DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Differentialrechnung und Differentialgleichungen -

Ein Querschnitt von der Differentialrechnung in der Schule bis zur Existenz und Eindeutigkeit von Differentialgleichungen

verfasst von / submitted by

Lena Maria Harringer

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 445
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Biologie und Umweltkunde
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

Zu allererst möchte ich mich für die Betreuung und fachliche Unterstützung bei meinem Betreuer und langjährigen Professor ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith bedanken. Mit schnellen Rückmeldungen und hilfreichen Ratschlägen hat er das Verfassen dieser Arbeit für mich ermöglicht.

Des Weiteren möchte ich mich von ganzem Herzen bei meinen Eltern bedanken, die mir durch finanzielle aber vor allem durch seelische und moralische Unterstützung die Durchführung meines Studiums erst ermöglicht haben. Sie hatten stets ein offenes Ohr und eine starke Schulter zum Anlehnen, wenn ich diese gebraucht habe.

Auch bei meinem Freund, meiner Schwester und all meinen Freunden möchte ich mich bedanken, die Verständnis in stressigen Zeiten gezeigt, ruhigere Phasen mit mir genossen und mich immer wieder motiviert haben.

Darüber hinaus möchte ich mich bei allen Studienkollegen und -kolleginnen bedanken, die ich in meiner Zeit an der Universität kennen lernen durfte und die mit mir viele Stunden verbracht, schwierige Prüfungen gemeistert und schöne Momente erlebt haben.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit bestätige ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne Benützung anderer als der angegebenen Hilfsmittel verfasst zu haben. Alle Inhalte, die aus anderen Werken, sowohl wörtlich als auch inhaltlich, übernommen wurden, sind mit den Angaben der Quellen gekennzeichnet. Auch Ressourcen aus dem Internet sind mit dem entsprechenden Link sowie dem Zeitpunkt des Zugriffs vermerkt.

Wien, Jänner 2019

Lena Maria Harringer

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit umrahmt das breite Spektrum der Differentialrechnung in der Schule und befasst sich darüber hinaus noch mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für Differentialgleichungen. Der Schwerpunkt der Differentialrechnung liegt in der 7. Klasse einer AHS oder der 3. beziehungsweise 4. Klasse einer berufsbildenden höheren Schule, wie HAK oder HTL. Die Tiefe und Wichtigkeit der Differentialrechnung variiert stark mit dem Schwerpunkt der jeweiligen Schule. Diese Thematik wird im zweiten Kapitel genauer beleuchtet.

Daran anschließend wird im dritten Kapitel ein kurzer geschichtlicher Rückblick in die Entwicklung der Differentialrechnung gegeben.

Im vierten Kapitel werden Voraussetzungen diskutiert und die Theorie der Schuldifferentialrechnung aufgearbeitet. Wichtig sind hierbei die Definitionen für Differenzenquotient und Differentialquotient, sowie die verschiedenen Zugänge zur Ableitungsfunktion. Darüber hinaus sind die Definitionen von Stetigkeit und Differenzierbarkeit angeführt. Einen weiteren Schwerpunkt bilden die Ableitungsregeln und die dazugehörigen Beweise. Abschließend werden Anwendungsbereiche, wie die Untersuchung von Funktionen und Extremwertaufgaben, besprochen.

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz bildet das Thema des fünften Kapitels, welches sich grundlegend damit beschäftigt, ob es für Differentialgleichungen erster Ordnung eine eindeutige Lösung gibt. Untermauert wird dieser Beweis mit einem Beispiel. Des Weiteren wird die Methode der Trennung der Variable erläutert und an einem konkreten Beispiel, welches sich mit logistischem Wachstum beschäftigt, verdeutlicht.

Das letzte Kapitel dieser Diplomarbeit befasst sich mit der Beschreibung und dem Vergleich von Schulbüchern. Hierfür werden vor allem jene der 7. Klasse Oberstufe AHS, der 4. Klasse HAK beziehungsweise der 3. Klasse HTL herangezogen. Die beschrieben Buchreihen sind „Mathematik verstehen“, „Dimensionen Mathematik“, „Thema Mathematik“ und „Mathematik HTL“.

Abstract

The following diploma thesis covers the wide range of differential calculus in schools. The main focus of differential calculus is addressed in the 7^{th} form of secondary schools or in the 4^{th} form of a vocational schools. The depth and importance of the subject matter depends on the school type and their set focus. This is dealt with in more detail within the second chapter of this thesis.

The third chapter briefly covers the historical background of the differential calculus' development.

The fourth chapter discusses required prior nowledge and deals with the theory of differential calculus' use in schools. Main issues in this section are definitions of the difference quotient and the differential quotient as well as different approaches concerning their understanding. Furthermore, definitions of continuity and differentiability are given and inference rules and their mathematical proofs, another main issue of this chapter, are pictured. At the end of this thesis paper, the scope of applications concerning curve sketching and exercises with extreme values are discussed.

The existence and uniqueness theory form the topic of the fifth chapter. The main question regarding this topic is whether a unique solution for a differential calculus of first order exists. Along with that focus, mathematical proof is given and an example is shown. Additionally, the method for the separation of variables is explained. An example, dealing with logistic growth illustrates that method.

The last chapter of this diploma thesis covers the description and the comparison of four different schoolbooks for a 7^{th} form in secondary schools or a 4^{th} form in vocational schools. The used books are: "Mathematik verstehen", „Dimensionen Mathematik", „Thema Mathematik." and "Mathematik HTL".

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation

Ein großer Teil meiner mathematischen Ausbildung an der Uni Wien befasste sich mit der Analysis und der Differentialrechnung. Aus meiner Schulzeit blieb bei mir aus der 7. Klasse zum Thema Differentialrechnung vor allem die Kurvendiskussion und verschiedene Ableitungsregeln, die monoton immer nach demselben Schema angewandt wurden, in Erinnerung. Viele meiner Nachhilfeschüler, die ich während meiner Studienzeit betreute, hatten einen sehr schematischen Bezug zu diesem Thema. Viele Lerneifrige hatten Freude daran, endlich ein mathematisches Thema gefunden zu haben, das nach gleichbleibendem Muster gelöst, beziehungsweise abgearbeitet werden konnte. Auch für mich war dieses Thema als Schülerin sehr reizvoll, weil durch die klaren Strukturen der Regeln und Rechenschritte, die Beispiele schnell abgehandelt waren. In vielen Belangen war unklar, warum diese gelernten Regeln funktionieren oder wofür diese Berechnungen eigentlich gut sein sollen. Unter anderem deswegen wird dieses Thema aus pädagogischer Hinsicht stark diskutiert, da der Unterricht oft sehr stark auf die Anwendung von Kalkülen und zu wenig auf das Verständnis der Begriffe und der Inhalte abzielt (vgl.: Greenfrath, 2016: 137).

Erst im Studium erkannte ich die enorme Vielfalt des Themas, welches keinesfalls nur aus einer Schritt für Schritt durchführbaren Kurvendiskussion und ein paar Regeln besteht, und fand immer mehr Gefallen daran. Deshalb, und weil ich aufzeigen möchte was dieses Stoffgebiet „Differentialrechnung in der Schule“, außer Kurvendiskussion und Ableitungsregeln, beinhaltet, werde ich mich in meiner Diplomarbeit mit diesem Thema beschäftigen.

Der Fokus meiner Arbeit liegt auf verschiedenen Lehrplänen und die Wichtigkeit dieser Thematik in verschiedenen Schultypen mit unterschiedlichen Schwerpunkten, wie AHS, HAK und HTL. Darüber hinaus beschäftige ich mich mit den Voraussetzungen, die Schülerinnen und Schüler benötigen, um mit dem Thema Differentialrechnung starten zu können. Ein weiterer Schwerpunkt meiner Arbeit ist die schulrelevante Theorie der Differentialrechnung, welche Differenzen- und Differentialquotient, Differenzierbarkeit und Stetigkeit, verschiedenste Ableitungsregeln und die weitere anwendungsorientierte Bereiche der schulischen Differentialrechnung beinhaltet. Die Beweise der jeweiligen

Ableitungsmethoden werden in dieses Kapitel ebenfalls einfließen. Darüber hinaus lege ich ein Augenmerk auf den Existenz- und Eindeutigkeitssatz, welcher der zentralen Frage nachgeht, ob jede Differentialrechnung eine eindeutige Lösung besitzt. Die Methode der Trennung der Variablen und ein Beispiel aus dem Bereich Biologie werden in diesem Abschnitt ebenfalls genauer beleuchtet. Im letzten Kapitel meiner Arbeit wurden die vier Schulbücher „Mathematik verstehen 7“, „Dimensionen Mathematik 7“, „Thema Mathematik 7“ und „Mathematik HTL 2/3/4/5“ bezüglich der Kapitel Differentialrechnung, analysiert und mein persönlichen Standpunkt zu diesen Werken dargelegt.

2 Lehrplan

In dem folgenden Kapitel wird der Lehrplan der AHS und der BHS dargestellt und somit den Unterschied der Lehrpläne in Bezug auf das Thema Differentialrechnung verdeutlicht. Exemplarisch für eine berufsbildende höhere Schule habe ich mich für die Lehrplanauszüge aus der HAK und aus einer HTL mit Schwerpunkt auf Maschinenbau entschieden, um wiederum hier die Überschneidungen aber auch die Abweichung im Bezug auf die Lehrpläne der berufsbildenden höheren Schulen zu veranschaulichen. In der Handelsakademie liegen die Schwerpunkte mehr auf wirtschaftlicher Mathematik, wobei in einer höheren technischen Lehranstalt vor allem die angewandte Mathematik im jeweiligen Schultyp im Vordergrund steht. In den allgemein höherbildenden Schulen wird eine große Bandbreite an theoretischer Differentialrechnung abgedeckt, jedoch werden hier die praktischen Anwendungen eher vernachlässigt.

2.1 AHS

Im Lehrplan der AHS Oberstufe des Bildungsministeriums ist die Differentialrechnung als eignes Thema in der 7. Klasse das erste und einziges Mal vermerkt, jedoch wird der Differenzenquotient laut Lehrplan mit dem Überbegriff „Reelle Funktionen“ unter „Beschreiben von Änderungen durch Änderungsmaße“ bereits in der 6. Klasse behandelt. In der 8. Klasse wird die Differentialrechnung unter dem Punkt „Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung“ in der Rubrik „Integralrechnung“ und unter der Überschrift „Dynamische Prozesse“ mit den Unterpunkten „Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzen- und Differentialgleichen“, „Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen“ und „Lösen von einfachen Differentialgleichungen“ behandelt. Durch die folgende Auflistung verschiedenster Inhalte aus dem Lehrplan der 7. Klasse AHS kann man erkennen, dass in dieser Stufe auf jeden Fall, neben algebraischen Gleichungen, nichtlinearer analytischer Geometrie und Stochastik, der Schwerpunkt bei der Differentialrechnung liegt.

Auszug Differentialrechnung

- Definieren des Differentialquotient (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen
- Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen
- Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen
- Herleiten von Differentiationsregeln zu Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)
- Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendung sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Kümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen
- Lösen von Extremwertaufgaben
- Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffs Stetigkeit
- Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung

Hierbei wird klar, dass in der 7. Klasse Oberstufe sowohl die Einführung der Differentialrechnung, die verschiedenen Ableitungsregeln, das Diskutieren von Kurven mit Schwerpunkt auf verschiedene wichtige Stellen einer Funktion, wie Maximumstelle oder Wendestelle, Grenzwert und verschiedene Anwendungsbeispiele behandelt werden. Die Differentialrechnung im AHS-Bereich ist sehr wenig anwendungsorientiert und vor allem theoretisch aufgebaut. (vgl.: bmbwf, Lehrplan Mathematik 2004)

2.2 HAK

Als Lehrstoff in der 4. Klasse HAK im 7. Semester sind der intuitive Grenzwertbegriff, intuitiver Begriff der Stetigkeit, Differenzen- und Differentialquotient, Ableitungsregeln und die Eigenschaften von Funktionen im Bereich Analysis angegeben. Darüber hinaus sind für dieses Semester auch noch die Regressionsrechnung und die Kosten- und Preistheorie angedacht.

Auszug Bereich Analysis – Differenzen- und Differentialquotient:

- die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen intuitiv erfassen und damit argumentieren,
- den Zusammenhang zwischen Differenzen
- und Differenzialquotienten beschreiben und diese sowohl als mittlere/lokale Änderungsraten als auch als Sekanten-/Tangentensteigung interpretieren,
- den Differenzenquotienten auf Problemstellungen anwenden, Berechnungen durchführen und die Ergebnisse interpretieren.

Auszug Bereich Analysis – Ableitungsfunktionen und Ableitungsregeln:

- den Begriff der Ableitungsfunktion beschreiben, diese grafisch darstellen und deren Verlauf deuten,
- Ableitungsfunktionen zur Beschreibung von Sachverhalten aus unterschiedlichen Themengebieten einsetzen, damit lokale Änderungsraten berechnen und interpretieren,
- mit Hilfe der Summen Faktor, Ketten, Produkt und Quotientenregel, Potenz und Polynomfunktionen sowie Exponentialfunktionen zur Basis e und die natürlichen Logarithmusfunktionen ableiten, Eigenschaften von Funktionen, insbesondere Monotonie und Krümmungsverhalten mit Hilfe der Ableitungsfunktionen erklären und berechnen.

In diesem Semester werden sowohl Grundlagen der Differenzialrechnung, mit mittlerer Änderungsrate und die graphische Darstellung von Ableitungsfunktionen als auch die Ableitungsregeln und spezielle Ableitungen behandelt. Hier ist erkennbar, dass der Umfang, beziehungsweise die Zeit in der die Differentialrechnung behandelt wird um einiges geringer als in der AHS ist, und somit ein weniger wichtiges Thema darstellt. (vgl.: ris, Lehrplan HAK 2014)

2.3 HTL (Technik, Maschinenbau)

Im Schultyp HTL gibt es viele verschiedene Lehrpläne mit unterschiedlichsten Schwerpunkten. Ich habe für einen besseren Vergleich mit AHS und HAK einen Lehrplan einer HTL Maschinenbau gewählt. Die Gegenstände und auch Schwerpunkte im Bereich Mathematik einer technischen HTL variieren stark zu denen der AHS und der HAK. Dies wird auch bei der Differentialrechnung ersichtlich, da in diesem Stoffgebiet um einiges mehr in die Tiefe gegangen wird und einige Teilgebiete der Differentialrechnung behandelt werden, die auch im Mathematikstudium an der Universität relevant sind. Die Differentialrechnung ist im 7. und 8. Semester vorgesehen. Darüber hinaus ist der Lehrplan um einiges weniger exakt formuliert, da manche Grundlagen wie zum Beispiel Ableitungsregeln gar nicht erwähnt werden. Neben dem Fach „Angewandter Mathematik“ finden sich noch andere Fächer, wie „Technische Mechanik“ oder „Fertigungstechnik“ im Lehrplan wieder, in welchen die Differentialrechnung benötigt und auch angewandt wird, um Berechnungen anstellen zu können.

Auszug Bereich Analysis – 7. Semester

Bildungs- und Lehraufgabe:

Die Schülerinnen und Schüler können:

- partielle Ableitungen berechnen und mit Hilfe des Differentials Fehler abschätzen;
- Funktionen in Taylorreihen und periodische Funktionen in Fourierreihen entwickeln;
- einfache Differenzengleichungen erster Ordnung lösen.

Lehrstoff:

- Funktionen mehrerer Variablen (partielle Ableitungen; lineare Fehlerfortpflanzung und maximaler Fehler)
- Funktionenreihen (Taylorreihen, Fourierreihen)

- Differenzial und Differenzengleichungen (trennen der Variablen; lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung; lineare Differenzengleichungen erster Ordnung).

Auszug Bereich Analysis – 8. Semester

Bildungs- und Lehraufgabe:

- lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung aufstellen und lösen.

Lehrstoff:

- Differenzialgleichungen (lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; numerische Lösung von Anfangswertproblemen)

(vgl.: HTL Bildung mit Zukunft, Lehrplan der höheren Anstalt für Maschinenbau 2015)

3 Geschichtliches zur Differentialrechnung

Den Grundstein für die uns heute bekannte Differentialrechnung legten Issac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz (vgl.: Malle, 2016: 113). Hier ist hinzuzufügen, dass auch die Einführung der analytischen Geometrie unter anderem von Pierre de Fermat eine bedeutende Rolle gespielt hat (vgl.: Fritzsche, 2015: 288). Die uns heute bekannte Form entwickelte sich im 19. Jahrhundert. Durch die Differentialrechnung wurde in vielen Bereichen, wie zum Beispiel Mechanik oder Populationsmodelle, neue Türen geöffnet. (vgl.: Greenfrath, 2016: 137)

Anfang des 17. Jahrhundert beschäftigte sich Pierre de Fermat, ein bedeutender französischer Mathematiker, welcher von 1607 bis 1665 lebte, mit Werken von Euklid, Pappos und Apollonios. Im Jahr 1629 gelang es ihm Minima und Maxima von Funktionsgraphen zu bestimmen und später war es ihm auch möglich Tangenten an Kurven zu legen. Hier ist zu erwähnen, dass in der Antike für die Definition der Tangente ausreichend gewesen ist, dass es sich um eine Gerade handelt, welche die Kurve nur in einem Punkt berührt. Diese Definition wurde im Laufe der Jahre immer weiter präzisiert bis hin zu der Auffassung, dass eine Tangente als ein Grenzwert von Sekanten anzusehen ist. Systematisch wurde dieser Zugang aber von Newton und Leibniz untersucht. (vgl.: Fritzsche, 2015: 288ff)

Newton war ein englischer Naturforscher und lebte zwischen 1643 und 1727. In seinem 1687 veröffentlichen Werk „Principia Mathematica“ leitete Issac Newton die Differentialrechnung geometrisch her (vgl.: Greefrath, 2016: 138). Hierbei stand das Problem der Berechnung einer Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit im Fokus (vgl.: Malle, 2016: 13). „Zentral ist für ihn dabei die Bewegung längs einer Kurve“ (Greefrath, 2016: 138). Die zeitabhängige Größe wurde von Newton als „fließend“ beschrieben und wird deshalb auch als „Fluente“ benannt. Als Fluxion wurde die Geschwindigkeit dieser Größe zum Zeitpunkt t bezeichnet, weshalb die mathematische Beschreibung auch als Fluxionsrechnung in den Büchern aufscheint. Als Symbol für diese Fluxion wählte er $\dot{x}(t)$ (vgl.: Malle, 2016: 113; Greefrath, 2016: 138). „Aus der Fluxion zur Zeit t folgt sofort die Tangentensteigung in einem Punkt der Kurve zu $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$“ (Greenfrath, 2016: 138).

Im Gegensatz zu Newton war das Hauptaugenmerk von Leibnitz auf das Tangentensteigungsproblem gerichtet (vgl.: Malle, 2016: 113). „Leibnitz rechnete v.a. mit „Differentialen“, die er mit dx und dy bezeichnete, und verwendete diese, wenn er endliche, aber beliebig kleine von null verschiedene Größen betrachtete. Der Operator $d,$ der eine infinitesimal kleine Änderung einer Größe bezeichnet und den er anstelle des sonst für Änderungen verwendeten Δ benutzt, geht auf ihn zurück.“ (Greenfrath, 2016: 138) Leibnitz prägte neue Symbole und geometrische Veranschaulichungen, wie zum Beispiel das „charakteristische Dreieck“, welches heute allgemein als Steigungsdreieck bekannt ist. Er stellte die Steigung einer Funktion und zwei Werten aus dem Definitionsbereich zuallererst als Sekante, mit dem Ausdruck $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ dar. Das Symbol $\frac{dy}{dy}$ wurde von Leibnitz dann verwendet, wenn die jeweiligen Differenzen aus Zähler und Nenner „unendlich kleine“ Werte annahmen. Ein großes Problem, auf welches beide Mathematiker gestoßen sind, und warum sie auch immer wieder kritisiert wurden, ist die Verkleinerung des Nenners, ohne, dass dieser den Wert Null annehmen darf (vgl.: Greenfarth, 2016: 138f).

Die beiden Begründer kamen unabhängig voneinander, aber beinahe simultan, mit unterschiedlichsten Zugangsweisen auf sehr ähnliche Ergebnisse (vgl.: Malle, 2016: 113). Wer nun der Erfinder der Differentialrechnung sei, war, während Lebzeiten, ein großer Streit zwischen Newton und Leibnitz, bei welchem Newton auch als Plagiator verurteilt wurde (vgl.: Greenfrath, 2016: 139).

Viele Jahre später wird die Ableitung mittels des Grenzwertes von Sekantensteigungen von dem französischen Mathematiker Agustin-Louis Cauchy (1789-1857) definiert (vgl.: Greenfrath, 2016: 139). Die von ihm verwendete Grenzwertdefinition sieht zwar aus Sicht der heutigen Mathematik umständlich aus, umfasst aber bereits die wesentlichsten Punkte (vgl.: Malle, 2016: 115). Die heute gängige Definition des Grenzwerts lieferte Ende des 19. Jahrhunderts dann der deutsche Mathematiker Karl Weierstraß (vgl.: Wikipedia: Differentialrechnung).

Somit kann zusammengefasst werden, dass die beiden Mathematiker Newton und Leibnitz den Grundstein für die Differentialrechnung gelegt haben, jedoch viele weitere Mathematiker, wie Pierre de Fermat bereits Vorarbeit geleistet haben. Darüber hinaus haben viele Mathematiker, unter anderem Agustin-Louis Cauchy, die grundlegenden Ideen über einen langen Zeitraum verbessert und verfeinert.

4 Inhalt

Im folgenden Kapitel werden die Voraussetzungen, die Schülerinnen und Schüler für die Erarbeitung der Differentialrechnung benötigen, definiert. Darüber hinaus wird der, in der Schule zu behandelnde mathematische, Inhalt analysiert und mit Definitionen, Sätzen oder Beweisen belegt. Wichtige Punkte sind dabei der Differenzen- und Differentialquotient, die Differenzierbarkeit und Stetigkeit, verschiedenste Ableitungsregeln sowie Funktionsuntersuchungen und Extremwertaufgaben.

4.1 Allgemeine Voraussetzungen für die Schule

Da die Mathematik sehr strukturiert ist und einen aufbauenden Charakter hat, ist die Definition konkreter Voraussetzungen ein schwieriges Unterfangen. Die Herausforderung liegt darin, dass alles ab den Grundrechnungsarten zum Basiswissen für das neu zu erlernende Thema ist. Da dies aber den Rahmen jeder Arbeit sprengen würde, beschränke ich mich in diesem Fall auf die Fundamente, die meiner Meinung nach wichtige Voraussetzungen zum Erlernen der Differentialrechnung in der Schule sind.

Eine der essenziellsten Voraussetzungen für die Differentialrechnung sind Funktionen. Die Lernenden müssen den Begriff Funktion kennen und Funktionen aufstellen, darstellen, berechnen und deuten können, um mit den Informationen für die Differentialrechnung in der Schule anknüpfen zu können. Darüber hinaus muss den Schülerinnen und Schülern das Wort Grenzwert und die Definition des Grenzwertbegriffs geläufig sein. Das Rechnen mit dem Limes von Folgen sollte aus der 6. Klasse bekannt sein.

Definition (reelle) Funktion

> *„Sei A eine Menge von reellen Zahlen. Wird jeder Zahl $x \in A$ genau eine Zahl $y \in R$ zugordnet, so bezeichnet man diese Funktion als (reelle) Funktion“*

(Malle, 2017: 107)

Gibt man einer Funktion den Namen f, so wird diese Funktion als $y = f(x)$ bezeichnet, wobei x die Stelle oder das Argument ist und $f(x)$ der Funktionswert f an der Stelle x. Die Menge A, also die Menge x, denen ein $f(x)$ zugeordnet werden kann, kennt man auch D_f, also die Definitionmenge der Funktion f.

Wichtig ist auch der Unterschied zwischen f und $f(x)$, da f den Namen der Funktion darstellt und $f(x)$ dagegen den Wert der Funktion f an der Stelle x (vgl.: Malle, 2017: 107).

Definition lineare Funktion

„Eine reelle Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = k \cdot x + d$ heißt lineare Funktion"

(Malle, 2017: 127)

Wobei hier k die Steigung der Funktion darstellt und d den Abstand zwischen dem Nullpunkt und dem Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse ist.

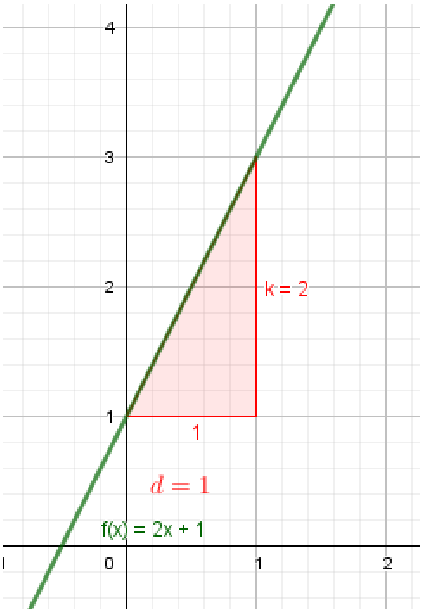


Abbildung 1: lineare Funktion

Satz lineares Wachsen und Abnehmen

„Ist: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion mit $f(x) = k * x + d$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

(1) $f(x+1) = f(x) + k$
Wird das Argument um 1 erhöht, so ändert sich der Funktionswert um k.

(2) $f(x+h) = f(x) + k * h(h > 0)$
Wird das Argument um h erhöht, so ändert sich der Funktionswert um $k * h$*.*

Gleiche Zunahme der Argumente bedeutet stets gleich Zu-/Abnahme der Funktionswerte."

(Malle, 2017: 130)

Deutung der Steigung k

„Ist: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine lineare Funktion mit* $f(x) = k \cdot x + d$*, dann gilt für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $h \in \mathbb{R}^*$*:*
(1) $k = f(x+1) - f(x)$
Die Steigung k ist gleich der Änderung der Funktionswerte bei Erhöhung des Arguments um 1.

(2) $k = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $(h > 0)$
Die Steigung ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.

(Malle, 2017: 131)

Der Begriff Grenzwert wird als erstes in Verbindung mit Folgen und auch als Grenzwert einer Folge definiert. Erst später wird der Grenzwert auch in Verbindung mit Funktionen gebracht. Jedoch ist die Definition des Limes dennoch ein wichtiges Vorwissen, damit die Schülerinnen und Schülern mit der Vorstellung der Annäherung und Berechnung von Unendlichem vertraut sind.

Definition Grenzwerte von Folgen

„Nähern sich Glieder einer Folge unbegrenzt einer bestimmten Zahl a, dann nennt man a den Grenzwert (Limes) der Folge und schreibt:
$a = lim_{n \to \infty} a_n$ *"*

(Malle, 2015: 119)

Definition Konvergenz und Divergenz

> *„Die Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge* $(a_n | n \in \mathbb{N}^*)$*, geschrieben* $a = lim_{n\to\infty} a_n$*, wenn gilt:*
> *Zu jeder Zahl* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *gibt es einen Index* $n_0 \in \mathbb{N}^*$*, sodass:*
> $|a_n - a| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq n_0$
> *Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent"*

(Malle, 2015: 120)

Definition Grenzwert von Funktionen

> *Wenn für jede Folge* $\langle a_n \rangle$ *mit* $lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ *und* $a_n \neq x_0$ *die Eigenschaft* $lim_{n\to\infty} f(a_n) = \alpha$ *gilt, dann nennt man* α *den Grenzwert der Funktion* f *an der Stelle* x_0*.*

(vgl.: Bleier, 2016: 17)

4.2 Theorie

In diesem Kapitel werden Grundkompetenzen behandelt, welche die Schülerinnen und Schüler bei der Erarbeitung des Themas Differentialrechnung erlernen müssen. Darunter fallen der Differenzenquotient, der Differentialquotient, die Leibniz'sche Schreibweise für Differenzen- und Differentialquotient, Steigungen von Funktionsgraphen deuten können und verschiedene Ableitungsregeln kennen und anwenden können (vgl.: Malle, 2016: 12).

4.2.1 Differenzenquotient

Mit dem Differenzenquotient wird die Steigung einer Funktion in einem bestimmten Intervall berechnet. Hierbei werden zwei Punkte A und B auf einem Graphen gewählt und diese mittels einer Gerade verbunden. Die Steigung der Gerade zwischen A und B ist dann gleich der Steigung der Funktion zwischen den zwei Punkten (vgl.: Bleier, 2016: 25).

Als Einstiegbeispiele werden gerne Beispiele mit mittlerer Geschwindigkeit in einer Zeit-Weg-Funktion in einem Zeitintervall gewählt. Diese sind folgendermaßen definiert:

Definition mittlere Geschwindigkeit

> *„Bewegt sich ein Körper gemäß einer Zeit-*Ort-Funktion *$s: t \to s(t)$, dann setzt man:*
> *Mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2] = \overline{v}(t_1; t_2) = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$.“*

(Malle, 2016: 13)

Definition Differenzenquotient

> *„Es sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $[a; b] \subseteq A$.*
> *Die Zahl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ heißt Differenzenquotient oder mittlere Änderungsrate von f in $[a; b]$.“*

(Malle, 2016: 15)

Der Differenzenquotient, wie oben definiert, ist also das Verhältnis von der Änderung der Funktionswerte $f(b) - f(a)$ und der Änderung der Argumente $b - a$ in einem gegebenen Intervall $[a; b]$.

Die Sekante durch die Punkte $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$ des Funktionsgraphen f zeigt die Steigung k an, welche dem Differenzenquotient beziehungsweise der mittleren Änderungsrate entspricht: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (vgl.: Bleier, 2016: 25).

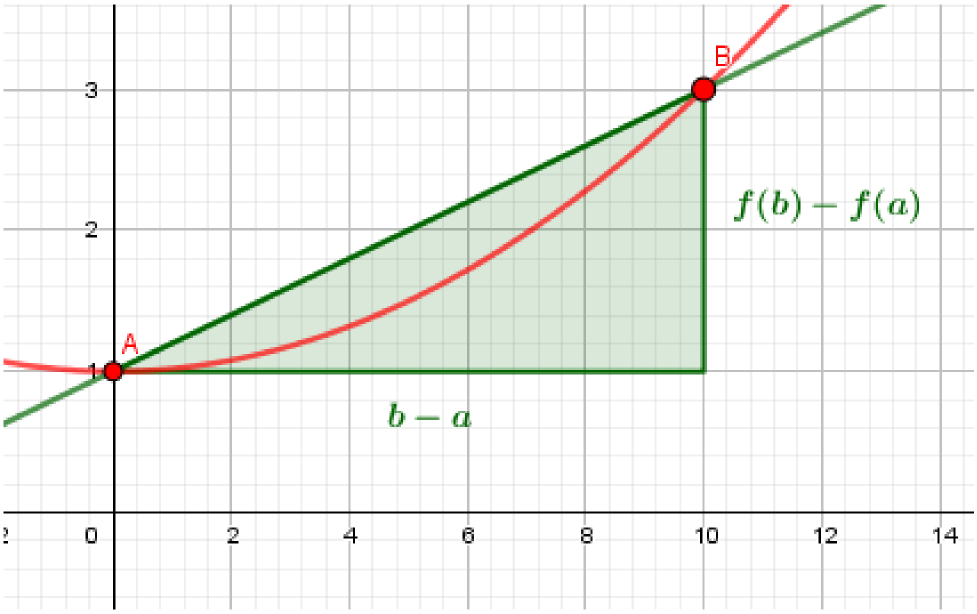


Abbildung 2: Differenzenquotient

4.2.2 Differentialquotient

Grob spricht man bei einem Differentialquotient davon, die Steigung einer Kurve festzulegen. Anders als beim Differenzenquotient wird nicht die Steigung einer Gerade zwischen zwei Punkten betrachtet sondern als Anstieg einer Tangente an einem bestimmten Punkt p an einer Kurve.

Definieren kann man den Differenzialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten in einem bestimmten Intervall. (vgl.: Fetzer, 2012: 339 ff)

In der Schule tastet man sich an den Differentialquotient oft mit einem Weg-Zeit-Problem heran. Somit wird die Vorstellung des Differenzenquotienten beziehungsweise der mittlernen Geschwindigkeit verwendet. Die Momentangeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t wird mittels folgender Definition beschrieben:

Definition Momentangeschwindigkeit

> *„Bewegt sich ein Körper gemäß einer Zeit-Ort-Funktion $s: t \to s(t)$, dann setzt man:*
>
> *Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = v(t) = \lim\limits_{z \to t} \overline{v}(t;z) = lim_{z \to t} \frac{s(z)-s(t)}{z-t}$.“*

(Malle, 2016: 13)

Das Problem der Bestimmung einer lokalen Änderungsrate (oben Momentangeschwindigkeit) wird als das „Tangentenproblem“ bezeichnet. “Man kann sich unter dem Differentialquotient an der Stelle x näherungsweise einen Differenzenquotient in einer sehr kleinen Umgebung von x vorstellen“ (Malle, 2016: 16). Man stellt sich also vor, dass man die Punkte A und B, der oberen Grafik, soweit aneinander annähert, also den Abstand so gering werden lässt, bis das Intervall gegen Null geht und die beiden Punkte der Sekante einen Tangentenpunkt ergeben (vgl.: Hohenwarter, Differentialquotient: 2005).

Definition Differentialquotient 1

> *„Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $[a; b] \subseteq A$.*
> *Der Grenzwert $f'(x) = lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ heißt Differentialquotient von f an der Stelle x oder momentane Änderungsrate von f an der Stelle x.“*

(Malle, 2016: 15)

Eine andere Schreibweise für den Differenzen- und Differentialquotient geht auf den Mathematiker G. W. Leibniz zurück, welcher $z - x = \Delta x$ und $f(z) - f(x) = \Delta y$ setzte. So lässt sich $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ auch als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schreiben. (vgl.: Malle, 2016: 27)

Auf dem Intervall $[x_0; x_0 + h]$ ergibt dies dann folgende Definition:

Definition Differentialquotient 2

> *Ist f eine reelle Funktion, dann heißt der Grenzwert des Differentialquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$*
>
> $$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$
>
> *lokale/momentane Änderungsrate bzw. Differentialquotient an der Stelle x_0.“*

(vgl.: Fetzer, 2012: 340; Bleier, 2016: 33)

Definition der Tangentensteigung mit Hilfe des Differentialquotienten

> *„Sei f eine reelle Funktion und $f'(x)$ ihr Differentialquotient an der Stelle x. Die Gerade durch den Punkt $X = (x|f(x))$ mit der Steigung $f'(x)$ bezeichnet man als Tangente am dem Graphen von f im Punkt X. Die Steigung $f'(x)$ dieser Tangente heißt auch Steigung der Funktion f an der Stelle x.“*

(Koth, 2010/11: 9)

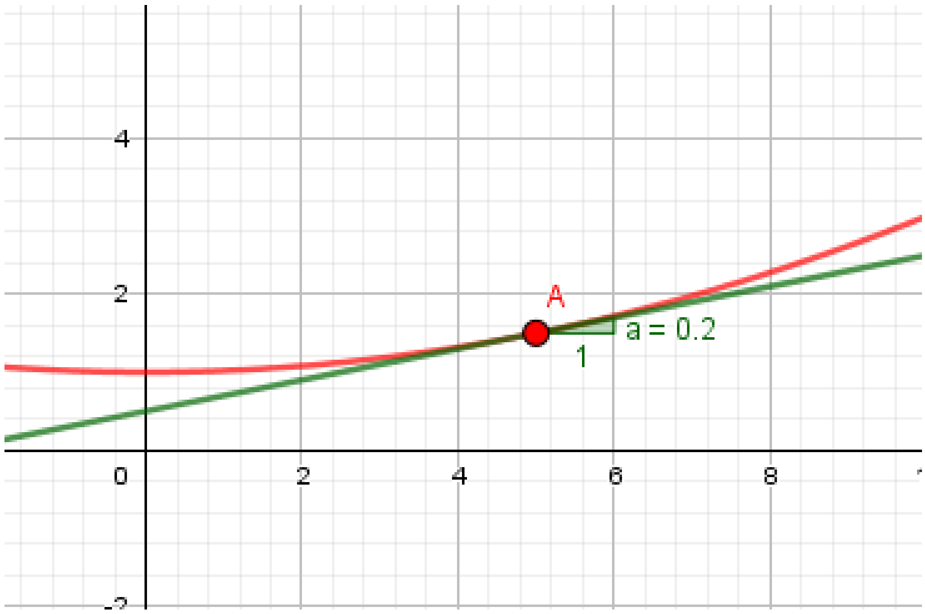


Abbildung 3: Differentialquotient

Grundvorstellungen zum Differenzialquotient

Seit Anbeginn der schulmathematischen Analysis gehört die Diskussion über den richtigen Zugang zur Ableitung zu den wichtigsten Fragen bezüglich des Analysis Unterrichts. Es gibt hierbei verschiedene Zugänge, die vor allem in der Mathematikdidaktik von großer Bedeutung sind. Es gibt verschiedene Grundvorstellungen auf welche die Basis für unterschiedliche Vorstellungen zum Ableitungsbegriff bilden (Bruder, 2015: 167).

Grundvorstellung: lokale Änderungsrate

Bereits in früheren Klassen müssen sich Schülerinnen und Schüler mit Änderungsprozessen auseinandersetzten, wie zum Beispiel bei der absoluten oder relativen Änderungsrate. Ein Beispiel dafür ist die Berechnung einer Geradensteigung mit Hilfe eines Steigungsdreiecks. Deshalb haben Schülerinnen und Schüler hier schon ein gewisses Vorwissen, an welches man anknüpfen kann (Greenfrath, 2016: 147). „In diesem Fall werden der Aspekt des Änderungsverhaltens einer Funktion und die Interpretation des Differenzenquotienten als Änderungsrate ins Zentrum gestellt" (Bruder, 2015: 169). Als Anwendungsbeispiel wird hier, wie bereits oben genannt, gerne die Änderung der Geschwindigkeit herangezogen. Das Erstellen einer Tabelle mit der mittlernen, relativen Geschwindigkeit bringt den Begriff der mittlernen Änderungsrate, die als Sekantensteigung gezeichnet werden kann. Wichtig ist hierbei, dass eine Beschleunigung dieser Art umso exakter beschrieben werden kann, desto kleiner das betrachtete Zeitintervall ist. Das bedeutet, dass man die Grenzen des Intervalls gedanklich immer näher zusammen laufen lässt, bis die Geschwindigkeitskurve beinahe gerade ist (Bruder, 2016: 169f).

Grundvorstellung: Tangentensteigung

Auch bei diesem Zugang nutzt man bereits gelerntes um Schülerinnen und Schüler an das Thema heranzuführen. In diesem Fall wird die Ableitung einer Funktion in einem Punkt als die Steigung der Tangente bestimmt. Schülerinnen und Schüler sind bereits vertraut mir der Steigung einer Gerade und ebenfalls mit der Definition einer Kreistangente und daran kann man anknüpfen (vgl.: Greenfrath, 2016: 149; Danchwerts, 2010: 46). Die gesuchte Tangente wird mit Hilfe einer Sekante, Definition des Differenzenquotienten, durch einen fixen und einen dynamischen Punkt angenähert. Für diesen Vorgang ist Geogebra oder ein anderes mathematisches Tool von Vorteil, da die Schülerinnen und Schüler selbst den dynamischen Punkt dem fixen beliebig nahe annähern können und somit das Intervall beziehungsweise den Abstand der Punkte beliebig verkleinern können. Dadurch wird der Übergang von der Sekante zur Tangente greifbar (vgl.: Greenfrath, 2016: 155f).

Über diese beiden Zugänge hinaus gibt es noch einige weitere Möglichkeiten Schülerinnen und Schüler den Einstieg in dieses Thema näher zu bringen. Die Methode der Tangentensteigung und der lokalen Änderungsrate als Grundvorstellung sind hierbei die am meist genutzten Methoden in der Schule, um die Lernenden von ihrem bis dahin angeeignet Wissensstand abzuholen und auf diesen aufzubauen.

4.2.3 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

<u>Differenzierbarkeit</u>

Die Ableitung einer Funktion f muss nicht zwingend existieren, daher an einem gewissen Punkt p zum Beispiel keine Tangente, daher keine erste Ableitung der Funktion besitzt (vgl.: Malle, 2016: 105).

Definition Differenzierbarkeit

> *„Sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Die Funktion f heißt differenzierbar in $p \in A$, wenn der Grenzwert $lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ existiert.“*

(vgl.: Fetzer, 2012: 340; Malle, 2016: 105)

Dazu passend beschäftigen wir uns mit der Funktion $f(x) = |x|$. Die Frage ist nun, ob diese Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

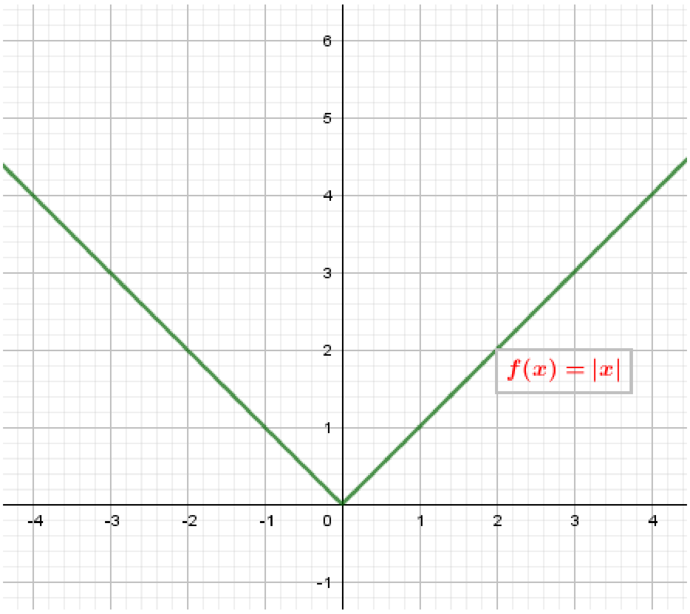


Abbildung 4: Differenzierbarkeit

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Wenn man nun $x = 0$ betrachtet muss man sich sowohl den linksseitigen, mit $x < 0$, als auch den rechtsseitigen, mit $x > 0$, Grenzwert betrachten:

rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{x}{x} = 1$

linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1$

Man sieht hier, dass die beiden Grenzwerte an der Stelle $x = 0$ nicht übereinstimmen und somit der Grenzwert $x \to 0$ nicht existiert. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle Null nicht differenzierbar.

(vgl.: Fetzer, 2012: 343)

Es gibt einige elementare Funktionen, wie Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Polynomfunktionen, Logarithmusfunktionen, rationale Funktionen und Winkelfunktionen, welche in ihrem jeweiligen Definitionsbereich immer differenzierbar sind (vgl.: Malle: 2016: 105).

<u>Stetigkeit</u>

Zu stetigen Funktionen kann man Graphen von Funktionen zählen die keine Sprünge aufweisen.

Definition Stetigkeit

> *„Sei* $: A \to \mathbb{R}$ *eine reelle Funktion. Eine Funktion* f *ist stetig an der Stelle* $p \in A$*; wenn* $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ *ist.“*

(vgl.: Fetzer, 2012: 344 ff; Malle, 2016: 105)

Potenz-, Polynom-, Winkel-, Exponential-, Logarithmus-, und rationale Funktionen sind stetige Funktionen in ihrem jeweiligen Definitionsbereich. (vgl.: Malle, 2016: 104)

Die beiden, in der Differentialrechnung sehr wichtigen, Begriffe stehen in engem Verhältnis miteinander, da wenn eine Funktion f in einer Stelle p differenzierbar ist, ist diese Funktion f an der Stelle p auch stetig (vgl.: Fetzer, 2012: 348). Die Umkehrung dieser Eigenschaft gilt jedoch nicht, da aus der Stetigkeit einer Funktion nicht zwingen die Differenzierbarkeit folgt. Das oben genannte Beispiel ist auch hier wieder aussagekräftig: die Funktion $f(x) = |x|$ ist in $p = 0$ stetig, aber an dieser Stelle, wie oben auch grafisch verdeutlicht nicht differenzierbar.

Satz Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit

„Ist f an der Stelle p differenzierbar, so ist f an der Stelle p stetig."

Beweis Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Wenn der Grenzwert $lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ existiert, dann ist f ist an der Stelle p differenzierbar. Es ist zu zeigen, dass der Limes von x gegen p von $f(x) - f(p)$ gleich Null ist. Somit kann man schreiben:

$$\lim_{x \to p}(f(x) - f(p)) = \lim_{x \to p}(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} * (x - p)) = f'(p) * 0 = 0$$

(vgl.: Fetzer, 2012: 348)

4.2.4 Ableitungsregeln

Den Differenzialquotient kann man, anders wie bisher, nicht nur für eine bestimmte Stelle x bestimmen, sondern für jede Stelle $x \in A$ den Differenzialquotient $f'(x)$ berechnen. Denn für jede Stelle eines Definitionsbereichs den Differentialquotienten berechnen zu müssen wäre viel zu aufwändig. (vgl.: Malle, 2016: 30) Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ist die erste Ableitung der Funktion $f(x)$. Die Ableitungen $f''(x) = (f')'$ und $f'''(x) = (f'')'$ sind die zweite und dritte Ableitung einer Funktion $f(x)$. Dies kann man beliebig weiter führen. (vgl.: Malle, 2016: 36)

Definition Ableitungsfunktion

„Die Funktion $f': x \to f'(x)$ nennt man Ableitungsfunktion von f oder kurz Ableitung von f. Die Berechnung der Ableitungsfunktion nennt man Ableiten oder Differenzieren."

(Malle, 2016: 30)

Im Weiteren werden Rechenregeln des Differenzierens von Funktionen verschiedener Arten aufgelistet und ihre Beweise behandelt. Die Reihenfolge unterschiedet sich teilweise mit der Struktur die in der Schule üblich beziehungsweise gern verwendet wird, da für manche Beweise bereits andere Regeln von großer Wichtigkeit sind.

Satz Ableitung einer konstanten Funktion

„$f = c \Longrightarrow f' = 0 \ (c \in \mathbb{R})$“

(vgl.: Koth, 2010/11: 10)

Beweis

„$f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = lim_{z \to x} \frac{c-c}{z-x} = lim_{z \to x} \ 0 = 0$“

(Malle, 2016: 30)

Die Ableitung einer konstanten Funktion c, wird immer Null.

Satz Ableitung der Potenzfunktion (für natürlichen Exponenten)

„$f(x) = x^n = f'(x) = n * x^{n-1} \ (n \in \mathbb{N}^*)$“

(Malle, 2016: 30)

Beweis

Bei diesem Beweis zieht man sich die Regel von Horner zu Hilfe.

$$f'(x) = lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = lim_{z \to x} \frac{z^n - x^n}{z-x} =$$
$$= lim_{z \to x} \frac{(z-x)*(z^{n-1}+z^{n-2}*x+z^{n-3}*x^2+\cdots+z*x^{n-2}*+x^{n-1})}{z-x} =$$
$$= lim_{z \to x}(z^{n-1} + z^{n-2} * x + z^{n-3} * x^2 + \cdots + z * x^{n-2} * +x^{n-1}) =$$
$$= (x^{n-1} + x^{n-2} * x + \cdots + x * x^{n-2} + x^{n-1}) = (x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1}) =$$
$$= n * x^{n-1}$$

(vgl.: Koth, 2010/11: 10; Malle, 2016: 30)

Satz Ableitung der identischen Funktion

„$f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$“

(Malle, 2016: 30)

Die Ableitung der identischen Funktion ist ein Sonderfall der Potenzregel für natürliche Exponenten.

Satz Regel vom kontanten Faktor

„$f(x) = c * g(x) \Longrightarrow f'(x) = c * g'(x)\ (c\ konstant)$“

(Malle, 2016: 30)

Beweis

Eingesetzt in die Definition der Ableitung erhält man $lim_{z\to x} \frac{c*g(z)-c*g(x)}{z-x}$ *und c kann herausgehoben werden. Dadurch ergibt sich* $lim_{z\to x}\ c * \frac{g(z)-g(x)}{z-x} = c * g'(x)$.

Ein konstanter Faktor k bleibt beim Differenzieren einer Funktion erhalten, daraus ergibt sich, dass die Ableitung eines k-fache einer Funktion das k-fache der Ableitung dieser Funktion ist. (Bleier, 2016: 43)

Satz Summen - und Differenzenregel

„$f(x) = g(x) + h(x) \Longrightarrow f'(x) = f(g(x) + h(x))' = g'(x) + h'(x)$“
„$f(x) = g(x) - h(x) \Longrightarrow f'(x) = f\big(g(x) - h(x)\big)' = g'(x) - h'(x)$“

(Malle, 2016: 31; Bleier, 2016: 44)

Beweis

$$f'(x) = (g+h)'(x) = lim_{z\to x} \frac{(g+h)(z)-(g+h)(x)}{z-x} =$$
$$= lim_{z\to x} \frac{[g(z)+h(z)]-[g(x)+h(x)]}{z-x} =$$
$$= lim_{z\to x} \frac{g(z)-g(x)+h(z)-h(x)}{z-x} = lim_{z\to x} \frac{g(z)-g(x)+h(z)-h(x)}{z-x} =$$
$$= lim_{z\to x} \left[\frac{g(z)-g(x)}{z-x} + \frac{h(z)-h(x)}{z-x}\right]$$

Wenn jetzt z gegen x strebt, dann strebt $\frac{g(z)-g(x)}{z-x}$ *gegen* $g'(x)$ *und analog* $\frac{h(z)-h(x)}{z-x}$ *gegen* $h'(x)$. *Der obenstehende Ausdruck in den eckigen Klammern* *strebt dann gegen* $g'(x) + h'(x)$ *und somit gilt, dass:*

$f(x) = g(x) + h(x) \Longrightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$ *ist.*

(vgl.: Koth, 2010/11: 11)

Bei der Summenregel werden die einzelnen Summanden differenziert und wieder als Summe angeschrieben. Dies funktioniert auch mit mehreren Summanden. Der Beweis lässt sich analog für mehrere Summanden und für $f(x) = g(x) - h(x)$führen.

Satz Produktregel

„$f(x) = u(x) * v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$*“*

(Malle, 2016: 84)

Beweis

Um die Produktregel zu beweisen wird der Ausgangsausdruck in die Formel $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ *eingesetzt. Man erhält* $\frac{u(z)*v(z)-u(x)*v(x)}{z-x}$*. Für die weiteren Schritte addiert man zum Zähler Null, wenn auch etwas anders angeschrieben:* $-u(x)v(z) + u(z)v(x)$*. Somit bleibt der Wert unverändert, aber der Ausdruck kann umgeformt werden.*

$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{u(z)*v(z)-u(x)v(z)+u(z)v(x)-u(x)*v(x)}{z-x}$ *durch herausheben kommt man auf:* $\frac{[u(z)-u(x)]*v(z)+u(x)*[v(z)-v(x)]}{z-x} = \frac{u(z)-u(x)}{z-x} * v(z) + u(x) * \frac{v(z)-v(x)}{z-x}$*.*

Der Limes von

$\frac{u(z)-u(x)}{z-x} = u'(x)$ *und der Limes von* $\frac{v(z)-v(x)}{z-x} = v'(x)$*. Somit kommt man auf:*

$f'(x) = lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = lim_{z\to x} \frac{u(z)-u(x)}{z-x} * v(z) + lim_{z\to x} u(x) * \frac{v(z)-v(x)}{z-x} =$

$= u'(x) * v(x) + u(x) + v'(x)$.

Um ein Produkt abzuleiten wird der erste Faktor differenziert und mit dem zweiten unveränderten Faktor multipliziert. Dies summiert man dann mit dem Produkt aus dem ersten unveränderten Faktor und dem zweiten differenziertem Faktor.

(vgl.: Malle, 2016: 84)

Satz Quotientenregel

„$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)*v(x) - u(x)*v\prime(x)}{[v(x)]^2}$ *für alle* $v \neq 0$*"*

(Malle, 2016: 85)

Beweis

Für den Beweis verwenden wir $\frac{\frac{u}{v}(z) - \frac{u}{v}(x)}{z-x} = \frac{\frac{u(z)}{v(z)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{z-x}$ *und um damit weiter rechnen zu können ein gemeinsamer Nenner der Brüche im Nenner gebildet* $\frac{\frac{u(z)*v(x)-u(x)*v(z)}{v(z)*v(x)}}{z-x} = \frac{u(z)*v(x)-u(x)*v(z)}{v(z)*v(x)*(z-x)}$. *Der Nenner wird nun, wie auch schon beim Beweis der Produktregel mit erweitert mit:* $-u(x)*v(x) + u(x)*v(x) = 0$. *Diesen Ausdruck* $\frac{u(z)*v(x)-u(x)*v(x)+u(x)*v(x)-u(x)*v(z)}{v(z)*v(x)*(z-x)}$ *kann man dann umformen:* $\frac{1}{v(z)v(x)} * \left[\frac{u(z)-u(x)}{z-x} * v(x) - u(x) * \frac{v(z)-v(x)}{z-x}\right]$ *und somit ergibt sich:* $f'(x) = lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{u'(x)*v(x)-u(x)*v'(x)}{[v(x)]^2}$

(vgl.: Koth, 2010/11: 41)

Um einen Bruch zu differenzierten wird im Nenner der Faktor aus dem Nenner der Ursprungsfunktion abgeleitet und mit dem ursprünglichen Zähler multipliziert. Davon wird das Produkt aus dem ursprünglicheren Nenner und dem abgeleiteten Zähler der Ursprungsfunktion abgezogen. Dividiert wird dies dann durch das Quadrat des ursprünglichen Zählers.

Satz Kettenregel

„$f(x) = u\big(v(x)\big) \Rightarrow f'(x) = u'\big(v(x)\big) * v'(x)$*"*

(Malle, 2016: 93)

Beweis

Zu aller erst wird das die betrachtete Funktion $f(x)$ *in den Differenzenquotient eingesetzt und man bekommt:* $\frac{u(v(z))-u(v(x))}{z-x}$. *Dieser Ausdruck wird erweitert mit*

$\frac{v(z)-v(x)}{v(z)-v(x)} = 1$. *Somit kann man diesen Ausdruck folgendermaßen geschickt anschreiben:* $\frac{u(v(z))-u(v(x))}{v(z)-v(x)} * \frac{v(z)-v(x)}{z-x}$ *und sofort erkennen, dass der zweite Ausdruck, wenn man davon den Grenzwert bildet* $v'(x)$ *ergeben wird. Beim ersten Bruch kann man* $v(z) = v$ *und* $v(x) = x$ *schreiben und somit ist* $\frac{u(v)-u(x)}{v-x}$*. Der Limes dieses Ausdrucks wäre dann:* $u'(x)$*. Wenn man dann wieder rückeinsetzt ergibt das* $u'(v(x))$*. Somit kann man schreiben:*

$$f'(x) = lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{u(v(z))-u(v(x))}{v(z)-v(x)} * \frac{v(z)-v(x)}{z-x} = u'\big(v(x)\big) * v'(x)$$

(vgl.: Malle, 2016: 93)

Der oben genannte Beweis ist so nicht korrekt, da der Ausdruck $v(z) - v(x)$ Null sein könnte. Deshalb wählt man eine Folge z_n mit $z_n \neq x \; \forall n$ und $z_n \to x$ und unterscheidet drei Fälle:

Fall 1: *mit* $v(z_n) \neq v(x) \forall n \geq N$

Der obige Beweis zeigt, dass $\frac{u(v(z_n))-u(v(x))}{z_n-x} \to u'(v(x) * v'(x)$

Fall 2: mit $v(z_n) = v(x) \forall n \geq N$

$\frac{v(z_n)-v(x)}{z_n-x} = 0 \to 0 \;\Longrightarrow v'(x) = 0$

$\frac{u(v(z_n))-u(v(x))}{z_n-x} = 0 \to 0 \Longrightarrow (u \circ v)'(x) = 0$

$(u \circ v)'(x) = 0 = 0 * u'(v(x)) = v'(x) = u'(v(x))$

Fall 3: es wird die Folge in zwei Teilfolgen zerlegt und es trifft entweder Fall 1 oder Fall 2 zu.

(vgl.: Raith, mündliche, 15.11.2018)

Bei der Kettenregel wird $u'\big(v(x)\big)$ *äußere Ableitung genannt, hierbei wird der gesamte Ausdruck abgeleitet, und* $v'(x)$ *die Innere Ableitung, hier wird nur der innere Teil abgeleitet. Das Produkt dieser beiden ist das Ergebnis der Kettenregel.*

(vgl.: Malle, 2016: 93)

Satz Ableitung von Umkehrfunktionen

„Ist g die stetige Umkehrfunktion einer stetigen reellen Funktion f, dann gilt: $g'(x) = \frac{1}{f\prime(g(x))}$*“*

(Malle, 2016: 97)

Beweis

Man setzt $y = f(x)$ und $t = f(z)$ weiters $x = g(y)$ und $z = g(t)$. Nun kann man sagen, dass sich z genau dann unbegrenzt x näher, wenn sich t unbegrenzt x nähert. Somit kann man schreiben: $g'(y) = lim_{t\to y}\frac{g(t)-g(y)}{t-y} = lim_{z\to x}\frac{z-x}{f(z)-f(x)}$ *diesen Ausdruck kann man weiter umformen auf:* $lim_{z\to x}\frac{1}{\frac{f(z)-f(x)}{z-x}} = \frac{1}{f\prime(x)} = \frac{1}{f\prime(g(y))}$*.Wenn man nun y durch x ersetzt bekommt man:* $g'(x) = \frac{1}{f\prime(g(x))}$.

(vgl.: Malle, 2016: 97)

Satz Ableitungsregel für Exponentialfunktionen

(1) „$f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$“
(2) „$f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x * ln\, a \ \ (wobei\ a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$“

(Malle, 2016: 89)

Beweis

(1)

Eingesetzt in die Definition der Ableitung, wobei hier $z - x = h$ und für $z = h + x$ eingesetzt wird. Somit ergibt sich $lim_{h\to 0}\frac{f(h+x)-f(x)}{h}$. Die e^x Funktion hier eingesetzt $\frac{e^x * e^h - e^x}{h}$. Durch herausgeben e^x ergibt sich $e^x * \frac{e^h - 1}{h}$.

Der Limes des Ausdrucks $\frac{e^h-1}{h}$ *geht gegen 1* $(*)$.

Somit erhält man: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+x)-f(x)}{h} = e^x * 1 = e^x$.

(vgl.: Koth, 2010/22: 53)

$(*)$ *Um diesen Beweis so durchführen zu können muss noch gezeigt werden, dass* $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ *ist. Hierzu setzt man* $y = e^h - 1$ *und durch umformen erhält man, dass* $h = ln(y+1)$ *ist. Eingesetzt in den Anfangsausdruck ergibt, dass* $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{ln(y+1)} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}ln(y+1)} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{ln((y+1)^{\frac{1}{y}})}$. *Der letzte Umformungsschritt ist wegen der Logarithmusregel* $ln\, x^b = b\, ln\, x$ *möglich. Für weitere Schritte greift man nun auf einen sehr bekannten Grenzwert,* $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, *zurück. Dadurch kann man erkennen, dass* $(y+1)^{\frac{1}{y}}$ *aus dem oberen Grenzwert* $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{ln((y+1)^{\frac{1}{y}})}$ *gleich* e *ist, wenn* y *gegen Null geht. Somit kann man, wegen der Grenzwertregeln schreiben:* $\frac{1}{ln(lim_{y\to 0}(y+1)^{\frac{1}{y}})}$.*Und somit ist der Ausdruck in der Klammer im Bruch gleich* e, *weil wenn* y *gegen Null geht und* $y = \frac{1}{n}$ *ist, dann geht* n *gegen Unendlich. Weil* $\frac{1}{ln\, e} = 1$ *ist, ist* $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$.

(vgl.: Polar Pi, Advanced Calculus: Limit Proofs - Limit as h goes to zero of [e^h-1]/h: 2017)

Das oben Gezeigte ist jedoch nur eine Beweisidee und kein vollständiger Beweis, weil nur mit einer konkreten Folge gearbeitete wird. Aus $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ folgt noch nicht, dass $\lim_{y\to 0^+}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

(2)

Weiters ist zu zeigen, dass die Ableitung der Funktion a^x *dieselbe Funktion Mal den natürlichen Logarithmus von* a *ist. Dazu verwendet man* $y = a^x$.
Man kann schreiben $a^x = (e^{log\, a})^x = e^{x\, log\, a}$. *Die Ableitung von* a^x *ist gleich*

$(a^x)' = (e^{x \log a})'$ und dies ist mit Anwendung der Kettenregel $e^{x \log a} * \log a$.
Da wie oben geschrieben $e^{x \log a} = a^x$ ist, kann man schreiben:
$(a^x)' = a^x * \log a$.

(vgl.: Koth, 2010/11: 53)

Satz Ableitung einer Logarithmusfunktion

„$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$"
„$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x * \ln a}$ $\quad (a \neq 1)$

(Malle, 2016: 97)

Beweis

$f(x) = \ln x$ ist die Umkehrfunktion von $g(x) = e^x$. Somit kann die Umkehrregel angewendet werden und es gilt:
$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

(vgl.: Koth, 2010/11: 54; Malle, 2016: 97)

Beweis

Bei diesem Beweis kann man sich der Regel bedienen, dass $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ ist. Somit ist: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \ln x * \frac{1}{\ln a}$. Aus dem ersten Beweis kann man dann schließen, dass die Ableitung von $f(x) = \ln x * \frac{1}{\ln a}$ gleich $f'(x) = \frac{1}{\ln a * x}$ ist.

(vgl.: Koth, 2010/11: 54; Malle, 2016: 97)

Satz Potenzregel für reelle Exponenten

„Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt:
$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r * x^{r-1}$

(Malle, 2016: 98)

Beweis

Die Funktion x^r *kann auch als* $(e^{\ln x})^r$ *geschrieben werden, da diese beiden Ausdrücke äquivalent sind. Mithilfe der Rechenregeln für Potenzen wird der zweite Ausdruck als* $e^{r*\ln x}$ *geschrieben. Des Weitern wird die Kettenregel verwendet. Wir erhalten:*$f'(x) = e^{r*\ln x} * \frac{r}{x}$*. Umgeformt ergibt dies weiter* $x^r * \frac{r}{x}$ *woraus durch Kürzen* $r * x^{r-1}$*.*
Somit ergibt sich: $f'(x) = r * x^{r-1}$*.*

(vgl: Malle, 2016: 98)

Bei der Ableitung einer Potenzfunktion wird der Exponent, natürlich oder reell, nach vorne geschrieben und mit dem ursprünglichen Ausdruck, bei welchem im Exponent minus Eins gerechnet wurde multipliziert.

Satz Ableitung Sinus-,Cosinus- und Tangensfunktion

(1) „$f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$*“*
(2) „$f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\sin x$*“*
(3) „$f(x) = \tan x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$*“*

(Malle, 2016: 90-92)

(1) Ableitung Sinusfunktion

1. Beweis

Für den Beweis der Ableitung einer Sinusfunktion nutzt man die Formel $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *, auch h-Methode genannt, und setzt in diese ein* $\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$*. Von diesem Ausdruck bildet man nun den Grenzwert und bekommt:* $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$*. Durch erweitern mit Hilfe des ersten Additionstheorem bekommt man den Ausdruck* $\lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$*. Diesen Ausdruck kann man durch geschicktes herausheben auch folgendesmaßen schreiben:* $\sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$*. Wenn man nun die Ausdrücke einzeln* *betrachtet ist* $lim_{h\to 0}\frac{cos\,h-1}{h}$ *gleich Null und somit ist* $sin\,x * 0 = 0$. *Der Limes von h gegen Null von* $\frac{sin\,h}{h}$ *ist gleich Eins und somit ist* $cos\,x * 1 = cos\,x$. *Das ergibt:* $f(x) = sin\,x \Longrightarrow f'(x) = cos\,x$.

h	$\boldsymbol{\frac{\sin h}{h}}$
0.1	0.9983341665
0.01	0.9999983333
0.0001	0.9999999983
0.000001	0.9999999999
0.0000001	1

Tabelle 1: Ableitung Sinusfunktion

(vgl.: ARTMath100, Ableitung von sin(x): 2012)

Beweis der Tabelle 2

Hier soll gezeigt werden, dass $lim_{h\to 0}\frac{sin\,h}{h} = 1$ *ist. Dafür betrachtet man in der Abbildung 5 den* $sin\,h$, *den Kreisbogen h,den* $tan\,h$ *und verschiedene von diesen Großen abhängige Flächen. Die Fläche des Dreiecks* $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *und dem Punkt A, genannt* Δ_{sin} *hat die Fläche* $\frac{1}{2}sin\,h$. *Die Fläche des Kreissegments, genannt* $\angle_h$, *ist* $\frac{h}{2}$ *und die Fläche des Dreiecks* $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *und dem Punkt B, genannt* Δ_{tan}, *beträgt* $\frac{1}{2}tan\,h$. *Diesen Ausdruck kann man auch anders schreiben, da* $\frac{1}{2}tan\,h = \frac{1}{2}\frac{sin\,h}{cos\,h}$. *Offensichtlich ist nun* $\Delta_{sin} \leq \angle_h \leq \Delta_{tan}$. *Also ist* $\frac{1}{2}sin\,h \leq \frac{h}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{sin\,h}{cos\,h}$, *daraus ergibt sich durch umformen:* $cos\,h \leq \frac{sin\,h}{h} \leq 1$. *Wenn man nun den Limes von h gegen Null bildet, geht Cosinus von h gegen 1. Der Limes von h gegen Null von 1 ist ebenfalls eins und somit ergibt sich die Ungleichung folgendermaßen:* $1 \leq lim_{h\to 0}\frac{sin\,h}{h} \leq 1$. *Somit, kann man sehen, dass der* $lim_{h\to 0}\frac{sin\,h}{h}$ *gegen 1 geht.*

(vgl.: MrYouMath, 1.Grenzwert sin(x)/x: 2012; Raith, mündlich: 29.11.2018)

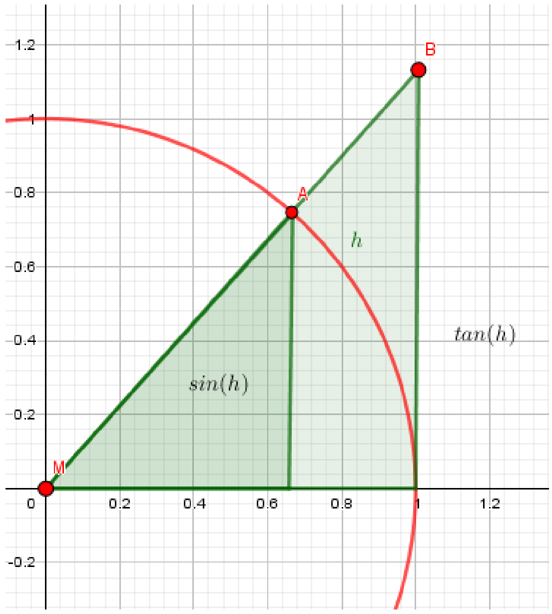


Abbildung 5: Sin(h)/h

2. Beweis

In dem zweiten Beweis verwendet man wieder die Definition des Differentialquotienten: $lim_{h \to 0} \frac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$ *jedoch wird die Regel des l'Hospital in diesem Fall nicht verwendet, weil dies vor allem in der Schule oft nicht bekannt ist und hier zu einem Zirkelschluss führen würde.*

In diesem Fall wird $h = 2k$ *angenommen und eingesetzt:*

$lim_{k \to 0} \frac{sin(x+2k)-sin(x)}{2k}$.

Hier kann man dann ein Additionstheorem für die Summe zweiter trigonometrischer Funktionen verwenden: $sin\, x - sin\, y = 2\, cos \frac{x+y}{2} sin \frac{x-y}{2}$.

Angewandt in diesem Fall schaut der Grenzwert dann folgendermaßen aus:

$lim_{k \to 0} \frac{2\, cos \frac{2x+2k}{2} sin \frac{2k}{2}}{2k} = \lim_{k \to 0} \frac{cos(x+k)\, sin\, k}{k} = \lim_{k \to 0} cos(x+k) * \lim_{k \to 0} \frac{sin\, k}{k} =$

$= cos\, x * \lim_{k \to 0} \frac{sin\, k}{k} = cos\, x * \lim_{h \to 0} \frac{sin\, h}{h}$. *Nun kann man nun wieder, wie oben in der Tabelle kleine Werte für* h *einsetzten und kann somit schreiben:*

$f'(x) = lim_{h \to 0} \frac{sin(x+h)-sin(x)}{h} = cos\, x * \lim_{h \to 0} \frac{sin\, h}{h} = cos\, x * 1 = cos\, x.$

(vgl.: ARTMath100, Ableitung von sin(x): 2012; Korntreff, 2014: 25ff)

Beweis Ableitung Cosinusfunktion

Für den Beweis der Ableitung der Cosinusfunktion nutzt setzt man $\cos x$ *gleich* $sin(x + \frac{\pi}{2})$*. Wenn man nun die Ableitung von Cosinus berechnen will schreibt man:* $\cos x' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi) = -\sin x$*. Somit hat man gezeigt, dass* $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\sin x$ *ist.*

(vgl.: Raith, mündlich, 15.11.2018)

Beweis Ableitung Tangensfunktion

Bei dem Beweis der Ableitung der Tangensfunktion nutzt man die Definition, dass $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *ist. Des Weiteren greift man hier auf die Quotientenregel, sowie die oben hergeleiteten Ableitungen von Sinus und Cosinus zurück. Man bekommt* $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$*.*

Wenn man $\frac{cos^2(x)+sin^2(x)}{[cos(x)]^2}$ *als* $\frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}$ *schreibt, kann man auf* $1 + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}$ *kürzen. Somit gilt wegen der Definition des Tangens auch* $f'(x) = 1 + tan^2(x)$*.*

(vgl.: Jung, Ableitung tan(x), Trigonometrische Funktionen, Tangens, Ableiten: 2015)

Satz Ableitung der Quartwurzelfunktion

„$f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$*“*

(Malle, 2016: 92)

Beweis

Als erstes wird in die Formel des Differenzenquotient eingesetzt, somit ergibt sich $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}$*. Den Nenner kann man auch als* $\left(\sqrt{z} - \sqrt{x}\right) * \left(\sqrt{z} + \sqrt{x}\right)$ *wodurch gekürzt werden kann und das Zwischenergebnis* $\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}$ *ist. Dieser*

Ausdruck wird in die Definition des Differentialquotienten eingesetzt und er ergibt sich: $f'(x) = lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z \to x} \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2 * \sqrt{x}}$

(vgl.: Koth, 2010/11: 49)

4.2.5 Untersuchung von Funktionen

Bei der Untersuchung von Polynomfunktionen, auch Kurvendiskussion genannt, werden die Eigenschaften einer Funktion mit Hilfe der verschiedenen Möglichkeiten der Differentialrechnung untersucht (vgl.: Bleier, 2016: 77).

Eine Funktion weist einem Intervall, oder Teilintervallen ihres Definitionsbereichs, ein gewisses Monotonieverhalten auf. Dieses einheitliche Verhalten auf einem (Teil-) Intervall nennt man Monotoniebereich. Die Funktion kann entweder (streng) monoton steigend oder (streng) monoton fallend sein. Ist die Funktion in einem Intervall monoton fallend so ist jeder Punkt, rechts vom Anfangspunkt der Funktionswert nicht größer als der Funktionswert des Ausgangspunktes. Analog funktioniert das bei monoton steigenden Funktionen.

Definition Monotonie

„Es sei $f: A \to \mathbb{R}$ *eine reelle Funktion und M eine Teilmenge von A. die Funktion f heißt:*
monoton steigend in M, wenn $\forall\ x_1, x_2 \in M$ *gilt:*$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
monoton fallend in M, wenn $\forall\ x_1, x_2 \in M$ *gilt:* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
str. monoton steigend in M, wenn $\forall\ x_1, x_2 \in M$ *gilt:* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
str. monoton fallend in M, wenn $\forall\ x_1, x_2 \in M$ *gilt:* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$*“*

(Malle, 2016: 40)

Definition Nullstelle

„Es sei $f: A \to \mathbb{R}$ *eine reelle Funktion. Eine Stelle* $\alpha \in A$ *heißt Nullstelle von f, wenn* $f(\alpha) = 0$*.“*

(Malle, 2016: 10)

Eine Nullstelle einer Funktion ist also der x-Wert an welchem der y-Wert gleich Null ist. Der Graph der untersuchten Funktion schneidet bei einer Nullstelle die x-Achse. Jede Funktion kann auch mehrere Nullstellen besitzen und könnten ermittelt werden in dem die Funktionsgleichung gleich Null gesetzt und die Gleichung gelöst wird. (vgl.: Fokkens, Nullstelle einer Funktion: 2012) Jedoch kann einer Polynomfunktion von Grad n nur maximal n Nullstellen besitzen. (Malle, 2016: 10)

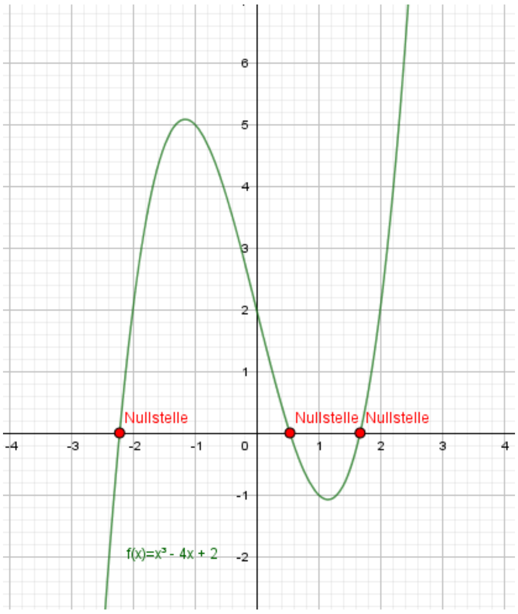


Abbildung 6: Nullstelle

Definition Maximum- und Minimumstellen

> *„Sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $M \subseteq A$. Eine Stelle $p \in M$ heißt*
> *Maximumstelle von f in M, wenn $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in M$.*
> *Minimumstelle von f in M, wenn $f(x) \geq f(p)$ für alle $x \in M$.*
> *Extremstelle von f in M, wenn p eine Maximum- oder Minimumstelle von f in M ist.“*

(Malle, 2016: 41)

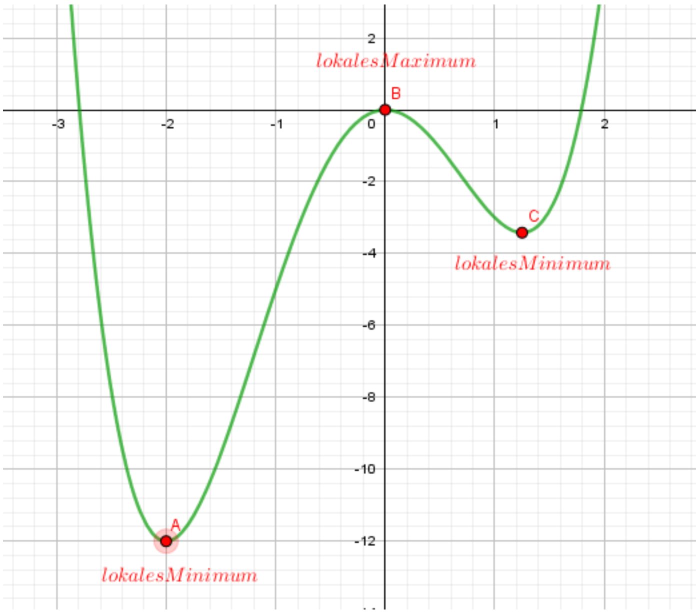


Abbildung 6: lokales Extremum

Definition lokale Extremstelle

> *Sei* $\mathrm{f}: \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $\mathrm{p} \in \mathrm{A}$.
> *Falls ein* $\delta > 0$ *existiert, sodass* $(\mathrm{p}-\delta, \mathrm{p}+\delta) \subseteq \mathrm{A}$ *und* p *ein Maximum von* f *auf* $(\mathrm{p}-\delta, \mathrm{p}+\delta)$, *dann nennt man* p *ein lokales Maximum.*
> *Falls ein* $\delta < 0$ *existiert, sodass* $(\mathrm{p}-\delta, \mathrm{p}+\delta) \subseteq \mathrm{A}$ *und* p *ein Minimum von* f *auf* $(\mathrm{p}-\delta, \mathrm{p}+\delta)$, *dann nennt man* p *ein lokales Minimum.*
> *Man nennt* p *lokales Extremum, wenn es ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.*

(vgl.: Raith, mündlich: 18.10.2018)

Eine Extremstelle an einer Stelle p ist eine Stelle der Funktion an der sich das Vorzeichen des Tangentenanstiegs ändert. An diesem Punkt ist die Tangente parallel zur x-Achse und die Steigung $f'(p) = k = 0$, dies ist eine notwenige Bedingung für eine lokale Extremstelle. Die Funktion ändert an dieser Stelle ihr Monotonieverhalten, was als hinreichende Bedingung gilt. In der betrachteten Stelle p muss die Krümmung daher positiv oder negativ sein um sicherzugehen, dass ein Hoch- beziehungsweise Tiefpunkt vorherrscht.

Satz lokales Extremum

Wenn p ein lokales Extremum von f ist, dann ist $f'(p) = 0$.

(Raith, mündlich: 15.11.2018)

Satz Notwenige Bedingung für lokale Extremstellen

„Eine lokale Maximumstelle liegt vor, wenn $f'(p) = 0$ und $f''(p) < 0$ gilt. Eine lokale Minimumstelle liegt vor, wenn $f'(p) = 0$ und $f''(p) > 0$ gilt.“

(Bleier, 2016: 79)

Gegenbeispiel für notwenige Bedingung für lokale Extremstellen

Die Funktion $f(x) = x^4$ in dem Punkt $(0|0)$ ein lokales Extremum. Es ist jedoch nicht möglich mit der oben genannten Bedingung zu bestimmen ob es eine Minimum- oder Maximumstelle ist, da $f''(x) = 12x^2$ ist und da $f''(0) = 0$ ergibt.

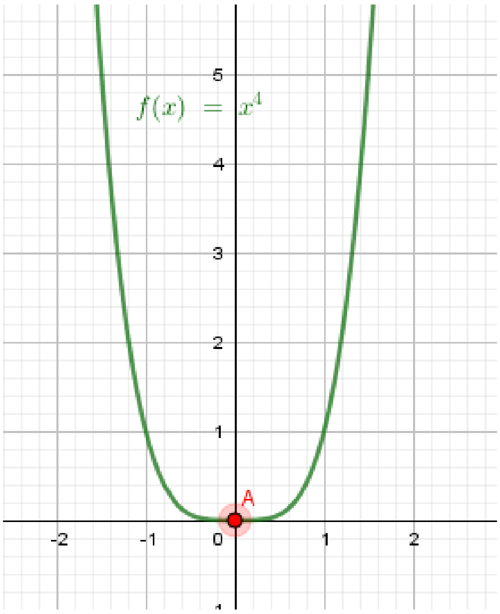


Abbildung 7: Gegenbeispiel

Satz Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen

> *„Ändert eine Polynomfunktion f ab der Stellen p das Monotonieverhalten, dann ist p eine lokale Extremstelle von f."*

(Malle, 2016: 43)

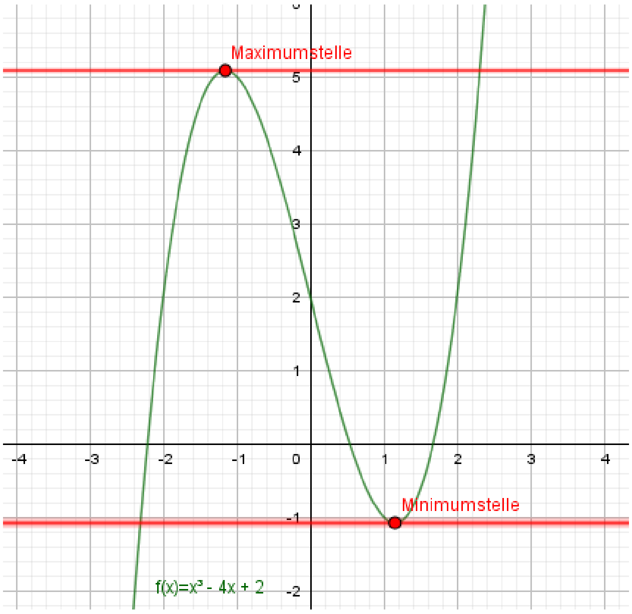


Abbildung 8: Minimum Maximum

Eine globale Maximum oder Minimum liegt in einem bestimmten Definitionsbereich entweder an einem lokalen Maximum oder Minimum oder am Rand des Definitionsbereiches vor (vgl.: Bleier, 2016: 91). In der rechten Grafik kann man erkennen, dass das globale Minimum der Funktion im $\mathbb{D} = [-3,2]$ im Punkt A liegt, da dies der tiefste Punkt der Funktion in diesem Intervall ist. Der Punkt B jedoch ist kein globales Maximum, da der Rand des Definitionsbereichs, also 2, höher als der Punkt B liegt. Daher ist B weiterhin ein lokales Maximum der Funktion.

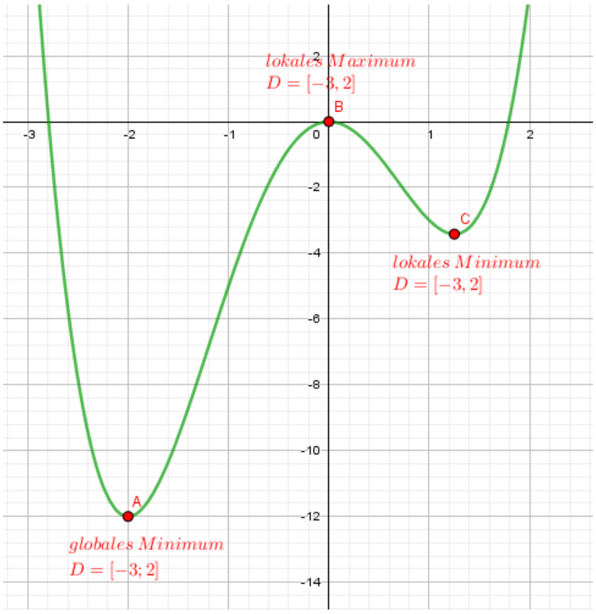


Abbildung 7: globales Extremum

Definition Terrassenpunkt/Sattelpunkt

> *„Eine Stelle p mit $f'(p) = 0$, an der sich das strenge Monotonieverhalten einer Polynomfunktion nicht ändert, heißt Terrassenstelle von f oder Sattelstelle von f. Der dazugehörige Punkt auf dem Graphen von f heißt Terrassenpunkt oder Sattelpunkt."*

(Malle, 2016: 47)

Dieser Sattelpunkt ist also eine Spezialform, ein kritischer Punkt, welcher gleich berechnet wird wie ein Extrempunkt, jedoch auch ähnlich einem Wendepunkt ist.

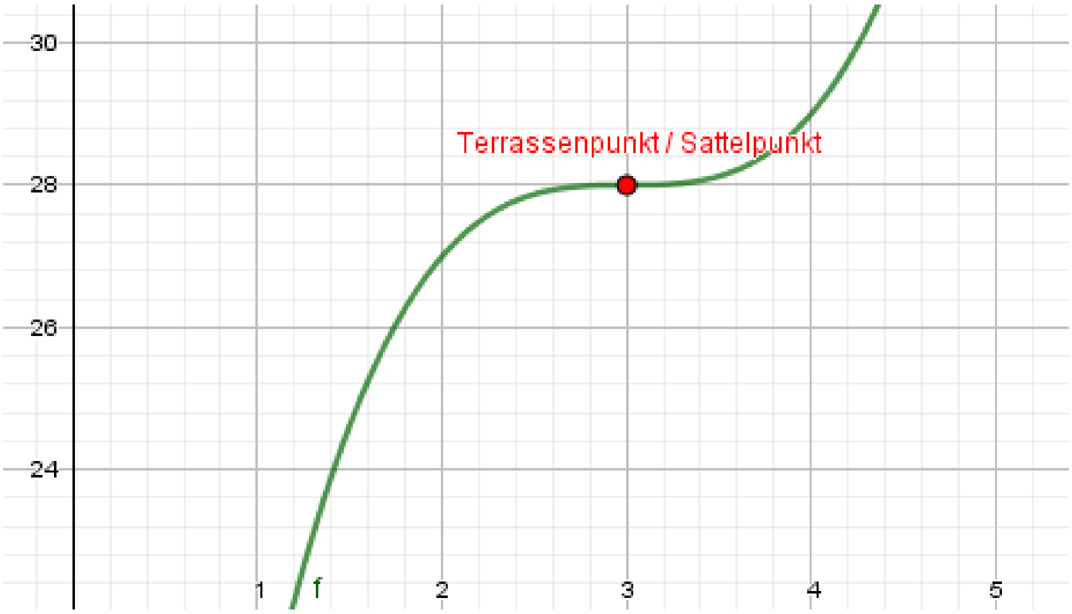


Abbildung 8: Sattelpunkt

Definition Krümmung

> *Sei* $M \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f: M \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. dann heißt* f
>
> *konvex, falls* $\forall x < y$ *und* $\forall t \in [0,1]$ *gilt* $f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$
>
> *strikt konvex, falls* $\forall x < y$ *und* $\forall t \in [0,1]$ *gilt* $f\big((1-t)x + ty\big) < (1-t)f(x) + tf(y)$
>
> *konkav, falls* $\forall x < y$ *und* $\forall t \in [0,1]$ *gilt* $f\big((1-t)x + ty\big) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$
>
> *strikt konkav, falls* $\forall x < y$ *und* $\forall t \in [0,1]$ *gilt* $f\big((1-t)x + ty\big) > (1-t)f(x) + tf(y)$.

(Raith, 2014: o.S.)

Aus dieser Definition des Krümmungsverhaltens kann man die nächste Definition ableiten, da an diesen Stellen, an welchen sich das Krümmungsverhalten ändert ein Wendepunkt ist. Dieser Punkt wird für Schülerinnen und Schüler oft durch das Beispiel des Lenkens beim Auto deutlich gemacht. Wenn man von oben eine kurvige Straße betrachtet und man stellt sich vor, dass man diese Straße mit dem Auto fährt, ist genau da der Wendepunkt wo zwischen den zwei Kurven das Lenkrad genau wieder gerade gerichtet wird.

Definition Wendestelle und Wendetangente

> *„Sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Stelle $p \in A$ heißt Wendestelle von f, wenn sich an der Stelle p das Krümmungsverhalten von f ändert. Der Punkt $(p|f(p))$ heißt Wendepunkt des Graphen von f, die Tangente an den Graphen in diesem Punkt heißt Wendetangente.“*

(Malle, 2016: 52)

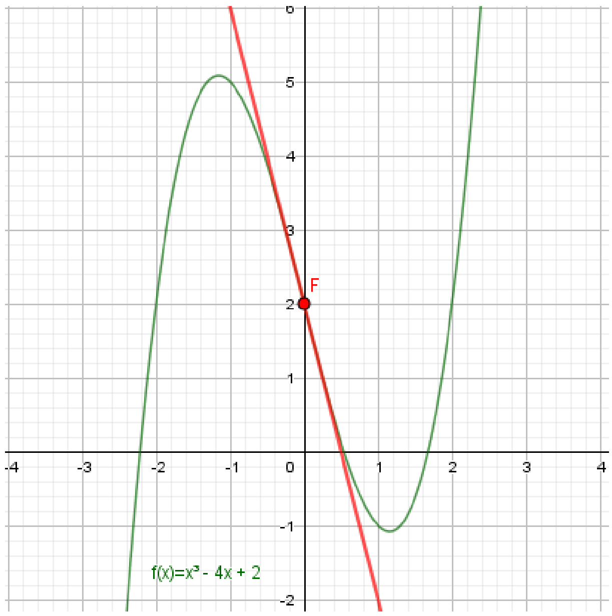


Abbildung 9: Wendepunkt

An diesem Punkt $(p|f(p))$, dem Wendepunkt, berührt die Wendetangente den Graphen der Funktion. An diesem Punkt wechselt die Funktion die Seite der Tangente, also in der obenstehenden Grafik von links nach rechts. An dieser Stelle ändert die zweite Ableitung der Funktion f das Vorzeichen und daher muss $f''(p) = 0$ sein (vgl.: Malle, 2016: 52).

Bei der oben zu sehenden Grafik ist darüber hinaus noch zu erwähnen, dass es mit bloßem Auge oft kaum zu erkennen ist, wo genau sich der Wendepunkt befindet, da es, wie in diesem Fall, so aussieht, als wären Funktion und Tangente über einen längeren

Abschnitt ident. Es ist folglich nicht eindeutig zu erkennen, wann genau die Funktion die Seite der Tangente wechselt, beziehungsweise wo sich der Berührpunkt befindet.

Satz Notwenige Bedingung für Wendestellen

> *Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist und p ein innerer Punkt von I.*
> *Falls p ein Wendepunkt von f ist und f zweimal differenzierbar ist, dann gilt $f''(p) = 0$.*

(vgl.: Malle, 2016: 52; Raith, mündlich: 03.01.2019)

Satz Hinreichende Bedingung für Wendestellen

> *Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist und p ein innerer Punkt von I. Weiters sei f in p dreimal differenzierbar.*
> *Falls $f''(p) = 0$ und $f'''(p) \neq 0$, dann ist p ein Wendepunkt von f.*

(vgl.: Malle, 2016: 52; Raith, mündlich: 03.01.2019)

Gegenbeispiel für hinreichende Bedingung für Wendestellen

> *Die Funktion $f(x) = x^5$ in dem Punkt $(0|0)$ eine Wendestelle. Die dritte Ableitung der Funktion ist $f'''(x) = 60x^2$ ist und daher ergibt $f'''(0) = 0$. Somit ist mit einem Gegenbeispiel widerlegt, dass die oben genannte „Hinreichende Bedingung“ auch notwendig ist.*

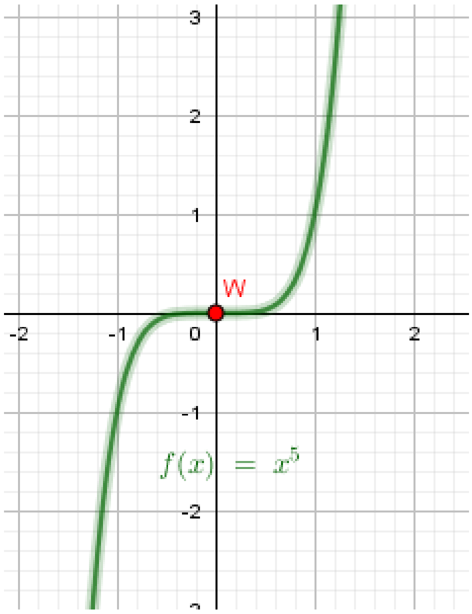


Abbildung 10: Gegenbeispiel Wendestelle

Bei dieser „klassischen Kurvendiskussion“ ermittelt man, mit den oben genannten Möglichkeiten, die Eigenschaften einer gegebenen Funktion. Darüber hinaus ist es aber möglich mit gegebenen Eigenschaften eine passende Funktion zu finden. Das Suchen nach einer geeigneten Funktion nennt man auch „umgekehrte Kurvendiskussion“ oder in vielen Schulbüchern auch Umkehraufgabe.
Mit den Hilfsmitteln der Analysis lassen sich die einzelnen Eigenschaften zu einem großen Ganzen zusammenfügen. Wichtig ist bei einer Umkehraufgabe, dass ein Bogen zwischen den einzelnen betrachteten Stellen bis zum Gesamtverhalten einer Funktion gezogen wird (Greefrath, 2016: 191f).

Zum Beispiel finden diese Umkehr- und Modellbildungsaufgaben in physikalischen, biologischen und wirtschaftlichen Vorgängen Verwendung. Man wählt für das mathematische Modell einen passenden Funktionstyp und bestimmt mit Hilfe der Zusatzinformationen und Eigenschaften den Term.

Einführungsbeispiel für Umkehraufgaben

> *Eine Polynomfunktion dritten Grades hat im Punkt $E = (-2|3)$ ein lokales Extremum und $W = (-1|0)$ einen Wendepunkt. Ermittle die Funktion.*

Zuerst wird eine Polynomfunktion 3. Grades allgemein angegeben.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Danach alle benötigten Ableitungen dieser berechnet. In diesem Fall benötigt man wegen den Bedingungen (lokales Extremum, Wendestelle) die erste und zweite Ableitung.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Im nächsten Schritt werden mit allen gegebenen Bedingungen unabhängige Gleichungen erstellt. Bei einer Polynomfunktion 3. Grades werden vier Gleichungen, für alle vier Koeffizienten benötigt.

1. Gleichung + 2. Gleichung: Die Punkte E und W müssen auf dem Graphen liegen.

3. Gleichung: Da Punkt E ein lokales Extremum ist, muss die erste Ableitung gleich Null gesetzt werden.

4. Gleichung: Da Punkt W ein Wendepunkt ist, muss die zweite Ableitung gleich Null gesetzte werden.

I	$f(-2) = 3$
II	$f(-1) = 0$
III	$f'(-2) = 0$
IV	$f''(-1) = 0$

In den folgenden Schritten muss dieses Gleichungssystem möglichst sinnvoll gelöst werden.

I	$f(-2) = 3$	$-8a + 4b - 2c + d = 3$
II	$f(-1) = 0$	$-a + b - c + d = 0$
III	$f'(-2) = 0$	$12a - 4b + c = 0$
IV	$f''(-1) = 0$	$-6a + 2b = 0 \Longrightarrow -3a + b = 0$

„b“ wird aus IV ausgedrückt, $b = +3a$, und in die anderen Gleichungen eingesetzt.

I	$-8a + 4b + 2c + d = 3$	$4a - 2c + d = 3$
II	$-a + b - c + d = 0$	$2a - c + d = 0$
III	$12a - 4b + c = 0$	$\boldsymbol{c = 0}$

„c“ wird in die anderen Gleichungen eingesetzt.

I	$4a - 2c + d = 3$	$4a + d = 3$
II	$2a - c + d = 0$	$2a + d = 0$

„d“ in einer der beiden Gleichungen ausgedrückt und wieder eingesetzt.

II	$2a + d = 0$	$d = -2a$
I	$4a + d = 3$	$4a - 2a = 3 \Rightarrow \boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$

„a“ wird wiederum eingesetzt. Dieses System wird fortgeführt bis alle Koeffizienten berechnet sind. Die Ergebnisse werden in die allgemeine Funktionsgleichung einer Polynomfunktion dritten Grades eingesetzt.

II	$2a + d = 0$	$d = -2 * \frac{3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{d = -3}$
IV	$-3a + b = 0$	$b = +3a \Rightarrow 3 * \frac{3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{b = \frac{9}{2}}$

Somit ist die gesuchte Funktion:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3$$

(vgl.: Malle, 2016: 116f)

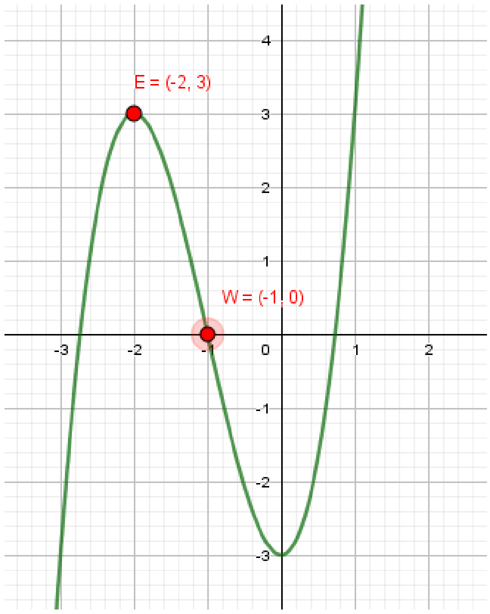


Abbildung 11: Umkehraufgabe

4.2.6 Extremwertaufgaben

Bei einer Extremwertaufgabe handelt es sich um eine Anwendungsaufgabe im Bereich der Differentialrechnung. Es wird untersucht unter welchen Bedingungen eine Größe einer Funktion möglichst klein oder groß wird. Zum Beispiel ist ein Schnittmuster auf einer bestimmten Fläche so anzuordnen, dass so wenig wie möglich Verschnitt entsteht oder bei einer geplanten Route soll die Fahrzeit oder die Kilometeranzahl so gering wie möglich sein (vgl.: Bleier, 2016: 124).

Hierbei kann bei vielen Beispielen das Folgende oder ein sehr ähnliches Schema angewendet werden. Zu aller erst wird wenn möglich eine Skizze, Tabelle o.ä. bezüglich der Sachlage angefertigt, um das zu bearbeitende Problem besser verstehen zu können.

Danach wird die Zielgröße ermittelt und diese in Verbindung mit anderen Variablen als Zielfunktion festgelegt.

Weiters wird eine oder mehrere Nebenbedingungen aus weiteren Angaben im Text zusammengestellt. Diese wird soweit umgeformt, dass eine Variable, welche auch in der Zielfunktion vorhanden ist, ausgedrückt wird.

Im nächsten Schritt wird die umgeformte Nebenbedingung/umgeformten Nebenbedingungen in die Zielfunktion eingesetzt, sodass eine Funktion mit nur einer

Variable entsteht. Für diese Variablen muss dann der zulässige Bereich bestimmt werden.
Im nächsten Schritt wird die Funktion abgeleitet (nach den Regeln in 3.2.4) und diese 1. Ableitung gleich Null gesetzt.
Die erhaltenen Werte müssen nun mit den Randstellen des Definitionsbereichs abgeglichen werden, ob sie auch im zulässigen Bereich liegen. (vgl.: Malle, 2016: 67; Bleier, 2016: 124f).

1. Extremwertbeispiel: Einführungsbeispiel

Welches Rechteck mit dem Umfang $u = 80$ *hat den größten Flächeninhalt?*

Zielgröße ist in diesem Fall der Flächeninhalt A. Und die Zielfunktion ist

$$A(x, y) = \boldsymbol{x * y}$$

Gegeben sind darüber hinaus der Umfang des Rechtsecks und somit ist die Nebenbedingung

$$80 = 2(x + y) \Longrightarrow 40 = x + y \Longrightarrow \boldsymbol{40 - y = x}$$

Eingesetzt in die Zielfunktion ergibt das

$$A(y) = (40 - y) * y \Longrightarrow \boldsymbol{40y - y^2}$$

Der Definitionsbereich ist hier nur sinnvoll für positive x und y, da eine negative Länge nicht möglich ist. Der Definitionsbereich umfasst somit ($\boldsymbol{0 \leq y \leq 40}$).

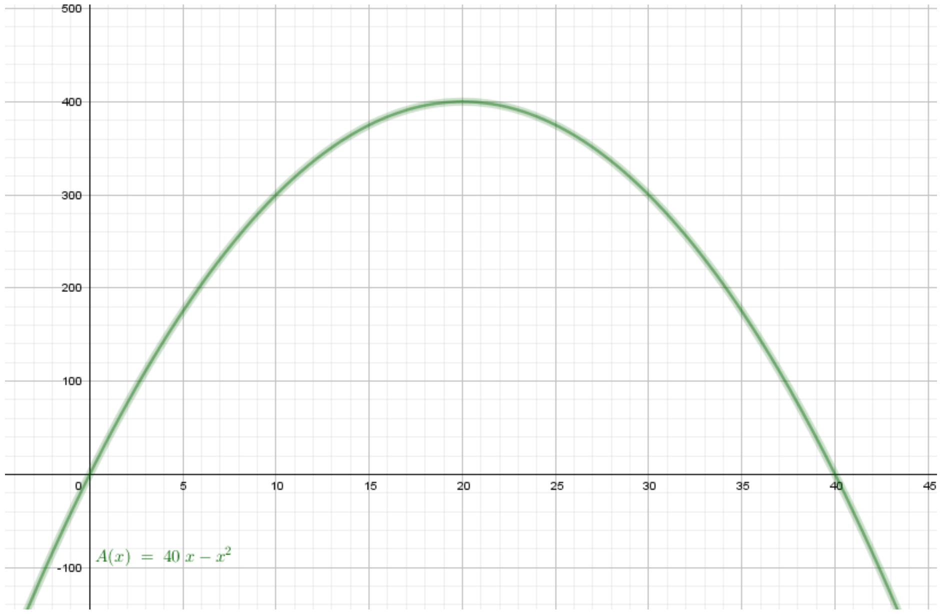


Abbildung 12: Extremwertaufgabe

Nun wird die Funktion abgeleitet und diese gleich Null gesetzt

$$A(y) = 40y - y^2 \Longrightarrow \boldsymbol{A'(y) = 40 - 2y}$$

$$A'(y) = 40 - 2y = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{20 = y}$$

Es ist dann $A(20) = 400$. Mithilfe der Untersuchung der Randwerte kann man herausfinden, ob ein globales Minimum oder Maximum vorliegt.

$$A(y) = 40y - y^2$$

$$A(0) = 0; A(40) = 0$$

Wenn keine der beiden Werte größer beziehungsweise höher der Maxima sind, ist die Stelle $y = 20$ Maximum.

Somit handelt es sich hier wie gewünscht um ein Maximum. Nun wird y in die Nebenbedingung eingesetzt und x berechnet.

$$80 = 2(x + y) \Longrightarrow 40 = x + 20 \Longrightarrow \boldsymbol{20 = x}$$

Somit ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $x = y = 20$ am flächengrößten.

2. Extremwertbeispiel: Sektglas

Ein kegelförmiges Sektglas mit der Seitenkante $s = 12cm$ soll so gestaltet werden, dass das Volumen maximal wird. Wie groß sind Radius und Höhe?

Die Zielgröße ist in diesem Fall das Volumen des Sektglases und somit ist die Zielfunktion

$$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Gegeben ist darüber hinaus noch die Seitenkantenlänge s mit $12cm$. Wobei man sich hier mit einer vereinfachten Skizze helfen kann. Zweidimensional kann man einen Kegel als gleichseitiges Dreieck darstellen und so mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Nebenbedingung aufstellen.

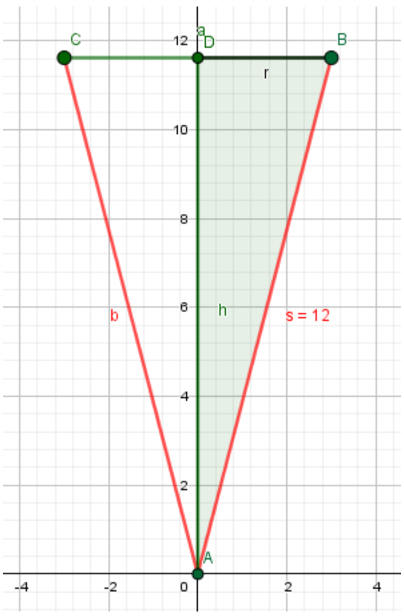


Abbildung 13: Skizze Sektglas

$$r^2 + h^2 = s^2$$

Umgeformt ergibt das:

$$r^2 = s^2 - h^2$$

Eingesetzt in die Zielfunktion ergibt sich daraus:

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(s^2 - h^2)h$$

$$V(h) = \frac{144h\pi}{3} - \frac{h^3\pi}{3}$$

$$V(h) = 48h\pi - \frac{h^3\pi}{3}$$

Der Definitionsbereich ist nur für positive h und r sinnvoll daher muss der Definitionsbereich $(0 \leq h \leq 12)$ sein.

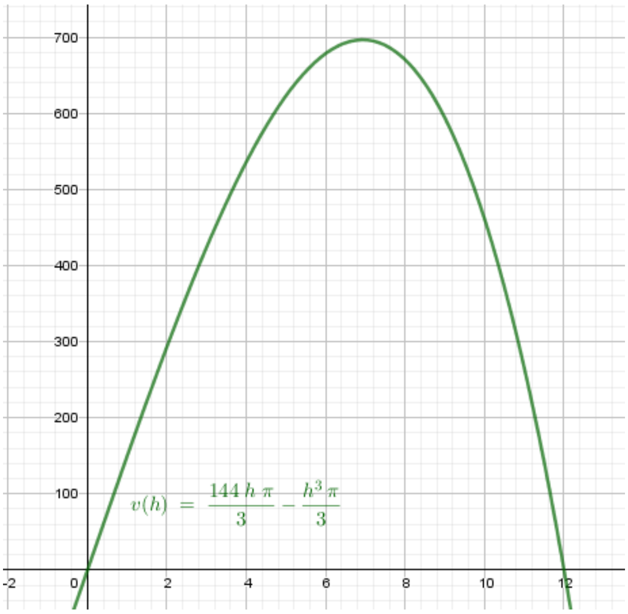


Abbildung 14: Funktion Sektglas

Dieser Ausdruck wird nun abgeleitet, gekürzt und gleich Null gesetzt damit man h berechnen kann:

$$V'(h) = 48\pi - h^2\pi$$

$$0 = 48\pi - h^2\pi | + h^2\pi \; |: \pi$$

$$h^2 \; = 48 \; |\sqrt{}$$

$$h = \sqrt{48} \Longrightarrow \boldsymbol{h \approx 6.93}$$

Hier müssen wiederum die Ränder überprüft werden ob auch wirklich ein Maximum vorliegt:

$$V(h) = 48h\pi - \frac{h^3\pi}{3}$$

$$V(\sqrt{48}) = 32\pi\sqrt{48} \approx 696.5$$

$$V(0) = 0; V(12) = 0$$

Hier sind beide nicht größer beziehungsweise nicht höher als der errechnete Hochpunkt und somit kann h in die Nebenbedingung eingesetzt und r berechnet werden.

$$r^2 = 12^2 - 48 = 96 \Longrightarrow r = \sqrt{96} \approx \mathbf{9.80}$$

3. Extremwertbeispiel: abgebrochenes Glasstück

Von einer rechteckigen Glasplatte ist eine Ecke abgebrochen. Aus dem Rest soll eine Scheibe möglichst großer Fläche geschnitten werden. Wie ist der Punkt P hierbei zu wählen?

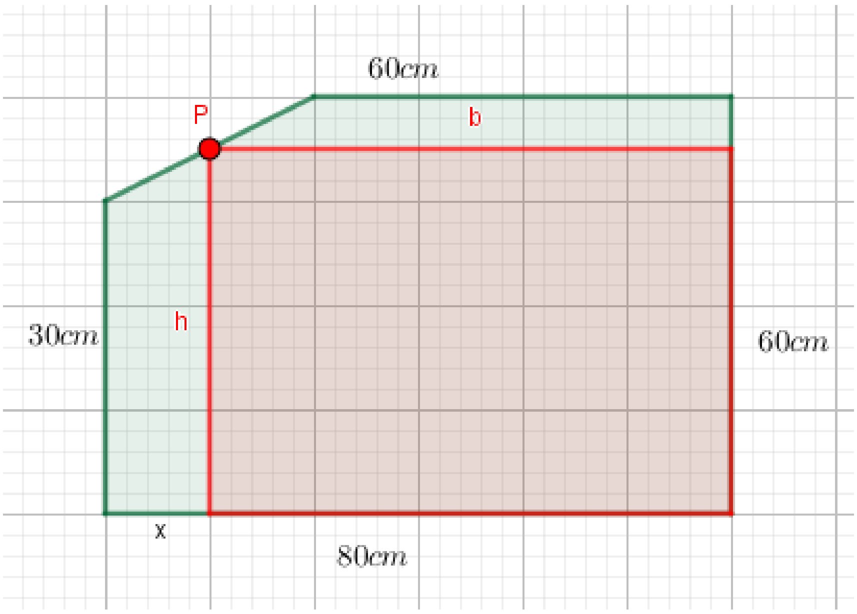


Abbildung 15: Skizze Glasstück

Zielgröße ist in diesem Fall der Flächeninhalt A. Und die Zielfunktion ist

$$A(b, h) = \boldsymbol{b * h}$$

Um die Nebenbedingung zu formulieren benötigt man mehrere Aspekte. Zum ersten ist $b = 80 - x$ und der Punkt P liegt auf der Geraden zwischen den Punkten $(0|30)$ und

$(20|60)$, dadurch kann diese beschrieben werden mit $g = (60 - 30) : (20 - 0) = 1.5$ und $h_2 = 30$. Das $h = 30 + 1.5x$. Die Variable x kann nur die Werte zwischen 0 und 20 annehmen und somit ist $0 \leq x \leq 20$.

Somit wird $b = 80 - x$ und $h = 30 + 1.5x$ in die Zielfunktion eingesetzt und diese enthält nur noch eine Variable.

$$A(x) = (80 - x) * (30 + 1.5x)$$

$$A(x) = 2400 - 30x + 120x - 1.5x^2$$

$$A(x) = -1.5x^2 + 90x + 2400$$

Diesen Ausdruck wird ableitet und gleich Null gesetzt

$$A'(x) = -3x + 90$$

$$0 = -3x + 90 \; |-90| : (-3)$$

$$\mathbf{30 = \boldsymbol{x}}$$

Der Wert $x = 30$ liegt nicht in dem genannten Intervall und somit müssen die Ränder des Definitionsbereichs betrachtet werden, um ein globales Maximum zu erhalten.

$$A(x) = -1.5x^2 + 90x + 2400$$

$$A(0) = 2400; A(20) = 3600$$

Der gesuchte Punk ist $\boldsymbol{P} = (\mathbf{20|60})$.

5 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Der Existenz und Eindeutigkeitssatz beschäftigt sich damit, ob überhaupt eine Lösung für eine Differentialgleichung existiert. Durch den Satz von Picard-Lindelöf und von Peano lässt sich die lokale Lösbarkeit von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialrechnungen erster Ordnung beschreiben.

5.1 1.Proposition und Beweis der 1. Proposition

Es sei I ein Intervall und I° ein das Innere des Intervalls mit $I = [a,b], [a,b), (a,b], (a,b) \Longrightarrow I^{\circ} = (a,b)$. D ist Teilmenge von $\mathbb{R}^r$, dann ist f definiert als eine Funktionvon $D \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^r$. Das Anfangswertproblem ist gleich $\dot{x} = f(x,t)$ und $x(t_0) = x_0$.

Dieses Anfangswertproblem hat genau dann eine Lösung wenn, mindestens ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I^{\circ}$ und eine Lösung $x: I \to \mathbb{R}^r$ existiert.

1. Proposition

Die Funktion x ist Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x,t)$ und $x(t_0) = x_0$ genau dann, wenn x die Lösung der Integralgleichung $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$ ist.

Beweis der 1. Proposition

Wegen dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ist die Lösung der Differentialgleichung auch die der Integralgleichung.

Die Lösung der Differentialgleichung ist x und es gilt, dass $\dot{x}$ stetig ist, weil x und f stetig sind. Dann gilt nach dem Fundamentalsatz der Analysis, dass $\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \dot{x(s)}\,ds = x(t) - x(t_0)$. Der Ausdruck $x(t_0) = x_0$ und somit ist $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$.

x ist die Lösung der Integralgleichung und wegen des Hauptsatzes gilt: $\dot{x}(t) = (x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds)^{\cdot}$ dieser Ausdruck ist gleich $0 + f(x(t),t) = f(x(t),t)$. Folglich ist $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(x(s), s)\, ds = x_0$, da das Integral von $f(x(s), s)$ von t_0 nach t_0 gleich Null ist.

Definition:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $D \subseteq \mathbb{R}^r$ eine Teilmenge. $f: D \times I \to \mathbb{R}^r$ eine Funktion $(f(x,t))$.

Die Funktion f ist Lipschitz-stetig in x, falls es eine Lipschitz-Konstante L, für welche man immer $L > 0$ annehmen kann, Element aus den reellen Zahlen gibt, sodass für alle $t \in I$ und für alle $x, y \in D$ gilt: $|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y|$.

(Raith, 2015/16: 42f)

5.2 Satz: Existenz- und Eindeutigkeit

Es sei t_0 ein Element der reellen Zahlen, x_0 Element aus $\mathbb{R}^r$ und a und b größer als Null. Es sei eine Funktion mit $f: \bar{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^r$ die stetig und Lipschitz-stetig in x ist. Weiters sei $M > 0$ so, dass der Betrag von $f(x,t)$ kleiner gleich M ist für alle x aus der Menge $\bar{B}$ und für alle t aus dem oben genannten Intervall. Man definiert nun ein $\alpha \coloneqq \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $x: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^r$ mit $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ für alle t des Intervalls $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. Des Weitern gilt dann, dass der Betrag von $x(t)$ minus x_0 kleiner gleich $M|t - t_0|$ für alle t aus dem geschlossenen Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Darüber hinaus gilt dann, dass $x(t)$ der Menge $\bar{B}(x_0, b)$ für wiederum alle t der abgeschlossenen Menge ist.

Falls die Funktion Lipschitz-stetig ist, dann gibt es lokal eindeutig bestimmte Lösungen der Differentialgleichung.

(Raith, 2015/16: 46)

5.3 Beweis: Existenz- und Eindeutigkeit

Für den Beweis, welcher nun in fünf Schritten vollzogen wird, definiert man eine Lipschitz-Konstante mit $L > 0$.

Schritt 1:

Sei t_1 Element aus dem Intervall $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ und x_1 Element von $\mathbb{R}^r$, sodass der Betrag von $x_1 - x_0$ kleiner gleich $M|t_1 - t_0|$ ist. Man wählt $\beta \coloneqq \min\{\alpha - |t_1 - t_0|, \frac{1}{2L}\}$. Anschließend definiert man A als die Menge aller stetigen Funktionen von $[t_1 - \beta, t_1 + \beta]$ in die Kugel $\bar{B}(x_1, b - M|t_1 - t_0|)$ mit der Eigenschaft, dass $x(t_1) = x_1$, also $A \coloneqq C([t_1 - \beta, t_1 + \beta], \bar{B}(x_1, b - M|t_1 - t_0|); x(t_1) = x_1)$. A ist bezüglich der Unendlichnorm ein vollständiger metrischer Raum.

Definiere $Tx(t) \coloneqq x_1 + \int_{t_1}^{t} f(x(s), s) ds$ für $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$.

Nun kann man drei Behauptungen formulieren, welche in den kommenden Schritten bewiesen werden müssen.

(1) $T: A \to A$

(2) für alle $y_1, y_2 \in A$: $\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty$

(3) für alle $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$: $|Tx(t) - x_1| \leq M|t - t_1|$

Als erstes beschäftigt man sich mit der Behauptung (3). Sei $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$. Nach der Definition ist $|Tx(t) - x_1| = \int_{t_1}^{t} f(x(s), s) ds$. Der Betrag von $f(x(s), s)$ ist kleiner gleich M und somit ist $|Tx(t) - x_1| \leq M|t - t_1|$ und die Behauptung (3) ist somit gezeigt.

Um Behauptung (1) zu zeigen, sieht man, dass $Tx(t_1) = x_1$. Für alle t aus dem Intervall $[t_1 - \beta, t_1 + \beta]$ kann man sagen, dass der Betrag von $Tx(t) - x_1$ kleiner gleich $M|t - t_1|$ ist. Der Ausdruck $|t - t_1|$ ist wiederum kleiner gleich β und kleiner gleich $\alpha - |t_1 - t_0|$. Daraus ergibt sich, dass $b - M|t_1 - t_0|$ größer gleich $|Tx(t) - x_1|$ ist und somit wurde gezeigt, dass Tx aus A ist.

Seien $y_1, y_2 \in A$ und $t \in [t_1 - \beta, t_1 + \beta]$. Der Betrag von $Ty_1 - Ty_2$ ist gleich $\left|\int_{t_1}^{t} (f(y_1(s), s) - f(y_2(s), s))\, ds\right|$. Es ist $\left|\int_{t_1}^{t} |f(y_1(s), s) - f(y_2(s), s)| ds\right| \leq L|y_1(s) - y_2(s)|$ und wiederum $|y_1(s) - y_2(s)| \leq \|y_1 - y_2\|_\infty$. Durch Integrieren erhält man daher, dass $|Ty_1(t) - Ty_2(t)| \leq L|t - t_1| * \|y_1 - y_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty$ für beliebige t. Daraus ergibt sich, dass die Unendlichnorm von $Ty_1 - Ty_2$ kleiner gleich $\frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty$ ist und somit ist auch die Behauptung (2) gezeigt.

Schritt 2:

Der Integralgenerator T ist eine Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum A und nach dem Banach'schen-Fixpunkt-Satz hat T daher eine eindeutigen Fixpunkt x. Es gilt also: $x(t) = Tx(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(x(s), s) ds$, somit ist x Lösung der Integralgleichung. Deshalb hat die Integralgleichung auf dem Intervall $[t_1 - \beta, t_1 + \beta]$ eine eindeutige Lösung.

Schritt 3:

Für t_0 und x_0 wenden wir den zweiten Schritt an und erhalten eine Lösung der Integralgleichung auf $[\boldsymbol{t_0 - \beta}, \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{\beta}]$. Falls $\beta = \alpha$ sind wir hier bereits fertig. Sonst ist $\beta < \alpha$ und wir wenden wiederum den zweiten Schritt auf $t_0 + \beta$ und auf $x(t_0 + \beta)$, sowie auf $t_0 - \beta$ und $x(t_0 - \beta)$ an. Wir erhalten damit eine Lösung der Integralgleichung auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ falls $\alpha \leq 2\beta$ (in diesem Fall sind wir hier fertig) oder auf $[t_0 - 2\beta, t_0 + 2\beta]$ falls $\alpha > 2\beta$. Durch Induktion erhalten wir so $n\beta < \alpha$ und eine Lösung der Integralgleichung auf $[t_0 - n\beta, t_0 + n\beta]$. Nachdem sicher irgendwann $n\beta \geq \alpha$ wird, erhalten wir eine Lösung der Integralgleichung auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Schritt 4:

Laut dem dritten Schritt gibt es eine Lösung x der Integralgleichung auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Nach der Proposition ist dies zugleich auch Lösung der Differentialgleichung.

Schritt 5:

Indirekt wird angenommen, dass es ein x und ein y gibt die beide Lösungen der Differentialgleichung sind, und dass x ungleich y ist. Weil $x \neq y$ gilt, gibt es ein t mit $x(t)$ ist ungleich $y(t)$. Weil $x(t_0) = x_0 = y_0 = y(t_0)$ ist, kann t größer oder kleiner t_0 gelten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $t > t_0$ annehmen und dann ist $A \coloneqq \{t \in (t_0, t_0 + \alpha]: x(t) \neq y(t)\}$ nicht leer und nach unten beschränkt. Dann besitzt A ein Infimum und man setzt $t_1 \coloneqq \inf A$.
Nun sind x und y stetig und deshalb gilt jetzt $x(t_1) = y(t_1)$, weil sich x und y sonst in einer Umgebung von t_1 unterscheiden würden. Da aber t_1 das Infimum der Punkte an der sich x und y unterscheiden ist, ergibt sich hier ein Wiederspruch.

Setzt man nun $x_1 \coloneqq x(t_1)(= y(t_1))$ und $\beta \coloneqq \min\left\{\alpha - |t_1 - t_0|, \frac{1}{2L}\right\} > 0$ gibt es nach dem 2. Schritt eine eindeutige Lösung der Integralgleichung auf $[t_1 - \beta, t_1 + \beta]$. Weil x und y Lösungen der Differentialgleichung sind, sind sie, laut Proposition, auch Lösungen der Integralgleichung und müssen daher überall im Intervall gleich sein.

Nach Definition von t_1 gibt es ein t Element aus $(t_1, t_1 + \beta)$ mit $x(t) \neq y(t)$ und daher haben wir hier einen Wiederspruch und die Lösung ist eindeutig.

(Raith, 2015/16: 47ff)

5.4 2. Proposition und Beweis der 2. Proposition

2. Proposition:

Seien t_0, x_0, a und b wie in Satz 5.2. Weiter sei D eine Obermenge der abgeschlossenen Kugel $\bar{B}$ mit dem Radis b, $D \supseteq \bar{B}(\mathrm{x}_0, b)$, offen und $I \supseteq [\mathrm{t}_0 - a, \mathrm{t}_0 + a]$ ein offenes Intervall. Falls f auf $\mathrm{D} \times \mathrm{I}$ stetig differenzierbar ist, dann ist f Lipschitz-stetig auf $\bar{B}(\mathrm{x}_0, b) \times [\mathrm{t}_0 - a, \mathrm{t}_0 + a]$.

Beweis der 2. Proposition

Setze $C \coloneqq \bar{B}(\mathrm{x}_0, b) \times [\mathrm{t}_0 - a, \mathrm{t}_0 + a]$ und $L \coloneqq r \max\left\{\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x,t)\right| : (x,t) \in C\right\}$.

Sei $j \in \{1, \dots, r\}$, seien $x, y \in \bar{B}$ und seien $s, t \in [\mathrm{t}_0 - a, \mathrm{t}_0 + a]$. Setzte nun $\mathrm{g(u)} \coloneqq f_j(x + u(y - x), t + u(s - t))$.

$g\colon [0{,}1] \to \mathbb{R}$ daraus ergibt sich durch den Mittelwertsatz, dass es ein ξ aus $(0{,}1)$ gibt mit $f_j(y, s) - f_j(x, t) = g(1) - g(0) = \dot{g}(\xi)(1 - 0) = df_j * \binom{y - x}{s - t}$. Daraus folgt, dass der Betrag von $f_j(y, s) - f_j(x, t)$ kleiner gleich $\frac{L}{r}|(y, s) - (x, t)|$.

Der Betrag von $f(y, s) - f(x, t)$ ist gleich $\sqrt[2]{\sum_{j=1}^{r} \left|f_j(y, s) - f_j(x, t)\right|^2}$. Es ist $\left|f_j(y, s) - f_j(x, t)\right|^2$kleiner gleich $\frac{L^2}{r}|(y, s) - (x, t)|^2$ woraus sich $\sum_{j=1}^{r} \left|f_j(y, s) - f_j(x, t)\right|^2 \leq \frac{L^2}{r}|(y, s) - (x, t)|^2 \leq L^2|(y, s) - (x, t)|^2$ ergibt. Zieht man die Wurzel, so erhält man $|f(y, s) - f(x, t)| \leq L|(y, s) - (x, t)|$ und die Proposition ist gezeigt.

(Raith, 2015/16: 45)

5.5 Gegenbeispiel: Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Als Beispiel kann man Funktion $\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}$ mit $x(0) = 0$ heranziehen. Die Lösungen $x_1(t) = 0$ und $x_2(t) = t^3$ sind beides Lösungen dieser Differentialgleichung, weil $x_1(0) = 0$ und $\dot{x_1}(t) = 0 = 3 * 0^{\frac{2}{3}} = 3 * x_1(t)^{\frac{2}{3}}$, sowie $x_2(0) = 0$ und $\dot{x_2}(t) = 3t^3 = 3(t^3)^{\frac{2}{3}} = 3x_2(t)^{\frac{2}{3}}$. In diesem Fall gibt es keine eindeutige Lösung der Differentialgleichung, deshalb kann auch die Funktion $3x^{\frac{2}{3}}$ nicht Lipschitz-stetig sein, weil es sonst eine eindeutige Lösung geben müsste.

(Raith, 2015/16: 47)

5.6 Trennung der Variable

Im Kapitel 5.3 wurde bewiesen, dass unter gewissen Voraussetzungen eine Differentialgleichung lokal eine eindeutige Lösung besitzt. Eine mögliche Lösungsmethode für Differentialgleichungen wurde in diesem Kapitel jedoch noch nicht behandelt. Neben der Methode der Trennung der Variable gibt es viele weitere

Möglichkeiten und Methoden Differentialgleichungen zu lösen, jedoch wird diese besonders häufig verwendet.

Wie der Name bereits verrät kann man, salopp formuliert, sagen, dass man die "x" auf die eine Seite und die "t" auf die andere Seite bringt und dadurch die Variablen trennt.

Exakt formuliert formt man die Differentialgleichung zu $f_1(x) \cdot \dot{x} = f_2(t)$ um. Nun bestimmt man eine Stammfunktion $F_1(x)$ von $f_1(x)$ und eine weiter Stammfunktion $F_2(t)$ von $f_2(t)$. Es gilt also $F_1(x)' = f_1(x)$ und $\dot{F_2}(t) = f_2(t)$. Die Lösung erhält man dann dadurch, dass $F_1(x(t))$ gleich $F_2(t) + c$ ist, sofern die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfüllt sind.

Beweis

Wir leiten die Gleichung $F_2(t) + c = F_1(x(t))$ ab. Es ist $(F_2(t) + c)^{\cdot} = f_2(t)$, und wegen der Kettenregel gilt: $(F_1(x(t)))^{\cdot} = F_1'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = f_1(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$. Somit ist $f_2(t) = f_1(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$ und unsere Differentialgleichung ist erfüllt.

(vgl.: Raith, mündlich: 05.12.2018)

5.7 Beispiel Bakterienwachstum

Die Bakterienanzahl zum Zeitpunkt t sei gleich $x(t)$. In einem einfachen Modell ist die Zunahme der Bakterien proportional zur Bakterienzahl.

Also $\dot{x}(t) = ax(t)$. Es handelt sich hier um eine Differentialgleichung. Diese lösen wir, wir im Kapitel 5.6 beschrieben mit der Methode der Trennung der Variable.

Also $\frac{\dot{x}}{x} = a$. Es ist $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$ und $\int a \, dt = at$. Deshalb ist $\ln x(t) = at + \tilde{c}$. Dieser Ausdruck umgeformt ergibt: $x(t) = e^{\tilde{c}} e^{at}$. Wenn wir nun $c = e^{\tilde{c}}$ setzten und dieses c in die Gleichung einsetzten erhalten wir: $x(t) = c \cdot e^{at}$. Setzt man nun $t = 0$, erhält man $x(0) = c$, also die Anfangspopulation. Daher sind mehrere Fälle zu betrachten:

Falls $a < 0$, dann ist der Limes von t nach $+\infty$ von $x(t)$ gleich Null, also die Bakterienkultur stirbt aus.

Falls $a > 0$, dann ist der Limes von t nach $+\infty$ von $x(t)$ gleich $+\infty$. Die Population könnte unbegrenzt wachsen.

Falls $a = 0$, ein sehr unwahrscheinlicher Fall, erhält man, dass $x(t) = x(0) \forall t$. Somit wäre die Population konstant.

Ein besseres, beziehungsweise verbessertes Modell, wäre das Modell des logistischen Wachstums, bei welchem der Zuwachs, zum Beispiel einer Bakterienpopulation proportional zum Produkt aus dem aktuellen Bestand und der noch freien Kapazität, verläuft. Die freie Kapazität wird durch die Differenz zwischen der Obergrenze und der bestehenden Population berechnet. (vgl.: Engel, 2010: 154)

Beschrieben werden kann das Modell mit dieser Differentialgleichung: $\dot{x}(t) = ax(t) \cdot (M - x(t))$, wobei hier das M für das Maximum der Population steht. Dieses Aufgabe wird ebenfalls mit der Trennung der Variable gelöst.

Somit ist $\frac{\dot{x}}{x \cdot (M-x)} = a$. Um den Ausdruck $\int \frac{1}{x \cdot (M-x)}$ zu berechnen, machen wir eine Partialbruchzerlegung, also setzen wir $\frac{1}{x \cdot (M-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-M}$, daraus ergibt sich durch erweitern, herausheben und umformen, wenn man beachtet, dass $x - M = -(M - x)$ ist, $\frac{-1}{x \cdot (x-M)} = \frac{(A+B)x - MA}{x \cdot (x-M)}$. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $A + B = 0$ und $(-MA) = -1$, also weiß man, dass $A = \frac{1}{M}$ und $B = -\frac{1}{M}$ ist. Deshalb bist $\int \frac{1}{x \cdot (M-x)} dx = \frac{1}{M} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{M} \int \frac{1}{x-M} dx = \frac{1}{M} \ln(x) - \frac{1}{M} \ln(M - x)$, wenn man annimmt, dass $0 \leq x(t) \leq M$ ist.

Wegen der Rechenregel für den Logarithmus ergibt sich $\int \frac{1}{x \cdot (M-x)} dx = \frac{1}{M} \ln x - \frac{1}{M} \ln(M - x) = \frac{1}{M} \ln \frac{x}{M-x}$. Weiters ist $\int a \, dt = at$, also ist $\frac{1}{M} \ln \frac{x}{M-x} = at + \tilde{c}$ und durch umformen ergibt sich $\ln \frac{x}{M-x} = Mat + M\tilde{c}$. Weiertes Umformen führt auf $x\left(1 + e^{M\tilde{c}} e^{Mat}\right) = Me^{M\tilde{c}} e^{Mat}$, woraus man $x = \frac{Me^{M\tilde{c}} e^{Mat}}{1 + e^{M\tilde{c}} e^{Mat}}$ erhält. Kürzt man hier $e^{M\tilde{c}} e^{Mat}$, so kommt man auf $x = \frac{M}{1 + e^{-M\tilde{c}} e^{-Mat}}$. Setzt man nun $c := e^{-M\tilde{c}}$, so ergibt sich

$$x(t) = \frac{M}{1 + ce^{-Mat}}$$

Nachdem $a > 0$ und $M > 0$ sind, gilt $\lim_{t \to +\infty} e^{-Mat} = 0$. Deshalb ist

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = M$$

Es stellt sich also nach „langer Zeit“ die Bevölkerungszahl M ein.

(vgl.: Raith, mündlich: 05.12.2018)

6 Schulbücher

Im kommenden Kapitel werde ich mich mit der Beschreibung und dem Vergleich von Schulbüchern beschäftigen. Zu aller erst werde ich drei Schulbücher heranziehen, welche vor allem im AHS-Bereich weit verbreitet sind und mich in meiner mathematischen Laufbahn teilweise begleitet haben.

Die Werke „Mathematik verstehen“ wurden unter anderem von Professoren und Professorinnen der Universität Wien geschrieben, deren verschiedenste Vorlesungen und Prüfungen ich besuchen durfte. Dadurch wurden diese Bücher immer wieder als Anschauungsmaterial herangezogen.

Die Buchreihe „Dimensionen Mathematik“ war mein verwendetes Lehrbuch in der Oberstufe im Gymnasium. Seit dieser Zeit wurden viele Änderungen, vor allem in Hinblick „neue Matura“, vorgenommen, die dieses Buch grundlegend verändert haben.

Die Werke „Thema Mathematik“ sind ebenfalls weit verbreitet und auch einige meiner Nachhilfeschülerinnen und -schüler arbeiteten mit diesen Büchern in der Schule. Die Auflage für die 7. Klasse ist die älteste der angeführten Bücher, da die letzte Neuauflage 2012 erschienen ist.

Bei allen dreien wird das Hauptaugenmerk auf die Exemplare der 7. Klasse gelegt, da vor allem in dieser Stufe das Thema Differentialrechnung behandelt wird. Als Ausblick werden zusätzlich noch kurz den Inhalt des Buches der 8. Klassen betrachtet.

Darüber hinaus werde ich noch eine Buchreihe heranziehen, welche speziell für die HTL entwickelt wurde und diese genauer beschreiben. Weiters werde ich sie mit den oben genannten Büchern im Hinblick auf die hier behandelte Thematik vergleichen und auf die inhaltlichen Unterschiede eingehen.

Zum Schluss werde ich meine persönliche Meinung zu den Werken äußern und Vor- und Nachteile der jeweiligen Bücher beleuchten.

6.1 Mathematik verstehen

Im Buch „Mathematik verstehen 7“ wird bereits im Inhaltsverzeichnis sichtbar, dass die Differentialrechnung einen Schwerpunkt in der 7. Klasse AHS darstellt. Das Inhaltsverzeichnis ist in verschiedene Kapitel unterteilt, die wiederum viele Unterkapitel beinhalten. Diese Überkapitel sind: Grundbegriffe der Differentialrechnung, Untersuchen von Polynomfunktionen, Untersuchen weiterer Funktionen und Exaktifizierung Differentialrechnung.

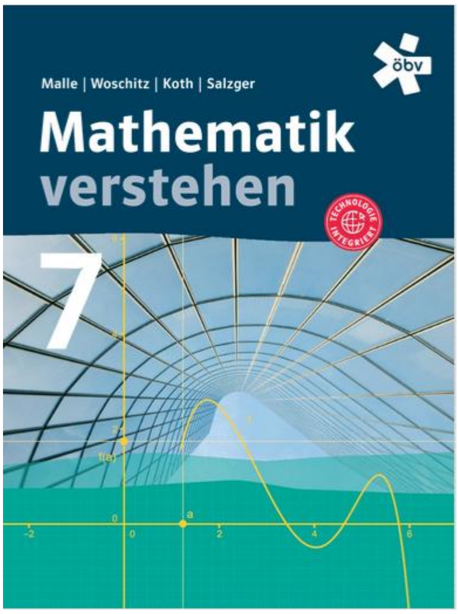


Abbildung 16: Mathematik verstehen 7 Cover
(Malle, 2016: Cover)

Auf der ersten Seite des Buches gibt es eine „Erklärung zum Buch“, die auf Symbole, Farben und Aufzählungszeichen hinweist und später im Buch von Bedeutung sind.

Jedes neue Großkapitel im Buch wird farblich durch einen dicken dunkelblauen Balken gekennzeichnet, in welchem die Beschriftung und Überschrift geschrieben stehen. Darunter sind die Grundkompetenzen aufgelistet, die in diesem Kapitel erlernt werden sollen. Hier wird zwischen den Grundkompetenzen, die für die zentrale Reifeprüfung unverzichtbar sind (dunkelblaues Aufzählungszeichen) und den Grundkompetenzen, die in Hinblick auf den Lehrplan erforderlich sind (hellblaues Aufzählungszeichen), unterschieden.

Die Unterüberschriften sind wieder in dunkelblauen Balken geschrieben (siehe Abbildung 18). Diese sind jedoch schmäler als die der großen Überschriften. Am oberen Rand der Seiten steht, in welchem Kapitel man sich gerade befindet. Am Ende des jeweiligen Großkapitels gibt es hellblau hinterlegte Kontrollseiten, die sich in Grundwissen und Grundkompetenzen gliedern (siehe Abbildung 17). Diese Aufgaben können unterschiedlich gestaltet sein und von Wissensfragen über Typ-1-Beispielen bis hin zu herkömmlichen Rechenaufgaben reichen. Am Ende des Buches gibt es einen Anhang mit dem Titel „Selbstkontrolle“. Hier sind Beispielsammlungen zu allen behandelten Themengebieten zu findet. Für jedes Großkapitel gibt es eine Seite mit zehn Multiple-Choice Aufgaben, die zur Überprüfung des Erlernten dienen sollen.

2.6 Kontrolle: Grundwissen und Grundkompetenzen

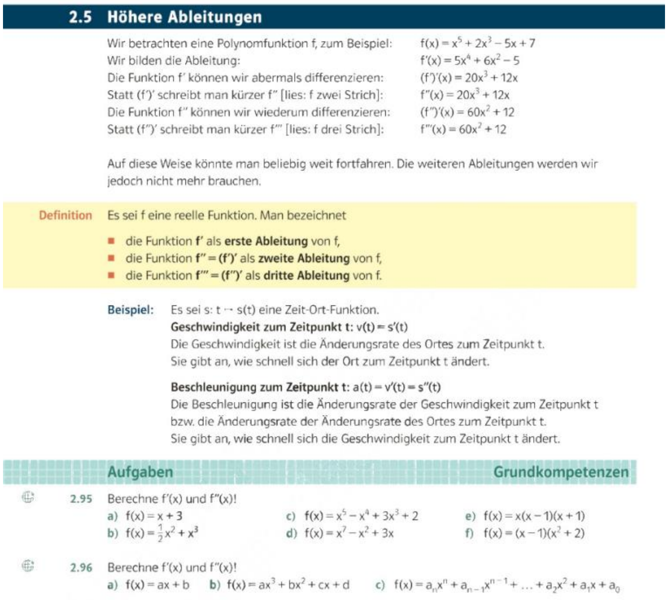
Grundwissen

- 2.101 a) Wie ist die mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ definiert?
  b) Wie ist die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t definiert?
- 2.102 1) Wie ist der Differenzenquotient einer Funktion f in einem Intervall [a; b] definiert?
  2) Wie ist der Differentialquotient einer Funktion f an einer Stelle x definiert?
- 2.103 a) Wie kann man einen Differenzenquotienten noch nennen?
  b) Wie kann man einen Differentialquotienten noch nennen?
- 2.104 Was sagt das Vorzeichen des Differenzenquotienten aus?
- 2.105 Nenne außermathematische Beispiele für mittlere Änderungsraten bzw. Änderungsraten an einer Stelle!
- 2.106 a) Gib einen Funktionstyp an, bei dem der Differenzenquotient in jedem Intervall den gleichen Wert hat! Begründe!
  b) Gib einen Funktionstyp an, bei dem der Differentialquotient an jeder Stelle den gleichen Wert hat!
  c) Bei welchen Funktionen hat der Differenzenquotient in jedem Intervall das gleiche Vorzeichen? Begründe!
- 2.107 a) Was versteht man unter einer Sekantenfunktion? Wie hängt ein Differenzenquotient mit einer Sekantenfunktion zusammen?
  b) Wie ist eine Tangente an einen Funktionsgraphen definiert? Durch welche Überlegung kommt man zu dieser Definition?

Abbildung 17: Mathematik verstehen 7 Grundwissen
(Malle, 2016: 37)

Da die meisten Unterkapitel ähnlich aufgebaut sind, ziehe ich exemplarisch eines heran. Als Musterbeispiel nutze ich ein Unterkapitel, welches sich dem Thema Differenzenquotient und Differentialquotient widmet, und mit Hilfe von vorgerechneten Geschwindigkeitsbeispielen, Definitionen von Differential- und Differenzenquotient und Aufgaben untermalt wird. Die durchgerechneten Beispiele sind grün hinterlegt und die Definitionen und Sätze gelb (siehe Abbildung 18). Somit hat man beim Durchblättern sofort einen Überblick. Sind Beweise zu den Sätzen angeführt, stehen diese unmittelbar unter den gelben Kästchen. Die Aufgaben sind häufig in

Grundkompetenz-Aufgaben und Vertiefungs-Aufgaben geteilt. Darüber hinaus wird gekennzeichnet, wenn Technologieeinsatz sinnvoll oder sogar notwendig ist oder welche Beispiele als Partner-Übungen gedacht sind. Damit man sofort sieht, dass auch Aufgaben angeführt sind, ist die jeweilige Überschrift mit einem grünen Balken hinterlegt (siehe Abbildung 18). Bei einigen Beispielen sind bereits Skizzen angeführt oder es sind andere passende Bilder neben Aufgaben gedruckt.



2.5 Höhere Ableitungen

Wir betrachten eine Polynomfunktion f, zum Beispiel:	$f(x) = x^5 + 2x^3 - 5x + 7$
Wir bilden die Ableitung:	$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 5$
Die Funktion f′ können wir abermals differenzieren:	$(f')'(x) = 20x^3 + 12x$
Statt (f′)′ schreibt man kürzer f″ [lies: f zwei Strich]:	$f''(x) = 20x^3 + 12x$
Die Funktion f″ können wir wiederum differenzieren:	$(f'')'(x) = 60x^2 + 12$
Statt (f″)′ schreibt man kürzer f‴ [lies: f drei Strich]:	$f'''(x) = 60x^2 + 12$

Auf diese Weise könnte man beliebig weit fortfahren. Die weiteren Ableitungen werden wir jedoch nicht mehr brauchen.

Definition Es sei f eine reelle Funktion. Man bezeichnet

- die Funktion **f′** als **erste Ableitung** von f,
- die Funktion **f″ = (f′)′** als **zweite Ableitung** von f,
- die Funktion **f‴ = (f″)′** als **dritte Ableitung** von f.

Beispiel: Es sei $s: t \mapsto s(t)$ eine Zeit-Ort-Funktion.
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t: $v(t) = s'(t)$
Die Geschwindigkeit ist die Änderungsrate des Ortes zum Zeitpunkt t.
Sie gibt an, wie schnell sich der Ort zum Zeitpunkt t ändert.

Beschleunigung zum Zeitpunkt t: $a(t) = v'(t) = s''(t)$
Die Beschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t bzw. die Änderungsrate der Änderungsrate des Ortes zum Zeitpunkt t.
Sie gibt an, wie schnell sich die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ändert.

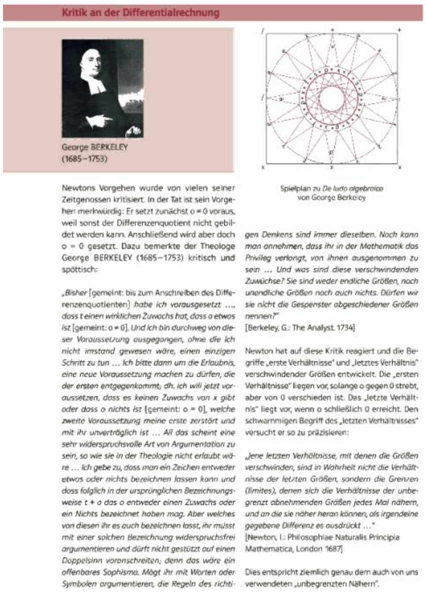
Aufgaben Grundkompetenzen

2.95 Berechne f′(x) und f″(x)!
a) $f(x) = x + 3$ c) $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 + 2$ e) $f(x) = x(x-1)(x+1)$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x^3$ d) $f(x) = x^7 - x^2 + 3x$ f) $f(x) = (x-1)(x^2+2)$

2.96 Berechne f′(x) und f″(x)!
a) $f(x) = ax + b$ b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ c) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Abbildung 18: Beispielseite Mathematik verstehen 7
(Malle, 2016: 36)

Bei einigen Kapiteln gibt es Informationen über die historische Entwicklung dieses Themas oder verschiedene Anwendungsgebiete, die über den Schulstoff hinausgehen. Die Überschriften zu diesen Themen sind mit einem weinroten Balken hinterlegt und heben sich farblich von den anderen Seiten ab (siehe Abbildung 19).



Kritik an der Differentialrechnung

George BERKELEY
(1685–1753)

Spielplan zu *De ludo algebraico* von George Berkeley

Newtons Vorgehen wurde von vielen seiner Zeitgenossen kritisiert. In der Tat ist sein Vorgehen merkwürdig: Er setzt zunächst $o \neq 0$ voraus, weil sonst der Differenzenquotient nicht gebildet werden kann. Anschließend wird aber doch $o = 0$ gesetzt. Dazu bemerkte der Theologe George BERKELEY (1685–1753) kritisch und spöttisch:

„*Bisher* [gemeint: bis zum Anschreiben des Differenzenquotienten] *habe ich vorausgesetzt …, dass t einen wirklichen Zuwachs hat, dass o etwas ist* [gemeint: $o \neq 0$]. *Und ich bin durchweg von dieser Voraussetzung ausgegangen, ohne die ich nicht imstand gewesen wäre, einen einzigen Schritt zu tun … Ich bitte dann um die Erlaubnis, eine neue Voraussetzung machen zu dürfen, die der ersten entgegenkommt; dh. ich will jetzt voraussetzen, dass es keinen Zuwachs von x gibt oder dass o nichts ist* [gemeint: $o = 0$], *welche zweite Voraussetzung meine erste zerstört und mit ihr unverträglich ist … All das scheint eine sehr widerspruchsvolle Art von Argumentation zu sein, so wie sie in der Theologie nicht erlaubt wäre … Ich gebe zu, dass man ein Zeichen entweder etwas oder nichts bezeichnen lassen kann und dass folglich in der ursprünglichen Bezeichnungsweise t + o das o entweder einen Zuwachs oder ein Nichts bezeichnet haben mag. Aber welches von diesen ihr es auch bezeichnen lasst, ihr müsst mit einer solchen Bezeichnung widerspruchsfrei argumentieren und dürft nicht gestützt auf einen Doppelsinn voranschreiten; denn das wäre ein offenbares Sophisma. Mögt ihr mit Worten oder Symbolen argumentieren, die Regeln des richtigen Denkens sind immer dieselben. Noch kann man annehmen, dass ihr in der Mathematik das Privileg verlangt, von ihnen ausgenommen zu sein … Und was sind diese verschwindenden Zuwüchse? Sie sind weder endliche Größen, noch unendliche Größen noch auch nichts. Dürfen wir sie nicht die Gespenster abgeschiedener Größen nennen?*“
[Berkeley, G.: The Analyst. 1734]

Newton hat auf diese Kritik reagiert und die Begriffe „erste Verhältnisse“ und „letztes Verhältnis“ verschwindender Größen entwickelt. Die „ersten Verhältnisse“ liegen vor, solange o gegen 0 strebt, aber von 0 verschieden ist. Das „letzte Verhältnis“ liegt vor, wenn o schließlich 0 erreicht. Den schwammigen Begriff des „letzten Verhältnisses“ versucht er so zu präzisieren:

„*Jene letzten Verhältnisse, mit denen die Größen verschwinden, sind in Wahrheit nicht die Verhältnisse der letzten Größen, sondern die Grenzen (limites), denen sich die Verhältnisse der unbegrenzt abnehmenden Größen jedes Mal nähern, und an die sie näher heran können, als irgendeine gegebene Differenz es ausdrückt …*“
[Newton, I.: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, London 1687]

Dies entspricht ziemlich genau dem auch von uns verwendeten „unbegrenzten Nähern“.

Abbildung 19: Mathematik verstehen 7 historisches
(Malle, 2016:114)

Im Buch der 8. Klasse ist im Inhaltsverzeichnis ein Kapitel mit der Überschrift „Differenzen- und Differentialgleichungen“ zu finden, welches sich nur über einige wenige Seiten erstreckt. Hier werden die Grundlagen der Differenzen- und Differentialgleichungen anhand von linearen und exponentiellen Wachstums- und Abnahmeprozessen beschrieben. Darüber hinaus werden in dem Kapitel „Vernetzte Systeme und deren Entwicklung“ die im Lehrplan geforderten Wirkungs- und Flussdiagramme behandelt.

(vgl.: Malle, 2016: Mathematik verstehen 7; Malle, 2016: Mathematik verstehen 8)

6.2 Dimensionen Mathematik

Auch im Buch „Dimensionen Mathematik 7“ nimmt das Thema Differentialrechnung einen Schwerpunkt ein. Alle dreizehn zu behandelnden Unterkapitel sind im Inhaltsverzeichnis unter den großen Abschnitt Differentialrechnung zusammengefasst.

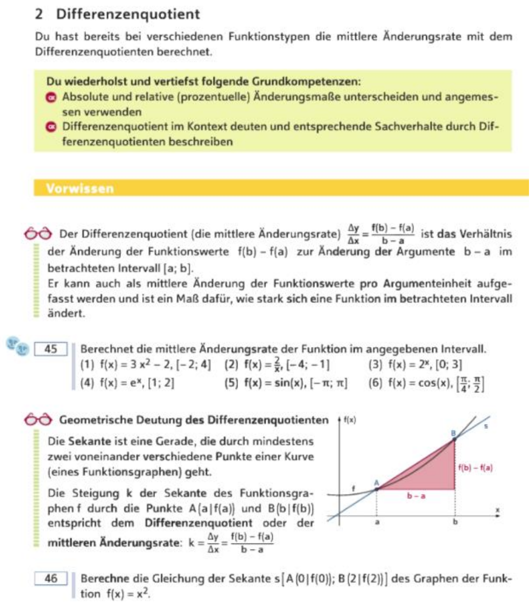
Auf der ersten Seite des Buches wird als direkter Brief an die Schülerinnen und Schüler erklärt, wie das Buch aufgebaut ist. Es werden alle Farben, Symbole und andere wichtigen Punkte, die bei der Verwendung des Buches wichtig sind, beschrieben.

Abbildung 20: Dimensionen Mathematik 7 Cover
(Bleier, 2016: Cover)

Die Großkapitel im Buch werden nicht farblich hinterlegt sondern nur größer geschrieben. Die Unterkapitel sind dann von eins bis dreizehn durchnummeriert und ebenfalls nicht farblich hervorgehoben.

Beispielhaft ziehe ich die zwei Abschnitte Differenzenquotient und Differentialquotient heran. In „Dimensionen Mathematik 7" sind diese zwei Themengebiete eigene Kapitel. Das Unterkapitel beginnt mit einer Auflistung erforderlicher Kenntnisse und direkt darunter sind die Grundkompetenzen formuliert, die in hellem Grün hinterlegt sind (siehe Abbildung 21).

Wenn bei Schülerinnen und Schülern bereits an ein bestimmtes Vorwissen angeknüpft werden sollte, wird dieses noch einmal zusammenfassend erklärt und mit Übungsbeispielen untermauert. Ein greller gelb-orangener Balken lässt dieses Thema „Vorwissen" erkennen (siehe Abbildung 21). Ein dunkler grüner Balken lässt „Neues Wissen" erkennen. Darunter sind Erklärungen, vorgerechnete Beispiele, Definitionen und Übungsaufgaben gesammelt. Durchgerechnete Beispiele sind grün, Definitionen, Sätze und Zusammenfassungen sind gelb hinterlegt. Einige Symbole bringen darüber hinaus noch mehr Struktur und Überblick. Ein Brillensymbol weist auf einen Lesetext hin. Manche Beispiele sind mit einem roten „GK", für Grundkompetenzen, mit blauen „Typ 2 Aufgaben" oder einer Eule gekennzeichnet, was auf sehr knifflige Aufgaben schließen lässt. Potentielle Gruppenarbeiten sind mit zwei oder mehreren Smileys markiert und ein möglicher Technologieeinsatz wird ebenfalls mit einem Symbol versehen (siehe Abbildung 21).



2 Differenzenquotient

Du hast bereits bei verschiedenen Funktionstypen die mittlere Änderungsrate mit dem Differenzenquotienten berechnet.

Du wiederholst und vertiefst folgende Grundkompetenzen:
- Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden
- Differenzenquotient im Kontext deuten und entsprechende Sachverhalte durch Differenzenquotienten beschreiben

Vorwissen

Der Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ist das Verhältnis der Änderung der Funktionswerte $f(b) - f(a)$ zur Änderung der Argumente $b - a$ im betrachteten Intervall $[a; b]$.
Er kann auch als mittlere Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit aufgefasst werden und ist ein Maß dafür, wie stark sich eine Funktion im betrachteten Intervall ändert.

45 Berechnet die mittlere Änderungsrate der Funktion im angegebenen Intervall.
(1) $f(x) = 3x^2 - 2$, $[-2; 4]$ (2) $f(x) = \frac{2}{x}$, $[-4; -1]$ (3) $f(x) = 2^x$, $[0; 3]$
(4) $f(x) = e^x$, $[1; 2]$ (5) $f(x) = \sin(x)$, $[-\pi; \pi]$ (6) $f(x) = \cos(x)$, $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$

Geometrische Deutung des Differenzenquotienten

Die **Sekante** ist eine Gerade, die durch mindestens zwei voneinander verschiedene Punkte einer Kurve (eines Funktionsgraphen) geht.

Die Steigung k der Sekante des Funktionsgraphen f durch die Punkte $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$ entspricht dem **Differenzenquotient** oder der **mittleren Änderungsrate**: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

46 Berechne die Gleichung der Sekante $s[A(0|f(0)); B(2|f(2))]$ des Graphen der Funktion $f(x) = x^2$.

Abbildung 21: Beispielseite Dimensionen Mathematik 7 (Bleier, 2016: 25)

Am Ende des Großkapitels Differentialrechnung befindet sich ein mehrseitiger Kompetenzcheck mit verschiedenen Typ 1 und Typ 2 Aufgaben.

Im Buch „Dimensionen Mathematik 8“ ist die Differenzialrechnung im Inhaltsverzeichnis unter dem Titel „Dynamische Systeme und Prozesse“ wiederzufinden. Neben Diagrammen, wie Fluss- und Wirkungsdiagrammen, steht hier vor allem das Bilden von Modellen mit Differenzen- und Differentialgleichungen im Fokus.

(vgl.: Bleier, 2016: Dimensionen Mathematik 7; Bleier, 2017: Dimensionen Mathematik 8)

6.3 Thema Mathematik

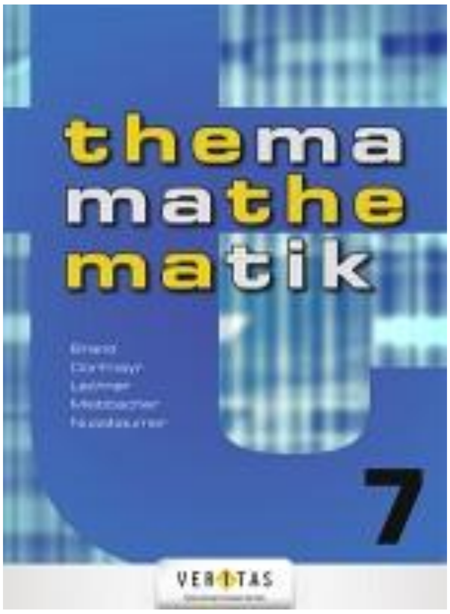


Abbildung 22: Thema Mathematik 7 Cover
(Brand, 2012: Cover)

Im Buch „Thema Mathematik 7“ ist im Inhaltsverzeichnis die Differentialrechnung in drei Kapitel geteilt. Zwischen diesen Differentialrechnungskapitel, „Differentialrechnung Grundlagen“, „Differentialrechnung Eigenschaften von Funktion“ und „Anwendung der Differentialrechnung“ sind andere zu bearbeitende Themengebiete. Die jeweiligen Differentialrechnungskapitel sind wiederum in Unterpunkte gegliedert. In den Grundlagen werden Differenzen- und Differentialquotient, Differenzierbarkeit und Stetigkeit sowie verschiedenste Ableitungsmethoden bearbeitet. Bei den Eigenschaften steht vor allem die Untersuchung von Funktionen im Fokus. Schwerpunkt des dritten Teils sind Extremwertaufgaben. Darüber hinaus werden Anwendungen in der Wirtschaft und die Regel von de l’Hospital bearbeitet. Diese Themen sind in anderen Schulbüchern gänzlich vernachlässigt. Grundsätzlich geht die Erarbeitung und Verwendung von de l’Hospital über den Schulstoff deutlich hinaus. Deswegen ist dies bereits im Inhaltsverzeichnis mit einem roten E gekennzeichnet, welches bedeutet, dass diese Themen eher für Realgymnasien geeignet sind oder als Ergänzungsstoff dienen.

Noch vor dem Inhaltsverzeichnis werden Symbole und Farben erklärt, die später für die Nutzung des Buches von Bedeutung sind.

Jede Überschrift zu einem Großkapitel ist mit lila hinterlegt und startet mit einer Mindmap, die den Inhalt dieses Kapitels grafisch strukturiert darstellt (siehe Abbildung 23).

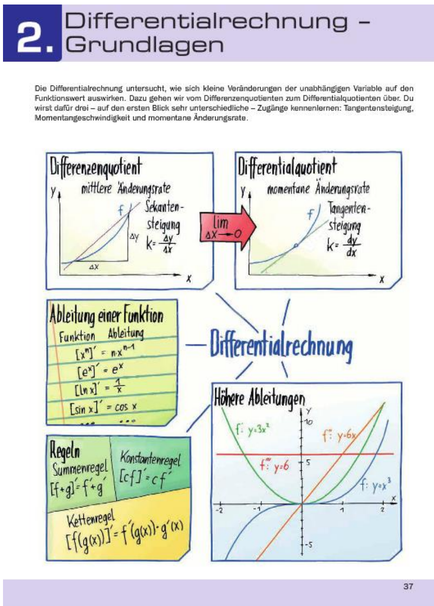


Abbildung 23: Thema Mathematik 7 Mind-Map
(Brand, 2012: 37)

Die Unterkapitel sind nummeriert und beginnen mit der Definition von essentiellen Variablen oder anderen wichtige Informationen. Die Definitionen sind in gelb hinterlegten Kästchen angeführt und auch durchgerechnet Beispiele sind grafisch hervorgehoben. Immer wieder sind Grundkompetenzen formuliert, welche farblich hervorgehoben werden. Bei manchen Aufgaben steht ein Symbol mit „GK“ wenn diese Aufgaben zur Entwicklung der mathematischen Grundkompetenzen dienen und den Aufbau des nötigen Grundwissens fördern. Es sind viele Aufgaben vorhanden, die farblich nach Schwierigkeit von grundlegenden über weiterführende bis anspruchsvolle Beispiele markiert sind. Kurz vor Ende jedes Großkapitels gibt es einen Aufgabenpool mit vermischten Aufgaben und ein Kapitel mit dem Namen „Sprache der Mathematik“, in welchem der Fokus vor allem auf der richtigen Anwendung der Fachsprache der Mathematik liegt. Den Abschluss bilden eine Kapitelcheckliste, die darauf hinweist, welche Kompetenzen bereits beherrscht werden sollten. Ein Abschnitt unter dem Titel

„Teste dein Wissen“ mit unterschiedlichsten Typ 1-Augaben dient der Selbstüberprüfung.

Bei manchen Kapiteln bietet das Buch „Thema Mathematik“ sogenannte „Themenseiten“ an, welche Zusatzinformation und gelegentlich dazu passende Musterbeispiele beinhalten.

Exemplarisch ziehe ich das Kapitel über den Differentialquotienten heran. In diesem Buch wird dieser anhand von drei verschiedenen Zugängen erklärt. Zuerst wird der Differentialquotient als Tangentenproblem, dann als Momentangeschwindigkeit und anschließend als momentane Änderungsrate beschrieben. Unter jedem dieser Themen werden Grundvorstellungen aufgelistet die zum Verständnis des jeweiligen Zugangs dienen sollen. Darüber hinaus wird jede Idee mit Hilfe von Definitionen, Bemerkungen und Übungsaufgaben untermalt. Sind ergänzende Hinweise angeführt, werden diese in helllila hinterlegt.
Am Ende des Unterkapitels gibt es keinen gemeinsamen Aufgabenpool. Die Beispiele sind unmittelbar unter den jeweiligen Erklärungen und mit verschiedenen Symbolen bezeichnet. Bei möglichen Gruppenarbeiten mit einem Emoji mit mehreren Personen und bei sinnvollem Technologieeinsatz mit einem Computersymbol.

In der Ausgabe für die 8. Klasse sind Differenzen- und Differentialgleichungen ein kleiner Teil des Kapitels „Dynamische Prozesse“. Zusätzlich zu den Definitionen dieser Gleichungen und die Anwendung auf Wachstums- und Abnahmeprozesse, sowie wichtigen Diagrammen, bilden „Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen“ und „Numerisches Lösen von Differentialgleichungen“ eigene Kapitel, welche jedoch mit dem bereits beschriebenen „roten E“ gekennzeichnet sind.

(vgl.: Brand, 2012: Thema Mathematik 7; Brand, 2013: Thema Mathematik 8)

6.4 Mathematik HTL

Die Buchreihe „Mathematik HTL“ ist speziell für die mathematische Ausbildung an der HTL konzipiert. Wie bereits im 2. Kapitel „Lehrpläne“ beschrieben, nimmt die Differentialrechnung in einer höheren technischen Lehranstalt einen größeren und auch anwendungsorientierteren Stellenwert ein.

Bereits in der 2. Klasse HTL kommt das Thema Differentialgleichungen im Schulbuch unter den Titeln „Modellieren von Wachstum durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung“ und „Modellieren von Wachstum durch andere Differentialgleichungen“ vor. Schülerinnen und Schüler lernen bereits hier Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung zu lösen.

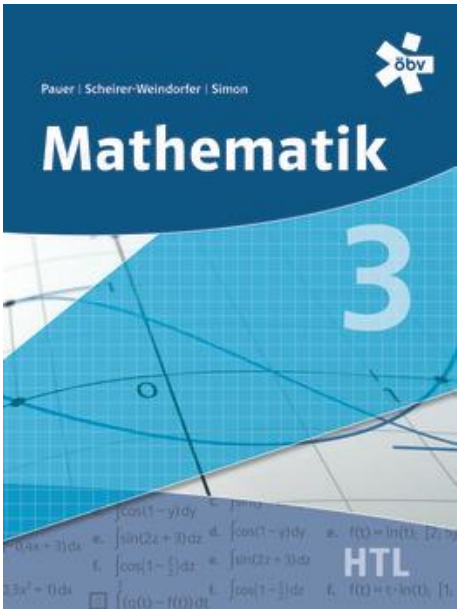


Abbildung 24: Mathematik HTL 3 Cover
(Pauer, 2013: Cover)

Im Buch Mathematik HTL 3 ist das zweite Thema im Inhaltsverzeichnis direkt mit der Überschrift Differentialrechnung betitelt, welches wiederum in „Differentialrechnung für Polynomfunktionen“, „Ableitung und Ableitungsregeln“, „Erste Anwendungen“, „Zweite Ableitung und quadratische Näherung“ und „Numerische Berechnung von Nullstellen“ gegliedert ist. In diesem Lehrbuch der 3. Klasse werden vor allem Bereiche behandelt, die auch Schülerinnen und Schüler in der 7. Klasse AHS kennen lernen. Schwerpunkte sind Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsregeln und verschiedene Anwendungen. Dieses Exemplar der 3. Klasse werde ich nun verwenden, um den Aufbau genauer zu beschreiben.

Zu Beginn ist die Struktur des Buches sehr genau erklärt, damit sich Schülerinnen und Schüler gut orientieren können.

Die durchnummerierten Unterüberschriften sind grün hinterlegt. An allererster Stelle werden die Kompetenzen, die in diesem Abschnitt erworben werden, aufgelistet. Diese Kompetenzen sind blau hervorgehoben. Wichtige Sätze und Definitionen sind in Gelb hinterlegten Kästchen geschrieben. In ebenfalls blauen Kästchen befinden sich Musteraufgaben, die als Orientierung für Schülerinnen und Schüler dienen. Darunter befinden sich viele verschiedene Aufgaben für die Vorbereitung auf die neue standardisierte Reifeprüfung. Wie auch in den anderen Büchern sind Aufgaben bei denen Technologieeinsatz oder Partner- und Gruppenarbeiten wünschenswert sind mit einem Symbol versehen. Zusätzlich ist jedem Beispiel die Handlungskompetenz der Bildungsstandards, gekennzeichnet mit einem Buchstaben, voran gestellt. Die Erklärung zu den Buchstaben in Form einer Standardmatrix der Handlungskompetenzen findet man auf der letzten Seite des Buches. Einigen Erklärungen oder Beispielen sind hilfreiche Tipps angefügt, die zum besseren Verständnis dienen sollen. Jedes Unterkapitel schließt mit eine Seite unter dem Titel „Was habe ich in diesem Abschnitt gelernt?“. Hier sind wichtige Beispiele zu finden, die eine Selbstkontrolle ermöglichen. Zum Ende jedes Großkapitels schließen die Autoren mit einer Zusammenfassung der wichtigsten Punkte, die im jeweiligen Abschnitt behandelt wurden und bieten eine Aufgabensammlung mit dem Namen „Zusammenfassende Aufgaben“ (siehe Abbildung 25).

Zusammenfassung

Differenzen-quotient

Für eine Funktion f und ein Intervall [a; z], das im Definitionsbereich von f enthalten ist, nennen wir die Zahl

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

den **Differenzenquotienten** von f oder die **mittlere Änderungsrate** von f in [a; z].
Der Differenzenquotient ist die **Steigung** der Geraden durch die Punkte $(a \mid f(a))$ und $(z \mid f(z))$ des Graphen von f.

differenzierbare Funktion

Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ heißt in $a \in M$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert der Differenzen-quotienten

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

von f in [a; z] (wenn $a < z$ ist) bzw. [z; a] (wenn $a > z$ ist) für z gegen a existiert.

Abbildung 25: Mathematik HTL 3 Zusammenfassung (Pauer, 2013: 129)

Das Exemplar für die 4. und 5. Klasse ist in einem Buch zusammengefasst und beinhaltet ebenfalls Differentialrechnungsthemen. Im Inhaltsverzeichnis sind folgende Themen aufgelistet: „Lineare Differentialgleichungen der Ordnung 1“, „Lineare

Differentialgleichungen der Ordnung 2 mit konstanten Koeffizienten", „Einige andere Differentialgleichungen", „Uneigentliche Integrale", „Laplace-Transformation" und „Numerische Lösung von Anfangswertproblemen". Hier kann man deutlich erkennen, dass ein Schwerpunkt der Differentialrechnung in einer höheren technischen Lehranstalt auf der Behandlung von Differentialgleichungen liegt. Der zu behandelnde Inhalt geht weit über den Lehrplan der AHS hinaus. Themen wie „uneigentliche Integrale" und „Laplace-Transformationen" sind unter anderem Materie für Universitätsvorlesungen und werden hier schon in der 4. oder 5. Klasse HTL behandelt.

(vgl.: Pauer, 2013: Mathematik HTL 2; Pauer, 2013 Mathematik HTL 3; Pauer, 2014: Mathematik HTL 4/5)

6.5 Vergleich und persönliche Meinung

Alle betrachteten Bücher haben meiner Meinung nach ihre Vor- aber auch Nachteile. Da jedoch die Buchreihe für die HTL wegen der schulspezifischen Verwendung und des anderen Lehrplans kaum mit den anderen zu vergleichen ist, werde ich mich zuerst auf die drei ersten Bücher beziehen und später erst auf „Mathematik HTL" eingehen.

In „Mathematik verstehen" finde ich vor allem die farbliche Übersicht mit den dunklen Balken für die Großkapitel-Überschriften und die grün hinterlegten durchgerechneten Musterbeispiele positiv. Die vorgerechneten Übungsbeispiele sind für Schülerinnen und Schüler meiner Meinung nach besonders wichtig, damit sie eine bessere Vorstellung bezüglich verschiedener Lösungswege erlangen und auch Strukturierungsmöglichkeiten vorgezeigt bekommen. Erfolgversprechend finde ich auch, dass alle Aufgabenformate für die Matura integriert sind. In diesem Buch werden oft mathematische Hintergründe, Herleitungen und Beweise, wie zum Beispiel bei den Ableitungen verschiedenster Funktion, aufgezeigt. Als angehende Lehrperson finde ich dies gut, kann mir aber vorstellen, dass es bei viele Schülerinnen und Schülern Verwirrung auslöst und es im Regelunterricht wenig Zeit für solche Vertiefungen gibt. Die Struktur im Inhaltsverzeichnis und auch die Abfolge der Themen finde ich verwirrend. Ich würde es besser finden, wenn es ein großes Thema Differentialrechnung gäbe, welches alle Unterkapitel dieser Thematik beinhaltet.

Vor allem für Schulen mit mathematischem Schwerpunkt oder für Lehrpersonen, die

ein besonderes Augenmerk auf mathematische Hintergrundinformation legen, ist dieses Buch sehr zu empfehlen.
Als gewinnbringend erachte ich Kapitel mit historischem Hintergrund und Zusatzinformationen. Für Gruppenarbeiten können diese zum Beispiel von großem Nutzen sein. Besser platziert wären diese jedoch am Anfang des Kapitels, um einen lockeren Einstieg in das Thema zu ermöglichen.

Im Buch „Dimensionen Mathematik“ ist meiner Meinung nach vor allem das Inhaltsverzeichnis und die Abfolge der Themen vorteilhaft, da diese einen roten Faden durch die Thematik Differentialrechnung bilden. Hier sind die durchgerechneten Vorzeigebeispiele pädagogisch sehr wertvoll für die Schülerinnen und Schüler. Besser gefallen würde mir, wenn die Überschriften, wie in „Mathematik verstehen“ farblich hervorgehoben wären, um sich sofort einen Überblick verschaffen zu können. Auch in diesem Buch sind alle wichtigen Sätze und Definitionen vorhanden, aber die Beweise und Herleitungen fehlen zum Großteil. Zielführend wäre das Angebot einiger essentieller Herleitungen und Beweise im Buch.
Der mehrseitige Kompentenzcheck am Ende jedes Großkapitels gefällt mir sehr gut, da die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen noch einmal selbst überprüfen können. Diese Aufgaben sind darüber hinaus der neuen Matura angepasst und klar in Typ 1 und Typ 2 Beispiele gegliedert.
Aus meiner Sicht besonders sinvoll finde ich die mit Brillen gekennzeichneten Stellen, die kleine „Lesetexte“ und Beschreibungen markieren. Diese kurzen Texte sind sehr hilfreich für das Verständnis der Inhalte. Dieses Buch ist inhaltlich weniger überladen und darum für viele Schülerinnen und Schüler übersichtlicher.
Die erste Seite des Buches empfinde ich als sehr gut und persönlich, da sie direkt an die Schülerinnen und Schüler gerichtet ist und Informationen über das Buch enthält. Besonders motivierend finde ich, dass am Ende dieser Seite die Autorinnen und Autoren des Buches den Lernenden viel Erfolg für das Schuljahr wünschen.

Bei „Thema Mathematik 7“ möchte ich vor allem der Schuss der jeweiligen Kapitel hervorheben, da durch die verschiedensten Kontrollseiten ein sehr breites Spektrum des mathematischen Wissens überprüft werden kann. Ein gutes Beispiel dafür ist der Abschnitt „Sprache der Mathematik“, welcher vor allem auf die korrekte Verwendung des mathematischen Sprachgebrauchs abzielt. Die Kompetenzen des Beschreibens, Formulierens, Erklärens und Vergleichens werden auch in der neuen Reifeprüfung immer mehr gefordert. Gerade deswegen ist meiner Meinung nach das Üben dieser mathematischen Formulierungen wichtig.

In allen Büchern sind sehr viele Übungsbeispiele und Aufgaben vorhanden. Die meisten sind an die neue standardisierte Reifeprüfung angepasst. Immer wieder wird auf einen sinnvollen Technologieeinsatz und Partner- oder Gruppenarbeiten hingewiesen, wobei dies im Buch „Thema Mathematik“ am wenigstens vorkommt. In „Mathematik verstehen“ und „Dimensionen Mathematik“ sind Grundkompetenz- und Vertiefungsaufgaben klar markiert. Im dritten Exemplar sind die Beispiele eher durch aufsteigenden Schwierigkeitsgrad gekennzeichnet, was sich aber leicht auf die Definition für Grundkompetenz- und Vertiefungsaufgaben ummünzen lässt. Der „Wissenscheck“ in allen Büchern gibt einen schönen Überblick über das Gelernte und das eigene Können.

In den Büchern für die 8. Klasse wird das Thema Differentialgleichungen in den Exemplaren „Mathematik verstehen“ und „Dimensionen Mathematik“ nur kurz durch Wachstums- und Abnahmeprozesse angeschnitten und sonst kaum berührt. In „Thema Mathematik“ ist diese Materie etwas umfangreicher behandelt.

Bezüglich der graphischen Struktur liegt für mich „Mathematik verstehen“ an der Spitze. Durch die unterschiedlichen Farben und das klare Kennzeichnen von Überschriften, Grundkompetenzen und Übungsbeispiele, hat man sofort einen Überblick im Buch. Bei der inhaltlichen Struktur finde ich das Exemplar „Dimensionen Mathematik“ bezüglich der Differentialrechnung am übersichtlichsten. Die Themengebiete werden in einer, für mich sinnvollen Reihenfolge, er- und abgearbeitet. Zuerst wird der Grenzwert und die Stetigkeit, dann Differenzen- und Differentialquotient, anschließend alle Ableitungsregeln und höhere Ableitungen, weiters die Funktionsuntersuchung, dann Umkehraufgaben und abschließend erst Extremwerte behandelt.
Im Gegensatz dazu werden in den anderen Büchern die Kapitel nicht so klar strukturiert und aufgebaut. Zum Beispiel wird in „Mathematik verstehen“ im ersten Kapitel „Grundbegriffe der Differentialrechnung“ bereits Ableitung einer konstanten Funktion

sowie Summen- und Differenzenregel behandelt. Im darauffolgenden Kapitel werden Monotonie, Extremstellen, Wendepunkte und Extremwertaufgaben erarbeitet. Erst im Kapitel „Untersuchungen weiterer Funktionen“ werden Produkt-, Quotienten und Kettenregel, Ableitungen von Exponential-, Sinus-, Cosinus- sowie Logarithmusfunktionen besprochen. Im Buch „Thema Mathematik“ werden zwischen den bereits aufgeteilten Differentialrechnungskapitel noch zusätzliche Themen, wie komplexe Zahlen oder Kegelschnitte und die Kugel eingefügt. Diese Reihenfolge ist für mich im Gegensatz zu der klaren Struktur im Buch „Dimensionen Mathematik“ sehr fragwürdig.

Gesondert erwähnen möchte ich die Buchreihe „Mathematik HTL“, da sich ein Vergleich wegen des unterschiedlichen Lehrplanes und Schultyps als schwierig erweist. Lediglich die graphische Struktur kann mit den anderen drei Büchern verglichen werden. „Mathematik verstehen“ und „Mathematik HTL“ ähneln sich im Aufbau und der Struktur stark. Dies lässt sich möglicherweise mit dem gleichen Herausgeber erklären. Als Orientierungshilfe empfinde ich das Inhaltsverzeichnis zu Beginn eines neuen Großkapitels. Darüber hinaus gefällt mir die Auflistung der Kompetenzen, die die Lernenden in diesem Kapitel erwerben sollen, sehr gut.
Im Buch der 3. Klasse sind die Differenzenquotient, Differentialquotient und Ableitungsregeln ein ausführlich behandeltes Thema, jedoch stehen in diesen Büchern klar die Differentialgleichungen im Vordergrund. Verwunderlich finde ich, dass keine Beweise für Ableitungsregeln angegeben sind, obwohl sonst auf die Thematik der Differentialrechnung viel genauer eingegangen wird.

Abschließend kann man sagen, dass alle vorgestellten Bücher ihre Daseinsberechtigung haben und für jede Schülerin, jeden Schüler, aber auch jede Lehrerin und jeden Lehrer etwas Passendes dabei ist. Die Autorinnen und Autoren beziehungsweise Verlage bemühen sich für jeden Lern- und Lehrtyp das geeignete Format zur Verfügung zu stellen und bieten über die klassischen Schulbücher hinaus, ein breites Spektrum an Zusatzmaterialien sowohl in Buchform als auch im Internet. Es gibt Lösungshefte, Technologie-Tipps-Hefte oder auch Maturatrainingsbücher, welche zur Übung und als Vertiefung sowohl für Schülerinnen und Schüler als auch für Lehrkräfte hilfreich sein können. Somit wird ermöglicht, dass die Schülerinnen und Schüler einen kompetenzorientierten und abwechslungsreichen Unterricht genießen können und bestmöglich auf die neue standardisierte Reifeprüfung vorbereitet werden. Die Verlage bedienen sich aller, für den Unterricht relevanten, neuen Medien und bieten zum Beispiel dynamische Arbeitsblätter auf beigelegten CDs und weiterführende Beispiele auf ihren Internetseiten. Für Lehrkräfte gibt es darüber hinaus digitale Unterstützung in Form von Beamer und Whiteboard-Versionen der Lernmaterialien.

Quellenverzeichnis

Lehrpläne:

Bildungsministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Lehrplan Mathematik 2004 (Fassung 31.08.2017). online unter: https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf [20.04.2018]

Rechtsinformationssystem des Bundes. Lehrplan der Handelsakademie. (Fassung 27.08.2014). online unter: https://www.hak.cc/files/syllabus/Lehrplan_HAK_2014.pdf [20.04.2018]

HTL Bildung mit Zukunft. Lehrplan der höheren Anstalt für Maschinenbau. (2011). online unter: http://www.htl.at/fileadmin/content/Lehrplan/ HTL_SV_2011_2012_2013/SV_Lehrplan_HL_Maschinenbau_2011.pdf [20.04.2018]

Bücher und Skripten:

Bleier, Gabriele; Lindenberg, Judith; u.a.(2016): *Dimensionen Mathematik 7*. 1.Auflage. Wien: Verlag E. Dorner.

Bleier, Gabriele; Lindenberg, Judith; u.a.(2018): *Dimensionen Mathematik 8*. 1.Auflage. Wien: Verlag E. Dorner.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L. and Schmidt-Thieme, B. (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin: Springer.

Brand, Clemens; Dorfmayr, Anita; u.a.(2012): *Thema Mathematik 7*. 2. Auflage. Linz: Veritas-Verlag.

Brand, Clemens; Dorfmayr, Anita; u.a.(2013): *Thema Mathematik 8*. 1. Auflage. Linz: Veritas-Verlag.

Danckwerts, Rainer; Vogel, Dankwart. (2010): *Analysis verständlich unterrichten. Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. Berlin: Springer.

Engel, Joachim (2010): *Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zu Funktionen.* Berlin: Springer.

Fetzer, Albert; Fränkel, Heiner (2012): *Mathematik 1*. 11.Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Fritzsche, Klaus (2015): *Mathematik für Einsteiger. Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn*. 5. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Ganster, Maximilian (2009): *Vorlesung Analysis für Physiker. Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen*. TU Graz: Sommersemester 2009.

Greefrath, Gilbert: Oldenburg, Reinhard; u.a. (2016): *Didaktik der Analysis*. 1.Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Koth, Maria (2010/2011): *Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 6 Differential- und Integralrechnung*. Uni Wien: Wintersemester 2010/11.

Malle, Günther; Koth, Maria; u.a. (2017): *Mathematik verstehen 5*. 1. Auflage. Wien: öbv.

Malle, Günther; Koth, Maria; u.a. (2015): *Mathematik verstehen 6*. 1.Auflage. Wien: öbv.

Malle, Günther; Koth, Maria; u.a. (2016): *Mathematik verstehen 7*. 1.Auflage. Wien: öbv.

Malle, Günther; Koth, Maria; u.a. (2016): *Mathematik verstehen 8*. 1.Auflage. Wien: öbv.

Pauer, Franz; Scheirer-Weindorfer Martina; u.a. (2013): *Mathematik HTL 2*. 2.Auflage.Wien: öbv.

Pauer, Franz; Scheirer-Weindorfer Martina; u.a. (2013): *Mathematik HTL 3*. 1.Auflage. Wien: öbv.

Pauer, Franz; Scheirer-Weindorfer Martina; u.a. (2014): *Mathematik HTL 4/5*. 1.Auflage. Wien: öbv.

Raith, Peter (2015/2016): *Mitschrift zur Vorlesung Differentialgleichungen für LAK*. Uni Wien: Wintersemester 2015/16.

Raith, Peter (2014): *Mitschrift zur Vorlesung Einführung in die Analysis*. Uni Wien: Sommersemester 2014

Internetquellen:

Wikipedia: *Differentialrechnung.* online unter: https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung#Geschichte [22.11.2018]

Hohenwarter, Markus; Jauck, Gabriele (2005): *Einführung in die Differentialrechnung. Differentialquotient*. online unter: http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/diff_einfuehrung/lernpfad/content/06_differentialquotient.htm [25.07.2018].

Fokkens, Elgar (2002): *Nullstelle einer Funktion*. online unter: http://www.idn.uni bremen.de/cvpmm/content/Funktionen/show.php?modul=20&file=6 [01.08.2018].

Vassilevskaya, Lubov: *Ableitung einer Betragsfunktion – Differenzierbarkeit*. online unter: http://www.math-grain.de/download/m1/diff-r/ableitung/differenzierbar-1.pdf [23.10.2018].

ARTMath100 (2012): *Ableitung sin(x) 2. Version*. online unter: https://www.youtube.com/watch?v=Cqi1SKvG3yw [24.10.2018].

Korntreff, Stefan (2014): *Die Ableitung der Sinus- und Cosinusfunktion (... ggf. ein paar Anwendungen)*. online unter: http://didaktik.mathematik.hu berlin.de/files/korntreff_trig_sek2.pdf [24.10.2018].

Polar Pi (2017): *Advanced Calculus: Limit Proofs - Limit as h goes to zero of [e^h-1]/h.* online unter: https://www.youtube.com/watch?v=qWw8VnzTddg [22.11.2018]

MrYouMath (2012): *1. Grenzwert Sin(x)/x.* online unter: https://www.youtube.com/watch?v=GAkdisUIMPQ [20.11.2018]

Jung, Daniel (2015): *Ableitung tan(x), Trigonometrische Funktionen, Tangens, Ableiten*. Mathe by Daniel Jung. online unter: https://www.youtube.com/watch?v=AmzJ_M7yj7o&t=135s [20.11.2018]

Abbildungen

Tabellen