsttätiger Arbeitszeit und fordert Selbstständigkeit und Eigenverantwortung.	E3: Kapiteleinstiege erzeugen mithilfe geeigneter Aufgabenstellungen (Provokation, Problemstellung, etc.) eine subjektive Sinnperspektive.
POD 4: Prozesse dienen der Differenzierung.	HOM 4: Die Methode bietet ausreichend Platz für die Systematisierung und Absicherung.	E4: Kapiteleinstiege sind abwechslungsreich.

POD 5: Inhalte werden mithilfe vielseitiger Darstellungsmöglichkeiten präsentiert.	HOM 5: Die Methode unterstützt mittels nicht alltäglicher Organisationsrahmen und Sozialformen das Engagement der Lernenden.	E5: Kapiteleinstiege führen direkt auf das zu behandelnde Thema hin und erfüllen keinen effekthascherischen Selbstzweck.
POD 6: Innermathematische Fragestellungen sind bei der Einführung neuer mathematischer Kapitel zu bevorzugen.		

6. Analyse, Diskussion und Planung ausgewählter Themen der Differentialrechnung

Der nun folgende Teil dieser Diplomarbeit widmet sich der Realisierung der zuvor bearbeiteten theoretischen Grundlagen anhand der Differentialrechnung. Die Gründe für die Wahl dieses Inhaltsbereiches sind neben dem eigenen Interesse vor allem die schier unbegrenzten Anwendungsmöglichkeiten dieser Thematik. De l`Hospital (1696) beschreibt die Differential- und Integralrechnung (letztere wird in den anschließenden Kapiteln nicht behandelt) folgendermaßen (vgl. Hairer & Wanner, 2011, S. 87):

Die Reichweite dieses Kalküls ist unermesslich: Es lässt sich sowohl auf mechanische als auch geometrische Kurven anwenden; Wurzelzeichen bereiten ihm keine Schwierigkeiten und sind oftmals sogar angenehm im Umgang; er lässt sich auf so viele Variablen erweitern, wie man sich nur wünschen kann; der Vergleich unendlich kleiner Größen aller Art gelingt mühelos. Und er erlaubt eine unendliche Zahl an überraschenden Entdeckungen über gekrümmte wie geradlinige Tangenten, Fragen De maximis & minimis, Wendepunkte und Spitzen von Kurven, Evoluten, Spiegelungs- und Brechungskaustiken, …

Hairer und Wanner (ebd.) gehen sogar noch einen Schritt weiter und bezeichnen die Differential- und Integralrechnung als „…die größte Errungenschaft der Mathematik überhaupt.“ Es ist somit nur logisch, dass diese Thematik in den Lehrplänen der österreichischen Oberstufen (AHS, BHS) fest verwurzelt ist.

Bevor jedoch die eigentliche Planung dieses Themenbereiches beginnt, sollte ein kurzer historischer Exkurs stattfinden, welcher die enorme geistige Errungenschaft der Entwicklung der Differentialrechnung widerspiegelt. Da dieser Exkurs in der Lage wäre, eine eigene Diplomarbeit zu füllen, werden im Anschluss nur die essentiellen Stationen aufgezeigt.

6.1. Historischer Exkurs

Die Geschichte der Differentialrechnung ist vor allem die Geschichte zweier großartiger Wissenschaftler – Newton (1643-1727) und Leibniz (1646-1716). Beide entwickelten in etwa zur selben Zeit die Grundidee der Differentialrechnung, wobei die jeweiligen Zugänge und Schreibweisen jedoch unterschiedlich waren (vgl. Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm, Weigand, 2016, S. 138). Newton verwendete in seinem Werk „Principia Mathematica" (1687) eine geometrische Herangehensweise, welche er als Fluxionsrechnung bezeichnete. Dieser Begriff entstammt der Vorstellung, dass eine Kurve aus fließenden Bewegungen der Größen x und y (Fluenten) zustande kommt. Die daraus resultierende Momentangeschwindigkeit in x- bzw. y- Richtung notiert Newton als $\dot{x}$ und $\dot{y}$ – die sogenannten Fluxionen der Fluenten x und y. Aus diesen Fluxionen ergibt sich die Tangentensteigung in einem Punkt der Kurve mit $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ (vgl. ebd.).

Leibniz verwendete beliebig kleine aber von Null verschiedene Größen, sogenannte „Differenziale" für seine Berechnungen, welche er als dx bzw. als dy bezeichnete (vgl. ebd.). Des Weiteren benutzte er das „charakteristische Dreieck" (Steigungsdreieck), um Kurvensteigungen zu visualisieren (vgl. ebd., S. 139). Wie in den meisten Schulbüchern ging auch er von der Steigung der Sekante (Differenzenquotient) aus und ließ die jeweiligen Differenzen „unendlich klein werden" – symbolisiert durch $\frac{dy}{dx}$ (vgl. Volkert, 1988). Aufgrund der offensichtlichen Ähnlichkeiten beider Theorien entbrannten Diskussionen über den eigentlichen Entdecker der Differentialrechnung, jedoch steht nach dem heutigen Forschungsstand fest, dass beide Wissenschaftler diese Theorie zur selben Zeit und unabhängig voneinander entdeckten (vgl. Sonar, 2011, S. 401 ff.). Erst 150 Jahre später exaktifizierte Cauchy (1789-1857) den Differentialquotienten mithilfe des Grenzwertes des Differenzenquotienten (vgl. ebd., S. 512). Weierstraß (1815-1897) griff diese strenge Definition auf und erklärte damit den Zusammenhang der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit von Funktionen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 140).

Die langwierige Entwicklung der Differentialrechnung kann den SchülerInnen natürlich nicht in ihrer ganzen Bandbreite zu präsentiert werden, jedoch sollten sie einen übersichtlichen Einblick in die beachtlichen geistigen Leistungen der federführenden Mathematiker und ihrer grundlegenden Ideen bekommen.

6.2. Aufbau der Planung

Die nun folgende Planung des Themengebiets der Differentialrechnung bezieht sich vor allem auf die Ausarbeitung von handlungsorientierten Einstiegen zu Unterkapiteln des Hauptthemas unter der Berücksichtigung der Prozess-Objekt-Dualität (vor allem unter Berücksichtigung der APOS-Theorie) und auf die Kontrolle der Umsetzung der Ziele, also der Realisierung der mentalen Ebene des Objektes. Bevor diese Planungen jedoch erfolgen können, müssen vorab geeignete Unterkapitel bestimmt werden. Hierfür wurden mehrere Schulbücher (z.B. „Mathematik verstehen 7“, „Dimensionen Mathematik 7“, etc.) und Lehrbücher (z.B. „Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe“) hinsichtlich ihrer Strukturierung der Differentialrechnung untersucht. Zusätzlich wurde die gesetzliche Grundlage, also der Lehrplan der 7.Klasse AHS berücksichtigt.

Die Mehrheit der verwendeten Literatur beginnt mit der Einführung des Differenzenquotienten, welcher mithilfe des Grenzwertes zum Differentialquotienten übergeführt wird. Greefrath et al. (2016) beginnen mit der historischen Entwicklung, auf welche verschiedene Grundvorstellungen und Zugänge der Differentialrechnung folgen. Eine davon ist wiederum der Übergang des Differenzen- zum Differentialquotienten. Dieser Übergang und die dazu passenden Grundvorstellungen bzw. Zugänge werden die Inhalte des ersten zu planenden Kapiteleinstieges sein.

Sinnvollerweise beinhalten alle untersuchten Quellen das Kapitel der Ableitungsregeln und ihrer Herleitungen als nächstes. Dieses wird somit der Inhalt der zweiten Planung werden. Nach diesem Unterkapitel folgt eine längere Übungsphase, welche zwar im Rahmen der Planung erwähnt, aber nicht explizit ausgeführt wird. Erst die Überprüfung der Realisierung der Objektivierung wird wiederum angegeben.

Das letzte zu planende Kapitel, die Funktionsanalyse mithilfe der Differentialrechnung wird in den untersuchten Quellen unterschiedlich aufgefasst. Teilweise wird von Kurvendiskussionen gesprochen (z.B. in „Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe“), teilweise wird die Formulierung der Untersuchung von Polynomfunktionen hinsichtlich ihres Monotonie- und Krümmungsverhaltens gewählt (z.B. in „Mathematik verstehen“). Die Planung dieses Unterkapitels sollte somit einen Einblick in die Funktionsuntersuchung, sowie in den Zusammenhang der Funktion und ihrer Ableitungsfunktion(en) geben, auf welchem wiederum ein Vorschlag für weitere Vorgehensweisen der folgenden Einheiten und die Planung der Überprüfung der Realisierung der Zielsetzung folgt. Die gesamte nun folgende Planung könnte sinnvollerweise mithilfe eines Lerntagebuches unterstützt werden. Die Vorgehensweise hierfür wurde bereits zuvor erläutert und wird in der Planung nicht explizit angegeben.

6.3. Differenzen- und Differentialquotient

6.3.1. Vorwissen und Lehrplanbezug

Jede professionelle didaktische und methodische Unterrichtsvorbereitung bezieht sich auf das Vorwissen der SchülerInnen. Da dieses natürlich von Klasse zu Klasse variieren kann, wird nun eine allgemeingültige, mit dem Lehrplan stimmige Basis dafür geschaffen.

Voraussetzung für das gesamte Themenkapitel der Differentialrechnung ist vor allem ein intuitives Verständnis der Begriffe „Stetigkeit“ und „Grenzwert“. Der intuitive Grenzwertbegriff ist im Lehrplan der AHS-Oberstufe (https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07, Zugriff am 08.02.17, 10:16) bereits in der 6. Klasse, im Rahmen des Themas „Folgen“, verwurzelt. Stetigkeit hingegen ist Teil des Inhaltes der 7. Klasse. Da die Stetigkeit jedoch ein zentraler Begriff der Differentialrechnung ist, sollte sie bereits vorab zumindest intuitiv verstanden worden sein (vgl. ebd., S. 140).

Die anschließende Planung benötigt folgende intuitive Grundvorstellungen bezüglich beider Begriffe:

Tab. 6: Grundvorstellungen der Stetigkeit und des Grenzwertes

Stetigkeit (vgl. ebd., S.141):	**Grenzwert (vgl. Jahner, 1976, S. 284):**
Sprungfreiheit bzw. keine Unstetigkeitsstellen (z.B. $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ – wildes oszillieren)	Man kommt dem Wert … beliebig nahe
Vorhersagbarkeit – kleine Änderungen der unabhängigen Werte verursachen nur kleine Änderungen der abhängigen Werte	Der Wert unterscheidet sich von … beliebig wenig
Darstellbarkeit – Funktionsgraph ist ohne Absetzen des Stiftes durchzeichenbar	Der Fehler bezüglich … bleibt unterhalb jeder vorgegebenen Messgenauigkeit

Neben diesen zwei Begriffen werden natürlich die vorhergegangenen Inhalte des Lehrplanes, speziell jene, die der Analysis zuzuordnen sind, vorausgesetzt. Vor allem die Definitionen der absoluten und der relativen Änderungsrate sowie des Differenzenquotienten können als verstanden angesehen werden, da sie Teil des Lehrplanes der 6.Klasse der AHS-Oberstufe sind. Die Wiederholung des Differenzenquotienten sollte jedoch nicht ausbleiben, um das bereits erworbene Wissen wieder aufzufrischen.

Die Ziele der folgenden Planung orientieren sich neben dem Hauptaugenmerk auf die APOS-Theorie, also dem Aufbau von nachhaltigen mathematischen Konzepten natürlich auch an den Vorgaben des Lehrplanes, welche in Bezug auf das gewählte Unterkapitel der Differentialrechnung folgendermaßen lauten (https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07, Zugriff am 08.02.17, 10:16):

- *Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen*
- *Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit*

6.3.2. Didaktische Analyse

Die Didaktik der Differentialrechnung unterscheidet mehrere Zugänge und Grundvorstellungen bezüglich dieses Inhaltes. Die Grundidee der Ableitung, welche bereits aus historischer Sichtweise unterschiedliche Auslegungen innehat, kann generell in zwei Sichtweisen unterteilt werden. Einerseits kann die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten aufgefasst werden, andererseits ist gleichermaßen die Vorstellung der linearen Approximation gerechtfertigt (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 142). Erstere geht von einer Tangentenkonstruktion an den Graphen der Funktion mithilfe einer Sekanten aus, wobei die zweite Sichtweise jene Gerade sucht, welche den Funktionsgraphen in einem Punkt bestmöglich approximiert (vgl. ebd.). Beide Ansichten sind gerechtfertigt und weisen gewisse Vorteile wie auch Nachteile auf, welche in der folgenden didaktischen Analyse aufgearbeitet werden.

Aus den soeben erwähnten zwei Sichtweisen der Differenzialrechnung ergeben sich insgesamt vier Grundvorstellungen, welche den SchülerInnen vermittelt werden sollen:

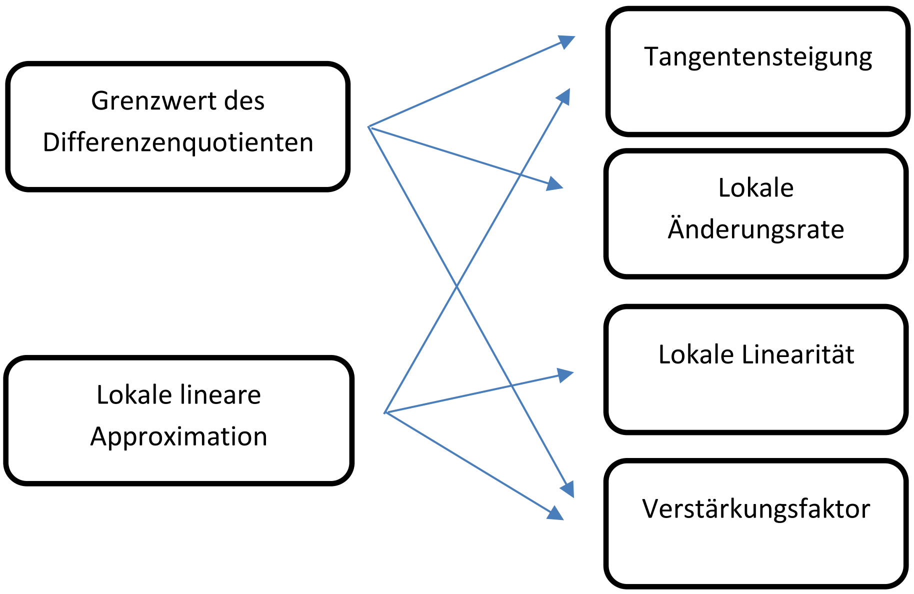


Abb. 7: Sichtweisen und Grundvorstellungen der Differenzialrechnung (mod. nach ebd., S. 147)

6.3.2.1. Tangentensteigung

Die Grundvorstellung der Tangentensteigung und der daraus resultierende Zugang bzw. didaktische Aufbau des Unterrichtsgeschehens ist ein erprobter und klassischer Weg, den SchülerInnen die Grundidee der Differentialrechnung näherzubringen. Die Ableitung einer Funktion in einem Punkt wird als die Steigung der Tangente bestimmt, wodurch das Steigungsproblem einer Kurve auf den bereits bekannten Begriff der Steigung einer Geraden zurückgeführt werden kann (vgl. Danckwerts & Vogel, 2010, S. 46). Die passende Tangente für dieses Vorhaben wird mithilfe einer Sekanten, welche durch einen fixen Punkt und einen dynamischen bestimmt ist, angenähert (vgl. Greefrath et al., 2016, S.150). Hierfür eignet sich der Einsatz von Technologieunterstützung, z.B. GeoGebra, bei welchem mithilfe eines Schiebereglers das Argument des dynamischen Punktes dem Argument des fixen beliebig nahe kommen kann. Als Beispiel geben Greefrath et al. (2016, S. 157) die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ mit dem fixen Argument $x_0 = 1$ an. Nachdem der Funktionsgraph geplottet wurde, werden der Punkt A mit den Koordinaten $A = (1 \mid f(1))$ und der I Punkt B mit $B = (1 + h \mid f(1 + h))$ eingezeichnet. Der daraus erzeugte Schieberegler für h kann nun beliebig nahe an 0 angenähert werden, wobei die Steigung der Sekante durch A und B angegeben wird.

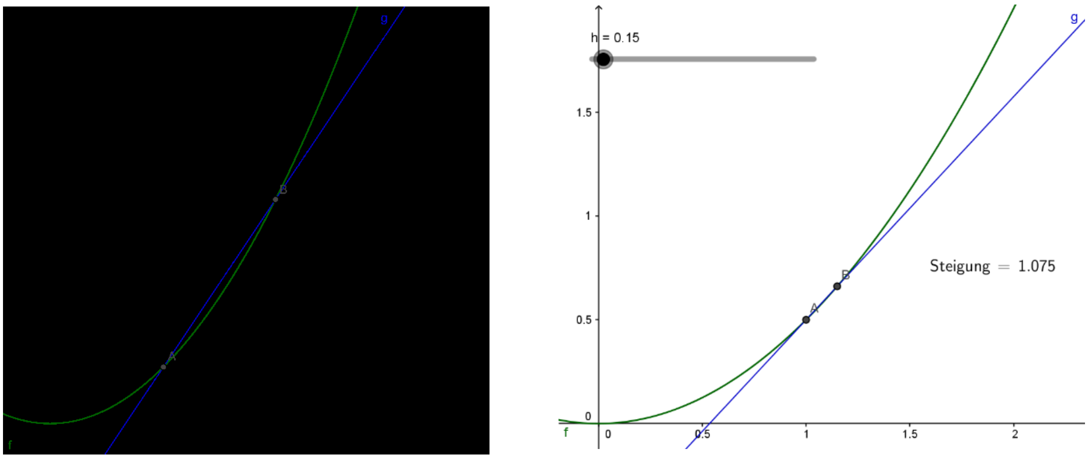


Abb. 8: Darstellung der Grundvorstellung der Tangentensteigung mit GeoGebra

Durch die Verschiebung des Parameters h können die SchülerInnen erkennen, dass der Punkt B dem Punkt A beliebig nahe kommt, umso näher h zum Wert 0 verschoben wird. Zusätzlich ist der Übergang der Sekante zur Tangente ersichtlich und somit kann auch die Steigung des Funktionsgraphen beim Argument $x_0 = 1$ abgelesen bzw. erahnt werden. Diese enaktive bzw. ikonische Darstellungsmöglichkeit wird bei Greefrath et al. (ebd.) zusätzlich von einer Tabelle unterstützt, welche jedem Wert von h die passende absolute Änderung der Funktion $(f(x_0 + h) - f(x_0))$ und den daraus resultierenden Differenzenquotienten ($\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$) zuordnet. Anhand dieser Tabelle und der grafischen Darstellung ist bereits zu erwarten, dass die Steigung im gewählten Punkt 1 sein wird. Diese an sich richtige, aber unpräzise Deutung kann mithilfe der symbolischen Darstellung folgendermaßen komplettiert werden (vgl. ebd.):

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(x_0 + h)^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{h} = \frac{\frac{1}{2}x_0^2 + x_0 h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{h} = x_0 + \frac{1}{2}h \; mit \; h \neq 0$$

Wird h nun beliebig klein, nähert sich der Wert des Differenzenquotienten, also die Steigung der Sekante dem Wert x_0, in diesem Fall also 1, beliebig nahe an. Der Differentialquotient, also die Steigung der Tangente, beträgt somit 1 (vgl. ebd.).

Der durchaus anschauliche Einstieg in die Differentialrechnung mithilfe der Tangentensteigung beherbergt einige didaktische Tücken. Danckwerts et al. (2010, S. 45) unterteilen diesen soeben geschilderten Zugang in 3 Schritte, welchen jedoch jeweils didaktische Probleme zugeordnet werden können. Der erste Schritt definiert die Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Steigung der Tangente. Das Vorwissen der SchülerInnen beinhaltet jedoch in den meisten Fällen eine geometrische Vorstellung der Tangente als Gerade, welche einen Kreis lediglich in einem Punkt berührt. Es bedarf jedoch, wie folgende Funktionsgraphen zeigen, einer analytischen, lokalen Vorstellung von

Tangenten, welche sich in einem Punkt an die Kurve anschmiegen (Danckwerts und Vogel bezeichnen diese Gerade als „Schmieggerade“), sie durchsetzen bzw. welche den Funktionsgraphen in einem weiteren Punkt schneiden können (vgl. ebd.).

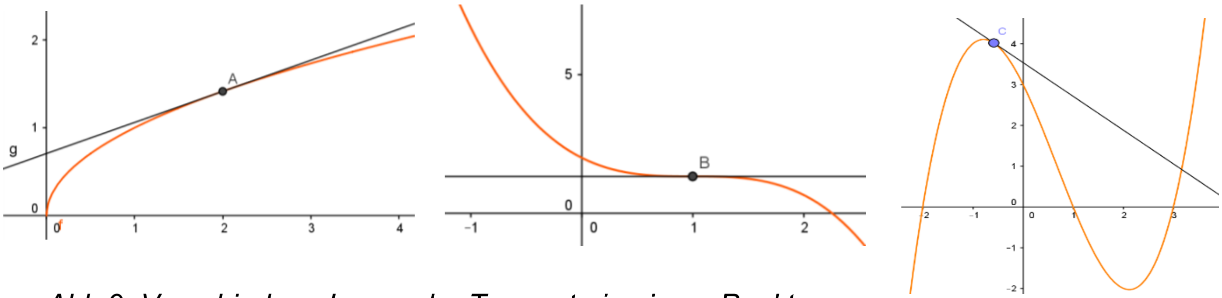


Abb.9: Verschiedene Lagen der Tangente in einem Punkt

Danckwerts et al. (2016, S. 45) sehen den nächsten Schritt dieses Zuganges zur Differentialrechnung, also die Betrachtung von Tangenten als Grenzlagen von Sekanten, als besonders kritischen Gedankenbruch. Die Schmieggerade des ersten Schrittes ist jene Gerade, die die Kurve in dem gewählten Punkt am besten approximiert. Sie hat nichts mit der Grenzlage der Sekanten zu tun. Dieser zwar anschauliche und geniale Vorgang fällt aber vom Himmel und ist von den SchülerInnen oftmals nicht nachzuvollziehen (vgl. ebd., S. 47). Im dritten Schritt, der Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigung, erfolgen eher algebraische Vorgänge, wobei nach Danckwerts et al. (vgl. ebd., S. 49) der zuvor erarbeitete Inhalt in den Hintergrund gerät.

Zusammenfassend beinhaltet der Zugang zur Differentialrechnung über die Tangentensteigung einige didaktische Hindernisse. Der dadurch ermöglichte Erwerb der Grundvorstellungen, dass die Tangente an eine Kurve in einem Punkt die gleiche Steigung wie die Kurve in diesem Punkt hat, ist jedoch für spätere Kapitel der Differentialrechnung unumgänglich (z.B. Funktionsanalyse) (vgl. Greefrath et al.,2016, S. 150).

6.3.2.2. Lokale Änderungsrate

Wie der Name dieser Grundvorstellung bereits erkennen lässt, liegt das Hauptaugenmerk dieses Zugangs zur Differentialrechnung auf der Änderungsrate. Da die SchülerInnen bereits ein gewisses Vorwissen bezüglich der absoluten Änderung, der relativen und speziell der mittleren Änderungsrate haben sollten, kann dieses als Basis der nachfolgenden Vorgänge herangezogen werden. Die Grundidee dieses Zuganges ist jener der Tangentensteigung sehr ähnlich, jedoch werden keine Sekanten bzw. Tangenten benötigt – es wird rein die lokale Änderungsrate (Differentialquotient) als Grenzwert der mittleren Änderungsrate (Differenzenquotient) betrachtet (vgl. ebd., S. 148). Hier muss gleich zu Beginn definiert werden, dass der Differentialquotient kein Quotient ist, sondern, wie bereits erwähnt, der Grenzwert der mittleren Änderungsrate (vgl. ebd.). Die theoretische

Basis des Übergangs vom Differenzen- zum Differentialquotient kann im Unterricht mithilfe von Bewegungsprozessen verständlich eingeführt werden. Greefrath et al. (2016, S. 159 ff.) geben hierfür eine Funktion f an, welche jedem Zeitpunkt t in Sekunden den zurückgelegten Weg $f(t)$ in Metern zuordnet. Zusätzlich setzen sie die Definition der mittleren Geschwindigkeit (Differenzenquotient) mit $v = \frac{Weg}{Zeit}$ als bekannt voraus. Die Frage nach der mittleren Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitraum (Intervall) ist somit leicht zu beantworten. Die Frage nach der Momentangeschwindigkeit kann mithilfe der kontinuierlichen Intervallverkleinerung, bei welcher ein Argument (t_0) unverändert bleibt und sich das zweite dem ersten beliebig nähert ($t \to t_0$), geklärt werden. Greefrath et al. (ebd.) geben als Beispiel dafür die Funktion $f(t) = \frac{1}{2}at^2$ an, welche von einer konstanten Beschleunigung $a = 1{,}5\, m/s^2$ ausgeht. Um den SchülerInnen die Vorstellung des Grenzwertes leichter zu gestalten, verwenden die Autoren folgende Tabelle:

Tab. 7: Ermittlung der Durchschnittsgeschwindigkeit bei kleiner werdenden Zeitintervallen

Intervall $[t, t_0]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ im Intervall $[t, t_0]$
[0;1]	0,75 m/s
[0,9;1]	1,425 m/s
[0,99;1]	1,4925 m/s
[0,999;1]	1,49925 m/s
…	…

Quelle: mod. nach ebd., S. 161

Die Annäherung der unteren Intervallgrenze an die obere bewirkt eine vorhersagbare Momentangeschwindigkeit, welche beim gewählten Beispiel 1,5 m/s beträgt. Um diese Vermutung zu bestätigen, ist wiederum eine symbolische Darstellung nötig, welche jedoch eine andere Definition des Differenzenquotienten ($\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$) als bei der Tangentensteigung benötigt, da damit die Vorgehensweise des Beispiels leichter nachvollzogen werden kann.

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}at_0^2}{t - t_0} = \frac{\frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} = \frac{\frac{1}{2}a(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{2}a(t + t_0)$$

Für $t \to t_0$, $t_0 = 1$ und $a = 1{,}5\, m/s^2$ gilt nun:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = 1{,}5$$

Somit wurde die vermutete momentane Geschwindigkeit (lokale Änderungsrate) von $v = 1{,}5\ m/s$ bestätigt.

Der Zugang zur Differentialrechnung mithilfe von Änderungen, speziell mit Bewegungsänderungen, wird in vielen Schulbüchern (z.B. „Mathematik verstehen 7“ von Malle, Koth, Woschitz, Malle, Salzger & Ulovec, 2016) als Einstieg gewählt. Danckwerts et al. (2016, S. 51 ff.) sehen in dieser Methode wesentliche didaktische Vorteile gegenüber dem klassischen Einstieg über die Tangentensteigung. Die Änderung der Grundvorstellung der Tangente von einem geometrischen hin zu einem analytischen Verständnis ist bei der Methode der lokalen Änderungsrate nicht notwendig. Zusätzlich wird die vom Himmel fallende Annäherung der Tangente durch eine Sekante unnötig und durch die intuitive, besser zu verstehende Methode der Intervallverkleinerung abgelöst (vgl. ebd.). Ein weiterer Vorteil dieser Methode ist die Sinnperspektive des Grenzwertes des Differenzenquotienten, welcher als Momentangeschwindigkeit zu einem greifbaren Begriff wird.

Neben den vielen Vorteilen dieser Methode existieren auch kleine Lücken bezüglich der Vorstellung der Momentangeschwindigkeit. In ihrem Schulbuch „Ingenieur-Mathematik 3“ diskutieren Timischl und Kaiser (2012, S. 48 f.) den zurückgelegten Weg eines Pfeiles in Abhängigkeit der Zeit. Betrachtet man den Pfeil in einem Moment, also zu einer „Zeitdauer von null“, steht der Pfeil still, da keine Zeit für eine Ortsveränderung gegeben ist. Da die gesamte Zeit eine Aneinanderreihung von Momenten ist, muss der Pfeil durchgehend still stehen und kann somit keinen Weg zurücklegen. Dieses Paradoxon lässt sich jedoch leicht mit der vorherigen Tabelle (Tab. 7) widerlegen. Nähert sich ein Argument des Intervalls dem anderen beliebig nahe an, wird also das Zeitintervall immer kleiner, sozusagen zu einem Moment, kann der untersuchten Bewegung trotzdem eine momentane Geschwindigkeit zugeordnet werden. Dieses Paradoxon tritt zwar nicht zwingend im Unterricht aufgrund von SchülerInnenfragen auf, jedoch kann es sehr wohl von der Lehrperson angesprochen werden, um kognitive Vorgänge anzuregen.

Im Anschluss an den Einstieg mithilfe von Bewegungsänderungen sollten auch weitere Anwendungsmöglichkeiten der lokalen Änderungsrate besprochen werden. Einige Vorschläge hierzu werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Tab. 8: Änderungsraten in verschiedenen Kontexten

Unabhängige Größe	Abhängige Größe	Mittlere Änderungsrate	Lokale Änderungsrate
Zeit	Wegstrecke	Mittlere Geschwindigkeit	Momentangeschwindigkeit
Zeit	Geschwindigkeit	Mittlere Beschleunigung	Momentanbeschleunigung
Horizontale Entfernung	Höhe der Erdoberfläche über NN	Mittlere Steigung	Punktuelle Steigung
Zeit	Wassermenge in einem Becken	Mittlere Zuflussgeschwindigkeit	Momentane Zuflussgeschwindigkeit
Einkommen	Zu zahlende Steuer	Mittlerer Steuersatz	Grenzsteuersatz
Kreisradius	Flächeninhalt des Kreises	Kreisumfang des Mittelkreises	Kreisumfang
Zeit	Verrichtete Arbeit	Mittlere Leistung	Momentane Leistung
Zeit	Elektrische Ladung	Mittlere Stromstärke	Momentane Stromstärke
Stückzahl	Kosten	Mittlere Kosten	Grenzkosten

Quelle: mod. nach Greefrath et al., 2016, S. 148 & Timischl et al., 2012, S. 138

6.3.2.3. Lokale Linearität

Diese Grundvorstellung der Differentialrechnung geht davon aus, dass jeder Funktionsgraph in genügend kleinen Intervallen geradlinig verläuft (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 151). Mithilfe von geeigneter Technologieunterstützung (z.B. GeoGebra) ist dies leicht durch Zoom-Werkzeuge für die SchülerInnen nachzuvollziehen und bereitet zusätzlich die benötigte Grundvorstellung für die Integralrechnung vor. Durch die Erkenntnis der lokalen Linearität des Funktionsgraphs liegt die Vermutung nahe, dass in diesem beobachteten Punkt die Funktion mithilfe einer Geraden approximiert werden kann (vgl. ebd., S. 158). Nun gilt es die geeignetste Gerade für diese Approximation zu finden. Dieser Zugang kann einerseits über einen algebraischen, eher symbolischen Weg vollzogen werden, welcher jedoch den Einstieg in die Differentialrechnung für SchülerInnen komplex und unverständlich wirken lässt. Idealer wäre eine experimentellere, von den SchülerInnen selbst durchgeführte Variante, welche wiederum auf Grund der technologischen Hilfsmittel leicht umzusetzen ist (vgl. ebd.). Die SchülerInnen sollten in der Lage sein, die Tangente als die beste approximierende Gerade aufgrund der Anschaulichkeit der Technologieunterstützung zu erkennen. Der eigentliche Grund für diese Tatsache findet sich jedoch nur mithilfe algebraischer Vorgänge, welche Danckwerts et al. (2010, S. 72) folgendermaßen angeben:

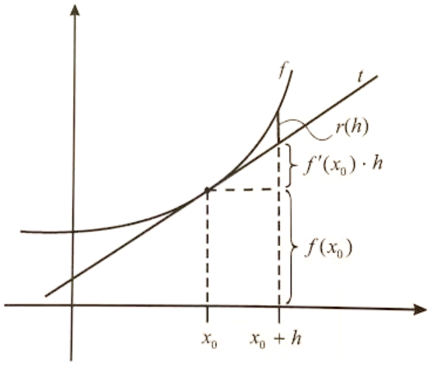


Abb. 10: Approximation von f durch die Tangente (ebd.)

Jede mögliche Gerade g durch $(x_0/\,f(x_0))$ ist folgendermaßen gegeben:

$$g(x) = f(x_0) + m\,(x - x_0)$$

Der Fehler der Approximation in Abhängigkeit von h ($r(h)$) ergibt sich aus:

$$r(h) = f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - mh$$

Geht nun h gegen null ($h \to 0$), ist aus der obigen Gleichung zu erkennen, dass auch der Fehler der Approximation gegen null geht ($r(h) \to 0$). Diese Tatsache gilt für die gesamte Geradenschar von g. Ist die Gerade g jedoch die Tangente an f bei x_0, gilt zusätzlich, dass $m = f'(x_0)$. Daraus folgt wiederum, dass auch der relative Fehler $\frac{r(h)}{h}$ gegen null geht, wenn h sich beliebig nahe an null nähert.

(Erklärung: $\frac{r(h)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - m$, da $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ und $m = f'(x_0)$ folgt $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$))

Das benötigte Vorwissen für diese Methode (z.B. die Ableitung in einem Punkt ist gleichbedeutend mit der Steigung der Tangente in diesem Punkt) ist während des Einstieges in die Differentialrechnung noch nicht gegeben. Somit wäre diese Art der Beweisführung erst zu einem späteren Zeitpunkt des Unterrichtsgeschehens möglich. Dieser große Nachteil des Zuganges über die lineare Approximation steht der Vielzahl ihrer

Anwendungsmöglichkeiten gegenüber. So baut z.B. die Fehlerrechnung, das Newtonsche Näherungsverfahren und die Taylor-Abschätzung auf dieser Grundidee auf (vgl. ebd., S.75).

6.3.2.4. Verstärkungsfaktor

Dieser Grundvorstellung der Differentialrechnung wird in den meisten didaktischen Aufarbeitungen wenig Beachtung geschenkt, jedoch ist sie bei der Betrachtung der Ableitung als „Veränderungsdedektor“ durchaus hilfreich (vgl. Greefrath, 2016, S. 152). Folgende Grundideen können mithilfe des Zuganges des Verstärkungsfaktors erarbeitet werden (vgl. ebd., S. 153):

- Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken
- Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle/starke Änderungen der Funktionswerte
- Für kleine Änderungen ist der Zusammenhang von $\Delta x, \Delta y$ multiplikativ: $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$

Ein Beispiel für den Einsatz dieser Grundvorstellung wäre die Nachfragefunktion N in Abhängigkeit vom Preis x. Die Idee des Verstärkungsfaktors liefert Antworten auf die Frage, wie stark sich eine mäßige Preissteigerung auf die Nachfrage auswirkt (vgl. ebd., S. 161).

6.3.3. Zusammenfassung der didaktischen Analyse

Alle vier Grundvorstellungen der Differentialrechnung und die ihnen zugrunde liegenden Einstiege in dieses Thema haben situationsspezifische Vor- und Nachteile – es benötigt jedoch im Rahmen eines zielorientierten, auf das Entwickeln von mathematischen Konzepten ausgelegten Mathematikunterrichts jede einzelne von ihnen (vgl. ebd., S. 164). Der Einstieg sollte jedoch stets nur mithilfe *einer* Grundvorstellung erfolgen, um Interferenzen zu verhindern. Wurde die erste Grundvorstellung mithilfe des Einstieges und anschließender didaktischer und methodischer Vorgänge bezüglich der APOS-Theorie eingekapselt, können die weiteren ebenso erworben werden.

Nach der Bearbeitung der Grundvorstellungen sollte eine Zusammenfassung der Symbolik des Differenzen- und des Differentialquotienten und der jeweiligen Interpretation der Ableitung erfolgen.

Tab. 9: Darstellungsmöglichkeiten des Differenzen- bzw. des Differentialquotienten

Differenzenquotient	Differentialquotient
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$f'(x) = \frac{df}{dx}$
$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	$f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Quelle: mod. nach Danckwerts et al., 2012, S. 85

Tab. 10: Schulübliche Interpretation der Ableitung

	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	$f'(x_0)$
Anwendungsbezogen	Mittlere Änderungsrate	Lokale Änderungsrate
Geometrisch	Sekantensteigung	Tangentensteigung
Algebraisch-analytisch	Differenzenquotient	Grenzwert des Differenzenquotienten

Quelle: mod. nach ebd.

Nach der Zusammenfassung des bisher Erlernten sollte eine exakte Definition der Differenzierbarkeit folgen, um von den besprochenen speziellen Fällen auf die Allgemeinheit schließen zu können. Eine mögliche, für den Schulalltag geeignete Definition lautet folgendermaßen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 142):

Es sei f eine in einer offenen Umgebung der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion. Man nennt f differenzierbar an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $f'(x_0) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ oder (äquivalent dazu) $f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ Ableitung von f an der Stelle x_0.

Im Anschluss sollte das bereits bestehende, intuitive Verständnis der Stetigkeit mit der Differenzierbarkeit koordiniert werden (entspricht der reflexiven Abstraktion der Koordination der APOS-Theorie). Hierfür eignet sich der folgende Satz (vgl. ebd., S. 145):

Eine an einer Stelle differenzierbare Funktion ist dort auch stetig.

Um zu zeigen, dass jedoch aus der Stetigkeit nicht die Differenzierbarkeit folgt, können folgende Funktionen besprochen werden:

- $f(x) = |x|$
- $g(x) = |x^2 - 4|$
- $h(x) = sgn(x) \cdot \sqrt{|x|}$

Zusätzlich sollte der bereits erwähnte Zusammenhang der Steigung der Tangente in einem Punkt der Funktion und der daraus resultierenden Monotonie besprochen werden, um das spätere Kapitel der Funktionsanalyse ideal vorzubereiten.

6.3.4. Planung des ersten Kapiteleinstiegs

Die erste Planung bezieht sich aufgrund der bereits erfolgten didaktischen und methodischen Analyse auf die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate und wird mithilfe der Methode des Experimentierens umgesetzt. Der folgende Aufbau der Planung und die darin enthaltenen Problem- bzw. Fragestellungen werden durch Kommentare und Begründungen für ihren Einsatz ergänzt. Die komplette Planung, ohne zusätzliche Informationen, findet sich im Anhang.

Die Lehrperson teilt die SchülerInnen vor Beginn der Bearbeitung der Fragestellung in Paare ein und weist auf den Ablauf der folgenden Einheit(en) (je nach Ermessen der Lehrperson – idealerweise wird eine volle Schulstunde für die Erstellung des Untersuchungsplanes und der anschließenden Plenumsphase benutzt) hin. Wie bereits in der Analyse der Methoden beschrieben wurde, sollen die Paare zuerst einen Plan für die gesamte Bearbeitung der Aufgabenstellung erstellen, welcher anschließend in einer Plenumsphase besprochen bzw. adaptiert, und im Anschluss ausgeführt wird.

Ein durchschnittlicher Läufer trainiert für seinen ersten Marathon. Bei einer seiner Trainingseinheiten vergisst er jedoch seine GPS-Uhr und kann lediglich auf sein Handy zurückgreifen. Da er trotzdem seinen Trainingsfortschritt dokumentieren möchte, wählt er eine Strecke, bei welcher jeder zurückgelegte Kilometer ausgeschildert ist. Er notiert sich mithilfe der Stoppuhrfunktion seines Handys die jeweiligen Zeiten nach jedem zurückgelegten Kilometer.

Es ergeben sich folgende Daten:

Kilometer	*Uhrzeit (h:min:sek)*
0	*00:07:16*
1	*00:13:55*
2	*00:20:34*
3	*00:26:14*
4	*00:31:43*
5	*00:37:05*
6	*00:42:35*
7	*00:48:05*
8	*00:54:03*
9	*00:59:25*
10	*01:04:12*
11	*01:08:49*
12	*01:13:26*
13	*01:17:50*

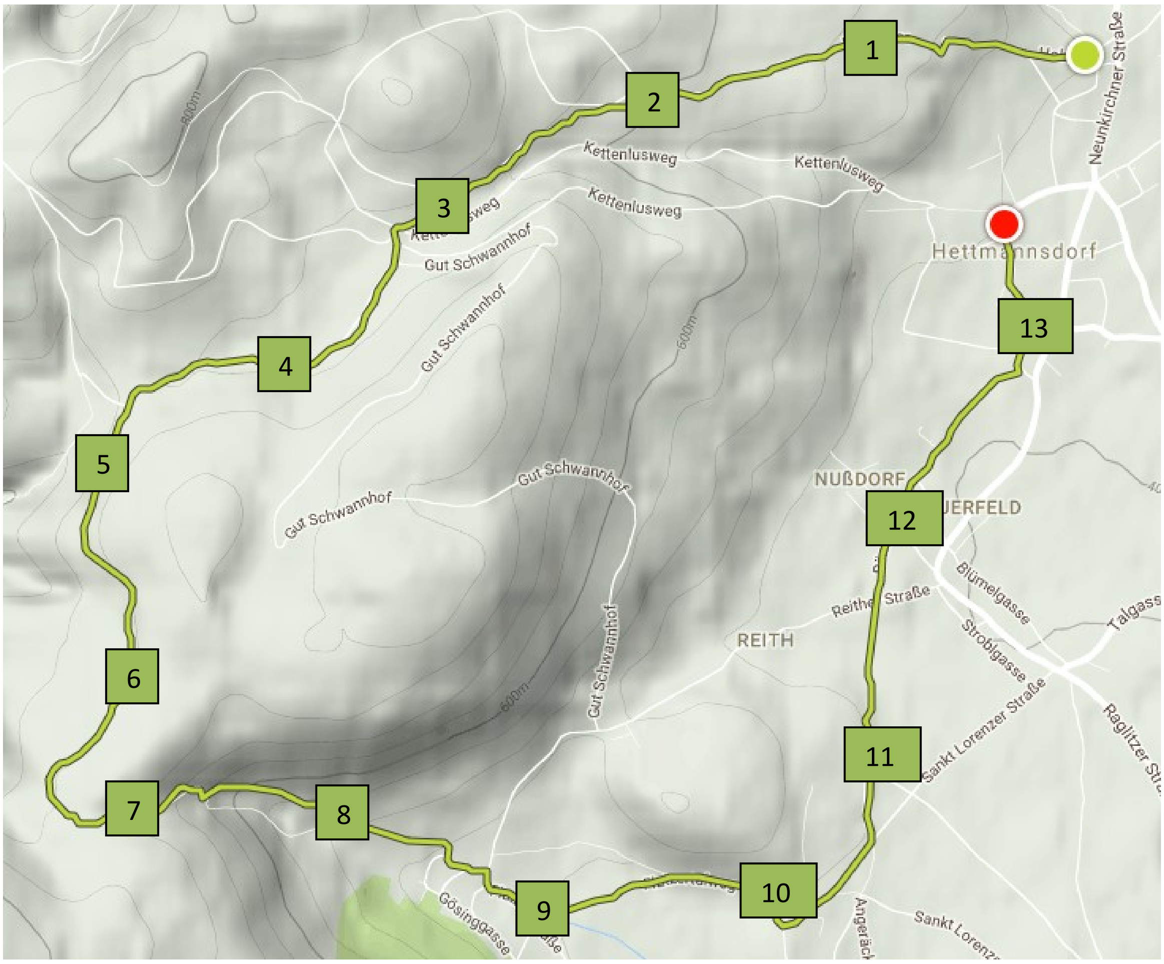
Für die Analyse seines Trainingsfortschrittes möchte der Läufer seine Pace (min pro km) und seine durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen den jeweiligen zurückgelegten Kilometern (z.B. zwischen Kilometer 1 und 2, 2 und 3, etc.) wissen.

Wie könnte er sich diese Daten aus der angegebenen Tabelle berechnen?

Diese vermutlich leicht zu beantwortende Fragestellung dient rein der Kontaktaufnahme mit dem zu bearbeitenden Inhalt. Aufgrund von Vorwissen sollte hier noch kein experimenteller

Zugang nötig sein. Zusätzlich wird hier bereits ein grob vereinfachter Differenzenquotient benötigt (Differenz des zurückgelegten Weges/ Differenz der vergangenen Zeit).

Folgende Grafik der gewählten Laufstrecke konnte der Läufer auf einer Laufsport-Homepage entdecken:



Da diese Strecke einige Höhenunterschiede aufweist, interessieren den Läufer zusätzlich folgende Durchschnittsgeschwindigkeiten:

- *Zwischen dem Startpunkt und dem höchsten Punkt*
- *Zwischen den höchsten Punkt und dem Punkt nach dem steilsten Bergab-Stück*
- *Zwischen dem Punkt des steilsten Bergab-Stückes und dem Ziel*

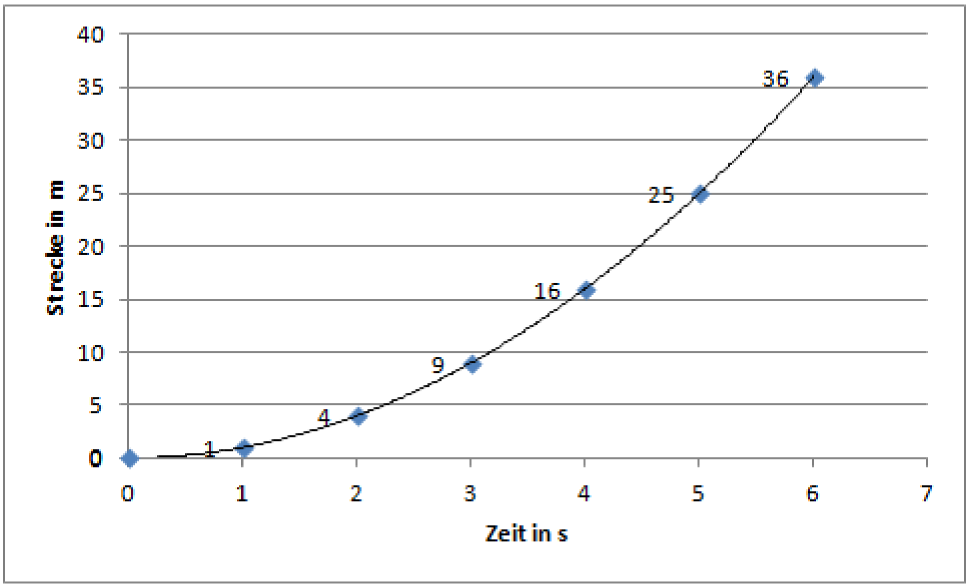
Wie können diese durchschnittlichen Geschwindigkeiten berechnet werden?

Diese Fragestellung zielt auf die Berechnung von Differenzenquotienten mit unterschiedlichen Wegdifferenzen ab. Die Methode des Experimentierens wird hierbei bereits stärker als bei der vorhergegangenen Fragestellung eingesetzt, da die diversen benötigten Punkte zuerst mithilfe der in der Grafik gegebenen Höhenschichtlinien bestimmt werden müssen. Zusätzlich zielt diese und die vorherige Fragestellung auf die wiederholte

Durchführung von nach der ersten Berechnung bereits bekannten Rechenoperationen, also auf Aktionen ab, welche dadurch verinnerlicht, und somit zu Prozessen werden können.

Nach der Laufeinheit entdeckt der Läufer in der Nähe einer Volksschule eine Geschwindigkeitsanzeige, welche die AutofahrerInnen an die maximale Geschwindigkeit erinnern soll. Er möchte seine Geschwindigkeit messen und steigert diese konstant bis zur Anzeige. Das Ergebnis lautet 26 km/h.

Er ist davon nicht überzeugt und versucht sein Glück erneut – dieses Mal nimmt er jedoch seine GPS-Uhr mit. Er startet sie, und steigert sein Tempo konstant bis zur Anzeige (er löst diese nach exakt 4 Sekunden aus) – das Ergebnis bleibt bei 26 km/h. Zuhause angekommen wertet er die Daten seiner Uhr mithilfe des PCs aus. Er erhält folgende Grafik (mod. nach http://einfache-physik.npage.de/beschleunigte-bewegung.html):



Wie kann er mithilfe der gegeben Daten und den Erfahrungen aus den vorherigen Fragestellungen seine momentane Geschwindigkeit bei der Anzeige, also nach 4 Sekunden, herausfinden?

Stimmt die Anzeige laut deinen Überlegungen?

Diese Fragestellungen führen die Grundidee des methodischen Aufbaus von der absoluten, über die mittlere bis hin zur momentanen Geschwindigkeit fort. Die erwünschte Vorgehensweise der SchülerInnen wäre die Übertragung des zuvor mehrfach berechneten Differenzenquotienten zum Differentialquotienten (mithilfe der Intervallverkleinerung). Aufgrund der gegeben Grafik eröffnen sich den SchülerInnen mehrere Lösungsmöglichkeiten. Einerseits könnten sie das Problem geometrisch lösen (würde auf die Grundvorstellung der Tangentensteigung zurückführen), andererseits wäre auch eine algebraische Methode mithilfe des aus der Grafik ablesbaren Funktionsterms $s(t) = t^2$ möglich, bei welcher es wiederum die Idee der Intervallverkleinerung benötigt.

Die Bearbeitung der beiden letzten Fragestellungen ist mit Sicherheit am schwierigsten für die SchülerInnen, deshalb muss in der Plenumsphase vor allem auf die diesbezüglichen Lösungsvorstellungen eingegangen werden. Die Lehrperson kann hier, beim Ausbleiben von geeigneten Ideen der Lernenden, auf die Intervallverkleinerung hinweisen, um allen Paaren die anschließende Bearbeitung zu ermöglichen.

Nach der Präsentation der individuellen Ergebnisse, folgt die Systematisierungs- und Absicherungsphase. Hier muss die Lehrperson flexibel sein, um die jeweiligen benutzen Grundvorstellungen fachlich korrekt festzuhalten.

6.3.5. Folgende didaktische Aufbereitung

Um der APOS-Theorie gerecht zu werden und langfristige mathematische Konzepte bezüglich der behandelten Thematik realisieren zu können, sollten im Anschluss an diesen Einstieg vor allem Inhalte folgen, welche die mentale Ebene der Aktion betreffen. Diesbezüglich eignet sich die in der didaktischen Analyse angegebene Tabelle (Tab. 8), welche mehrere Anwendungen des Differentialquotienten angibt. Hier könnte in einer frontalen Unterrichtsphase ein Standardbeispiel mit vorgegebenen Schritten (z.B. Differenzenquotienten ausrechnen, Intervall schrittweise verkleinern, Grenzwert berechnen) durchgeführt werden, welches als Anleitung für folgende, von den SchülerInnen selbstständig bearbeitete Beispiele dient. Hier sollten zumindest drei Anwendungen aus der Tabelle herangezogen werden, um eine Verinnerlichung der einzelnen Schritte gewährleisten zu können. Um feststellen zu können, ob die mentale Ebene des Prozesses erreicht wurde, eigenen sich Fragestellungen seitens der Lehrperson bezüglich der Durchführung von ähnlichen Beispielen. Können die SchülerInnen den Lösungsvorgang beschreiben, ohne ihn explizit durchführen zu müssen, ist diese Ebene erreicht. Zusätzlich kann im Rahmen von Hausübungen festgestellt werden, ob jeder einzelne Schritt durchgeführt wird, oder ob Zwischenschritte ausgelassen, bzw. rein auf mentaler Basis durchgeführt wurden.

Im Anschluss sollten die weiteren Grundvorstellungen der Differentialrechnung besprochen werden. Die passenden Zugänge hierfür wurden bereits im Rahmen der didaktischen Analyse angegeben.

Um die neuen Erkenntnisse zu exaktifizieren, müssen alle zuvor (siehe: Didaktische Analyse) besprochenen Definitionen und Sätze festgehalten werden. Zusätzlich wären Beispiele zur Monotonie von Funktionen, welche mithilfe der Ableitung bestimmt wird, sinnvoll.

Um am Ende dieses Unterkapitels der Differentialrechnung feststellen zu können, ob das eigentliche Ziel, also die mentale Ebene des Objektes, erreicht worden ist, eignen sich mehrere Methoden. Einerseits ist die verwendete Sprache der SchülerInnen ein Indiz dafür. Wird vermehrt von Operationen (z.B. „Verkleinere das Intervall“) als von Hauptwörtern (z.B. Grenzwert, Steigung der Tangente, Differentialquotient) gesprochen, wurde das Ziel wahrscheinlich noch nicht erreicht. Zusätzlich können Beispiele, welche das Verständnis der verschiedenen Grundvorstellungen und Darstellungsmöglichkeiten des Differenzen- und Differentialquotienten überprüfen bzw. miteinander in Beziehung bringen als Kontrolle der stattgefundenen Realisierung des Objektes dienen. Passende Aufgabenstellungen könnten dafür z.B. die Tabellen 8 – 10 darstellen (Tab. 8, Tab. 9, Tab.10). Einzelne Einträge der Tabellen werden gelöscht, wodurch eine Art Lückentext entsteht, welcher von den SchülerInnen wiederum vervollständigt werden sollte. Ist dieser Vorgang möglich, wurde das erworbene Wissen eingekapselt.

6.4. Ableitungsregeln

6.4.1. Vorwissen und Lehrplanbezug

Grundvoraussetzung für die folgende Erarbeitung bzw. Herleitung der Ableitungsregeln ist das Verständnis der im vorhergegangenen Kapitel angegebenen Grundvorstellungen der Differentialrechnung. Zusätzlich muss ein flexibler Umgang mit den diversen symbolischen Darstellungsmöglichkeiten des Differenzen- bzw. Differentialquotienten gegeben sein, da die jeweiligen, nun folgenden formalen Beweisführungen sich jeweils auf verschiedene Symboliken beziehen. Des Weiteren werden Vorkenntnisse bezüglich der graphischen Darstellung diverser Funktionen (z.B. Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen) benötigt, um graphische Herleitungen der Ableitungsregeln zu ermöglichen. Die gesetzliche Grundlage, also der Lehrplan der 7.Klasse AHS (https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07, Zugriff am 08.02.17, 10:16), fordert folgende Inhalte:

- *Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen*
- *Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)*

6.4.2. Didaktische Analyse

Greefrath et al. (2016, S. 166) geben vor der Herleitung einer Ableitungsregel die dafür unumgängliche Definition der Ableitungsfunktion an:

Sei f eine reelle Funktion. Die Funktion f', die jedem x- Wert, bei dem f differenzierbar ist, den Wert $f'(x)$ zuordnet, heißt Ableitungsfunktion von f.

Diese Definition soll den SchülerInnen bereits vor dem ersten Kontakt mit den Ableitungsregeln klar machen, bzw. verdeutlichen, dass Ableitungsfunktionen tatsächlich Funktionen sind, welche auch graphisch darstellbar sind. Mithilfe dieser Vorstellung können Funktionen graphisch „differenziert" werden. Diese Art der Herleitung ersetzt zwar nicht die strenge Beweisführung, sie dient jedoch einer anschaulichen, von den SchülerInnen selbstständig bearbeitbaren Vorgehensweise, welche anschließend mithilfe der Definition des Differentialquotienten exaktifiziert werden kann (vgl. ebd., S. 188 f.). Dieser graphische Zugang baut auf der Grundvorstellung der Tangentensteigung auf und kann ideal mit Technologieeinsatz (z.B. GeoGebra) durchgeführt werden. Zuerst wird die abzuleitende Funktion geplottet und ein Punkt mit dynamischem Argument wird am Funktionsgraphen angeheftet. Anschließend wird eine Tangente durch diesen, auf der Kurve verschiebbaren Punkt gelegt. Nun muss ein weiterer Punkt eingezeichnet werden, welcher dasselbe dynamische Argument wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt haben soll. Wird nun der erste Punkt verschoben, bewegt sich der zweite, je nach der Steigung der Tangente im ersten Punkt, mit. Um diese Bewegung visualisieren zu können, kann das Spur-Werkzeug verwendet werden.

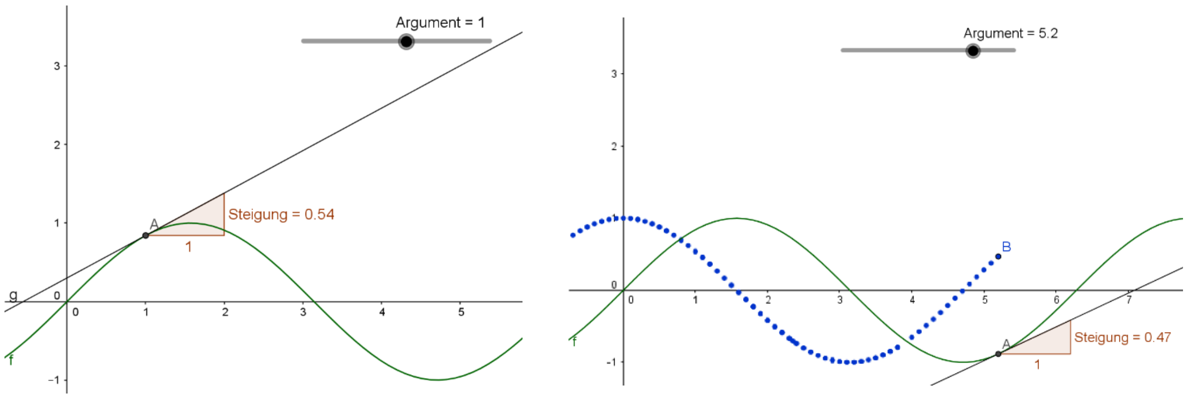


Abb. 11: graphisches Differenzieren am Beispiel $sin\ (x)$

6.4.2.1. Konstantenregel

Die Ableitung von Konstanten kann mithilfe der Grundvorstellung der Tangentensteigung und jener der lokalen Änderungsrate intuitiv leicht erklärt werden. Dazu wird eine beliebige konstante Funktion (z.B. $f(x) = 7$) graphisch dargestellt. Aufgrund der waagrechten Gerade ist zu erkennen, dass diese Funktion nicht steigt – somit haben auch alle Tangenten in den jeweiligen Punkten der Funktion keine Steigung - die Ableitungsfunktion einer konstanten Funktion ist gleich null ($f'(x) = 0$). Man kann diese Funktion ebenso unter dem Aspekt der lokalen Änderungsrate betrachten. Angenommen die Funktion $s(t) = 7$ beschreibt den zurückgelegten Weg für die vergangenen Zeit t. Nun bleibt der Weg stets gleich (konstant), egal wie viel Zeit vergangen ist – er ändert sich nicht – die durchschnittliche, als auch die momentane Änderungsrate sind somit gleich null.

Die symbolische Darstellung bzw. die Exaktifizierung der Konstantenregel sieht folgendermaßen aus (vgl. Wessenberg, Hofbauer & Thurner, 2015, S. 129):

Sei $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) differenzierbar, dann gilt $f'(x) = 0$

Die symbolische Beweisführung verwendet die Definition des Differentialquotienten:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \ \ (f\text{ür } h \neq 0)$$

Eine weitere Möglichkeit der Beweisführung setzt die Potenz- und die Faktorenregel voraus, welche im Rahmen der didaktischen Analyse jedoch erst zu einem späteren Zeitpunkt besprochen werden. Der Vollständigkeit halber werden diese Regeln hier als bekannt vorausgesetzt. Somit kann folgender Beweis geführt werden.

$$f(x) = k = kx^0$$

Aufgrund der Potenz- und der Faktorenregel folgt deshalb:

$$f'(x) = k \cdot 0 \cdot x^{-1} = \frac{0}{x} = 0 \ (f\text{ür } x \neq 0)$$

6.4.2.2. Faktorenregel

Diese Regel kann wiederum graphisch, mithilfe der Grundvorstellung der Tangentensteigung eingeführt werden (vgl. Greefrath et al., S. 167). Hierfür eignet sich erneut der Einsatz von Technologieunterstützung (z.B. GeoGebra). Zunächst wird eine beliebige Funktion eingezeichnet und ein beliebiger Punkt auf ihr ausgewählt. In diesem Punkt wird die Steigung angegeben, bzw. das Steigungsdreieck der Tangente eingezeichnet. Nun wird die gegebene Funktion mit einem beliebigen Faktor k multipliziert. Dies bewirkt ersichtlicher Weise eine Streckung des Graphen in y-Richtung um den gewählten Faktor k (vgl. ebd.). Wird nun ein Punkt mit demselben Argument wie der erste, jedoch auf dem gestreckten Graphen, und die Steigung der Tangente der Kurve in diesem Punkt eingezeichnet, ist zu erkennen, dass auch die y-Kathete des Steigungsdreieckes um den Faktor k gestreckt wurde. Die x-Kathete bleibt jedoch unverändert (vgl. ebd., S. 168).

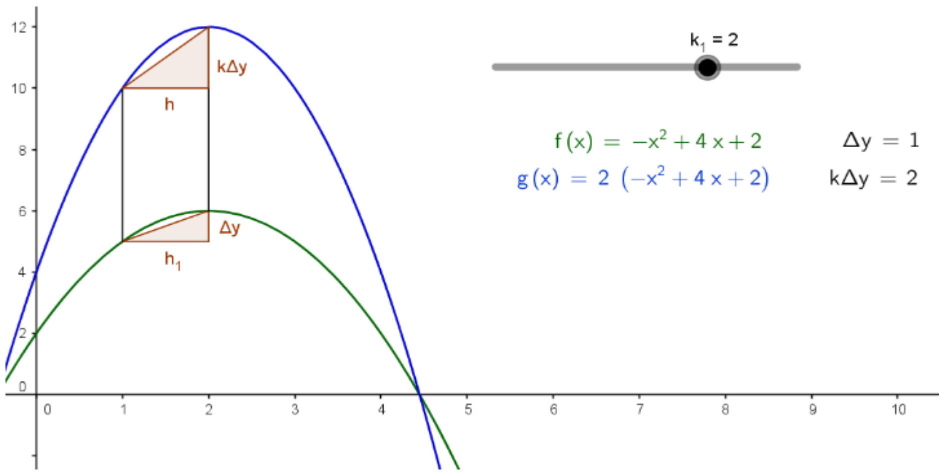


Abb.12: Steigungsdreiecke zur Faktorenregel (mod. nach ebd.)

Die Faktorenregel lautet somit wie folgt (vgl. ebd., S. 167):

Für jede Funktion u und jede Zahl k ist im Differenzierbarkeitsbereich von u die Funktion $f = ku$ differenzierbar und es gilt $f' = ku'$.

Die exakte mathematische Beweisführung verwendet wiederum die Definition des Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\lim_{h \to 0} \frac{ku(x+h) - ku(x)}{h} = k \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = ku'(x)$$

6.4.2.3. Summen- und Differenzenregel

Die geometrische Herleitung der Summen- bzw. der Differenzenregel bedient sich wiederum der Grundvorstellung der Tangentensteigung (vgl. ebd., S. 168). Der Graph der Summenfunktion $u + v$ (u und v sind beliebige Funktionen) entsteht durch punktweises Addieren von $u(x)$ bzw. $v(x)$ an die Stelle x (vgl. ebd., S. 169). Derselbe Prozess lässt sich wiederum an einem beliebigen Steigungsdreieck einer Tangente an den Funktionsgraphen erklären, da bei gleichbleibender x-Kathete (h) die y-Kathete des einen Graphen (z.B. u) zu derjenigen des zweiten Graphen (z.B. v) addiert wird (vgl. ebd.).

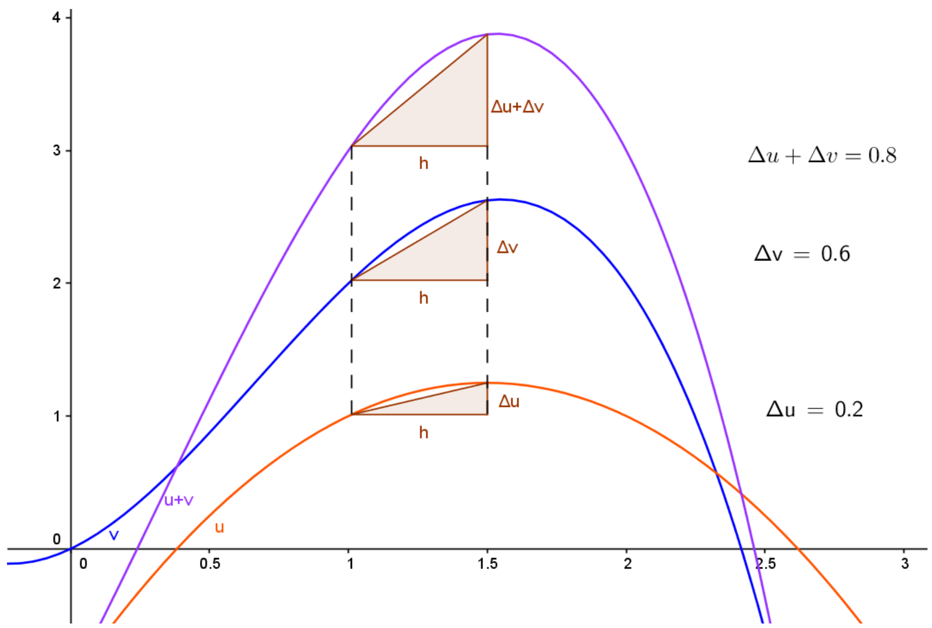


Abb. 13: Steigungsdreiecke zur Summenregel (mod. nach ebd.)

Die Summenregel (analog jener der Differenzenregel) kann folgendermaßen angegeben werden (vgl. ebd., S.168):

Für zwei Funktionen u und v ist im gemeinsamen Differenzierbarkeitsbereich die Summenfunktion $f = u + v$ differenzierbar und es gilt $f' = u' + v'$.

Natürlich sollte auch hier die exakte mathematische Beweisführung den SchülerInnen nicht vorenthalten werden.

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} =$$

$$= u'(x) + v'(x)$$

Für die Verallgemeinerung dieser Regel kann die graphische, bzw. die exakte mathematische Herleitung gleichermaßen, jedoch mit mehreren Summanden durchgeführt werden. Analog funktioniert die Herleitung der Differenzenregel.

6.4.2.4. Potenzregel bzw. Ableiten von Polynomfunktionen

Der erste Kontakt mit dieser Regel könnte wiederum mithilfe der Grundvorstellung der Tangentensteigung und dem Spurwerkzeug der Technologieunterstützung (z.B. GeoGebra) erfolgen. Somit kann erkannt werden, dass die Ableitungsfunktionen von linearen Funktionen zu konstanten, von quadratischen zu linearen und von allgemein Potenzfunktionen bzw. Polynomfunktionen n-ten Grades zu Funktionen (n-1)-ten Grades werden. Diese erste Vermutung lässt sich nach Greefrath et al. (ebd., S. 170) auch mithilfe der Definition des Differentialquotienten bestätigen.

Geeignete Beispiele hierfür wären Funktionen der Form $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ mit $n = 0,1,2,3$. Daraus ergeben sich folgende Grenzwerte:

$n = 0$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$
$n = 1$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$
$n = 2$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2x + h = 2x$
$n = 3$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h} =$ $= \lim\limits_{h \to 0} 3x^2 + 3hx + h^2 = 3x^2$

Abb. 11: Grenzwerte von elementaren Potenzfunktionen

Anschließend sollte die allgemeine Potenzregel angegeben werden, um von den speziellen Fällen auf die Allgemeinheit schließen zu können (vgl. ebd., S. 170):

Die Potenzfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist im gesamten Definitionsbereich differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.

Die symbolische Herleitung dieser Formel benutzt eine weitere, bereits in Tabelle neun (Tab. 9) angegebene Darstellungsmöglichkeit des Differentialquotienten (vgl. Bleier, 2011, S. 65):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \cdots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1} =$$

$$= x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}$$

Beim Übergang von x zu x_0 muss speziell auf die Sprache geachtet werden. Hier darf aufgrund der Grundvorstellung des Grenzwertes nicht von Einsetzen gesprochen werden, sondern von einer unbegrenzten Annäherung aller x-Werte an x_0.

Wird die Potenzregel mit der Summen- bzw. Differenzenregel kombiniert, können Polynomfunktionen abgeleitet werden.

6.4.2.5. Produktregel

Der Differentialquotient zweier multiplikativ verbundener, differenzierbarer Funktionen ist intuitiv schwer zu erfassen (vgl. ebd., S. 172). Um diese Regel grafisch darzustellen, wird in der Literatur (z.B. ebd.) auf Rechtecke mit verlängerten Seiten zurückgegriffen, welche jedoch nur den Sachverhalt darstellen, ihn aber nicht herleiten. Zusätzlich deckt sich diese Darstellung nur teilweise mit den Grundvorstellungen der Differentialrechnung und kann somit vernachlässigt werden. Um den Entfall der grafischen Darstellung zu kompensieren, sind vor allem Beispiele geeignet, welche sich auf bereits bekannte Ableitungsregeln zurückführen lassen. Um die naheliegende, aber dennoch falsche Idee des separaten Differenzierens bei Produkten von differenzierbaren Funktionen zu korrigieren, könnte folgendes Beispiel dienlich sein:

Sein u und v differenzierbare Funktionen mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = x$, dann ergibt sich aus ihrem Produkt die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x) = x^2 \cdot x = x^3$. Die Ableitungsfunktion von f ist mithilfe der Potenzregel berechenbar und beträgt $f'(x) = 3x^2$. Würde man vorab separat differenzieren ($u'(x) = 2x, v'(x) = 1$) und danach das Produkt der abgeleiteten Funktionen berechnen, wäre das Ergebnis ($f'(x) = 2x$) nicht dasselbe wie zuvor (vgl. Geretschläger, Griesel & Postel, 2009, S. 61).

Die SchülerInnen sollten somit erkennen können, dass die Produktregel nicht analog zur Summen-bzw. Differenzenregel funktionieren kann. Nun muss jedoch eine passende, allgemeine Regel gefunden werden. Da zu diesem Zeitpunkt bereits mehrere Herleitungen von Ableitungsregeln mithilfe des Differentialquotienten stattgefunden haben, sollte dieses Vorgehen den SchülerInnen bereits als exakte Methode vertraut sein. Jedoch muss die Herleitung der Produktregel auf einen, in der Analysis häufig verwendeten Trick zurückgreifen – nämlich auf die Addition von null (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 171).

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{u(x+h)v(x+h) - \boldsymbol{u(x)v(x+h)} + \boldsymbol{u(x)v(x+h)} - u(x)v(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to o} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) \right) + \lim_{h \to o} \left(u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Durch die Addition von null und geschicktes Umformen erhält folgende Regel für das Differenzieren von Produkten (vgl. ebd.):

Für zwei Funktionen u und v ist im gemeinsamen Differenzierbarkeitsbereich die Produktfunktion $f = uv$ differenzierbar und es gilt $f' = u'v + uv'$.

6.4.2.6. Kettenregel

Die Kettenregel sollte erst nach den vorhergegangenen Ableitungsregeln besprochen werden, da ihre Herleitung ein gewisses Maß an Vorerfahrung im Umgang mit der Definition des Differentialquotienten benötigt. Zusätzlich kann keine hilfreiche grafische Erklärung angegeben werden. Greefrath et al. (2016, S. 172 f.) geben jedoch alternative Wege an, um intuitive Vorstellungen der Kettenregel zu ermöglichen. Ein Beispiel dafür wäre die Geschwindigkeit im freien Fall in Abhängigkeit der Zeit ($v = gt$), welche mit der dazu passenden kinetischen Energie in Abhängigkeit der gerade angegeben Geschwindigkeit ($E = \frac{1}{2}mv^2$) „verkettet" werden kann. Die Verkettung liefert die kinetische Energie in Abhängigkeit der vergangenen Zeit ($t \longmapsto E_{kin}$) (vgl. ebd.). Somit kann eine grundlegende Vorstellung bezüglich der Verknüpfung zweier Funktionen erzeugt werden. Die Auswirkung auf die Ableitung kann mithilfe der Verkettung zweier linearer Funktionen verdeutlicht werden. Gegeben sind zwei linearen Funktionen $u(x) = m_1x + t_1$ und $v(x) = m_2x + t_2$. Durch ihre Verkettung entsteht die Funktion $f(x) = u(v(x)) = m_1(m_2x + t_2) + t_1 = m_1m_2x + m_1t_2 + t_1$. Es ist somit ersichtlich, dass die Steigung von f dem Produkt der Steigungen der Geraden u und v entspricht – das ist die Grundidee der Kettenregel (vgl. ebd.). Die darauf aufbauende Regel lautet folgendermaßen (vgl. ebd.):

Seien eine Funktion v an der Stelle $x \in D_v$ differenzierbar und eine Funktion u an der Stelle $v(x) \in D_u$ differenzierbar. Dann ist die Verkettung $f = u \circ v$ an der Stelle x differenzierbar mit $f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$.

Die dazu passende Beweisführung bedarf wiederum eines Tricks der Analysis. Im Gegensatz zur Produktregel wird der folgende Differentialquotient mit dem Faktor eins multipliziert (vgl. ebd.).

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{u\big(v(x+h)\big) - u(v(x))}{h} = \lim_{h \to o} \left(\frac{u\big(v(x+h)\big) - u\big(v(x)\big)}{\boldsymbol{v(x+h) - v(x)}} \cdot \frac{\boldsymbol{v(x+h) - v(x)}}{h} \right) =$$

$$= u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$$

Diese Beweisführung setzt voraus, dass $v(x+h) - v(x) \neq 0$ ist, was natürlich bei monotonen Funktionen immer gilt. Den SchülerInnen muss jedoch vermittelt werden, dass diese Ableitungsregel auch im Allgemeinen zutrifft (vgl. ebd., S174).

6.4.2.7. Quotientenregel

Um auf bereits Bekanntem aufzubauen, eignet es sich die Quotientenregel mithilfe der Produktregel herzuleiten (vgl. ebd., S. 176). Dazu wird die differenzierbare Funktion f, welche sich aus dem Quotienten der Funktionen u und v (der Wert null wird bei v ausgeschlossen) zusammensetzt, betrachtet. Der Quotient kann jedoch gleichermaßen als

Produkt aufgefasst werden, auf welches beim Ableiten die Produktregel angewandt werden kann.

$$f = \frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}, v \neq 0$$

$$f' = u'\frac{1}{v} - u\frac{1}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Mithilfe der bereits bekannten Produktregel kann somit die Quotientenregel einfach hergeleitet und anschließend definiert werden (vgl. ebd., S. 176):

Gegeben sind zwei Funktionen u *und* v*, die in einem gemeinsamen Bereich* D *differenzierbar sind. Die Quotientenfunktion* $f = \frac{u}{v}$ *ist an allen Stellen von* D *definiert, an denen* v *nicht den Wert null annimmt, und sie ist dort differenzierbar. Dabei gilt:* $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$*.*

6.4.2.8. Ableitung der Exponentialfunktion

Exponentialfunktionen sollten den SchülerInnen bereits seit dem Themengebiet der Wachstumsaufgaben bekannt sein, bei welchen sie die allgemeine Basis (a) und die spezielle der Euler`schen Zahl (e) kennen gelernt haben. Das zu diesem früheren Zeitpunkt erworbene Wissen über die graphische Darstellung der Exponentialfunktionen dient nun einerseits der graphischen, aber gleichermaßen auch der exakten mathematischen Herleitung der Ableitungsfunktion mithilfe des Differentialquotienten. Der erste Kontakt damit sollte wiederum mithilfe des graphischen Differenzierens stattfinden.

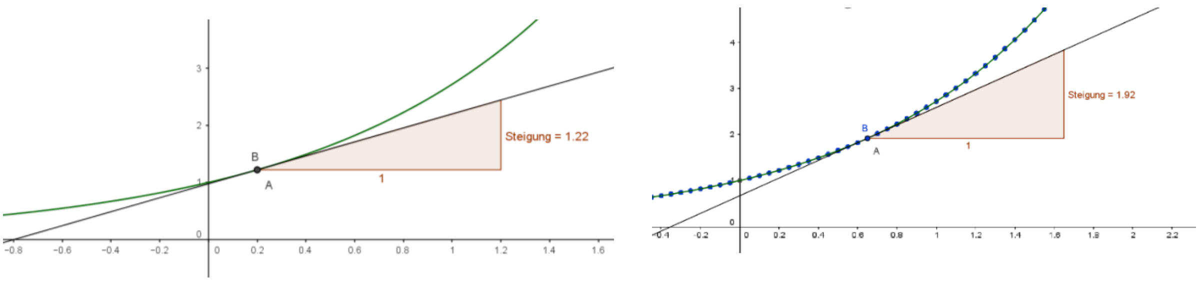


Abb. 14: Graphisches Differenzieren der Exponentialfunktion

Es ist aufgrund des Spurwerkzeuges der Technologieunterstützung (z.B. GeoGebra) leicht zu erkennen, dass die Ableitungsfunktion und die ursprüngliche Funktion ($f(x) = e^x$) denselben Funktionsgraphen beschreiben. Der Schluss liegt somit nahe, dass der Term der Ableitungsfunktion dem der Exponentialfunktion mit der Basis e entspricht. Um diese Vermutung zu bestätigen benutzen Greefrath et al. (ebd., S. 180) den Weg über die allgemeine Basis a und der Definition des Differentialquotienten:

$$f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \longmapsto a^x, a \in \mathbb{R}^+$$

$$f_a{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_a(x+h) - f_a(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Der Faktor $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ kann als Ableitung an der Stelle null ($f_a{'}(0)$) interpretiert werden, was wiederum zu folgender Gleichung führt:

$$f_a{'} = f_a{'}(0) \cdot f_a$$

Nun stellt sich die Frage, für welche Werte von a die Steigung der Tangente im Punkt (0 I 1) gleich eins ist ($f_a{'}(0) = 1$). Diese Eigenschaft besitzt lediglich die Basis der Euler`schen Zahl. Somit ergibt sich folgende Ableitungsregel (vgl. ebd., S.181):

Die Funktion $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$ *ist in ganz* $\mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $f{'}(x) = e^x$*.*

Die exakte Regel für die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion mit beliebiger Basis folgt nach der Ableitungsregel der Logarithmusfunktion.

6.4.2.9. Ableitung der Logarithmusfunktion

Die Herleitung der Ableitungsfunktion der Logarithmusfunktion kann idealerweise wiederum mit der Vorgehensweise des graphischen Differenzierens erfolgen, wobei hier zusätzlich Vorkenntnisse zu gebrochen rationalen Funktionen vorhanden sein müssen.

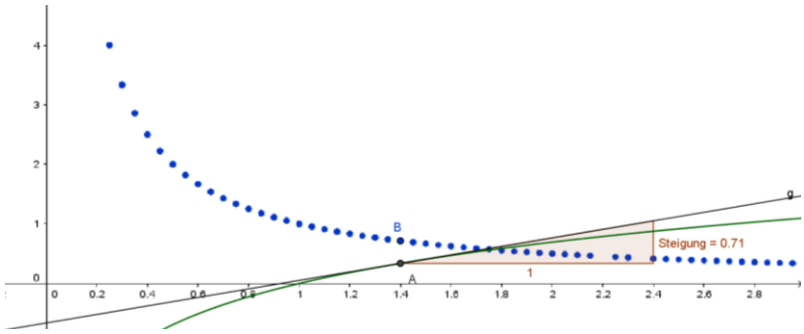


Abb. 15: Graphisches Differenzieren der Logarithmusfunktion

Das geübte Auge kann aufgrund der Spur des Punktes B den Verlauf der gesuchten Ableitungsfunktion $f{'}(x) = \frac{1}{x}$ erkennen. Diese Vermutung lässt sich mithilfe der Kettenregel und der alternativen Schreibweise von $x = e^{\ln(x)}$ bestätigen (vgl. ebd., S. 182):

$$f_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \longmapsto \ln(x)$$

Die Gleichung $e^{\ln(x)} = x$ wird nun auf beiden Seiten differenziert:

$$e^{\ln(x)} \cdot ln{'}(x) = 1 \Rightarrow ln{'}(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Mithilfe des Wissens über die Ableitungsfunktionen der Exponentialfunktion mit der Basis e und der dazu passenden Logarithmusfunktion können Regeln für allgemeine Basen hergeleitet werden. Dazu wird wiederum die Ketten- bzw. Faktorenregel und die vorab erwähnte, alternative Schreibweise benötigt (vgl. ebd., S. 183):

$$f_a(x) = a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a)\cdot x}$$

$$f_a{'}(x) = e^{\ln(a)\cdot x} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$$

$$g_a(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$g_a{'}(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

6.4.2.10. Ableitungen trigonometrischer Funktionen

Die Methode des graphischen Differenzierens eignet sich ideal für die Ableitung der Sinus- und Cosinusfunktion, da der bereits bekannte Zusammenhang dieser beiden Funktionen mithilfe die Phasenverschiebung (z.B. $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$) genutzt werden kann. Aufgrund des graphischen Zuganges wird den SchülerInnen schnell klar, dass die Ableitungsfunktion einen ähnlichen Graphen wie die ursprüngliche Funktion besitzt, welcher jedoch etwas verschoben wurde – die Vermutung sollte somit zur korrekten Ableitungsregel führen.

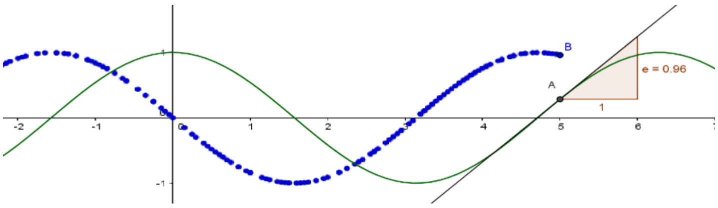


Abb. 16: Graphisches Differenzieren der Cosinusfunktion

Um die Vermutungen bestätigen zu können, ist in diesem Fall die bisherige Berechnung des Differentialquotienten zu aufwendig, da neben dem Einsatz von trigonometrischen Formeln zusätzlich auftretende Beweislücken behandelt werden müssten (vgl. ebd., S. 186). Cotes (1758) bietet eine anschauliche und auf bereits bekannten Ideen (lokale Linearisierung) basierende Erklärung.

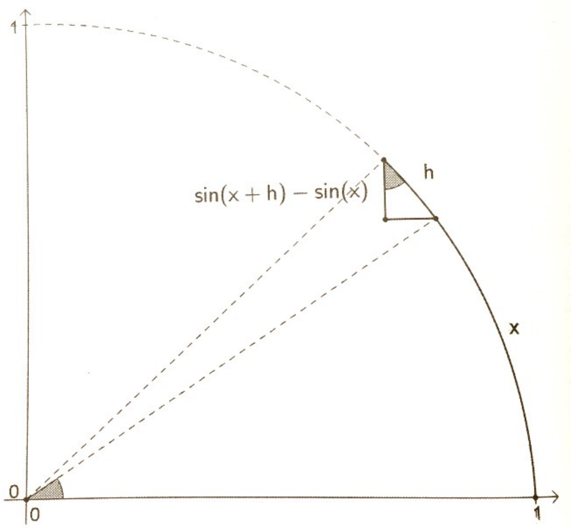


Abb. 17: Differenzenquotient am Einheitskreis (nach Greefrath et al., 2016, S. 188)

Es werden hier also die Winkel bzw. Bogenlängen von x und $x + h$ und ihre jeweiligen Sinusfunktionswerte $(\sin(x), \sin(x+h))$ betrachtet (vgl. ebd.). Für kleine Werte von h kann die Krümmung des Kreises vernachlässigt werden, wodurch die geradlinige Strecke h zur Hypotenuse des eingezeichneten Dreiecks wird. Zusätzlich besitzt dieses Dreieck einen Winkel, der in Grenzlage von $h \to 0$ dem Winkel x entspricht (vgl. ebd.). Somit ergibt sich mithilfe der Cosinusdefinition folgender Quotient:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \approx \cos(x)$$

Für $h \to 0$ entspricht der Grenzwert exakt der Cosinusfunktion. Diese geniale, aber teilweise vom Himmel fallende Methode bietet eine Alternative zu den bislang erfolgten Exaktifizierungen und verbindet das bereits erworbene Wissen der trigonometrischen Funktionen mit der neuen Materie der Differentialrechnung. Diese Koordination von Wissen wird weiterhin verwendet, um die Ableitungsfunktion der Cosinus- bzw. der Tangensfunktion zu finden. Den SchülerInnen sollte bereits vor, bzw. zumindest nach dem graphischen Differenzieren bekannt sein, dass folgender Zusammenhang zwischen der Sinus- und der Cosinusfunktion gilt (vgl. ebd., S. 189):

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{*}$$

Somit kann die Ableitung der Cosinusfunktion folgendermaßen erfolgen:

$$\cos'(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =^{*} \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

Die Ableitung der Tangensfunktion kann wiederum mithilfe ihrer Definition und der Produkt- bzw. Quotientenregel erfolgen:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

6.4.3. Zusammenfassung der didaktischen Analyse

Die angegebenen Herleitungen der Ableitungsregeln beziehen sich in den meisten Fällen auf das graphische Differenzieren, da diese Methode eine anschauliche Grundlage für das Verständnis der symbolischen Darstellung ermöglicht. Zusätzlich knüpft sie direkt an das vorhergegangene Kapitel der diversen Grundvorstellungen der Differentialrechnung an. Die Exaktifizierung der Ableitungsregeln sollte im Anschluss an das graphische Ableiten nicht fehlen, da sie die Vermutungen der SchülerInnen verifiziert und ihnen zusätzlich eine im Unterricht selten vorkommende Art des mathematischen Arbeitens näher bringen kann – die Beweisführung. Aufgrund von Zeitmangel muss nicht jeder Beweis explizit durchgeführt werden, jedoch sollte die Herleitung von einigen der analysierten Regeln mithilfe des Differentialquotienten stattfinden. Idealerweise werden die raffinierten Tricks der Analysis (z.B. Addition von null) und die anschauliche Methode der trigonometrischen Ableitungsfunktionen besprochen, um die unterschiedlichen Möglichkeiten der Herleitungen aufzuzeigen.

Abschließend sollten alle Ableitungsregeln zusammengefasst werden, wobei den SchülerInnen nochmals klar gemacht werden muss, dass diese Regeln reine Vereinfachungen der Grenzwertberechnung des Differenzenquotienten sind.

6.4.4. Planung des zweiten Kapiteleinstiegs

Wie bereits zuvor werden auch im Rahmen der zweiten Planung die einzelnen Schritte kommentiert, jedoch findet sich eine unkommentierte Version im Anhang. Bevor der Einstieg zu den Ableitungsregeln erfolgen kann, muss die Definition der Ableitungsfunktion besprochen werden und eine beliebige differenzierbare Funktion sollte gemeinsam mit den SchülerInnen mithilfe von Technologieeinsatz graphisch abgeleitet werden, da die folgende Planung auf diesem Grundwissen basiert. Als handlungsorientierte Vorgehensweise der Planung und Umsetzung dieses Kapiteleinstieges dient das Gruppenpuzzle. Mithilfe dieser Methode können alle SchülerInnen gleichzeitig die diversen Ableitungsregeln bearbeiten und ihre Erkenntnisse untereinander austauschen. Dadurch kann die Vielzahl an Regeln in vergleichsweise kurzer Zeit aktiv bearbeitet werden. Vor Beginn des Einstieges wird der Ablauf des Gruppenpuzzles erklärt und die Gruppen werden eingeteilt. Hierfür müssen vorab die einzelnen Stationen bestimmt werden. Aufgrund der Komplexität der Produkt-, der Quotienten- und der Kettenregel werden ihre Herleitungen am Ende der Methode von der Lehrperson gemeinsam mit den SchülerInnen durchgeführt. Die übrigen Ableitungsregeln können in folgende Gruppen zusammengefasst werden:

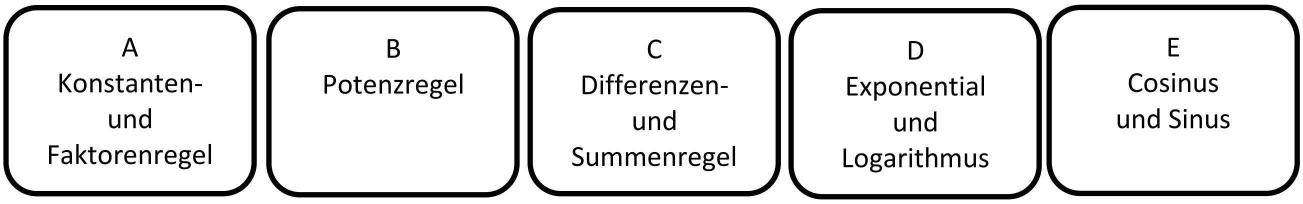


Abb. 18: Einteilung der Gruppen des Gruppenpuzzles

Für die Zuteilung der SchülerInnen zu den passenden Stationen gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten, jedoch eignet sich für das Gruppenpuzzle vor allem das Ziehen von vorab angefertigten Kärtchen, welche neben dem zu bearbeitenden Inhalt (A, B, C, D, E) auch die spätere Gruppe (1,2,3,4,5) der Unterrichtsrunde angibt. Das bedeutet, dass die benötigten Kärtchen zwei Informationen beinhalten müssen. Für eine durchschnittliche Klasse mit 25 Lernenden könnte dies folgendermaßen aussehen:

Tab. 12: Einteilung der Gruppen

A	A	A	A	A	B	B	B	B	B
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
C	C	C	C	C	D	D	D	D	D
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
E	E	E	E	E	F	F	F	F	F
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Quelle: mod. nach Barzel et al., 2015, S. 103

Um Verwirrungen bei der Bildung der Experten- bzw. der Unterrichtsrundengruppen zu vermeiden, sollte der Klassenraum in mehrere Stationen unterteilt werden, welche jeweils einen Buchstaben bzw. eine Zahl bekommen, um somit die diversen Phasen des Gruppenpuzzles leichter organisieren zu können. In der Expertenrunde sind die SchülerInnen somit Teil jener Station, bei welcher ihr gezogener Buchstabe angebracht wurde. Im Rahmen der Unterrichtsrunde gilt gleiches, jedoch gibt dieses Mal die Zahl die passende Station an. Nach der Zuteilung der Personen zu den diversen Gruppen bekommen alle SchülerInnen für ihre Themen passende Aufgabenstellungen, welche sie zuerst alleine bearbeiten, um im Anschluss ihre Ergebnisse der Gruppe präsentieren, bzw. mit der Gruppe diskutieren zu können. Dafür sind insgesamt ca. 25 Minuten vorgesehen.

Nach der Expertrenrunde muss die Gruppe die gemeinsame Lösung der Lehrperson präsentieren – ist diese in Ordnung, kann die Unterrichtsrunde beginnen. Nachdem die ersten ExpertInnen ihre Themen präsentiert haben, folgt direkt die Exaktifizierung in Zusammenarbeit mit der Lehrperson. Hierfür werden die Methoden der didaktischen Analyse angewandt. Erst danach folgt die Präsentation der zweiten Gruppe und wiederum die passende Herleitung.

Die folgenden Aufgabenstellungen werden idealerweise auf Kärtchen gedruckt und danach den SchülerInnen gegeben.

Gruppe A: Konstanten- und Faktorenregel

Konstantenregel

- *Zeichne einen beliebigen konstanten Funktionsgraphen mithilfe von GeoGebra.*
- *Zeichne einen beliebigen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, ein.*
- *Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.*
- *Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.*
- *Versuche dasselbe mit einer anderen konstanten Funktion.*
- *Was kannst du aus deinen Grafiken und Daten schließen?*
- *Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von konstanten Funktionen auf:*

$$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$$
$$f'(x) = \underline{\qquad\qquad}$$

Die expliziten Handlungsanweisungen beziehen sich auf die mentale Ebene der Aktion und sollen die SchülerInnen Schritt für Schritt zum erwünschten Ergebnis führen. Die Formulierung einer allgemeinen Regel hingegen erfordert eine wesentlich höhere kognitive Leistung und kann somit der Ebene des Prozesses zugeschrieben werden, da die aufgestellte Regel eine allgemeine Handlungsanweisung darstellt. Auftretende Schwierigkeiten im Verlauf der Bearbeitung können von der Lehrperson mithilfe von zielgerichteten Fragen behoben werden. Die anschließende gemeinsame Expertenrunde dient ebenso der Bereinigung von Fehlvorstellungen.

Faktorenregel

- *Zeichne einen beliebigen Funktionsgraphen mithilfe von GeoGebra.*
- *Zeichne einen beliebigen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, ein.*
- *Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.*
- *Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.*
- *Zeichne einen neuen Funktionsgraphen ein, indem du den vorherigen Funktionsterm mit einer beliebigen Zahl multiplizierst.*
- *Zeichne einen Punkt mit gleicher x-Koordinate wie beim ersten Punkt ein, welcher jedoch auf dem neuen Funktionsgraphen liegt.*
- *Zeichne auch in diesem Punkt die Tangente und ihre Steigung ein.*
- *Versuche einen Zusammenhang zwischen den zwei Steigungen zu erkennen.*
- *Stelle eine Vermutung bezüglich der Allgemeingültigkeit dieses Zusammenhangs auf:*

$f(x) = ku, k \in \mathbb{R}, u$ *ist eine beliebige Funktion*

$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Der Grund für die Zusammenlegung dieser beider Regeln ist jener, dass beide graphischen Herleitungen schnell durchzuführen und annähernd gleich aufgebaut sind. Zusätzlich sind diese beiden Regeln Voraussetzung bzw. die Grundlage für die folgenden und sollten somit zu Beginn besprochen und exaktifiziert werden.

Gruppe B: Potenzregel

- *Zeichne den Funktionsgraphen einer beliebigen Potenzfunktion mithilfe von GeoGebra (z.B. x^2, x^3, etc.).*
- *Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($A = (r, f(r)$).*
- *Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.*
- *Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.*
- *Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat.*
  ($B = (r \mid Steigung)$)
- *Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers.*
- *Führe dieselben Schritte mit einer weiteren Potenzfunktion durch.*

- *Führe dieselben Schritte für eine Potenzfunktion mit negativer Hochzahl (z.B. x^{-2}) durch.*
- *Was fällt dir auf?*
- *Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Potenzfunktionen auf:*

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Die SchülerInnen sollten aufgrund ihres Vorwissens bezüglich der Potenzfunktionen erkennen können, dass der entstandene Ableitungsfunktionsgraph den um eins verringerten Grad der ursprünglichen Funktion hat. Verwenden die SchülerInnen quadratische Potenzfunktionen, kann zusätzlich abgelesen werden, dass der Exponent multiplikativ vor die Basis gezogen wird. Ist diese Erkenntnis von Seiten der Lernenden nicht möglich, sollte die Lehrperson eingreifen und sie mit angebrachten Fragestellungen zur richtigen Lösung leiten.

Gruppe C: Summen- und Differenzenregel

Summenregel

- *Zeichne den Funktionsgraphen einer beliebigen Funktion mithilfe von GeoGebra.*
- *Zeichne einen weiteren Funktionsgraphen einer zum ersten Punkt verschiedenen Funktion mithilfe von GeoGebra.*
- *Addiere diese beiden Funktionsterme und zeichne den entstandenen Funktionsgraphen.*
- *Zeichne drei Punkte mit der gleichen x-Koordinate so ein, dass auf jedem Graph ein Punkt liegt.*
- *Zeichne in allen drei Punkten die Tangente an den jeweiligen Funktionsgraphen und das dazu passende Steigungsdreieck mithilfe des Steigungs-Befehles ein.*
- *Versuche einen Zusammenhang zwischen den drei Steigungen zu erkennen.*
- *Führe dieselben Schritte für die Subtraktion der ersten zwei Funktionen durch.*
- *Stelle eine Vermutung bezüglich der Allgemeingültigkeit dieses Zusammenhangs auf:*

$$f(x) = u + v,\ u \text{ und v sind beliebige differenzierbare Funktionen}$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Der Grund für die Reihung der Gruppen ist jener, dass mithilfe der Potenz- und der Summen- bzw. Differenzenregel Polynomfunktionen ableitbar sind. Das sollte die Lehrperson nach der jeweiligen Präsentation und der darauf folgenden Exaktifizierung unbedingt den SchülerInnen vermitteln.

Gruppe D: Exponential- und Logarithmusableitungsfunktionen

Exponential:

- *Zeichne den Funktionsgraphen einer Exponentialfunktion mit der Basis e ein.*
- *Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($A = (r \mid f(r)$).*
- *Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.*
- *Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.*
- *Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat.*
  ($B = (r \mid Steigung)$)
- *Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers.*
- *Was fällt dir auf?*
- *Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Exponentialfunktionen mit der Basis e auf:*

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Im Anschluss an die Präsentation der SchülerInnenergebnisse sollte die Regel für allgemeine Basen besprochen werden. Zusätzlich kann mithilfe des Einzeichnens von Tagentensteigungen von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = e^{3x}$ bereits die Kettenregel vorbereitet werden. Der gleiche Vorgang eignet sich bei der folgenden Bearbeitung der Logarithmusableitungsfunktion.

Logarithmus:

- *Zeichne den Funktionsgraphen einer Logarithmusfunktion zur Basis e ein.*
- *Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($A = (r \mid f(r)$).*
- *Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.*
- *Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.*
- *Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat.*
  ($B = (r \mid Steigung)$)

- *Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers.*
- *Was fällt dir auf?*
- *Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Logarithmusfunktionen zur Basis e auf:*

$$f(x) = \ln(x)$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Gruppe E: Cosinus- und Sinusfunktion

Cosinus

- *Zeichne den Funktionsgraphen einer Cosinusfunktion.*
- *Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($A = (r \mid f(r)$).*
- *Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.*
- *Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.*
- *Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat.*
  ($B = (r \mid Steigung)$)
- *Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers.*
- *Was fällt dir auf?*
- *Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Cosinusfunktionen auf.*

$$f(x) = \cos(x)$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Sinus

- *Zeichne den Funktionsgraphen einer Sinusfunktion.*
- *Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($A = (r \mid f(r)$).*
- *Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.*
- *Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.*
- *Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat.*
  ($B = (r \mid Steigung)$)

- *Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers.*
- *Was fällt dir auf?*
- *Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Sinusfunktionen auf.*

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Nach der Herleitung der Ableitungsregeln seitens der SchülerInnen sollten alle gesammelt abgesichert werden. Danach folgt die Herleitung der noch nicht besprochenen Regeln. Hierfür eignen sich die bereits im Rahmen der didaktischen Analyse erwähnten Vorgehensweisen. Zusätzlich sollte nach der Besprechung der Produktregel die Tangensableitungsfunktion besprochen werden, da diese die Koordination der Cosinus-, Sinus- und Produktregel benötigt. An dieser Stelle muss nochmals betont werden, dass die SchülerInnen im Rahmen der Unterrichtsrunde ihre Vorgehensweisen und ihre Erkenntnisse den anderen erklären müssen – diese Erklärung zielt wiederum auf die Ebene des Prozesses ab.

6.4.5. Folgende didaktische Aufbereitung

Im Anschluss an den handlungsorientierten Kapiteleinstieg bedarf es vor allem einer intensiven Übungsphase. Hier müssen mehrere Funktionen mithilfe von unterschiedlichen Ableitungsregeln von den SchülerInnen berechnet werden. Durch die wiederholte Durchführung soll die Aktion verinnerlicht werden. Können die SchülerInnen die Vorgehensweise bei der Berechnung von Ableitungsfunktionen erklären, ohne sie explizit durchführen zu müssen, wurde wiederum die Prozessebene erreicht. Nach dieser Verinnerlichung der einzelnen Ableitungsregeln können sie kombiniert bzw. koordiniert werden – hier eignet sich besonders die Kettenregel. Es bedarf wiederum einer Vielzahl an Beispielen zur Kettenregel und der anschließenden Kontrolle mithilfe der reinen Beschreibung des Rechenvorganges, um feststellen zu können, ob die Verinnerlichung stattgefunden hat. Erst wenn diese Vorgänge erfolgreich vollzogen wurden, sollte das Differenzieren mithilfe von Technologieunterstützung (z.B. GeoGebra) erfolgen, da erst zu diesem Zeitpunkt ein umfassendes Verständnis bezüglich der Differentialrechnung vorhanden ist und der Einsatz von Technologie rein der Zeitersparnis dient.

Um feststellen zu können, ob bereits die mentale Ebene des Objektes, also das höhere Ziel des Mathematikunterrichts erreicht wurde, sollte die Sprache der SchülerInnen genauer beobachtet werden. Sprechen sie während des Ableitens von Aktionen, wie z.B. „Ich ziehe die Hochzahl nach vorne und verringere die aktuelle um eins“, sind sie wahrscheinlich noch nicht am Ziel angekommen. Formulieren sie jedoch ihre Vorgehensweise mit „Ich bilde den

Differentialquotienten mithilfe der Potenzregel“, benutzen sie also passende Fachbegriffe, kann von einem tieferen Verständnis des Inhaltes ausgegangen werden. Zusätzlich kann die Lehrperson Fragen zum Hintergrund der jeweils benötigten Regel stellen. Dazu eigenen sich z.B. Fragen bezüglich der verwendeten Grundvorstellung der Differentialrechnung bzw. der Ableitungsregel. Können die SchülerInnen argumentieren, dass konstante Funktionen aufgrund der Grundvorstellung der Tangentensteigung in jedem Punkt die Steigung null haben müssen, und sie deshalb die Ableitungsfunktion von Konstanten als null angeben, kann von einem statischen Wissenstand der SchülerInnen ausgegangen werden. Die stattgefundene Umsetzung der strengen, speziell für das universitäre Wissen ausgelegten Einkapselung (Aktionen werden auf bereits verinnerlichten Prozessen ausgeführt) des Objektes, kann wiederum mithilfe der Kettenregel überprüft werden. Die Funktion $f(x) = \sin(x^2 + 7)$ bedarf grundlegend des Wissens über die Ableitung der Sinusfunktion. Dieses Wissen muss verinnerlicht werden. Zusätzlich muss aufgrund der Kettenregel jedoch die innere Ableitung gebildet werden – eine weitere Aktion wird also auf den Prozess angewandt. Nach der Einkapselung der Berechnung der ersten Ableitung sollte darauf hingewiesen werden, dass die entstandene Ableitung wiederum abgeleitet werden kann – man nennt diese Funktion die zweite Ableitung. Nach der Berechnung sollte kurz darauf eingegangen werden, dass diese zweite Ableitung das Krümmungsverhalten der Funktion angibt und aufgrund der Vorstellung der lokalen Änderungsrate nichts anderes als die Änderung der Änderung der Kurvensteigung in einem Punkt ist. Zusätzlich kann die zweite Ableitung somit als Beschleunigung (Beschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit welche wiederum die Änderungsrate des zurückgelegten Weges ist) gedeutet werden. Genaueres dazu sollte jedoch erst im nächsten Kapitel erfolgen.

Die Planung des Kapiteleinstieges zu den Ableitungsregeln zeigt wiederum die unumgängliche Verbundenheit von Aktionen und Objekten. Es bedarf reiner Aktionen um Funktionen differenzieren, und sie somit, wie im nächsten Kapitel angegeben, analysieren zu können. Jedoch benötigen diese Aktionen zuvor das Wissen bezüglich der Grundvorstellung der Differentialrechnung. Die Aktionen (Differenzieren) bauen somit auf statischem Wissen (Grundvorstellungen der Differentialrechnung) auf und sind wiederum Grundlage für statisches Wissen (Funktionsanalyse). Die bereits angegebene Prozess-Objekt Spirale (Abb. 2) veranschaulicht diesen Aufbau des Mathematikunterrichts deutlich und führt wiederum zur unumgänglichen Fusion von Prozessen und Objekten – zur Dualität.

6.5. Funktionsanalyse

6.5.1. Vorwissen und Lehrplanbezug

Die Funktionsanalyse bezieht sich auf Inhalte, welche vor der technischen Revolution des Mathematikunterrichts (GeoGebra, etc.) noch mühsam händisch, im Rahmen der sogenannten Kurvendiskussion behandelt wurden. Für die klassische Kurvendiskussion wurden vor allem rezeptartige, eher der mentalen Ebene der Aktion entsprechenden Berechnungen durchgeführt, welche jedoch rein dem prozeduralen Wissen dienten und somit kein vollständiges Verständnis der Thematik erzeugen konnten. Zusätzlich polarisiert die Namensgebung unter Mathematikern sehr stark, da keine Kurven diskutiert, sondern Funktionen analysiert werden (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 191). Die Variante der umgekehrten Kurvendiskussion, also die Berechnung eines passenden Funktionsterms zu vorgegebenen Werten fiel ohne den Einsatz von Technologieunterstützung sehr mühsam aus – der eigentliche Gehalt des Themas wurde somit von der enormen Rechenarbeit überschattet. Jedoch sollte weder die teilweise als veraltet angesehene Methode der Kurvendiskussion, noch die aktuelle Vorgehensweise der Funktionsanalyse mithilfe von Technologieunterstützung, bei welcher wiederum aufgrund der ausbleibenden eigenständigen Berechnungen Aktionen in den Hintergrund rutschen, bewertet werden – die Prozess-Objekt-Dualität fordert sowohl Berechnungen, als auch das jeweilige Verständnis (vgl. ebd.). Die passende Mitte zu finden ist hier wiederum die Kunst. Danckwerts et al. (2010, S. 165) geben als mögliche Adaption das Einbeziehen von Sachkontexten in Kurvendiskussionen als geeigneten Mittelweg an. Wichtig dabei ist jedoch, dass stets von differenzierbaren Funktionen ausgegangen wird – dies ist jedoch bereits Teil des Vorwissens der SchülerInnen. Ebenso sollten sie bereits graphisch, als auch symbolisch differenzieren können. Da die Grundvorstellung der Steigung der Tangente eine zentrale Rolle in der Funktionsanalyse spielt muss diese, jedoch ebenso die anderen bereits besprochenen abgesichert sein. Der Lehrplan der 7. Klasse AHS sieht folgendes vor (https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07, Zugriff am 08.02.17, 10:16):

- *Untersuchung von Monotonie und Krümmungsverhalten*
- *Ermitteln von Extrem- und Wendestellen*

In diesen wenigen Worten verbirgt sich eine Vielzahl an mathematischen Berechnungen und Überlegungen, welche in der nun folgenden didaktischen Analyse genauer besprochen werden.

6.5.2. Didaktische Analyse

Der Einstieg in dieses Kapitel kann mithilfe des graphischen Differenzierens stattfinden. Somit ist ein fließender Übergang des vorhergegangenen Inhaltes möglich, bei welchen auf bereits Bekanntem aufgebaut wird. Greefrath et al. (2016, S. 192) fordern die Ermittlung der Eigenschaften von Funktionen. Dies ist mithilfe der graphischen Darstellung der Funktion leicht umzusetzen. Hier kann somit direkt über das Monotonie- und das Krümmungsverhalten und über markante Punkte (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) des Graphen gesprochen werden, ohne exakte Definitionen dieser Begriffe zu kennen bzw. diese zu verwenden. Der Vorgang dient rein dem Aufbau eines intuitiven Verständnisses. Im Anschluss daran könnte ein Funktionsgraph mit seinem Ableitungsfunktionsgraphen verglichen werden, wobei vor allem der Zusammenhang der jeweiligen markanten Punkte erkannt werden sollte (hier eignen sich vor allem Polynom- und trigonometrische Funktionen). Dieser graphische Zugang dient dem Aufbau einer Wissensbasis, auf welche sich die spätere symbolische Exaktifizierung beziehen kann. Idealerweise nutzen die SchülerInnen dabei die Grundvorstellungen der Tangentensteigung und des Krümmungsverhaltens, welches später besprochen wird, um Extrema und Wendepunkte intuitiv zu definieren. Der passende Verlauf der jeweiligen Ableitungsfunktionen könnte mithilfe der Vorstellung der Änderungsrate verstanden werden. Götz, Reichel, Müller und Hanisch (2008, S. 91) verwenden eine Funktion f, welche die Höhe eines Fesselballons in Abhängigkeit der verstrichenen Zeit beschreibt. Eine positive Beschleunigung $(f'' > 0)$ innerhalb eines Intervalls bewirkt verständlicherweise eine Zunahme der Geschwindigkeit – der Graph von f muss in diesem Intervall positiv gekrümmt sein (umgekehrt für $f'' < 0$). Der Übergang einer positiven Beschleunigung $(f'' > 0)$ zu einer negativen $(f'' < 0)$ hat die logische Konsequenz, dass dieser Fesselballon in einem Moment nicht beschleunigt $(f'' = 0)$. Das Krümmungsverhalten ist zu diesem Zeitpunkt somit weder positiv noch negativ – also null. Ein ähnlicher Gedankengang eignet sich für die Steigung (f'). Eine positive Steigung $(f' > 0)$, also eine positive Geschwindigkeit bewirkt das Aufsteigen des Ballons, eine negative $(f' < 0)$ das Absinken. Möchte man nach einer gewissen Höhe wieder in den Sinkflugübergehen, bleibt die Höhe in einem Moment konstant $(f' = 0)$ – die Steiggeschwindigkeit ist null (vgl. ebd.). Diese Überlegungen müssen anschließend auf die jeweiligen Graphen umgelegt werden. Wurden dieser Vorgang von den SchülerInnen verstanden, können Beispiele eingeführt werden, bei welchen die intuitiv festgelegten Zusammenhänge nicht mehr zutreffend sind (vgl. Greefrath et al., 2016, S.194). Somit kann den Lernenden gezeigt werden, dass eine genauere Definition der jeweiligen Eigenschaften der Funktionen gefunden werden muss.

6.5.2.1. Monotonie und Extrema

Die bereits bekannte Definition der Monotonie einer Funktion (*Eine Funktion f heißt streng monoton wachsend auf einem Intervall* [a;b], wenn für alle x_1, x_2 ∈ [a;b] gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) wird im Rahmen der Differentialrechnung, ganz im Sinne der Prozess-Objekt Spirale (Abb.2) durch die Koordination mit der Differentialrechnung erweitert. Diese Erweiterung, bzw. dieser Satz wird als Monotoniekriterium bezeichnet und lautet folgendermaßen (vgl. ebd., S. 195):

Für eine im Intervall [a;b] differenzierbare Funktion f gilt: Wenn ∀ x ∈ [a;b] $f'(x) > 0$, dann ist f auf [a;b] streng monoton wachsend.

Der dazu passende Beweis wäre durch die Rückführung auf den Mittelwertsatz, bzw. durch Intervallschachtelung möglich (vgl. ebd.). Die Ausführung wird jedoch im Rahmen dieser Diplomarbeit ausgelassen, da die Grundvorstellung der Tangentensteigung als intuitive Beweisführung dafür ausreicht. Den SchülerInnen sollte jedoch klar gemacht werden, dass die Umkehrung nicht gilt. Als Beispiel dient die Funktion $f(x) = x^3$. Diese ist zwar streng monoton wachsend, jedoch ist der Ableitungsfunktionswert im Ursprung null, und nicht größer als null (vgl. ebd.). Verbindet man nun die bisher besprochenen Grundvorstellungen und Definitionen, liegt der Schluss nahe, dass die Ableitung, also die Steigung der Tangente bzw. die momentane Änderungsrate in den Extremwerten null sein muss - $f'(x) = 0$. Man hat somit eine Berechnungsmethode für die exakte Bestimmung von Extremwerten gefunden. Hier wäre es nun wieder angebracht, in Bezug auf die Prozess-Objekt-Dualität, mehrere Extremwertberechnungen, idealerweise von Polynomfunktionen durchzuführen. Im Anschluss sollte eine Diskussion bezüglich Funktionen mit existierenden Extrema stattfinden, welche intuitiv nicht als solche seitens der SchülerInnen verstanden, aber mithilfe der Berechnungsmethode bestimmt werden können. Ein mögliches Beispiel dafür wären die bereits bekannten konstanten Funktionen. Es existieren unendlich viele Extremstellen (die Tangentensteigung ist in jedem Punkt null) welche jedoch nicht als „Gipfel“ bzw. als „Tal“ gedeutet werden können.

Zusätzlich existieren Extremstellen, die aufgrund der nicht gegebenen Differenzierbarkeit der jeweiligen Funktionen nicht mithilfe der angegebenen Berechnungsmethoden bestimmt werden können (Abb. 18). Des Weiteren können differenzierbare Funktionen gefunden werden, bei welchen nicht alle Extrema mithilfe des Nullsetzens der ersten Ableitung aufzufinden sind. Liegen diese nämlich am Rand des Definitionsbereiches werden sie von der Berechnungsmethode nicht berücksichtigt – man spricht von sogenannten Randextrema.

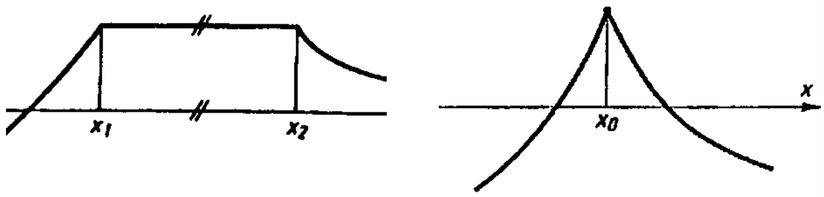


Abb. 18: Extrema nicht differenzierbarer Funktionen (Götz et al., 2008, S. 120).

Der Weg zu einem allgemeingültigen Verfahren zur Berechnung von Extremstellen ist also bei weitem noch nicht abgeschlossen, jedoch existieren bereits alle dafür notwendigen Werkzeuge – sie müssen nur koordiniert werden. In der Literatur (z.B. Greefrath et al., 2016, S. 197) besteht diese Koordination aus einer notwendigen und zwei hinreichenden Bedingungen. Bevor diese jedoch explizit angegeben werden, sollte die Lehrperson den SchülerInnen vermitteln, welche Bedeutung die Adjektive „notwendig“ und „hinreichend“ innehaben. Notwendige Bedingungen geben vor, wo das gesuchte Merkmal, in diesem Fall die Extrema einer Funktion, liegen können – es werden also alle Möglichkeiten herausgefiltert, welche jedoch nicht zwingend ein Extremum beschreiben müssen (vgl. Götz et al., 2008, S. 122). Wurden die hinreichenden Bedingungen erfüllt, muss das gesuchte Merkmal eintreten. Da diese Kriterien „nur“ hinreichend sind, kann das Merkmal auch eintreten wenn sie nicht erfüllt werden (vgl. ebd.). Zusammenfassend dienen notwendige Kriterien der Festlegung von Möglichkeiten, welche durch die hinreichenden bestätigt werden können.

Die Bedingungen der Extremwerte einer differenzierbaren Funktion lauten nun folgendermaßen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 197):

Notwendiges Kriterium für lokale Extremstellen:

Sei f auf einem offenen Intervall I differenzierbar. Besitzt f in $x_0 \in I$ eine lokale Extremstelle, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Hinreichende Kriterien

Sei f auf einem offenen Intervall I, in dem das Argument x_0 liegt, zweifach differenzierbar.

1) *Wenn x_0 eine Nullstelle von f' mit Vorzeichenwechsel ist (d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ gilt $f'(x) > 0$ und auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ gilt $f'(x) < 0$, bzw. analog umgekehrt), dann liegt eine lokale Extremstelle vor.*
2) *Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, dann liegt eine lokal Extremstelle vor.*

Um den SchülerInnen aufzuzeigen, dass hinreichende Bedingungen nicht gleichzeitig notwendige sein müssen, können zwei Beispiele besprochen werden.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, jedoch wechselt sie lokal in der Umgebung von x_0 immer rascher die Steigung vom Positiven zum Negativen – eine Zuordnung von einheitlichen Vorzeichen ist also nicht möglich (vgl. Danckwerts et al., 2010, S. 141).

Ein Beispiel bezüglich der zweiten hinreichenden Bedingung wäre die Funktion $f(x) = x^4$. Diese hat ebenfalls an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, jedoch ist die zweite Ableitung in diesem Punkt null. Die Erklärung mit Hilfe des Krümmungsverhaltens und seines Zusammenhangs mit der Differentialrechnung erfolgt im folgenden Unterkapitel.

Das Ziel dieser Unterrichtsgestaltung ist, den SchülerInnen zu verdeutlichen, dass intuitive Vorstellungen bezüglich Extrema durch allgemeingültige Bedingungen, seien sie nun notwendig oder hinreichend, ergänzt werden müssen. Blickt man jedoch zu diesem Zeitpunkt des Unterrichts bereits in die Zukunft, sollte nicht nur über lokale Extrema, sondern auch über globale gesprochen werden. Hierbei müssen vorerst nur die lokalen verglichen werden, um die größte bzw. kleinste Stelle zu finden. Des Weiteren ist es jedoch unumgänglich, vor allem im Rahmen der Extremwertberechnung, die Ränder des Definitionsbereiches zu beachtet (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 198). Diese Anwendung der Differentialrechnung wird zwar in dieser Diplomarbeit nicht explizit bearbeitet, jedoch können Funktionen wie z.B. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0,1]$ zu diesem Zeitpunkt des Unterrichtsgeschehens besprochen werden, um die SchülerInnen mit Randextrema vertraut zu machen.

6.5.2.2. Krümmungsverhalten und Wendepunkte

Die Begriffe der Krümmung und des Krümmungsverhaltens sind intuitiv schwieriger zu verstehen als jener der Steigung. Es lohnt sich deshalb zu Beginn dieses Unterkapitels, diese Begriffe greifbarer für die SchülerInnen werden zu lassen, bevor sie mit der Differentialrechnung koordiniert werden. Eine häufig verwendete Möglichkeit bietet der Straßenverkehr. Umso stärker man das Lenkrad einschlagen muss, um eine Kurve unfallfrei hinter sich zu lassen, desto „enger“, also stärker gekrümmt ist diese. Diese Vorstellung kann aufgegriffen werden, um die zwei Möglichkeiten von Krümmungsverhalten zu besprechen. Verläuft eine Kurve nach links, muss das Lenkrad also nach links gedreht werden, spricht man von einer Linkskrümmung. Gleiches gilt für eine Rechtskurve (Rechtskrümmung) (vgl. ebd., S. 200). Im Rahmen dieser anschaulichen Vorgehensweise kann zusätzlich auf den Übergang einer Krümmungsrichtung in die andere eingegangen werden. Möchte man entlang einer S-förmigen Linie fahren, muss das Lenkrad von einer Richtung in die andere gedreht werden. Es ist also unumgänglich das Lenkrad für einen Moment in eine neutrale Position zu bringen. Exakt in diesem Moment fährt das Auto geradlinig (aber ohne gerade Linie) – die Krümmung ist zu diesem Zeitpunkt somit null. Dieser spezielle Punkt wird als Wendepunkt bezeichnet. Wurde diese intuitive Deutung der Krümmung und des Wendepunktes abgeschlossen, können die anschaulichen Bezeichnungen (Links- bzw. Rechtskrümmung) durch exaktere, für spätere Inhalte geeignetere Begriffe ersetzt werden. Im Rahmen des Physikunterrichts wurden zu diesem Zeitpunkt wohlmöglich bereits die Eigenschaften von Linsen besprochen, welche entweder konkav oder konvex geformt sind. Legt man dieses erworbene Wissen auf das Krümmungsverhalten um, dann entspricht die Linkskrümmung einer konvexen Form und die Rechtskrümmung einer konkaven. Um diese Eigenschaften einer Funktion in einem gewissen Intervall untersuchen zu können, reicht es, eine Sekante des Graphen einzuzeichnen. Liegt diese im gesamten Intervall über dem Funktionsgraphen, spricht man von einer konvexen Kurve. Liegt sie darunter, ist der Funktionsgraph in diesem Abschnitt konkav (vgl. ebd., S. 199). Mithilfe der Sekante sind jedoch nur Aussagen über Krümmungsbereiche möglich. Wie bereits in den vorhergegangen Kapiteln suchen wir jedoch nach einem momentanen oder lokalen Krümmungsverhalten. Eine mögliche Vorgehensweise hierfür baut auf denselben Grundvorstellungen wie jene der Monotonie auf. Um die momentane Steigung zu finden, wurde die bestapproximierende Gerade, also die Tangente gesucht. Da eine Gerade jedoch kein Krümmung beschreiben kann (die Krümmung von geraden ist null) eignet sich eine einfache geometrische Form mit gleichbleibender Krümmung – der Kreis (vgl. ebd., S. 201). Dieser muss den Funktionsgraphen in einem Punkt ideal approximieren, um von der Krümmung des Kreises direkt auf die lokale Krümmung des Funktionsgraphen schließen zu können – man spricht von einem Schmiegekreis. Die Krümmung des Schmiegekreises ist folgendermaßen definiert:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{r}$$

Die Schwierigkeit mit GeoGebra hierbei liegt darin, den passenden Schmiegekreis zu finden. Der passende Radius kann mithilfe von Schiebereglern gefunden werden, die Berechnung der geeigneten Position des Kreismittelpunkts ist jedoch mit wesentlich mehr Aufwand verbunden (vgl. ebd., S. 202). Es stellt sich an dieser Stelle der didaktischen Analyse die Frage, ob die Vorgehensweise der Approximation der Kurve mithilfe eines Kreises und die somit berechenbare Krümmung des Funktionsgraphen in dem gewählten Punkt den dafür notwendigen Rechenaufwand rechtfertigen. Im Rahmen dieser

Diplomarbeit wird davon ausgegangen, dass die SchülerInnen zu diesem Zeitpunkt genug Erfahrungen mit dem graphischen Differenzieren und der Approximation einer Kurve haben und somit kein explizites Beispiel benötigen, um die Vorgehensweise und die darauf basierende Grundidee zu verstehen. Zusätzlich wurden bereits mehrere intuitive Deutungen der Krümmung (z.B. Lenkrad und Linsen) und des Wendepunktes erwähnt.

Den Lernenden sollte bereits klar sein, dass die zweite Ableitung einer Funktion ebenso die erste Ableitung der ersten Ableitung ist. Anders formuliert: die lokale Änderung der momentanen Steigung einer Funktion entspricht der zweiten Ableitung. Mithilfe der bereits erworbenen Vorstellungen der Krümmung kann festgestellt werden, dass die momentane Änderung der Monotonie der Kurve ihrer Krümmung entspricht (vgl. Danckerts et al., 2010, S.145). Je stärker sich die Monotonie einer Kurve verändert, umso stärker ist sie gekrümmt.

Es könnte somit davon ausgegangen werden, dass die zweite Ableitung einer Funktion die jeweilige Krümmung in jedem Punkt der Funktion angibt. Diese Überlegung ist jedoch falsch, da mittels der zweiten Ableitung einer Funktion deren Graph ein Kreis ist ($f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$) für unterschiedliche Argumente unterschiedliche Funktionswerte, also unterschiedliche Krümmungen berechnet werden können. Jedoch ist der Kreis, wie bereits erwähnt einheitlich gekrümmt. Hier sollte also eine wichtige sprachliche Unterscheidung getroffen werden. Die zweite Ableitung einer Funktion dient rein der Bestimmung des Krümmungsverhaltens, also der Links- bzw. der Rechtskrümmung und des Weiteren der im folgenden Absatz analysierten Bestimmung von Wendestellen. Die Berechnung der eigentlichen Krümmung kann mithilfe des Schmiegekreises hergeleitet werden, jedoch wird im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht näher darauf eingegangen, da sie im schulischen Kontext keine Verwendung findet. Die Formel der Krümmung lautet folgendermaßen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 202):

$$K = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Lernenden wissen, dass das Lenkrad im Wendepunkt einer Kurve für einen Moment neutral gehalten wird – an dieser Stelle ändert sich somit das Krümmungsverhalten der Kurve bzw. der Funktion. Diese Grundvorstellung sollte im Anschluss mit folgender Definition exaktifiziert und abgesichert werden (vgl. ebd., S. 200):

Ein Wendepunkt ist ein Punkt ($x_0 \mid f(x_0)$), an dem sich das Krümmungsverhalten ändert, d. h. dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass auf einem der Intervalle $[x_0 - \delta, x_0], [x_0, x_0 + \delta]$ die Funktion konkav und auf dem anderen konvex ist.

Die Bestimmung dieser Punkte benötigt Kriterien, welche sich wiederum in ein notwendiges und zwei hinreichende gliedern (vgl. ebd., S. 200):

Notwendiges Kriterium für Wendestellen:

Sei f auf einem offenen Intervall I zweifach differenzierbar. Besitzt f in $x_0 \in I$ eine Wendestelle, dann gilt $f''(x_0) = 0$.

Hinreichende Kriterien

Sei f auf einem offenen Intervall I, in dem das Argument x_0 liegt, zweifach bzw. dreifach differenzierbar.

1) *Wenn x_0 eine Nullstelle von f'' mit Vorzeichenwechsel ist, dann liegt eine Wendestelle vor.*
2) *Wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann liegt eine Wendestelle vor.*

Im Wendepunkt muss also die zweite Ableitung null sein, jedoch gilt die Umkehrung der notwendigen Bedingung nicht, wie das Beispiel einer konstanten Funktion zeigt. Ein weiteres Beispiel hierfür wäre die Funktion $f(x) = x^4$. Um die ausbleibende Notwendigkeit der ersten hinreichenden Bedingung aufzeigen zu können, eignet sich die bereits im Kapitel 6.5.2. angegebene „pathologische" Funktion. Diese sollte jedoch in Bezug auf das Krümmungsverhalten durch ihre erste Ableitung angegeben werden (vgl. Danckwerts et al. 2010, S. 142):

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Der Grund für die Angabe dieser Funktion mithilfe der Ableitung wird im folgenden Verlauf dieser Diplomarbeit noch genauer angegeben. Jedoch kann an dieser Stelle bereits festgehalten werden, dass Wendestellen von Funktionen den Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion entsprechen. Somit müssen bei diesem Beispiel die Extremstellen untersucht werden, um Aussagen über die eigentlich gesuchten Wendestellen zu treffen. Wie bereits zuvor erwähnt, können dieser sogenannten „pathologischen" Funktion in kleinen Intervallen um $x_0 = 0$ keine eindeutigen Monotonieeigenschaften zugeordnet werden. Somit versagt das erste hinreichende Kriterium für Wendestellen. Es stellt sich im Rahmen einer schuldidaktischen Aufarbeitung die Frage, ob dieses Gegenbeispiel sinnvoll ist oder ob es die SchülerInnen überfordert und eine reine Erwähnung der ausbleibenden Allgemeingültigkeit reichen würde. Diese Entscheidung wird der jeweiligen Lehrperson überlassen.

Ein Beispiel, welches die Notwendigkeit der zweiten hinreichenden Bedingung widerlegt kann wesentlich simpler mithilfe der Funktion $f(x) = x^5$ gefunden werden, bei welcher das Kriterium an der Stelle $x_0 = 0$ nicht zu einer Entscheidung führt (vgl. ebd.).

Neben diesen Bedingungen gibt es auch alternative Wege (z.B. Verwendung der Monotoniezerlegung bzw. des Zwischenwertsatzes), welche hier jedoch nicht analysiert werden.

6.5.2.3. Analyse der Funktions- und Ableitungsfunktionsgraphen

Die bisher besprochenen Inhalte der Differentialrechnung müssen nun noch ganz im Sinne der APOS-Theorie miteinander koordiniert werden. Hierfür eignen sich vor allem Beispiele, bei welchen den gegebenen Funktionsgraphen der jeweils passende Ableitungsfunktionsgraph zugeordnet werden muss. Die passende Lösung bedarf einer der angegeben Grundvorstellungen der Differentialrechnung, die Kenntnis über Ableitungsregeln, und natürlich der Definition der Monotonie und des Krümmungsverhaltens.

Die passende Einführung in dieses Unterkapitel der Differentialrechnung könnte anhand der Sinusfunktion erfolgen, wobei zu dieser jedoch eine positive Konstante addiert werden sollte, um Irritationen aufgrund der Nullstellen zu verhindern. Idealerweise wird diese Funktion graphisch dargestellt, um im Anschluss die passende Ableitungsfunktion zu berechnen und ebenfalls in das gleiche Koordiantensystem einzuzeichnen. Nun können die SchülerInnen erkennen, dass die Extremstellen der Funktion den Nullstellen der Ableitung entsprechen. Dies ist bereits bekannt, da Tangenten in Extrempunkten parallel zur x-Achse verlaufen und somit eine Steigung von null besitzen. Gleichermaßen werden die Wendestellen der Funktion als Extremstellen der Ableitungsfunktion erkannt. Auch dieser Zusammenhang ist den SchülerInnen bereits bekannt. In Wendepunkten ist die zweite Ableitung null – die Steigung muss hier also (lokal) maximal oder minimal sein (vgl. ebd., S. 143). Eine weitere Erklärung dieses Zusammenhangs ist wiederum anhand von Bewegungsbeispielen (z.B. Ballonfahrt) möglich (vgl. Götz et al., 2008, S. 91).

Die markanten Punkte der jeweils einzuzeichnenden Ableitungsfunktionen wurden nun gefunden. Es stellt sich jedoch die Frage, wie der Verlauf des Graphen zwischen den Punkten sein muss. Die Grundvorstellung der Tangentensteigung liefert die Antwort für die erste Ableitung. Ist diese an einer Stelle des Funktionsgraphen positiv, muss der passende Ableitungsfunktionsgraph an dieser Stelle im positiven Bereich, also über der x-Achse verlaufen und umgekehrt. An der Extremstelle der Funktion ändert sich das Monotonieverhalten, somit muss der Graph der Ableitungsfunktion die x-Achse in diesem Punkt schneiden und den jeweiligen y-Bereich wechseln (positiv zu negativ bzw. umgekehrt). Die gleiche Vorgehensweise eignet sich für die graphische Darstellung der zweiten Ableitung, ausgehend von der ursprünglichen Funktion. Die Wendestelle ist eine mögliche Stelle, in welcher das Krümmungsverhalten null ist. Somit muss der Graph der zweiten Ableitung an dieser Stelle die x-Achse schneiden. Der Verlauf des Funktionsgraphen ist durch das jeweilige Krümmungsverhalten im Intervall links und rechts der Wendestelle gegeben. Möchte man nun aus dem Graphen der ersten Ableitung auf jenen der zweiten schließen, muss die Grundvorstellung der Tangentensteigung eingesetzt werden. Man betrachtet somit die Steigung der ersten Ableitung und zeichnet diese, wie es bereits beim Übergang von der ursprünglichen Funktion zur ersten Ableitungsfunktion erwähnt wurde, passend jeweils unter bzw. über der x-Achse ein. Um das Verständnis des Kurvenverlaufs zu erhöhen, eignet sich die Verwendung von Polynomfunktionen, da hier bereits mehrere Ableitungfunktionen berechnet wurden. Den SchülerInnen sollte somit klar sein, dass die Ableitungsfunktion einer kubischen Funktion nur eine quadratische und die zweite Ableitung nur eine lineare Funktion sein kann.

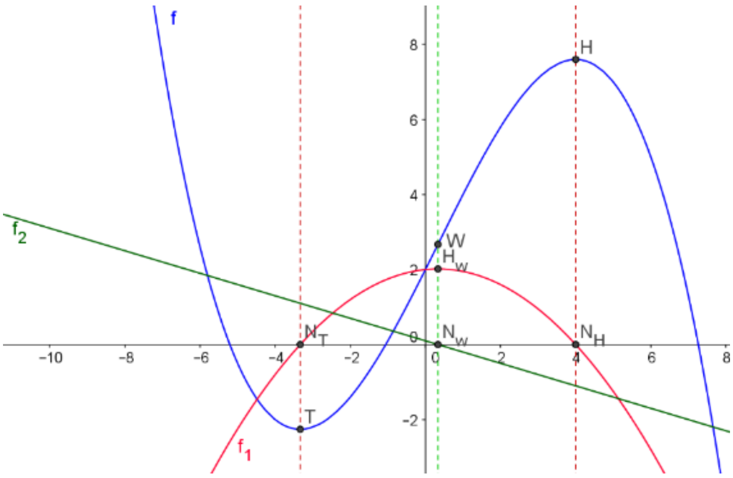


Abb. 19: Zusammenhang des Funktions- und der jeweiligen Ableitungsgraphen

Im Sinne der Prozess-Objekt-Dualität werden bereits eingekapselte Objekte (z.B. Wendestellen, Extremstellen, Tangentensteigungen, Ableitungsregeln, etc.) wiederum entkapselt und miteinander koordiniert. Diese Koordination benötigt Zeit und vor allem eine Vielzahl an Übungsmöglichkeiten.

6.5.3. Zusammenfassung der didaktischen Analyse

Die genaue, mathematisch korrekte Aufarbeitung der Funktionsanalyse benötigt vor allem viel Zeit und Engagement seitens aller Beteiligten des Unterrichtgeschehens. Jedoch zeigt sie den Zusammenhang aller bisher besprochenen Kapitel der Differentialrechnung auf und lässt die einzelnen separat besprochenen Inhalte in einem neuen, zusammenhängenden Licht erscheinen, welches die APOS-Theorie als koordiniertes Objekt bezeichnet. Zusätzlich dient die Funktionsanalyse als Basis einer Vielzahl an noch zu bearbeitenden Inhalten. So kann der Zusammenhang einer Funktion mit ihrer Ableitung im Rahmen der Integralrechnung in umgekehrter Weise gesehen werden. Zusätzlich wird die

Vorgehensweise bei Extremwertbeispielen verständlicher und anwendungsbezogene Beispiele können mit neuen Werkezeugen bearbeitet werden. Ein weiterer, subjektiv als wunderschön angesehener Aspekt der Funktionsanalyse ist jener, dass hier das Wesen der Mathematik deutlich wird. Einzelne Teile eines Ganzen greifen optimal ineinander und ermöglichen somit die Erkenntnis über Beziehungen zwischen den Teilen, welche vorab nicht ersichtlich gewesen wären.

6.5.4. Planung des dritten Kapiteleinstiegs

Die nun folgende Planung bezieht sich hauptsächlich auf die Erarbeitung des Zusammenhangs des Funktionsgraphen mit jenen der dazugehörigen Ableitungsfunktionen, was wiederum die Kenntnis über Monotonie- und Krümmungsbereiche, und zusätzlich über Extrem- und Wendestellen miteinbezieht. Des Weiteren dient dieser Kapiteleinstieg dem selbstständigen Erarbeiten der notwendigen bzw. der hinreichenden Bedingungen.

Eine mögliche Aufbereitung der zweiten Ableitung und ihrer Grundvorstellungen wurde bereits im Rahmen der didaktischen Analyse erwähnt und kann somit in der folgenden Planung vorausgesetzt werden. Die gewählte handlungsorientierte Unterrichtsmethode ist der Stationenbetrieb, welcher sich jedoch von den bereits beschriebenen Varianten unterscheidet, da er in mehrere Ebenen unterteilt wurde. Zuerst müssen die SchülerInnen, unabhängig von der Reihenfolge, drei Stationen erfolgreich bewältigen. Diese basieren auf den bereits erlernten Unterkapiteln der Differentialrechnung (graphisches Differenzieren, Ableitungsregeln, Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate bei Bewegungsbeispielen). Erst nachdem alle expliziten Aufgabenstellungen (mentale Ebene der Aktion) bearbeitet und diese von der Lehrperson als richtig gewertet wurden, können die SchülerInnen mit der nächsten Ebene, nämlich mit den Stationen vier und fünf fortfahren, bei welchen sie die zuvor erlangten Erkenntnisse nutzen sollen, um Kriterien für Extrem- und Wendestellen zu finden. Die Aufgabenstellungen hierfür sind bereits allgemeiner gefasst, um die Ebene des Prozesses der APOS-Theorie ideal vorzubereiten. Im Rahmen dieser zwei Stationen können die Ergebnisse der SchülerInnen anhand von zwei freiwilligen Zusatzstationen überprüft bzw. im Anschluss überarbeitet werden. Nach einer weiteren Begutachtung der Lehrperson können die SchülerInnen mit der dritten Ebene des Stationenbetriebs beginnen. Hier muss nur noch eine Station bearbeitet werden, welche jedoch das gesamte, zuvor erarbeitete Wissen kombiniert und mit einer Vielzahl an Beispielen festigt. Die einzelnen Stationen sind natürlich so gestaltet, dass mehrere SchülerInnen gleichzeitig daran arbeiten können. Zusätzlich ist es sinnvoll, aufgrund der Verwendung von Technologie einige Laptops zur Verfügung zu stellen, bzw. den PC-Saal aufzusuchen. Des Weiteren können die SchülerInnen je nach subjektiver Einschätzung der Lehrperson die Stationen alleine oder in Teamarbeit lösen. Die Lehrperson sollte beratende, und bei diesem speziellen Stationenbetrieb natürlich auch korrigierende Tätigkeiten übernehmen. Die Stationen können durchnummeriert und mit unterschiedlich farbigem Papier markiert werden, um den Lernenden die Übersicht über die diversen Ebenen klarer zu machen. Die folgenden Aufgabenstellungen werden idealerweise auf Kärtchen gedruckt und danach mehrfach zu den entsprechenden Stationen gelegt.

Station 1: Graphisches Differenzieren

- *Zeichne den Funktionsgraphen von* $f(x) = \sin(x) + 4$ *mithilfe von GeoGebra.*
- *Zeichne die Extrempunkte und die Wendepunkte dieses Funktionsgraphen mithilfe der GeoGebra Befehle „Extremum“ und „Wendepunkt“ ein.*
- *Nutze deine Kenntnisse bezüglich des graphischen Differenzierens, um den Graphen der Ableitungsfunktion einzuzeichnen.*
- *Versuche, mithilfe der Grundvorstellung der Tangentensteigung bzw. mithilfe der eingezeichneten Tangente Zusammenhänge zwischen den markanten Punkten (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) des ursprünglichen Funktionsgraphen und jenem der Ableitungsfunktion zu erkennen.*
- *Verschriftliche deine Erkenntnisse.*
- *Führe dieselben Schritte bei folgenden Funktionen durch:*
    - $g(x) = \cos(x) + 4$
    - $h(x) = x^3 + 2x^2 + 0{,}2x + 1$
    - $i(x) = 3x^2 + 4x + 0{,}2$
- *Erläutere deine Erkenntnisse der Lehrperson.*

Der Grund für die Wahl dieser Funktionen ist jener, dass vor allem die trigonometrischen bereits bekannt sind. Des Weiteren ist die zweite angegebene Polynomfunktion die Ableitung der ersten. Dieser Sachverhalt sollte von der Lehrperson bei der Kontrolle erwähnt werden, um bereits zu diesem Zeitpunkt eine Vorstellung des Zusammenhangs der Funktion mit der zweiten Ableitung herstellen zu können. Es muss hier erwähnt werden, dass GeoGebra die Wendepunkte der trigonometrischen Funktionen mithilfe des Befehles „Wendepunkte [<Polynom>]“ nicht darstellen kann und diese somit selbstständig (näherungsweise) eigezeichnet werden sollten.

Station 2: Ableitungsregeln

- *Leite folgende Funktionen zweimal (ohne Technologieeinsatz) ab:*
    - $f(x) = 0{,}5x^3 + x^2 - 2x + 3$
    - $g(x) = x^3$
    - $i(x) = x^3 + 0{,}5x + 3$
- *Zeichne sowohl die ursprünglichen Funktionsgraphen als auch die passenden Graphen der Ableitungsfunktionen in jeweils separate Koordinatensysteme (GeoGebra) ein.*
- *Versuche, anhand dieser Graphen Zusammenhänge der jeweiligen Funktionen herauszufinden.*
- *Verschriftliche deine Erkenntnisse und erläutere sie der Lehrperson.*

Diese Station zielt darauf ab, die Form der Ableitungsfunktion anhand der Ableitungsregeln bereits vorhersagen zu können. Zusätzlich soll natürlich der Zusammenhang der markanten Punkte der jeweiligen Funktionsgraphen erkannt werden. Die angegebenen Funktionen wurden so gewählt, dass der jeweilige Unterschied zwischen der Anzahl der Extremstellen und jener der Nullstellen der jeweiligen Ableitungen ersichtlich wird.

Station 3: Bewegungsbeispiele

Die zurückgelegte Höhe (h in m) eines Hubschraubers in Abhängigkeit der Zeit x (in min) kann mithilfe folgender Funktion modelliert werden:

$$h(x) = 0{,}45x^3 - 1{,}8x^2 + 0{,}55x + 2{,}85$$

- *Zeichne den Graphen dieser Funktion mithilfe von GeoGebra in ein Koordinatensystem ein.*
- *Überlege dir, zwischen welchen Zeitpunkten der Hubschrauber eine positive Geschwindigkeit (Steigflug) und zu welchen Zeitpunkt er eine negative Geschwindigkeit (Sinkflug) innehat.*
- *Überlege dir zusätzlich, zwischen welchen Zeitpunkten der Pilot bzw. die Pilotin des Helikopters die Geschwindigkeit erhöht, also beschleunigt, und zwischen welchen Zeitpunkt die Geschwindigkeit verringert (negative Beschleunigung) wird.*

Wir wissen bereits, dass die erste Ableitung des zurückgelegten Weges in Abhängigkeit der Zeit die Geschwindigkeit beschreibt und die zweite Ableitung die Beschleunigung.

- *Gib deine Überlegungen bezüglich der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Helikopters mithilfe folgender Symbolik an :*
    - $h'(x) < 0,\ h'(x) > 0$
    - $h''(x) < 0, h''(x) > 0$
- *Versuche, den Verlauf der Geschwindigkeit und den der Beschleunigung in separate Koordinatensysteme (händisch) zu skizzieren.*
- *Zeige deine Skizzen und deine Erkenntnisse der Lehrperson.*

Hier wurde für die vergangene Zeit absichtlich die Variable x statt t verwendet, um die Eingabe in GeoGebra zu erleichtern. Diese Station ist vermutlich die anspruchsvollste der drei grundlegenden Stationen, deshalb sollte die Lehrperson hier vermehrt die SchülerInnen unterstützen. Wurden alle drei Stationen erfolgreich absolviert, können die SchülerInnen eine Ebene „aufsteigen" und die Stationen vier und fünf bearbeiten. Jene Lernenden, welche an diesen Beispielen scheitern, benötigen externe Hilfe, welche durch die Lehrperson, aber gleichermaßen durch SchulkollegInnen, welche bereits diese Ebene erreicht haben, erfolgen kann.

Station 4: Bedingungen für Extremstellen

- *Versuche, Kriterien für Extremstellen aufgrund deiner bisherigen Erkenntnisse zu finden und gib diese an.*
- *Versuche, zusätzlich Kriterien für die Unterscheidung von Hoch- und Tiefpunkten anzugeben.*
- *Überprüfe die Richtigkeit deiner Kriterien an den bisher angegebenen Beispielen und überarbeite diese gegebenenfalls.*
- *Zeige deine Ergebnisse der Lehrperson.*

Diese Station zeigt bereits, ob die vorherigen grundlegenden Aufgabenstellungen ihr Ziel erreicht haben, also ob bereits hinreichende und notwendige Bedingungen selbstständig gefunden werden können. Die SchülerInnen sollten hier zumindest das notwendige und das erste hinreichende Kriterium der Extremstellen erkennen. Die zweite hinreichende Bedingung könnte mit der Lehrperson zusammen besprochen werden Die folgende zusätzliche Station dient der Kontrolle der aufgestellten Kriterien mithilfe von speziellen Funktionen, welche den Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzeigen sollen. Idealerweise erkennen die SchülerInnen diesen Unterschied, wobei natürlich ihre Formulierungen noch nicht exakt sein müssen. „Pathologische" Funktionen sollten jedoch im Rahmen dieser Station noch nicht vorkommen, da diese zu komplex für die selbstständige Auseinandersetzung sind. Sie könnten jedoch nach dem Stationenbetrieb mit der Lehrperson gemeinsam besprochen werden. Ein weiterer Grund für den Einsatz von freiwilligen Zusatzstationen ist die Individualisierung, aber auch das Zeitmanagement der Planung. Jene SchülerInnen, welche die Arbeitsaufträge rasch bearbeiten und schneller passende Lösungen finden, können die Zusatzstationen nutzen, um den anderen nicht zu enteilen und somit am Ende des Stationenbetriebs sinnlos warten zu müssen. Die Zusatzstationen dienen also als eine Art individualisierter Zeitpuffer.

Station 4+: Spezielle Fälle

- *Überprüfe deine Kriterien an folgenden Funktionen bzw. Funktionsgraphen:*
  - $f(x) = 7$
  - $g(x) = 2x - 3$
  - $i(x) = x^4$
  - $h(x) = \sqrt{x}$
- *Überarbeite gegebenenfalls deine Kriterien und zeig sie der Lehrperson.*

Station 4: Bedingungen für Wendestellen

- *Versuche, Kriterien für Wendestellen aufgrund deiner bisherigen Erkenntnisse zu finden und gib diese an.*
- *Überprüfe die Richtigkeit deiner Kriterien an den bisher angegebenen Beispielen und überarbeite diese gegebenenfalls.*
- *Zeige deine Ergebnisse der Lehrperson.*

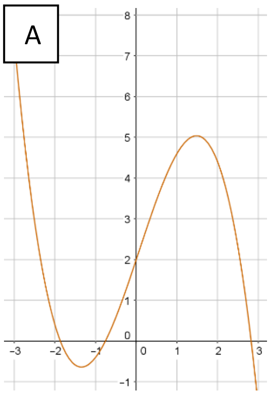
Das Ziel dieser Station ist das selbstständige Auffinden der notwendigen und der ersten hinreichenden Bedingung der Wendestellen. Die zweite hinreichende kann wiederum mit der Lehrperson gemeinsam erarbeitet werden. Die folgende, freiwillige Station dient der Überprüfung der eigenen Kriterien mithilfe von Spezialfällen.

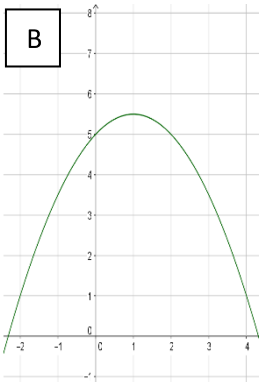
Station 5+: Spezielle Fälle

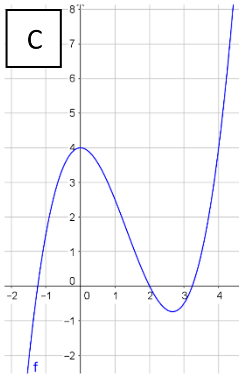
- *Überprüfe deine Kriterien an folgenden Funktionen bzw. Funktionsgraphen:*
  - $f(x) = -3$
  - $g(x) = -4x + 5$
  - $h(x) = x^4$
- *Überarbeite gegebenenfalls deine Kriterien und zeig sie der Lehrperson.*

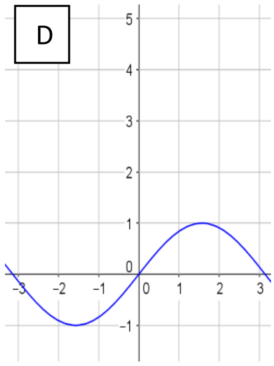
Station 6: Funktionsanalyse

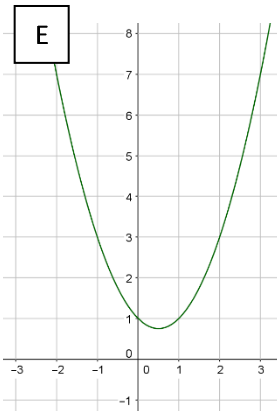
- *Ordne den folgenden Funktionsgraphen (A, B, C, D, E, F, G, H) die passenden Graphen (1, 2, …,16) der ersten bzw. der zweiten Ableitung zu.*

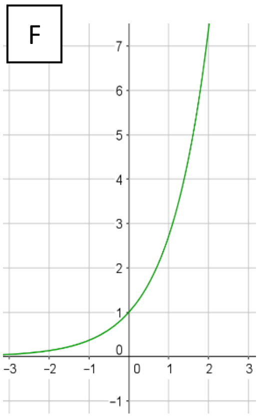
A


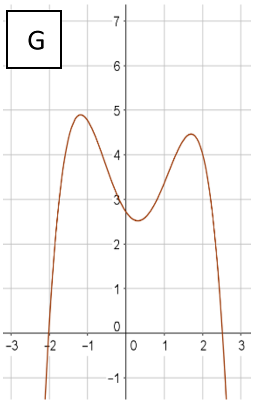
B


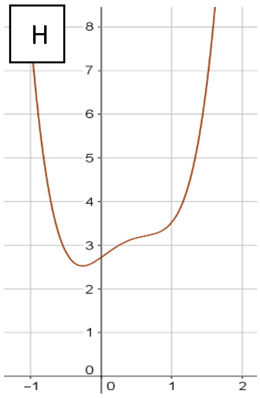
C


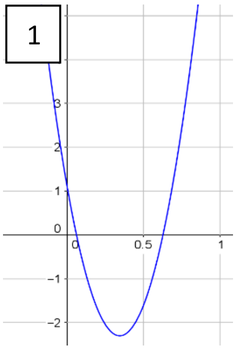
D


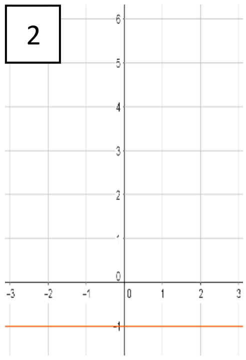
E


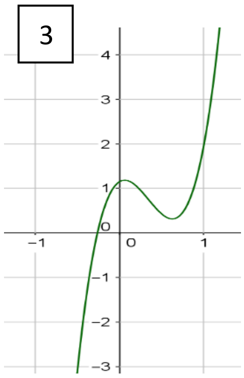
F


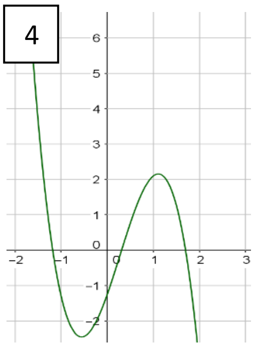
G


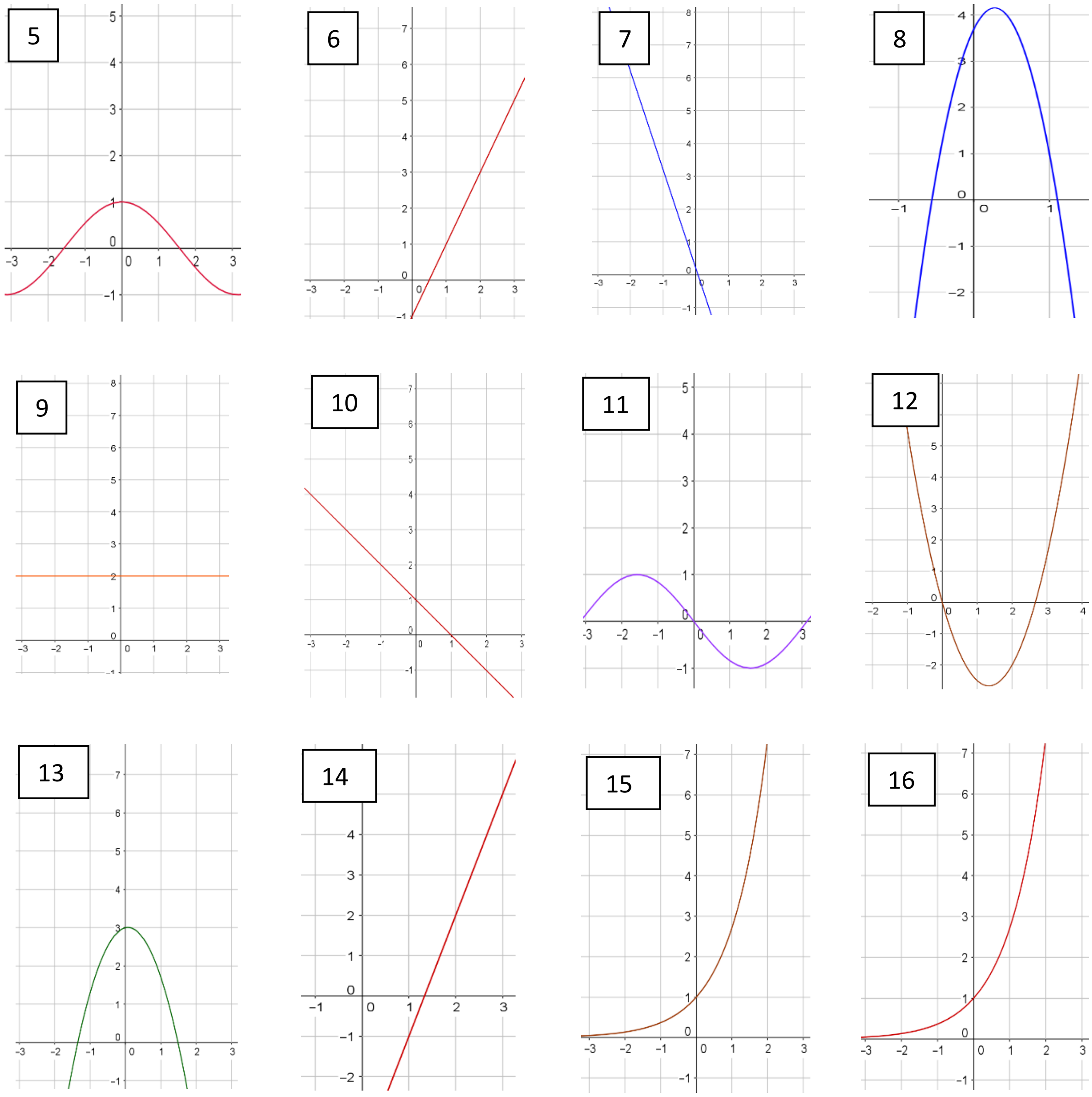
H


1


2


3


4




- *Zeige deine Lösungen der Lehrperson.*

Die Arbeitsaufträge der letzten Station können auf verschiedenste Arten gelöst werden. Die SchülerInnen können mithilfe der Grundvorstellung der Tangentensteigung und der Änderung der Tangentensteigung (Krümmungsverhalten) die diversen Monotonie- und Krümmungsbereiche, und somit den Verlauf der jeweiligen Ableitungsgraphen bestimmen. Zusätzlich sind alle angegebenen Funktionstypen bereits bekannt und die entsprechenden Terme wurden des Öfteren differenziert. Mithilfe des Terms der Ableitungsfunktion können somit potentielle Lösungen gefunden werden. Des Weiteren kann der Zusammenhang der markanten Punkte des Funktionsgraphen und jenen der Ableitungsfunktionen bestimmt werden, um auf diese Art und Weise die Graphen einander richtig zuordnen zu können. Ein flexibler Umgang mit diesen Inhalten ist also unumgänglich. Die große Anzahl an Beispielen ermöglicht die verstärkte Wiederholung der Inhalte.

6.5.5. Nachfolgende didaktische Aufbereitung

Nach der erfolgreichen Durchführung des Stationenbetriebs müssen die jeweiligen hinreichenden und notwendigen Kriterien für Extrem- und Wendestellen abgesichert werden, wobei vor allem die Erkenntnisse der SchülerInnen miteinbezogen bzw. adaptiert werden sollten. Je nach Einschätzung der Lehrperson könnten die in der didaktischen Analyse erwähnten „pathologischen“ Funktionen mit den SchülerInnen gemeinsam besprochen werden. Im Sinne der APOS-Theorie sollte nach diesem Kapiteleinstieg eine Vielzahl an Aufgabenstellungen folgen, bei welchen die einzelnen Schritte explizit vorgegeben sind. Hier eigenen sich vor allem klassische Kurvendiskussionen mit gleichbleibenden Ablauf (Definitionsmenge bestimmen, Nullstellen berechnen, Extremstellen berechnen, etc.). Wurden bereits mehrere diesbezügliche Beispiele erfolgreich gelöst, können die rein innermathematischen Kurvendiskussionen zu anwendungsorientierten Beispielen der Differentialrechnung übergeführt werden. Wichtig hierbei ist, dass die Aufgabenstellung nicht bereits alle Lösungsschritte offenbart, sondern diese von Seiten der SchülerInnen selbst erkannt und richtig durchgeführt werden müssen. Sind die Lernenden nach mehreren Beispielen dazu in der Lage, die einzelnen Lösungsschritte zu erklären ohne sie explizit durchführen zu müssen, sind sie bereits auf der Ebene des Prozesses angelangt. Die Ebene des Objektes ist, wie bereits des Öfteren erwähnt, nur schwer zu erreichen und bedarf vor allem Zeit und Engagement aller Beteiligten des Unterrichtgeschehens. Jedoch kann sie mithilfe von Beispielen forciert werden, bei welchen ein flexibler Einsatz von bereits erlerntem Wissen und die Koordination der einzelnen Wissensbereiche nötig sind. So könnten zum Beispiel Kurvendiskussionen durchgeführt werden, welche danach mithilfe von verschiedenen Grundvorstellungen interpretiert werden müssen. Zusätzlich können Anwendungsbeispiele bereits vor der Berechnung durchdacht werden, um die geeignetste Vorgehensweise zu finden. Außerdem könnte das Beispiel der Grafenzuordnung unter dem Aspekt der lokalen Änderungsrate mit physikalischen Größen besprochen werden. Generell ist darauf zu achten, dass die Ebene des Objektes vor allem dann erreicht wurde, wenn die verwendeten Formulierungen der SchülerInnen nicht mehr von Handlungsanweisungen (Aktionen), sondern von Fachbegriffen und Hauptwörtern sprechen.

Der Abschluss bzw. die Zusammenfassung dieses Kapitels könnte mit den bereits analysierten, handlungsorientierten Unterrichtsmethoden der Tandemübung und „Was bin Ich?“ erfolgen. Beide dienen der Zusammenfassung von Wissen und beziehen sich vor allem auf statisches Wissen. Vor allem die Methode des „Was bin Ich?“ unterstützt die Umsetzung der mentalen Ebene des Objektes, da hier vor allem Hauptwörter mithilfe ihrer Eigenschaften erraten werden müssen. Sinnvollerweise würden im Anschluss an dieses

Kapitel die Extremwertaufgaben besprochen werden, welche wiederum bereits bestehendes Wissen (z.B. Satz des Pythagoras als Nebenbedingung) mit der Differentialrechnung verbinden.

Die Prozess-Objekt-Dualität zieht sich wie ein roter Faden durch die Aufarbeitung der Differentialrechnung und manifestiert sich in der Diskussion um die Sinnhaftigkeit der Kurvendiskussion. Diese wird teilweise als sture Rechenarbeit ohne Erkenntnisgewinn angesehen, welche aufgrund von Technologieunterstützung hinfällig geworden ist. Es sollte rein das dazu notwendige statische Wissen erlangt werden. Die APOS-Theorie relativiert dies jedoch, da zu Beginn die reine, rezeptartige Berechnung von Nöten ist, um im Anschluss, nach vielen Wiederholungen, die tiefgreifende und unglaublich vielseitige Theorie dahinter leichter verstehen und mit bereits bekanntem Wissen in Verbindung setzen zu können. Das Objekt benötigt vorhergehende Aktionen – neue Aktionen benötigen vorhergegangene Objekte. Werden einzelne Stufen ausgelassen, bricht die Konstruktion des Mathematikunterrichts zusammen. Das Ziel, der Aufbau von tragfähigen mathematischen Konzepten rückt dadurch in weite Ferne.

6.6. Resümee

Die Basis dieser Diplomarbeit besteht aus der Aufarbeitung mathematischer Theorien (z.B. APOS-Theorie), welche zusammengefasst die Dualität zwischen Prozessen und Objekten beschreiben und deshalb den Erwerb sowohl eines rein statischen, als auch eines rein prozeduralen Wissens ablehnen. Die Koordination beider ermöglicht erst das höhere Ziel des Mathematikunterrichts, nämlich den Aufbau von langfristig verfügbaren, tragfesten und flexibel anwendbaren mathematischen Konzepten.

Aufbauend auf diesen Theorien wurden bestehende Unterrichtsmethoden einer Analyse bezüglich ihrer Kompatibilität mit der theoretischen Grundlage und des Grads ihrer Handlungsorientierung unterzogen, bei welcher sich drei als geeignet erwiesen. Mithilfe dieser drei Methoden, der theoretischen Basis der Prozess-Objekt-Dualität und der Analyse von geeigneten Kapiteleinstiegen wurde das Themengebiet der Differentialrechnung didaktisch aufgearbeitet und in Form dreier handlungsorientierter Kapiteleinstiege bezüglich der Unterkapitel „Differenzen- und Differentialquotient", „Ableitungsregeln" und „Funktionsanalyse" für den Schulgebrauch sinnvoll umgesetzt.

Dieser Vorgang verdeutlichte, ganz im Sinne der Prozess-Objekt-Dualität, die gegenseitige Abhängigkeit von reinen Handlungen (z.B. Differenzieren von Funktionstermen mithilfe der ABleitungsregeln) und dem jeweiligen Hintergrundwissen (z.B. Grundvorstellung der Tangentensteigung). Die Grundvorstellungen der Differentialrechnung zogen sich wie ein roter Faden durch den gesamten Aufbau der Planung und zeigten die Notwendigkeit der sogenannten Prozess-Objekt Spirale (Abb.2), welche Inhalte der höheren mentalen Ebenen stets auf bereits erlernten und abgesicherten Aktionen, Prozessen bzw. Objekten aufbaut und diese anschließend weiterentwickelt.

Die zu Beginn der Diplomarbeit gestellte Forschungsfrage nach den Bedingungen für die Entwicklung von langfristig und flexibel verfügbaren mathematischen Konzepten wurde bereits teilweise mithilfe der festgehaltenen Kriterien der Prozess-Objekt-Dualität, der handlungsorientierten Unterrichtsmethoden und der Kapiteleinstiege beantwortet (Tab. 5). Die explizite Planung der Unterkapiteleinstiege der Differentialrechnung lässt jedoch auf weitere Fazits schließen. Die Umsetzung des bereits erwähnten Ziels bedarf vor allem Geduld und Engagement seitens der Lehrperson, aber gleichermaßen seitens der SchülerInnen. Das zu erarbeitende Themengebiet muss vorab analysiert werden, um die einzelnen Ebenen der Prozess-Objekt Spirale zu definieren. Erst danach kann das Unterrichtsgeschehen dementsprechend organisiert werden. Zusätzlich sollte die Lehrperson stets die drei Hauptebenen der APOS-Theorie berücksichtigen, um den Aufbau mathematischer Konzepte ideal vorbereiten zu können. Die Zuordnung des Wissensstandes eines Schülers bzw. einer Schülerin in eine der Ebenen kann mithilfe der Kriterien der APOS-Theorie erfolgen. Jedoch sind im schulischen Kontext sinnvolle Adaptionen zu empfehlen, welche sich zum Beispiel auf die jeweiligen Formulierungen der SchülerInnen beziehen.

Das subjektiv am Wichtigsten empfundene Fazit dieser Diplomarbeit bezieht sich auf den durch die Prozess-Objekt-Dualität ermöglichten umfassenden Wissenserwerb der bearbeiteten mathematischen Inhalte. Mithilfe der bloßen rezeptartigen Anwendung und dem darauf aufbauenden, schrittweisen Übergang von einer dynamischen zu einer statischen Sichtweise der bearbeiteten Materie wird eine flexible Verfügbarkeit des Wissens möglich, welche Verbindungen zu anderen Themen erlaubt. Durch die aufeinander aufbauende Struktur der Prozess-Objekt-Dualität können bei einer geeigneten Planung unzählige Verknüpfungen zwischen den jeweiligen Inhalten entstehen, welche den Vorgang des Vergessens wesentlich entschleunigen.

Da mithilfe der Prozess-Objekt-Dualität ein tieferes Verständnis der Mathematik und gleichzeitig deren Anwendung forciert werden, wäre es sinnvoll, weitere Kapitel der Schulmathematik auf dieser Basis zu analysieren und für den Unterricht aufzubereiten.

Literaturverzeichnis

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Aronson, E., Blaney, N., Stephin, C., Sikes, J. & Snapp, M. (1978). *The jigsaw classroom.* Beverly Hills: Sage Publishing Company.

Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2015). *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe 1 und 2* (8. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2011a) . „Das macht Sinn!" Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule,* 53(37), 2-9.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2011b). Kontexte und Kernprozesse – Ein theoriegeleitetes und praxiserprobtes Schulbuchkonzept. In R. Haug & L Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 71-74). Münster: WTM.

Bostelmann, M. (2010). Unterricht als Lernprozess planen. Was macht ein Pantograph?. *Mathematik Lehren,* 158, 50-52.

Bruner. J. (2003). *The Process of education.* Cambridge: Harvard Univ. Press.

Brühne, T. & Sauerborn, P. (2011). *Der Unterrichtseinstieg*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2010). *Analysis verständlich unterrichten. Matheatik Primar- und Sekundarstufe*. Berlin: Springer.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (2008). Facilitating optimal motivation and psychological well-being across life's domains. *Canadian Psychology*, 49, 14–23.

Dienes, Z. P. (1965). *Aufbau der Mathematik.* Freiburg, Basel und Wien: Herder.

Dörfler W., Fischer R. (1979). *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik"* (Didaktik der Mathematik, 2). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Dubinsky, E. (1991a). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In L. P. Steffe (Hrsg.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences* (S. 160-202). New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1991b). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Hrsg.) *Advanced Mathematical Thinking* (S. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). On learning quantification. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16 (2/3), 335-362.

Dubinsky, E., Weller, K. McDonald, M.A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis, Part 1. *Educational Studies in Mathematics. 58 (3), 335-359.*

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart: Klett.*

Gallin, P. (2016, Juni). *Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht.* Fachdidaktisches Kolloquium Sommersemester 2016, Wien.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz*. Seelze: Kallmeyer.

Gallin, P. & Ruf, U. (1999). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Gerholz, K. H. (2014). Gruppenpuzzle – Didaktische Gestaltung und Illustration aus der LehrerInnenbildung. *Zeitschrift für Didaktik der Rechtswissenschaft,* 3, 261-265.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V. & Weigand, H. G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriff*e. Berlin: Springer.

Greving, J. & Paradies, L. (2012). *Unterrichtseinstiege*. Berlin: Cornelsen.

Grosser, M. (2016, April). *Gut erklärt – nix verstanden? Alltagstheorien zum (nicht-) funktionieren des Mathematikunterrichts*. Fachdidaktisches Kolloquium Sommersemester 2016, Wien.

Hairer, E. & Wanner, G. (2011). *Analysis in historischer Entwicklung*. Berlin: Springer.

Hanel, P. (1991). Lernen durch Lehren, oder Schüler übernehmen Lehrerfunktionen. *RL-Information*, 4, 31-34.

Hanisch, G. (1985). Was bleibt vom Mathematikunterricht hängen?. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik* (Schriftenreihe Didaktik der Mathematik Bd. 10, S. 75-82). Wien: hpt.

Heckmann, K. & Padberg, F. (2012). *Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe 1.* Berlin: Springer.

Humenberger, J. (2016, März). *Schulmathematik 3 (Angewandte Mathematik).* Wien.

Jürgens, E. (2006). *Lebendiges Lernen in der Grundschule. Ideen und Praxisbausteine für einen schüleraktiven Unterricht*. Weinheim: Beltz.

Kaiser, V. (2015). *Vom Alltag zur Mathematik – motivierende und interessante Unterrichtseinstiege auf Basis außermathematischer Kontexte.* Diplomarbeit. Wien: Universität Wien, Institut für Mathematik.

Kirchner, E., Girwidz, R. & Häußler P. (2015). *Physikdidaktik*. Berlin: Springer.

Klippert, H. (2005).*Teamentwicklung im Klassenraum: Übungsbausteine für den Unterricht.* Weinheim: Beltz.

Lauter, J. (1997). *Fundament der Grundschulmathematik. Pädagogisch-didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule* (3. Aufl.). Donauwörth: Auer.

Lowsky, M. (2011). „Das Konkrete ist das Abstrakte an das man sich schließlich gewöhnt hat." (Laurent Schwartz). Über den Ablauf des mathematischen Verstehens. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel, M. Rathgeb (Hrsg.). *Mathematikverstehen. Philospohische und Didaktische Perspektiven* (S. 237-247). Wiesbaden : Vieweg Teubner Verlag.

Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren. Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *Mathematik Lehren*, 141, 4-12.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik Lehren, 123, 4-8.*

Malle, G. (2007). Die spannende Suche nach dem i. Wie sich Zahlenvorstellungen entwickeln. *Mathematik Lehren*, 142, 60-64.

Meyer, H. (1987). *Unterrichtsmethoden. 1: Theorieband*. Frankfurt am Main: Cornelsen.

Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?* Berlin: Cornelsen.

Mietzel, G. (2007). *Pädagogische Psychologie des Lernens und Lehrens*. Göttingen, Bern, Wien, Paris, Oxford, Prag, Toronto, Cambridge, Amsterdam, Kopenhagen: Hogrefe.

Mühlhausen, U. & Wegner, W. (2006). *Erfolgreicher unterrichten?! Eine erfahrungsfundierte Einführung in die Schulpädagogik*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Paradies, L. & Meyer, H. (1992). Einstieg in den Unterrichtseinstieg. *Unterrichts-Einstiege. Themenheft der Zeitschrift Pädagogik*, 44 (10), 6-10.

Parzer, V. (2015). *Die Entwicklung mathematischer Konzeptvorstellungen von rechenbetonten Prozessen zu abstrakten Objekten. Analyse von Aufgaben der Sekundarstufe zum Thema Funktionen.* Diplomarbeit. Wien: Universität Wien, Institut für Mathematik.

Peterßen W. H. (2000). *Handbuch Unterrichtsplanung. Grundfragen, Modelle, Stufen, Dimensionen* (9. Auflage). München: Oldenburg.

Piaget, J. (1971). *Genetic epistemology*. New York: W.W. Norton & Co.

Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology*. New York: Basic Books.

Piaget, J., & Beth, E. W. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht: D. Reidel.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

Reiss, K. & Hammer, C. (2012). *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Basel: Birkhäuser.

Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos und Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht*, 60 (6), 37-43.

Sárvári, T. (2012): Clever lernen? – An die Stationen!. *Frühes Deutsch*, 25, 27-28.

Sauerborn, P. & Brühne T. (2009). *Didaktik des außerschulischen Lernens* (2. Auflage). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Schäfer, J. (2014). *Lob des Irrtums. Warum es ohne Fehler keinen Fortschritt gibt.* München: C. Bertelsmann.

Schaumberger, M. (2009). *Offenes Lernen anhand des Stationenbetriebes: Sammlung und Entwicklung von Unterrichtsmaterialien für die 6. Klasse in den Gebieten: Wurzeln, Potenzen, Logarithmen, Reelle Funktionen, Analytische Geometrie im Raum.* Diplomarbeit. Wien: Universität Wien, Institut für Mathematik.

Schneider, G. (1999). *Gelungene Einstiege. Voraussetzung für erfolgreiche Geschichtsstunden*. Schwalbach/Taunus: Wochenschau Verlag.

Schwartz, D. D. (1997). *Conjecture & proof: an introduction to mathematical thinking.* Fort Worth: Saunders College Publ.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22 (1), 1–36.

Sfard, A. and Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification — The case of algebra. In: *Educational Studies in Mathematics* 26 (2/3), 191–228.

Simmons, G. F. (1987). *Precalculus mathematics in a nutshell. Geometry, algebra, trigonometry*. Providence: Janson Publications.

Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics* (2. Aufl.). London: Penguin Books.

Sonar, T. (2011). *300 Jahre Analysis – Geschichte, Kulturen, Menschen*. Berlin: Springer.

Volkert, K. (1988). *Geschichte der Analysis*. Mannheim u. a.: BI-Wissenschaftsverlag.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik Lehren*, 118, 4-8.

Wallaschek, U. (1991). Lernzirkel – eine Arbeitsform, die selbständiges, individuelles Arbeiten ermöglicht. In: B. Lehmann (Hrsg.), *Kinder-Schule: Lehrer-Schule. Konkrete Beispiele und Anregungen für die Gestaltung eines kindgerechten Unterrichts* (S. 85-106). Langenau-Ulm: Vaas.

Walzebug, A. (2015). S*prachlich bedingte soziale Ungleichheit. Theoretische und empirische Betrachtungen am Beispiel mathematischer Testaufgaben und ihrer Bearbeitung.* Münster: Waxmann.

Weber, A. (1998). *Was ist Werkstattunterricht?* Müllheim: Verlag an der Ruhr.

Zinn, B. (2009). Ergebnisse einer Pilotuntersuchung zur Unterrichtsmethode „Lernen durch Lehren". *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 15*, 325-329.

Schulbücher:

Geretschläger, R., Griesel, H. & Postel, H. (2009). *Elemente der Mathematik. 7. Klasse*. Wien: Dorner.

Götz, S., Hanisch, G., Müller, R. & Reichel, H. C. (2008). *Mathematik 7*. Wien: ÖBV.

Kaiser, G. & Timischl, W. (2012). *Ingenieur-Mathematik 3*. Wien: Dorner.

Lindner, A., Bleier, G., Lindberger, J. & Stepancik, E. (2011). *Dimensionen Mathematik 7*. Wien: Dorner.

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B.& Ulovec, A. (2016). *Mathematik verstehen 7*. Wien: ÖBV.

Wessenberger, B., Hofbauer, P. & Thurner, D. (2015). *Kompetenz: Mathematik. Vorbereitung auf die Reife- und Diplomprüfung*. Wien: hpt.

Elektronische Quellen:

Mathematiklehrplan der AHS- Oberstufe (2007). Zugriff am 08. Februar 2017 unter https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07.

Anhang

Anhang Differenzen- und Differentialquotient

Ein durchschnittlicher Läufer trainiert für seinen ersten Marathon. Bei einer seiner Trainingseinheiten vergisst er jedoch seine GPS-Uhr und kann lediglich auf sein Handy zurückgreifen. Da er trotzdem seinen Trainingsfortschritt dokumentieren möchte, wählt er eine Strecke, bei welcher jeder zurückgelegte Kilometer ausgeschildert ist. Er notiert sich mithilfe der Stoppuhrfunktion seines Handys die jeweiligen Zeiten nach jedem zurückgelegten Kilometer.

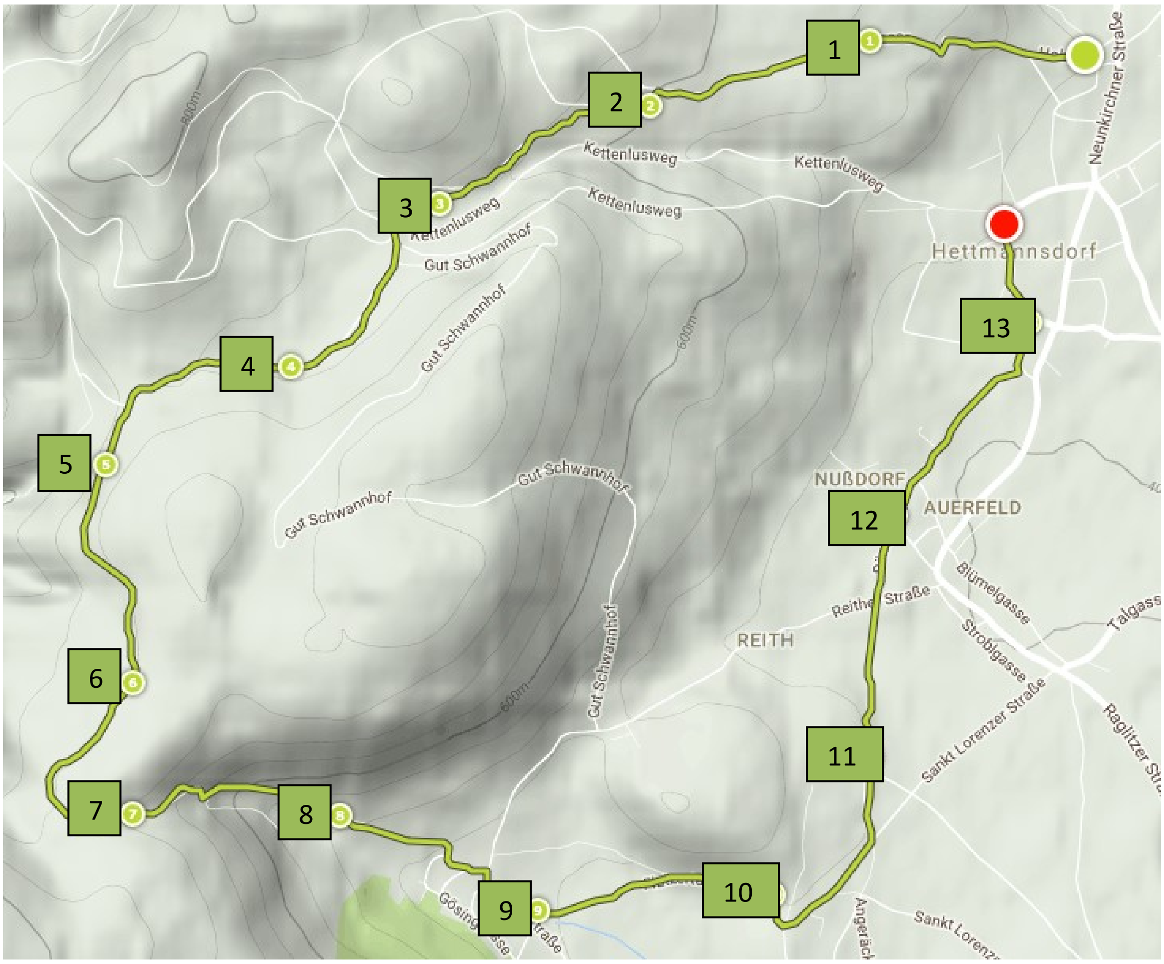
Es ergeben sich folgende Daten:

Kilometer	Uhrzeit (h:min:sek)
0	00:07:16
1	00:13:55
2	00:20:34
3	00:26:14
4	00:31:43
5	00:37:05
6	00:42:35
7	00:48:05
8	00:54:03
9	00:59:25
10	01:04:12
11	01:08:49
12	01:13:26
13	01:17:50

Für die Analyse seines Trainingsfortschrittes möchte der Läufer seine Pace (min pro km) und seine durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen den jeweiligen zurückgelegten Kilometern (z.B. zwischen Kilometer 1 und 2, 2 und 3, etc.) wissen.

Wie könnte er sich diese Daten aus der angegebenen Tabelle berechnen?

Folgende Grafik der gewählten Laufstrecke konnte der Läufer auf einer Laufsport-Homepage entdecken:



Da diese Strecke einige Höhenunterschiede aufweist, interessieren den Läufer zusätzlich folgende Durchschnittsgeschwindigkeiten:

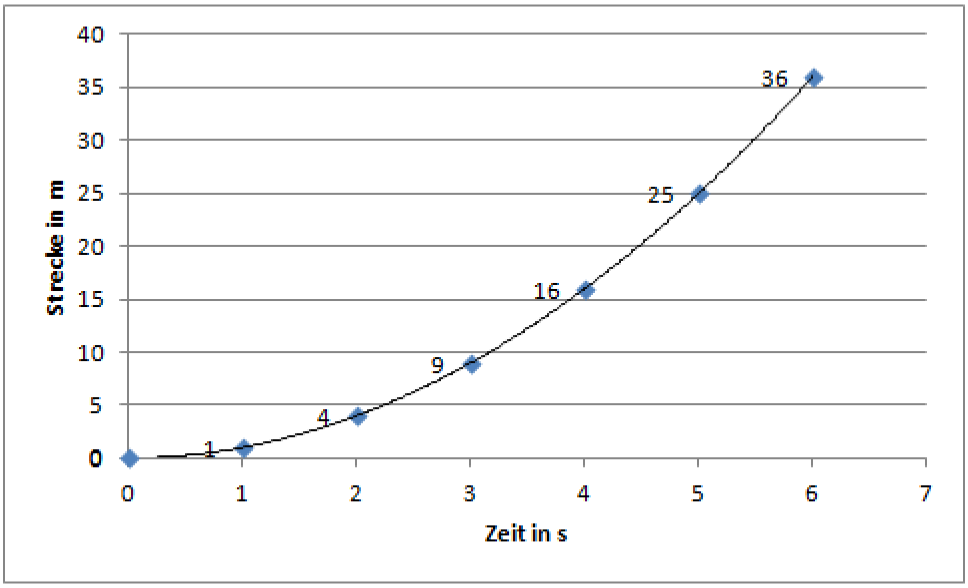
- Zwischen dem Startpunkt und dem höchsten Punkt
- Zwischen den höchsten Punkt und dem Punkt nach dem steilsten Bergab-Stück
- Zwischen dem Punkt des steilsten Bergab-Stückes und dem Ziel

Wie können diese durchschnittlichen Geschwindigkeiten berechnet werden?

Nach der Laufeinheit entdeckt der Läufer in der Nähe einer Volksschule eine Geschwindigkeitsanzeige, welche die AutofahrerInnen an die maximale Geschwindigkeit erinnern soll. Er möchte seine Geschwindigkeit messen und steigert diese konstant bis zur Anzeige. Das Ergebnis lautet 26 km/h.

Er ist davon nicht überzeugt und versucht sein Glück erneut – dieses Mal nimmt er jedoch seine GPS-Uhr mit. Er startet sie, und steigert sein Tempo konstant bis zur Anzeige (er löst diese nach exakt 4 Sekunden aus) – das Ergebnis bleibt bei 26 km/h.

Zuhause angekommen wertet er die Daten seiner Uhr mithilfe des PCs aus. Er erhält folgende Grafik:



Wie kann er mithilfe der gegeben Daten und den Erfahrungen aus den vorherigen Fragestellungen seine momentane Geschwindigkeit bei der Anzeige, also nach 4 Sekunden, herausfinden?

Stimmt die Anzeige laut deinen Überlegungen?

Anhang Ableitungsregeln

Gruppe A: Konstanten- und Faktorenregel

Konstantenregel

- Zeichne einen beliebigen konstanten Funktionsgraphen mithilfe von GeoGebra.
- Zeichne einen beliebigen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, ein.
- Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.
- Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.
- Versuche dasselbe mit einer anderen konstanten Funktion.
- Was kannst du aus deinen Grafiken und Daten schließen?
- Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von konstanten Funktionen auf:

$$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Faktorenregel

- Zeichne einen beliebigen Funktionsgraphen mithilfe von GeoGebra.
- Zeichne einen beliebigen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, ein.
- Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.
- Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.
- Zeichne einen neuen Funktionsgraphen ein, indem du den vorherigen Funktionsterm mit einer beliebigen Zahl multiplizierst.
- Zeichne einen Punkt mit gleicher x-Koordinate wie beim ersten Punkt ein, welcher jedoch auf dem neuen Funktionsgraphen liegt.
- Zeichne auch in diesem Punkt die Tangente und ihre Steigung ein.
- Versuche einen Zusammenhang zwischen den zwei Steigungen zu erkennen.
- Stelle eine Vermutung bezüglich der Allgemeingültigkeit dieses Zusammenhangs auf:

$$f(x) = ku, k \in \mathbb{R}, u \textit{ ist eine beliebige Funktion}$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Gruppe B: Potenzregel

- Zeichne den Funktionsgraphen einer beliebigen Potenzfunktion mithilfe von GeoGebra (z.B. $\mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3$, etc.).
- Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($\mathrm{A} = (\mathrm{r}, \mathrm{f}(\mathrm{r}))$.
- Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.
- Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.
- Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat.
  ($\mathrm{B} = (\mathrm{r} \mid \mathrm{Steigung})$)
- Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers.
- Führe dieselben Schritte mit einer weiteren Potenzfunktion durch.
- Führe dieselben Schritte für eine Potenzfunktion mit negativer Hochzahl (z.B. x^{-2}) durch. Was fällt dir auf?
- Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Potenzfunktionen auf:

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Gruppe C: Summen- und Differenzenregel

Summenregel

- Zeichne den Funktionsgraphen einer beliebigen Funktion mithilfe von GeoGebra.
- Zeichne einen weiteren Funktionsgraphen einer zum ersten Punkt verschiedenen Funktion mithilfe von GeoGebra.
- Addiere diese beiden Funktionsterme und zeichne den entstandenen Funktionsgraphen.
- Zeichne drei Punkte mit der gleichen x-Koordinate so ein, dass auf jedem Graph ein Punkt liegt.
- Zeichne in allen drei Punkten die Tangente an den jeweiligen Funktionsgraphen und das dazu passende Steigungsdreieck mithilfe des Steigungs-Befehles ein.
- Versuche einen Zusammenhang zwischen den drei Steigungen zu erkennen.
- Führe dieselben Schritte für die Subtraktion der ersten zwei Funktionen durch.
- Stelle eine Vermutung bezüglich der Allgemeingültigkeit dieses Zusammenhangs auf:

$f(x) = u + v,$ u *und v sind beliebige differenzierbare Funktionen* $f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Gruppe D: Exponential- und Logarithmusableitungsfunktionen

Exponential:

- Zeichne den Funktionsgraphen einer Exponentialfunktion mit der Basis e ein.
- Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($\mathrm{A} = (\mathrm{r} \mid \mathrm{f(r)})$).
- Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.
- Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.
- Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat. ($\mathrm{B} = (\mathrm{r} \mid \mathrm{Steigung})$)
- Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers. Was fällt dir auf?
- Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Exponentialfunktionen mit der Basis e auf:

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Logarithmus:

- Zeichne den Funktionsgraphen einer Logarithmusfunktion zur Basis e ein.
- Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($\mathrm{A} = (\mathrm{r} \mid \mathrm{f(r)})$).
- Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.
- Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.
- Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat. ($\mathrm{B} = (\mathrm{r} \mid \mathrm{Steigung})$)
- Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers.
- Was fällt dir auf?
- Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Logarithmusfunktionen zur Basis e auf:

$$f(x) = \ln(x)$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Gruppe E: Cosinus- und Sinusfunktion

Cosinus

- Zeichne den Funktionsgraphen einer Cosinusfunktion.
- Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($\mathrm{A} = (\mathrm{r} \mid \mathrm{f(r)})$.
- Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.
- Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.
- Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat. ($\mathrm{B} = (\mathrm{r} \mid \mathrm{Steigung})$)
- Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers.
- Was fällt dir auf?
- Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Cosinusfunktionen auf.

$$f(x) = \cos(x)$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Sinus

- Zeichne den Funktionsgraphen einer Sinusfunktion.
- Zeichne einen beliebigen dynamischen Punkt, welcher auf diesem Funktionsgraph liegt, mithilfe von Schiebereglern ein ($\mathrm{A} = (\mathrm{r} \mid \mathrm{f(r)})$.
- Zeichne die Tangente in diesem Punkt ein.
- Zeichne mithilfe des Steigungs-Befehles die Steigung der Tangente in diesem Punkt des Funktionsgraphs ein.
- Zeichne einen neuen Punkt ein, welcher dieselbe x-Koordinate wie der erste Punkt, jedoch als y-Koordinate die Steigung der Tangente im ersten Punkt hat. ($\mathrm{B} = (\mathrm{r} \mid \mathrm{Steigung})$)
- Aktiviere das Spurwerkzeug des zweiten Punktes und variiere den Wert des Schiebereglers.
- Was fällt dir auf?
- Stelle eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregel von Sinusfunktionen auf.

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Anhang Funktionsanalyse

Station 1: Graphisches Differenzieren

- Zeichne den Funktionsgraphen von $\mathrm{f(x)} = \sin(\mathrm{x}) + 4$ mithilfe von GeoGebra.
- Zeichne die Extrempunkte und die Wendepunkte dieses Funktionsgraphen mithilfe der GeoGebra Befehle „Extremum“ und „Wendepunkt“ ein.
- Nutze deine Kenntnisse bezüglich des graphischen Differenzierens, um den Graphen der Ableitungsfunktion einzuzeichnen.
- Versuche, mithilfe der Grundvorstellung der Tangentensteigung bzw. mithilfe der eingezeichneten Tangente Zusammenhänge zwischen den markanten Punkten (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) des ursprünglichen Funktionsgraphen und jenem der Ableitungsfunktion zu erkennen.
- Verschriftliche deine Erkenntnisse.
- Führe dieselben Schritte bei folgenden Funktionen durch:
    - $g(x) = \cos(x) + 4$
    - $h(x) = x^3 + 2x^2 + 0{,}2x + 1$
    - $i(x) = 3x^2 + 4x + 0{,}2$
- Erläutere deine Erkenntnisse der Lehrperson.

Station 2: Ableitungsregeln

- Leite folgende Funktionen zweimal (ohne Technologieeinsatz) ab:
    - $f(x) = 0{,}5x^3 + x^2 - 2x + 3$
    - $g(x) = x^3$
    - $i(x) = x^3 + 0{,}5x + 3$
- Zeichne sowohl die ursprünglichen Funktionsgraphen als auch die passenden Graphen der Ableitungsfunktionen in jeweils separate Koordinatensysteme (GeoGebra) ein.
- Versuche, anhand dieser Graphen Zusammenhänge der jeweiligen Funktionen herauszufinden.
- Verschriftliche deine Erkenntnisse und erläutere sie der Lehrperson.

Station 3: Bewegungsbeispiele

Die zurückgelegte Höhe (h in m) eines Hubschraubers in Abhängigkeit der Zeit x (in min) kann mithilfe folgender Funktion modelliert werden:

$$h(x) = 0{,}45x^3 - 1{,}8x^2 + 0{,}55x + 2{,}85$$

- Zeichne den Graphen dieser Funktion mithilfe von GeoGebra in ein Koordinatensystem ein.
- Überlege dir, zwischen welchen Zeitpunkten der Hubschrauber eine positive Geschwindigkeit (Steigflug) und zu welchen Zeitpunkt er eine negative Geschwindigkeit (Sinkflug) innehat.
- Überlege dir zusätzlich, zwischen welchen Zeitpunkten der Pilot bzw. die Pilotin des Helikopters die Geschwindigkeit erhöht, also beschleunigt, und zwischen welchen Zeitpunkt die Geschwindigkeit verringert (negative Beschleunigung) wird.

Wir wissen bereits, dass die erste Ableitung des zurückgelegten Weges in Abhängigkeit der Zeit die Geschwindigkeit beschreibt und die zweite Ableitung die Beschleunigung.

- Gib deine Überlegungen bezüglich der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Helikopters mithilfe folgender Symbolik an :
    - $h'(x) < 0,\ h'(x) > 0$
    - $h''(x) < 0, h''(x) > 0$
- Versuche, den Verlauf der Geschwindigkeit und den der Beschleunigung in separate Koordinatensysteme (händisch) zu skizzieren.
- Zeige deine Skizzen und deine Erkenntnisse der Lehrperson.

Station 4: Bedingungen für Extremstellen

- Versuche, Kriterien für Extremstellen aufgrund deiner bisherigen Erkenntnisse zu finden und gib diese an.
- Versuche, zusätzlich Kriterien für die Unterscheidung von Hoch- und Tiefpunkten anzugeben.
- Überprüfe die Richtigkeit deiner Kriterien an den bisher angegebenen Beispielen und überarbeite diese gegebenenfalls.
- Zeige deine Ergebnisse der Lehrperson.

Station 4+: Spezielle Fälle

- Überprüfe deine Kriterien an folgenden Funktionen bzw. Funktionsgraphen:
    - $f(x) = 7$
    - $g(x) = 2x - 3$
    - $i(x) = x^4$
    - $h(x) = \sqrt{x}$
- Überarbeite gegebenenfalls deine Kriterien und zeig sie der Lehrperson.

Station 4: Bedingungen für Wendestellen

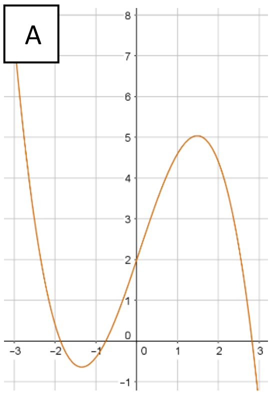
- Versuche, Kriterien für Wendestellen aufgrund deiner bisherigen Erkenntnisse zu finden und gib diese an.
- Überprüfe die Richtigkeit deiner Kriterien an den bisher angegebenen Beispielen und überarbeite diese gegebenenfalls.
- Zeige deine Ergebnisse der Lehrperson.

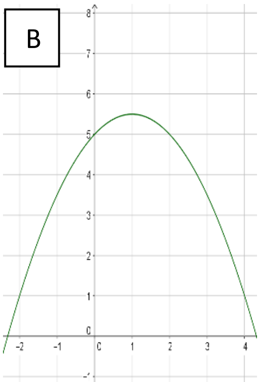
Station 5+: Spezielle Fälle

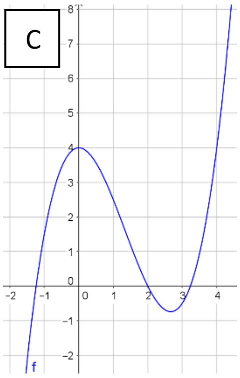
- Überprüfe deine Kriterien an folgenden Funktionen bzw. Funktionsgraphen:
    - $f(x) = -3$
    - $g(x) = -4x + 5$
    - $h(x) = x^4$
- Überarbeite gegebenenfalls deine Kriterien und zeig sie der Lehrperson.

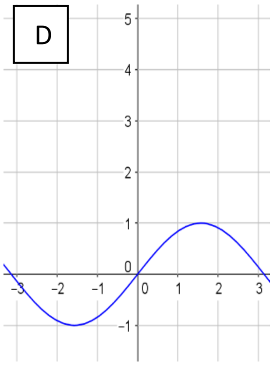
Station 6: Funktionsanalyse

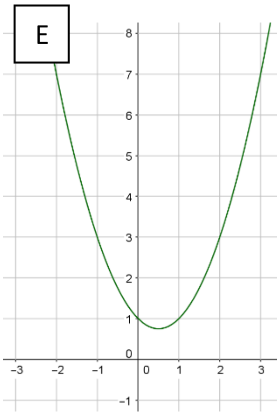
- Ordne den folgenden Funktionsgraphen (A, B, C, D, E, F, G, H) die passenden Graphen (1, 2, …,16) der ersten bzw. der zweiten Ableitung zu.

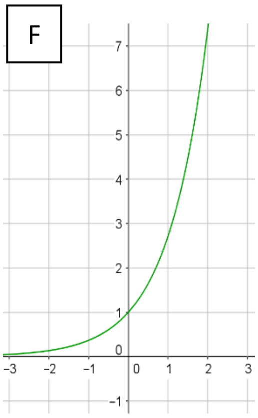
A


B


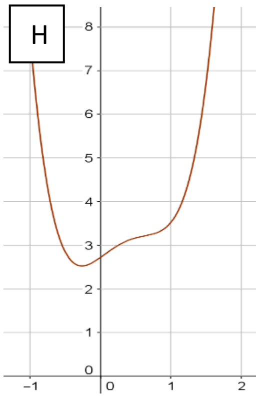
C


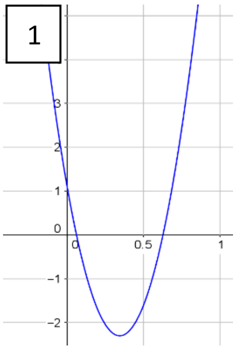
D


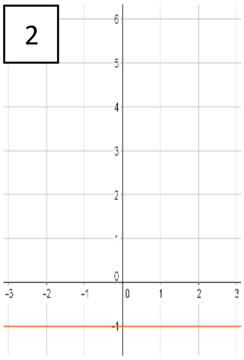
E


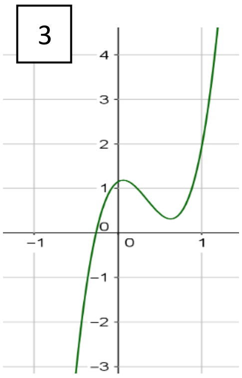
F


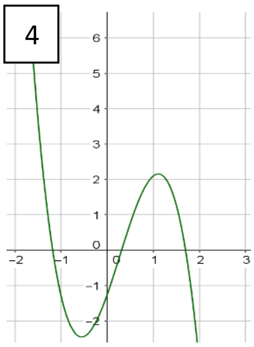
G

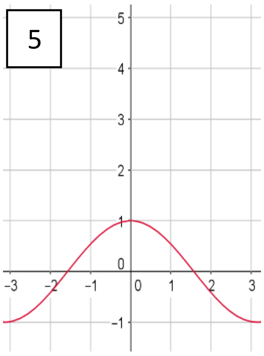

H


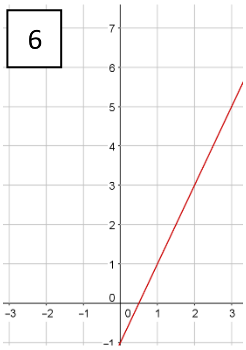
1


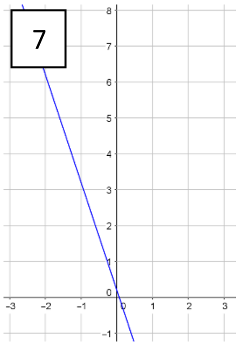
2


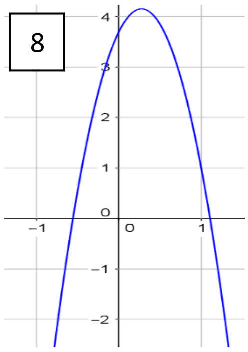
3


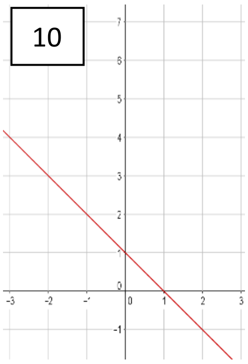
4


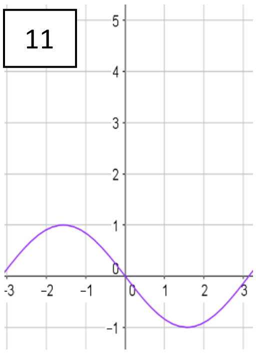


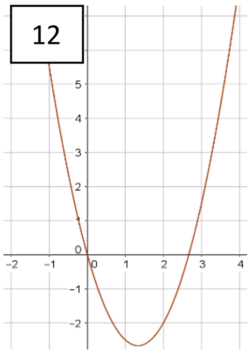


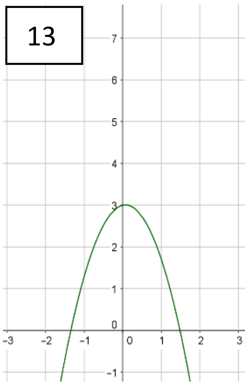


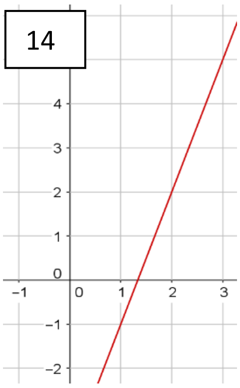


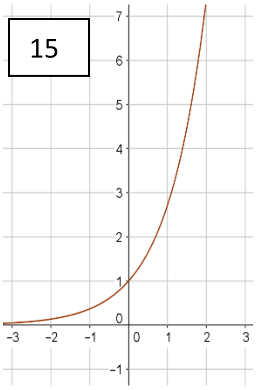


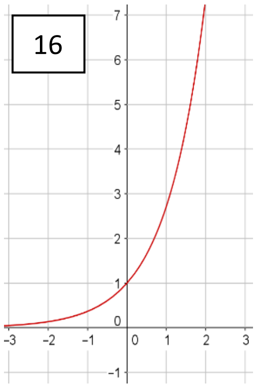












- Zeige deine Lösungen der Lehrperson.