DIPLOMARBEIT/ DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit/ Title of Diploma Thesis

„Vergleich von Computer Algebra Systemen und deren Einsatz im Unterricht“

verfasst von/ submitted by

Stefan HECHER

angestrebter akademischer Grad/ in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien/ Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 884 406
Studienrichtung lt. Studienblatt degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtstudium UF Informatik und Informationsmanagement und Mathematik
Betreut von / Supervisor:	Mag. Dr. Andreas Ulovec

Vorwort

Die vorliegende Arbeit dient zum Abschluss meines Studiums „Lehramtstudium UF In- formatik und Informationsmanagement und Mathematik“. Inspiriert wurde ich einerseits durch meine Tätigkeit als Nachhilfelehrer sowohl in Nachhilfe Instituten, als auch hier und da privat. Dabei konnte ich feststellen, dass der Einsatz von modernen Techniken, wie etwa den Computer immer mehr Einzug in den Schulaltag hält. Insbesondere in der Mathematik werden, vorzugsweise in der Sekundarstufe 2, die sogenannten Computeralge- brasysteme (CAS) immer verstärkt eingesetzt und dürfen vereinzelnt sogar schon bei schriftlichen Prüfungen und bei der Matura zum Einsatz kommen. Das erleichtert das Leben der SchülerInnen doch um einiges. Statt Dinge mühevoll per Hand zu rechnen, so wie etwa zu meiner Schulzeit, wird mittels ein paar Befehlen das Ergebnis binnen Sekunden „hergezaubert“ und man kann sich durch die neue Form der Matura den wichtigeren Dingen widmen: dem Interpretieren, Deuten und dergleichen der Ergebnisse, des Sachverhalts oder diversen Graphiken. Eine der wenigen Hürden hierbei ist, das Wissen des richtigen Befehls, sowie dessen korrekte syntaktische Eingabe in das Computer Algebra System. Selbst das Konstruieren in der Geometrie kann heutzutage, sogar in 3D, erledigt werden. Die Auswahl an solchen Hilfen ist breit, wenngleich sich für den Mathematikunterricht im Laufe der Zeit ein paar wenige Nützliche herauskristallisiert haben. Leider musste ich aber in selben Atemzug feststellen, dass der Hintergrund des Stoffes bei den SchülerInnen irgendwo verloren geht. Es wird sich oft nicht mehr darum gekümmert, was da jetzt eigentlich passiert. Es wird einfach nur mehr ein Befehl eingegeben und das Ergebnis abgeschrieben. Das Problems, das heißt, wie rechnet man das per Hand, was passiert da eigentlich, wird gar nicht mehr, wenn überhaupt, besprochen und interessiert die SchülerInnen genauso wenig. Andererseits hat mir auch mein Zweitfach einen Anreiz gegeben. Im Zuge dessen durfte ich nicht nur viele technische Hilfsmittel die Mathematik betreffend kennen lernen, sondern auch einen Blick hinter die Kulissen werfen und musste ich auch ein paar mathematische Problemstellungen, die auch im Mathematikunterricht vorkommen, selbst ausprogrammieren. Dieses Wissen möchte ich ebenfalls in diese Arbeit einbringen.

Letztendlich möchte ich mich bei all jenen, die mich während des gesamten Studiums unterstützt haben und es auch jetzt noch tun, bedanken. Mein Dank gilt auch meinem Betreuer dieser Arbeit, Mag. Dr. Andreas Ulovec, der mich trotz seiner guten Buchung, was Betreuungsplätze betrifft, doch aufgenommen und mich ausgezeichnet betreut hat. Nun wünsche ich dem/der LeserIn dieser Arbeit viel Vergnügen.

Wien, November 2016

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Geschichte

Hilfsmittel zur Bewältigung von Problemen verschiedener Arten, insbesondere arithmetischer oder nummerischer Natur (wie beispielsweise der heutige Taschenrechner, die CAS und mehr), sind keinesfalls plötzlich aus dem Nichts entstanden. Man hat sich schon sehr früh in der Geschichte an Rechenhilfen bedient und damit als Vorreiter der heutigen, extrem mächtigen Mittel gedient.

1.1 Wie alles begann - Der Abakus

Ihren Ursprung nehmen die Rechenhilfen mit dem sogenannten *Abakus* ein, über dessen Herkunft sich streiten lässt. Übereinstimmenden Quellen zur Folge hat der Abakus seine Wurzeln im asiatischen Raum, genauer China, wenngleich er im Laufe der Zeit immer wieder von verschiedenen Völkern und Ländern adaptiert worden ist und es den Abakus daher in verschiedensten Versionen gibt. Die Funktionsweise ist stets annähernd gleich, allerdings vom jeweiligen Zahlensystem abhängig.
Er ist bis heute in manchen Ländern wie beispielsweise China oder Indien ein beliebtes Hilfsmittel zur Bewältigung der Grundrechnungsarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Sogar das Wurzelziehen, wenn auch etwas komplizierter, ist mit dem Abakus möglich. Das Wort „Abakus“ stammt aus dem phönizischen „abak“ und bedeutet „Auf eine Fläche gestreuter Sand zum Schreiben“ (siehe Wrightson 1996), da man den Abakus zunächst mit einem Stück Holz in den Sand gezeichnet hat und erst einige Zeit später begonnen hat ihn physisch zu bauen. Das lateinische Wort für Abakus ist „abacus“, und bedeutet soviel wie „Brett“ oder „Tafel“ , was bei näherer Betrachtung desselbigen wahrscheinlich einleuchtender ist.
Wie bereits oben erwähnt findet der Abakus seinen Ursprung um ca. 1110 v. Chr. in China. Dort wurden sieben Steine (genannt Perlen), senkrecht durch einen Holzstab miteinander verbunden und in einem Rahmen, welcher ebenfalls aus Holz war, eingespannt In der Regel gab es den Abakus mit neun, elf oder dreizehn Reihen, in Sonderfällen konnte die Anzahl jedoch auch erweitert werden. Nichtsdestotrotz wurden diese senk-

recht verbundenen Perlen durch einen dicken Querbalken im Verhältnis 2:5 in zwei Bereiche aufgeteilt, dem sogenannten *Himmel* und der *Erde,* wobei die Kugeln im Himmel jeweils den Wert 5 und jene im Bereich der Erde 1 hatten. Grund dafür war, dass der *Suan-Pan*, wie die Chinesen ihren Abakus nannten, an dem arabischen Zahlensystem gebunden war.
Um 1600 n. Chr. wurde er von den Japanern adaptiert und *Sopran* genannt. Er ist der chinesischen Version sehr ähnlich, hat im oberen Bereich jedoch nur eine Kugel. Dies liegt daran, dass zur damaligen Zeit das Hexadezimalsystem in Japan üblich war und mit dem Sopran das Rechnen in diesem Zahlensystem erheblich erleichtert wurde. Im 17. Jahrhundert wurde der Abakus von der Rechenmaschine verdrängt.

Funktionsweise eines Ababus

Wie funktioniert jetzt eigentlich so ein Abakus? Ein Abakus ist stets an ein Zahlensystem gebunden und ist sowohl in der Lage Zahlen in diesem Zahlensystem darzustellen, als auch damit zu rechnen. Dafür ist es jedoch notwendig, sich den oben beschriebenen Aufbau des Abakus nochmal vor Augen zu führen. An dieser Stelle sei angemerkt, dass es sich von nun an stets um einen chinesischen Abakus mit neun Stäbchen handelt, die Funktionsweise jedoch auf andere Ausprägungen analog angewandt werden kann. Folgende Situation liegt demnach vor:

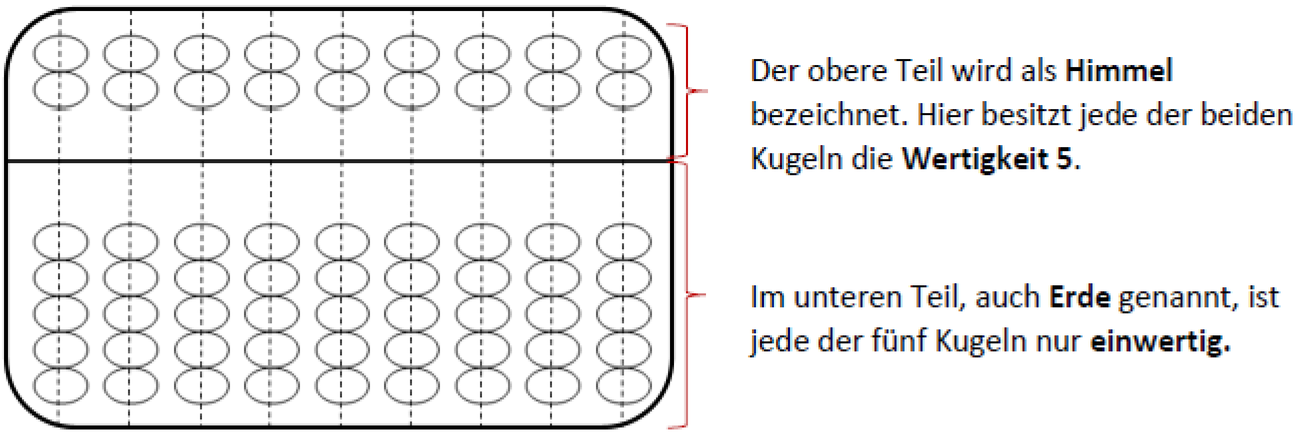


Abbildung 1: Aufbau eines Abakus
Aufbau eines chinesischen Abakus mit neun Stäbchen (aus Regensburg 2015)

Bevor es zum Umgang mit dem Abakus kommt, vielleicht noch ein kleiner Exkurs: In weiten Teilen der Welt ist das Dezimalsystem (mit der Basis 10) vorherrschend, was nichts anderes bedeutet, dass es 10 verschiedene Ziffern (0,...,9) gibt. Jede Zahl lässt sich daher als Zehnerpotenz aus 0,..,9 darstellen. (d.h beispielsweise $10^4, 10^5, \ldots$).Wobei man stets von rechts nach links darzustellen beginnt, was bedeutet, dass die Ziffer ganz rechts als 10^0, die nächste als 10^1 usw. darzustellen ist. Hier ein kleines illustratives Beispiel (adaptiert aus Regensburg 2015, Blatt 2.3).

Man stelle die Zahl 158 im Dezimalsystem dar.
Man hat 3 Ziffern, das heißt es handelt sich bei der darzustellenden Zahl um eine dreistellige Zahl. Nun sind die Ziffern aus Zehnerpotenzen darzustellen,bedeutet in diesem Fall von 10^0 bis 10^2.
1 steht an der dritten Stelle von rechts $\Rightarrow 1 \cdot 10^2$,
5 an der zweiten $\Rightarrow 5 \cdot 10^1$,
8 an der ersten $\Rightarrow 1 \cdot 10^0$

$\Rightarrow 158 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

Auf diese Weise lassen sich Zahlen in jedem Zahlensystem darstellen, wenngleich die Basis des Systems mit der aktuellen Stelle, von rechts gezählt, zu potenzieren und mit dem Faktor, welcher sich dort befindet, zu multiplizieren ist. Vorsicht! Die Anzahl der Ziffern im jeweiligen System ist immer abhängig von der zu Grunde liegenden Basis und stets gleich groß, wie der Wert der Basis selbst. Das Dualsystem (Basis 2) hat beispielsweise nur die Ziffern 0 und 1.

Um eine Zahl, wie beispielsweise 7502 mit dem Abakus darstellen zu können, ist wie eben demonstriert vorzugehen. Demnach folgt für 7502: (adaptiert von Regensburg 2015, Blatt 2.2)

$7502 = 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
Hierbei beschreibt die Zehnerpotenz stets die Spalte im Abakus und der Faktor davor den Wert derselbigen.
Es ist stets mit der Einerstelle zu beginnen,(befindet sich ganz rechts im Abakus), wobei zu beachten ist, dass die unterste respektive oberste Perle einer Spalte, so wenig wie möglich bewegt werden soll, da diese ausschließlich zum Rechnen benutzt werden sollten.
Die Einerziffer ist die 2. Das bedeutet man schiebt im Bereich Erde zwei Perlen zum Querbalken (Die verschobenen Perlen sind in der Graphik schwarz eingefärbt).

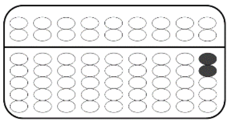


Abbildung 2: Darstellung Einerstelle Abakus (Regensburg 2015)

An der nächsten Stelle, der Zehnerstelle, steht die 0. Daraus folgt, dass die Zahl keine solche Stelle besitzt, weshalb in dieser Spalte keine Perlen zu verschieben sind. Die dritte Spalte gibt die Hunderterstelle an. Sie beträgt in diesem Beispiel 5, was zur Bedeutung hat, dass man eine Perle aus dem Himmel (diese besitzen den Wert 5) nach unten zum Querbalken schieben muss. Hier kommt die oben beschriebene Regel zum Einsatz (man könnte ja auch (alle) 5 Perlen von unten zum Balken schieben), welche eben besagt, dass die Unterste bloß zu Berechnungen verwendet werden soll.

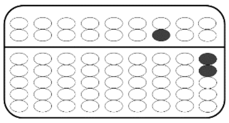


Abbildung 3: Darstellung Hunderterstelle Abakus (Regensburg 2015)

Die vierte Spalte beschreibt die Tausenderstelle, die in diesem Fall 7 ist. Demnach werden eine Perle vom Himmel nach unten und zwei von der Erde nach oben zum Querbalken geschoben.

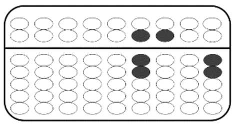


Abbildung 4: Darstellung Tausender Abakus (Regensburg 2015)

Nun ist die Zahl 7502 richtig dargestellt.

Was ist möglich? - Rechnen mit dem Abakus

Die Rechenmöglichkeiten auf dem Abakus sind vielleicht größer als auf den ersten Blick zu vermuten. Dieses Gerät ist nicht nur im Stande die vier Grundrechenoperationen zu durchzuführen, sogar das (quadratische und kubische) Wurzelziehen ist auf dem Abakus

möglich.
Am einfachsten ist naturgemäß die Addition. Hier wird der erste Summand dargestellt und der zweite dazu addiert. Hierbei ist jedoch auf etwaige Überläufe Acht zu geben, die entstehen, wenn Ziffern des zweiten Summanden nicht mehr in der dafür vorgesehen Spalte darstellbar sind und deshalb „getrickst“ werden muss, was nichts anderes bedeutet, als dass der zweite Summand auf andere Art dargestellt werden muss.
9+3=12 (vergleiche Regensburg 2015)
Zunächst wird 9 auf dem Abakus dargestellt. Da es sich hierbei um eine einstellige Zahl handelt, ist lediglich in der ersten Spalte 1 Perle mit dem Wert 5 und 4 mit dem Wert 1 zum Balken zu schieben.
Nun muss noch 3 dazu addiert werden. Da jedoch für die Zahl 3 in der ersten Spalte 3 Perlen mit dem Wert 1 zu verschieben wären und dies nicht möglich ist (es sind schon 4 von den vorhandenen 5 für die Zahl 9 in Anspruch genommen worden), muss man sich eines Tricks bedienen. Anstatt 3 zu addieren, kann 10 addiert werden und anschließend 7 subtrahiert (10-7=3). Dafür wird zunächst 10 dargestellt, indem in der zweiten Spalte (beschreibt die Zehnerstelle einer Ziffer) 1 Perle mit dem Wert 1 zum Balken schiebt. Für die Einerstelle muss nichts getan werden, da sie 0 beträgt. Nun muss noch 7 subtrahiert werden. Hierbei muss man in der ersten Spalte (die 7 ist einstellig) eine fünfwertige Perle und zwei mit dem Wert 1 vom Balken **weg** geschoben werden.

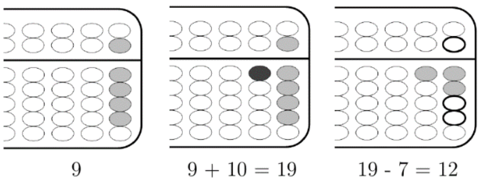


Abbildung 5: Addition einstelliger Zahlen am Abakus (Regensburg 2015)

Mit dieser Methode können auch mehrstellige Zahlen miteinander addiert werden (siehe beispielsweise Regensburg 2015, Blatt 3.2). Selbst das Addieren von Dezimalzahlen ist mit dem Abakus möglich (siehe beispielsweise Wrightson 1996, 3.1 Addition)

Die Subtraktion funktioniert ähnlich wie die Addition mit dem Unterschied, dass Perlen weg geschoben werden. Es wird zunächst die erste Zahl am Abakus dargestellt, danach wie gewohnt von rechts nach links vorgegangen. Sollte die aktuelle Ziffer des Minuenden kleiner als jene des Subtrahenden sein, ist wie gewohnt eine *Entbündelung* durchzuführen. Das Besondere beim Abakus ist jedoch, dass nicht nur, wie bei der schriftlichen Subtraktion üblich Zehner, sondern auch Fünfer entbündelt werden können. Der Einfachheit halber wird bloß die Subtraktion mit positiver Differenz, sprich der Minuend ist größer als der Subtrahend, vorgestellt: (vergleiche Regensburg 2015, Blatt 3.2)

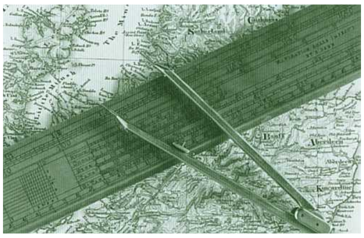
28605 – 360
Es wird 28605 auf dem Abakus dargestellt. Bei der Einerstelle ist nichts zu tun, da diese beim Subtrahend 0 ist. Nun wird 60 von 28605 abgezogen. Hierbei ist zu beachten, dass die 60 „negativ“ dargestellt werden muss, da die 60 bekanntlich abgezogen werden soll. Das wird erreicht, indem zunächst 40 addiert und danach 100 subtrahiert wird. (40 - 100 = -60).
Letztendlich muss noch 300 von 28605 abgezogen werden. Dafür wird 200 dazugegeben und 500 abgezogen (200 - 500 = -300).
Das Ergebnis, 28245, kann jetzt abgelesen werden.

Die Multiplikation ist weitaus schwieriger auf dem Abakus durchzuführen. Hier wird zunächst der Multiplikand auf dem Abakus dargestellt, wobei die sich am weitesten rechst befindende Spalte freizulassen ist. Danach wird jede Ziffer des Multiplikanden mit dem Multiplikator multipliziert und die aktuelle Ziffer des Multiplikanden durch das Ergebnis, welches durch eine Addition hinzugefügt wird, überschrieben. Das Ergebnis ist am Ende einfach abzulesen. Für Beispiele sei unter anderem auf (Blatt 5 Regensburg 2015) oder (3.3 Die Multiplikation Wrightson 1996) verwiesen. Insbesondere (Wrightson 1996) bietet zusätzlich noch die Vorgehensweise der Division und des quadratischen, respektive kubischen Wurzelziehens an Hand von graphisch unterstützten Beispielen.

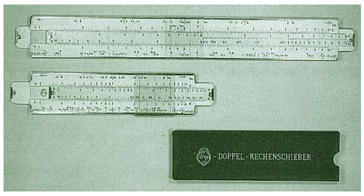
1.2 Der Rechenschieber

Der Rechenschieber war und ist ein sehr vielseitig einsetzbares Hilfsmittel für Berechnungen. Dank dessen hoher Anpassbarkeit, was Aussehen und Skalierung betrifft, gibt es ihn in nahezu jedem Berufsfeld, insbesondere dem technischen, sogar in diversen Studien hat er seinen Platz gefunden, wenngleich er heutzutage auf Grund der modernen Zeit immer mehr in Vergessenheit gerät.
Seine Geburtsstunde erlebte der Rechenschieber nicht zuletzt auch durch eine andere Entdeckung: dem Logarithmus. Dessen Entdecker John Napier (1550-1617), seines Zeichen Schotte, gilt aus diesen Gründen als Erfinder des Rechenschiebers. Aus Napiers Feder entsprang allerdings „nur“ die Theorie. So war es der Engländer Edmund Gunter

(1581-1626), dem es 1620 erstmals gelang den Logarithmus auch messbar zu machen, vergönnt den Rechenschieber zu entwerfen. Dafür stellte er den Logarithmus auf einem hölzernen Maßstab, welcher 2 Fuß lang war dar. Nun konnte mit Hilfe eines Stechzirkels gerechnet werden. Dies wurde zur sogenannten *Gunter Scale* (zu Deutsch: Gunter-Skala), auf welcher es mit Hilfe eines Zirkels möglich war graphisch zu rechnen. Diese Skala hatte auch mehrere Einsätze in historischen Ereignissen, wie beispielsweise bei der „Schlacht von Trafalgar" (Admiral Nelson).
Eben oben genannter Stechzirkel machte das graphische Rechnen mit dem Schieber etwas kompliziert und hat mit der heutigen derartigen Hilfe, was die Handhabbarkeit betrifft, nicht viel gemein. 1630 wurde vom englischen Mathematiker William Ougrehd (1574-1660) ein Rechenschieber mit zwei nebeneinander verschiebbaren logarithmischen Skalen erfunden, was die Hilfe des Stechzirkels unnötig machte. Der Rechenschieber war somit der direkte Vorreiter der analogen Rechner, welche auf diesem Prinzip aufbauten und diverse Rechenoperationen, wie die Multiplikation oder Division, auf einfachere herunter bricht und statt des Rechnens einfach misst.



(a) Rechenschieber mit Zirkel nach Edmund Gunter (Joss 2004)



(b) Rechenschieber mit zwei Skalen nach Ougrehd (Joss 2004)

Abbildung 6: Abbildungen eines Rechenschiebers nach Gunter und Ougrhed

Die Vielfalt des Rechenschiebers

Den zwei verschiebbaren Skalen war es letzten Endes geschuldet, dass der Rechenschieber in den verschiedensten Formen gebaut wurde. So hat auch Ougrhed den Schieber in gleich zwei Formen gebaut: Einmal mit zwei geraden Teilen und einmal mit zwei kreisrunden Scheiben.
Der Rechenstab, so wurde jene Form mit den zwei geraden Skalen genannt, war nicht

zuletzt auf Grund seiner einfachen Anfertigung am meisten verbreiteten. Wie bereits erwähnt, bestand dieser aus zwei Skalen: *nämlich ein Grundskalenpaar mit einer logarithmischen Teilung, die von 1 bis 10 bzw. von 1 über 10 bis 100 reichte.* (siehe Joss 2004). Dem noch nicht genug, kamen auf Grund einer geschickten Bauart, welche es ermöglichte weitere Skalen anzubringen (Stichwort Zunge), noch zwei Quadratskalen hinzu, die von 1 bis 10 logarithmisch geteilt waren. Mehr war nicht mehr möglich, wenngleich man noch durch einen Läufer zwei nicht direkt berührende Skalen in Verbindung bringen konnte. Es wurde daher ein anderer Trick angewandt: Man brachte an der Rückseite der Zunge zwei weitere Skalen an, welche durch das Umdrehen derselbigen zum Einsatz kam. Des Weiteren wurde die Anzahl dieser doppelseitig benutzbaren Zunge erhöht, was abhängig von der jeweiligen Anzahl an solchen Zungen, eine Verdoppelung dieser ergab. Hatte man beispielsweise zwei Zungen, kam man nun auf vier, bei vier gar auf acht usw. Eine Alternative dazu war die sogenannte *Duplex-Bauweise.* Hierbei hatte man zwei Teile, welche am Ende durch Stege zusammengehalten wurden. Dazwischen befand sich die Zunge. Dadurch konnte man bis zu vier Skalen anbringen. Im Laufe der Zeit wurde ein Läufer eingebaut, welcher es erlaubte die Anzahl der Skalen am Rechenstab nahezu unbegrenzt zu halten. Dieser Läufer sorgte nämlich auch dafür, dass einander nicht berührende Skalen in Verbindung gebracht werden konnten. Nichtsdestotrotz gab es beim Rechenstab Probleme, weshalb man sich entschloss, auch andere Formen des Rechenschiebers zu erschaffen, was durch die zwei verschiebbaren Skalen kein allzu großes Problem war.

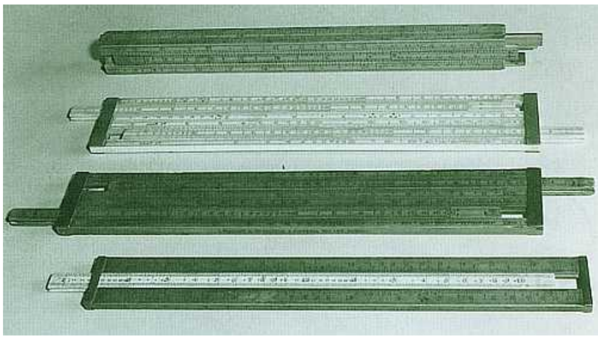


Abbildung 7: Rechenstab (Joss 2004)

Mit dem Rechenstab war es beispielsweise nicht möglich Ergebnisse zu erkennen, welche sich zur Gänze jenseits der Skalen befanden. Die Schwierigkeit war nämlich, dass es in solchen Fällen notwendig war die Zunge komplett in eine Richtung zu verschieben. Es wurde erkannt, dass dieses Problem bei kreisförmiger Anordnung der Skalen nicht vorhanden war, da ein Kreis naturgemäß einfacher zu bewegen ist, als die Zunge, beim geraden Rechenstab. Zusätzlich bot die Rechenscheibe mehr Genauigkeit, obwohl auch

hier, auf Grund der Skalenlänge Grenzen waren. Längere Skalen bedeuteten größere Genauigkeit, jedoch geringere Handlichkeit.
Dies führte dazu eine Rechenhilfe basierend auf dem Prinzip des Rechenstabs zu entwickeln, die längere, größere Skalen besaßen, ohne jedoch Einbußen in der Handhabbarkeit hinnehmen zu müssen. *Ihr Prinzip entspricht einem sehr langen Rechenstab, der in beispielsweise 50 gleichlange Teile zerlegt wird, um diese Teile parallel zueinander rund um einen zylindrischen Körper anzubringen; die Zunge wurde als dreh- und schiebbare Manschette über diesen Zylinder gestülpt. Rechenwalzen wiesen meistens Skalenlängen von 1,2, 2,4, 7,5, 10, 15 oder 24 m (!) auf.* (siehe Joss 2004) Eben diese Bandbreite an Skalenlängen, trugen zur großen Beliebtheit der Rechenwalze bei, ehe diese von den Rechenmaschinen abgelöst wurde. Neben der Verbesserung der Rechengenauigkeit, wurde noch an anderen Stellen gefeilt, wie beispielsweise etwa an der Genauigkeit des Ablesens, durch eine Vergrößerung der Zunge.

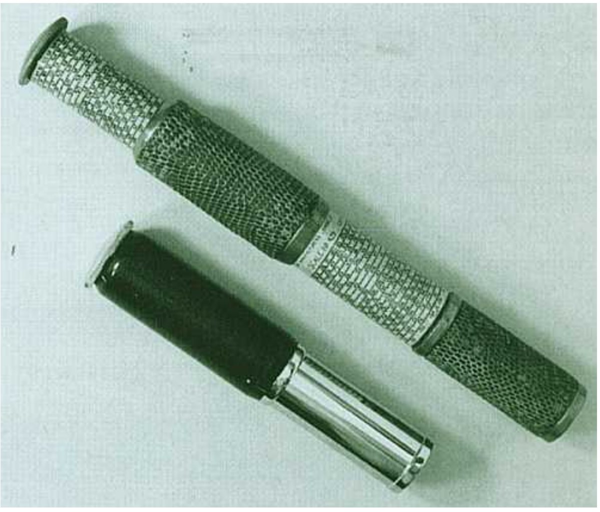


Abbildung 8: Eine Rechenwalze (Joss 2004)

Die Skalen

Wie bereits zu Beginn des Kapitels erwähnt, wies der Rechenschieber eine hohe Anpassungsfähigkeit auf. Dies äußerte sich nicht nur in seinen zahlreichen Formen, sondern auch an den verschiedenen Skalensystemen, welche je nach Berufsfeld unterschiedlich waren. Neben der bereits eingeführten Gunter Scale gab es noch die *Mannheim-Skala*. Benannt nach Amédée Mannheim (1831-1906) wurde sie in der Produktion für Rechenstäbe eingesetzt. Auf der Vorderseite eines Rechenstabs war eine Grund- und Quadratskala angebracht, auf der Rückseite eine Skala auf Grundlage des Sinus beziehungsweise Tan-

gens. Ein Wechsel zwischen der Vorder- und Rückseite war durch das Wenden der Zunge möglich. Auch das Verbinden zweier nicht berührenden Skalen, war wie gehabt vorhanden.
Später wurde die Mannheim-Skalar durch Max Rietz (1872–1956) um eine Kuben-und Mantissenskalar erweitert *(Rietz-Skalar)*. Zudem konnte man nun die Sinus- respektive Tangensskalar ohne umdrehen der Zunge verwenden.
Die Technik zwang Mitte der 1930er Jahre zum Umdenken, was die Skalen betraf. Alwin Walther (1898-1967) entwarf eine neue Skalar. *Vorderseite des Rechenstabes mit einer pythagoräischen Skala* ($\sqrt{1-x^2}$) *ergänzt, die Mantissenskala auf die hintere und die Sinus- und Tangensskalen auf die vordere Längskante verschoben, so dass die Zungenrückseite für drei Exponentialskalen frei wurde.* (siehe Joss 2004) Auf Grund der Tatsache, dass Alwin zu dieser Zeit an der technischen Hochschule in Darmstadt gelehrt hatte, wurde diese Skalar *System Darmstadt* genannt.

1.3 Die moderne Zeit - Der Taschenrechner

Der Taschenrechner hat ein neues Zeitalter in der Geschichte der Hilfsmittel in der Mathematik eingeläutet. Mit ihm war es möglich ein Hilfsmittel, für einfachere Berechnungen, mit sich zu führen. Ein Taschenrechner war und ist heute noch immer ein populäres Hilfsmittel, welches jedoch nach und nach von den immer stärker aufstrebenden Computer Algebra Systemen (CAS) abgelöst wird. Mit diesen ist es möglich neben dem Anfertigen von Graphiken auch komplexere Probleme zu lösen. Mathematische Probleme, welche man früher per Hand lösen musste, können heute mit Hilfe dieser CAS einfach durch die Eingabe einiger Befehle bewältigt werden. Das Spektrum an Taschenrechnern ist groß. Es reicht von einfachen Modellen, mit denen man ausschließlich die vier Grundrechnungsarten durchführen kann, bis zu Geräten, die schon einiges mehr an Funktionen besaßen. Im Folgenden wird ein Modell vorgestellt, welches heutzutage Gang und Gäbe ist, was die Funktionalität betrifft. Ein Modell, das sowohl im Beruf, als auch in der Sekundarstufe I Anwendung finden kann.

Der Taschenrechner am Beispiel TI-34 II [1]

Abbildung 9: So sieht der TI 34 aus (die Abbildung zeigt ein Modell des TI 34, es gibt ihn auch noch in anderen) [2]

Der TI-34 II ist ein gängiges Modell, welches die wichtigsten Probleme abdeckt. Man kann mit ihm ist es möglich neben den vier Grundrechnungsarten, dem Potenzieren und Wurzelziehen, auch trigonometrische Winkelfunktionen durchzuführen. Der Aufbau des TI-34 II ist sehr einfach und benutzerfreundlich. In einem Bereich findet man die Ziffern, sowie das Komma (.) und das negative Vorzeichen (-). Die Grundoperationen und das Gleichheitszeichen, mit dem man dem Taschenrechner mitteilt, dass man mit der Eingabe feritg ist und sich nun von ihm ein Ergebnis erwartet. Der Rest der Oberfläche wird für andere wichtige mathematischen Dinge verwendet, wie Klammern (bei den Taschenrechnern ist meistens lediglich die runde Klammer, welche man bei längeren Eingaben auch öfter verwenden darf, vorhanden). Wichtig ist hierbei auch noch die Taste *2nd.* Diese ermöglicht es noch weitere Optionen, welche oberhalb der Tasten angeschrieben werden, zu verwenden, was den Taschenrechner zu einem durchaus mächtigen Verbündeten macht.

Dem noch nicht genug, ist der TI-34 II, so wie viele andere Modelle gleich welchen Herstellers auch, in der Lage Ergebnisse zu speichern: Ergebnis + STO (STO … Storrage zu deutsch: Speicher) ruft den Speicher des Rechners auf, der einen kleinen Speicherplatz freigibt, um das Egebnis zu speichern. Mit 2nd + RCL (RCL … Recall deutsch: (Wieder-) Aufrufen), kann man das Ergebnis wieder holen um damit beispielsweise weitere Berechnungen durchzuführen

[1] TI … Texas Instruments. Texas Instruments Corporation ISN US8825081040 Hauptsitz: Dallas, Texas, Vereinigte Staaten `http://www.ti.com/`

[2] `http://www.bootic.com/texas-instruments/office-supplies/office-equipment/calculators/texas-instruments-ti-34-ii-explorer-plus`

2 Technologie im Mathematikunterricht

Computer Algebra Systeme (kurz CAS) sind in gewisser Weise eine „Weiterentwicklung“ der oben angeführten Hilfsmittel und eine Ausprägung der sogenannten „neuen Technologie“, die vielseitig propagiert wird. Was mit dem Abakus angefangen und über den Rechenschieber zum Taschenrechner geführt hat, findet in den CAS seine Folge. Mit diesen ist der/die BenutzerIn nicht nur in der Lage Rechnungen durchzuführen, sondern kann bei Bedarf auch auf graphische Hilfe zurückgreifen und vieles mehr. Differenzieren, Integrieren, Gleichungen lösen, selbst mit Matrizen kann gerechnet werden. Hier öffnen sich neue Möglichkeiten der Unterstützung: Lösen mathematischer Probleme, mühsames Rechnen und Konstruieren gehört der Vergangenheit an. Durch diese Vielfältigkeit an Methoden sind die CAS zu einem immer beliebter werdenden Hilfsmittel in den verschiedensten Berufen, Universitäten, sowie heutzutage schon Schulen geworden. Dabei werden SchülerInnen von Beginn an herangeführt und lernen die Vorteile eines CAS kennen und optimal auszunutzen, um im weiteren Schulbahnlauf geschickt und vor allem effektiv mit den CAS umgehen zu können. Der Einsatz solcher Hilfsmittel im Mathematikunterricht muss natürlich gelernt sein. Die Grundprinzipien wie das Lernen, Fragen stellen oder auch selbstständige Arbeiten dürfen dabei auf gar keinen Fall vernachlässigt werden. Im Mittelpunkt des Unterrichts muss nach wie vor ein mathematisches Problem stehen, welches es zu lösen gilt. Sich zu überlegen was überhaupt verlangt sein könnte, wie man am effektivsten an die Sache herangeht und welche Wege des Lösens in Frage kommen, sollten stets vordergründig sein und nicht in der Versenkung verschwinden.
CAS sind als Werkzeuge in der Mathematik zu verstehen und sollen auch als solche behandelt werden. Es muss daher überlegt werden, ob ein Einsatz eines solchen Hilfsmittel zur Erfüllungs der jeweiligen Ziele nämlich das Lehren aus LehrerInnensicht und Lernen aus der Perspektive des/ der SchülerIn, gerechtfertigt ist. Genau diese beiden Tätigkeiten stehen, obwohl sie unterschiedliche Aktivitäten sind, in Abhängigkeit zueinander. *Lehren zielt auf das Handeln des Lehrers, Lernen ist eine Tätigkeit des Schülers.* (siehe Weigand und Weth 2010, S.13) Dies spiegelt sich beim Verwenden solcher Technologie, als *dem*

Computer als Medium in der Hand des Lehrers (...) und als Werkzeug des Schülers (...) (siehe Weigand und Weth 2010, S.13) wieder. Doch welchen Einfluss haben solche Hilfsmittel auf den Mathematikunterricht und dessen Ziele? Um diese Frage beantworten zu können, muss man sich die Ziele der Schulmathematik selbst vor Augen führen:
Mathematik bestimmt seit je her die Bildung beziehungsweise die Entwicklung des Menschen. Bereits die Römer und die Griechen legten sehr viel Wert auf die Mathematik. Mathematik belebe den Geist und das Denken, sie sei Grundlage vernünftigen Argumentierens. Einerseits soll die Mathematik dem Menschen praktische Dinge, welche er im Alltag, sowie im Berufsleben einsetzen kann, andererseits soll Mathematik aber auch formale Bildung vermitteln. Im Mittelalter, als die Vorläufer der heutigen Realgymnasien, in Deutschland Realschulen (damals Schreib- und Rechenschulen genannt), entstanden, war die Mathematik in praktischer Natur ebenfalls stets im Vordergrund. Als man im Laufe der Zeit herausfand, dass Mathematik eine enge Beziehung zu den Naturwissenschaften hegt, begann man mittels Leitlinien der Mathematik eine Stoffauswahl mit Lernzielen zu treffen. Diese Lernziele wurden hierarchisch angeordnet. An oberster Stelle befanden sich allgemeine Bildungszeile, gefolgt von auf die Mathematik bezogene Richtlinien und grobe Ziele, die Unterrichtseinheiten betreffen und letzten Endes führte man für jeden Schritt Feinziele an.
Einem gewissen Mathematiker namens Heinrich Winter (geboren 1928) ist es gelungen die allgemeinen auf psychologischen und pädagogischen Überlegungen basierenden Lernziele auf den Mathematikunterricht zuzuschneiden. Winter meint, dass die in den 1960er Jahren beschriebenen allgemeinen Lernziele nicht *ohne ein Bild der Mathematik und ohne ein Bild des Menschen bestimmt werden.* (siehe Weigand und Weth 2010, S.18) Des Weiteren können Ziele nur in Zusammenhang mit den im Mathematikunterricht gebrachten Inhalten, den Methoden mit welchen dieser Inhalt gelehrt wird und den Aktivitäten von LehrerInnen und Lernenden betrachtet werden. Laut Winter ist der Mensch ein Individuum, welches nachdenkt, gestaltet, erschafft und vor allem spricht. Aus diesem Grund fordert Winter, dass man im Mathematikunterricht schöpferisch tätig sein soll. Das heißt, dass man unter anderem nach Gesetzmäßigkeiten, Klassifikationen suchen soll. Des Weiteren soll das vernünftige Argumentieren geübt werden (Definitionen, Sätze analysieren und dergleichen) oder gelernt werden die Mathematik praktisch respektive effektiv zu nutzen, wie etwa beim Finden von Lösungswegen, dem Erkennen von Zusammenhängen und vielen mehr. Der Mathematikunterricht soll aber auch das Erwerben von formalen Fertigkeiten, wie etwa das algorithmische/kalkülhafte Arbeiten, den Umgang mit Zeichen und Symbolen, lehren. (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.18). Die folgende Graphik aus (Weigand und Weth 2010) soll verdeutlichen, wie laut

Winter der Mensch und die Mathematik bezüglich den Lernzielen von Schule und Mathematik in Beziehung stehen.

Mensch	Mathematik	allgemeine Lernziele	
		der Schule	des Mathematikunterrichts
als schöpferisches, erfindendes, spielendes Wesen	als schöpferische Wissenschaft	Entfaltung schöpferischer Kräfte	heuristische Strategien lernen
als nachdenkendes, nach Gründen, Einsicht suchendes Wesen	als beweisende, deduzierende Wissenschaft	Förderung des rationalen Denkens	Beweisen lernen
als gestaltendes, wirtschaftendes, Technik nutzendes Wesen	als anwendbare Wissenschaft	Förderung des Verständnisses für Wirklichkeit und ihre Nutzung	Mathematisieren lernen
als sprechendes Wesen	als formale Wissenschaft	Förderung der Sprachfähigkeit	Formalisieren lernen, Fertigkeiten lernen

Abbildung 10: Ziele des Mathematikunterrichts (Weigand und Weth 2010)

Heinrich Winter erweitert den Begriff der Allgemeinbildung sogar noch und sagt, dass Wissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Einstellungen ebenfalls dazu zuzählen sind. Deshalb soll der Mathematikunterricht an Allgemein Bildenden Schulen drei eng miteinander verbundene Grunderfahrungen mit sich bringen: (vergleiche Weigand und Weth 2010)
Die Welt um uns herum, bestehend aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art und Weise zu verstehen.
Mathematische Gegenstände und Sachverhalte in Sprache zu formulieren. Symbole, Bilder und Formeln als geistige Schöpfung ansehen, als eine eigene geordnete Welt kennen zu lernen und zu begreifen.
Problemlösefähigkeiten die über die Mathematik hinausgehen, sollen in der Auseinandersetzung mit den zu behandelten Problemen erworben werden.
Ein anderer Mathematiker, Bigalke, meint, es sind die Unterrichtsmethoden entscheidend, sprich wie Mathematik beigebracht wird und wie man sich als LernendeR daran beteiligt. Bigalke glaubt, der Mensch steht künftig zwei Entwicklungen gegenüber: Einer *computer- und kybernetischengesteuerten Gesellschaft,* in der man im System zu funk-

tionieren hat und einer *persönlichkeitsorientierenden Gesellschaft*, einer Gesellschaft, in der man den persönlichen Zielen untergeordnet ist. (vergleiche Weigand und Weth 2010). Die Bildung hat nach Bigalke das Ziel den Menschen zu befähigen, einen Mittelweg zwischen diesen beiden zu finden. Ermöglichen soll einem das unter anderem eine gewisse Unabhängigkeit, ein Wille zur Kommunikation oder eine Akzeptanz von neuen Innovationen. Die Kernaufgabe des Mathematikunterrichts liegt nach Bigalke darin, den SchülerInnen wissenschaftliches beziehungsweise logisches Denken zu vermitteln, sie zum rationalen Argumentieren zu erziehen.
Zusammenfassend kann man also sagen, dass sowohl bei Winter, als auch Bigalke die Mathematik als Produkt und als Prozess im Vordergrund stehen. Das sind Punkte, die sich mit Technologie fördern lassen, denn letzten Endes soll man sich ein adäquates Bild von der Mathematik machen können. Doch verändert der Einsatz von neuen Technologien den Mathematikunterricht und deren Ziele? Zweifelsohne sind die von Winter und Begalke formulierten Ziele der Mathematik im Unterricht ohne weiteres auch mit neuen Hilfsmittel erfüllbar. Nichtsdestotrotz, wird es in naher Zukunft wohl keine größere Veränderung der Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts geben, wenngleich jedoch sich die Methode des Lernen und Lehrens im Unterricht sich den neuen Innovationen, den neuen technischen, sowie politischen Gegebenheiten anpassen wird müssen. Denn beim Arbeiten mit neuen Hilfsmitteln *bedarf der (höhere) Mathematikunterricht einer Prozessorientierung, um über Reproduktion von Wissen und Können hinaus handlungsfähige und verantwortungsbewusste Schüler (mit-) zu erziehen.* (siehe Weigand und Weth 2010, S.21) So eröffnet neue Technologie auch neue Möglichkeiten, was das operative, das darstellende Arbeiten im Mathematikunterricht betrifft. Somit kann man auch die Vorgegebenen Ziele einfacher, möglicherweise auch etwas schneller erreichen.

Bedeutet neue Technologie neue Ziele?

Mit „neuer Technologie“ verbindet man stets etwas mit Computer und in der Tat hat es auch etwas damit zu tun. Der Computer, beziehungsweise die Informatik, begleitet die Menschen seit Jahrzehnten, nicht umsonst hat sie bereits Einzug in den Schulalltag erhalten. Doch ändert dieser neue Weg etwas an den Zielen, welche der Mathematikunterricht verfolgt und wenn ja wie? Dazu ist es vielleicht ratsam sich einen Überblick über den Lauf der Geschichte, den die Informatik beziehungsweise technische Bildung im Laufe der Zeit genommen hat, und wie diese Mathematikunterricht geprägt hat, zu verschaffen. Begonnen hat alles zirka in den 1960er, 70er Jahren. Damals wurde der Informatikunterricht erstmals eingeführt. Ein konkretes, unterrichtsreifes Konzept war

aber erst in den 1980er Jahren vorhanden. Hierbei stand permanent die Mathematikdidaktik im Vordergrund, denn viele Bereiche in der Informatik basieren auf Mathematik, wie beispielsweise Algorithmisierung, Modularisierung oder Syntax und Semantik. Der Mathematikunterricht war also Grundlage für Anwendungen in der Informatik und deren Unterricht. Aber genau hier lag ein gewisses Dilemma: *Nimmt sie die für sie fremde Inhalte auf, so ändert sie damit ihren Charakter und ihr Selbstverständnis. Weist sie die Ansprüche hingegen zurück, so könnte es zur Einrichtung eines eigenständigen Schulfachs Informatik kommen (...).* (siehe Weigand und Weth 2010, S.22). Dies hätte wohl eine Schwächung der Mathematik zur Folge gehabt.
Die Mitaufnahme informatischer Inhalte wurde jedoch nicht gestattet. Es wurden zumeist Programmierkurse, vorzugsweise in „Basic“ oder „Pascal“ angeboten, da diese zur Programmierung mathematischer Algorithmen und Programmen am Besten geeignet waren. Dies war mit ein Grund, warum später das Interesse an der Informatik stagnierte, sodass es sogar heutzutage noch keinen direkten Einfluss des Informatikunterrichts auf jenen der Mathematik gibt, obwohl man implizit schon die eine oder andere Sichtweise aus der Computerwissenschaft in die Mathematik hineinnimmt. Nicht nur in der Mathematik, sondern nahezu überall gewann langsam aber sicher die Informatik an Aufmerksamkeit. Immer mehr Disziplinen bemächtigten sich der Computerwissenschaft als Hilfsmittel zur Lösung von Problemen, denn auch in der Umwelt wurde mehr und mehr auf Technologie gesetzt. Somit musste auch der Schulunterricht auf diese Entwicklung reagieren und entwarf ein sogenanntes *Gesamtkonzept für die informationstechnische Bildung* (ITG), denn der Umgang mit dem Computer wurde als neue *Kulturtechnik* verstanden, deren Beherrschung in Zukunft notwendig sei (vergleiche Weigand und Weth 2010). Die Informatikgrundbildung sollte in verschiedenen Fächern mit eingebunden werden, allerdings wurden diese nur äußerst allgemein beschrieben. Mitte der 1980er wurden dann konkrete Überlegungen bezüglich dem Einsatz von Computer im Unterricht von allgemeinbildenden Schulen gemacht. Diese haben gemeint, dass jedem/jeder LehramtsstudentIn eine Informatikgrundausbildung zukommen soll. Dabei sollten im Unterricht vier große Themenbereiche vorkommen (vergleiche Weigand und Weth 2010): Dem *Anwendungsbereich,* der das Arbeiten mit Softwaresystemen, das Verarbeiten von Text, sowie das Arbeiten mit Datenbaken und Tabellenkalkulation beinhalten soll. Dem *Algorithmischen Bereich,* welcher die Analyse und Beschreibung von Problemlösungen, sowie die Darstellung in einfachen Programmteilen abdeckt. Der *Technische Bereich* sollte den Aufbau und die Funktionsweise des Rechners beschreiben, gefolgt vom *Gesellschaftlichen Bereich*, der die Gesellschaftlichen Auswirkungen dieser neuen Technologie behandeln soll.

Diese Konzept wurde jedoch schon relativ bald zum Scheitern verurteilt. LehrerInnen verfügten nicht über die notwendigen Erfahrungen um den Computer adäquat im Unterricht einzusetzen. Zudem schritt die technische Entwicklung derart schnell voran, sodass Schulen nicht immer mit dem Status Quo, was die Technik betraf, mithalten konnten. Diese ITG benötigte auch einen eigenen (zusätzlichen) Stundenblock, was ebenfalls eine große Hürde darstellte. Nichtsdestotrotz, haben Hans Bussmann (geboren 1949) und Hans Werner Heymann (geboren 1946) 1987 dem Computer eine zentrale Bedeutung gegeben. Für sie war dieser nicht bloß ein technisches Gerät, sondern ein wesentlicher Bestandteil im Unterricht, welcher geistige Handlungen darstellt und maschinell verarbeiten kann. Allgemeinbildung kann nicht alleine durch das Erreichen irgendwelcher Kompetenzen erreicht werden, sondern durch einen verantwortungsvollen Umgang mit ihr. Dies steht im engen Zusammenhang mit dem IGT. Der Einsatz von Computer im Unterricht und der Umgang mit ihm, machen noch keine technische Grundbildung. Diese entsteht durch Kenntnisse der Grundlagen in der jeweiligen Disziplin und der Fähigkeit den Computer sinnvoll einsetzen zu können. Horst Hischer (geboren 1943) hat hierfür den Begriff *technologische Bildung* eingeführt. Er sieht „Technologie“ im Kontext mit „Technik“, in anderen Worten Technologie ist eine Reflexion der Technik und deren Auswirkungen. Technologische Bildung soll also die SchülerInnen dazu bringen, sich mit den Chancen der neuen Technologie mitsamt deren Risiken auseinander zu setzen und zwar in allen Schulfächern.

Zusätzlich hat sich in den vergangenen Jahren der Begriff der *Medienpädagogik* entwickelt, der im wesentlichen zwei Punkte verfolgt: Die Individualisierung von Lernprozessen und das Lernen in einer vernetzten Welt. Zudem fordert die Medienpädagogik fordert auch vehement eine *Medienkompetenz* im Umgang mit neuer Technologie ein. Medienkompetenz bedeutet nicht nur Wissen über die technischen Gegebenheiten eines neuen Mediums, sondern die Technologie sinnvoll einzusetzen. Den Output des Computers richtig zu bewerten, zu verarbeiten und einzusetzen um damit das vorliegende Problem zu lösen ist hier von zentraler Bedeutung. Später trumpften, die auch noch heute verwendeten, Taschenrechner und Computer Algebra Systeme (CAS) auf, mit denen man das gesamte mathematische Kalkül mit nur einem Knopfdruck erledigen konnte und noch einiges mehr. Hierbei ging man von einem einfachen Modell des mathematischen Handeln aus: *Darstellen-Operieren-Interpretieren,* wobei mit dem Darstellen das Modellieren und in mathematische Sprache Verwandeln einer Problemstellung und zwar in verschiedenen Arten und Weisen gemeint ist. Interpretieren bedeutet in diesem Kontext, dass unter Berücksichtigung der erhaltenen Lösung, versucht werden soll die Ausgangsfrage zu beantworten. Das Operieren beschreibt lediglich das Arbeiten mit den Zahlen und Größen, was aber wohl, im Gegensatz zu den anderen beiden Aktivitäten, die meiste Zeit des Unterrichts in Anspruch nimmt. Genau hier kann man mit den CAS viel Zeit einsparen und sich auf wesentlichere Tätigkeiten beziehen, wie eben dem Darstellen oder dem Interpretieren. Nun stellt sich jedoch die berechtigte Frage, ob der Unterricht in der Mathematik überhaupt noch so wie oben beschrieben aufgebaut werden soll, wenn sich der Bereich „Operieren“ mehr oder weniger per Knopfdruck erledigen lässt? Diese Frage gab und gibt weiterhin Anstoß, über die aktuellen Ziele und Inhalte der Schulmathematik nachzudenken und eventuell zu adaptieren. *Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer längst nachdenken hätten müssen.* meinte Horst Hischer in einer 1994 Publikation. Man spricht auch von einer *Krise des Mathematikunterrichts,* der Mathematikunterricht sei erkrankt wird auch oft gemeint, denn man steht abermals vor einem Dilemma: Einerseits erleichtert der Einsatz von Computer den Mathematikunterricht ungemein, da man mit ihm binnen Sekunden, operieren und mit besseren Objekten auch Darstellen kann, andererseits macht das Erlernen und Beherrschen den selbigen aus. Nun denn, der Einsatz von Computer erleichtert das Leben im Mathematikunterricht um einiges, doch macht das selbstständige Lernen und Arbeiten nicht hinfällig, denn die Ziele des Unterrichts, wie das Problemlösen, das Bilden von Begriffen, Argumentieren, Beweisen oder Mathematisieren bleiben trotzdem gültig, nur die Wege sind andere.

Neue Wege zu alten Zielen

Neue Technologie bedeutet, wie schon erwähnt, nicht neue Ziele oder eine radikale Reform des Mathematikunterrichts sondern, dass neue Wege gegangen werden um gleiche Ziele zu erreichen. Die Unterrichtsmethoden ändern sich. Es wird hierbei auch der Begriff der *Unterrichtmethodik* (vergleiche Weigand und Weth 2010) verwendet, wobei hier „Methodik“ Auskünfte über die Methoden des Unterrichts, den Wegen, welche gegangen werden, um Ziele, sei es von SchülerInnen oder LehrerInnenseite her betrachtet, zu erreichen. Bei diesen Überlegungen ist stets zu bedenken, dass neue Technologie den Unterricht beim Erreichen seiner Ziele, wenn möglich, unterstützen soll, daher sollte man sie als Neuerung im Zusammenhang mit Altbewährtem betrachten und versuchen diese in diese in bewährte Unterrichtsstrukturen einzubinden. Doch was genau bedeutet neue Technologie aus didaktischer Sicht für den Mathematikunterricht?
Um den Einsatz von Technologie im Unterricht bewerten zu können, muss sich zwangsläufig mit dem Begriff der *didaktischen Prinzipien* auseinandergesetzen. Diese beschreiben nämlich, wie der Unterricht gestaltet, bewertet und analysiert werden soll. Diese Prin-

zipien basieren auf den verschiedenen Lernmethoden und enormen Erfahrungen aus der Praxis. Es gibt eine Vielzahl an solchen Prinzipien, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll, wenngleich es doch einige gibt, welche mehr die Mathematik in den Fokus rücken, oder das Verhalten von SchülerInnen und Prinzipien, die das „Werkzeug“ aller Art, natürlich stets im Kontext der Mathematik, betrachten. Um einen besseren Überblick zu schaffen folgende Tabelle (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.28)

Inhalt	SchülerInnen	Werkzeug
• An Grundideen orientieren • Beziehung erstellen	• Lernen zu fragen • Operativ arbeiten • Selbstständig lernen • Produktiv üben/wiederholen	• Adäquat visualisieren • Wissen/Können auslagern

Tabelle 1: Didaktische Leitlinien

Dieser Überblick ist von großer Bedeutung, da sich beim späteren Vergleich der verschiedenen Computer Algebra Systeme, stets darauf berufen wird. Ohne zu wissen, welche Semantik die einzelnen Punkte besitzen, ist diese Tabelle wertlos. Aus diesem Grund wird im Folgenden kurz erklärt, was man sich darunter vorstellen darf.
An Grundidee orientieren meint, dass die Mathematik, nicht bloß ein Konstrukt irgendwelcher einzelner Gebiete ist, sondern, dass sie zusammenhängend sind und genau diese Verbindungen, welche zwischen den einzelnen Gebiet bestehen, gilt es für SchülerInnen zu verstehen. Hierbei bietet der Begriff *Fundamentall Idee* von Jerome Bruner (1916-2016), welcher einen Kompass im jeweiligen Stoff einer Wissenschaft bringt, und die grundlegenden Strukturen eines Fachs aufzeigen soll. Das sei das größte Ziel des Unterrichts. In der Mathematik wären solche fundamentale Ideen beispielsweise Zahl, Algorithmus oder Modellbildung, denn das sind typische Begriffe/Aktivitäten, auf welche man im Mathematikunterricht stößt. Computer Algebra Systeme unterstützen dadurch, dass sie den SchülerInnen das Rechnen enorm erleichtern, fundamentale Ideen um ein Vielfaches. Nun können sich SchülerInnen auf das Wesentliche konzentrieren und brauchen sich nicht mehr mit „lästigen Nebentätigkeiten“ herum plagen. Dadurch ist es, sofern angemessen, sogar möglich Inhalte vorzuziehen, da man sie durch die CAS einfa-

cher erledigen kann (Stichwort: zum Beispiel: Lösen von Gleichungen).
Wissen ist nichts anderes als ein Gebilde von Begriffen und deren Beziehungen zueinander. *Beziehungen erstellen* heißt nichts anderes als dass man sich Begriffe nicht einfach lose aneignen soll, sondern stets in Beziehungen und Zusammenhängen. Im Kontext der Mathematik betrachtet bedeutet dies, dass man die innermathematischen Verknüpfungen zwischen den Begriffen, aufbauend auf einer Basis, herstellen soll. Neu erworbenes Wissen muss dann in dieses aufgebaute Netzwerk an Begriffen und Beziehungen eingebettet werden, was zur Folge hat, dass dieses erweitert wird. Dies kann nur (problemlos) funktionieren, wenn das bereits vorhandene Wissen gefestigt ist und auch Richtigkeit besitzt. Parallel zu diesem Konstrukt, existiert noch die *Sinneskonstruktion* im Mathematikunterricht, welche die Verbindung zwischen Lernenden und der Umwelt, bei der Entwicklung von Grundvorstellungen erläutert. Dabei sollen SchülerInnen zusätzlich noch mit deren Umwelt verknüpfen, was dazu führt, dass sie auch etwas über die mathematisierende Situation lernen. Durch das Verknüpfen mit der Natur kann das „in Grenzen denken,“ dass die Fächer abgeschlossenen Mengen darstellen, zudem verhindert werden. In Hinblick auf die CAS, sieht man, dass sie diese Art von Lernen in vielerlei Hinsicht unterstützen. Computer Algebra Systeme verfügen über viele verschiedene und vor allem parallel verfügbare Fähigkeiten, welche Zusammenhänge, sei es nummerischer, graphischer oder symbolischer Natur, mit einer gewissen Leichtigkeit erkennen kann.
Im Mathematikunterricht ist man, so wie in jedem Lernprozess, auf der Suche nach Lösungen von Problemen inklusive deren Sinnhaftigkeit und Bedeutungen. Gerade deswegen ist es von enormer Wichtigkeit „richtige“ Fragen zu stellen, Fragen die einem dazu bewegen, sich mit dem vorliegenden Problem zu befassen, es soll das Interesse wecken, kurz gesagt die SchülerInnen müssen *Lernen zu fragen.* Durch das Fragen löst man bei den SchülerInnen einen Prozess des Problemlösens aus, man bringt sie dazu sich Wissen selbst anzueignen. Des Weiteren werden Begriffe Bedeutungen zugeführt und bleiben nicht bloß eine leere Hülle des Unvorstellbaren. Begriffe werden so zu Hilfsmittel; Lösungen von Problemstellungen oder gar Anlass für Neues. Mathematik ist ein *Prozess* und kein *Fertigprodukt, Mathematik ist etwas, bei dem Lernende entdecken oder erfinden können, auch wenn es sich meist nur oder fast ausschließlich „nur“ um Nachempfindungen handelt.* (siehe Weigand und Weth 2010, S.31) Computer Algebra Systeme entlasten SchülerInnen, *wodurch die heuristischen und experimentellen Arbeitsweisen*(vergleiche Weigand und Weth 2010, S.31) gefördert werden. Daraus kann man aber nur Nutzen ziehen, wenn diese als eine Art Antwort auf eine Frage kommen. Dazu ist jedoch ein zielgerichtetes und überlegtes Fragen notwendig, was wiederum das Öffnen seines Horizonts notwendig macht. Der Einsatz von Technologie muss daher mit

der nötigen Besinnlichkeit erfolgen.
Das *Operative Arbeiten* geht auf Jean Piaget (1896-1980) und dessen Erkenntnistheorie zurück, die aber hier nicht näher beschrieben wird. Wichtig bei diesem Punkt ist jedoch, dass man Wissen in der Mathematik nicht durch bloßes Hinschauen oder Nachahmung erwirbt, sondern durch Beschäftigung mit dem Objekt, in mannigfaltiger Art und Weise. So lassen sich mit Computer Algebra Systemen, mögliche Szenarien durch „ausprobieren“ eruieren. Obwohl das operative Prinzip ein wichtiges Element im Mathematikunterricht darstellt, ist es nicht weniger von Bedeutung, auf ein Gebilde aus Erklärungen, welche systematisch besprochen werden, aufzubauen *(rezeptives Lernen).* Denn die große Gefahr beim operativen Lernen, besteht darin, dass man blind herumprobiert um vielleicht in irgendeiner Weise, meist durch Zufall, an ein (korrektes) Ergebnis gelangt.
Selbstständiges Lernen, und das Analysieren respektive das Kritisieren der eigenen Tätigkeiten, was sich als Resultat aus Selbsttätigkeit und Eigeninitiative ergibt, stellt ebenfalls ein zentrales Merkmal eines Mathematikunterrichts dar. Dieses selbständige Lernen ist *eine geplante Zielorientierte Aktivität, die Freiräume für das Planen, Ausführen und Kontrollieren von Aktivitäten voraussetzt.* (siehe Weigand und Weth 2010, S.34) Hierbei zeigen Computer Algebra Systeme einer ihrer größten Stärken, denn diese können (nach Erklärung der Benutzung) von den SchülerInnen selbst bedient und daher zum eigenständigen Arbeiten benutzt werden und zwar aller Orts. CAS können aber zeitgleich auch *ein Katalysator verschiedener individualisierenden Unterrichtsformen* (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.34) sein, was bedeuten kann, dass sich hier ein höherer Drang zur Selbstständigkeit entwickeln kann. Bei diesem Aspekt wäre dann auch die Informatik an der Schule gefordert, welche, wie bei den CAS Anstöße hierzu geben soll. Nichtsdestotrotz ist auch hier Vorsicht geboten, damit man auch hier nicht einfach „herumprobiert“. Ein gewissen Basiswissen ist für die Selbsttätigkeit, nicht nur in Hinblick auf CAS elementar. Kann man Mathematik wie oben erwähnt nicht durch Hinschauen lernen, so kann man sie auch nicht ausschließlich durch eigenständiges Arbeiten erlernen. Selbstständiges Arbeiten ist nur mit einem gut strukturiertem Wissen sinnvoll.
Das *Üben und Wiederholen* sind elementare Tätigkeiten, um Schemata zu verinnerlichen. Vor allem das Üben kann in den verschiedensten Formen, wie etwa dem heuristischen oder dem stabilisierenden Üben, vollzogen werden. Nichtsdestotrotz soll Üben niemals als isolierte Aktion, sondern eine in den Unterricht integrierte Handlung sein, welche regelmäßig durchgeführt werden sollte. Bereits (mehrfach) Geübtes sollte bei Neuem immer, sofern möglich, wieder gerufen werden, damit es in dem nicht bekannten Material eingebaut werden kann. Dies ist zudem wichtig, um Gelerntes zu stabilisieren, spricht

so intus zu haben, dass man es jederzeit abrufen könnte. Bei Computer Algebra Systemen gibt es hierfür einerseits in den meisten Fällen kleinere interaktive Programme, die Feedback über die erbrachte Leistung geben, wenngleich solche Programme bis dato noch nicht ausreichend wissenschaftlich untersucht wurden. Des Weiteren eigenen sich CAS, auch in Verbindung mit dem Internet, für produktive Übungsaufgaben, Übungsaufgaben, die man nicht einfach per Knopfdruck lösen kann, wie beispielsweise das Interpretieren von erhaltenen Lösungen.
Die Darstellung spielt in der Mathematik, nicht zuletzt auf Grund ihrer Abstraktheit, eine wichtige Rolle. Mathematisches Denken spielt sich zur Gänze im Kopf ab und kann lediglich durch die Darstellung nach außen dringen, sei es durch geometrische Figuren, durch ein Zahlensystem oder durch Symbole anderer Art. Erst mit Hilfe einer Darstellung ist es möglich Ergebnisse, Lösungswege darzustellen und Gesetze oder Regeln aufzustellen. Darstellung alleine ist nicht ausreichend. Die Darstellung muss immer vom vorliegenden Problem abhängig erfolgen *(adäquates visualisieren)*. Dabei ist es jedoch enorm wichtig, Eigenschaften eines Begriffes in verschiedenen Arten der Visualisierung zu registrieren und eine Verbindung zwischen diesen mannigfaltigen Darstellungen aufzubauen und zwischen ihnen wechseln zu können. Computer Algebra Systeme sind in der Lage, binnen Sekunden, verschiedene Darstellungsformen, welche oftmals miteinander verbunden sind, zu erschaffen und zwischen ihnen zu switchen. Dies ermöglicht eine neue Art des Kalkül, erfordert aber auch eine neue Weise der Begriffsbildung und Vorstellung von Objekten bezüglich der Umwelt. Das Arbeiten mit Visualisierung wird mehr oder minder neu definiert, wenngleich aber im Gegenzug meist komplexere Befehle respektive Befehlsketten erlernt werden müssen, was naturgemäß einiges an Zeit in Anspruch nimmt.
Bei genauerer Überlegung liegt der Gedanke nahe, dass der Computer im Prinzip eine Stütze des menschlichen Denken darstellt. Aus diesem Grund ist Denken stets im jeweiligen Kontext zu betrachten, denn Denkprozesse sind ein Wechselspiel zwischen Darstellung zum Einen und die Art und Weise der Arbeit zum Anderen. *Denken (...) ist dann nicht mehr im Subjekt lokalisiert, sondern das System aus Subjekt und Kontext (...) realisieren „Denkprozesse“.* (siehe Weigand und Weth 2010, S.36) Neue Technologien machen es heutzutage möglich die abstrakte Mathematik, die sich wie bereits oben erwähnt ausschließlich im Kopf abspielt und durch adäquate Visualisierung zum Ausdruck gebracht werden kann, der Technik zu übergeben. Man verwendet hierfür auch den Begriff *Auslagern.* Diese Tätigkeit ist in der Mathematik seit je her von größter Bedeutung, und beschränkt sich nicht nur bloß auf den Gebrauch von Technologie, denn Wissen ist *eine Form von Bausteinen, Prozeduren oder Modulen zusammengeschlossen, die nur noch als*

Ganzes angewandt werden. (siehe Weigand und Weth 2010, S.36) Ein plakatives Beispiel hierfür ist das Berechnen von Lösungen einer quadratischen Gleichung. Dabei wird eine der Lösungsformeln hergenommen und die Nullstelle berechnet, ohne einen Gedanken zu verschwenden, woher diese überhaupt stammt. Eben diese Auslagerung kann durch Computer Algebra Systeme großteils abgedeckt werden. Denn dadurch dass nur mehr ein Bruchteil der Zeit in das Operieren und in algorithmischen Tätigkeiten investiert werden muss, kann mehr Raum für das Interpretieren von Lösungen und dem Überlegen des Vorgehens zukommen gelassen werden. Die SchülerInnen erleben einen Übergang von RechnerInnen, welche Rolle sie bis dato inne hatten zu PlannerInnen, wenn auch das auf Kosten des Rechnens geht. Denn die Rechenschritte werden von nun an weniger und dadurch auch unschlüssiger. Was Computer Algebra Systeme im Hintergrund tun, bleibt eine „Black Box“. Der Mathematikunterricht wird durch diese Entlastung vermeintlich einfacher, da wie bereits geschrieben, das Operieren wegfällt, verlangt aber dennoch einiges an Intellekt. Defizite beim Rechnen sind nicht mehr entscheidend, das Interpretieren von Darstellungen, was bis jetzt nur beiläufig erledigt wurde, hat nun oberste Priorität.

Nachteile von CAS im Unterricht

Welche Vorteile ein technologischer Einsatz im Mathematikunterricht mit sich bringen könnte, wurde in diesem Kapitel bereits erklärt. Nun ist es aber auch so, dass technische Unterstützungen bei inadäquatem Einsatz auch negative Effekte haben können und dem mathematischen Lernen und Wissen mehr schaden könnte, als auf den ersten Blick zu vermuten ist. In erster Linie soll die Technologie SchülerInnen von „unangenehmen“, aufwendigen Tätigkeiten entlasten sodass sich diese auf die wesentlichen Dinge im Mathematikunterricht konzentrieren können. Dennoch besteht hierbei die Gefahr, dass sich SchülerInnen zu sehr auf die technische Hilfe verlassen. Sie verfallen zumeist dem Gedanken, die Technik löst das (mathematische) Problem, und selber müsse nichts weiter getan werden, als die richtige Eingabe zu tätigen. Dies führt dazu, dass über die vorliegende Aufgabe gar nicht mehr selbständig nachgedacht wird und „blind“ die Technologien bedient wird, um eine Lösung zu erhalten. Gewisse Inhalte werden zumeist nur mehr kurz angeschnitten mit dem Verweis, dass die verwendete Technologie die Dinge für den Menschen löst. Dadurch entstehen bezüglich der operativen Fähigkeiten enorme Defizite, welche im weiteren Verlauf nur schwer aufzuholen sind. Bei manchen mathematischen Problemen werden Rechenvorgänge erst gar nicht im Detail besprochen, da sich auf das Hilfsmittel verlassen wird. Somit fehlen hier auch wichtige Elemente der

Schulmathematik. Das operative Gefühl respektive die Fähigkeiten der SchülerInnen, das selbstständige Nachdenken werden stark vernachlässigt und es entsteht eine gewisse Abhängigkeit zum Hilfsmittel selbst. Grund dafür ist, das Lernende oftmals gar nicht mehr in der Lage sind rechnerische Probleme selbst zu lösen, da dies nicht genügend trainiert wurde und der Verlass auf die Technik zu groß ist („das können wir eh in ... eingeben“ oder „dafür haben wir eh...“.) Daher ist es sinnvoll Stoffinhalte zuerst großteils selbst ohne Technologie, zu erarbeiten, da hier der Lerneffekt um ein Vielfaches größer ist und die Technologie dabei bloß als Unterstützung heranzuziehen. Auch im weiteren Verlauf, sollte zu Beginn selbstständig (heißt mit Stift und Papier) gearbeitet werden, bis der Inhalt verinnerlicht worden ist und danach erst die Technologie zum Lösen eingesetzt werden.
Nicht nur bei operativen Belangen können Nachteile entstehen, auch bei graphischen und geometrischen Inhalten, kann es zu negativen Effekten bei zu einfacher Nutzung von Technologie kommen. Zugegeben, sind diverse Mathematiktechnologien in der Lage sehr genaue Visualisierungen jeglicher Art anzufertigen, welche dann zusätzlich noch andere Fähigkeiten besitzen, dennoch ist es enorm wichtig, dass SchülerInnen insbesondere zu Beginn des Themas Visualisierungen per Hand anfertigen, um ein besseres Verständnis zu erhalten. Ansonsten ergeben sich die gleichen Nachteile, wie eben beschrieben. Gerade beim Anfertigen von beispielsweise Funktionsgraphen, trägt ein eigenständiges Zeichnen, zum Erfassen der Grundlagen, enorm viel bei. Die Technologie sollte hierbei nur als Unterstützung zur Erarbeitung des Stoffes und weiterführende Überlegungen dienen, das Verständnis an sich, sollte von den Lernenden selbst erarbeitet werden, da so der Output mehr Gehalt enthält. Die didaktischen Prinzipien aus **??** müssen auch ohne technologischen Einsatz realisierbar sein und auch von SchülerInnen größtenteils auf diese Art erarbeitet werden. Technische Hilfswerkzeuge sollten ausschließlich zur Unterstützung diesen und nicht zum „Hauptakteur“ avancieren.

Technologie im Unterricht laut Lehrplan

Nachdem nun die wichtigsten Aspekte des technologischen Einsatzes im Mathematikunterricht betreffend erörtert wurden, ist es von großen Interesse, wo den der Lehrplan den Einsatz solch technischer Hilfsmittel im Unterricht sieht. Denn gewiss ist, dass das Verwenden von CAS und ähnlichem in Zukunft nicht mehr wegzudenken und ein adäquater Einsatz daher unumgänglich sein wird. Der Lehrplan unterscheidet hier zwischen *minimaler Realisierung* und *maximaler Realisierung* (vergleiche Bildung 2007, S.3). Die minimale Realisierung beschreibt das Kennenlernen der eingesetzten Technologie, wobei

die Nutzung über die einfache Verwendung hinausgeht und auch (zumindest sporadisch) ein wichtiges Element beim Erarbeiten der Stoffinhalte sein soll. Bei maximaler Realisierung hingegen, soll die Technologie ständig eingesetzt und ein wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts werden.
Nun denn ist es so, dass „richtige“ Technologie, damit sind Mathematikprogramme und Geräte, welche Fähigkeiten besitzen die über das „normale“ Rechnen, heißt das bloße Operieren mit Zahlen (wie etwa addieren, subtrahieren und dergleichen, aber auch die Berechnung des Sinus, Cosinus oder Tangens und ähnliches), hinausgehen, auf Grund der Komplexität der Stoffinhalte erst in der Oberstufe zum Einsatz kommt. Hier ist die „element interactivity“, die Vernetzung der Elemente im Ganzen (in der Mathematik sind die einzelnen Begriffe und Themen bekanntlich miteinander verbunden) derart groß und komplex, dass eine stärkere Unterstützung Lernende helfen soll, die zu verstehen, im Idealfall selbst herzustellen und aufzubauen. Zusätzlich soll die Technologie den „germaneous load“, die vertiefende Auseinandersetzung mit den Themen fördern, um so für ein besseres Verständnis bei den SchülerInnen zu sorgen. In der Unterstufe, wo das Netzwerk aus Themen und Begriffen noch übersichtlicher ist, wird, in der Regel ab der 7.Schulstufe (3.Klasse AHS), ein unterstützender Einsatz bloß bei arithmetischen Belangen gefordert. SchülerInnen sollen hier lediglich von rechnerischen Problemen entlastet (aber nicht völlig entbunden) werden, daher ist hier in der Regel bloß ein Einsatz eines handelsüblichen Taschenrechners vorgesehen und erwünscht.
Der Lehrplan äußert sich bezüglich sind technischer und technologische Hilfsmittel wie folgt: *Grundsätzlich sind schon ab der 1. Klasse Einsatzmöglichkeiten zur planmäßigen Nutzung von elektronischen Hilfen beim Bearbeiten von Fragestellungen der Mathematik und als informationstechnische Hilfe (in Form von elektronischen Lexika, Statistiken, Fahrplänen, Datenbanken, ...) gegeben. Die Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen sind zu nutzen. Das kritische Vergleichen von Eingaben und Ausgaben bei verschiedenen Programmen und Geräten bezüglich der Problemstellung kann zum Entwickeln eines problem- und softwareadäquaten Analysierens, Formulierens und Auswertens beitragen.* (siehe Bildung 2014, S.4)

3 Drei Computer Algebra Systeme, ein Beispiel

Welche Bedeutung Computer Algebra Systeme für den Mathematikunterricht haben (könnten), ist in Kapitel 2 ausführlich erörtert worden. Jetzt stellt sich doch die Frage „Wie groß ist denn eigentlich die Auswahl an Computer Algebra Systemen?“ und „Wo liegen deren Stärken beziehungsweise Schwächen?“ Nun, das Sortiment bei CAS ist gar nicht so üppig, wie man vermuten möchte, deshalb ist es auch schwierig ein, für die jeweiligen Bedürfnisse passendes, Hilfsmittel zu finden. Einer der wichtigsten Punkte der heutigen Zeit im Mathematikunterricht, dem Interpretieren von Ergebnissen und Sachverhalten, wird durch die Möglichkeit der graphischen Darstellung, welche die meisten Mathematiksoftwaren mittlerweile zusätzlich besitzen, abgedeckt. Das Operieren ist nahezu mit jedem CAS möglich und bei der Wahl eines geeigneten Hilfsmittel, fast schon sekundär, da das Hauptaugenmerk in der Regel eben auf andere Komponenten, wie etwa die graphischen Fähigkeiten, Fähigkeiten konstruieren zu können, liegt. Denn ein gutes CAS oder eine gute Software, soll auch, wie oben erwähnt, unter anderem Lernenden ermöglichen Stoffinhalte experimentell zu entdecken, sie in bereits vorhandene Strukturen integrieren, sowie Ergebnisse deuten und interpretieren zu können. Zudem sollte eine einfache Handhabung beziehungsweise Bedienbarkeit gegeben sein, um dieses Hilfsinstrument zügig und unkompliziert in den Mathematikunterricht einbauen zu können, respektive SchülerInnen damit rasch vertraut zu machen können. All diese Wünsche können ein CAS bald äußerst komplex werden lassen, wodurch bei der Wahl vorhandene Wünsche genau abgewogen und unter Umständen auch Kompromisse eingegangen werden müssen. Aus diesem Grund ist es wichtig sich als LehrerIn einen Überblick über das Sortiment an mathematischen Technologien zu verschaffen und deren jeweiligen Stärken respektive Schwächen sorgfältig zu studieren, erst dann kann eine seriöse Entscheidung getroffen werden, welches Hilfsmittel optimale Unterstützung bietet.
Im Folgenden werden drei Computer Algebra Systeme, genau genommen Mathematik-

softwaren, nämlich „GeoGebra“,[3] „Mathematica“ [4] und der „TI Voyage 200“ [5], an Hand eines Beispiels demonstriert und anschließend, die wichtigsten Aspekte den Mathematikunterricht betreffend verglichen.

3.1 Zuerst klassisch

Für die Demonstration eignet sich folgendes Beispiel aus dem Themengebiet „Anwendungen der Integralrechnung“ (8. Klasse AHS), da sich hier sowohl Berechnung als auch Visualisierung, hervorragend miteinander verbinden lassen. Doch bevor eben genannten Hilfsmittel tatsächlich zum Einsatz kommen, wird versucht dieses Beispiel auf klassische Art und Weise, heißt mit Stift und Papier zu lösen. Hierbei sei jedoch erwähnt, dass es sich bei dem vorgestellten Lösungsweg lediglich um eine Möglichkeit handelt und es, wie in vielen Fällen in der Mathematik, andere Wege gibt, eine (korrekte) Lösung zu erhalten.
Angenommen folgende Situation läge vor (Beispiel siehe Müller und Hansich 2007, S.98)

Das Flächenstück, das von den Kurven k_1 und k_2 begrenzt wird, rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.
$k_1 : y^2 = 16(x-4), k_2 : y^2 = 8x$
Im Grunde genommen ein eher simpleres, einführendes Beispiel zu diesem Themengebiet, welches auch relativ einfach per Hand zu lösen ist:
Zu aller erst, wäre es ratsam, die vorliegende Situation grob zu skizzieren:

[3] GeoGebra GNU General Public License Copyright Free Software Foundation (FSF)
[4] Wolfram Research, Inc. Sitz in Champaign, Vereinigte Staaten `www.wolfram.com`
[5] TI … Texas Instruments. Texas Instruments Corporation ISN US8825081040 Hauptsitz: Dallas, Texas, Vereinigte Staaten `http://www.ti.com/`

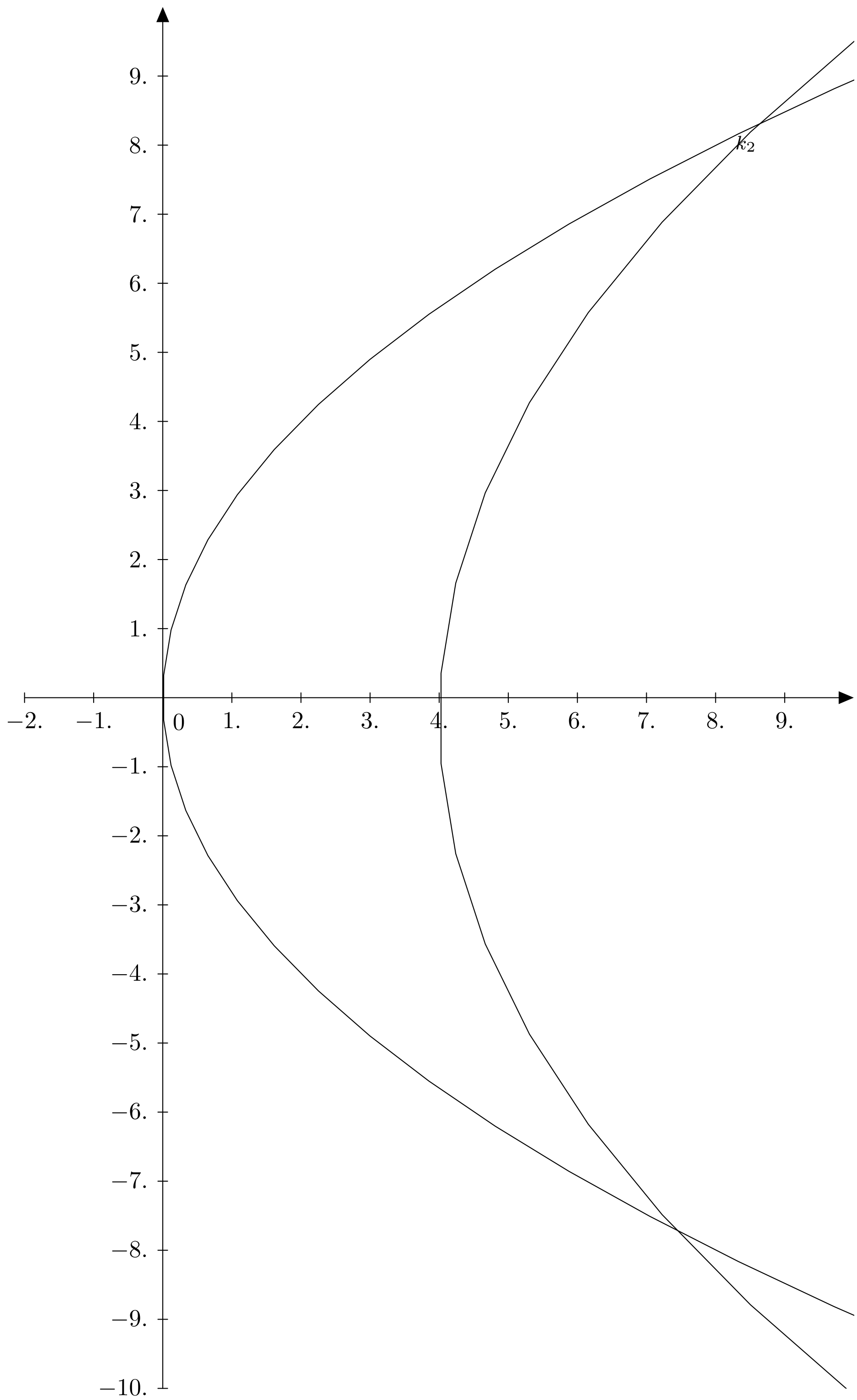


Abbildung 11: So sieht der Sachverhalt aus [6]

[6]Graphik erstellt mit GeoGebra

Zu aller erst gilt es zu überlegen, welche Gestalt der entstehende Rotationskörper haben wird. Eine genaue graphische Darstellung wird im Laufe dieses Kapitels folgen. Dennoch ist es bereits jetzt möglich eine Prognose abzugeben: es entsteht ein sogenanntes Drehparaboloid, welches in etwa die Form einer Schüssel haben dürfte. Für die Berechnung des Volumens muss man sich überlegen, in welchem sich Intervall das Flächenstück befindet, um es in weiterer Folge (richtig) rotieren zu lassen.
Hierfür müssen die Schnittpunkte berechnet werden:

$$\begin{aligned} k_1 &\cap k_2 \\ 16(x-4) &= 8x \\ 16x - 64 &= 8x \\ 8x &= 64 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Die y-Koordinate erhält man, indem man die eben erhaltene x-Koordinate in eine der beiden Kurven, beispielsweise in die Zweite, einsetzt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y^2 &= 8 \cdot 8 \\ y^2 &= 64 \\ y &= \pm 8 \\ \Rightarrow y_1 &= 8, y_2 = -8 \end{aligned}$$

Die daraus erhaltenen Schnittpunkte sind $S_1(8/8)$ beziehungsweise $S_2(8/-8)$. Hier benötigt es weitere Überlegungen.

Das Volumen eines Drehkörpers wird durch die Summe von schmalen Drehzylindern, deren Radien $y = \sqrt{16(x-4)}$ beziehungsweise $y = \sqrt{8x}$ sind angenähert.

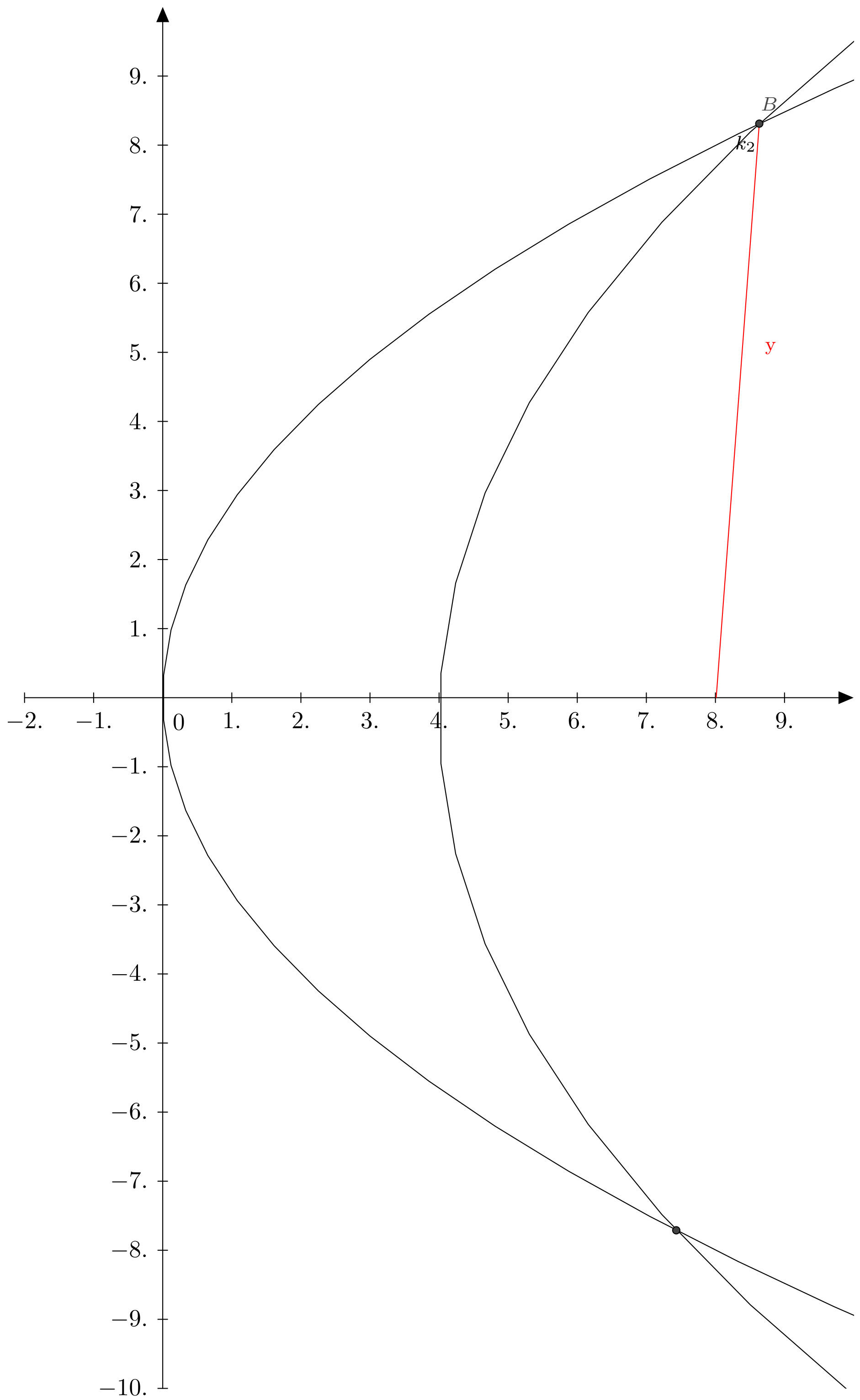


Abbildung 12: Die rote Linie stellt den Radius der Drehzylinder dar und approximiert (gemeinsam mit deren Höhe Δx) in Addition das Volumen des Rotationskörpers [7]

Wie Abbildung 12 zeigt, entspricht der Radius der Drehzylinder in etwa der „Hälfte“ der Parabel. Des Weiteren, ist Vorsicht bei den Grenzen des Flächenstücks geboten. Nachdem um die x-Achse rotiert wird, müssen auch dort die Grenzen gesucht werden. Sie sind nicht, wie etwa zu vermuten ist 8 und -8 (das wären sie würde um die y-Achse gedreht werden). Hier sei wiederum auf die rote Linie in Abbildung 12 hingewiesen, welche eine kleine Hilfe leistet. Wie zu erkennen ist liegt das Flächenstück im Intervall [0;8] (die rote Linie trifft die x-Achse bei 8).
Doch wie bekommt man nun das begrenzte Flächenstück? Offenbar ist jene Fläche hinter k_2 von Bedeutung. Diese Fläche würde sich bis ins Unendliche erstrecken und wäre somit zu groß. Da sich jedoch die Fläche hinter k_1 in jener von k_2 befindet und nur jene zwischen den beiden relevant ist, wäre es ratsam k_2 von k_1 abzuziehen. Dies ergäbe das eingegrenzte Flächenstück.
Für das Volumen des Drehkörpers bedeutet dies, dass zuerst k_2 um die Achse rotiert wird, dann k_1 und anschließend, wie bereits erwähnt, k_2 von k_1 abgezogen wird. Nachdem sich der Körper im Intervall [0;8] befindet muss k_2 im gesamten Intervall rotiert werden, k_1 jedoch nur von 4 bis 8, da dies jene Fläche ist, die zu viel ist:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \left[\int_0^8 (k_2 dx) - \int_4^8 (k_1 dx) \right] \\
&= \pi \left[\int_0^8 (8x dx) - \int_4^8 (16x - 64dx) \right] \\
&= \pi \left[\left(\frac{8x^2}{2} \right) - \left(\frac{16x^2}{2} - 64x \right) \right] \\
&= \pi \left[\underbrace{4x^2}_{256} - \left(\underbrace{8x^2 - 64x}_{128} \right) \right] \\
&= 128\pi
\end{aligned}
$$

Was dem Volumen des Rotationskörpers entspricht.

3.2 GeoGebra

GeoGebra ist eine „Dynamische-Geometrie Software (DGS)“, deren Lizenz der „GNU General Public License“ unterliegt und sich aus den beiden Worten „Geometrie“ und „Algebra“ zusammensetzt (solche Konstrukte werden in der Germanistik als sogenann-

[7]Graphik erstellt mit GeoGebra

te „Kofferworte“ bezeichnet). Eine DGS ist im Prinzip ein Programm, welches zum Erstellen von Konstruktionen verwendet werden kann, welche in der Regel mit Zirkel und Lineal zu bewerkstelligen sind. Des Weiteren können so angefertigte Konstrukte, beziehungsweise gewisse Punkte davon (genaueres über die Beweglichkeit von Punkten in GeoGebra folgt im Laufe des Kapitels) bewegt werden und so Konstruktionen in bestimmten Weisen verändert werden. Dies kann zu einem mächtigen Werkzeug im Mathematikunterricht werden, wie später noch genauer erörtert werden wird. GeoGebra dient jedoch nicht nur zum Konstruieren von geometrischen Objekten, sondern auch zum Berechnen mathematischer Probleme, welche, sofern möglich, graphisch dargestellt werden. Zudem besitzt GeoGebra noch Komponenten (Ansichten), für „spezielle“ Probleme, sei es statistischer/stochastischer oder anderer Natur.
GeoGebra wird von ungefähr 40 EntwicklerInnen permanent verbessert und weiterentwickelt. Eine wichtige Rolle spielt hierbei die von GeoGebra eigens ins Leben gerufene Plattform „GeoGebraTube“, auf welcher UserInnen, meist selbsterstellte, Unterrichtsmaterialien hochladen und mittels Kommentaren und/oder anderweitig ihre Meinung dazu kundtun können. So wurde dafür gesorgt, dass GeoGebra ab der Version 4.2 im Jahre 2012 erstmals ein CAS besessen hat, was ein symbolisches Rechen ermöglicht und ab der Version 5.0 auch die Fähigkeit besitzt, dreidimensional konstruieren zu können. Nichtsdestotrotz, ist GeoGebra eine freie Software, das heißt kostenlos erhältlich, welche jederzeit auf der Homepage (`https://www.geogebra.org/`) sowohl als Desktop App für den Computer, als auch als Applikation für Tablet und Smartphone frei erhältlich ist.

Einführung in GeoGebra

GeoGebra verfolgt einen relativ simplen Aufbau und ist zudem fast selbsterklärend. Beim Öffnen von GeoGebra bietet sich in der Regel folgendes Bild

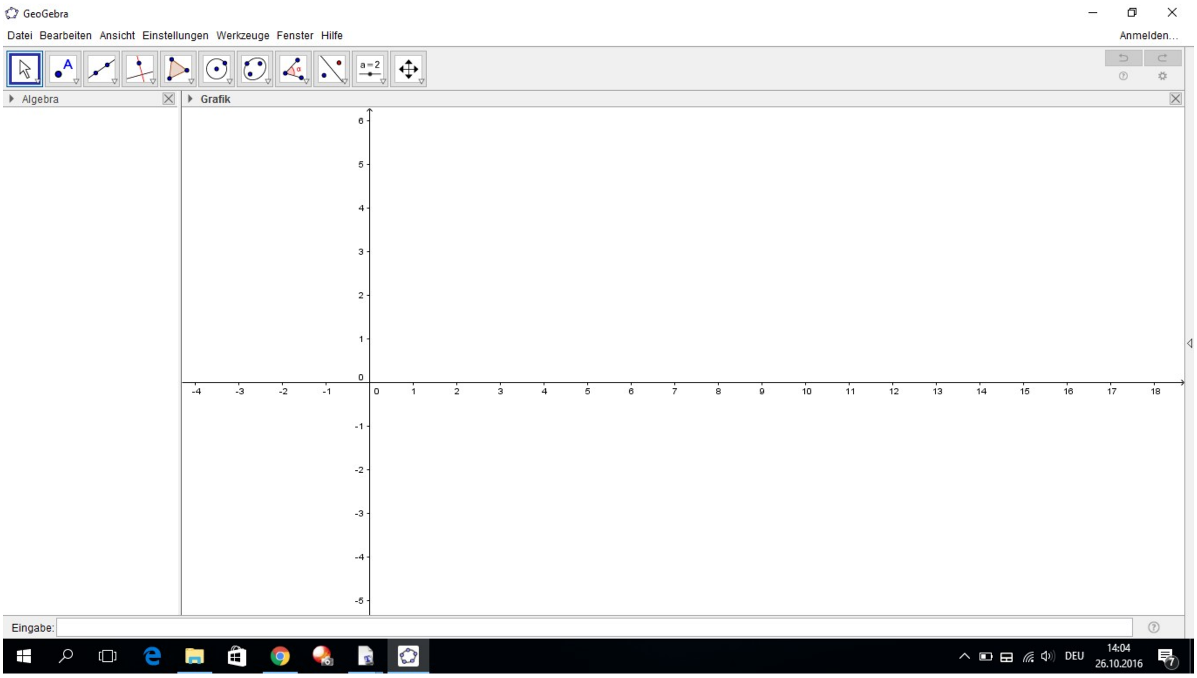


Abbildung 13: Benutzeroberfläche GeoGebra

GeoGebra besitzt verschiedene *Ansichten* für verschiedene Bedürfnisse. So kann man eben Berechnungen durchführen, sowie zwei- als auch dreidimensional Konstruieren, aber auch Tabellenkalkulationen (ähnlich jener von Microsoft Excel) betreiben. Einen guten Überblick über die verschiedenen Ansichten von GeoGebra bietet folgende Graphik

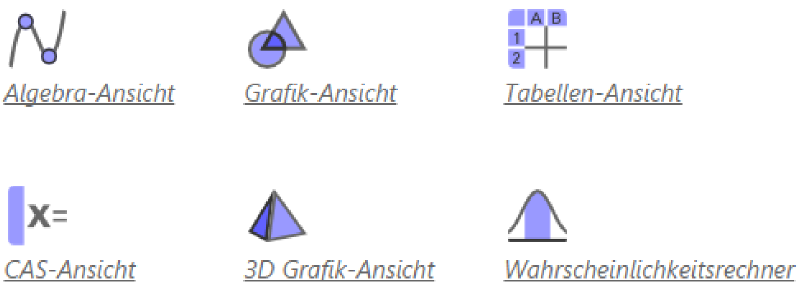


Abbildung 14: Ansichten, welche in GeoGebra verfügbar sind (aus GeoGebra 2016)

Dabei besitzt jede Ansicht im oberen Bereich des Fensters eine Leiste (*Werkzeugleiste* genannt), welche verschiedene Tools, sowie bereits vordefinierte Funktionen und Operatoren beinhaltet (vergleiche GeoGebra 2016) Ebenfalls im oberen Bereich befindet sich die sogenannte *Menüleiste,* welche diverse Menüs, wie beispielsweise das „Dateimenü“, zum Bearbeiten der aktuell genutzten Datei, das „Werkzeugmenü,“ welches Veränderungen oder gar das Erstellen neuer Tools zulässt oder dem „Ansichtenmenü“, womit man zusätzliche Ansichten aktivieren kann. Eine weitere wichtige Komponente, welche am unteren Rand der Benutzeroberfläche angebracht ist, ist die *Eingabezeile,* welche zur Kommunikation mit der Software dient. Sie ist auch mit anderen Ansichten, wie etwa mit der Algebra-Ansicht oder der (zwei- und dreidimensionalen) Graphik-Ansicht verbunden, sodass hier tatsächlich eine interaktive Kommunikation geboten wird. Beispielsweise werden in der Eingabezeile definierte Funktionen in der Algebra-Ansicht aufscheinen und in der Graphik-Ansicht visualisiert. Die Eingabe selbst erfolgt mittels Befehlen oder einer bestimmten Syntax. Dabei erkennt GeoGebra selbst, um welche Art von mathematischen Objekten es sich handelt und vergibt gleichzeitig auch Namen für diese. Allerdings sind diese meist wenig sprechend, wie etwa einzelne Kleinbuchstaben (f:, g:,...) für Geraden, Kreis, Kegelschnitte und dergleichen, Großbuchstaben A,B,C,... für Punkte, sowie f(x), g(x),... für Funktionen. Sollen eigene Namen verwendet werden, so müssen diese, dementsprechend vor dem mathematischen Ausdruck, gefolgt von einem Doppelpunkt (:), oder dem Definitionszeichen (:=) eingegeben werden. GeoGebra erkennt von selbst, um welche Art von mathematischem Objekt es sich handelt, was im Umkehrschluss bedeutet, dass man als NutzerIn auf die Eingabe besonders Acht geben sollte. Eine nützliche Eigenschaft der Eingabezeile ist, dass vorangegangene Eingaben „gemerkt“ werden (in der Informatik wird dies als „History“ bezeichnet), welche man durch die beiden Pfeil-Tasten erreichen kann. Neben eben genannten Komponenten, gibt es auf der Oberfläche auch die Möglichkeit Ansichten nach eigenen Bedürfnissen und Wünschen anzupassen. Hierfür gibt es den *Gestaltungsbereich,* welcher am einfachsten durch einen Klick auf den kleinen schwarzen Pfeil neben dem Ansichtsnamen im oberen Bereich des Fensters der jeweiligen Ansicht geöffnet wird. Naturgemäß gibt es je nach Ansicht andere Dinge, welche gestaltet werden können. So kann man etwa in der Graphik-Ansicht beispielsweise einstellen, ob Achsen angezeigt werden sollen oder nicht, welche Farbe Punkte haben sollen oder, ob die Graphik-Ansicht mit einem Gitter versehen werden soll und vieles mehr. Zu guter Letzt, gibt es noch das *Kontextmenü,* indem Eigenschaften von Objekten verändert werden können, wie etwa die Darstellung von Koordinaten oder Gleichungen, Funktionen umbenennen und dergleichen. Zudem ist es möglich (sofern beide Ansichten geöffnet sind) dafür zu sorgen, dass beispielsweise Punkte von der Graphik-Ansicht in die Tabelle der Tabellen-Ansicht eingetragen werden.

Nachdem nun die Oberfläche von GeoGebra inklusive deren Komponenten erörtert wurden, gilt es im folgenden, die verschiedenen Ansichten (siehe Abbildung 14) GeoGebras näher zu betrachten. Wie Abbildung 13 zeigt, sind beim Öffnen von GeoGebra standardmäßig die *Algebra-Ansicht* und *Graphik-Ansicht* aktiv. Die Algebra-Ansicht besitzt, je nach Version von GeoGebra (Desktop, Web, Tablet) eine Eingabe, die entweder die eben besprochene Eingabezeile ist (Desktop) oder bereits in der Ansicht integriert ist (Tablet, Web). Dies bedeutet es kann direkt in der Ansicht eingegeben werden. Die Eingabe an sich erfolgt über die Tastatur. Hierbei besitzt GeoGebra eine Vielzahl an Befehlen, welche nahezu jeden Bereich der Schulmathematik abdecken, zudem kann auch ohne Befehle, wie etwa beim Erstellen von Funktionen oder anderen mathematischen Objekten gearbeitet werden. Nichtsdestotrotz, wird eine Eingabe steht mit `Enter` abgeschlossen. Zudem ist die Algebra-Ansicht mit der Graphik-Ansicht (und der *Graphik3D-Ansicht* oder einfach nur *3D-Ansicht*) verknüpft, das heißt Objekte, welche über die Algebra-Ansicht erstellt werden, werden (sofern möglich) in der Graphik-Ansicht visualisiert (und umgekehrt). Des weiteren können, wie bereits mehrfach erwähnt mathematische Objekte erstellt und modifiziert werden. Zusätzlich können diese in der Algebra-Ansicht auch ein- und ausgeblendet werden. Im Prinzip ist diese Ansicht ein Kommunikationsmittel für die Graphik-Ansicht. Die Graphik-Ansicht selbst, dient in erster Linie zum Konstruieren und Visualisieren von mathematischen Objekten. Dafür gibt die Werkzeugleiste, welche entweder in der Algebra- oder Graphik- Ansicht verfügbar ist, mit ihren Konstruktionswerkzeugen. Diese werden, wie in der Leiste leicht zu erkennen ist, in verschiedene Kategorien unterteilt. So gibt es Werkzeuge für Bewegungen, wie etwa „Bewege“ zum Bewegen von freien Objekten oder „Bewege um Punkt“ (nur in der Desktop-Version verfügbar). Auf die genaueren Funktionsweisen der Werkzeuge wird hier nicht näher eingegangen, Interessierte können im GeoGebra Manual (GeoGebra 2016) nähere Details nachlesen. Des weiteren gibt es Werkzeuge für Punkte, wie etwa beispielsweise „Punkt“, „Punkt auf Objekt“ oder „Schneide“ und Werkzeuge für Geraden respektive spezielle Geraden (zum Beispiel „Gerade“, „Strecke“ oder „Strahl“ und „Senkrechte Gerade“). Aber auch für Vielecke hat GeoGebra einige Werkzeuge im Repertoir, siehe „Vieleck“„Regelmäßiges Vieleck“ und mehr. Ebenfalls konstruierbar in der Graphik-Ansicht sind Kreise und Kegelschnitte („Kreis“, „Elipse“, „Parabel“,...), sowie Messungen („Winkel“„Fläche“, „Steigung“,...). Neben den mathematischen Werkzeugen kann GeoGebra in der Graphik-Ansicht auch Objekte beschriften (Werkzeuge für spezielle Objekte), Schieberegler erzeugen (Werkzeuge für Aktionsobjekte) und natürlich verkleinern respektive vergrößern (allgemeine Werkzeuge). Um einen besseren Überblick zu erhalten, sei hier die Werkzeugleiste abgebildet

Abbildung 15: So sieht die Werkzeugleiste in der Graphik-Ansicht aus (aus GeoGebra 2016)

Eine weitere äußerst wichtige Fähigkeit, welche die Graphik-Ansicht inne hat, ist jene, dass Werkzeuge für besondere Bedürfnisse, unter der Rubrik `Werkzeuge,` anpassen respektive selbst erstellt und gespeichert werden können. Dies kann für den/die NutzerIn eine enorme Erleichterung bei Konstruktionen verschaffen, da so komplizierte Vorgänge oder „extra Wünsche“, welche zudem mehrfach eingesetzt werden, kompakt in einem Befehl zusammengefasst werden. Als zusätzliche Unterstützung verfügt GeoGebra noch über ein *Konstruktionsprotokoll,* welches, wie der Name bereits vermuten lässt, die einzelne Konstruktionsschritte aufzeichnen, auf welche bei Bedarf zurückgegriffen (genauer zurückgeklickt) werden kann und so leichter Veränderungen oder Korrekturen vorgenommen werden können.
Des weiteren besitzt, wie bereits eingangs erwähnt, GeoGebra ein CAS. Dies ist unter der sogenannten *CAS-Ansicht* zu finden. Dieses verfügt über Zeilen, welche sowohl als Eingabe, als auch zur Ausgabe dienen. Die Eingabe kann direkt über die Tastatur erfolgen, hierbei sind jedoch ein paar Kleinigkeiten zu beachten. Es wird zwischen `=` und `:=` unterschieden. `=` wird in der Regel für Gleichungen verwendet, jedoch nicht um Variablen mit Werten zu belegen. Demnach hat die Variable x nach der Eingabe `x=2` nicht den Wert 2. Für Dinge dieser Art, steht in GeoGebra das `:=` zur Verfügung. Mit diesem Operator ist es möglich Variablen oder Funktionen (neu) zu definieren. Hierbei wird stets der Name des mathematischen Objekts, gefolgt von eben diesem Zuweisungsoperator und dem Wert, welchen es besitzen soll eingegeben. Soll eine Variable x den Wert 2 bekommen, so ist die Eingabe `x:=2` durchzuführen. Dies hat den angenehmen Nebeneffekt, dass auf solch eine Art und Weise definierte Variablen, sofern möglich, in anderen Ansichten ebenfalls verwendet werden kann. Um eine Variable wieder freizugeben, muss der Befehl `Lösche[Variable]` durchgeführt werden. Des Weiteren, sind Multiplikationen explizit anzuführen, heißt der Multiplikationsoperator (`*`) muss auch wirklich eingegeben werden. Eingaben wie `x(y+z)` werden von der CAS-Ansicht nicht als Multiplikation interpretiert (sehr wohl aber von der Algebra-Ansicht). Richtig wäre `x*(y+z).`
Zudem kann mit den Zellen „kommuniziert“ werden, sprich Eingaben oder Ausgaben vorangegangener Zellen können übernommen werden, ohne die Ein- oder Ausgabe wiederholt eingeben zu müssen. Dabei wird zwischen statischen Zellenbezügen und dy-

namischen Zellenbezügen unterscheiden. Der Unterschied zwischen den beiden, ist jener, dass statische Bezüge keine Auswirkungen auf die Kopie haben. Hierbei steht das `#` (kopiert vorherige Ausgabe) respektive `# Zellennummer` (kopiert Ausgabe von Zelle `Zellennummer`). Bei dynamischen Bezügen, das sind jene, bei denen nachfolgende Änderungen Auswirkungen auf die Kopie haben, gibt es analog `$` oder `$ Zeilennummer.` Neben diesen direkten Eingaben, gibt es bei der CAS-Ansicht noch eine Vielzahl an spezifischen Befehlen welche wiederum über die Tastatur oder über die Werkzeugleiste, welche bei dieser Ansicht natürlich eine andere Gestalt hat, als bei der Graphik-Ansicht oder der Algebra-Ansicht eingegeben werden können.
Die *Tabellen-Ansicht* hat eine ähnliche Handhabung, wie sie von anderen Tabellenkalkulationssoftwaren bekannt ist. Sie besteht aus Zellen, wobei jede Zelle einen eindeutigen Namen hat, bestehend aus einem Zeilen- und Spaltennamen (zum Beispiel A1). In ihr ist es möglich Objekte zu definieren und durch spezifische Befehle mit ihnen zu operieren. Hierbei kann sich jedoch auch direkt auf Zellen bezogen werden, heißt Befehlen kann man Zellen mitgeben. In der Tabellen-Ansicht, muss jedoch jedem Befehl ein `=` vorangestellt werden. Zusätzlich ist zu beachten, dass die Tabellen-Ansicht, welche mit anderen Ansichten verknüpft ist, Kopien von anderen Zellen, verändert (siehe dynamischer Zellenbezug bei der CAS- Ansicht), was jedoch durch ein vorangestelltes `$` verhindert werden kann. Zudem können auch Daten aus anderen Tabellen-Software, sowie GeoGebra-Ansichten importiert werden.
Neben eben genannten Ansichten, verfügt GeoGebra noch über einen *Wahrscheinlichkeitsrechner,* mit welchen diverse Wahrscheinlichkeitsverteilungen, sowie statistische Probleme behandelt werden können. Die Handhabung ist fast selbsterklärend und bedarf keiner weiteren Erörterungen. Es müssen lediglich die Parameter (richtig) eingetragen werden und der Rechner berechnet diverse Wahrscheinlichkeiten inklusive graphischer Darstellung.
Zu guter Letzt, ist bei GeoGebra seit der Version 5.0 eine *3D Graphik-Ansicht* vorhanden, welche analog zur zweidimensionalen Ansicht funktioniert

GeoGebra im Einsatz

Nachdem GeoGebra kurz erklärt wurde, soll nun das Problem aus Abschnitt 3.1 mit Hilfe der Software GeoGebra gelöst werden. Zur Erinnerung: wie bereits oben erwähnt und in Abbildung 12 zu erkennen, macht der Radius eines Drehzylinders einen Arm einer Parabel aus. In anderen Worten, wenn beispielsweise $y = \sqrt{16(x-4)}$ statt $y^2 = 16(x-4)$ genommen wird, erhält man auch nur einen Teil der Kurve. Diese Überlegung ist in

Hinblick auf die Nutzung von GeoGebra hilfreich, da andernfalls die Berechnung des Volumens für GeoGebra unmöglich ist. Aus diesem Grund definiert man mit Hilfe der Befehle f(x):= sqrt(16(x-4)) beziehungsweise g(x):= sqrt(8x) in der CAS-Ansicht (es wäre auch über die Eingabezeile möglich) beide Kurven aus der Angabe und drückt danach Enter Mit dem := werden Variablen, Funktionen, Kegelschnitte und dergleichen definiert. Wenn danach damit dem so definierten Objekt weitergearbeitet wird, weiß GeoGebra stets, was im Objekt enthalten ist. sqrt([<x>]) ist der Befehl für das Wurzelzeichen, welches alles umschließt was sich innerhalb der beiden Klammern befindet. Um zeitgleich eine graphische Darstellung zu erhalten kann man auch die Graphik- oder 3D-Ansicht einschalten.

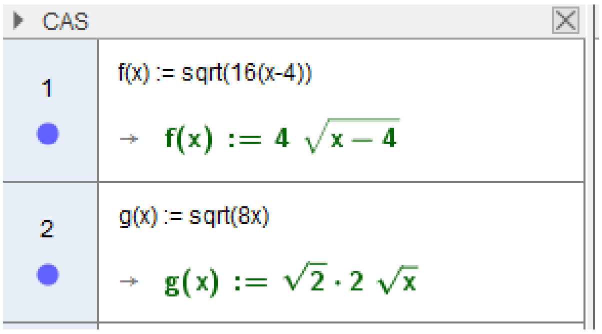


Abbildung 16: Definition der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

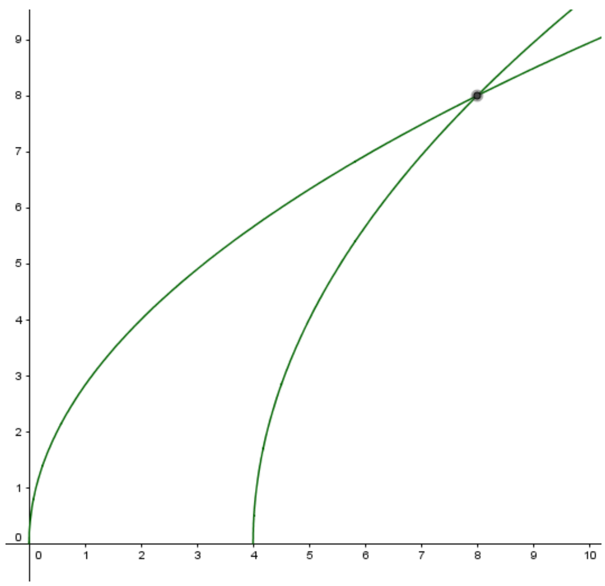


Abbildung 17: So sehen die Graphen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ aus

Wie Abbildung 16 zeigt, vereinfacht GeoGebra auch gleich die Wurzel. Vorsicht man erhält durch die Art und Weise, wie $f(x)$ und $g(x)$ definiert wurden, jeweils nur einen

Ast der Parabeln! Um die Schnittpunkte zu bekommen, welche wie bereits oben gesehen, das Flächenstück begrenzen, müssen wie schon bei der klassischen Methode, die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ geschnitten werden. Dies passiert in GeoGebra mit Hilfe des Schneide[]- Befehls. Dieses Kommando gibt es für die CAS-Ansicht für Funktionen (Schneide[<Funktion>, <Funktion>]) und für Objekte (Schneide[<Objekt>, <Objekt>]). Bei Objekten wird, je nach Anwendungsfall, noch weiter unterschieden:
Schneide[<Gerade> , <Objekt>] berechnet den Schnittpunkt einer Geraden und eines Objekts (Ebene, Strecke, Vieleck, etc.),
Schneide[<Ebene> , <Objekt>] wird verwendet für den Schnittpunkt einer Ebene und eines Objekts (Strecke, Vieleck, Kegelschnitt, etc.),
Schneide[<Kegelschnitt>, <Kegelschnitt>] erzeugt den Schnittpunkt zweier Kegelschnitte,
Schneide[<Ebene>, <Ebene>] liefert die Schnittgerade zweier Ebenen,
Schneide[<Ebene>, <Polyeder>] errechnet das Schnittpolygon einer Ebene und eines Polyeders,
Schneide[<Kugel>, <Kugel>] berechnet den Schnittkreis zweier Kugeln und
Schneide[<Ebene>, <Quadrik>] gibt den Schnittkegelschnitt einer Ebene und einer Quadrik (Kugel, Kegel, Zylinder, ...) aus
(vergleiche GeoGebra 2016, Schneide(Befehl)).
Das passende Kommando, um zwei Funktionen miteinander zu schneiden ist
Schneide[<Funktion>, <Funktion>]. Für dieses Beispiel bedeutet dies Schneide[f,g].

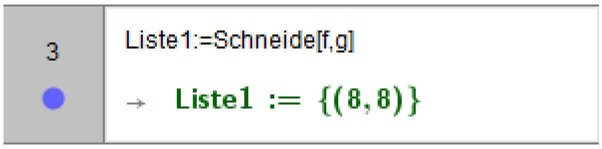


Abbildung 18: Schnittpunkte der beiden Kurven

Nun erhält man den Schnittpunkt $S(8/8)$. Alternativ kann man in der Graphik-Ansicht mit dem Tool Schneide, welches beim zweiten Kästchen (jenes mit dem blauen Punkt und dem A darüber) durch einen Klick auf den kleinen schwarzen Pfeil auswählbar ist, beide Funktionen anklicken und erhält auf diese Weise ebenso den Schnittpunkt $S(8/8)$.
Über das Volumen und die Grenzen des Körpers bei der Rotation um die x-Achse wurde bereits bei der vorherigen Methode ausgiebig nachgedacht, dies kann daher übernommen werden. Demnach setzt sich das Volumen aus

$$V = \pi \left[\int_0^8 \left(g(x)^2 dx \right) - \int_4^8 \left(f(x)^2 dx \right) \right]$$

zusammen. Um dieses Volumen mit GeoGebra berechnen zu können, braucht man den Integral-Befehl, der in seiner einfachsten Form das Aussehen Integral[<Funktion>] besitzt. Dieser berechnet das unbestimmte Integral einer Funktion. Für Funktionen in mehreren Veränderlichen muss man die Variable, nach welcher integriert werden soll, explizit angeben: Integral[<Funktion>, <Variable>]. Soll das Integral, wie bei diesem Beispiel in bestimmten Grenzen berechnet werden, steht der Befehl Integral[<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>] zur Verfügung.
Demnach berechnet sich das Volumen wie folgt: pi (Integral[g^2, 0, 8] - Integral[f^2, 4, 8])

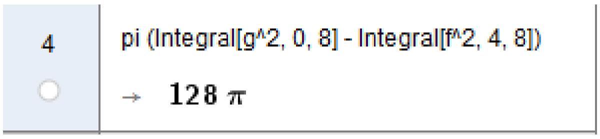


Abbildung 19: Das Volumen des Drehkörpers um die x-Achse

und ergibt ebenfalls 128π
Es sei bemerkt, dass für die Berechnung eines Flächenstücks zwischen zwei Funktionen eigentlich der Befehl IntegralZwischen[<Funktion>,<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>] gedacht wäre. Dieser hat jedoch das Manko, dass nur ein Start- und Endwert angegeben werden können und er daher für dieses Beispiel unbrauchbar ist, da er ein nicht korrektes Ergebnis liefern würde.
Doch wie sieht dieser Rotationskörper nun tatsächlich aus? Um diese Frage beantworten wird dieser mit Hilfe der 3D-Ansicht von GeoGebra konstruiert.

Dank der 3D- Ansicht GeoGebra ist es nun auch möglich ein Bild des Rotationskörpers zu erstellen, um sehen zu können, wie dieser Rotationskörper ungefähr aussieht. Um Rotationskörper in GeoGebra erstellen zu können, benötigt man jedoch ein gewisses mathematisches Hintergrundwissen, welches jetzt nicht unmittelbar mit eben gelösten Beispiel zu tun hat. Zum einen ist notwendig zu wissen, was lineare Abbildungen sind und das solche als Matrizenmultiplikation aufgefasst werden können. Zudem ist es ratsam zu verstehen, was passiert, wenn eine Funktion um a nach rechts (oder links) und b nach oben (oder unten) verschoben wird . Auf genaue mathematischen Erklärungen wird an dieser Stelle verzichtet. Für Interessierte sei auf

http://www.angsuesser.at/docs/math/pdf/revolution_volume.pdf verwiesen, welche eine kompakte Zusammenfassung respektive Erklärung gibt, wie man Rotationskörper mit Hilfe von GeoGebra erstellt.
Der Befehl, mit welchen man solche Körper erstellt ist der Befehl Oberfläche[<Ausdruck>, <Ausdruck>, <Ausdruck>, <Parameter Variable 1>, <Startwert>, <Endwert>, <Parameter Variable 2>, <Startwert, <Endwert>], wobei Ausdruck für den Term auf der jeweilligen Achse (x, y und z-Achse) steht. Welche Gestalt diese haben, hängt davon ab, um welche Achse rotiert wird. Nachdem dieser Befehl mit Parameterdarstellungen von Kurven arbeitet, müssen diese auch GeoGebra mitgeteilt werden, dies geschieht bei Parameter Variable 1 und Parameter Variable 2. Naturgemäß muss auch angegeben werden in welchen Intervallen die Kurven (und somit die Parameter) rotieren. Dafür steht das Startwert und Endwert. In aller Regel ist dies $[0; 2\pi]$. Bevor dieser Befehl auf das vorliegende Beispiel angewandt werden kann, muss trotzdem eine kleine mathematische Überlegung angestellt werden:
Die Rotation um eine Achse ist eine lineare Abbildung, d.h es gelten

$$R(x+y) = R(x) + R(y) \text{ beziehungsweise } R(\alpha x) = \alpha R(x)$$

(R steht hier für Rotation) welche als Multiplikation einer 3 x 3 -Matrix gesehen werden kann.(Es kann jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ zu $\mathbb{R}^n$ als Matrixmultiplikation dargestellt werden denn es gilt genauso

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\sum_k \vec{e_k} x_k) = \sum_k \vec{f}(e_k) x_k = A\vec{x}$$

wobei $\vec{e_i} = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i-teStelle}, \ldots, 0)$ der i-te Einheitsvektor ist und in der i-ten Spalte der Matrix steht.) Um eine solche Matrix (in diesem Fall wird um die x-Achse rotiert) zu definieren, genügt es die Einheitsvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ zu kennen. Nachdem um die y-Achse rotiert wird, gilt der 1. Spaltenvektor der Rotationsmatrix mit $f(\vec{e_1}) = (1, 0, 0)$ als invariant. Um die anderen beiden Spalten bestimmen zu können, soll folgende Abbildung helfen

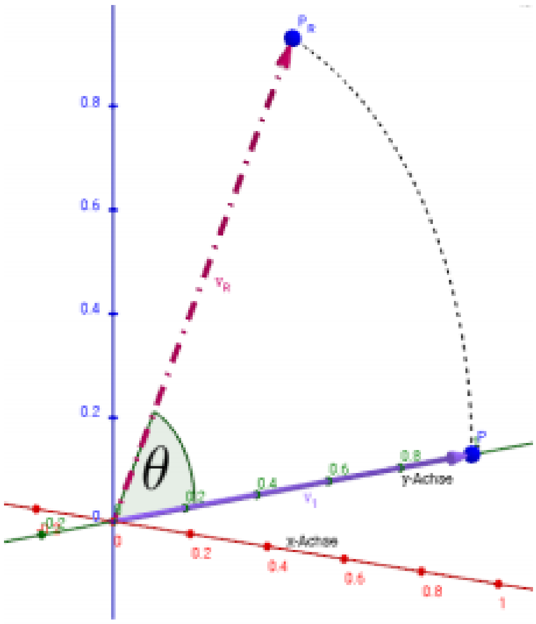


Abbildung 20: Hilfsskizze für Überlegungen

Denn nun müssen die Parameterdarstellungen gefunden werden. Nach eingehender Betrachtung der Skizze, ist erkennbar, dass $f(\vec{e_2}) = (0, \cos(\Theta), \sin(\Theta))$ und $f(\vec{e_3}) = (0, -\sin(\Theta), \cos(\Theta))$ sind. Somit ist die Rotationsmatrix um die x-Achse R_x wie folgt definiert

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Theta) & -\sin(\Theta) \\ 0 & \sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{pmatrix}$$

Zu guter Letzt, braucht man noch den Graphen der Funktion (sie sei nun g genannt), welche um die x-Achse rotiert. Dieser setzt sich folgender Maßen zusammen

$$R_x(t, g(t), 0 = (t, \sin(\Theta) \cdot g(t), \sin(\Theta) \cdot g(t)) = S_x \tag{3.1}$$

Nun kann der Körper in GeoGebra gezeichnet werden. Hierfür öffnet man in GeoGebra das CAS und die 3D-Ansicht. Man definiert die beiden Kurven `f(x):= sqrt(16(x-4))` beziehungsweise `g(x):= sqrt(8x)` und zusätzlich vielleicht noch die beiden Grenzen `a := 0` und `b := 8`, da sich der Köper in diesem Intervall ([0; 8]) am besten darstellen lässt. Nun kommt der eben erklärte Befehl `Oberfläche()` ins Spiel. Um den Rotationskörper zu erhalten, muss bekanntlich $g(x)$ von $f(x)$ abgezogen werden, dies muss im Befehl selbst geschehen `Oberfläche[t, (cos(Omega)*g(t) - cos(Omega)*f(t)), (sin(Omega)*g(t) - sin(Omega)*f(t)), t, a, b, Omega, a, b]`. Es wurde hier jeweils (in jedem `Ausdruck`) $g - f$ gerechnet, nur in entsprechender Darstellung (siehe Gleichung 3.1). Die 3D-Ansicht von GeoGebra liefert ein entsprechendes Bild des Rotationskörpers

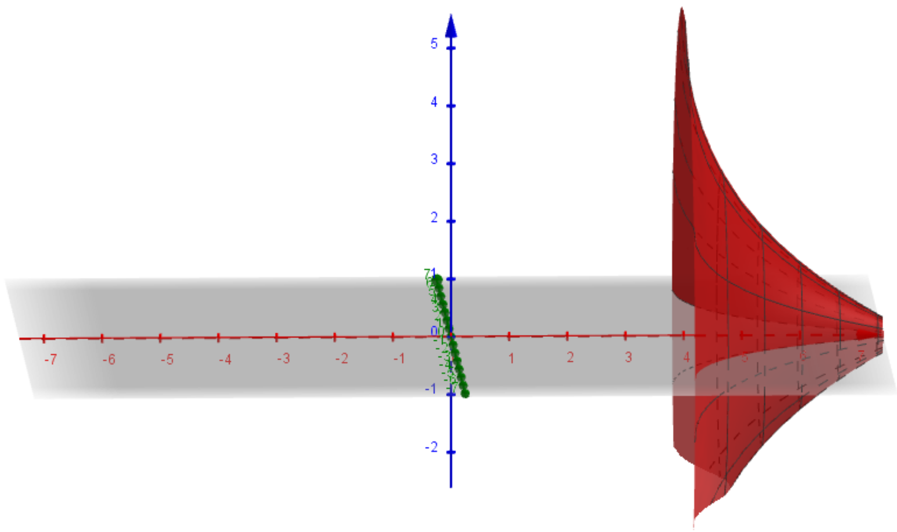


Abbildung 21: So sieht der Rotationskörper in GeoGebra aus

GeoGebra didaktisch betrachtet

GeoGebra ist auf Grund seiner verschiedenen Ansichten enorm vielseitig einsetzbar. Das „Prunkstück“ ist zweifelsohne die Geometrie. Sie bietet neben den Werkzeugen zum klassischen Konstruieren, auch eine Reihe weiterer Utensilien, (Winkel-/Abstandsmessung, Einzeichnen von Flächen,...), welche den Umgang mit geometrischen Problemen erheblich vereinfachen. Des weiteren, seien an dieser Stelle, weitere didaktisch äußerst wertvolle Fähigkeiten der Graphik-Ansicht GeoGebras erwähnt, nämlich der sogenannte *Zugmodus* und *Spurmodus*. Doch bevor auf diese intensiver eingegangen wird müssen noch ein paar Dinge besprochen werden. Punkte in GeoGebra können verschiedene Eigenschaften haben, was ihre „Beweglichkeit“ betrifft. Demnach gibt es Punkte, welche keine Einschränkung in ihrer Mobilität haben (sogenannte freie Punkte), Punkte, die bloß entlang eines Objektes bewegt werden dürfen, wie beispielsweise einer Geraden, was bedeutet, dass dieser Punkt gebunden ist. Zu guter Letzt gibt es noch Punkte, welche nicht variiert werden können, da sie fest sind, wie zum Beispiel ein Schnittpunkt zweier

Objekte.
Nichtsdestotrotz, lassen sich durch diese Sonderheiten, die eigentlichen Inhaltsziele der Geometrie nämlich das Wissen über die wichtigsten geometrische Begriffe, Sätze, Definitionen und Konstruktionsverfahren (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.156) erreichen, da die Thematik für SchülerInnen, insbesondere bei Konstruktionen, auf Grund der visuellen Unterstützung einsichtiger wird. Die Graphik-Ansicht (und auch die 3D-Ansicht) besitzt zudem noch weitere Fähigkeiten, welche sowohl für LehrerInnen als auch SchülerInnen im Unterricht, sofern adäquat eingesetzt, von enormer Bedeutung sein können: Da, wie bereits erwähnt Punkte verschiebbar sein können, lassen sich Konstruktionen variieren, und so ohne viel Aufwand auf Hypothesen und Extremfälle prüfen. Das hat für beide Seiten (LehrerInnen beziehungsweise SchülerInnen) angenehme Effekte. LehrerInnen nutzen dies als Unterstützung ihrer Erklärungen und können diese dadurch leichter durchführen, SchülerInnen sind in der Lage „mitzuschauen“, da die Konstruktion „mitwandert“. Der Zugmodus, so wird das Verschieben von Punkten genannt, erlaubt es eben einmal zu konstruieren und das „Ergebnis“ durch Ziehen von Punkten zu verändern, was an der Tafel mehrere Konstruktionen nötig machen würde. Dabei sei erwähnt, dass dieser Zugmodus, beim Variieren der Punkte die strukturellen Relationen nicht verändert. Zudem leistet diese Möglichkeit eine enorme Hilfe beim Verständnis, und regt Lernende dazu an selbst Überlegungen anzustellen, zu experimentieren, was auch einen Bestandteil des Geometrieunterrichts darstellt. SchülerInnen sollen lernen zu entdecken, geometrische Zusammenhänge zu erkennen und sowohl verbal als auch mathematisch zu formulieren. Definieren, Beweisen oder das Lösen von Problemen zählen ebenfalls zu den zu erlernenden Fähigkeiten.
Die Graphik-Ansicht kann im Mathematikunterricht generell als heuristisches Werkzeug verwendet werden. Eben durch den oben erwähnten Zugmodus, vielleicht auch in Verbindung mit dem Spurmodus, welcher den Weg zeigt, den ein verschobener Punkt zurückgelegt hat, können SchülerInnen auf neue geometrische Figuren treffen, welche auf bereits bekannte aufbauen. Des weiteren, sollen SchülerInnen selbständig auf „Phänomene“ beziehungsweise Eigenschaften von Figuren stoßen und diese in weiterer Folge verbal beschreiben können. Der erlernte Stoff würde dadurch besser im Gedächtnis verankert werden, da er durch „Spielerei“, Eigeninitiative entdeckt respektive erlernt wurde und nicht durch trockene Theorie. Der/Die LehrerIn, braucht nicht mehr zwingend die meiste Zeit für Erklärungen aufbringen, da sich das Meiste mit den Graphik-Ansichten von GeoGebra ohne viel Theorie herzeigen lässt. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, bereits erlernte Stoffinhalte mit der Software zu vertiefen, eventuell zu erweitern (Stichwort Konstruktionen ebener Figuren und deren „besonderen“ Punkte).

Die graphische Stärke kann auch in Verbindung mit anderen Komponenten ausgenutzt werden, denn wie bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, sind die Ansichten großteils miteinander verbunden. So ist GeoGebra auch in der Lage mathematische Objekte, wie etwa Funktionen oder Berechnungen des CAS, sofern möglich, zu visualisieren. Dadurch gewinnt das CAS zusätzlich an Mächtigkeit. Denn dadurch bekommen Lernende eine bessere Vorstellung davon, was gerade operativ passiert und können dadurch auch hier Überlegungen anstellen, was passiert, wenn dieses und jenes eintritt. Zudem werden etwaige Fehler schneller einsichtig, da aus einer Visualisierung mehr herausgelesen werden kann, als aus einer „Rechnung". Das CAS von GeoGebra ist neben seiner Verbindung mit der
Graphik-Ansicht (zwei- und dreidimensional), auch durch seine Vielzahl an Befehlen und seiner einfachen Bedienung in jedem Bereich der Schulmathematik einsetzbar. Somit ist ein Werkzeug für alle Probleme, welche im Mathematikunterricht auftauchen könnten vorhanden. Zudem weisen die Befehle eine klare, einfache Syntax auf und geben Anweisungen, welche Eingabe erwartet wird. Dies bedeutet eine enorme Erleichterung als UserIn, insbesondere im Schulalltag, da man ohne größere Überlegungen Berechnungen durchführen kann.
Neben dem CAS und der (zweidimensionalen) Graphik-Ansicht, hat auch der Wahrscheinlichkeitsrechner und die Tabellen-Ansicht ihre didaktischen Vorzüge. Mit Erstgenannten sind stochastische Verteilungen und Tests binnen kürzester Zeit lösbar. Dafür ist es lediglich notwendig Intervalle und/oder für die jeweilige Verteilung notwendige Parameter zu kennen. Zudem gibt auch der Wahrscheinlichkeitsrechner Visualisierungen des vorliegenden Falls her. Dadurch kann einerseits viel Zeit gespart werden, da Lehrende nicht Sachverhalte nicht mehr ständig an die Tafel zeichnen müssen, andererseits bekommen SchülerInnen wieder eine mächtige Unterstützung bei der Vorstellung, welche Bedeutung das vorliegende Problem mathematisch hat und können so leichter erhaltene Ergebnisse deuten. Aber auch das Ausprobieren, Experimentieren steht hier einmal mehr im Vordergrund. Selbiges kann über die Tabellen-Ansicht gesagt werden. Diese, für statistische Probleme gedachte Komponente, erleichtert das Verarbeiten von Daten und weist ähnliche Vorzüge (Visualisierung, Experimentieren,...), wie der Wahrscheinlichkeitsrechner auf. Zudem können durch diese Ansicht eben statistische Themen einfacher erklärt und erlernt werden.
Einen enormen Vorteil bringt die seit der Version 5.0 vorhandene 3D-Ansicht. Hier liegt wohl die größte Unterstützung für LehrerInnen und SchülerInnen. In vielen Gebieten, vorzugsweise in der analytischen Geometrie einsetzbar, ist es wie schon die zweidimensionale Variante, jedoch für weitaus komplexere Problemstellungen zum besseren Verstehen,

Veranschaulichen und dergleichen, ein willkommenes Hilfsmittel sowohl für LehrerInnen, als auch SchülerInnen. Durch die Möglichkeit Dinge variabel konstruieren zu können, die Ansicht in nahezu allen Himmelsrichtungen ziehen zu dürfen, kann durch diese Komponente gerade die Vorstellung, welche bekannter Maßen SchülerInnen schwer fällt, enorm erleichtert werden. Dadurch können sich Lernende auf die eigentliche Aufgabenstellung konzentrieren und diese leichter durchschauen. Auch für den/die Lehrenden gibt diese Ansicht eine Erleichterung bei seinen/ihren Erklärungen, da man ein verschiebbares Bild vor sich hat und so das Problem von allen Seiten betrachten und dadurch besser auf SchülerInnenfragen eingehen kann. Dem Interpretieren, dem Aufstellen von Hypothesen wird hier eine mächtige Bühne geboten und kann mit unter die Lernenden animieren einerseits selbst tätig zu werden und andererseits die Angst nehmen.
Resümierend betrachtet lässt GeoGebra sich durch seine mannigfaltigen Möglichkeiten in nahezu jedem Stoffgebiet der Schulmathematik einsetzen, sei es zur bloßen Berechnung oder als unterstützendes Medium zu Erklärungen und Erläuterungen. Zusätzlich animiert es SchülerInnen zur Selbstständigkeit, da eine gewisse „Spielerei“ beispielsweise durch das Anklicken der geometrischen Objekte in der Graphik- und 3D-Ansicht, durch die Visualisierung der algebraischen Objekte im CAS oder in der Eingabezeile und insbesondere durch den Zugmodus, der, wie bereits erwähnt einige Vorteile mit sich bringt, vorhanden ist.
Zusammenfassend, kann gesagt werden, dass die größte Stärke von GeoGebra mit Sicherheit in geometrischen Belangen und der Verbindungen zwischen den Ansichten liegt, was diese Software zu einem vielseitigen und mächtigen Werkzeug, vor allem in der Oberstufe, machen kann. Fast alle mathematischen Probleme sind binnen kürzester Zeit zu lösen und Ergebnisse können mit Hilfe von GeoGebra genauer, vor allem einfacher interpretiert werden, da es stets eine Visualisierung mitliefert. Konstruktionen können ebenfalls schneller angefertigt und nach Wunsch auch variiert werden, um mehrere Fälle gleichzeitig (in einer Konstruktion) behandeln zu können. Dadurch wird auch der Zusammenhang zwischen den einzelnen Figuren innerhalb der ebenen Geometrie besser sichtbar beziehungsweise leichter erklärbar. Insbesondere in der analytischen Geometrie lässt sich mit der 3D-Ansicht viel bewerkstelligen. Diesbezügliche Stoffinhalte können durch die Möglichkeit des dreidimensionalen Konstruierens/Zeichnens Sachverhalte wieder schneller, einfacher visualisiert und interpretiert werden. Selbiges gilt auch für die anderen Ansichten. Das CAS ist mit seiner Vielzahl an Befehlen ebenfalls in fast allen Bereichen der Schulmathematik einsetzbar und erleichtert sowohl Lehrende, als auch Lernende bei operativen Tätigkeiten und lässt dadurch den Fokus auf heutzutage wichtigere Dinge, wie etwa dem Deuten von Ergebnissen richten. Zusätzlich ist dieses Programm leicht zu

bedienen und nahezu selbsterklärend was den Umgang betrifft. Dies hat zur Folge, dass es weniger Zeit für Erklärungen und Eingewöhnung bedarf.
Alles in allem ist GeoGebra eine sehr gute technologische Alternative für den schultäglichen Gebrauch im Mathematikunterricht, sofern dessen Einsatz adäquat erfolgt.

3.3 Mathematica

Nun soll obiges Beispiel mit Hilfe von *Wolfram Mathematica* gelöst werden. Mathematica ist ein Softwarepaket an mathematischen Komponenten, welches sich im Besitz von *Wolfram Research Inc.* befindet und von Stephen Wolfram (geboren 1959), seines Zeichens Mathematiker und Physiker aus Großbritannien, 1988 gegründet wurde. Es ist sowohl für Mac, als auch für verschiedene Linux-Derivate und Microsoft Windows erhältlich. Es gibt dieses Programm in verschiedenen Versionen, wie etwa einer *Home-Edition*, die wie der Name bereits verrät für den Hobbygebrauch gedacht ist, *Studentenlizenzen*, welche vorrangig von Studierenden zur Berechnung von mathematischen Problemen verwendet werden oder auch zeitlich begrenzte Lizenzen, welche in der Regel einen geringeren Preis, im Gegenzug jedoch eine limitierte Laufzeit haben. Mathematica kann neben der üblichen Desktop-Version auch, dank der Wolfram-Cloud, online aufgerufen werden (dafür ist jedoch eine Installation der Wolfram Cloud App notwendig). Dies ermöglicht es UserInnen unterwegs per Smartphone mit Mathematica erstellte Dateien zu bearbeiten und zu speichern. Diese Variante hat den angenehmen Vorteil, dass, da sie mit dem Internet verbunden ist, sie stets aktualisiert wird und man so immer am neuesten Stand ist. Zudem kann man hier auch seine Dateien für andere bereitstellen, sodass diese sie im Bedarfsfall bearbeiten können.
Mathematica besitzt, dank jahrzehntelanger Entwicklung, momentan ungefähr 5000 Funktionen, welche kategorisiert sind und nahezu alle Bereiche abdecken.

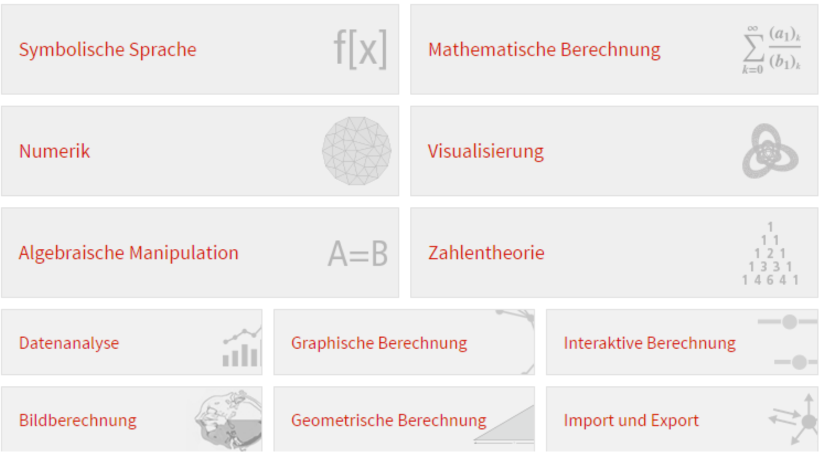


Abbildung 22: Bereiche, welche von Mathematica abgedeckt werden (aus Research 2016)

Für nähere Informationen sei ein Besuch von (Research 2016) zu empfehlen, welche auch eine Dokumentation von jeder Funktion inklusive Beispiel bereitstellt. Neben der Funktionen, besitzt Mathematica auch Algorithmen, mit welchen diverse Vorgehen schnell und effektiv erledigt werden können. Dank der eigens entwickelten Programmiersprache *Wolfram Language*, welche auf der gewohnten Wolfram-Syntax basiert, kann man als UserIn dieses Programms auch selbst Algorithmen entwickeln (für nähere Details hierzu, sei wieder auf (Research 2016) verwiesen). Zudem lassen sich mit den entsprechenden Befehlen (einer wird im Laufe dieser Arbeit noch vorgeführt) auch Graphiken zweiter und dritter Dimension anfertigen und vieles mehr.

Einführung in Mathematica

Mathematica ist grundsätzlich in Zellen aufgebaut. In solch eine Zelle werden in erster Linie mathematische Ausdrücke geschrieben, jedoch ist es auch möglich gewöhnliche Texte mit Titel, Abschnitten, Unterabschnitten etc. zu verfassen. Dafür ist es allerdings notwendig den *Style,* welcher standardmäßig *Wolfram Language* ist, der Zelle zu dementsprechenden zu verändern. Mathematica unterscheidet zwischen *Eingabezellen*, welche mit `I[n]`, wobei n den Namen (Nummer) der Zelle beschreibt, und *Ausgabezellen* (werden in diesem Programm mit `O[k]` bezeichnet, wobei k wieder für die Nummer der Zelle steht). Ein- beziehungsweise Ausgabezellen mit gleicher Nummer „gehören zusammen“, sprich die Ausgabe von `O[1]`, stammt von der Auswertung aus `In[1]`. Eine Zelle ausgewertet in Mathematica wird mit `Shift` und `Enter.` In Puncto Auswertung sei noch angemerkt, dass man ein Resultat (eine Auswertung) jederzeit übernehmen kann, ohne sie nochmals eingeben zu müssen. So ist es möglich mittels `%` das letzte Resultat zu übernehmen oder mit `% %` das vorletzte. Sollte sich das Ergebnis, welches weiterverarbeitet werden soll, vor den letzten beiden befinden, kann man es durch `% n, Out[n]` weiterverwenden. Au contraire steht in Mathematica die Syntax `In[n]` zur Neuauswertung zur Verfügung. Zu beachten bei dem Umgang dieses Programms ist außerdem, dass Mathematica zwischen Groß- und Kleinschreibung unterscheidet. So beginnen Funktionen und andere von der Software bereitgestellte Objekte stets mit Großbuchstaben (wie zum Beispiel `Sin[x]` oder `ln[x]`). Es empfiehlt sich daher selbst definierte Funktionen und Variablen mit kleinen Buchstaben beginnen zu lassen, damit es zu keinerlei Kollisionen kommt. Für eben diese benutzerdefinierten Funktionen und Variablen gibt es gewisse Regeln, welche strikt eingehalten werden müssen, da es sonst zu einer Fehlermeldung kommt:
Vom/Von der BenutzerIn selbst definierte Objekte müssen, wie bereits erwähnt mit einem Kleinbuchstaben beginnen und dürfen nur aus Buchstaben und Zahlen bestehen. Sonderzeichen wie ä, ü und dergleichen, sowie der Unterstich (_), welche in manchen Programmiersprachen zum Einsatz kommt, um zu formatieren ist ebenfalls nicht erlaubt.

Dass Symbole wie etwa ! oder $ nicht legitim sind, ist selbsterklärend. Ein weiterer wichtiger Punkt hierbei (und im gesamten Programm) sind die Klammern. Es gibt sie in Mathematica in vier verschiedenen Arten: (vergleiche hierzu Lorenzen 2014, S.26)
Eckige Klammern [ ] werden ausschließlich für Funktionsaufrufe verwendet (siehe beispielsweise `Sin[x]`). Runde Klammern ( ) werden für die Reihenfolge der Rechenoperationen herangezogen (zum Beispiel $4x(9-7)$). Für Listen werden in Mathematica geschweifte Klammern { } verwendet. Ein Beispiel hierfür wäre etwa {`Element1, Element2, …`}. Man kann hier auch schon erkennen, dass die einzelnen Elemente einer Liste mit einem Komma (,) voneinander getrennt werden. Es ist auch möglich Listen zu verschachteln, wie das folgende Exampel illustriert: `{ {1,2}, {3,4} }`. Zu guter Letzt gibt es noch die doppelten eckigen Klammern [[ ]], mit welchen man auf ein Element einer Liste zugreifen kann. Hat man beispielsweise eine Liste `l={2, 3, 5, 7}`, so kann man mit `l[[1]]` auf das erste Element der Liste l (also der 2) zugreifen (allgemein greift man mit der Syntax `Listenname[[Index]]` auf ein Element einer Liste zu). Hier gilt es zu verstehen, dass Listen in Mathematica, nicht wie in manchen Programmiersprachen gewohnt mit 0 zu zählen beginnen, sondern mit 1. Es ist auch möglich einen negativen Index anzugeben, dann beginnt der Zähler am Ende der Liste zu laufen und läuft rückwärts weiter.
Klammern sind nicht nur für eben genannte Fälle wichtig, sondern spielen auch bei Zellen eine nicht unwesentliche Rolle. Mathematica unter anderem verwendet sie um die Hierarchie dieser anzuzeigen. In diesem Zusammenhang haben Klammern noch eine Reihe anderer Bedeutungen auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird, für Interessierte sei hier etwa auf (Lorenzen 2014, S.30) verwiesen.
Eine aus anderen Programmiersprachen bekannte und für den/die NutzerIn erleichternde Eigenschaft von Mathematica ist die sogenannte *Syntaxhervorhebung.* Sie hilft richtig mit der Syntax des Programms umzugehen. So werden etwa fehlende Klammern (öffnende respektive schließende Klammer) violett dargestellt. Zeichenketten werden hingegen grau, unbekannte Symbole blau dargestellt. Fehler werden naturgemäß mit roter Farbe angezeigt. Da die Mathematik viele sogenannte Sonderzeichen (griechische Buchstaben …) verwendet, diese jedoch oftmals gar nicht oder nur äußerst umständlich über die „normale“ Tastatur eingebbar sind, ist es notwendig, dass die jeweilige Software diese in irgendeiner Art und Weise zur Verfügung stellt oder man sie mittels Befehl über die Tastatur eingeben kann. Mathematica tut dies. Sonderzeichen sind in diesem Programm über den Mathematikassistenten per Mausklick oder per Eingabe `Esc` Zeichenfolge `Esc`. Eine weitere äußert angenehme Fähigkeit von Mathematica ist die *Autovervollständigung.* Diese zeigt, sofern sie aktiviert ist, nach der Eingabe von nur einem Buchstaben alle möglichen

Befehle, welche eben mit diesem Buchstaben beginnen an. Je nach dem, welche Eingabe folgt, wird die Liste der Möglichkeiten dementsprechend eingegrenzt. Es ist aber auch möglich in dieser Liste der Vorschläge mit den Pfeiltasten, selbige zu durchforsten und den gewünschten Befehl mittel `Tab` oder `Enter` zu übernehmen. Jeder Befehl hat zudem noch rechter Hand ein kleines Buchsymbol, welche den/die UserIn zur Dokumentation des Befehls führt, wo die Syntax und Anwendung nachgelesen werden kann.
Mathematica besteht, wie bereits erwähnt aus Zellen. Diese Zellen beinhalten sogenannte *Objekte.* Diese können in Mathematica in verschiedensten Arten auftreten. So gibt es hier *atomare Objekte.* Das sind die kleinsten ihrer Art und können selbst nicht mehr unterteilt werden. Beispiele hierfür wären etwa Integer für ganze Zahlen, Ratio für rationale Zahlen oder Strings für Zeichenketten. Eine weitere Art von Objekten in Mathematica sind *Ausdrücke.* Ein Ausdruck hat die Gestalt `h[p1, p2, p3, ..]` und besteht aus einem *Kopf* (hier `h`) und *Teilen* (hier `p1, p2, p3, ..`), welche ihrerseits selbst Ausdrücke sein können (vergleiche Lorenzen 2014, S.37). Eben angesprochenem Kopf können verschiedene Datentypen von *Zahlen* zugewiesen werden. Mögliche Typen in Mathematica sind: `Integer` für ganze Zahlen, `Ratio`, das sind rationale Zahlen beziehungsweise Zahlen, *die als Bruch von ganzen Zahlen darstellbar* (siehe Lorenzen 2014, S.39) sind. Des Weiteren stehen noch `Real`, für reelle Zahlen, das sind in Mathematica alle Zahlen, die in Gleitkomma dargestellt werden können und `Complex` für komplexe Zahlen zu Verfügung.
Symbole sind weitere Objekte in Mathematica. Sie können bereits vordefinierte Objekte, wie `Pi`, `Sin` oder `Integrate` (Befehl für die Integration), zudem hat man als BenutzerIn die Möglichkeit selbst solche Objekte zu definieren. Nachdem die vorimplementierten Symbole mit Großbuchstaben beginnen, sollten für Selbsterstellte, kleine Buchstaben zu Beginn des Namens verwendet werden. Der Name selbst darf neben Buchstaben und Zahlen auch buchstabenähnliche Zeichen wie etwa @ oder ω enthalten, ein Symbol `symb@l`Ω `= 254` wäre demnach erlaubt (und funktioniert auch), es ist jedoch von solchen „Konstrukten“ abzuraten, da es unter Umständen zu Kompatibilitätsproblemen führen könnte.
Die im Zuge der Erklärungen der Klammern angesprochenen *Listen* sind ebenso Objekte in Mathematica, wie *Strings.* Das sind Zeichenketten, welche beliebige Zeichen, darunter auch Sonderzeichen, beinhalten können in Anführungszeichen (Achtung englische Anführungszeichen!) eingeschlossen werden. Bei der Eingabe muss zu Beginn und am Ende des Strings jeweils die `Esc-` Taste gedrückt werden. Ein Beispiel für einen String wäre etwa `‘‘`α `ist der erste Buchstabe des griechischen Alphabets ‘‘`. Nicht druckbaren oder besonderen Zeichen müssen ein Backslash vorangestellt werden.
Mathematica stellt nicht nur eine Vielzahl an Funktionen bereits, sondern ist auch in

der Lage die Grundrechnungsarten, sowie das Potenzieren durchzuführen. Mathematica verwendet hierbei die *Operatoren* `+, -, *, /` für die Addition, Subtraktion, Multiplikation, und Division, sowie `^` für das Potenzieren (es ist jedoch zu beachten, dass es sich bei diesen Zeichen lediglich um Abkürzungen handelt). Naturgemäß gilt auch hier: „Punkt vor Strich." Die Operatoren besitzen in Mathematica eine gewisse Priorität, das heißt sie werden in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt, was zur Folge hat, dass eine Operation vor einer anderen durchgeführt wird, wie eben die Potenzierung vor der Multiplikation/Division vor der Addition/Subtraktion. Der Befehl `Precedence[]` gibt Auskunft über die Priorität eines Operators. Des Weiteren ist der *Zuweisungsoperator* (`=`) in Mathematica von enormer Bedeutung. Dieser wertet einen Ausdruck auf der rechten Seite aus. `x = 6` ergibt `6` und in weiterer Folge `f = 6x 36.` Dieser Operator ist jedoch nicht mit dem `:=` zu verwechseln, welcher ein Objekt definiert und nicht sofort auswertet. Ebenfalls hilfreich kann der `//-` Operator sein. Er funktioniert ähnlich, wie das Pipe (/) in Unix. *Die Ausgabe eines Befehls wird zur Eingabe des nachfolgenden* (vergleiche Lorenzen 2014, S.45). Bedeutet nichts anderes, als dass Befehle mittels `//` am Ende einer Eingabe (noch vor der Auswertung) angehängt werden können. Ist ein probates Mittel, um beispielsweise Gleichungen zu vereinfachen (`//Simplfy`) oder nummerische Ergebnisse zu erhalten (`//N`). Analog hierzu steht der Präfix-Operator () zu Verfügung. Es gibt in Mathematica noch eine Reihe weiterer Operatoren, auf welche hier nicht näher eingegangen werden. Einen guten Überblick verschafft beispielsweise (Lorenzen 2014, S.47)

Zusätzlich zu den eben aufgezählten Objekten besitzt Mathematica noch eine Reihe an *Konstanten,* die nicht nur mathematische Gebiete abdecken. Das sind, wie aus der Mathematik bekannt, Variablen respektive Objekte, die bereits mit einem festen Wert versehen sind, welcher unveränderbar ist. Bekannte Konstanten, aus der Mathematik, wären etwa die Kreiszahl `Pi` (es ist auch möglich über den Mathematikassistenten das Symbol π anzuklicken, welches in weiterer Folge auch so aufscheint), die Eulersche Zahl `E` oder aus den naturwissenschaftlichen Gebiet `EarthMass` (Erdmasse) respektive die Lichtgeschwindigkeit `SpeedOfLight.`

Abschließend, da es zur Lösung des Problems von enormer Bedeutung ist, seien noch ein paar Befehle besprochen. Zunächst werden Gleichungen in Mathematica stets durch ein doppeltes Gleichheitszeichen (`==`) beschrieben und generell mit dem Befehl `Solve[Gleichung, Variable]` gelöst. Diesen Ausdruck kann man mit Hilfe von Mitgabe zweier Listen (eine für die Gleichungen und eine für die Variablen) auch zum Lösen von mehreren Gleichungen verwenden, wenngleich sich für solche Fälle `Eliminate[Gleichungsliste, Variablenliste]` besser eignet, da dieser, im Gegensatz zu `Solve[]`, die Variablen eliminiert. Zusätzlich können auch Befehle wie etwa `Expand[]`, `Simplify[]` oder `FullSimplify[]`, welche nicht angesprochen wurden, aber jederzeit in der umfangreichen Dokumentation von Mathematica nachgeschlagen werden können, und dergleichen auf Gleichungen angewandt werden. Neben `Solve[]` steht noch `NSolve[]` in Mathematica zur Verfügung, ein Befehl, welcher bei Gleichungen, vorzugsweise wenn Polynome vorkommen, versucht die Lösung nummerisch zu approximieren. Im Zuge von Gleichungen sollte auch das Ersetzen gennannt werden, welche mit Hilfe der Operatoren `/.` und `->` passiert. Hierbei gibt es die „magische" Regel `Ausdruck /. Variable -> Wert`, wobei der `->` - Operator festlegt, durch welchen `Wert`, die `Variable` **vorübergehend** ersetzt wird. Der Operator `/.` („Alles ersetzen Operator") sorgt dafür, dass alle Variablenvon `Ausdruck` auf der linken Seite ersetzt werden. Ein weiterer wichtiger Punkt, da er im Folgenden eine nicht unwesentliche Rolle spielen wird, ist die Integration. Der Befehl zum Integrieren in Mathematica lautet `Integrate[]`. Diesen gibt es je nach Bedarf in unterschiedlichen Formen. So berechnet `Integrate[Funktion, Variable]` das unbestimmte Integral von `Funktion` nach `Variable`. Benötigt man das Intergal zwischen zwei bestimmten Grenzen, muss man diese Mathematica mitteilen: Der Befehl dazu lautet `Integrate[Funktion, {Variable, untere Grenze, oberer Grenze}]`. (Vorsicht, die Variable muss gemeinsam mit den Grenzen als Liste übergeben werden!) Natürlich ist es auch möglich Mehrfachintegrale mit dieser Software zu berechnen. Hierfür muss man dem Befehl, die Variablen, nach welchen integriert werden soll mitgeben, was mit `Integrate[Funktion, {Variable1, untere Grenze1, obere Grenze1}, {Variable2, untere Grenze2, obere Grenze2},...]` passiert. Wie bei eben angesprochenen `Solve[]`, gibt es auch bei `Integrate[]` die Möglichkeit die Lösung nummerisch zu approximieren. Jener Befehl lautet `NIntegrate[]`.

Mathematica im Einsatz

Nachdem nun ein kleiner Einblick in Mathematica gewonnen wurde, kann sich nun dem Problem aus **??** gewidmet werden. Bekannter Maßen soll das Volumen eines Drehzylinders, welcher um die x-Achse rotiert, berechnet werden. Die Kurven, die das Flächenstück begrenzen lauten $k_1 : y^2 = 16(x-4), k_2 : y^2 = 8x$.
Zunächst müssen in Mathematica zwei Funktionen, sie werden $f(x)$ und $g(x)$ genannt, definiert werden.

```
In[9]:= f[x_] := Sqrt[16x - 64]

In[10]:= g[x_] := Sqrt[8x]
```

Abbildung 23: Die beiden Kurven, von welchen das Flächenstück begrenzt wird

Hier ist zu erkennen, dass die Funktionen mittels `:=` definiert wurden. Der Unterschied zum `=` besteht darin, dass beim herkömmlichen Zuweisungsoperator, der Ausdruck auf der rechten Seite unmittelbar nach dem Betätigen von `Shift` und `Enter` ausgewertet wird, noch bevor er der linken Seite zugewiesen wird. Würde man demnach die Funktionen mit `=` definieren, würde Mathematica fortan `f[x_]` beziehungsweise `g[x_]` als Synonym für `16x-64` respektive `8x` sehen und macht ein Ausrechnen unmöglich. Grund dafür ist, dass x zum Zeitpunkt der Zuweisung keinen Wert besitzt, aber von Mathematica ausgewertet wird und somit unverändert an `f[x_]` und `g[x_]` übergeben wird. Es empfiehlt sich daher stets Funktionen mittels `:=` zu definieren. Ein weiteres Problem, welches hier auftritt ist, dass die Funktionen jeden Ausdruck auswerten können sollten (also `f[3]`, `f[4]` und so weiter), dies aber bei `f[x] := ...` nicht möglich wäre, da eine Eingabe `f[3]` nicht mit dem Muster `f[x]` übereinstimmt. Für Probleme dieser Art gibt es in Mathematica sogenannte *Muster*. Das sind „Konstrukte", welche in gewisser Weise als Platzhalter für jede Art von Argument fungieren und es so ermöglichen Eingaben wie `f[4]` (korrekt) auswerten zu lassen. Solche Muster werden mit einem Unterstrich (_) gekennzeichnet und mit einem Namen versehen (in diesem Fall `x`). Nun kann Mathematica `f[x_]` und `g[x_]` tatsächlich jeden Wert für `x` übergeben. Selbst `f[hallo]` wäre möglich (ergäbe im Fall von `f[x_]`, `16hallo - 64`).
Nachdem die Funktionen erfolgreich definiert wurden, benötigt man nun die Schnittpunkte derselbigen. Dazu muss man bekannter Maßen die Funktionen gleichsetzen, das heißt $f(x) = g(x)$ berechnen. Dies geschieht in Mathematica mit dem oben besprochenen `Solve[]`- Befehl, welcher zur Lösung von Gleichungen verwendet werden kann.

```
In[11]:= NSolve[f[x] == g[x], x]

Out[11]= {{x -> 8.}}
```

Abbildung 24: Eine Möglichkeit zur Berechnung der Schnittpunkte

Die Gleichung ist in diesem Fall `f[x] == g[x]` und nach `x` soll diese aufgelöst werden. Wie auf dieser Abbildung ebenfalls erkennbar ist, lautet das Ergebnis dieser Berechnung

8. Dies ist die x-Koordinate des Schnittpunktes. Um die y-Koordinate zu bekommen, muss man das eben erhaltene x in eine der beiden Funktionen einsetzten. Da die Funktion $g(x)$ wesentlich „angenehmer“ erscheint, wird in diese eingesetzt. In Mathematica gibt es hierfür verschiedene Methoden, eine wäre sich $g(8)$ auszurechnen. Auf diese Weise wird auch hier vorgegangen

```
In[12]:= g[8]
Out[12]= 8
```

Abbildung 25: Eine Möglichkeit zur Berechnung des y-Wertes

Nun hat man die beiden y-Koordinaten, wobei nach den Überlegungen aus Kapitel 3, Abbildung 12 bloß der Wert -8 in Frage kommt. Das Volumen des durch Rotation um die x-Achse entstehenden Drehzylinders wurde in Kapitel 3 ebenfalls ausführlich erörtert und setzt sich demnach wie folgt zusammen:

$$V = \pi \left[\int_0^8 \left(g(x)^2 dx \right) - \int_4^8 \left(f(x)^2 dx \right) \right]$$

Hier ist allerdings zu beachten, dass die beiden Funktionen quadriert werden müssen, was jedoch auch aus den Überlegungen von Abbildung 12 hervorgeht. Da sich das Volumens aus zwei Integralen zusammensetzt, benötigt man für dessen Berechnung zweimal den `Integrate[]`-Befehl. Einmal integriert man $g(x)$ von 0 bis 8 und zieht danach $f(x)$ im Interval [4; 8] ab.

```
In[9]:= Pi * (Integrate[g[x]^2, {x, 0, 8}] - Integrate[f[x]^2, {x, 4, 8}])
         Kre···  integriere                   integriere
Out[9]= 128 π
```

Abbildung 26: So sieht die Berechnung des Volumens in Mathematica aus

Nach Betätigen von `Shift` und `Enter` erhält man das Ergebnis 128π.

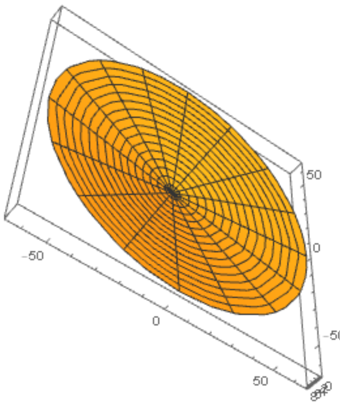
Natürlich lässt sich der Rotationskörper auch graphisch in Mathematica darstellen. Um eine Graphik erstellen zu können stehen in diesem Programm diverse Befehle zur Verfügung, wie etwa `Plot[]` für zweidimensionale Graphiken, `Plot3D[]` für dreidimensionale Visualisierungen, selbst parametrisierte Plots, das bedeutet Graphiken, von Funktionen, welche von einem Parameter abhängen (Befehle: `ParametricPlot` respektive

`ParametricPlot3D[]`) und einiges mehr ist mit dieser Software möglich. Zum Erstellen von Graphiken, welche Rotationskörper visualisieren sollen stehen unter anderem `SurfaceOfRevolution[]` oder der modernere Befehl `RevolutionPlot3D[]` zur Auswahl. Der `RevolutionPlot3D[]`-Befehl hat, in seiner einfachsten Form, die Gestalt `RevolutionPlot3D[Funktion,{ Variable, Anfang, Ende}]`, wobei `Anfang` und `Ende` den Ausschnitt, welcher geplottet werden soll, angeben.
Im vorliegenden Fall muss man demnach $g(x)^2 - f(x)^2$ rotieren lassen und das im Intervall $[0; 8]$.

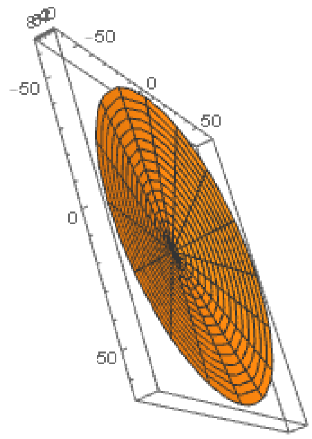
```
RevolutionPlot3D[g[x]^2 - f[x]^2, {x, 0, 8}, RevolutionAxis → {1, 0, 0}]
3D–Rotationsdarstellung                      Rotationsachse
```

Abbildung 27: So lautet der Befehl zur Visualisierung des Rotationskörpers in Mathematica

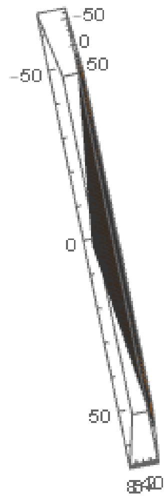
Das optionale Argument `RotationAxis` wird verwendet, wenn man den Körper um eine bestimmte Achse rotieren lassen möchte. Bei diesem Beispiel ist es bekanntlich die x-Achse, demnach {`1,0,0`} nach `RotationAxis`. Nach Auswertung des Befehls erscheint eine Graphik des Rotationskörpers, welchen man mit der Maus nahezu beliebig drehen kann.



(a) Eine Ansicht des Körpers



(b) Eine Ansicht des Körpers



(c) Eine Ansicht des Körpers

Abbildung 28: Abbildungen des Rotationskörpers in Mathematica

Mathematica didaktisch betrachtet

Mathematica ist auf den ersten Blick eine Software, bei welcher eher das Operieren im Vordergrund steht. Hierbei geht es fast ausschließlich darum, möglichst schnell ein Ergebnis zu einem mathematischen Problem zu erhalten. Mathematica lässt es kaum zu schöpferisch tätig zu sein, nach Gesetzmäßigkeiten zu suchen, Dinge zu Klassifizieren (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.18). Lediglich die Plots, die geometrischen Graphiken, geben, durch die Möglichkeit der Manipulation (`Manipulate[]`), ein wenig Spielraum, um hauptsächlich in geometrischen Belangen neues zu entdecken, Kontrastbeispiele zu finden. Dies kann, sofern es adäquat im Unterricht eingesetzt wird, eine Unterstützung sowohl für LehrerInnen, als auch für die SchülerInnen sein. Durch die Fähigkeit von Mathematica Visualisierungen in (fast) alle Richtungen bewegen zu können und dem Schieberegler, hat man die Möglichkeit Veränderungen von mathematischen Dingen, wie beispielsweise Funktionen oder Dezimalzahlen, in einem gewissen Intervall anzusehen und so eventuell Gesetzmäßigkeiten zu finden. Auch in der Arithmetik kann diese Software, ob ihrer Vielzahl an Funktionen und Befehlen zu einer großen Hilfe werden, wenngleich es oftmals bloß das Ergebnis präsentiert. Um einzelne Rechenschritte genauer einsehen zu können, besitzt Mathematica die sogenannte *Step by step Solution*, welche schrittweise Lösungen angibt und somit das Erklären der operativen Vorgänge doch erleichtern kann. Ein gewisser Nachteil dabei ist jedoch, dass Mathematica oftmals mehrere Rechenschritte in Einem durchführt oder implizit Rechenregeln anwendet, welche für manche nicht gleich ersichtbar sind. Nichtsdestotrotz kann aus eben genannten Gründen Mathematica auch wunderbar als Kontrollinstrument im Unterricht eingebaut werden, wenngleich einfachere Berechnungen doch per Hand gelingen sollten.Weiters, ist eben Mathematica beim kalkülhaften Arbeiten, beim Umgang mit Zeichen und Symbolen (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.19) nicht zuletzt auf Grund dessen Genauigkeit und vor allem Vielzahl an Funktionen, anderen CAS weit voraus. Mit Mathematica können SchülerInnen (und auch LehrerInnen) binnen kürzester Zeit komplexe mathematische Berechnungen durchführen und sich dadurch auf das Interpretieren von Lösungen konzentrieren. Allerdings bedarf es hierbei ein gewisses Grundwissen über Mathematica und den notwendigen Befehlen. Das Selbsterklärende ist bei dieser Software kaum vorhanden. Möchte man die Hilfe von Mathematica in den Unterricht einbauen, sprich mit SchülerInnen Grenzfälle ausloten respektive neues entdecken, muss einiges an Vorarbeit von Lehrerseite stattfinden. Das Argumentieren hingegen , welches laut (Weigand und Weth 2010) im Mathematikunterricht geschärft werden soll, ist in Mathematica gut möglich. Neben dem Operativen Arbeiten, dem selbständig produktiven Üben, welches durch die Komplexität der Software und dem Fehlen der spielerischen Note, nur bedingt möglich ist, ist das „Fragen stellen“, eine weitere schülerbezogene Leitlinie, auch gut durch Mathematica abgedeckt. Eben durch diesen mächtigen `Manipulate[]`-Befehl, dem Bewegen der Graphik und dem Plotten, in all seinen Varianten, kann man Fragen wie „Warum ist das so?“ oder „Was passiert, wenn...?“ auf den Grund gehen und so die Sachlage erkunden, was mit einem gezeichneten Tafelbild schwer möglich ist. Insbesondere kann auch das Ploten, das Anfertigen von zweidimensionalen (`Plot[]`) und dreidimensionalen (`Plot3D[]`) Graphiken und mehr, im Mathematikunterricht eingesetzt werden. Wenngleich der Befehl, insbesondere bei aufwendigeren Visualisierungen, komplex werden kann, bietet er mit seiner großen Anzahl an optionalen Argumenten, nicht nur im Bereich der Geometrie, eine mächtige Unterstützung, welche sofern richtig eingesetzt viel zum Verständnis der SchülerInnen beitragen kann. Analytische Geometrie, Kegelschnitte, Funktionen können mit Hilfe von Mathematica genau analysiert und interpretiert werden, Komponenten, welche im heutigen Mathematikunterricht immer mehr an Bedeutung gewinnen. Die *ikonsiche Form*, die Darstellung durch Bilder (ver-

gleiche Weigand und Weth 2010, S.36) ist für viele Lernenden eine wichtige Form der Darstellung in der Mathematik. Denn die Visualisierung, löst ein wenig die Mathematik aus ihrer Abstraktheit und bietet daher ein willkommenes Hilfsmittel in dieser Disziplin. Ein weiterer nicht unwesentlicher Punkt im Bezug auf Unterricht, dem selbstständigen Arbeiten, kann mit Mathematica durchaus nachgeholfen werden. Allerdings ist hier eine ausreichende Grundkenntnis der Software nötig und man sollte als Lehrender dabei als Ansprechperson dienen, insbesondere wenn es um Fehlermeldungen oder um unerwartete Ergebnisse bei Auswertungen geht. Nichtsdestotrotz durch die Möglichkeit auch Texte in Mathematica verfassen zu können (mit Überschriften, Unterüberschriften, etc.), hat man als LehrerIn die Möglichkeit ganze Arbeitsblätter und Merkblätter zu erstellen.
Alles in allen ist es, wie eben erörtert, schon möglich Mathematica adäquat im Mathematikunterricht einzusetzen. Nichtsdestotrotz ist diese Software eher für „höhere Gebilde“, sprich Universität und Hochschulen gedacht denn für den schulischen Gebrauch. Es benötigt im Endeffekt mehr Zeit (Erklärungen des Programms, der Befehle und so weiter), als es eine Hilfe leistet, respektive ist es ratsamer es, bis auf wenige Ausnahmen, bloß als LehrerIn zu verwenden, da die Komplexität doch recht hoch ist. Von SchülerInnenseite, sollte es mehr als Kontrollwerkzeug denn als Hilfsmittel zur Entdeckung von Neuem, zur Erschließung von Zusammenhängen oder Ausloten von Gesetzmäßigkeiten eingesetzt werden, wenngleich dies mit Mathematica schon möglich ist zu tun. Zudem fehlt auch die„spielerische Komponente“, welche für einen möglichen Einsatz im Unterricht doch eine wichtige Rolle spielt. Denn immerhin trägt eine solche doch zur Motivation bei SchülerInnen bei und erleichtert das Lernen um einiges. Mathematica sollte, wenn überhaupt eher in der Oberstufe zum Einsatz kommen, wenn es um komplexere Themen geht, bei welchen das Operieren, das Darstellen von Sachverhalten aufwendiger ist und ein simples Tafelbild nicht den gewünschten Effekt bringt. Abschließend ist erkennbar, dass es für den Mathematikunterricht adäquatere Computer Algebra Systeme als Mathematica gibt und man eher auf andere Hilfsmittel zurückgreifen sollte.

3.4 TI Voyage 200

Zu guter Letzt, soll das Beispiel aus Kapitel 3 mit Hilfe des *TI Voyage 200* gelöst werden. Der TI Voyage 200 ist ein Computer Algebra System aus dem Hause *Texas Instruments Inc.*, welches seinen Hauptsitz in Dallas, Bundesstaat Texas in den Vereinigten Staaten hat und als Topadresse in Sachen Taschenrechner und CAS gilt. Der TI Voyage 200 ist der Nachkomme des ebenfalls von TI stammenden TI-92 respektive TI-92 plus und wurde erstmals 2002 auf den Markt gebracht. Der Voyage ist in gewisser Weise ein kleiner, einfach zu bedienender Computer, welcher mit verschiedenen Applikationen (Kurzform Apps), hauptsächlich für den mathematischen Gebrauch ausgestattet ist. Er verfügt zudem über eine im, englischen Sprachraum übliche,*QWERTY-Tastatur* (das bedeutet man kann mit den ersten sechs Buchstaben der obersten Buchstabenreihe der Tastatur das Wort „QWERTY“ schreiben) und einer seitlich neben dem Display angebrachten *nummerischen Tastatur,* einer Tastatur, welche Ziffern (von 0 bis 9), Operationszeichen (Plus, Minus, Mal, Dividiert), sowie andere elementare respektive häufig gebrauchte mathematische Funktionen, wie beispielsweise die Winkelfunktionen (inklusive deren Umkehrfunktionen), Klammern (rund, eckig, geschwungen) und mehr. Darüber hinaus, gibt es „besondere“ Tasten, welche zusätzliche Belegungen, Menüs oder Navigatoren auswählbar machen. Eine davon ist etwa die `2nd-` Taste (eine blaue Taste), mit welche Zweitbelegungen der Tasten aktiviert werden. Dadurch können hauptsächlich weitere mathematische Belegungen, aber auch andere Optionen über die Tastatur eingegeben werden. Tastenbelegungen, welche durch `2nd` aktiviert werden, sind in blauer Schrift geschrieben (beispielsweise `sin`, `cos`, . . .). Eine weitere besondere Stellung nimmt die `Karo`-Taste (eine grüne Taste mit einem kleinen Deltoid in der Mitte) ein. Diese ermöglicht einerseits, ein zeitnahes Wechseln zwischen den wichtigsten Applikationen, andererseits können Eingaben bearbeitet, sprich ausgeschnitten, kopiert oder eingefügt werden. Belegungen, dieser Art sind, in grün geschrieben. Zu bedenken ist hierbei, dass stets `2nd/ Karo+ Taste` betätigt werden muss, um entsprechende Belegungen zu erreichen. Einstellungen können beim Voyage über die Taste `MODE` vorgenommen werden. Einstellen lassen sich unter anderem welche Art Ergebnisse oder Zahlen angezeigt werden sollen, welche Art von Graphiken angefertigt werden soll (Funktion, 3D, Parametric etc.), wie viel Kommastellen angezeigt werden sollen, in welcher Einheit Winkel berechnet werden (Degree, Radian oder Gradian), aber auch wie das selbst Display aussehen soll und dergleichen.

Der Voyage besitzt natürlich auch eine Reihe an mathematischen Applikationen, wie etwa ein CAS, (Name *Home*), welches mittels eigenen Befehlen eine Vielzahl an Opera-

tionen durchführen kann. Des Weiteren, gibt es eine eigene Anwendung um Funktionen und andere Graphen visualisieren zu können *(Graph)*. Zum Zeichnen von zweidimensionalen geometrischen Konstruktionen steht dem/der BenutzerIn das Programm *Cabri Geometry* zur Verfügung, aber auch finanztechnische Probleme können mit dem Voyage über *Finance* gelöst werden. Zusätzlich gibt es noch eigene Apps zur Berechnung von Nullstellen (dies kann natürlich auch über das CAS getan werden, allerdings kostet die Berechnung mit diesem Programm weniger Zeit) oder zum simultanen Lösen von Gleichungen *(Simultaneos Eqn Solver)*. Zudem ist es möglich den TI Voyage mit Applikationen zu erweitern. Hierfür stehen zahlreiche Programme auf der Homepage zum Download zur Verfügung, welche in weiterer Folge mittels der mitgelieferten Software „TI Connect" und einem Verbindungskabel auf das Gerät gespielt werden müssen.
Neben den mathematischen Programmen verfügt der Voyage, auch über einen einfachen *Text Editor,* mit dem Texte (farblos, ohne fetter, kursiver Schrift) verfasst werden können, über einen Editor zum Programmieren *(Programm Editor)* und einer Anwendung *Data/Matrix Editor* zur Datenverwaltung respektive Verarbeitung.

Einführung in den TI Voyage 200

Nachdem der TI Voyage 200 in der Werkseinstellung schon einige Programme besitzt und durch eine Vielzahl an Applikationen erweiterbar ist, beschränkt sich diese Einführung auf die wichtigsten Anwendungen, welche wohl am meisten zum Einsatz kommen. Das Einsatzgebiet des Voyage ist freilich weit und breit, daher werden hier jene Apps vorgestellt, welche für das Demonstrationsbeispiel von Bedeutung sind. Doch bevor diese näher erklärt werden, noch ein paar einführende Worte über die Grundeinstellungen des Voyage. Diese können, wie bereits eingangs erwähnt, über die Taste `MODE` erreicht werden. In diesem dreiseitigen Menü können mathematische Einstellungen, Einstellungen den Bildschirm betreffend und sprachliche Belange nach Wunsch eingestellt werden. Beispielsweise kann angegeben werden, wie der Voyage Graphen zu zeichnen hat (Funktion, 3D,...), wie viel Kommastellen angezeigt werden sollen, in welcher Einheit bei Winkeln gerechnet werden soll (Radiant, Grad, Gradiant). Vorallem jedoch kann angegeben werden, ob und wenn ja wie, das heißt welche Apps dann verwendet werden, gesplittet werden soll. Diese Einstellung ist auf der zweiten Seite, welche über `F2` erreichbar ist, und unter der Option `Splitt Screen` einzustellen. Hierbei kann zwischen `FULL,TOP-BOTTON` und `LEFT-RIGHT` gewählt werden. Letztgenannte Möglichkeiten splitten eben das Display entsprechend auf. Zudem kann, sofern aufgeteilt wird, via `Split App 1` und `Split App 2` angegeben werden, welche Anwendungen am Display angezeigt werden sollen.

Standardmäßig sind es die Home- und Graphik-App.
Eine weitere wichtige Einstellung ist jene, wie der Voyage mit Ergebnissen umgehen soll. Der TI Voyage ist in der Lage Ergebnisse exakt `(EXACT)`, annähernd `(APPROXIMATE)` oder passend der „Situation" `(AUTO)` anzugeben. Es empfiehlt sich die voreingestellte Option `AUTO` zu belassen, da hier der Voyage in der Regel Ergebnisse exakt, heißt „nicht berechnet", sondern als exakten Ausdruck ($\frac{1}{2}, \frac{2x-3}{x+1}, \ldots$) ausgibt. Wird ein „genaueres" Ergebnis (eine Dezimalzahl) gewünscht, so ist dies über die Tastenkombination `Karo`+`APPROX` (oberhalb der `ENTER`-Taste) möglich. Es sollten prinzipiell die Werkseinstellungen unberührt und nur in Notfällen (kurzfristig) verändert werden.
Nachdem die wichtigsten Grundeinstellungen erörtert wurden, können nun die relevantesten Apps erklärt werden. Zu aller Erst sei die *Home-App* erwähnt. Sie ist im Prinzip ein Computer Algebra System, welches sowohl für herkömmliche Berechnungen, als auch zum symbolischen Rechnen herangezogen werden kann. Die Oberfläche dieses Programms ist relativ simpel aufgebaut. Die oberste Zeile beinhaltet diverse Menüs, welche über die `F1-F6`-Tasten erreicht werden können. Die Auswahlmöglichkeiten im jeweiligen Menü sind mit Ziffern versehen, durch welche man die „ansprechen" kann. Das hat zur Folge, dass man Menüpunkte durch das bloße Betätigen zweier Tasten (der jeweiligen F Taste- und der Ziffer) auswählen kann. Möchte man beispielsweise den gesamten Inhalt des Ausgabefensters löschen (diese Option befindet sich im 1. Menü an 8. Stelle), so muss man `F1` und anschließend `8` drücken. Die Menüs beinhalten die am meist gebrauchten Befehle, sowie Optionen zur allgemeinen Verwaltung des CAS, wie etwa das eben erklärte Löschen des Inhaltes des Ausgabefensters, Kopieren oder Einfügen. Den meisten Platz nimmt das *Ausgabefenster* ein, jener Bereich, der Berechnungen und Ergebnisse anzeigt. Dies geschieht in chronologischer Reihenfolge, was bedeutet, dass der zuerst durch das CAS verarbeitete Befehl über seinen Nachfolger steht. Heißt gibt man etwa `solve(x+2=0,x)` ein (und schließt diese Eingabe durch `Enter` ab) und danach `expand`$(a+b)^2$, erscheint zuerst `solve(x+2=0,x)` (inklusive Ergebnis) und kann erst danach `expand`$(a+b)^2$ eingeben. Ergebnisse werden, in der Regel am rechten Rand des Displays angezeigt und können, so wie angezeigte Befehle auch, mit den Pfeil-Tasten ausgewählt und per `Enter` beispielsweise automatisch in die *Eingabezeile*, das ist jener Bereich, welcher zur Kommunikation mit dem CAS zur Verfügung steht und sich unterhalb des Ausgabefensters befindet, kopiert werden.
Der Voyage verfügt als CAS natürlich auch über eine Vielzahl an Befehlen, welche (fast) alle mathematischen Dinge abdecken. Die Befehle sind zumeist auch simple aufgebaut. Die Namen der Befehle besitzen beim Voyage in der Regel kleine Anfangsbuchstaben und beginnen respektive enden jeweils mit runder Klammer, und werden durch das

Betätigen von `Enter` abgeschlossen. Ein Befehl hat demnach grundlegend stets die Gestalt `befehl(Ausdruck),` wenngleich jeder Befehl eine gewisse Syntax verfolgt. So muss etwa beim Lösen einer Gleichung mit `solve(),` nicht nur die Gleichung, sondern auch die Variable, nach welcher aufgelöst werden soll, angegeben werden, zum Beispiel `solve(x+2=0,x)`. Hier wird nach dem Ausdruck (`x+2=0`), auch die Variable (`x`) mitgegeben und durch ein Komma (,) vom Ausdruck getrennt. Befehle werden zumeist über die Eingabezeile dem CAS übergeben. Zumeist muss man hierfür den Befehl in die Eingabezeile eingeben, es gibt jedoch eine Reihe solcher, welche entweder über die Menüs oder, sofern ein Befehl eine solche besitzt, über eine Taste eingetragen werden. Zudem verfügt der Voyage über einen Katalog all seiner Befehle. Dieser ist über `2nd`+`CATALOG` (oberhalb der `2` der nummerischen Tastatur) aufgerufen werden. Er beinhaltest ausnahmslos jeden Befehl, welchen der Voyage mächtig ist und kann dort auch durch `Enter` ausgewählt werden, sodass er in der Eingabezeile erscheint.
Mit diesem Hilfsmittel ist es natürlich auch möglich Ergebnisse, oder gar ganze Ausdrücke in Variablen zu speichern. Hierfür muss nach dem Ausdruck einfach die `STO`-Taste gedrückt (STO steht für „Storrage“, zu deutsch Speicher) und danach der Name der Variable eingegeben werden. Möchte man beispielsweise `2x+3` speichern, so erfolgt das dergestalt: `2x+3`+`STO`+`x`+ `Enter` (hier wird der Ausdruck in eine Variable namens x gespeichert). Um die gespeicherte Variable mit dem darin enthaltenen Wert wieder aufrufen zu können, muss `2nd`+ `RCL` („Recall“) gedrückt werden. Nun erscheint ein kleines Dialogfenster, welches dem/die BenutzerIn auffordert respektive fragt, welche Variable man aus dem Speicher holen möchte. Hier muss man den Namen der gewünschten Variable angeben (in diesem Fall x) und `Enter` betätigen. Solch gespeicherte Variablen können später wieder über das Verwaltungsmenü, welches via `2nd`+ `VARLINK` zu erreichen ist gelöscht werden.
Abschließend seien noch, die für das zu lösende Problem notwendigen mathematischen Dinge, kurz erklärt. Gleichungen zu lösen ist mit dem Voyage relativ einfach und simpel, wenngleich es hierfür mehrere Methoden gibt. Für einfache Gleichungen genügt der `solve-` Befehl, welchem man die Gleichung und die Unbekannte mitgibt. Hat man demnach eine Gleichung $2x + 3 = 0$ zu lösen, so lautet der Befehl: `solve(2x+3=0,x).` Dieser Befehl funktioniert natürlich auch für Gleichungen höheren Grades. Für Gleichungen, bei welchen die rechte Seite eine 0 aufweist, kann auch der Befehl `zeros(Ausdruck, Variable)`, der, an und für sich zur Berechnung von Nullstellen gedacht ist, verwendet werden. Das `solve()` ist aber auch in der Lage Gleichungssysteme zu lösen. In diesem Fall werden die einzelnen Gleichungen mittels `AND` (logisches Und) miteinander verknüpft und die unbekannten Variablen via Liste (Listen werden im Voyage mit geschwungenen

Klammern ({ }) angegeben) mitgegeben, zum Beispiel `solve(2x+3y = 5 AND x+7y = 8, {x,y})`. Neben diesem Befehl steht auch noch, hauptsächlich für Gleichungen vom Grad größer 1, das `factor(Ausdruck, Variable)`, welcher eigentlich einen Ausdruck faktorisiert, zur Verfügung. Würde man also $x^2 - 6x + 5 = 2$ mit `factor()` lösen, so bekäme man `(x-5)(x+1)=2` vom Voyage als Lösung präsentiert (die Lösungen wären daher -1 und 5). Der Voyage ist aber auch in der Lage Äquivalenzumformungen durchzuführen. Für dieses Vorgehen, muss der Ausdruck in runde Klammern gesetzt und die gewünschte Umformung anschließend angeben werden. Auf diese Weise (und in Kombination mit anderen Befehlen) können ebenfalls Lösungen von Gleichung ermittelt werden. Es gäbe noch eine Reihe anderer Möglichkeiten auf die hier nicht eingegangen wird. Das Integrieren stellt mit diesem Gerät auch keine große Hürde da. Das Intergal kann im Voyage auf verschiedene Arten eingegeben werden. Zum einen steht ein Integralzeichen ($\int$), welches entweder über `2nd`+ `7` über die Tastatur, oder über das Menü (`F3`+ `2`) erreichbar ist, zur Verfügung. Zudem ist es auch möglich den Befehlsnamen `integrate()` in die Eingabezeile einzutippen. Nichtsdestotrotz, besitzt der Integral-Befehl die Gestalt `integrate(Funktion, Variable,untere Grenze, obere Grenze)`. Für das unbestimmte Integral werden die Grenzen weggelassen.

Um Funktionen am TI Voyage visualisieren zu können, werden neben dem *Graphik-App* auch der *Y-Editor* benötigt. Dieser wird in erster Linie verwendet um Funktionen, Plots oder Daten zu definieren. In diesem Programm definierte Objekte können in den anderen Applikationen des Voyage verwendet werden, da sie von ihm wie Variablen gespeichert und als auch solche behandelt werden. Die Eingabe erfolgt wie gewohnt über die Eingabezeile im unteren Bereich des Fensters und geschieht analog zur jener beim Home-App. Neben dem Definieren, können hier noch zusätzliche Einstellungen bezüglich Visualisierung (insbesondere für Funktionen und Plots) vorgenommen werden, wie etwa die Art und Weise, wie eine Funktion graphisch dargestellt werden soll (Linie, Punkte; Quadrate,...) oder wie das Graphik-Tool an die Funktion heranzoomen soll („Zoom-Box“, „ZoomIn“, ...). Ebenso können Objekte allgemein verwaltet werden, beispielsweise der Gestalt, dass Objekte „an- und ausgeschaltet“ werden können, was darüber „entscheidet“, ob diese in anderen Apps verwendet werden können oder eben nicht. Des Weiteren, können Funktionen und Plots gelöscht werden, ohne sie einzeln auswählen zu müssen.

Das *Graphik-App,* ist, wie bereits mehrfach erwähnt, zum Visualisieren von Funktionen gedacht. Dieser Editor ist nicht nur in der Lage „gewöhnliche“ Funktionen anzufertigen, sondern auch dreidimensionale, parametrisierte Funktionen, sowie Differentialgleichungen und Folgen bildlich darzustellen. Zudem können in diesem Programm Funktionen auch „untersucht“ werden, sprich Nullstellen, Minimum, Maximum und mehr graphisch ermittelt werden (zu finden unter `F5 Math`). Funktionen, welche in diesem Programm gezeichnet werden sollen, müssen entweder im Y-App oder im CAS als Funktion definiert werden. Im Y-Editor erfolgt dies wie eben beschrieben, indem die Funktion einfach an einer (noch) freien Stelle über die Eingabezeile eingegeben wird. Welche Funktion gezeichnet werden soll, wird im Y-Programm durch die Häkchen links neben den Funktionen bestimmt. Diese werden wiederum durch das Betätigen der `F4`-Taste gesetzt oder entfernt. Sind mehrere Häkchen zeitgleich gesetzt, werden dementsprechend mehrere Funktionen (auf einmal) vom Graphik-Tool visualisiert. Zusätzlich kann mit Hilfe der *Window-App* der Graphik-Editor eingestellt werden. Das Window-Tool ist im Grunde zur Einstellung des Graphik-Editors gedacht. Durch die Angabe von x- respektive y-Werten (`xmin.`, `xmax.` beziehungsweise `ymin.` und `ymax.`) ist es möglich zu bestimmen, welcher Ausschnitt des Koordinatensystems im Graphik-Fenster zu sehen sein soll. Zudem können auch die Achsen mittels Setzen von `xscl.` und `yscl.` die Koordinatenachsen nach Wunsch skaliert werden. Beim Graphik-App selbst kann außerdem noch mit Hilfe der `Trace` an der Funktion entlang gegangen und so zu jedem x-Wert der y-Wert graphisch erforscht werden.

Der TI Voyage 200 im Einsatz

Nach einer kurzen Einführung des CAS wird nun das Volumen des Rotationskörpers, welches von den beiden Kurven $k_1 : y^2 = 16(x-4)$ beziehungsweise $k_2 : y^2 = 8x$ eingeschlossen wird, berechnet. Auch hier gibt es wieder verschiedene Möglichkeiten dies zu tun. Dahingehend handelt es sich bei folgendem Weg, lediglich um einen von vielen. Nichtsdestotrotz sollte man sich nochmals Abbildung 12 in Erinnerung gerufen. Zunächst müssen zwei Funktionen definiert werden, beziehungsweise in jeweils einer Variable gespeichert werden. Als Namen können beispielsweise `f1(x)` und `f2(x)` gewählt werden. Somit ist im Voyage `sqrt(16x-64)->f1(x)`, respektive `sqrt(8x)->f2(x)` einzugeben. Das `(x)` sorgt nur dafür, dass der Voyage die Ausdrücke nun als Funktionen auffasst und sie dadurch mit Hilfe der Graphik-Anwendung gezeichnet werden können. Eben besagte Applikation kann bei diesem Beispiel natürlich parallel mitgeführt werden, um stets eine graphische Unterstützung zu bekommen. Alternativ, können die beiden Kurven im Y-App eingetragen werden und sind so automatisch als Funktionen definiert, können somit auch in anderen Programmen verwendet werden. Allerdings wird der Name dann durch den Y-Editor vorgegeben. Trägt man sie beispielsweise bei `y1(x)` respektive `y2(x)`, ein heißen sie eben y1(x) und y2(x).

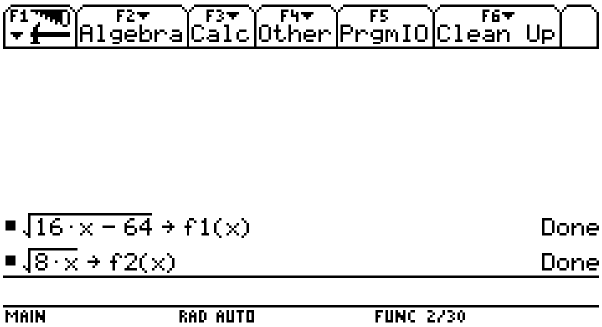


Abbildung 29: Die beiden Kurven, von welchen das Flächenstück begrenzt wird

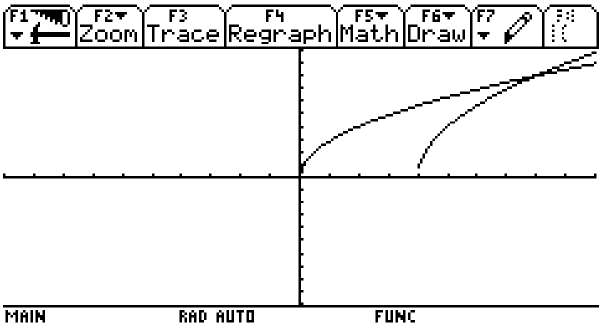


Abbildung 30: So sehen die beiden Funktionen im Voyage aus

Nun berechnet man, mit Hilfe von `solve()`, (zu erreichen über `F2+1`) den Schnittpunkt der beiden Funktionen.

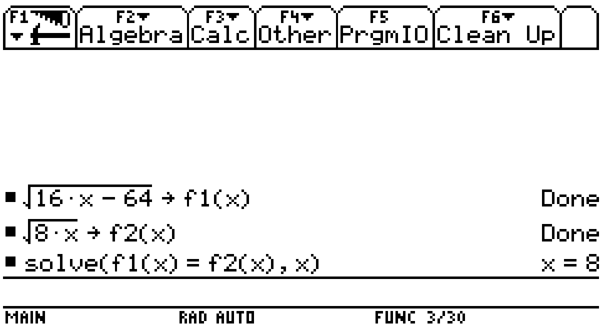


Abbildung 31: Eine Möglichkeit zur Berechnung der Schnittpunkte im Voyage

Die Syntax ist klar. In diesem Fall ist die zu lösende Gleichung `f1(x)=f2(x)` und nach `x` soll aufgelöst werden. Der x-Wert des Schnittpunkts liegt also bei 8. Alternativ kann man, sofern man die Funktionen visualisiert hat, in der Grahik-Anwendung mit dem Befehl `intersection`, den Schnittpunkt graphisch ermitteln.
Um den y-Wert zu erhalten, muss in eine der beiden Funktionen eingesetzt werden. Der Einfachheit halber wird in f2 eingesetzt: `sqrt(8*8)`, woraus 8 als Ergebnis folgt.

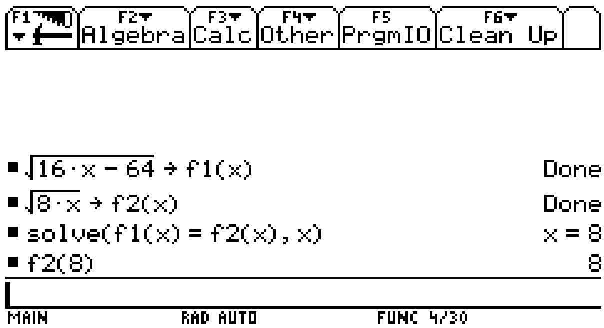


Abbildung 32: Eine Möglichkeit zur Berechnung des y-Wertes des Schnittpunktes im TI Voyage200

Das Volumen des Rotationskörpers errechnet sich, wie in Kapitel 3 überlegt, folgender Maßen:

$$V = \pi \left[\int_0^8 \left(g(x)^2 dx \right) - \int_4^8 \left(f(x)^2 dx \right) \right]$$

Im TI Voyage 200 ist dies mittels `integrate()`-Befehls oder des $\int$-Symbols, welches mittels `2nd`+`7` erreichbar ist, zu erledigen.

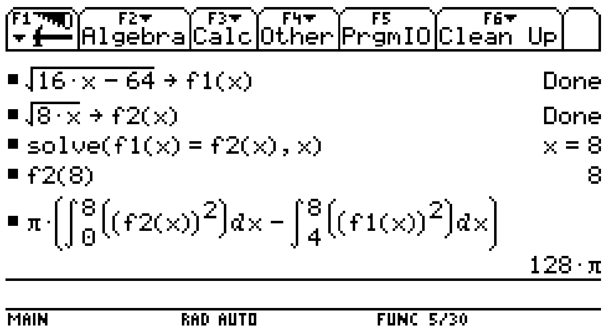


Abbildung 33: So wird das Volumen des Rotationskörpers im TI Voyage200 berechnet

Hierbei sind die zu integrierenden Funktionen `f2` respektive `f1`, die Grenzen `0,8` beziehungsweise `4,8` und die Integrationsvariable jeweils `x`. Das Ergebnis lautet 128π, was nach Abschnitt 3.2 und Abschnitt 3.3 der Wahrheit entspricht.

Der TI Voyage 200 didaktisch betrachtet

Der TI Voyage kann auf Grund seiner verschiedenen Apps und der Tatsache, dass er erweiterbar ist, zu einem machtvollen Verbündeten im Mathematikunterricht werden. Hinzu kommt eine relativ einfache Handhabung, was eine geringe Einarbeitungszeit zur

Folge hat. Der Aufbau respektive die Software selbst, ist klar strukturiert und gibt dadurch eine leichtere Orientierung für BenutzerInnen. Die Tastatur ist in mehrere Bereiche geteilt, herkömmliche Schreibtastatur mit Buchstaben, einen mathematischen Bereich mit Ziffern und den gebräuchlichsten mathematischen Funktionen und Verwaltung des TI Voyage, und mit mehren Belegungen versehen, welche wiederum durch einfache Tastenkombinationen aktiviert werden können (`2nd/Karo`+ `Taste`). Auch die Applikationen sind klar aufgebaut. Im oberen Bereich finden sich jeweils Menüs zur Verwaltung und schnelleren Arbeiten, der übrige Bereich ist zumeist eine Arbeitsoberfläche mit integrierter Eingabezeile im unteren Abschnitt des Programms. Zudem können eben angesprochene Menüpunkte durch bestimmte Tastenkombinationen binnen Sekunden erreicht werden, was das Arbeiten zusätzlich enorm erleichtert.
Nichtsdestotrotz, haben die Applikationen des Voyage auch aus mathematischer Sicht ihre Vorteile. Das CAS beispielsweise kann dank seiner umfangreichen Auswahl an Befehlen nahezu alle in der Schulmathematik vorkommenden Probleme binnen kürzester Zeit lösen und entbindet damit sowohl LehrerInnen, als SchülerInnen von operativen Aufgaben, da komplexe Berechnungen an den Voyage delegiert werden können. Selbst symbolisches Rechnen kann mit Hilfe dieses Mittels durchgeführt und erklärt werden, was zur Folge hat, dass der Fokus auf andere wichtigere Aspekte des Mathematikunterrichts gelegt werden kann. Dem Interpretieren, Analysieren von Ergebnissen wird dadurch mehr Raum geschenkt. Anmerkungen/Fragen wie „Hier passiert das...“, „Hier sieht man, dass...“ oder „Was bedeutet das für das vorliegende Problem?“ können dadurch intensiver besprochen werden. Operieren heißt aber auch auf Fragen, wie „Was passiert, wenn...?“ einzugehen, was bedeutet, experimentell vorzugehen, die Grenzen ausloten. Das wird nicht zuletzt, auch dank der anderen verschiedenen Anwendungen neben dem CAS, welche für spezielle Probleme (Nullstellen berechnen, Lösungen von Gleichungen finden, Graphik etc.) gedacht sind, möglich und unterstützt. An dieser Stelle seien, die in der Einleitung unerwähnt gebliebenen *Polinomial Root Finder* und *Numeric Solver* angemerkt. Mit Ersterem ist esmöglich Nullstellen eines Polynoms zu ermitteln. Hierbei können sowohl der Grad, als auch die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ angegeben und von der Applikation berechnet werden. Bei der Eingabe der Koeffizienten stehen Experimente Tür und Tor offen. Hierbei, kann eben „nachgeschaut“ werden, was passiert in Hinblick auf das Ergebnis, wenn die Koeffizienten diese und jene Gestalt annehmen oder wann sich eine nicht reelle Lösung ergibt. Jedoch auch beim „Numeric Solver“ ist in ähnlicher Weise ein Experimentieren möglich, was die Lösungen von Gleichungen betrifft. Nichtsdestotrotz, lässt sich dank des *Stats/List Editors* auch im Bereich der Statistik einiges ausprobieren, nicht zuletzt auch auf Grund dessen Fähigkeit, Plots

erstellen zu können respektive Daten zu sammeln, an Hand dessen vom Graphik-Tool Plots erstellt werden können.
Mit dem TI Voyage kann, durch seine Vielfältigkeit und einfachen Handhabung, auch selbsttätig im Unterricht gearbeitet werden. Wobei zu bedenken ist, dass *Selbstständigkeit, kritisches Reflektieren der eigenen Tätigkeit, Motivation durch eigenen Erfolg entwickeln, sowie ein Lernen aus eigenen Fehlern ermöglichen*(vergleiche Weigand und Weth 2010, S.33) bedeuten soll. Für die LehrerInnenrolle hat dies zur Folge, dass er/sie nur mehr unterstützend, wie etwa bei Problemen mit den Befehlen/Programmen oder Unklarheiten bei Ergebnissen oder in den Angaben, in Erscheinung treten braucht. SchülerInnen hingegen können sich Stoffgebiete selbst erarbeiten, was den Lerneffekt deutlich erhöht im Vergleich zu frontalen Erklärungen. Auch das miteinander Zusammenarbeiten, selbsttätiges Lernen kann durchaus in kleinen Gruppen so zusätzlich gefördert werden. Daneben kann, dank der guten Möglichkeiten der Visualisierung und verschiedenen Applikationen, wovon jede ein anderes Ziel verfolgt und vor allem schnell Ergebnisse liefert, mit dem TI Voyage auch produktiv geübt werden. Unglücklicherweise, liefert der Voyage bloß fertige Ergebnisse und keine Rechenwege, was zur Folge hat, dass Lernende ausschließlich an Hand der Ergebnisse schließen können, dass erhaltene Resultate falsch sind, aber keinen Rechenweg gezeigt bekommen. Dennoch können eben an Ergebnissen auch Schemata erkannt, eingeübt und in einem anderen mathematischen Kontext umgesetzt werden. Des Weiteren, werden SchülerInnen vom algorithmischen Rechnen entlastet und können sich dem Interpretieren von Ergebnissen, dem Planen von Rechnungen widmen, was ebenfalls einen wichtigen Faktor beim produktiven Üben ausmacht. *Der Schüler löst sich von seiner Rolle als Rechner und erfährt eine Beförderung zum Anweiser und Planer von Rechnungen* (siehe Weigand und Weth 2010, S.37), mathematische Objekte können in Zusammenhänge gebracht werden. Bei all diesen Vorzügen, wird allerdings Gefahr gelaufen, dass das Operieren völlig in den Hintergrund tritt, obwohl es ebenfalls ein elementarer Bestandteil der Mathematik und des Mathematikunterrichts ist, sein sollte.
Durch die oben angesprochene Entlastung den Kalkül betreffend, und der Möglichkeit der graphischen Darstellung können gewisse Stoffgebiete (wie zum Beispiel Gleichungen respektive Ungleichungen) früher durchgenommen werden, da man sie mit Hilfe des Voyage einfach lösen lassen kann. Das hat wiederum zur Folge, dass man sich der fundamentalen Ideen des Mathematikunterrichts annehmen kann, dass die Mathematik beziehungsweise der Unterricht in der Mathematik nicht aus isolierten Teilen besteht,sondern, dass die einzelnen Komponenten zusammenhängen, in einem Kontext zueinander stehen. Eben diese Herstellung von Beziehungen wird durch die verschiedenen Programme

des Voyage erst ermöglicht. Durch die Möglichkeit einfach zwischen den Programmen hin und her zu wechseln, kann ein Bezug zwischen dem symbolischen, nummerischen Rechnen und der graphischen Ebene hergestellt werden (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.30), Sachverhalte einfacher mathematisiert werden.
Der Voyage hilft jedoch auch dank der Möglichkeit den Bildschirm splitten zu können und dadurch Graphik und Rechner nebeneinander verwenden zu können, Zusammenhänge schneller zu erfassen und so ein mathematisches Netzwerk aufzubauen, auf welches jederzeit zugegriffen und erweitert werden kann.
Wissen kann ohne Probleme adäquat visualisiert, Wissen genauso ausgelagert werden. Eben solche Aspekte sind von enormer Bedeutung, denn die bestärken das Denken und in weiterer Folge das Lernen, was wiederum zu einer besseren Leistung führen kann. Jedoch hilft es Lehrenden auch bei deren Erklärungen und Interpretationen. Konstruktionen und Skizzen müssen nicht mehr mühselig an der Tafel angefertigt werden, was eine enorme Zeitersparnis bedeutet, aber vor allem auch genauere, bessere Visualisierungen, was wiederum ein besseres Lernen und Aneignen der Stoffinhalte für SchülerInnen heißen kann. Denn der Voyage ist nicht nur in der Lage „einfache“ Funktionen oder Konstruktionen anzufertigen, sondern auch dreidimensionale Gebilde, Folgen, Parameter- und Polardarstellungen und Differentialgleichungen darzustellen. Vor allem die Möglichkeit 3D-Graphiken und Folgen binnen Sekunden zeichnen zu können erleichtert den Umgang mit großen Teilen des Oberstufenstoffes ungemein. Hierbei können zusätzliche Optionen angegeben werden, um die Graphik „anders aussehen zu lassen“, bestimmte Bereiche anzeigen zu lassen (Stichwort: Window Editor), was die Graphik-Komponente auch eine noch höhere Stufe stellen lässt. Denn diese Eigenschaft lässt ein besseres Untersuchen/Betrachten von Funktionen zu und hat zur Folge, dass konkrete Probleme an Hand der graphischen Unterstützung produktiver und effektiver angesprochen werden können. Abschließend, kann resümiert werden, dass der Voyage, einen adäquaten Einsatz vorausgesetzt, zu einem machtvollen Verbündeten für LehrerInnen und SchülerInnen im Mathematikunterricht werden kann.

4 Wer ist der Beste? - Der Vergleich

Nachdem nun drei Computer Algebra Systeme vorgestellt und didaktisch analysiert wurden, wäre es jetzt interessant zu erfahren, wo jeweils die Stärken beziehungsweise Schwächen im Vergleich zueinander sind. Eines ist klar, die mathematischen Probleme aus dem Unterricht lassen sich mit allen drei lösen, doch nicht jedes CAS ist auf Grund seines Schwerpunktes für den schulischen Gebrauch zu 100 Prozent geeignet. Denn wie bereits bei den didaktischen Analysen erwähnt, soll ein solches Hilfsmittel nicht bloß die algorithmische, rechnerische Arbeit erleichtern, sondern soll auch bei theoretischen Akten, wie dem Interpretieren von Ergebnissen, dem Erstellen von Beziehungen zwischen den einzelnen Teilen und vielen mehr (vergleiche Tabelle 1) eine Unterstützung bieten. Zudem sollten noch, um eine adäquate Einbettung in den Mathematikunterricht und ein produktives Arbeiten zu gewährleisten, Benutzerfreundlichkeit und eine unkomplizierte Bedienbarkeit im Vordergrund stehen. Darunter fallen Dinge wie das Design der Benutzeroberfläche, aber auch der Umgang mit der Software an sich. „Was muss getan werden, um das Gewünschte zu bekommen?“, sprich welche Befehle müssen eingegeben werden, spielen ebenso eine gewichtige Rolle bei einem CAS, welches als Unterstützung im Unterricht Einzug finden soll. Im Folgenden werden die wichtigsten didaktischen Aspekte bezüglich des Einsatzes im Mathematikunterricht von GeoGebra, Mathematica und dem TI Voyage 200 verglichen, um am Ende entscheiden zu können, welches Hilfsmittel von diesen dreien nun am besten für den schulischen Gebrauch sei.

Aufbau und Benutzerfreundlichkeit

In Hinblick auf Benutzerfreundlichkeit sind alle vorgestellten Objekte relativ gut. Die Benutzeroberflächen verfolgen einen klar strukturierten Aufbau, welcher sich wie ein roter Faden durch das ganze Programm zieht und dafür sorgt, dass für NutzerInnen eindeutig erkennbar ist, wo sich welche Elemente befinden. Sowohl das in Abschnitt 3.2 vorgestellte GeoGebra, als auch der TI Voyage 200 und Mathematica aus Abschnitt 3.3 haben einen klar definierten „Arbeitsbereich“, welcher aus einer Eingabezeile, gekoppelt mit einem Ausgabefenster besteht (wie etwa bei GeoGebra oder beim Voyage), aber auch nur einen Bereich beinhalten kann, der dann auch gleichzeitig eine Eingabe verarbeitet (siehe Mathematica). Nichtsdestotrotz sind bei allen Programmen auch„Karteien“ vorhanden, zumeist im oberen Bereich des Fensters, welche einerseits für organisatorische Dinge, aber auch zusätzliche Hilfen und in manchen Fällen Programme beinhalten und so schnell aufgerufen werden können. Eine kleine Besonderheit weisen hierbei vielleicht GeoGebra und der TI Voyage auf. Bei diesen Hilfsmitteln ist es dem/der NutzerIn möglich den Arbeitsbereich zu splitten, um mehrere Programme (Voyage) respektive Ansichten (GeoGebra) gleichzeitig aktiv haben zu können, welche für unterschiedliche Dinge (Visualisierungen, spezielle Berechnungen und dergleichen) gedacht sind. Mathematica besitzt diese Fähigkeit, ob seiner Kompaktheit alles in einem zu haben nicht. Unter ansprechender Benutzerfreundlichkeit fällt neben einer guten Struktur der Software auch eine einfache Bedienbarkeit. Das bedeutet unter anderem, Eingaben sollten unkompliziert stattfinden können, die verschiedenen Komponenten sollten ohne große Umwege erreichbar sein und vor allem die Einarbeitungszeit sollte so kurz wie möglich sein, um einen zügigen Einbau in den Unterricht, sowie in weiterer Folge ein produktives Arbeiten zu ermöglichen. Hier schneidet GeoGebra beziehungsweise der Voyage besser ab als Mathematica. Die Befehle der erstgenannten besitzen syntaktisch betrachtet eine einfachere Gestalt. Insbesondere GeoGebra gibt zusätzlich an welche Eingabe es nun erwartet (Gleichung, Variable, Funktion etc.), was für NutzerInnen eine erhebliche Erleichterung darstellt. Ein weiterer positiver Aspekt in diesem Zusammenhang ist, dass es kaum optionale Befehle aufweist und genau darin seine Einfachheit begründet ist. Im Gegenzug sind eine Vielzahl an Befehlen in mehrfacher Form vorhanden, heißt gleicher Befehl mit verschiedenen Argumenten, um alle mathematischen Probleme abzudecken. Ein Beispiel hierfür etwa der in Abschnitt 3.2 verwendete Befehl `Schneide[]`, welchen es wie gesehen in den verschiedensten Variationen gibt, genau wie das `integrate()` beim Voyage. Mathematica hingegen weist Befehle meist einfach auf (in Hinblick auf die Anzahl), diese auf Grund der Tatsache, dass alle mathematischen Probleme, und Mathematica deckt nicht nur jene der Schulmathematik ab, behandelt werden müssen und so die Befehle bald eine ziemlich komplexe Gestalt bekommen können. Zudem geht, wie bereits angesprochen, die Kompetenz von Mathematica weit über das Schulische hinaus, was die Handhabung dadurch etwas schwieriger machen lässt, als bei den anderen Vergleichsobjekten.

Um gewissenhaft entscheiden zu können, welches Hilfsmittel besser für den Mathematikunterricht geeignet ist, genügt es nicht, bloß die Bedienbarkeit zu analysieren. Mindestens in gleicher Weise müssen die didaktischen Aspekte durchleuchtet werden. Welche

Punkte hierbei zu berücksichtigen sind wurde in Kapitel 2 ausführlichst erörtert und die Hilfsmittel werden im Folgenden dahingehend auch analysiert und verglichen.

An der Grundidee orientieren und Beziehungen herstellen

Zunächst darf ein Mathematikunterricht nicht aus kontextlosen Teilen bestehen, sondern soll ein großes Netzwerk ergeben, in welchem SchülerInnen Beziehungen aufbauen müssen. Um dies bewerkstelligen zu können, müssen sich Lernende an der *fundamentalen Idee orientieren* (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.28), das bedeutet an Begriffe und Aktivitäten orientieren. Dahingehend, sollen technologische Hilfsmittel SchülerInnen von kalkülhaften und algorithmischen Belangen entlasten, damit sich diese in weiterer Folge auf die im Fokus stehenden Aspekte konzentrieren können. Des Weiteren, ist es dadurch auch möglich Stoffgebiete, wie etwa das Lösen von Gleichungen oder das Ermitteln besonderer Punkte von Funktionen (Nullstellen, Extremwerte,...) früher als vorgegeben zu behandeln. Diesen Punkt decken sowohl GeoGebra, als auch Mathematica und der TI Voyage gut ab. Alle drei besitzen, wie beim Beispiel gesehen, neben ihren ausgereiften CAS auch Zusatzprogrammen zur Visualisierung. Vor allem GeoGebra sticht hier besonders heraus. Durch den vorhandenen Zug- und Spurmodus bekommt man als LehrerIn sehr gute Möglichkeiten auf einer einfachen Basis Ideen zu entwickeln und deren Gültigkeit zu überprüfen. Denn der Zugmodus bietet eben eine Möglichkeit Punkte von Konstruktionen zu verschieben und so aus anderen Blickwinkeln zu betrachten. Dadurch können präzisere Aussagen getroffen werden, als bei einem herkömmlichen Tafelbild. Der zusätzlich vorhandene Spurmodus gibt an wie Punkte verschoben worden sind. Dadurch können Veränderungen an der Konstruktion nachempfunden werden und Zusammenhänge erklärt, neue Sachverhalte entdeckt werden. Dennoch tragen bei GeoGebra sowohl das CAS als auch die verschiedenen Ansichten zu dieser Idee bei. GeoGebra liefert nicht nur schnelle Ergebnisse sondern lässt auf Grund seiner einfachen Bedienbarkeit durchaus auch Gruppenarbeiten zu, in welchen Lernende im Team selbständig Beziehungen zwischen den mathematischen Gebieten herstellen können beziehungsweise neue Ideen entwickeln können. Dies ist ebenso mit der Software Mathematica möglich. Dieses bietet unter anderem die Möglichkeit eines Schiebereglers (`Manipulate[]`), mit welchem verschiedenste Objekte in mehreren Parametern verändert werden können. Dadurch können ebenso, wie in GeoGebra, Überlegungen auf einer breiten Basis angestellt und überprüft werden. Die zusätzliche Angabe von Farben und Füllungen, Schrittbreite erleichtern dieses Vorhaben ungemein. Dieses `Manipulate[]` gibt sowohl dem/der LehrerIn, als auch den SchülerInnen eine ansehnliche Möglichkeit Zusammenhänge zwischen den einzelnen Teilen zu erkennen und zu verstehen, denn neben Funktionen können durchaus auch Zahlen und arithmetische Ausdrücke manipuliert werden und ist dadurch überall im Unterricht einsetzbar. Neben diesem mächtigen `Manipulate[]`, steht in Mathematica noch das `Plot[]` in seinen verschiedensten Variationen, welches insbesondere im dreidimensionalen Bereich einen hervorragenden Dienst leistet. Diese graphischen Anfertigungen können ebenfalls bewegt werden. Dies ist im Gegensatz zu GeoGebra, nur als Ganzes möglich, dafür können Plots in nahezu jede Richtung gedreht und gewendet werden, was besonders in der analytischen Geometrie eine sehr gute Basis bildet, um Ideen zu entwickeln oder Beziehungen herzustellen. Neben diesen beiden speziellen Fähigkeiten, sorgen natürlich auch die enorme Anzahl an verschiedenen arithmetischen und nummerischen Befehle dafür, dass gewisse Stoffgebiete schon früher als im Lehrplan vorgesehen durchgenommen und besprochen werden können, da Mathematica die SchülerInnen von kalkülhaften Aufgaben beinahe völlig entbindet, was zur Folge hat, dass als Lehrender mehr Zeit auf die Theorie gelegt werden kann. Selbiges gilt auch für den TI Voyage 200. Auch er besitzt, wenn auch nicht im Ausmaß von Mathematica, Befehle zum operativen Lösen mathematischer Probleme. Hinzukommen hierbei auch noch zusätzliche Programme, welche für spezielle Themen vorgesehen sind, wie etwa das Berechnen von Nullstellen, aber auch zum Anfertigen von Funktionsgraphen und ein spezielles Programm für Konstruktionen, ähnlich der Graphik-Ansicht von GeoGebra. Die beiden letzten genannten sorgen dafür, dass auch mit dem Voyage als Hilfsmittel Überlegungen angestellt werden können. Ein Grund dafür sind eben neben dem CAS, das Graphik-Tool, mit welchem Funktionen ausgezeichnet besprochen werden können, nicht zuletzt, da mit diesem Tool auch „besondere“ Punkte (Nullstellen, Extremwerte, etc.) eingezeichnet, Funktionen geschnitten werden und Graphen vergrößert werden können. Dadurch bekommt man als LehrerIn, aber auch als SchülerIn eine passable Grundlage für Überlegungen, Experimente, ohne mühselig Tafelbilder anfertigen zu müssen, welche lange nicht diese Genauigkeit besitzen. Außerdem kann mit diesem Programm, auf Grund dessen, dass der Bildschirm des Voyage gesplittet werden kann, parallel zum CAS geführt werden, sodass, ähnlich wie im Zusammenspiel von CAS und Graphik-Ansicht in GeoGebra, eine gewisse Gegenüberstellung zwischen Operation und Visualisierung stattfinden. Dies unterstützt bei Überlegungen zusätzlich, weil man als NutzerIn die Möglichkeit hat zu beobachten, welche Auswirkungen Berechnungen auf Graphen haben. Neben diesem Tool, gibt es am Voyage noch *Cabri-Geometry*, ein Werkzeug zum Anfertigen zweidimensionaler Konstruktionen. Dieses Programm hat ähnliche Vorzüge, wie die (zweidimensionale) Graphik-Ansicht in GeoGebra. Es können genauso Überlegungen angestellt wie beim Pendant von GeoGebra. Hier existiert allerdings kein Zug- oder

Spurmodus, dennoch können hier Konstruktionen bewegt werden, was aber kaum zum besseren Verständnis beiträgt, denn dafür gedacht ist, größere Konstruktionen, komplett ins Bild zu rücken.
Beziehungen zwischen den einzelnen Stoffgebieten der Mathematik herzustellen, bedeutet sich ein Netzwerk aufzubauen, welches jederzeit erweitert werden kann. Dafür ist jedoch eine solide Basis notwendig, auf welche aufgebaut werden kann. Nichtsdestotrotz ist es ebenso Aufgabe des Mathematikunterrichts eine Beziehung der Elemente zur Umwelt herzustellen, denn dadurch fällt es Lernenden leichter innermathematische Beziehungen zu verstehen und es wird eine gewisse „Sinnhaftigkeit“ der Mathematik aufgezeigt. Wie dies mit Hilfe von Technologien unterstützt werden kann, ist bei der Argumentation zu den fundamentalen Ideen des Mathematikunterrichts bereits erörtert worden. Eben durch das Zusammenspiel von nummerischem respektive symbolischem Rechnen, welches bei allen drei Hilfsmitteln gegeben ist, oder durch die parallele Nutzung verschiedener Programme (GeoGebra, TI Voyage 200) können Beziehungen zwischen den einzelnen Gebieten hergestellt werden. Beispielsweise können dadurch Verknüpfungen zwischen nummerischen und graphischen Lösungen von Gleichungssystemen oder der Berechnung interessanter Punkte bei Funktionen und deren Graphen erstellt werden. Daneben besitzen diese Softwaren auch Zusatzprogramme (Tabellen-Ansicht in GeoGebra, Cell-Sheet beim TI Voyage 200) zur Verarbeitung einer größeren Menge von Daten. Dadurch können realitätsnahe Beispiele im Unterricht gebracht werden und an Hand dieser deren Wichtigkeit im Alltag aufgezeigt werden. Das gibt eine Erleichterung beim Berstellen von Beziehungen, da man hier einen realen Fall vor sich hat, den man als Bezug hernehmen kann. Insbesondere bekommt man hier praktisch per Mausklick interessante Werte,wie etwa Erwartungswert, Varianz, Mittelwert und dergleichen.

Lernen Fragen zu stellen und operativ Arbeiten

Bei einem Vergleich von technischen Hilfsmitteln für den Mathematikunterricht, genügt es nicht bloß inhaltsbezogene, das heißt sich am Stoffinhalt orientierende Punkte zu begutachten, sondern auch zu durchleuchten, welche Punkte SchülerInnen im Unterricht tun können beziehungsweise sollen. Einer davon ist, dass jene das Wissen aufnehmen, lernen sollen Fragen zu stellen. Denn Begriffe dürfen keine leeren, anschauungslose Objekte sein, sondern sollen als Antworten auf Fragen, als Lösungen von Problemen erfahren werden. Insbesondere sollen sie als Ausgangspunkt für neue Probleme gefunden werden (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.31). Zudem soll Mathematik nicht als „fertige Ware verkauft werden", sondern vielmehr soll sie durch Experimente entdeckt werden. Dazu sollten technische Hilfsmittel eine Möglichkeiten bieten heuristisch arbeiten zu können, welche im Falle von GeoGebra auch vorhanden sind. Der oben angesprochene Zugmodus, auch in Kombination mit dem Spurmodus, kann eben für Experimente, zum „Ausprobieren" verwendet werden. Damit können Grenzfälle ausgelotet und Fragen wie „Was passiert wenn...?" oder „Gilt dieser Satz immer noch, wenn...?" auf den Grund gegangen werden. Mit diesem mächtigen Werkzeug können Lernende auch selbst Neues erarbeiten und mathematische Aussagen auf ihre Richtigkeit prüfen, nicht zuletzt da durch das Bewegen einzelner (nicht festen) Punkten. Diese Argumente haben natürlich auch im dreidimensionalen Bereich (3D-Ansicht) ihre Gültigkeit und können dort völlig analog angewandt werden. GeoGebra kann jedoch nicht nur in der Geometrie heuristisch eingesetzt werden. Das hervorragend ausgestattete CAS bietet zudem Möglichkeiten auch in arithmetischen Belangen experimentell vorzugehen. Auch hier ist es möglich, durch die Eingabe verschiedener Werte in den Befehlen, neue Gegebenheiten zu entdecken, mögliche Szenarien „auszuprobieren", weiterführende Fragen zu beantworten. Eine wichtige Rolle hierbei spielt wiederum die Graphik-Ansicht, welche mit dem CAS verknüpft ist und (sofern möglich) Berechnungen des CAS graphisch darstellt. Durch diese Vorgehensweise seitens GeoGebra bekommt man eine anschauliche Visualisierung und somit ein Bild des Sachverhalts vor Augen, welches man als LehrerIn aber auch als SchülerIn für weiterführende Fragen heranziehen kann. Des Weiteren, können auch andere Ansichten eingesetzt werden, insbesondere der Wahrscheinlichkeitsrechner, welcher die gängigsten Verteilungen und stochastischen Tests mächtig ist und diese zusätzlich graphisch darstellen kann. Hierbei müssen lediglich die Parameter, von welchen die jeweilige Verteilung abhängig ist bekannt sein, um mit diesem Instrument Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können. Auch hier werden SchülerInnen von rechnerischen Arbeiten entlastet und können ihren Fokus ganz der Theorie, dem Experimentieren widmen. Durch die ansehnliche Visualisierung, welche errechnete Wahrscheinlichkeiten farblich hinterlegt, bekommt man als Lernender eine zusätzliche Hilfeleistung um mathematische Sachverhalte zu erarbeiten. Die Vorzüge des Wahrscheinlichkeitsrechners können sowohl von LehrerInnen als Unterstützung für gemeinsame Überlegungen genutzt werden, als auch von SchülerInnen um in Gruppen- oder Einzelarbeiten Stoffgebiete zu erarbeiten. Neben GeoGebra kann auch mit Mathematica die Mathematik als Antwort auf Fragen erfahren werden. Auch bei diesem Aspekt kann das mächtige `Manipulate[]` beziehungsweise `Plot[]` (in allen vorhandenen Varianten) verwendet werden. Mit Hilfe deren Eigenschaften respektive Fähigkeiten können Fragen wie „Was passiert wenn...?" oder „Gilt dieser Satz immer noch, wenn...?" auf den Grund gegangen werden und so weite Teile des Stoffes entweder

selbstständig, in Gruppen oder mit der Lehrkraft in Union erarbeitet werden und brauchen nicht als „essfertig serviert" werden. Die Fertigkeiten des `Manipulate[]` können dabei auch außerhalb geometrischer Bereiche genutzt werden, hingegen ist das `Plot[]` ausschließlich für Visualisierungen genutzt werden kann. Aber auch eine Kombination aus Beidem bietet ein mächtiges Werkzeug, um für mathematische Belange, insbesondere bei funktionalen Themen genutzt werden, um sich Begriffe, Gesetzmäßigkeiten zu erarbeiten. Hinzukommt, wie bei den anderen Vergleichsobjekten, dass die Lernenden von rechnerischen Arbeiten entbunden werden und dadurch erst die Möglichkeit respektive Zeit bekommen sich neue Stoffinhalte zu erarbeiten. Nichtsdestotrotz können auch mit dem TI Voyage dank seiner verschiedenen Programmen Lehrinhalte erarbeitet werden. Wichtige Rollen neben den Programmen spielen hierbei, auch die Fähigkeit des Voyage das Display splitten zu können und somit mit zwei Applikationen gleichzeitig (beispielsweise Graphik und CAS) arbeiten zu können. Die Eigenschaften welche für ein Selbsterarbeiten des Stoffes, sowohl von Lehrerinnen als auch von SchülerInnen ausgenutzt werden können, wurden bei der Erörterung der fundamentalen Idee des Mathematikunterrichts bereits besprochen und sind auch in diesem Punkt bedenkenlos anwendbar.
Ein weiterer wichtiger Begriff im Mathematikunterricht stellt das „operative Arbeiten" dar. Der Terminus „operieren" geht in diesem Zusammenhang auf Jean Piaget (1896-1980) und seiner Erkenntnistheorie zurück, in welcher er sagt, dass sich die Intelligenz des Menschen in Etappen entwickelt. In Bezug auf die Mathematik im Unterricht bedeutet „operieren" zum einen den Umgang mit Symbolen, Graphiken, Diagrammen und anderen geometrischen Konstruktionen, andererseits das Verinnerlichen, das permanente Üben der Stoffinhalte, sowie das Verbalisieren der Handlungen. Ebenso die Suche nach alternativen Lösungswegen, das Variieren von Größen, die auf den Zusammenhang keine Auswirkungen haben (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.33) von enormer Bedeutung. Der Stoff wird durch vielfältiges Operieren angeeignet. GeoGebra ermöglicht ein solches. Seine verschiedenen Ansichten, welche teilweise miteinander verknüpft sind (wie zum Beispiel CAS und Graphik-Ansicht), sorgen dafür, dass Stoffgebiete auf verschiedenste Arten und Weisen erlernt werden können. Da man zu Rechengängen, nach Möglichkeit eine Visualisierung bekommt, kann man Dinge wie Gleichungssysteme, Integrationsaufgaben und ähnliches einerseits graphisch, andererseits auch durch Rechnen (Operieren) im Unterricht erarbeiten. Selbiges gilt für stochastische Gebiete mit dem Wahrscheinlichkeitsrechner. Genauso tragen die Graphik-Ansichten (zwei-und dreidimensional) große Teile bei. Denn operieren schließt auch den Umgang mit Konstruktionen ein, welche mit diesen Tools erarbeitet, aufgebaut und verinnerlicht werden können. Ein bisschen anders verhält es sich bei Mathematica. Dieses hat durch seine Vielzahl an Befehlen,

seine Vorzüge, was das finden von mehreren verschiedenen Lösungswege betrifft. Probleme können in der Mathematik verschieden rechnerisch gelöst werden, was für den Gebrauch dieser Software heißt verschiedene Befehle zu verwenden, Größen zu variieren (`Manipulate[]`). Allerdings fehlt hier ein wenig das Zusammenspiel von Rechnen und Graphik. Es müssen immer wieder extra Plots angefertigt werden um eine Visualisierung zu erhalten. Da geht in gewisser Weise der Zusammenhang zwischen Rechengang und Graphik verloren. Nichtsdestotrotz, können auch mit diesem Hilfsmittel Begriffe auf verschiedene Arten und Weisen eingeführt und aufgebaut werden. Zudem kann Mathematica auf Grund seiner „Step by step-Solution" auch zum Verinnerlichen von Rechenabläufen herangezogen werden. Das `Plot[]`, meist in Verbindung mit `Manipulate[]` kann auf Grund seiner Mächtigkeit und Vielfältigkeit (Arten und optionale Befehle) auch zum operativen Arbeiten verwendet werden, da man auch hier alternative Lösungswege suchen und herleiten kann. Der TI Voyage ist in diesem Punkt eine „Mischung" aus GeoGebra und Mathematica. Einerseits kann man bei diesem Hilfsmittel zwei Applikationen parallel geöffnet haben und so beispielsweise CAS und Graphik miteinander kombinieren und Probleme mit verschiedenen Befehlen lösen. Zusätzlich kann man, mit dem Graphikprogramm und Cabri-Geometrie verschiedene Lösungswege andenken und besprechen und so lernen mit Graphiken und anderen Darstellungsformen umzugehen und Stoffinhalte zu verinnerlichen. Allerdings muss man dem CAS extra, mit dem Befehl `Graph()` mitteilen, dass man nun eine Visualisierung haben möchte (und vorher den Ausdruck dementsprechend als Funktion definieren muss), was das Arbeiten ein wenig umständlicher als mit GeoGebra, aber angenehmer als Mathematica macht.

Selbsttätig lernen, produktiv üben und wiederholen

Neben dem operativen Arbeiten, soll im Mathematikunterricht auch eine gewisse Selbstständigkeit vorhanden sein beziehungsweise trainiert werden. Selbstständiges Arbeiten soll jedoch *eine geplante zielorientierte Aktivität sein, welche Freiräume für das Denken und Handeln hinsichtlich Planen, Ausführen und Kontrollieren von Aktivitäten voraussetzt.* (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.34). Zu Bedenken ist hierbei allerdings, dass Selbstständiges Arbeiten nicht ohne Vorwissen sinnvoll geschehen kann. Im Hinblick auf technische Hilfsmittel spielt bei diesem Aspekt nicht nur dessen Fähigkeiten eine Rolle, sondern auch die eingangs erwähnte Benutzerfreundlichkeit. Dabei schneidet GeoGebra hervorragend ab. Durch seinen selbsterklärenden Aufbau und seine verschiedenen Ansichten können SchülerInnen egal ob in Gruppen oder einzeln arbeiten. Bei den Graphik-

Ansichten können, nicht zuletzt auf Grund der einfachen Bedienbarkeit, Konstruktionen schnell, einfach und vor allem ohne fremde Hilfe erstellt werden, Stoffinhalte verinnerlicht, teilweise sogar neue Inhalte selbst erarbeitet werden. Aber auch das CAS oder der Wahrscheinlichkeitsrechner lassen ein, nicht zuletzt auf Grund der Tatsache, dass hier Kalkül mit Visualisierung verknüpft wird, eigenständiges Arbeiten zu. Auch hier können durch geschickt gestellte Arbeitsaufträge Stoffgebiete geübt und Lernende dazu gebracht werden neue Begriffe zu erarbeiten. Zusätzlich steht in diesem Programm die Möglichkeit eines Schiebereglers zur Verfügung, ähnlich dem `Manipulate[]` in Mathematica, durch welche Konstruktionen in einer bestimmten Weise verändert werden können. Dies eröffnet SchülerInnen eine weitere Möglichkeit, insbesondere in geometrischen Belangen Sachverhalte zu überprüfen, Dinge gezielt zu experimentieren, Lösungen zu deuten. Dadurch können auch ganze „Animationen", ganze Arbeitsblätter erstellt werden. Insgesamt hat GeoGebra im Vergleich zu Mathematica und dem Voyage eine gewisse spielerische Note, welche für ein produktives eigenständiges Arbeiten eine wesentliche Rolle spielt. Trotz dieses Kritikpunktes lässt auch Mathematica ein selbsttätiges Arbeiten zu. Durch seine Vielzahl an Befehlen und Möglichkeiten der Darstellungen können Ergebnisse reflektiert und das eigene Vorgehen analysiert werden. Zudem können, nicht zuletzt auf Grund der „Step by step - Solution", Rechenwege nachvollzogen und so unter Umständen aus eigenen Fehlern gelernt werden. Dies ist ein enormer Vorteil gegenüber GeoGebra und dem Voyage, welche zumeist bloß die fertigen Lösungen präsentieren und das Vorgehen dem/der NutzerIn oft verborgen bleibt. Des Weiteren, besitzt Mathematica noch, das in diesem Vergleich bereits mehrmals angesprochene `Manipulate[]`, womit sich ebenfalls hervorragend eigenständig Arbeiten lässt, da mit Hilfe dieses Befehls arithmetische Ausdrücke, Graphiken verändert werden und dadurch genau so Sachverhalte, Ergebnisse reflektiert, gedeutet und Experimente durchgeführt werden können. Wie bereits im Abschnitt 3.3 erwähnt, können in Mathematica nicht nur mathematische Probleme gelöst werden, sondern auch „normaler" Text mit Überschriften Unterüberschriften und dergleichen verfasst werden. Das gibt dem/der LehrerIn die Möglichkeit, sowie in GeoGebra ganze Arbeitsblätter für Gruppen- oder Einzelarbeiten zu erstellen, welche dann auch mit diesem Hilfsmittel zu lösen sind. Anders hingegen ist hier der TI Voyage. Mit diesem lassen sich keine Arbeitsblätter erstellen, jedoch kann auch mit ihm durchaus produktiv selbstständig gearbeitet werden. Seine einfache Bedienbarkeit, welche in etwa jener von GeoGebra entspricht, und seine große Anzahl an verschiedenen Programmen, für spezielle Probleme sorgen dafür, dass SchülerInnen (fast) ohne fremde Hilfe Stoffinhalte erlernen beziehungsweise erarbeiten können. Zudem kann, wie bereits mehrfach erwähnt, das Display gesplittet und so parallel, sei es mit dem CAS, dem Programm zum Finden von Nullstellen oder anderen, ähnlich wie in GeoGebra, gearbeitet werden. Einen weiteren wichtigen Punkt welche Technologie im Mathematikunterricht erfüllen soll, ist das produktive Üben. Schließlich sollen Stoffinhalten dauerhaft vorhanden bleiben und in ähnlichen oder gar neuen Situationen angewandt werden können. GeoGebra bietet eben durch seine Vielzahl an verschiedenen Ansichten hervorragende Möglichkeiten zum produktiven Üben. Mit den Graphik-Ansichten (sowohl zwei- als auch dreidimensional) bieten sich nicht nur bei geometrischen Stoffgebieten Möglichkeiten der Übung, sondernes leistet auch auf Grund der Tatsache, dass es mit dem CAS respektive auch mit der Eingabezeile verknüpft ist, in anderen Belangen herausragende Hilfe. Durch die Kombination von Rechnung und Bild können insbesondere Funktionen und Terme sehr gut eingeübt werden, da man gleichzeitig ein Bild zum Ergebnis erhält und durch selbiges eine genauere Vorstellung bekommt. Gleiches gilt natürlich auch bei stochastischen Inhalten (Stichwort Wahrscheinlichkeitsrechner), wo GeoGebra ebenfalls zum Kalkül ein adäquates Bild liefert. Visualisierungen spielen eben eine wichtige Rolle beim Verinnerlichen des Lehrstoffes und sollten daher unbedingt bei technischen Hilfsmitteln vorhanden sein. GeoGebra bietet bei seiner Graphik-Ansicht auch Möglichkeiten Konstruktionsvorgänge zu festigen. Durch die vielen Bausteine (bei beiden Ansichten) können Lernende binnen kurzer Zeit mehrere Konstruktionen anfertigen und zudem dadurch, dass falsche Vorgehensweisen einfach rückgängig gemacht werden können, richtige Schemata schneller eingeübt werden können. Was bei GeoGebra leider oft fehlt ist der Lösungsweg. bei Berechnungen, welcher für ein produktives Üben ebenfalls von enormer Bedeutung wären. Anders ist hier Mathematica mit seiner „Step by step - Solution“. Hier wird SchülerInnen sehr wohl ein Lösungsweg präsentiert, welcher vielleicht in manchen (seltenen) Fällen auf den ersten Blick nicht immer nachvollziehbar ist, aber immerhin gibt es ihn. Auch beim Aspekt des produktiven Üben muss das `Manipulate[]` und `Plot[]` ins Spiel gebracht werden. Diese tragen ihren Teil nicht nur beim Experimentieren, beim Überprüfen von Sachverhalten, sondern auch beim Verinnerlichen, beim Festigen von Rechenvorgängen von Zusammenhängen und dergleichen bei. Das `Manipulate[]` kann durch die Fähigkeit angegebene Parameter in einem vorgegebenen Bereich verändern zu können verwendet werden, beispielsweise von einem Fall auf andere zu schließen und so Schemata erkennbar zu machen (zum Beispiel auspotenzieren von Binomen). Das `Plot[]` ist ein mächtiges Werkzeug in Mathematica, kann viele Inhalte graphisch darstellen, ein Konstruieren, wie in GeoGebra oder auch beim TI Voyage ist jedoch nicht möglich, sodass hier auch keine Konstruktionsvorgänge geübt werden. Wieder anders ist hier der TI Voyage. Mit diesem ist es sehr wohl möglich (zweidimensionale) Konstruktionen anzufertigen. Das Vorgehen ist ähnlich wie jenes in GeoGebra und SchülerInnen können damit ebenfalls Vorgänge einüben, da es ähnliche Vorzüge, wie das Pendant von GeoGebra besitzt. Mit Hilfe des CAS können Berechnungen binnen Sekunden durchgeführt werden, sodass mehrere Beispiele innerhalb kürzerer Zeit behandelt werden können. Leider fehlt auch hier ein Rechengang seitens des Geräts, sodass der Voyage hier vorrangig, sofern ausschließlich das CAS genutzt wird, als Kontrollinstrument verwendet werden kann. Erst wenn das CAS parallel (beispielsweise mit dem Graphik-Programm) benutzt wird, kann es auch anderweitig eingesetzt werden. Hier gelten die gleichen Argumente, wie bei GeoGebra oder Mathematica. Das Zusammenspiel von Rechnung und Graphik sorgt für ein produktives Üben. Hinzu kommt bei der Graphik-App, dass bei Funktionen bestimmte Punkte auch graphisch gefunden werden können und Lernende somit einen zusätzlichen Zugang haben und Inhalte somit noch besser festigen können.

Adäquat visualisieren respektive das Wissen auslagern

Da die Mathematik eine äußerst abstrakte Wissenschaft ist, benötigt man bei deren Erklärung oft Visualisierungen, sei es durch Zeichen und Sprache, durch Handlungen oder durch Bilder (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.36). Kurz gesagt man muss abhängig vom vorliegendem Problem „adäquat visualisieren“. Demnach müssen auch technische Hilfsmittel in der Lage sein adäquat visualisieren zu können. GeoGebra hat all diese Möglichkeiten der Darstellung. Das CAS wird hauptsächlich für Zeichen und Symbole verwendet, da es ausschließlich für Rechenarbeiten eingesetzt wird, wirkt sich aber auf Grund dessen, dass es mit der Graphik-Ansicht verknüpft ist, auf die bildliche Darstellung aus. Genau dieses Zusammenspiel wird auch beim Aspekt des adäquaten Visualisierens von (Weigand und Weth 2010) gefordert. Immerhin sollen mit Darstellungen in der Mathematik Lösungen gefunden, Muster erkannt oder Berechnungen durchgeführt werden. Eben mit dieser Fähigkeit von GeoGebra lassen sich Berechnung und das Finden von Lösungswegen oder Erkennen von Schemata enorm erleichtern. Selbiges gilt natürlich auch für die dreidimensionale Variante oder den Wahrscheinlichkeitsrechner. Zudem verfügt GeoGebra über den in diesem Kapitel schon oft eingebrachten Zug- und Spurmodus durch welchen, wie ebenfalls bereits einige Male erwähnt, SchülerInnen Stoffinhalte durch experimentieren selbst erarbeiten respektive auf neue Sachverhalte stoßen können. Auch Mathematica besitzt alle geforderten Darstellungsmöglichkeiten, wenngleich sie nicht ganz so miteinander harmonieren, wie bei GeoGebra, da man bildliche Visualisierungen extra mit entsprechenden Befehlen anfertigen muss. Dennoch ist es auch in Mathematica möglich durch Handeln darzustellen. Wie der Zugmodus oder

der Schieberegler in GeoGebra, können auch hier mit Hilfe des `Manipulate[]`-Befehls bestimmte Parameter in einem gewissen Bereich „verschoben“ können. Die didaktischen Vorzüge dieser Fähigkeit wurden bereits mehrere Male erörtert. Naturgemäß kann man mit Mathematica durch seine unzähligen Befehle sowohl symbolisch als auch mit Zeichen (Zahlen beziehungsweise Ziffern) rechnen. Dennoch fehlt auch hier eine gewisse Verbindung der verschiedenen Darstellungsformen, wie sie etwa bei GeoGebra vorhanden ist. Man kann sie zumeist nur sequentiell (das heißt nach einander), in manchen Fällen aber auch verschachtelt nutzen, was diesen Kritikpunkt ein wenig abschwächt. Beim TI Voyage. ist die Lage ein wenig differenziert. Er besitzt wie seine beiden Pendants alle drei geforderten Darstellungsarten, welche auch miteinander harmonieren können. Beim CAS des Voyage ist es nämlich möglich zu befehlen, den Graphen einer Funktion zeichnen zu lassen, damit er in einem anderen Programm graphisch aufscheint. Dies kann durch das Splitten des Displays auch parallel, ähnlich wie in GeoGebra genutzt werden, was mit Sicherheit einen positiven Punkt gegenüber Mathematica darstellt. Zudem kann, wie schon mehrere Male angepriesen auch konstruiert werden, womit eine weitere Darstellungsform beim Voyage Einkehr findet. Darstellen durch Handeln ist beim Voyage kaum möglich. Er ist zwar in der Lage besondere Punkte von Funktionen graphisch zu ermitteln, ein Zugmodus oder Schieberegler wie bei GeoGebra oder Mathematica ist hier jedoch nicht vorhanden. Dennoch können auch mit dem Voyage Lösungswege gefunden, Gesetzmäßigkeiten erkannt oder Berechnungen durchgeführt werden.
Nichtsdestotrotz, sollen technische Hilfsmittel SchülerInnen unterstützen erworbenes Wissen „vom Kopf“ in die Technik, sprich in die verwendete Mathematiksoftware auslagern und dort entsprechend ausnutzen zu können. Dies setzt vor allem die Entlastung algorithmischer Tätigkeiten vorraus, welche alle in diesem Vergleich herangezogenen Hilfsmitteln leisten. Zudem haben sowohl GeoGebra, als auch Mathematica und der TI Voyage Möglichkeiten mathematische Inhalte darzustellen, was das Interpretieren, das Deuten, das Experimentieren und dergleichen erheblich erleichtert. Denn eine Konstruktion oder einen Graphen in einer Mathematiksoftware anzufertigen bedeutet im Prinzip nichts anderes, als das Auslagern von Wissen in die Technologie. Durch seine verschiedenen Ansichten, sorgt GeoGebra dafür, dass SchülerInnen vom Rechner zum Planer und Anweiser von Berechnungen werden (vergleiche Weigand und Weth 2010, S.37). Selbiges gilt für Mathematica und den Voyage mit seinen verschiedenen Programmen, welche in etwa mit den Ansichten von GeoGebra vergleichbar sind. In Endeffekt erfüllen alle drei Hilfsmitteln den Punkt des Auslagerns von Wissen und ermöglichen Lernenden sich auf die heutzutage wichtigen Aspekte des Mathematikunterrichts zu konzentrieren (welche zusätzlich von diesen noch unterstützt werden), dem Interpretieren von Lösungen, von

Visualisierungen, dem Finden von alternativen Lösungswegen.

Das Resümee

Nachdem nun die wichtigsten Punkte, welche Technologien im Mathematikunterricht erfüllen sollte, verglichen wurden kann insgesamt resümiert werden, dass im Prinzip sowohl GeoGebra, als auch Mathematica und der TI Voyage im Unterricht Anwendung finden können, da von ihnen (fast) alle Punkte, einmal besser einmal schlechter, erfüllt werden. Dennoch muss erwähnt werden, dass doch GeoGebra diese Aspekte am besten erfüllt. Es wirkt auch in Addition wie eine Mathematiksoftware, welche speziell für den Unterricht zugeschnitten wurde, mit ihrem klar strukturiertem Aufbau, ihrer fast selbsterklärenden Handhabung und ihren verschiedenen Ansichten, welche teilweise sogar miteinander verknüpft sind. Hinzu kommen die einfache Art und Weise Konstruktionen erstellen zu können, vor allem jedoch die besonderen Fähigkeiten, wie etwa das Bewegen einzelner Punkte, um Konstruktionen verändern und so Inhalte überprüfen, erarbeiten, theoretisch durchleuchten zu können. GeoGebra schafft es am besten Kalkül mit Graphik zu verbinden, das heißt ohne zusätzliche Befehle zum Erstellen von Visualisierungen eingeben zu müssen, was bei der Erfüllung der notwendigen Punkte eine nicht unwesentliche Rolle spielt. Im Vergleich dazu ist Mathematica etwas hinterher. Die Syntax der Befehle ist nicht so trivial wie bei GeoGebra (und dem TI Voyage), erfordert daher mehr Zeit zur Erklärung und Einarbeitung und ist für „schwächere" SchülerInnen vielleicht nicht ganz geeignet. Dafür besitzt es Befehle zur Berechnung und Visualisierung, die weit über den schulischen Gebrauch hinausgehen. Insbesondere die Möglichkeiten der Darstellung, was das Graphische betrifft, sind in Mathematica weitaus mächtiger als in GeoGebra oder beim Voyage. Nachteilig ist jedoch anzumerken, dass sie nicht (automatisch) mit den Berechnungen zusammenhängen, sondern sie müssen im Befehl zur Visualisierung verpackt werden, was diesen letzten Endes eine komplexe Gestalt annehmen lässt, welche kaum mehr durchschaubar wirkt. Zudem können diese in nahezu alle Himmelsrichtungen gedreht aber nicht an einzelnen Punkten verschoben werden, was ein Nachteil gegenüber GeoGebra ist. Der TI Voyage hingegen ist in diesen Belangen ähnlich zu bedienen, jedoch von der Handhabung her, in etwa auf dem Niveau von GeoGebra. Zwar müssen Graphen extra angefertigt werden, dennoch geschieht dies auf einem einfacheren Weg als in Mathematica. Zuerst muss die Funktion als solche definiert und anschließend der Befehl `Graph` in die Eingabezeile eingegeben werden. Zudem kann beim Voyage auch konstruiert werden, was ebenfalls enorm wichtig für den Unterricht

ist. Allerdings können die damit erstellten Gebilde jedoch nicht an einzelnen Punkten, so wie in GeoGebra, verzerrt werden, was diese doch ziemlich statisch wirken lässt. Ein Pluspunkt ist allerdings, dass Programme nebeneinander geöffnet sein können, was ein wenig an die Ansichten von GeoGebra erinnert, und es dadurch besser im Unterricht integriert werden kann, da hierbei auch Graphik und Berechnungen nebeneinander stehen. Was hier, als auch bei GeoGebra fehlt ist die Angabe an Rechenwegen. Hier hat Mathematica mit seiner „Step by step - Solution“ einen Vorteil gegenüber seinen beiden „Kontrahenten“. Was man dem Voyage noch zu Gute halten kann sind seine verschiedenen Applikationen, welche für spezielle Fälle gedacht sind. Dies hebt ihn zusätzlich im Vergleich zu den anderen Softwaren, da man hier ohne großartig Befehle eintippen zu müssen, beispielsweise Nullstellen berechnen oder Faktoren von Polynomfunktionen bestimmen lassen kann.
Alles in allen betrachtet, kann man zum Schluss kommen, dass in diesem Vergleich GeoGebra, wie bereits erwähnt als Sieger hervorgeht, der TI Voyage an zweiter Stelle steht und Mathematica am wenigsten für den schulischen Mathematikunterricht brauchbar ist, da es eher „höheres“ Publikum, Publikum aus dem universitären respektive hochschulischen Gebiet anspricht.

Literatur

Bildung, Bildungsministerium für, Hrsg. (2007). *Mathematik*. Lehrplan 2007. URL: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf (besucht am 23. 06. 2017).

— Hrsg. (2014). *Mathematik*. Lehrplan 2014. URL: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?5te5fx (besucht am 23. 06. 2017).

Gensichen, Prof. Dr. Ing. V. und Prof. Dr. rer.-nat. R. Runge (2006). *Taschenrechnerkurs*. Fachhochschule Münster Fachbereich Bauingenieurwesen. URL: https://www.fh-muenster.de/fb6/downloads/personen/runge/ti/TI_Kurs_Stand_20061213.pdf (besucht am 19. 01. 2017).

GeoGebra, Hrsg. (2016). *GeoGebra 5.0 Handbuch*. Deutsche Fassung. URL: https://www.geogebra.org/manual/de/Handbuch (besucht am 08. 11. 2016).

Instruments, Texas, Hrsg. (2005). *TI 89 Titanium Voyage 200 Graphischer Rechner*.

Joss, Heinz (2004). *Geschichte des Rechenschiebers: Gestern alltäglich, heute vergessen*. Hrsg. von Rechnerlexikon. URL: http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Geschichte_des_Rechenschiebers:_Gestern_allt%E4glich,_heute_vergessen (besucht am 22. 07. 2016).

Lorenzen, Knut (2014). *Einführung in Mathematica. Berücksichtigt die kostenlose Version 10 für den Rasberry Pi*. 1. Aufl. mitp Verlag. ISBN: 978-3-8266-9666-4.

Marthaler, Dr. H. (2004). *Einführung in TI-89 und T IVoyage 200*. URL: http://www.321los.ch/2unterricht/TI-89.pdf (besucht am 19. 01. 2017).

Müller, Robert und Günter Hansich (2007). *Mathematik-Lehrbuch 8*. Hrsg. von Stefan Götz und Hans-Christian Reichel. 1. Aufl. öbv. ISBN: 978-3-209-05490-6.

Regensburg, Universität, Hrsg. (2015). *Einführung zum Material für Lehrer. Thema: Der chinesische Abakus*. URL: http://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat_Fak_I/perucca/STUD-Chinesischer-Abakus.pdf (besucht am 20. 07. 2016).

Research, Wolfram, Hrsg. (2016). *Wolfram Mathematica*. URL: https://www.wolfram.com/mathematica/ (besucht am 19. 12. 2016).

Ruppert, Markus und Jan Wörler, Hrsg. (2013). *Technologien im Mathematikunterricht. Eine Sammlung von Trends und Ideen.* Wiesbaden 2013: Springer Spektrum. ISBN: 978-3-658-03007-0.

Weigand, Hans-Georg und Thomas Weth (2010). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II.* Hrsg. von Friedhelm Padlberg. 1. Aufl. Heidelberg 2002: Springer Akademischer Verlag. ISBN: 978-3-8274-1100-6.

Wrightson, Benjamin (1996). *Der Abakus.* URL: `http://www.benjaminwrightson.de/abakus/homepage.htm` (besucht am 19. 07. 2016).