universität wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Spieltheorie im Mathematikunterricht – Entwicklung, Erprobung und didaktische Analyse eines strategischen Spieles als Einleitung in das Gefangenendilemma"

verfasst von / submitted by

Julian Medek

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 333
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	UF Mathematik UF Deutsch
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Zielsetzung

Ziel dieser Diplomarbeit ist, das Thema „Spieltheorie“ didaktisch aufzuarbeiten, sodass es in der Oberstufe einer AHS oder BHS im Unterricht vermittelt werden kann. Den Kern dieser Aufarbeitung stellt ein strategisches Spiel dar, welches im Zuge der Arbeit erstellt wird, und dessen Erstellung und Beschreibung ebenfalls ein Teil der Diplomarbeit ist.

Der zugrundeliegende Gedanke ist, dass über ein derartiges Spiel, bei dem Schülerinnen und Schüler strategische Entscheidungen treffen müssen, die Spieltheorie nicht als Problem oder in Form eines Dilemmas eingeführt wird, sondern vielmehr eine Möglichkeit bietet, ein Problem – nämlich die Frage, wie man das Spiel idealerweise spielen sollte – zu lösen. Von diesem Spiel, das den Schülerinnen und Schülern in Extensivform vorgestellt wird, werden einzelne Entscheidungsmöglichkeiten herausgegriffen, um klassische Konzepte der Spieltheorie in Normalform zu bearbeiten. Dies ergibt eine vier Schulstunden umfassende Unterrichtssequenz, die nicht nur alle wesentlichen und für Jugendliche realistisch erschließbaren Aspekte der Spieltheorie vermittelt, sondern gleichzeitig auch eine Erklärung dafür liefert, wieso dieser Teilbereich der Mathematik Relevanz für das Leben hat.

1.2 Motivation

Die Spieltheorie findet kaum Einzug in den regulären Schulunterricht, und wird bestenfalls in Wahlpflichtfächern oder Kursen zur Begabtenförderung vermittelt. Dieser

Umstand ist bedauernswert, bedenkt man, dass es in der Spieltheorie darum geht, rationale und logische Entscheidungen zu fällen, um den besten Nutzen aus diesen Entscheidungen zu ziehen. Das geht weit über Trivialitäten wie beispielsweise die Suche nach perfekten Strategien für Gesellschaftsspiele hinaus, und kann sich ebenso positiv auf das persönliche Entscheidungsverhalten der Schülerinnen und Schüler auswirken, wie auf das Verständnis für Entscheidungen Anderer, sowie die Möglichkeit, diese nachzuvollziehen. Bedenkt man, dass der beliebteste Kritikpunkt an Schulmathematik ist, dass man sie im echten Leben nie brauchen würde, bietet die Spieltheorie hierfür eine gute Antwort.

Davon auszugehen, dass Jugendliche ihr erworbenes Wissen um die Spieltheorie einsetzen, um Matrizen aufzustellen und zu berechnen, ob es sich für sie auszahlt, ihre Mathematikhausübung zu schreiben oder eine Zugfahrkarte zu kaufen (beides sind beliebte Einstiegsbeispiele, um die Praxisnähe zu verdeutlichen), wäre natürlich naiv, doch wird ihnen zumindest ein Werkzeug vermittelt, das ihnen – sofern ihnen der Wert dieses Werkzeugs verdeutlicht wurde – dabei helfen kann.

Über 15% der Studierenden an öffentlichen österreichischen Universitäten haben eine Hauptstudienrichtung im Bereich der Sozial- und Wirtschaftswissenschaften (Statistik Austria: Belegte ordentliche Studien, Internetquelle 1), ein Anteil der sich erhöht, wenn man Studierende an Fachhochschulen berücksichtigt. (Statistik Austria: Ordentliche Studierende nach Studienart, Internetquelle 2) In diesen Studienrichtungen spielt die Spieltheorie eine essentielle Rolle, doch auch in anderen beliebten Studien wie Rechtswissenschaften, Psychologie oder Politikwissenschaften werden Studierende nicht daran vorbeikommen. Dementsprechend wäre es im Sinne der Schülerinnen und Schüler, ihnen einen ersten einfachen Einblick in die Thematik zu gewähren, um sie besser auf das Studium vorzubereiten.

2 Einführung in die Spieltheorie

2.1 Was ist Spieltheorie?

Die Spieltheorie ist ein Teilbereich der Mathematik, bei dem „[für] soziale Konfliktsituationen mehr oder minder eindeutig das individuell rationale Entscheidungsverhalten [definiert wird]“ (Güth 1999, S. 1). Um diese oftmals komplexen „sozialen Konfliktsituationen“ rational zu behandeln, ist der erste Schritt eines jeden spieltheoretischen Problems, ein Modell zu finden, das Entscheidungen und ihre Auswirkungen von komplexen realen Situationen derart vereinfacht, dass sie mit mathematischen Mitteln bearbeitet werden können.

Diese strategischen Entscheidungssituationen sind laut Holler und Illing Situationen, bei denen:

> (a) das Ergebnis von den Entscheidungen mehrerer Entscheidungsträger abhängt, so daß ein einzelner das Ergebnis nicht unabhängig von der Wahl der anderen bestimmen kann;
>
> (b) jeder Entscheidungsträger sich dieser Interdependenz bewußt ist;
>
> (c) jeder Entscheidungsträger davon ausgeht, daß alle anderen sich ebenfalls der Interdependenz bewußt sind;
>
> (d) jeder bei seinen Entscheidungen (a), (b) und (c) berücksichtigt. (Holler und Illing 2006, S.1)

Die Spieltheorie beschäftigt sich demnach mit allen Situationen, in denen zwei oder mehr Personen oder Fraktionen die Wahl zwischen zwei oder mehr Optionen haben, welche unterschiedliche Ausgänge zur Folge haben, bei denen jeweils die Entscheidungen aller Spielerinnen und Spieler eine Rolle spielen, und welche sich für diese Spielerinnen und Spieler qualitativ unterscheiden. Diese Definitionen umfassen ein weites Feld von Anwendungsgebieten, welche von der Analyse simpler Spiele wie beispielsweise „Schere-Stein-Papier“ bis hin zu globalen Problemen wie dem kalten

Krieg reicht. Diese Vielfalt sorgt dafür, dass dieses mathematische Teilgebiet in etlichen unterschiedlichen Wissenschaften einen Einsatz findet, ob Wirtschaft, Geschichte, Soziologie, Psychologie oder vielen anderen mehr.

2.2 Die Geschichte der Spieltheorie

Als historischer Startpunkt der Spieltheorie gilt das Buch „Theory of Games and Economic Behavior", welches 1944 vom Mathematiker John von Neumann und dem Ökonomen Oskar Morgenstern veröffentlicht wurde. Ausgehend von Neumanns 1928 erschienem Werk „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" wurden hier erstmals die Strategien und Lösungsversuche für Spiele auf reale Situationen – konkret wirtschaftliche Situationen – umgelegt, was die Initialzündung für weitere Forschung gegeben hat.

Bereits sechs Jahre später beschrieb der amerikanische Mathematiker John Forbes Nash Jr. in seiner Doktorarbeit das „Nash-Gleichgewicht", welches neben der „Minimax-Lösung", die bereits 1713 erstmals entwickelt wurde (Waldegrave 1713) immer noch als eine der wichtigsten Lösungsmöglichkeiten für spieltheoretische Probleme gilt. Für seine Arbeit wurde John Forbes Nash im Jahr 1994 auch als erst zweiter Spieltheoretiker mit dem Wirtschaftsnobelpreis ausgezeichnet, mittlerweile wurde der Preis bereits acht Mal für Arbeiten verliehen, die in engem Zusammenhang zur Spieltheorie stehen. Diese Häufung kennzeichnet bereits den Wert, den spieltheoretische Erkenntnisse im 21. Jahrhundert haben, und dass es sich um ein Gebiet handelt, dessen Relevanz immer weiter zunimmt.

2.3 Spiele in Normalform

Beschränkt man sich vorerst auf Spiele für zwei Parteien mit endlich vielen Entscheidungsmöglichkeiten, so lassen sich die spieltheoretischen Fragestellungen in ihrer so genannten Normalform in einer Bimatrix darstellen. Die Entscheidungen von SpielerIn A werden in den Zeilen aufgetragen, die Entscheidungen von B in den Spalten, wobei die einzelnen Zellen angeben, welche Auszahlungen den beiden für gewisse Fälle zustehen. Diese Auszahlungen sind oftmals der Knackpunkt in der Modellbildung, da nicht immer offensichtlich ist, welcher Wert einem gewissen Ausgang zuzuordnen ist, da hierbei mitunter subjektive Faktoren eine Rolle spielen. Im einfachen Beispiel des Spiels „Schere-Stein-Papier“, bei dem zwei Personen gegeneinander spielen, und sich für eine der drei namensgebenden Optionen entscheiden, lässt sich aus den Regeln direkt eine Bimatrix formen. Wer „Schere“ wählt besiegt „Papier“, verliert jedoch gegen „Stein“, während „Papier“ gegen „Stein“ gewinnt. Wählen beide dieselbe Option, endet eine Runde unentschieden. Daraus ergibt sich folgende Bimatrix:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">SpielerIn B</td></tr>
<tr><td>Schere</td><td>Stein</td><td>Papier</td></tr>
<tr><td rowspan="3">SpielerIn A</td><td>Schere</td><td>0
0</td><td>1
–1</td><td>–1
1</td></tr>
<tr><td>Stein</td><td>–1
1</td><td>0
0</td><td>1
–1</td></tr>
<tr><td>Papier</td><td>1
–1</td><td>–1
1</td><td>0
0</td></tr>
</table>

Rechts oben in einer Zelle steht jeweils die Auszahlung für SpielerIn B, links unten ist jene für SpielerIn A zu finden. Die Auszahlungen „1“ und „–1“ beschreiben den Sieg, respektive eine Niederlage, während die Auszahlung „0“ ein Unentschieden angibt.

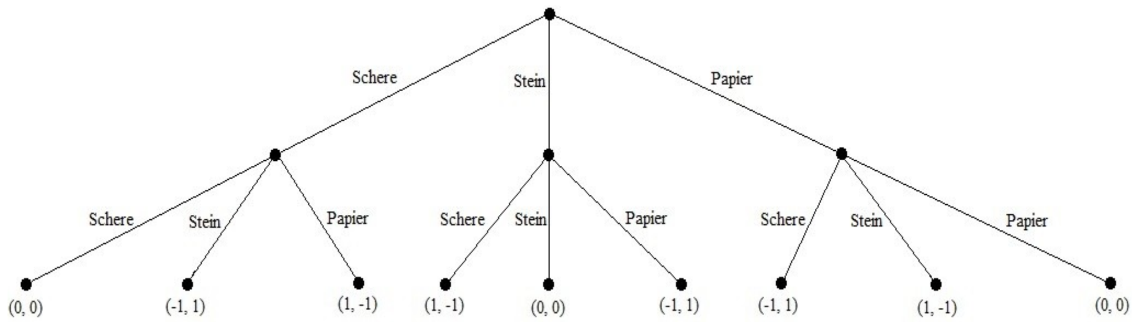
Streng genommen findet hier bereits Modellbildung statt, Punkte für Siege, Unentschieden und Niederlagen könnten auch anders vergeben werden (zum Beispiel gemäß den Regeln von Fußballspielen als 3, 1 und 0 oder wenn in jeder Runde um 10 € gespielt wird als 10, 0 und –10), doch hier schwingt bereits mit, dass „Schere-Stein-Papier“ zumeist von zwei Personen über eine fixe Anzahl von Runden gespielt wird, wobei die Person mit den meisten Siegen in diesem Zeitraum gewinnt (wie auch immer dieser Gewinn aussehen mag).

Die Strategiemenge für beide Spielerinnen und Spieler (zumeist Σ_A und Σ_B oder S_A und S_B genannt) sind in dieser Situation ident – dies muss aber nicht immer der Fall sein, als Strategieprofil oder Strategiekonfiguration wird ein konkreter Fall σ als σ_A x σ_B bezeichnet, wobei σ_A und σ_B konkrete Entscheidungen aus Σ_A und Σ_B sind. Die in der Tabelle zu findenden Werte sind die jeweiligen Ergebnisse der Auszahlungsfunktionen $H_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, das heißt für H_A und H_B wird jeweils jeder möglichen Entscheidungskombination ein Wert aus den reellen Zahlen zugewiesen, der die Auszahlung für A beziehungsweise B für ein bestimmtes σ angibt. (Berninghaus et al., 2006)

2.4 Spiele in extensiver Form

Während bei Spielen in Normalform immer fest stehen muss, dass beide Parteien ihre Entscheidung gleichzeitig, beziehungsweise im Unwissen über die Entscheidung der Gegnerin oder des Gegners treffen müssen, lässt sich dies in der extensiven Form auflösen. Hier werden die Entscheidungen in Form eines Entscheidungsbaumes aufgetragen, was zusätzlich zu einer möglichen – wenn auch nicht zwingenden – zeitlichen Abfolge auch die Option für mehrere Runden oder mehrere Spielerinnen und Spieler erlaubt, ohne den Rahmen einer Bimatrix zu sprengen. Viele Probleme lassen sich in beiden Formen darstellen, allerdings hat sich gezeigt, dass die Extensivform weitere Erkenntnisse liefern kann, (Berninghaus et al., 2006, S. 91) dementsprechend eine allgemeinere Form ist, während die Normalform stärker begrenzt ist, dafür die Zustände optisch besser zugänglich macht.

Für das bereits bekannt Spiel „Schere-Stein-Papier" ergäbe sich folgender Entscheidungsbaum:



SpielerIn A hat die drei bekannten Optionen „Schere", „Stein" und „Papier", ebenso wie B. Hierbei muss erwähnt werden, dass die Ebenen des Baumes keine zeitliche Abfolge beschreiben, sondern die beiden Entscheidungen wiederum unabhängig voneinander getroffen werden müssen. Um die Auszahlungen einer bestimmten Strategiekonfiguration zu erfahren, muss einfach dem entsprechenden Pfad gefolgt werden, die Auszahlungen werden in der Form (Auszahlung A, Auszahlung B) notiert.

Wie sich bei diesem Beispiel bereits zeigt, ist eine Bimatrix wesentlich übersichtlicher, und für gewisse Berechnungen praktischer. Die Stärke der Extensivform zeigt sich erst in Spielen mit mehreren Spielerinnen oder Spielern, so kann zwar ein Entscheidungsbaum durch das Hinzufügen einer dritten Spielerin sehr schnell anwachsen und unübersichtlich werden, die Darstellung für drei Parteien in Normalform benötigt hingegen entweder einen Tensor dritter Stufe oder eine Vereinfachung des Problems, indem bloß eine Partei betrachtet wird, deren Gegenspielerinnen und Gegenspieler zusammengefasst werden. Hierbei ist jedoch damit zu rechnen, dass Informationen verloren gehen. Darüber hinaus ist die Darstellung mehrerer aufeinander folgender Runden möglich, wie sie in vielen Spielen (zum Beispiel Schach) hilfreich ist.

Die extensive Form wird vor allem für die Einführung in die Spieltheorie oft vernachlässigt, da sich diese Form erst dann lohnt, wenn eine Situation zu komplex wird, um vernünftigerweise in einer Einführung erwähnt zu werden. Hierbei wird jedoch vergessen, dass für Schülerinnen und Schüler ohne Erfahrung mit Spieltheorie die Darstellung als Entscheidungsbaum näherliegend ist und natürlicher kommt, einerseits da sie eine ähnliche Darstellung bereits im Zuge der Wahrscheinlichkeitsrechnung kennenlernen, andererseits weil die Situation schrittweise bearbeitet wird, und nicht als abgeschlossenes Ganzes postuliert werden muss. Darüber hinaus ist eine Bimatrix ein völlig neues Gebilde, in dem man sich erst zurechtfinden muss. Dass beispielsweise der Wert rechts oben in einer Zelle die Auszahlung für Spielerin oder Spieler B ist, der Wert links unten für A ist zwar naheliegend und verständlich, aber nicht trivial. Beginnt man jedoch mit der extensiven Darstellung, und geht davon ausgehend zur eleganteren, übersichtlicheren Variante über, selbstverständlich dieselbe Situation beschreibend, so können die Schülerinnen und Schüler selbstständig den gedanklichen Übergang von einer Form zur anderen machen, um ihn besser zu verstehen.

2.5 Das Nash-Gleichgewicht

Ein 1950 von John Forbes Nash entwickeltes Lösungskonzept, das in spieltheoretischen Kreisen früh den Namen „Nash-Gleichgewicht“ bekam, bezieht sich vor allem auf die Stabilität von Entscheidungen. Wie für das „Schere-Stein-Papier“-Spiel in Normalform ersichtlich ist, gilt für jede Zelle, dass entweder A, oder B, oder beide davon profitieren würden, eine andere Entscheidung zu treffen. Diese andere Entscheidung wäre aber wiederum instabil, da dann für die jeweils andere Spielerin beziehungsweise den anderen Spieler eine alternative Entscheidung echt besser wäre. In einer derartigen Situation spricht man davon, dass es kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien gibt. Anders in folgendem Beispiel (aus Berninghaus et al. 2006, S. 25):

	X	Y	Z
X	**4** 0	0 **4**	3 5
Y	0 **4**	**4** 0	3 5
Z	5 3	5 3	**6** **6**

Ist eine Ziffer fett gedruckt, so lohnt es sich für die jeweilige Spielerin oder den jeweiligen Spieler nicht, die Strategie zu ändern, bei nicht fett gedruckten Ziffern jedoch schon. Die Strategiekonfiguration (X, X) wäre zwar stabil für B (die Entscheidungen für B sind die einzelnen Spalten), A hätte aber mit der Strategie Y eine höhere Auszahlung. Einzig die Strategiekonfiguration (Z, Z) ist stabil, da sowohl A als auch B keine Möglichkeit haben, durch eine andere Strategie ihre Auszahlung zu erhöhen. Man spricht demnach davon, dass dieses Problem ein Nash-Gleichgewicht bei (Z, Z) hat.

Formal heißt eine Strategiekonfiguration $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ Nash-Gleichgewicht, wenn für alle $\sigma_i \in \Sigma_i$ aller SpielerInnen i gilt, dass $H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) \geq H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i)$ ist (Berninghaus et al. 2006, S. 24), wobei der Index *–i* hier für alle SpielerInnen steht, die nicht *i* sind.
Das heißt eine Zelle der Bimatrix beschreibt die Strategiekonfiguration eines Nash-Gleichgewichts, wenn für alle Spielerinnen und Spieler gilt, dass ihre persönliche Auszahlung in dieser Zelle mindestens so hoch ist wie jede einzelne ihrer möglichen Auszahlungen in dem Fall, dass alle anderen Entscheidungen gleich bleiben, und sie nur ihre eigene verändern.

Einer der intrinsischen Vorteile der Normalform, insbesondere für den Einführungsunterricht ist, dass die Suche nach einem Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien durch bloßes „Hinschauen“ durchführbar ist, und keinerlei Berechnung benötigt wird. Die Situation wird komplizierter, wenn ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gesucht wird. Eine Spielerin oder ein Spieler verwendet eine gemischte Strategie, wenn sie oder er jede mögliche Strategie mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit spielt, wobei die Summe aller Wahrscheinlichkeiten selbstverständlich 1 sein muss. Sind diese Wahrscheinlichkeiten 1 für eine Strategie und in Konsequenz 0 für alle anderen, so ergäbe dies wiederum eine reine Strategie. Betrachtet man alle Strategien, die nicht reine Strategien sind, so spricht man auch von echt gemischten Strategien.

Um gemischte Strategien zu analysieren, betrachten wir ein weiteres Beispiel, in diesem Fall ein so genanntes Koordinationsspiel, das als „battle of the sexes“ bezeichnet wird. (Luce, Raiffa 1957)

	C	D
C	3 2	0 0
D	0 0	2 3

Hierbei handelt es sich um ein Spiel, welches im Original die Optionen eines Paares beschreibt, wie der Abend verbracht wird. Beide haben eine Präferenz, bevorzugen jedoch, den Abend gemeinsam zu verbringen. Wie hier klar sichtbar ist, gibt es zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien. Der Name „Koordinationsspiel“ ergibt sich aus dem Umstand, dass sich die beiden Parteien ohne direkte Absprache auf dieselbe Strategie einigen müssen, sich also koordinieren sollten. Gelingt dies, tritt ein für beide positives Ereignis ein, gelingt es nicht, ergibt sich ein negatives Ergebnis für beide.

Zur Berechnung des Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien bedarf es zweier Wahrscheinlichkeitsvektoren $(p, 1-p)$ für die Wahl der Zeile und $(q, 1-q)$ für die Wahl der Spalte, wobei p und q jeweils die Wahrscheinlichkeiten dafür sind, dass Option C gewählt wird, während $1-p$ und $1-q$ die Wahrscheinlichkeiten für Option D sind.

Die Auszahlung von A in Abhängigkeit von q ist demnach für:

C: $H_A(q)=2\cdot q$

D: $H_A(q)=3-3\cdot q$

C = D für $2\cdot q=3-3\cdot q$, also $q=\frac{3}{5}$

Demnach gilt für dieses q, dass sich eine Abweichung durch A nicht auszahlt, wodurch die erste Hälfte der Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist.

Analog gilt für B bei:

C: $H_B(p)=3\cdot p$

D: $H_B(p)=2-2\cdot p$

C = D für $3\cdot p=2-2\cdot p$, also $p=\frac{2}{5}$

Für die gemischten Strategien, die über $p=\frac{2}{5}$, $q=\frac{3}{5}$ definiert sind, lohnt es sich also für niemanden, von diesen Strategien abzuweichen, es existiert somit ein Nash-Gleichgewicht in echt gemischten Strategien, zusätzlich zu den beiden Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien.

Konkret heißt dies für die beiden Parteien, dass sie durch ein Zufallsexperiment mit der entsprechenden Gewichtung zwischen den Optionen C und D entscheiden sollten. Die erwartete Auszahlung liegt dann für A, ebenso wie für B bei

$$p\cdot q\cdot 2+(1-p)\cdot(1-q)\cdot 3=\frac{6}{5}=p\cdot q\cdot 3+(1-p)\cdot(1-q)\cdot 2$$

Hier zeigt sich auch, dass gemischte Strategien erst dann intuitiv werden, wenn die zugehörigen Experimente wiederholt durchgeführt werden, die Auszahlungsmatrizen beiden bekannt sind, und davon ausgegangen wird, dass beide Spielerinnen oder Spieler rational handeln.

2.6 Das Gefangenendilemma

Ein besonders beliebtes Beispiel in der Spieltheorie ist das so genannte Gefangenendilemma, das in den 1950er Jahren entstanden ist. Die Situation wird wie folgt beschrieben: Zwei Gefangene, die gemeinsam ein Verbrechen verübt haben, werden in getrennten Räumen verhört. Beide haben die Möglichkeit, entweder zu gestehen oder zu schweigen. Wenn beide schweigen, werden sie aus Mangel an Beweisen nur für kleinere Gesetzeswidrigkeiten bestraft (die exakte Auszahlung variiert, relevant ist vor allem das Verhältnis der Auszahlungen zueinander), gestehen beide, erwartet sie auch beide eine hohe Haftstrafe. Für den Fall, dass nur eine oder einer der beiden gesteht, geht diese oder dieser als KronzeugIn straffrei, während die oder der Andere alleine für alle gemeinsam verübten Verbrechen eingesperrt wird.

Die Auszahlungsmatrix sieht dann wie folgt aus:

	gesteht	schweigt
gesteht	–5 –5	–7 0
schweigt	0 –7	–1 –1

Der Umstand, dass sich hier ein Nash-Gleichgewicht bei (gesteht, gesteht) finden lässt, während der Fall (schweigt, schweigt) für beide besser wäre, macht diese Situation zu einem Dilemma. Die Strategie „gestehen“ ist eine streng dominante Strategie, das heißt unabhängig von der Entscheidung des oder der Anderen, ist es immer besser, zu gestehen, obwohl dies zur insgesamt schlechtesten Situation führt.

Wie bereits erwähnt variieren die genauen Auszahlungen in verschiedenen Quellen, wichtig ist aber, dass die Strategie „gestehen“ streng dominant ist, und dass die Summe der Auszahlungen H_A und H_B bei (gesteht, gesteht) minimal und bei (schweigt, schweigt) maximal ist.

Dieses Grundlegende Konzept lässt sich auf etliche Situationen ummünzen, beispielsweise im „OPEC-Spiel“, wo zwei OPEC-Staaten die Entscheidung treffen, ob sie mehr oder weniger Öl produzieren, oder im Beispiel für den kalten Krieg, in dem beide Seiten die Option für Aufrüstung oder Abrüstung hatten. Formuliert man die Situation allgemeiner, so benennt man die Strategien nicht als „gestehen“ und „schweigen“, sondern als „Defektion“ und „Kooperation“. Diese Nomenklatur kann beim Einstieg über das klassische Gefangenendilemma eventuell für Verwirrung sorgen, da die Strategie „Defektion“ sozusagen eine Kooperation mit den Behörden beschreibt.

Das Gefangenendilemma lässt sich außerdem noch erweitern, zum Beispiel auf mehr als zwei Personen. Dies wird oft als n-Personen-Gefangenendilemma oder auch als „tragedy of the commons“ bezeichnet. Dieser zweite Namen hat seinen Ursprung bei öffentlichen Ressourcen, die von mehreren Personen genutzt werden können. Eine öffentliche Weidefläche, die von zehn Bäuerinnen oder Bauern genutzt wird, indem jede und jeder ein Rind darauf grasen lässt, führt in diesem Beispiel zu einem optimalen Ertrag für alle. Entscheidet sich jedoch eine der Personen für ein zweites Rind auf derselben Fläche, so ist nicht mehr genügend Nahrung für alle da, und die Rinder werden nur 10% kleiner als zuvor. Würden dies alle machen, stünden sie mit jeweils 2 Rindern mit etwa einem Drittel ($0{,}5^{10}$) der originalen Größe da. Individuell ist es besser, ein zweites Rind $\left(x<0{,}9\cdot x+0{,}9\cdot x\right)$ auf die Weidefläche zu lassen, insgesamt schadet es jedoch der gesamten Gruppe $\left(n\cdot x>0{,}9\cdot(n+1)\cdot x\;\forall\, n\geq 10\right)$.
Ein analoges Beispiel, das mathematisch weniger präzise ausformuliert ist, aber denselben Regeln folgt, wäre die Überfischung der Meere. Sich in diesem Fall an gewisse Fangquoten zu halten sorgt dafür, dass der Fischbestand in Zukunft gleich bleibt oder größer wird, was der Optimalfall wäre, sobald jedoch eine Fischerin oder ein Fischer diese Quote überschreitet, ergibt sich ein höherer Ertrag, sodass alle anderen wiederum ihre Quote erhöhen müssten, um bei den durch das höhere Angebot gesunkenen Preisen denselben Gewinn zu erzielen. Als Konsequenz fischen alle Beteiligten aus eigenem Interesse mehr, und schaden somit allen.

Diese Probleme, ob für zwei oder mehr Personen spielen eine wichtige Rolle im Verständnis für menschliche Entscheidungen in der Geschichte aber auch der Gegenwart. Sie bieten zwar in dieser Form keine Lösung für Probleme – im individuellen Fall haben einzelne Akteure, die naiv kooperieren auf jeden Fall das Nachsehen – aber eine gute Erklärung für bestimmte Situationen.

Das Dilemma lässt sich erst lösen, wenn es wiederholt durchgeführt wird, hier wird auch vom iterierten Gefangenendilemma gesprochen. Damit die Iteration sinnvoll ist, bedarf es einer zusätzlichen Bedingung zu den weiter oben bereits genannten.

$2 * H_i$ (schweigt, schweigt) $> H_i$ (schweigt, gesteht) $+ H_i$ (gesteht, schweigt) $\forall$ i

Das bedeutet, dass es besser sein muss, in zwei Runden jeweils vollkommen zu kooperieren, als sich gegenseitig abwechselnd auszunutzen.

Im iterierten Gefangenendilemma, wie es von Robert Axelrod beschrieben wird (Axelrod 1980, Axelrod 1984) ist keine Koordination erlaubt, es ist nur beiden Seiten die Auszahlungsmatrix bekannt, sowie die gegnerische Entscheidung in den vorhergehenden Runden. In einem durchgeführten „Turnier" traten vorgefertigte Strategien wiederholt gegeneinander an, deren Entscheidungsverhalten vorprogrammiert war. Im Zuge dieses Turniers, das später unter Inklusion zusätzlicher Strategien noch wiederholt wurde, kristallisierte sich heraus, dass die im Allgemeinen beste Strategie die mit dem Namen „tit-for-tat" war. Tit-for-tat beginnt immer mit Kooperation, und wählt danach die Entscheidung, die von der gegnerischen Strategie im vorigen Zug gewählt wurde. Dies führt dazu, dass tit-for-tat zwar im Allgemeinen zur Kooperation neigt, allerdings Defektion gleichmäßig bestraft. Dadurch „gewinnt" diese Strategie zwar keine Runde (ein einzelnes Duell wird stets von der Strategie, die öfter defektiert, gewonnen, tit-for-tat defektiert aber höchstens gleich oft wie die gegnerische Strategie), erreicht aber insgesamt mehr Punkte als andere Strategien, die häufiger defektieren. Dieses tit-for-tat sowie seine Variationen gilt immer noch als die beste Strategie, die nicht explizit dafür gebaut wurde, bestimmte andere Strategien zu erkennen und auszunutzen. Hier zeigt sich also, dass Kooperation mit eingebauter konsequenter Bestrafung eine langfristig erfolgreichere Strategie ist, als durchgehende Defektion.

2.7 Spieltheorie in der Schule

Spieltheorie hat den Vorteil, dass sie sich auch mit limitiertem mathematischen Werkzeug bereits erschließen lässt, und dadurch eine weniger hohe Barriere darstellt. Unter den in diesem Kapitel aufgeführten Punkten braucht man bloß für gemischte Strategien „echtes Rechnen“, und auch hier steht der Gedankenschritt, was es überhaupt bedeuten kann, eine gemischte Strategie zu verwenden, im Vordergrund im Vergleich zur eigentlichen Berechnung. Konzentriert man sich auf komplexere Probleme und betrachtet sie genauer, wird es das mathematische Handwerk betreffend schwieriger, allerdings entsteht dadurch für die Schülerinnen und Schüler kein Mehrwert, was das generelle Verständnis der Spieltheorie anbelangt. Wichtig an der Spieltheorie für Schülerinnen und Schüler eine Oberstufe ist:

a) Wie lassen sich Entscheidungsmöglichkeiten modellieren?
b) Wie kann man die eigene Entscheidungsfindung optimieren?
c) Wieso werden gewisse Entscheidungen getroffen, die allen zu schaden scheinen?
d) Der kurzfristige Nutzen von Defektion.
e) Der langfristige Nutzen von Kooperation.

Die Modellierung sollte demnach nicht einfach hingestellt werden, sondern gehört exakt besprochen: wie ist eine Bimatrix aufgebaut, warum haben gewisse Auszahlungen ihren genauen Wert, was würde es bedeuten, wenn ein bestimmter Wert verändert wird? Diese Modellierung kann auch durch die Klasse vervollständigt werden, insbesondere für ein Beispiel, das bereits bekannt ist. „Schere-Stein-Papier“ bietet sich besonders an, allerdings hält sich hier der Ertrag durch die Bimatrix in Grenzen, da die Wechselwirkungen unterschiedlicher Strategien miteinander ohnehin trivial sind.

Das Rechnen mit gemischten Strategien gehört alleine schon deswegen dazu, damit nicht der falsche Eindruck entsteht, alle Probleme der Spieltheorie ließen sich durch bloßes „Hinschauen“ oder geschickte Überlegung lösen. Die Erkenntnis, dass es manchmal besser ist, gewisse Entscheidungen bis zu einem gewissen Grad dem Zufall zu überlassen kann auch gefährlich sein und sollte dementsprechend gut erklärt werden. Ein vorexerziertes Beispiel sollte auch keine gleichmäßige Gewichtung zwischen den Strategien haben, da sonst leicht der Eindruck entstehen könnte, dass sich manche Entscheidungen am besten über einen Münzwurf finden lassen. Das Ziel muss sein, den Schülerinnen und Schülern hochwertigere Wege zur Entscheidungsfindung zur Verfügung zu stellen, und sie nicht mit dem Halbwissen zu versorgen, dass sich am besten eine Münze werfen lässt, um beispielsweise zu entscheiden, welches Studium sie nach der Matura verfolgen sollten.

Die Aspekte c) bis e) drehen sich alle um das Gefangenendilemma, dessen kulturelle und historische Bedeutung unbestritten ist. Auch dieser geschichtliche Kontext muss seinen Platz im Schulunterricht finden, und es muss Raum gegeben werden, dies auch mit der Klasse zu besprechen. Auch die Ergänzungen, einerseits auf mehr als zwei Personen, andererseits zum iterierten Gefangenendilemma, sind wichtig und dürfen nicht bloß aus purer mathematischer Perspektive behandelt werden. Besonders die Iteration wird sehr gerne weggelassen, weil sie den Rahmen dessen sprengt, was man in Form einer Bimatrix veranschaulichen kann, doch gerade weil das einmalig durchgeführte Gefangenendilemma derart bedrückende Erkenntnisse liefert – dass Kooperation stets bestraft wird – benötigt es die zusätzliche Perspektive, die den Wert von Kooperation aufzeigt, und erklärt, wieso es Altruismus gibt, und dass dies nicht zwangsläufig heißt, sich ausnutzen zu lassen. Gerade die Eigenheiten von tit-for-tat: Wille zur Kooperation, Konsequenz in der Bestrafung, aber keine langfristige Rache sind Aspekte, deren Erfolg sich mathematisch zeigte. Diese Erkenntnisse sind es auch wert, an die Schülerinnen und Schüler weitergegeben zu werden.

2.8 Spieltheorie in Spielform – warum?

Wenn Schülerinnen oder Schüler aber auch Studierende erstmals vom Gefangenendilemma hören, dann stellt sich für sie fast immer die Frage, warum man nicht einfach kooperiert, wenn es doch für beide Seiten die beste Entscheidung wäre. Es ist zwar deutlich einsehbar, dass Defektion den besseren Ertrag bringt, aber ebenso ist in der Bimatrix die Zelle (schweigt, schweigt) zu finden, deren Auszahlungen deutlich machen, dass man sich so entscheiden sollte. Von außen ist das Gefangenendilemma leicht zu dekonstruieren, der wahre Konflikt entsteht erst, wenn man sich selbst in einer derartigen Position befindet. Wie in 2.7. argumentiert, ist gerade das Gefangenendilemma ein essentieller Bestandteil der spieltheoretischen Bildung, und sollte auch auf der persönlichen Ebene verstanden werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen diese Situation erleben und den Konflikt spüren, bevor sie das sterilisierte Problem serviert bekommen, um nachvollziehen zu können, worin die Problematik besteht, nachvollziehen können, wieso der kalte Krieg zu einer derart absurden Aufrüstung geführt hat. Doch um diesen Konflikt zu spüren, müssen sie ihn selbst erleben, idealerweise ohne selbst nukleare Waffen produzieren zu müssen.

Ziel muss also sein, ein Spiel anzubieten, das die grundlegenden Komponenten des Gefangenendilemmas umfasst, allerdings nicht aufgesetzt und wie ein Mathematikbeispiel wirkt. Gleichzeitig sollte der Ansatz geliefert werden, um auf all die angesprochenen Punkte hinzuführen, das heißt die Gegenüberstellung von Extensivform und Normalform, Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien und gemischten Strategien, das Gefangenendilemma nicht nur als singuläres Experiment, sondern zumindest in Ansätzen in iterierter Form. Da es unmöglich scheint, ein derartiges Spiel zu finden, bleibt bloß die Alternative, es zu erstellen. Dieser Prozess, sowie die weiteren Überlegungen und die Gegenüberstellung zu anderen Möglichkeiten, Spieltheorie in den Unterricht zu bringen, werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit behandelt.

3 Didaktische Überlegungen

3.1 Legitimation und Rechtfertigung

Die Frage, welche Themenbereiche einen Platz im Mathematikunterricht der Oberstufe an österreichischen Schulen haben, wird durch zwei offizielle Dokumente beantwortet – einerseits durch den Lehrplan (Lehrplan, Internetquelle 3), andererseits durch die Liste der Grundkompetenzen für die Matura im Fach Mathematik (Grundkompetenzen, Internetquelle 4).

Der Lehrplan für die AHS ist in drei Teile gegliedert: Bildungs- und Lehraufgabe, didaktische Grundsätze und Lehrstoff. Der Lehrstoff beschreibt die Gebiete der Mathematik, die verpflichtend im Unterricht zu vermitteln sind, und welche Kenntnisse in diesen Gebieten von Schülerinnen und Schülern erworben werden sollen. Da Spieltheorie keines dieser Gebiete ist, gibt es nur marginale Überschneidungen, und eine Unterrichtssequenz zum Thema Spieltheorie würde den Lehrstoff nur in unbefriedigendem Ausmaß abdecken.
Die Bildungs- und Lehraufgabe des Mathematikunterrichts laut Lehrplan besteht aus mehreren kleineren Teilen. Mathematische Kompetenzen, die sich auf Kenntnisse oder Begriffe beziehen, sind eng an den Lehrstoff gebunden, da es hierbei um zu erwerbendes Wissen geht, und der Lehrstoff definiert, welches Wissen verlangt wird, und welches nicht.
Von den vier „Kompetenzen, die sich auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen“ (Lehrplan, S. 1) würden drei im Zuge der Unterrichtssequenz erworben werden. An erster Stelle steht hier das darstellend-interpretierende Arbeiten, bei dem es um die Übertragung von Begebenheiten des Alltags in die Sprache der Mathematik geht. Diese Übertragung wird zwar den Schülerinnen und Schülern vorerst nur vorgesetzt, im weiteren Verlauf der Sequenz wird jedoch ein Fokus auf die aktive

Übersetzung eines Alltagsproblems in ein spieltheoretisches Problem in Normalform gelegt. Zwar hat es sich im modernen Mathematikunterricht mittlerweile durchaus durchgesetzt, dass der Realitätsbezug gesucht wird, doch finden sich insbesondere in der Oberstufenmathematik vermehrt Themen, in denen das nur bedingt plausibel ist (z.B. komplexe Zahlen, räumliche Koordinatengeometrie, Integralrechnung), während es ein Kernelement der Spieltheorie ist, dass Situationen aus dem „echten Leben" modelliert und mathematisch gelöst werden.
Auch das kritisch-argumentative Arbeiten ist in der gesamten Spieltheorie ein essentieller Aspekt. Einerseits müssen Werte für Auszahlungen argumentiert und hinterfragt werden, um eine valide Lösung erhalten zu können. Wie wichtig es ist, diese Werte nicht ungefragt hinzunehmen, sollte den Schülerinnen und Schülern auch vermittelt werden, indem zunächst auch bei den präsentierten Beispielen die Eintragungen der Auszahlungsmatrizen vom Klassenverband diskutiert und beschlossen werden sollen. Wenn die Schülerinnen und Schüler später in der Sequenz ihre eigenen Beispiele erstellen, erfahren sie diese Problematik aus erster Hand.
Andererseits bietet die Spieltheorie zahlreiche kontraintuitive Problemstellungen und Paradoxa, allen voran das Gefangenendilemma. Derartige Probleme regen stets zum Nachdenken an und fordern das kritisch-argumentative Denken der Jugendlichen heraus.
Während die beiden erstgenannten Arbeitsweisen in der Spieltheorie überdurchschnittlich stark vertreten sind, handelt es sich beim formal-operativen Arbeiten um etwas, das sich quer durch alle Stoffbereiche der Mathematik zieht. Auch in dieser Unterrichtssequenz werden spezielle Verfahren und Techniken zur Lösung von bestimmten Aufgaben gelehrt und geübt, doch unterscheidet sie das kaum von Sequenzen, die auf einen anderen Stoff zurückgreifen.

Unter den Aspekten des Mathematikunterrichts, wie sie im Lehrplan (S.1 f) gegliedert werden, ist insbesondere der „erkenntnistheoretische Aspekt" hervorzuheben. Die Spieltheorie ermöglicht es, den Vorgang der Entscheidungsfindung zu veranschaulichen und zu mathematisieren. Diese Erkenntnis wird noch zusätzlich intensiviert, da die Schülerinnen und Schüler im Zuge der Unterrichtssequenz zunächst die Rolle wichtiger

Entscheidungsträgerinnen und Entscheidungsträger übernehmen, um auf diese Weise Entscheidungsmechanismen nachvollziehen können. Dieses zu erwerbende Verständnis, wie Entscheidungen getroffen werden führt – auch durch den politischen Rahmen, in dem das Spiel stattfindet – nahtlos zum „kulturell-historischen Aspekt“: große geopolitische Gegebenheiten, die in der Nachbetrachtung nach schlechten Entscheidungen aussehen, lassen sich sehr leicht veranschaulichen und nachvollziehen. Passende Beispiele hierfür sind etwa der kalte Krieg, insbesondere unter der Berücksichtigung von Aufrüstung und nuklearen Waffen, wie auch die Ereignisse, die zum ersten beziehungsweise zum zweiten Weltkrieg geführt haben.
Die Relevanz der Spieltheorie zur Erfüllung des „pragmatisch-anwendungsorientierten Aspekts“ wurde in Kapitel 1.2. bereits angeschnitten. 15% aller Studierenden entscheiden sich für ein Studium der Sozial- und Wirtschaftswissenschaften, und werden demnach im Laufe ihrer akademischen Ausbildung intensiven Kontakt mit der Spieltheorie machen.

Die Spieltheorie ist außerdem ein Paradebeispiel für den Bildungsbereich „Mensch und Gesellschaft“, und behandelt ihn in doppelter Hinsicht, da nicht nur die Bedeutung der Mathematik in der Gesellschaft verdeutlicht wird, sondern auch die Gesellschaft und menschliches Verhalten bis zu einem gewissen Grad mathematisch veranschaulicht werden kann. Andere Bildungsbereiche kommen hingegen nur in geringem Ausmaß zum Tragen – der Übergang von eher subjektiven Auswirkungen einer Entscheidung auf konkrete Auszahlungswerte, wie sie in einer Auszahlungsmatrix benötigt werden, stellt gewissermaßen die Übersetzung von Standardsprache in die Sprache der Mathematik dar.

Die Grundkompetenzen (Internetquelle 4) sind zu einem großen Teil sehr eng an den Lehrstoff, wie er im Lehrplan definiert ist, gebunden, dementsprechend lassen sich auch nur vereinzelt Kompetenzen finden, die über eine Unterrichtssequenz zur Spieltheorie erworben werden können. Auch in den Fällen, in denen sich ein derartiger Bezug finden lässt, handelt es sich, wie beispielsweise bei Deskriptor 1.1 „mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen rechnen [...]“ um mathematisch relativ anspruchslose

Kompetenzen, die in nahezu allen anderen Bereichen der Mathematik eine ähnliche Rolle spielen.
Realistischerweise wird eine vierstündige Unterrichtssequenz zum Thema Spieltheorie keinen nachhaltig positiven Effekt auf das Abschneiden bei der schriftlichen Reifeprüfung haben. Die Bereiche der Spieltheorie, die das mathematische Handwerk bezüglich komplexer sind – beginnend mit gemischten Strategien – können zwar dafür herhalten, weitere Grundkompetenzen zu festigen, doch stellt sich hier wiederum die Frage, ob dies nicht über das gewünschte Ziel einer Einführung in die Spieltheorie hinausginge und demnach noch mehr Unterrichtszeit beanspruchen würde.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass es in der aktuellen Konstellation von Lehrplan und Reifeprüfung schwierig ist, einen fixen Platz im Mathematikunterricht für die Spieltheorie zu finden. Eine Auslagerung zum Wahlpflichtfach Mathematik wirkt zwar naheliegend, doch sind diejenigen Schülerinnen und Schüler, welche in späterer Folge im Studium mit der Thematik zu tun haben werden, nicht zwangsläufig dieselben, die sich für ein Wahlpflichtfach Mathematik interessieren. Dementsprechend wäre es wünschenswert, einen Platz im Regelunterricht zu finden, auch wenn dieser rechtlich leider nicht reserviert ist. Gerade unter dem Gesichtspunkt der neuen Reifeprüfung, in der der Wert mehr auf Verständnis als auf die rechnerische Durchführung gelegt wird, lässt sich das Argument finden, dass es an der Zeit wäre, Spieltheorie in den Mathematikunterricht einzuführen. Kernaspekte der Spieltheorie wie Modellbildung und der gesellschaftliche Bezug – Dinge, die im Lehrplan verankert sind – können oft nur relativ schwierig in den Mathematikunterricht integriert werden. Die Spieltheorie schafft nicht nur das, sie hält auch als Gebiet her, in dem das Verständnis eine wesentlich größere Rolle spielt als das mathematische Handwerk, wenn es darum geht, Fragestellungen zu lösen.
Spieltheorie sollte einen Platz im Schulunterricht haben, und wenn Gelegenheit dafür vorhanden ist, diesen Platz für eine Klasse individuell zu schaffen, sollte diese auch genutzt werden.

3.2 Gegenüberstellung zu anderen Herangehensweisen

In der Fachliteratur finden sich vereinzelte Ansätze, wie Spieltheorie im Mathematikunterricht, dem Wahlpflichtfach Mathematik oder in der Begabtenförderung an Schülerinnen und Schüler herangetragen werden könnte. Im Folgenden werden zwei dieser Ansätze analysiert und mit der geplanten Unterrichtssequenz verglichen.

3.2.1 Nash-Gleichgewicht und Minimax-Lösung

Im Artikel „Nash-Gleichgewicht und Minimax-Lösung – Gegenüberstellung zweier Konzepte der Spieltheorie“ von Christoph Ableitinger und Hans Humenberger (Ableitinger und Humenberger 2010) wird ein Zugang vorgestellt, wie zwei essentielle Konzepte der Spieltheorie im Mathematikunterricht präsentiert werden können. Zunächst wird hier die Verwendung einer Auszahlungsmatrix anhand des „Schwarzfahrer-Spiels“ erklärt (Ableitinger und Humenberger 2010, S. 59ff.), wobei die Subjektivität der Auszahlungswerte, beziehungsweise der Diskussionsspielraum und die daraus resultierende Möglichkeit, diesen im Unterricht zu thematisieren – also Raum für Interpretation und Argumentation zu geben – explizit betont wird (ebd., S. 61).
In weiterer Folge wird beschrieben, worum es sich bei einem Nash-Gleichgewicht handelt (ebd., S. 62ff.), allerdings hat das vorgestellte Problem kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, sodass sofort mit gemischten Strategien operiert werden muss.
Im Anschluss wird dasselbe Spiel mit dem Minimax-Algorithmus behandelt (ebd., S. 71ff.), wobei dies über weite Strecken von den Schülerinnen und Schülern selbstständig erarbeitet werden soll.
Die beiden unterschiedlichen Zugänge werden schließlich noch ausgiebig miteinander verglichen (ebd., S. 73ff.), und die Relevanz von spieltheoretischen Betrachtungen mit unterschiedlichen Algorithmen für das Verständnis von Entscheidungsmechanismen in

der Vergangenheit wird hervorgehoben (ebd., S. 76f.).

Was in einer derartigen Unterrichtssequenz besonders gut funktionieren kann, ist die Vermittlung der Erkenntnis, dass es im Gegensatz zur üblichen Schulmathematik nicht nur eine einzig richtige Lösung gibt, sondern beide hier formulierten Strategien ihre eigene Berechtigung haben, und objektiv keine qualitativen Unterschiede zwischen den Lösungen der jeweiligen Strategien zu finden sind.
Der Umstand, dass sich die gesamte Sequenz um ein einzelnes Beispiel (das Schwarzfahrer-Spiel) dreht, bringt zwar auf der einen Seite eine gewisse Kohärenz, die durchaus positiv zu bewerten ist, allerdings wird dadurch der Anwendungsvielfalt nicht gebührend Rechnung getragen. Um den Wert spieltheoretischen Denkens zu vermitteln ist es einerseits wichtig, verschiedene Anwendungsbereiche aufzuzeigen, andererseits sollte die Überlegung auf natürliche Weise bei den Schülerinnen und Schülern aufkommen, nicht nur in einem aufgezwungenen Beispiel. Gerade für Schülerinnen und Schüler ist Schwarzfahren kein lebensnahes Beispiel, und bietet sich daher nur bedingt für den Schulunterricht an. Eine simple Lösung hierfür wäre, das Thema „Schwarzfahren“ durch „Hausübungen“ zu ersetzen, wobei „Fahrgast“ und „Kontrolleur“ durch „SchülerIn“ und „LehrerIn“ ausgetauscht werden, und die Frage behandelt wird, ob, beziehungsweise mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Hausübung geschrieben werden sollte, und mit welcher Wahrscheinlichkeit kontrolliert wird, ob sie erledigt wurden.

3.2.2 Spieltheorie im Schulunterricht – kann es das spielen?

In „Spieltheorie im Schulunterricht – kann es das spielen?“ von Petra Hauer-Typpelt und Christoph Ableitinger (Hauer-Typpelt und Ableitinger 2007) wird an das Thema Spieltheorie im Vergleich zum oben genannten Zugang wesentlich langsamer herangeführt. Den Einstieg bietet hier das „Guessing Game“, bei dem die Schülerinnen und Schüler eine natürliche Zahl von 2 bis 100 raten sollen, mit dem Ziel, möglichst

nahe an zwei Drittel des arithmetischen Mittels aller Tipps zu gelangen. Dieses Spiel wird zweimal in Folge durchgeführt, ohne zwischendurch das Ergebnis des ersten Durchgangs zu offenbaren, danach werden die Strategien besprochen (Hauer-Typpelt und Ableitinger 2007, S. 1f.).
Ausgehend von dieser Erfahrung werden die Grundzüge der Spieltheorie vermittelt (ebd., S. 2), bevor anhand des Gefangenendilemmas der Aufbau der klassischen Bimatrix beschrieben wird (ebd., S. 3f.). Nachdem das Konzept des Nash-Gleichgewichts kurz vorgestellt wird, werden einige weitere klassische Beispiele für spieltheoretische Probleme vorgestellt, wobei jedes einen weiteren kleinen Schritt für das Verständnis der Sinnhaftigkeit und Limitationen von Spieltheorie bieten soll. Anhand der Situation „Kalter Krieg“ wird gezeigt, dass ein Nash-Gleichgewicht auch zu einer für beide Seiten suboptimalen Situation führen kann, in drei Versionen des „Hausübungsspiels“ wird sich sukzessive einem Fall genähert, in dem es kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien mehr gibt (ebd., S. 4ff). Um diese Situation aufzulösen wird anhand des „Schwarzfahrer-Spieles“ die Suche eines Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien erörtert (ebd., S. 7ff).

Der Einstieg über ein Spiel ist ein großartiger Motivator, denn die Schülerinnen und Schüler haben nicht nur den Vorteil, dass es vergleichsweise gemütlich losgeht, sie entwickeln auch sofort einen Bezug zum Thema und den Wunsch, etwas darüber zu lernen, da das Wissen darüber – zumindest theoretisch – dabei hilft zu gewinnen. Das Problem, das das „Guessing Game“ hier hat, ist, dass die mathematische Lösung dazu unbefriedigend ist, da sie sich nicht mit dem deckt, was man gerade erfahren hat. Dies beinhaltet zwar die wichtige Lektion, dass Spieltheorie nie bloß aus einer Perspektive zu betrachten ist, sondern dass alle Spielerinnen und Spieler bedacht werden müssen. Spielt niemand perfekt, dann ist die mathematische Lösung des Spieles hinfällig, und es dominiert eher das Gespür für die gewählten Strategien der Mitspielerinnen und Mitspieler. Bedenkt man weiters, dass im weiteren Verlauf der Unterrichtssequenz alle Aufgaben in Form von Bimatrizen gestellt sind, wirkt es kontraproduktiv, dass ausgerechnet der Einstieg überhaupt nicht in dieser Form dargestellt werden kann. Dieses Dilemma der Suche nach einer Balance zwischen einem Spiel, das komplex genug ist, sodass die zugrundeliegende Mathematik nicht offen liegt, das viele Spielerinnen und Spieler erlaubt, sodass es auch Spaß machen kann und nicht zu konstruiert wirkt, und einem Spiel, das als direkte Einführung in die gewohnte, einfache Darstellung von spieltheoretischen Fragestellungen in Form von Bimatrizen fungieren kann, ist eine grundlegende Schwierigkeit, wenn man eine Unterrichtssequenz spielerisch eröffnen möchte – was massive Vorteile für die Lernwilligkeit und die Relevanz des Themas für Schülerinnen und Schüler hat.

Der weitere Verlauf der Sequenz bei Hauer-Typpelt und Ableitinger wirkt sehr langsam, insbesondere im Vergleich zur Herangehensweise bei Ableitinger und Humenberger. Dieser langsame Aufbau setzt einen klaren Fokus auf das allgemeine Verständnis für Spieltheorie und vernachlässigt dabei die Wege, Lösungen für die Probleme zu finden. Der Abschluss, die Suche nach einem Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien ist der einzige mathematisch anspruchsvolle Teil in der gesamten Unterrichtssequenz. Dies ist nicht zwangsläufig negativ zu beurteilen, da bereits die Erstellung der Matrizen, die Wahl der Auszahlungswerte und ganz allgemein die Modellierung etwas ist, das für Schülerinnen und Schüler neu ist, und dem durchaus intensive Aufmerksamkeit geschenkt werden sollte, während das mathematische Handwerk von diesen Dingen oft ablenkt. Weiters stellt sich die Frage, ob multiple Problemlösungsstrategien hier überhaupt von Vorteil sind. Positiv daran ist selbstverständlich das „Aha-Erlebnis“ bei den Jugendlichen, dass es konkurrierende Wege gibt, die einander sogar widersprechen können, was Stoff für Diskussion und weiteres Interesse an der Materie bieten kann. Dem gegenüber steht die pragmatische Sicht, dass diese mathematischen Details aller Voraussicht nach am ehesten vergessen werden, und die dafür veranschlagte Zeit stattdessen für eine weitere Festigung im Bereich der Modellbildung genutzt werden könnte. Die Präsentation zumindest einer Lösungsvariante ist jedoch unabdingbar, da sonst ein ungelöstes Problem im Raum stehen bleibt, was üblicherweise höchst unbefriedigend ist.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass in der von Hauer-Typpelt und Ableitinger beschriebenen Sequenz wesentliche Elemente positiv zu beurteilen sind. Der spielerische Einstieg weckt Interesse, der Kernteil wird der Besonderheit von Spieltheorie gewidmet, der Modellbildung und ihren Schwierigkeiten sowie den Dilemmata, die sich präsentieren, und als abrundender Abschluss wird auch ein Fall berechnet, bei dem die Lösung nicht „durch Hinsehen" zu finden ist.

Der Schwachpunkt liegt jedoch darin, wie stark der Einstieg in das Thema vom restlichen Programm abgesondert ist, wodurch dieser Gedankenschritt, dass das erlebte Spiel zum selben Fachgebiet wie die restliche Unterrichtssequenz gehört, nicht unbedingt naheliegend ist.

4 Entwicklertagebuch

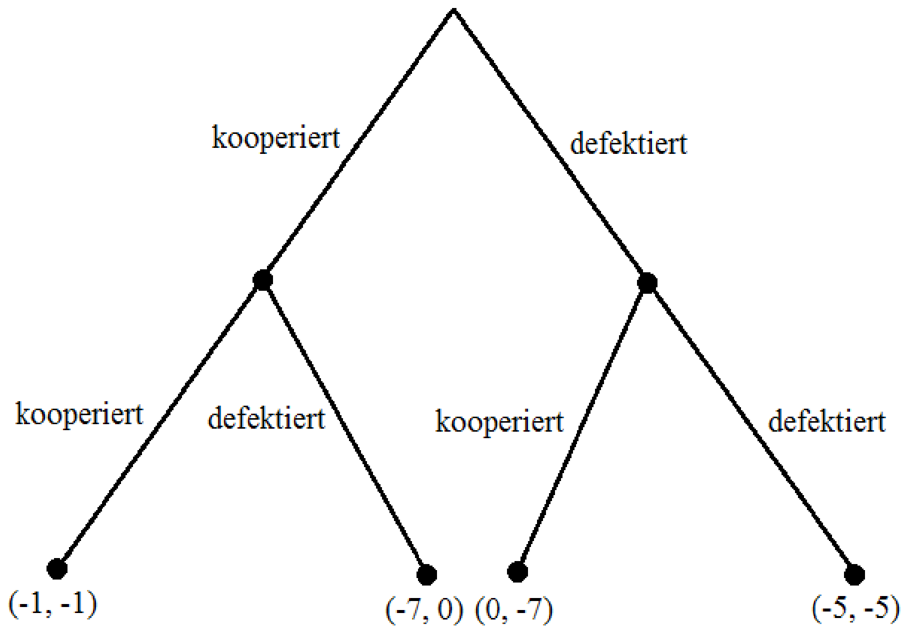
4.1 Der Anfang – was soll vermittelt werden?

Der ideale Einstieg in die Spieltheorie für eine Schulklasse wäre ein Spiel, das den Schülerinnen und Schülern nicht nur Spaß macht, sondern sie auch dazu einlädt, ihr Spielverhalten zu optimieren, also zu versuchen, das Spiel zu gewinnen. Wird dieser Ausgangspunkt geschaffen, so entsteht zumindest bei einem Großteil der Klasse ein echtes Interesse daran, im Anschluss zu erfahren, was sie hätten besser machen können. Weiters ist wichtig, dass die Wechselwirkungen der Entscheidungen, die getroffen werden können, zwar allen bekannt sein dürften, aber dass das Zusammenspiel dennoch zu komplex ist, um wirklich vor Ort vollständig durchgerechnet zu werden. Zu guter Letzt geht es um einen direkten Einstieg in die Spieltheorie, das heißt all Jenes, was in den anschließenden Unterrichtsstunden vermittelt werden soll, sollte aus dieser Erfahrung herausgegriffen werden können. Konkret heißt das, dass aus all den zu treffenden Entscheidungen jeweils Teilentscheidungen isoliert werden sollen, um daraus Situationen zu erhalten, die dem Gefangenendilemma ähneln, für beide Seiten ideale Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien beinhalten und ein Hantieren mit gemischten Strategien erfordern.

Darüber hinaus stellt sich noch die Frage, wie die Klasse unterteilt werden soll – in Partnerarbeit, Gruppen oder im gesamten Klassenverband. Hier zeigt sich schnell, dass eine Partnerarbeit unmöglich den nötigen Tiefgang erreichen kann, um nicht direkt von zumindest einigen Paaren an Schülerinnen oder Schülern optimiert zu werden. Die Arbeit im Klassenverband führt jedoch zu einer Explosion an möglichen Interaktionen und Entscheidungen, was das konsequente Abarbeiten nahezu unmöglich und vor allem für die Schülerinnen und Schüler unzugänglich macht. Zwar gibt es genügend Spiele, die von größeren Gruppen gespielt werden können – das bereits erwähnte „Guessing Game“ wäre ein solches, eine weitere Option ist die „Dollar auction“. Bei diesem Spiel

wird ein Dollar beziehungsweise Euro versteigert, allerdings mit der Sonderregel, dass auch das zweithöchste Gebot dafür bezahlt werden muss. Dadurch entstehen rasch Situationen, in denen zwei oder mehr Spielerinnen oder Spieler von einem höheren Gebot profitieren würden, ohne dabei allerdings einen Punkt zu erreichen, an dem sich nicht für jemand anders wiederum diese Situation ergibt, die zu einem höheren Gebot führt. An und für sich ist die „Dollar auction“ ein sehr gutes Beispiel, um den Wert der Spieltheorie zu vermitteln, da mit mathematischer Überlegung von vornherein zu sehen ist, wie man daran herantreten sollte, nämlich entweder gar nicht erst zu bieten, oder aber 99 Cent zu bieten, sodass es sich für niemanden rentiert, ein höheres Gebot abzugeben. Ein Nachteil jedoch ist, dass langfristig gesehen nur zwei Personen in dem Dilemma gefangen genommen werden, in dem sie sich aufgrund kurzfristiger Strategieüberlegungen stets gegenseitig überbieten müssen. Der Rest der Klasse würde hier nur zusehen. Außerdem werden die oben genannten Bedingungen an das Spiel nur teilweise erfüllt, es gibt keinen fließenden Übergang in die Normalform oder zu gemischten Strategien.
Die logische Konsequenz hier ist, dass ein Mittelweg zwischen der Arbeit zu zweit und im Plenum gefunden werden muss – also bei Gruppen zu vier bis fünf Personen.

Es zeigt sich schnell, dass Spiele in Normalform für die erwünschten Zwecke absolut ungeeignet sind, allem voran dadurch, dass in Bimatrizen sofort das Ergebnis einer Entscheidungskombination zu finden ist. Darüber hinaus führt das Hinzufügen weiterer Spielerinnen und Spieler jeweils zu einer Erweiterung der nötigen Dimension, aus einer Bimatrix für zwei würde ein „Tritensor“ dritter Stufe für drei Spielerinnen und Spieler werden, was in einer Gruppe von vier bis fünf Jugendlichen überhaupt nicht mehr praktikabel ist.
Dementsprechend bleibt keine andere Alternative als das Spiel in Extensivform aufzubauen. Jedes Spiel in Normalform – zum Beispiel das klassische Gefangenendilemma (siehe Kapitel 2.6.) lässt sich problemlos in Extensivform übertragen, die Umkehrung gilt jedoch nur bedingt.



Ein weiterer Vorteil der Extensivform ist, dass Entscheidungen einzelner Spielerinnen und Spieler natürlicher dargestellt werden können, das heißt nicht als Auswahl einer Zeile oder Spalte, sondern als Entscheidung für einen bestimmten Pfad, wobei die gegnerischen Entscheidungsmöglichkeiten und deren exakte Auswirkungen nicht zwangsläufig bekannt sein müssen. Ein gutes Beispiel hierfür ist das „Schwarzfahrerspiel", da man als Fahrgast im Allgemeinen keinen Aufschluss darüber hat, welche Auszahlungen Kontrolleure zu erwarten haben. Diese Ungewissheit und die Notwendigkeit, diese Lücken über gute Modellbildung zu füllen wird in der Betrachtung der Spieltheorie oft ignoriert. Die Schülerinnen und Schüler sollen so an das Problem herangeführt werden, dass sie über ihre eigenen Pfade Bescheid wissen, sich aber erst darüber informieren müssen, wie sich die Pfade ihrer Gegnerinnen und Gegner auswirken würden.

Eine mathematisch weniger relevante Frage ist die des Settings, hier geht es vor allem darum, eine Situation zu präsentieren, in der die Schülerinnen und Schüler die Entscheidungsmöglichkeiten, die ihnen zur Verfügung stehen, wirklich nachvollziehen können, und sich dem Spiel hingeben. Dazu sollten Rollen vergeben werden, die in der

realen Welt echte Entscheidungskraft haben, die außerdem nicht zu weit hergeholt sind und darüber hinaus den Vergleich zwischen den einzelnen spielenden Gruppen erlauben. Der Zugang hier wird sein, die Gruppen eine Regierung simulieren zu lassen: vier verschiedene Ministieren, sowie ein Staatsoberhaupt. Jede Gruppe bildet dementsprechend einen Staat, der sich am Ende des Spieles mit den Staaten der anderen Gruppen vergleichen lässt. Die zur Verfügung stehenden Optionen sind demnach Gesetze, die die einzelnen Ministerien beschließen können.
Ein Nachteil der Politisierung des Spieles ist, dass über die wahren Konsequenzen gewisser Gesetzesinitiativen (wie zum Beispiel der Privatisierung von Bildung) durchaus diskutiert werden kann, und bei deren Erstellung oftmals die mathematische Notwendigkeit eine größere Rolle spielen muss als wirklich zu erwartende Auswirkungen. Diese Balance zwischen mathematischer Fairness und realitätsnaher Umsetzung muss gefunden werden.

Der überwiegende Kern der zu treffenden Entscheidungen sollte dem Prinzip der Tragödie des Allgemeinguts (engl.: tragedy of the commons) folgen, welche eine Erweiterung des Gefangenendilemmas auf mehr als zwei Spielerinnen und Spieler darstellt. Die grundlegende Entscheidung, die jede Runde getroffen werden kann, ist eine zwischen Kooperation und Defektion, wobei eine Gruppe, die konsequent kooperiert, am Ende des Spieles weitaus höhere Punktzahlen aufweisen soll, als eine untereinander zerstrittene Gruppe, in der jeder und jede versucht, den eigenen Punktewert in die Höhe zu treiben. Dieses Dilemma ist die erste und wichtigere von zwei Möglichkeiten, eine echte Entscheidungsvielfalt heraufzubeschwören, die Entscheidung entlang der Achse von Altruismus und Egoismus. Ein großer Nachteil hierbei ist, dass dadurch Verantwortliche für ein bestimmtes Ressort der Regierung einen größeren Einfluss auf die übrigen Sparten haben als auf ihre eigene. Dies lässt sich aber nicht vermeiden, da sonst die Auswahl trivial wird.
Der zweite Weg, weitere Entscheidungen zu ermöglichen, ist die Auswahlmöglichkeit, welche Mitspielerin oder welcher Mitspieler den Schaden oder Vorteil aus einer eigenen Entscheidung hat. Diese Option sollte vor allem deshalb untergeordnet sein, da sonst die Beliebtheit oder Unbeliebtheit der Schülerinnen und Schüler eine größere Rolle spielt,

und sich eventuell sogar vier Gruppenmitglieder gegen das fünfte verbünden könnten, was nicht nur in sozialer Hinsicht, sondern auch auf pädagogischer Ebene einen Verlust darstellt.

Um eine gewisse Kontrolle über die Mechanismen von Gefangenendilemma und Tragödie des Allgemeinguts zu erlangen, empfiehlt es sich, das Spiel in mehreren Runden durchzuführen. Dies gibt auf der einen Seite die Möglichkeit, egoistische Spielerinnen und Spieler in späteren Runden zu bestrafen, auf der anderen Seite lädt es dazu ein, in der dritten und damit letzten Runde die Kooperation zu beenden, mit dem Ziel, das Spiel zu gewinnen. Zwischen den Runden erfährt jede Gruppe den aktuellen Zwischenstand, und wenn gewisse Schwellenwerte überschritten werden, eröffnen sich weitere Entscheidungsmöglichkeiten. Da diese schon von Anfang an bekannt sind, fungieren sie außerdem als Motivatoren, die dafür nötigen Schwellenwerte zu erreichen. Weiters ergibt dies einen Ansatzpunkt, um in den darauffolgenden Einheiten der Unterrichtssequenz die Iteration des Gefangenendilemmas zu beleuchten.

Jedem Ressort stehen zu Beginn des Spieles drei Optionen zur Verfügung, bei fünf verschiedenen Ressorts entspricht das $3^5 = 243$ möglichen Ausgängen für die erste Runde. Berücksichtigt man alle späteren Runden, in denen teilweise noch mehr Optionen freigeschaltet werden können, ergibt sich mit über 10 Millionen möglichen Ausgängen ein höchst komplexes Spiel, das von der Klasse nicht nur als generisches Lernspiel aufgefasst werden sollte, bei dem sofort durchschaut wird, was die Lehrkraft damit unterrichten möchte. Gleichermaßen lässt sich jedoch vor allem die erste Runde mit ihren 243 potentiellen Ausgängen insbesondere mit Computerunterstützung sehr gut veranschaulichen.
Um den Übergang von der Extensivform zu speziellen Situationen in Normalform zu erhalten, lassen sich bestimmte Paare möglicher Entscheidungen – eventuell unter bestimmten zusätzlichen Rahmenbedingungen – isolieren, wodurch sämtliche Probleme, die in weiterer Folge in der Unterrichtssequenz behandelt werden, ihren Ursprung im selben Spiel haben.

Ein simplerer Zugang, der naheliegend zu sein scheint, wäre, die Klasse in Partnerinnenarbeit das bereits beschriebene klassische Gefangenendilemma für zwei Personen mit mehreren Runden durchspielen zu lassen. Hierbei wäre nicht nur der Arbeitsaufwand – einerseits für die Erstellung des Spieles, andererseits auch für die Durchführung – weitaus geringer, auch würde das Dilemma in expliziter Form präsentiert werden, und müsste nicht erst entschlüsselt werden, wodurch der Übergang zur theoretischen Betrachtung reibungsloser abläuft. Dem gegenüber stehen aber Nachteile, die entstehen, wenn das Gefangenendilemma in seiner bloßen Ausprägung für zwei Personen eingesetzt wird.

a) Paare an Schülerinnen und Schülern sind wesentlich schwieriger überschaubar. Dies hat zur Konsequenz, dass es einige Paare geben wird, die auf die eine oder andere Art nicht sinngemäß spielen. Das kann heißen, dass sie sich zu Beginn totale Kooperation ausmachen und nicht selbst Runde für Runde durchspielen, dass sie zufällige Entscheidungen treffen, weil es sie gar nicht interessiert, oder dass sie gar nicht erst verstehen, wie das Spiel ablaufen soll. Der Vorteil von größeren Gruppen ist, dass sich diese einerseits selbst regulieren, wenn eine Schülerin oder ein Schüler die Regeln versteht und den anderen vermitteln kann, andererseits, dass man einen schnellen Überblick bekommen kann, in welchen Gruppen korrekt gearbeitet wird. Hat man 8, 10 oder gar 12 Paare, ist es unmöglich, alle im Auge zu behalten.

b) Eine Balance für die Anzahl an Runden zu finden ist äußerst schwierig, da die Dauer einer einzelnen Runde so stark variieren kann. Spielt man zu wenige Runden, werden die Eigenheiten des iterierten Gefangenendilemmas vermutlich nicht verstanden, spielt mal zu viele Runden, wird es sehr schnell repetitiv. Ein vernünftiger Wert liegt wohl bei 10 Runden, wodurch die Angelegenheit nach etwa 5 Minuten bereits wieder beendet wäre, wobei ein Großteil dieser Zeit der Erklärung des Spieles zum Opfer fallen würde. Der Grundgedanke des spielerischen Einstiegs ist jedoch, dass etwas hängen bleibt, und dazu sollte zumindest eine volle Unterrichtsstunde verwendet werden.

c) Aus dem puren Gefangenendilemma ließen sich bloß die theoretischen Teile zum Dilemma selbst und der iterierten Version davon ableiten. Zwar lässt sich auch ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien finden, doch der Wert und die Relevanz des Nash-Gleichgewichts geht im Gefangenendilemma ein wenig verloren. Gemischte

Strategien lassen sich überhaupt nicht aufgreifen.
d) Das Spiel ist steril und wirkt auf die Schülerinnen und Schüler eher als Mathematikaufgabe und weniger als Spiel, welches in weiterer Folge mithilfe der Mathematik behandelt wird. Dies hat einen wichtigen Einfluss darauf, wie interessiert sie daran teilnehmen werden, welche Einstellung sie zum Gebiet der Spieltheorie haben werden, und ob sie das Dilemma auch als solches wahrnehmen. Auf die Rolle, die Aspekte wie Setting, Präsentation und Auszahlungen für den Realismus der Entscheidungen von Testpersonen spielt, wird vor allem in Kapitel 5 noch näher eingegangen. Kurz zusammengefasst lässt sich jedoch bereits sagen, dass eine komplexere Präsentation im Allgemeinen zu natürlicheren Entscheidungen führt, wodurch das Gefangenendilemma eher als Dilemma wahrgenommen wird. Dies rechtfertigt in Verbindung mit den oben genannten Punkten die Mehrarbeit, die bei einem Einstieg mit einem komplexeren Spiel entsteht.

4.2 Das Spiel – Fairness oder Vielfalt?

Ein grundlegender Aspekt eines Spieles, insbesondere wenn es im Zuge des Mathematikunterrichts verwendet werden soll, ist die Fairness. Alle Spielerinnen und Spieler sollten im Idealfall dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, das Spiel zu gewinnen, beziehungsweise sollte bei komplexeren Spielen diejenige oder derjenige gewinnen, der „am besten“ spielt.

Je simpler ein Spiel ist, umso leichter ist es, dieses Gleichgewicht herzustellen. Bei einem simplen Münzwurf haben beide Seiten dieselbe Siegeswahrscheinlichkeit, bei einem simplen Würfelwurf lässt sich eine Siegerin oder ein Sieger aus einer Gruppe von Sechs finden, und die Fairness ist stets gewahrt. Je komplexer ein Spiel wird, umso schwieriger wird es, die Vor- und Nachteile gewisser Positionen angemessen auszugleichen, aber solange es sich um eine Aneinanderreihung von Zufallsereignissen handelt, besteht zumindest die theoretische Option, exakte Berechnungen durchzuführen. Wesentlich schwieriger ist es hingegen, ein Spiel auszubalancieren, in dem nicht zufällige Entscheidungen getroffen werden, sondern die Spielerinnen und Spieler ihre Entscheidungen von den erwarteten gegnerischen Entscheidungen abhängig machen, was diese Spiele aus spieltheoretischer Perspektive analysierbar macht. Diese Spiele lassen sich in drei große Gruppen unterteilen:

a) Symmetrische Spiele

Ein Spiel heißt symmetrisch, wenn die Strategiemengen beider Spielerinnen oder Spieler übereinstimmen ($S = S_1 = S_2$), und für jedes Strategieprofil (s,t) aus $(S \times S)$ gilt $u_1(s,t) = u_2(t,s)$, das heißt, dass es für die Spielerinnen und Spieler belanglos ist, wer „Spielerin 1“ oder „Spieler 2“ ist.

Ein bereits öfter erwähntes Beispiel für ein symmetrisches Spiel ist das Gefangenendilemma, den Schülerinnen und Schülern wird aber eher das Spiel „Schere-Stein-Papier“ bekannt sein. Wie an der Bimatrix (siehe Kapitel 2.3.) erkennbar ist, handelt es sich auch hier um ein symmetrisches Spiel. Symmetrische Spiele sind zwar per Definition faire Spiele, allerdings sind sie aufgrund ihrer Simplizität sehr leicht durchschaubar. Eine Unterrichtsstunde, in der eine Schulklasse nichts anderes macht, als untereinander „Schere-Stein-Papier“ zu spielen, ist eine absurde Vorstellung, und würde aller Voraussicht nach kein tieferes Interesse an Spieltheorie wecken.

b) Neutrale Spiele

Ein Spiel heißt neutral, wenn die zur Verfügung stehenden Strategiemengen von der Spielsituation abhängig sind, nicht aber von den Spielerinnen oder Spielern selbst.

Da bei diesen Spielen relevant ist, in welcher Reihenfolge gespielt wird, und im Normalfall mehr als nur ein Zug pro Person durchgeführt wird, ist keine Darstellung in Normalform mehr möglich, es muss die Extensivform verwendet werden.

Eine simple Form eines neutralen Spieles ist das „Nim-Spiel“. Hier werden Streichhölzer oder ähnliche Spielsteine in mehreren Reihen oder Haufen angeordnet. Die Spielerinnen und Spieler nehmen abwechselnd ein oder mehrere Spielsteine vom Feld, wobei alle aus derselben Reihe stammen müssen. Wer den letzten Stein entfernt, gewinnt das Spiel, beziehungsweise verliert es – je nach Regelvariation.

Komplexere Arten neutraler Spiele haben sich in modernen Brettspielen festgesetzt, wobei hier im Allgemeinen kleine Dosen an Zufallselementen verwendet werden, um eine größere Vielfalt an Szenarien zu bieten, und um zu verhindern, dass das Spiel gelöst werden kann.
Der Nachteil neutraler Spiele ist, dass sich einzelne Züge nur bedingt quantifizieren lassen. Im Nim-Spiel ist zu jedem Zeitpunkt klar, wer – unter der Voraussetzung, dass alle perfekt spielen – das Spiel gewinnen wird, dementsprechend gibt es nur gute Züge (man bleibt am vorgegebenen Pfad zum Sieg), neutrale Züge (man bleibt am vorgegebenen Pfad zur Niederlage) und schlechte Züge (man weicht durch einen Fehler vom Siegespfad ab). Dies steht in diametralem Gegensatz zur in 4.1. erwähnten Bedingung, dass einzelne Züge des Spiels aufgegriffen werden sollen, um in Normalform als Beispiele für wichtige Aspekte der Spieltheorie herzuhalten.
Auch komplexere neutrale Spiele teilen diesen Nachteil, wenn auch zum Teil aus anderen Gründen. Selbst wenn in einem Spiel mit „Siegpunkten“ operiert wird, so lässt sich ein einzelner Zug nicht nur über den darin erworbenen Gewinn an „Siegpunkten“ definieren, sondern auch über den Erwerb etwaiger anderer Ressourcen innerhalb des Spieles, welche in späteren Zügen effizienter in „Siegpunkte“ umgewandelt werden können.

c) Freie Spiele

Ein „freies Spiel“ sei ein Spiel, das weder symmetrisch noch neutral ist, das bedeutet insbesondere, dass Fairness im Spiel nicht durch bloße Symmetrie erreicht werden kann, sondern durch eine geschickte Wahl der Auszahlungen. Darüber hinaus ist der Begriff „Fairness“ nicht mathematisch präzise definierbar, und durch die komplexen Möglichkeiten der Interaktion ist perfekte Fairness auch kaum möglich.

Folgende mögliche Ansätze existieren, Fairness zu definieren:

1. Ein Spiel ist fair, wenn unter allen möglichen Ausgängen die Anzahl der Siege unter allen Spielenden (ungefähr) gleich verteilt ist.
2. Ein Spiel ist fair, wenn es für jede Spielerin und jeden Spieler mindestens eine

Koalition aus zwei Spielenden gibt, sodass das Minimum der Auszahlungen über alle Entscheidungen Anderer bei beiden Koalitionären höher ist, als das Minimum des oder der Einzelnen, das heißt:
Seien $\Omega = \{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$ die 5 Spielerinnen und Spieler, $S = \{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\}$ deren Strategiemengen und $A = \{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ ihre Auszahlungen, so gibt es für alle $1 \leq i \leq 5$ ein Dupel aus $\Omega \backslash \{P_i\}$ – dieses sei o. B. d. A. $\{P_2,P_3\}$ – sodass $\min(S_4, S_5)\ A_1 < \min(S_4, S_5)\ A_2 \cup A_3$, das heißt das Minimum der Auszahlung A_1 über alle Strategien aus S_4 und S_5 ist kleiner als als das Minimum der Auszahlungen A_2 und A_3, wiederum über dieselben Strategiemengen.
3. Ein Spiel ist fair, wenn die maximale Auszahlung, beziehungsweise die minimale Auszahlung für alle Spielerinnen und Spieler (ungefähr) gleich ist.

Dem Wunsch nach einem fairen Spiel gegenüber steht der Versuch, das Spiel interessanter und abwechslungsreicher zu gestalten. Während in einer Laborsituation eine wissenschaftlich saubere Testung im Vordergrund steht, sollte es in der Schulklasse eher darum gehen, dass die Schülerinnen und Schüler einerseits Spaß am Spiel haben, andererseits bereits über Strategien nachdenken, und dass im Anschluss an den spielerischen Teil das Spiel theoretisch beleuchtet werden kann. Um diese Spannung zu erreichen, wird als Ausgangspunkt ein n-Personen Gefangenendilemma gewählt. Dies führt nämlich zu potentiellen Konflikten, möglichen Koalitionsbildungen und dem für die Einführung in die Spieltheorie so relevanten Widerspruch zwischen egoistischen und altruistischen Entscheidungen. Ganz allgemein sollten also die meisten Spielerinnen und Spieler die Auswahl zwischen Entscheidungen haben, die entweder ihnen helfen, dafür der Gruppe stark schaden, oder die ihnen selbst schaden, dafür der Gruppe stark helfen. Diese Entscheidungen können sehr leicht festgehalten und präsentiert werden. Für ein klassisches Gefangenendilemma mit bloß zwei Personen könnte jede Person folgende Auswahlmöglichkeiten haben:

C (Cooperate): (–5 Punkte selbst, +10 Punkte Gegner)
D (Defect): (+5 Punkte selbst, –10 Punkte Gegner)

Das Resultat ergäbe folgende Bimatrix:

	C	D
C	5 / 5	–15 / 15
D	15 / –15	–5 / –5

Bei mehr als zwei Personen gibt es nun die Möglichkeit, die Nachteile und Vorteile für Andere unterschiedlich stark auszuprägen. Dies hat den Vorteil, dass es eine stärkere Asymmetrie schafft, sodass Koalitionsbildungen weniger von der Sympathie der Spielerinnen und Spieler füreinander abhängt, sondern mehr von den Gegebenheiten des Spieles. Dies ist vor allem in Schulklassen wichtig, da Schülerinnen und Schüler in Partner- und Gruppenarbeiten allgemein sehr stark dazu neigen, mit besseren Freundinnen und Freunden zu kooperieren, und weniger beliebte KlassenkameradInnen außen vor zu lassen. Die soziale Dynamik kann durch diese Asymmetrie vermutlich nicht ganz aufgehoben werden, aber hoffentlich zumindest entschärft werden.

Ein weiterer wichtiger Schritt ist die Einführung einer dritten Option. Wie weiter oben bereits erwähnt ist die Auswahl aus drei Möglichkeiten ein günstiger Kompromiss, sodass das Spiel auf der einen Seite nicht zu simpel wird, aber dennoch zumindest die erste Runde in der Gesamtheit aller Auswahlmöglichkeiten betrachtet werden kann. $2^5 = 32$ mögliche Ausgänge sind sehr wenig, $4^5 = 1024$ mögliche Ausgänge sind absolut unübersichtlich, zumindest im Rahmen einer Unterrichtssequenz an einer AHS. Diese dritte Option lässt sich nun auf unterschiedliche Arten gestalten – dies kann ein Mittelweg zwischen Kooperation und Defektion sein, es kann Kooperation mit anderen Bevorteilten sein, oder aber Defektion mit anderen Leidtragenden. Wieder dient es dem Interesse der Vielfalt, diese drei Herangehensweisen auf die verschiedenen Rollen aufzuteilen.

In dem 5-Tupel der Rollen (Finanzen, Militär, Wirtschaft, Bildung, KanzlerIn) wird der Kanzlerin oder dem Kanzler ein Sonderstatus verliehen. Anstatt wie die anderen über Entscheidungen die Punkte direkt zu beeinflussen, hat diese Rolle Möglichkeiten, die sich grundlegend davon unterschieden. So soll die Möglichkeit bestehen, eine der vier anderen Entscheidungen abhängig von gewissen Werten ungültig zu machen. Im Allgemeinen lässt sich sagen, dass dadurch primär Defektionen abgewendet werden können, allerdings ist diese Entscheidung selbst eine Defektion. Dies soll eine weitere Koalitionsdynamik ins Spiel bringen, deren Verlauf ohne praktische Testung kaum vorhersehbar ist.

4.3 Implementierung in einem Tabellenkalkulationsprogramm

Mit den festgelegten Rahmenbedingungen – drei Optionen für jede und jeden der fünf Spielerinnen und Spieler – war es an der Zeit für einen Proto des Spieles, damit das System Form annehmen kann. Folgende Auszahlungen wurden für die Entscheidungen gewählt, jede Zeile beschreibt eine Entscheidung und deren Auswirkungen auf den Punktestand der vier Minister (Militär, Wirtschaft, Bildung, Finanzen), beziehungsweise auf die Kanzlerin oder den Kanzler, wobei hier die Punkte den Namen „Popularität“ tragen.

Entscheidungen	Militär	Wirtschaft	Bildung	Finanzen	Popularität
Militär 1	10	5	–5	–15	20
Militär 2	10	–10	–5	–5	0
Militär 3	–10	5	0	15	–10
Wirtschaft 1	–5	5	20	–20	5
Wirtschaft 2	0	15	–15	–10	–25
Wirtschaft 3	–5	10	5	–20	–15
Bildung 1	10	5	–20	20	–10
Bildung 2	0	0	10	–20	–10

Bildung 3	–10	–10	25	–30	5
Finanzen 1	–10	–20	0	10	–20
Finanzen 2	–15	0	–15	10	–10
Finanzen 3	15	0	15	–10	10
KanzlerIn 1[a]	–5	–5	–5	–5	0
KanzlerIn 2[b]	*0,5	*0,5	*0,5	*0,5	*0,5
KanzlerIn 3[b]	*1,25	*1,25	*1,25	*1,25	*1,25; –10

[a] Zusätzlich wird hier die Entscheidung von Ministern, welche den niedrigsten Popularitätswert aufweisen vollständig negiert.

[b] Die Auswirkungen bei diesen Entscheidungen sind Faktoren, welche auf alle anderen Entscheidungen angewandt werden. Zusätzlich zur multiplikativen Änderungen wird bei K3 der Popularitätswert um 10 reduziert.

All diese Entscheidungen haben darüber hinaus Namen erhalten, die dem Setting entsprechen (wie zum Beispiel „Steuererhöhung“), allerdings sind diese Namen an dieser Stelle irrelevant.

Um von diesen Werten, die ihren Ursprung primär in einer groben Einschätzung haben, welchen Einfluss bestimmte Gesetze auf die unterschiedlichen Ressorts hätten, zu einem mathematisch (relativ) fairen Spiel zu gelangen, müssen einige Einzelwerte angepasst werden. Die Komplexität und Interkonnektivität der Werte legt es nahe, diesen Prozess in einem Tabellenkalkulationsprogramm durchzuführen.

Den Kern dieses Dokuments stellt eine Tabelle dar, die der obigen stark ähnelt. Einzig die Multiplikatoren können nicht in dieser Form verwendet werden. Die Titel der Entscheidungen wurden verkürzt (M1, M2, M3,...), und die Reihenfolge wurde verändert, da in einem zwischen dieser ersten Skizze und der Erstellung der eigentlichen Tabelle gelegenen Gedankenschritt die Überlegung im Raum stand, mehr Möglichkeiten einzuführen, wie auf frühere Entscheidungen derselben Runde eingegriffen werden kann, beziehungsweise spätere Entscheidungen völlig negiert werden könnten. Die

Entscheidungen, die dies erlauben, wurden zwar formuliert, sind jedoch erst in späteren Runden einsetzbar. Dies reduziert einerseits die Komplexität der Runde 1, was deren Analyse wesentlich erleichtert, andererseits gibt es Ziele für spätere Runden, die eine zusätzliche Motivation bieten können, bestimmte Entscheidungen in den früheren Runden zu wählen, wodurch die Abfolge an Runden auch weniger monoton ist.

Um eine Auflistung aller möglichen Ausgänge zu erhalten, müssen diese sortiert werden. Dies beginnt bei den Entscheidungen F1, F2 und F3, welche in einer Spalte jeweils 81 Mal direkt untereinander geschrieben werden. Bei M1, M2 und M3 werden diese jeweils 27 Mal untereinander geschrieben, die daraus resultierenden 81 Zeilen werden 3 Mal untereinander kopiert, sodass immer noch 243 Zeilen verwendet werden, und alle bisherigen 9 Kombinationen {F1, F2, F3} x {M1, M2, M3} jeweils 27 Mal vorhanden sind. W1, W2 und W3 werden nun je 9 mal geschrieben, diese 27 Zeilen werden 9 Mal kopiert, für B1, B2, B3, K1, K2, K3 wird das System fortgesetzt, sodass am Ende jeder der 243 verschiedenen Entscheidungspfade genau eine Zeile zur Verfügung hat.

Um die Punkteänderungen durch Entscheidungen, welche in der oben erwähnten Tabelle manipuliert werden können, zu reflektieren, stehen jedem Ressort fünf Spalten zur Verfügung, mit der Formel (stellvertretend für alle werden hier die Finanzen beschrieben):

```
=WENN($O2=$A$4;B$4;WENN($O2=$A$5;B$5;B$6))
```

O2 bis O244 ist hier die Liste der 81 F1, 81 F2 und 81 F3.
In Zelle A4 steht bloß „F1“ (als Teil der Beschriftung der Kerntabelle).
In B4, C4, D4, E4 und F4 stehen die Auswirkungen, die F1 auf F, M, W, B beziehungsweise K hat.
In Zelle A5 steht „F2“.
Die Zellen B5 bis F5 enthalten die Auswirkungen von F2 auf alle Punktewertungen, die Zellen B6 bis F6 die Auswirkungen von F3.

Wenn also in der Liste in Spalte O der Text „F1“ gefunden wird, so steht in dieser Zelle die Auswirkung, die F1 auf F hat, in der Zelle rechts daneben die Auswirkungen von F1 auf M, und so weiter. Wird in Spalte O der Text „F2“ gefunden, so werden die Auswirkungen von F2 ausgewählt, wird weder „F1“ noch „F2“ gelesen, so muss es per Ausschlussverfahren „F3“ sein, und die Auswirkungen der Entscheidung F3 landen in den entsprechenden Zellen.

Für alle weiteren Ressorts kann dasselbe System verwendet werden, es muss lediglich die zu überprüfende Spalte angepasst werden, die Zellen A4, A5 und A6 werden durch A8, A9, A10 (für die Entscheidungen des Militärministeriums) ersetzt, ebenso wie B4, B5 und B6 durch B8, B9 und B10 ersetzt werden. Der Umstand, dass die verschiedenen Ressorts ihre Entscheidungen unterschiedlich gelistet haben (81-81-81 bei F, 27-27-...-27 bei M, bis hin zu 1-1-...-1 bei K) ist hier irrelevant, da die Formel bloß den Inhalt der Zellen in den entsprechenden Spalten, in denen diese Listen zu finden sind, überprüft.

Da die Kanzlerentscheidungen komplexer sind, benötigen sie mehr Platz und lassen sich nicht allgemein programmieren. Um die Entscheidung mit dem schlechtesten Einfluss auf den Popularitätswert zu negieren, werden fünf Spalten dazu verwendet, die gesamten Einflüsse der Entscheidung, die diesen niedrigsten Wert hat, darzustellen. Um diese zu finden, wird wieder eine mehrfach verschachtelte „WENN“-Funktion verwendet: Wenn eine bestimmte Entscheidung einen Popularitätswert hat, der gleich hoch ist wie das Minimum aller Popularitätswerte in dieser Zeile, dann wird die Entscheidung dargestellt. Wird nun K1 ausgewählt, so werden diese Werte mit –1 multipliziert, sonst mit 0, das Ergebnis wird in allen Fällen zum Gesamtergebnis addiert. Wird also die Entscheidung K1 getroffen, so wird die Negation der unpopulärsten Entscheidung addiert, ergo die Entscheidung negiert, wird K1 nicht ausgewählt, so wird lediglich 0 addiert.

Sofern K2 oder K3 ausgewählt werden, wird die Summe aller anderen Werte entweder mit –0.5 oder mit 0.25 multipliziert und ebenfalls zum Gesamtergebnis addiert. Bei K2 bleibt also die Hälfte der anderen Punkteänderungen übrig, bei K3 kommt sogar noch ein Viertel dazu.

Eine weitere Regel, deren Ziel es ist, in den verschiedenen Runden verschiedene

Voraussetzungen zu schaffen, ist, dass am Ende einer Runde ein Viertel der Punkte für Bildung zum Wirtschaftswert addiert wird, ebenso wie ein Viertel des Wirtschaftswertes (vor der Modifikation durch Bildung) zum Finanzwert addiert werden. Darüber hinaus wird ein Sechzehntel aller Werte (wiederum vor den Modifikationen) dem Popularitätswert hinzugefügt. Diese Boni und Mali werden jedoch erst am Start der nächsten Runde hinzugefügt, gibt es also keine nächste Runde, so gibt es keine Änderungen, auch werden diese Anpassungen nicht dabei helfen, gewisse Grenzen zu erreichen, die weitere Entscheidungsmöglichkeiten freischalten. Dies soll einerseits das Gefühl der Realitätsnähe verstärken – ein gutes Bildungssystem wirkt sich in der Zukunft positiv auf die Wirtschaft aus, unter einer schlechten Wirtschaft leiden auch die Finanzen, eine allgemein ertragreiche Regierungsarbeit wird sich positiv auf die Beliebtheit auswirken – andererseits ändert es die Gewichtung einzelner Strategien in den jeweiligen Runden. Das Finanzressort hat in der ersten Runde noch egoistisch motivierte Gründe, Wirtschaft und Bildung zu fördern, in Runde 2 profitiert es bloß noch von guter Wirtschaft, in Runde 3 gilt nicht einmal mehr das.

Um alle Werte analysieren zu können, beziehungsweise um Änderungen an der Balance durchzuführen, müssen die 243 möglichen Ergebnisse näher betrachtet werden. Besondere Bedeutung haben Maximum und Minimum, sowie die Anzahl der Siege, die die einzelnen Ressorts jeweils erringen könnten, und das arithmetische Mittel. Maximum, Minimum und arithmetisches Mittel lassen sich über simple Formeln ermitteln (MAX(BF2:BF244), MIN(BF2:BF244), MITTELWERT(BF2:BF244), für die Anzahl der Siege benötigt es fünf weitere Spalten, mit WENN(CK2=MAX($CK2:$CO2);1;0) (Anm.: Die betrachteten Spalten ändern sich hier, allerdings verweist die Zelle CK2 auf BF2 – im Allgemeinen gilt, dass eine Tabelle zugänglicher ist, wenn in sich abgeschlossene Berechnungen einen eigenen, ihnen zugewiesenen Bereich erhalten. Nimmt man beispielsweise auf drei verschiedene Arten Bezug auf jene 5 Spalten zu je 243 Zeilen, so müssten sonst alle Hilfsspalten aneinander gereiht werden, auf diesem Weg hat jedes System an Hilfsspalten die zu berechnenden Spalten angrenzend, sodass das gesamte System auf einmal überblickt werden kann.), dies ergibt eine Tabelle, in der jedes einzelne Ressort eine „1“ zugewiesen bekommt, wenn es gewinnt (d. h. wenn der

Wert des Ressorts dem Maximum aller Ressorts in dieser Runde entspricht), sonst eine „0“, die Summe über alle 243 Zeilen ergibt die Anzahl der Siege (inklusive aller geteilten Siege).
Weiters ist es sinnvoll, für jeden Ausgang Minimum und Maximum darzustellen, sowie das Maximum aller Minima zu finden und das Minimum aller Maxima. Dies kann einfach über die sukzessive Anwendung von Minimum- und Maximumbefehl (einmal in dieser Reihenfolge und einmal umgekehrt) über Zeilen, dann Spalten erfolgen.

Ein weiteres wichtiges Mittel, die Daten zu analysieren ist die Möglichkeit, ein beliebiges Ergebnis darstellen zu lassen. Dies sollte am linken Rand der ganzen Tabelle passieren, direkt unter der Übersicht über alle Entscheidungen (Spalten A bis G).
Zunächst müssen alle Ausgänge nummeriert werden, von 1 bis 243, dafür benötigt es eine eigene Spalte, in der diese Zahlen stehen. Um auf die richtige Zeile zugreifen zu können, müssen die Entscheidungen eingegeben werden können. Dies erfolgt über den Befehl Daten – Gültigkeit, wobei hier eine Liste gewählt wird mit den erlaubten Werten F1, F2, F3, beziehungsweise entsprechenden anderen Buchstaben für die anderen Ressorts. Für das Finanzressort gibt es nun eine Zelle mit dem Inhalt `WENN(B31="F1";0;WENN(B31="F2";81;162))`, wird also F1 ausgewählt, wird hier der Wert „0“ angezeigt, bei F2 „81“ und bei F3 „162“. Das Prozedere ist für die anderen Ressorts ähnlich, es bleibt bei dem System $0 \cdot x$, $1 \cdot x$, $2 \cdot x$, doch x nimmt nicht wie bei den Finanzen den Wert „81“ an, sondern „27“, „9“, „3“ und „1“. Wird nun die Summe über all diese Zellen gebildet, und 1 addiert, so entspricht der Ausgang für {F1, M1, W1, B1, K1} genau Zeile 1. Durch die weiter oben genannte Art, die Entscheidungen zu sortieren, deckt sich diese Berechnung im Ternärsystem genau mit der Liste aller Ausgänge. Nun müssen noch 5 Spalten mit dem Inhalt `WENN($N2=$G$31;BF2;0)` dazu verwendet werden, in jeder Zeile nur Nullen anzuzeigen, außer die Zeile ist der exakte Ausgang, der gesucht wird – in diesem Fall wird dieser Ausgang angezeigt – dadurch ist die Summe über alle 243 Zellen einer Spalte der stets der gewünschte Ausgang.

Mit Hilfe all dieser Analysemöglichkeiten sollten nun die Werte angepasst werden. Was

sich hier schnell zeigt, ist, dass die Punktewerte in Fünferschritten zwar für fast alle Ressorts problemlos funktionieren können, nicht aber für den Popularitätswert, da hier im Falle der Entscheidung K1 das Minimum gesucht werden muss, wodurch sich fast alle Werte voneinander unterscheiden sollten, da immer nur eine Entscheidung negiert werden soll, es also in jeder der 81 Konstellationen exakt ein Minimum geben muss. Dies gilt selbstverständlich nicht für besonders hohe Werte, konkret gilt, dass das Minimum aller Maxima der Popularitätswerte innerhalb der Entscheidungsmöglichkeiten eines Ressorts die Grenze definiert, über der Werte doppelt vorkommen können. De facto ergibt dies eine Liste aller Entscheidungen, welche durch K1 negiert werden, diese Liste wird von oben herab abgearbeitet, bis eine Entscheidung gefunden wird, die tatsächlich getroffen wurde.
Besonders wichtig sind auch die Minima und Maxima, da es Entscheidungen geben soll, die erst durch die Erreichung gewisser Grenzen „freigeschaltet" werden. Damit dies erst in der dritten und somit letzten Runde möglich ist, muss sichergestellt werden, dass die Grenzen nicht erreicht werden können. Diese Grenzen liegen bei –50 beziehungsweise 50, man muss echt weniger beziehungsweise echt mehr als diese Grenzen haben, um Zugriff auf die vierte oder fünfte Option zu erhalten. Dementsprechend soll für jedes Ressort das Minimum für Runde 1 bei –50 und das Maximum bei 50 liegen. So kann sichergestellt werden, dass in Runde 2 dieselben drei Auswahlmöglichkeiten zur Verfügung stehen wie in Runde 1, aber die Wahrscheinlichkeit, dass es in Runde 3 für einige Spielerinnen oder Spieler zusätzliche Optionen gibt, ist möglichst hoch. Wie hoch sie wirklich ist, lässt sich in einem Spiel mit komplexen Interaktionen schwer sagen, allerdings kann man über eine Tabelle mit den Zelleninhalten `WENN(CV2>25;1;WENN(CV2<-25;1;0))` überprüfen, ob es einen Wert über 25 oder unter –25 gibt, sodass nach zwei derartigen Runden die Grenzen in die eine oder andere Richtung überschritten würden. Allerdings muss hierbei angemerkt werden, dass davon auszugehen ist, dass eine zweite Runde eine Angleichung bringt, das heißt ein Defektor in der ersten Runde wird womöglich in Runde 2 dafür bestraft.
Während ein fixiertes Maximum und Minimum dafür sorgen, dass die jeweils besten und schlechtesten Auswirkungen, die die jeweiligen Ministerien auf ein bestimmtes Ressort haben, ausgeglichen sind, so sind nahe beisammen liegende arithmetische

Mittel ein Indikator für Balance bei den dritten, dazwischen liegenden Entscheidungen. Dieses arithmetische Mittel sollte für jedes Ressort unter 0 liegen, das heißt zufällige, nicht abgesprochene Entscheidungen haben einen negativen Effekt. Ziel muss sein, dass diese arithmetischen Mittel nicht zu stark voneinander divergieren, exakte Gleichheit ist nicht nur sehr schwierig und über spürbar erzwungene Werte zu erreichen, durch den Einfluss der Ressorts aufeinander zu Beginn einer weiteren Runde ändern sich die Mittel ohnehin noch weiter.

Die Anzahl der Ausgänge, bei denen ein bestimmtes Ressort gewinnt wirkt auf den ersten Blick wie ein relevantes Kriterium, um Balance zu finden. Sollten alle Spielerinnen und Spieler ungefähr gleich viele Ausgänge haben, bei denen sie gewinnen, so scheint es fair zu sein. Diese intuitive Einschätzung stimmt jedoch nicht, da keine Symmetrie zwischen den Spielenden herrscht. Zwar gibt es auf jeden Fall für jedes Ressort eine Option für Kooperation und eine für Defektion, allerdings variiert die dritte Option sehr stark – es gibt Minister, die zwei Möglichkeiten zur Defektion haben, und jene deren dritte Wahl ein Kompromiss zwischen Kooperation und Defektion ist. Dass die Möglichkeit, auf zwei verschiedene Arten zu kooperieren nicht gegeben ist, hat primär Gründe, die mit den Rollen zusammenhängen. Ein einzelnes mögliches Gesetz zu finden, das dem Ressort schadet, von dem es verabschiedet wird, ist schwierig genug, noch ein zweites zu finden, das sich grundlegend davon unterscheidet, noch schwieriger. Wenig überraschend zeigt sich, dass das Ressort, dessen dritte Option im Vergleich zu den anderen die stärkste Defektion ist, wesentlich häufiger gewinnt, als die restlichen. Dies ändert jedoch nichts am grundlegenden System, dass Defektion die Siegeswahrscheinlichkeit erhöht, dieses wird hierdurch bloß noch bestätigt. Spielerinnen und Spieler, die mit erhöhter Wahrscheinlichkeit defektieren, werden mit höherer Wahrscheinlichkeit gewinnen.

Zwei Fällen ist eine besondere Bedeutung zuzumessen, einerseits wenn alle defektieren, andererseits wenn alle kooperieren. Von diesen beiden ist der Fall der durchgehenden Defektion weniger wichtig, hier muss nur sichergestellt werden, dass alle Punktewerte kleiner als Null sind, um der Gruppe die eindeutige Rückmeldung zu geben, dass es sich um eine schlechte Runde gehandelt hat. Durchgehende Kooperation ist schwieriger auszubalancieren, denn wäre es komplett fair, so müssten alle Spielerinnen und Spieler dieselbe Punktzahl erhalten, ein Resultat, das vermutlich ein Gleichgewicht finden würde. Die Regeln sind so geartet, dass Absprache erlaubt ist, das heißt auch, dass einander mitgeteilt werden darf, über welche Auswahlmöglichkeiten man verfügt. Eine Gruppe, die sich zu Beginn darauf einigt, dass jeder und jede die Entscheidung trifft, die die Gesamtpunktzahl der ganzen Gruppe am meisten erhöht, soll für diese Kooperation belohnt werden (d.h. alle Punktewerte sollen positiv sein), allerdings sollten manche Gruppenmitglieder dabei besser aussteigen als andere, um die anderen in den folgenden Runden zur Defektion zu verleiten.

Der nächste Schritt ist, die Werte derart anzupassen, dass die Voraussetzungen erfüllt werden. Minima und Maxima auf –50 beziehungsweise 50 zu fixieren ist der leichteste Teil, da jeweils bloß die niedrigsten beziehungsweise höchsten Werte für ein Ressort innerhalb der Entscheidung eines beliebigen Ressorts manipuliert werden müssen. Das arithmetische Mittel lässt sich durch Anpassung der dritten Werte verändern, die jeweils in der Mitte liegen.
Weiters mussten die beiden Spezialfälle von maximaler Kooperation und maximaler Defektion ausbalanciert werden, um die oben genannten Bedingungen zu erfüllen.
Diese Prozesse, die Wesentliches zur Fairness und Ausgeglichenheit beigetragen haben, haben dabei naturgemäß dem Modell als Ganzem geschadet. Während sich bei vagen Gesetzestiteln wie „Waffenexport", oder „Privatisierung des Bildungssystems" zwar generell über deren Effekte auf unterschiedliche Bereiche streiten lässt, hat die schrittweise Manipulation einige „Gesetze" fundamental verändert, sodass entweder der Name der Entscheidung geändert werden musste, oder sich die Fassade des Spieles seiner Mechanik unterordnen muss.

Neben all diesen Voraussetzungen sollten sich außerdem noch dreimal zwei Entscheidungspaare finden, sodass drei relevante Bimatrixdarstellungen in Normalform aufgegriffen und im weiteren Verlauf des Unterrichts hergezogen werden können. Eine dieser drei Situationen soll ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien haben, das für beide Parteien vorteilhaft ist, eine weitere soll ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien haben, die dritte soll das Gefangenendilemma verdeutlichen.

Nash-Gleichgewichte in reinen beziehungsweise gemischten Strategien lassen sich bei einem derartigen Aufbau nur unter Mithilfe der KanzlerInentscheidungen finden, da sonst die Bimatrix stets folgende Form hätte:

	S_3	S_4
S_1	$b(S_1) + b(S_3)$ $a(S_1) + a(S_3)$	$b(S_1) + b(S_4)$ $a(S_1) + a(S_4)$
S_2	$b(S_2) + b(S_3)$ $a(S_2) + a(S_3)$	$b(S_2) + b(S_4)$ $a(S_2) + a(S_4)$

Wobei $a(S_i)$ und $b(S_i)$ die Anpassungen der Auszahlung für Spielerin A und Spieler B durch die Strategie S_i sind. Ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien lässt sich hierbei nur finden, wenn sowohl für A als auch für B gilt, dass die Auszahlung der einen Strategie für beide höher ist als bei der anderen Strategie.
Sei o. B. d. A. $a(S_1) > a(S_2)$, so ist $b(S_1) > b(S_2)$ und sei o. B. d. A. $b(S_3) > b(S_4)$, so ist $a(S_3) > a(S_4)$.
Unter dieser Bedingung gibt es ein Nash-Gleichgewicht bei $\{S_1, S_3\}$.

Beweis:
1. Weicht A von der Strategie S_1 ab, so ändert sich die Auszahlung um $a(S_2) - a(S_1)$. Da $a(S_1) > a(S_2)$ per Annahme, ist es nicht profitabel, von S_1 abzuweichen.
2. Weicht B von der Strategie S_3 ab, so ändert sich die Auszahlung um $b(S_4) - b(S_3)$. Da $b(S_3) > b(S_4)$ per Annahme, ist es nicht profitabel, von S_3 abzuweichen.

Ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien ist in einem derartigen Aufbau nie möglich, da eine Strategie immer entweder echt besser oder exakt gleich gut ist. Gibt es eine echt beste Strategie, so kann keine gemischte Strategie besser sein, sind beide Strategien gleich gut, ist die Mischung irrelevant.

Dies lässt sich allerdings über die Entscheidungen von Kanzlerin oder Kanzler leicht ausmerzen, da die Auswahl zwischen „Volksabstimmung“ (K1, negiert das Gesetz mit

dem schlechtesten Popularitätswert) und „Unterstützung für die Minister“ (K3, erhöht alle Punktewerte um 25%) bei der Wahl zwischen einer populären Defektion und einer weniger populären Kooperation (M1: „Parade“, beziehungsweise M3: „Waffenexport“) zu einem Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien bei {K3, M1} führt.
Ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien lässt sich auch über die Entscheidung K1 finden, wenn auf der anderen Seite (in diesem Fall das Finanzministerium) die Wahl zwischen einer persönlich besseren Entscheidung, welche nichtig gemacht werden könnte, und einer weniger guten Entscheidung, die dafür nicht überstimmt werden kann, getroffen werden muss (F1: „Steuererhöhung“, beziehungsweise F2: „Ausgabenstopp“).

Ein Beispiel für das Gefangenendilemma ist überraschend schwer zu finden, bedenkt man, dass es sich vom Konzept her um ein n-Personen-Gefangenendilemma handelt. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Punktewerte derart gewählt wurden, dass sowohl Kooperation als auch Defektion ihre Reize haben, dazu muss der Einfluss eines Ressorts auf die Summe aller anderen Ressorts größer sein als der Einfluss auf das eigene Ressort, allerdings eher um einen Faktor der Größenordnung zwei. Dies führt dazu, dass der Einfluss der eigenen Entscheidung auf ein einzelnes anderes Ressort im Durchschnitt nur halb so groß ist, wie der Einfluss auf den eigenen Punktwert. Das Gefangenendilemma lebt jedoch primär davon, dass beide Parteien einen stärkeren Einfluss auf die jeweils andere Partei haben als auf sich selbst.

Das klassische Gefangenendilemma wird oft mit diesen Werten dargestellt (Berninghaus, Erhart, Güth, S. 15):

	G	N
G	–8 –8	–10 0
N	0 –10	–1 –1

Wobei „G“ und „N“ für „gestehen“ und „nicht gestehen“ stehen, also für Defektion und Kooperation. Erlaubt man sich den nicht signifikanten Eingriff, die Auszahlungen bei {N, N} auf {–2, –2} anzupassen, so ergibt sich folgendes Prinzip:

$a(G_a) = 0$, $b(G_a) = -8$
$a(N_a) = -2$, $b(N_a) = 0$
$a(G_b) = -8$, $b(G_b) = 0$
$a(N_b) = 0$, $b(N_b) = -2$

Die Entscheidungen von A haben demnach viermal so hohe Auswirkungen auf B wie auf A selbst, und durch die inhärente Symmetrie gilt das auch für die andere Seite.

Um also aus einem Fünf-Personen-Gefangenendilemma ein doppeltes Paar aus Entscheidungen herausnehmen zu können, sodass ein Zwei-Personen-Gefangenendilemma beschrieben werden kann, müssen zwei Rollen gefunden werden, bei denen beide Akteure einen überdurchschnittlich hohen Einfluss auf die exakte Gegenspielerin beziehungsweise den exakten Gegenspieler haben. Diese Voraussetzung sollte zusätzlich zu den weiter oben beschriebenen Ansprüchen an die Fairness des Spieles gelten, was weiterer „Verrenkungen“ bedarf. Man könnte an dieser Stelle argumentieren, dass das Gefangenendilemma bereits eine ausreichende Präsenz im Spiel selbst hat, und nicht in der Nachbetrachtung explizit in Normalform präsentiert werden muss. Dies gilt jedoch nur bedingt, da nicht davon auszugehen ist, dass alle Schülerinnen und Schüler das Dilemma erkennen, während sie gerade selbst darin stecken. Außerdem macht es gerade die Relevanz dieses Konzepts im Spiel besonders wichtig, einen weiteren analytischen Blick darauf zu werfen, in der wesentlich sterileren Form der Bimatrix. Mit dieser Argumentation muss in Kauf genommen werden, dass das Spiel selbst marginal darunter leidet. Über relativ geringfügige Anpassungen lässt sich das System {W1, W3} x {B1, B3} so abändern, dass ein Gefangenendilemma für zwei Personen erreicht wird, wenn auch mit weniger extremen Auszahlungen als im oben gebrachten Beispiel. Unter einer derartigen Manipulation der Auszahlungen leidet vor allem die Balance bei durchgehender Kooperation und durchgehender Defektion, die anderen Kriterien lassen sich relativ leicht über andere Werte ausgleichen.

Nach diesen Anpassungen, deren Ziel auf der einen Seite eine Erhöhung der Fairness und hoffentlich auch des Reizes am Spiel war, auf der anderen Seite die Schaffung einer Grundlage, die pädagogisch wertvoll aufgegriffen werden kann, ergeben sich folgende Werte für die Entscheidungen. In den ersten beiden Spielrunden sind dies alle Möglichkeiten, die die Spielerinnen und Spieler haben, in der dritten Spielrunde sollen weitere Optionen für eine Verschärfung des Konkurrenzkampfes sorgen, und vor allem den Schülerinnen und Schülern eine weitere Chance geben, deren Punktestand besonders schlecht ist. Aus rein spieltheoretischer Perspektive verfälscht dies zwar das Ergebnis, allerdings sollen die Entscheidungen, welche durch einen besonders schlechten Spielstand ausgelöst werden, dafür sorgen, dass niemand einfach „aufgibt" und Entscheidungen in späteren Runden zufällig oder zumindest willkürlich trifft – ein Risiko das bei Jugendlichen stärker gegeben ist als in einer Testgruppe von Studierenden. Auch jene mit wenig Punkten sollten immer das Gefühl bekommen, sie wären noch im Spiel, damit sie sich mit vollem Einsatz beteiligen. Jene Entscheidungen, die einen stark positiven Wert als Voraussetzung haben, dienen hingegen primär als Anreiz zur Defektion. Es ist hierbei davon auszugehen, dass in einer zweiten Runde eine klare Siegerin aus Runde 1 von ihren Konkurrenten „bestraft" wird, was die Erreichung der 50-Punkte-Grenze allgemein sehr unwahrscheinlich macht.

Entscheidungen	Finanzen	Militär	Wirtschaft	Bildung	Popularität	Gesamt
Finanzen 1	15	–15	–10	–5	–11	–26
Finanzen 2	10	–15	5	–10	-6	–16
Finanzen 3	–10	15	5	15	9	34
Militär 1	–10	5	–5	–10	15	–5
Militär 2	–10	10	–10	–5	–1	–16
Militär 3	10	–10	10	0	–5	5
Wirtschaft 1	5	0	–5	15	10	25
Wirtschaft 2	10	–5	5	–10	–7	–7
Wirtschaft 3	–10	5	15	–10	–10	–10
Bildung 1	5	10	10	–10	–9	6

Bildung 2	–5	0	–5	5	–4	–9
Bildung 3	–10	–10	–15	10	11	–14
KanzlerIn 1[a]	–5	–5	–5	–5	–5	
KanzlerIn 2[b]	*0,5	*0,5	*0,5	*0,5	*0,5	
KanzlerIn 3[b]	*1,25	*1,25	*1,25	*1,25	*1,25; –5	

[a] Die Entscheidung aus anderen Ressorts, die den niedrigsten Popularitätswert hat, wird negiert.

[b] Die Auswirkungen bei diesen Entscheidungen sind Faktoren, welche auf alle anderen Entscheidungen angewandt werden. Zusätzlich zur multiplikativen Änderungen wird bei K3 der Popularitätswert um 5 reduziert.

Auffällig ist, dass den Finanzen die beiden stärksten Defektionen zustehen, allerdings hat F1 den schlechtesten Popularitätswert und fällt somit am leichtesten K1 zum Opfer. Die nächstbesseren Defektionen stehen der Wirtschaft zur Verfügung, diese tragen jedoch den zweit-, respektive viertschlechtesten Popularitätswert, sodass auch hier die Gefahr besteht, dass die Entscheidungen via K1 negiert werden. Streng genommen stehen jeder Spielerin und jedem Spieler zwei Möglichkeiten zur Nicht-Kooperation (Defektion oder Kompromiss) zur Verfügung, allerdings unterscheiden sie sich in ihren Auswirkungen stark voneinander. M1 ist darauf ausgelegt, nie negiert werden zu können und nur einen marginal negativen Effekt auf den Gesamtpunktestand zu haben, W2 lädt zu einer Koalition zwischen Finanzen und Wirtschaft ein (F2, W2 sind beides Kompromisse und beide nutzen einander, während sie den anderen schaden, auch wenn F aus dieser Koalition wesentlich besser aussteigt), B2 verteilt die Mali für die anderen wesentlich ausgeglichener als die totale Defektion B3, und K1 fungiert als direkter Konter zu bestimmten einzelnen Defektionen (F1, W3).

Dies ergibt folgende Eckdaten:

Ressort	Finanzen	Militär	Wirtschaft	Bildung	KanzlerIn
Minimum	–50	–50	–50	–50	–50
Maximum	50	50	50	50	50
Arithmetisches Mittel	–3,54	–3,32	**–2,55**	–3,8	–3,25
Arithmetisches Mittel nach Anpassung	–4,18	**–3,32**	–3,5	–3,8	–4,08
Anzahl der Ergebnisse mit < –25 Punkten	20	19	**13**	22	18
Anzahl der Ergebnisse mit > 25 Punkten	8	10	10	9	**12**
Anzahl Siege	**75**	52	49	50	52
Bei voller Kooperation	12,5	18,75	**25**	**25**	0
Bei voller Defektion	–7,5	**–5**	–10	**–5**	–5,5
Bei voller Defektion bis auf K3[c]	–18,75	**–12,5**	–25	**–12,5**	–20
Bei Kompromissen	–10	–15	–15	–20	**0**
1. Quartil	–15	**–12,5**	**–12,5**	–15	–13,75
Median	**–2,5**	–5	**–2,5**	–5	–3,5
3. Quartil	6,25	**7,5**	6,25	**7,5**	6,5

[c] K3 ist eigentlich Kooperation; wenn alle anderen defektieren, führt K3 jedoch zum schlechtesten Ergebnis für die gesamte Gruppe.

Idente Maxima und Minima für alle waren eine Rahmenbedingung. Der Unterschied zwischen dem kleinsten und größten arithmetischen Mittel liegt bei bloß 1,25. Dieser Wert ist sehr klein, bedenkt man die Schrittweite von 5 Punkten, die bei allen Punktewerten außer der Popularität eingehalten werden, was dazu führt, dass eine Änderung um einen einzelnen Schritt in eine beliebige Richtung das arithmetische Mittel um 1 bis 1,5 Punkte verschieben kann, abhängig von der Wahrscheinlichkeit, im Fall von K1 keine Auswirkung zu haben. Da eine Änderung in einer Entscheidung nur in einem Drittel aller Fälle eine Auswirkung aufweist, liegt die gesamte Änderung zwischen $\frac{5}{9}\cdot 0{,}5+\frac{5}{9}\cdot 1{,}25$ und $\frac{5}{9}\cdot 0{,}5+\frac{5}{9}\cdot 1{,}25+\frac{5}{9}$, also $\frac{5}{9}\cdot x$ mit $1{,}75 \leq x \leq 2{,}75$, also zwischen 0,97 und 1,53. Das arithmetische Mittel des Popularitätswertes ließe sich zwar feiner verschieben, durch die wechselseitigen Auswirkungen der Punktewerte aufeinander zwischen den Runden (P erhält 1/16 aller anderen Punktwerte) zeigt sich jedoch, dass sich Popularität und Wirtschaft durch diese Einflüsse ohnehin verschlechtern. Die Volatilität des Systems zeigt sich dadurch, dass Wirtschaft in den meisten Kategorien sehr gut aussteigt (zweitbestes angepasstes arithmetisches Mittel, wenigste Ergebnisse unter –25, zweitmeiste Ergebnisse über 25), während die kleinstmögliche Anpassung (konkret eine Senkung bei F2 von 5 auf 0) bereits dafür sorgen würde, dass das Gegenteil eintritt (schlechtestes arithmetisches Mittel, schlechtestes angepasstes arithmetisches Mittel, wenigste Werte über 25 und mit Abstand wenigste Siege (44 gegenüber 50)).

Betrachtet man die Ränge der einzelnen Ressorts in den relevanten Kategorien, ergibt sich folgendes Bild:

Ressort	F	M	W	B	K
Arithmetisches Mittel nach Anpassung	5	1	2	3	4
Anzahl der Ergebnisse mit < –25 Punkten	4	3	1	5	2
Anzahl der Ergebnisse mit > 25 Punkten	5	2	2	4	1
Anzahl Siege	1	2	5	4	2
Bei voller Kooperation	4	3	1	1	5
Bei voller Defektion	4	1	5	1	3
Bei Kompromissen	2	3	3	5	1
1. Quartil	4	1	1	4	3
Median	1	4	1	4	3
3. Quartil	4	1	4	1	3

Hier fällt auf, dass auf den ersten Blick keine wirkliche Balance zwischen den Ressorts besteht. Für das Militärministerium ist nach den meisten Kriterien ein besseres Ergebnis zu erwarten, als für das Finanzministerium. Dies macht das Spiel – wie bereits erwähnt – nicht automatisch unfair, da im Allgemeinen davon auszugehen ist, dass durch Absprachen unter den Spielerinnen und Spielern Koalitionen entstehen, um stärkeren

Ressorts gezielt zu schaden.

Die Analyse der Quartile zeigt an, wie stark sich die Verteilungen für die einzelnen Ressorts voneinander unterscheiden. Während das Kanzleramt bei allen Werten in der Mitte sitzt, liegen alle anderen jeweils ein oder zwei Mal auf dem geteilten ersten, beziehungsweise dem geteilten letzten Platz.

Alles in Allem ließe sich für jedes Ressort eine Argumentation finden, weshalb es die besten Siegeschancen hat, für eine definitive Lösung müsste das Spiel jedoch intensiv ausgetestet werden, was den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Insgesamt gilt für kooperative n-Personen-Spiele:

„The cooperative 'solutions' to multi-person games unfortunately tend to lack any clear operational meaning when applied to real strategic interactions and many of them are unclear even from a purely mathematical point of view.“ (Colman 1994, S. 143; übersetzt: „Die kooperativen Lösungen zu Mehrpersonen-Spielen haben zumeist leider keine echte Bedeutung, wenn es um die wahren strategischen Interaktionen geht, und viele sind auch aus einer rein mathematischen Perspektive undeutlich.“) Mit anderen Worten werden sich Spielerinnen und Spieler nie so verhalten, wie es mathematisch am günstigsten wäre, sie handeln oftmals irrational. Oft gibt es auch keinen eindeutigen rationalen Handlungspfad – so wie auch hier. Kooperation, um andere zu Kooperation zu verleiten, ist ein Weg zur Optimierung des Gruppenergebnisses, allerdings muss dazu eine Einschätzung auf menschlicher Ebene getroffen werden, ob die anderen Mitglieder der Gruppe dasselbe Interesse verfolgen. Es gibt kein Ressort, das einen besseren oder schlechteren Stand hat, da nicht vorherzusehen ist, wie sich Menschen entscheiden. Weiters zeigt sich bei Mehrpersonen-Spielen, dass identifizierte stärkste Spielerinnen und Spieler oftmals aus Koalitionen ausgeschlossen werden (Colman 1994, S. 172), da eine Koalition mit stärkeren Kräften in einer Verhandlung „teurer“ ist.

Unter diesen Gesichtspunkten kann das Ziel nur sein, dass das Spiel „ausreichend ausbalanciert“ ist, da absolute Balance nur via Symmetrie oder totaler Kenntnis aller Beteiligten erreichbar wäre.

4.4 Programm zur Auswertung der Entscheidungen

Während die oben beschriebene Tabelle dazu gedient hat, die Wechselwirkungen innerhalb der ersten Runde detailliert zu analysieren, bedarf es noch eines zweiten Werkzeugs, welches die Auswertung übernehmen soll. In jeder Runde fünf Gruppen zu je fünf Mitgliedern manuell auszuwerten würde zu viel Zeit in Anspruch nehmen, daher die Notwendigkeit eines Programms, das diese Aufgabe übernimmt. Die Ansprüche an das Programm sind wie folgt:

1. Rasche Auswertung
2. Exakte Verfolgung der Regeln
3. Leichte Bedienbarkeit
4. Eingebaute Warnmechanismen

Um all diesen Ansprüchen gerecht zu werden, reicht wiederum ein simples Tabellenkalkulationsprogramm wie Microsoft Excel oder Apache Open Office. Der Vorteil eines derart weit verbreiteten Programms ist die Verfügbarkeit, was wiederum bei Punkt 3, der leichten Bedienbarkeit mitspielt. Alles, was es benötigt, ist eine Datei, in der über simplen Input alle Ergebnisse berechnet werden.

Wie bereits bei der Analyse ist zunächst eine Übersicht über alle möglichen Entscheidungen der Ausgangspunkt der Datei. Zusätzlich zu den bereits beschriebenen Optionen, die von Beginn an zur Verfügung stehen, gibt es folgende Entscheidungen, die erst im Verlauf des Spieles – frühestens in Runde 3 – freigeschaltet werden können.

	F	M	W	B	P	Faktoren	Bedingungen
F4	30	–20	–20	–20	–40	Alle *0	F < –50
F5	–30	20	20	20	10		F > 50, B > 20
M4	–10	30	–10	–20	5		M < –50

M5	10	20	0	–10	–100	K *0	M > 50, P < 0
W4	0	–20	20	20	–50		W < –50, F < 0
W5	–20	–10	30	–20	–30	min(W) *0	W > 50, F ≥ –50
B4	20	5	10	–20	10		B < –50
B5	–20	–10	30	30	10		B > 50
K1	–5	–5	–5	–5	–5	min(P) *0	Nicht in R3
K4	–10	0	–5	0	0	P wird auf 0 gesetzt	P < –50
K5	–10	10	–10	–15	30		P > 50

„min(W)“ beziehungsweise „min(P)“ bedeutet hier, dass die Entscheidung der anderen Ressorts, welche die schlechteste Veränderung des Wirtschafts- beziehungsweise Popularitätswertes hat, vollständig negiert wird. Um einen Zirkelschluss zu verhindern, bei dem sich W5 und K1 gegenseitig negieren könnten, gibt es die Zusatzregel, dass K1 in Runde 3 nicht mehr ausgewählt werden darf. Da W5 ausschließlich in Runde 3 eingesetzt werden kann, ist ein Konflikt zwischen den beiden nicht mehr möglich.

Im nächsten Schritt wird der Inputbereich aufgebaut. Die drei Runden sollen untereinander gelistet werden, jeweils mit einer Zeile für jedes Ressort, wobei es nach jeder Runde zunächst den Zwischenstand nach der Runde gibt, sowie den Zwischenstand vor der nächsten Runde. Diese Unterscheidung ergibt sich aus der Regel, die bestimmten Ressorts Bonuspunkte abhängig vom Abschneiden anderer Ressorts zuschreibt. Diese Bonuspunkte werden für die Voraussetzungen der Entscheidungen 4-5 nämlich nicht berücksichtigt.
Der eigentliche Input passiert in insgesamt 15 Zellen (3 Runden zu je 5 Entscheidungen), in denen jeweils über ein Drop-Down-Menü die zur Verfügung stehenden Entscheidungen ausgewählt werden können, sowie im Sinne der Übersicht eine Null-Entscheidung, die als einzelnes Leerzeichen angezeigt wird (eine völlig leere Zelle anzeigen zu lassen ist technisch nicht möglich). Die Auswahl im Drop-Down-Menü wird wie bereits für die Auswertung über die Funktion Daten → Gültigkeit → Liste bestimmt. Für Runde 1 und 2 heißt dies, dass jeweils die Entscheidungen 1 bis 3 für alle Ressorts eingegeben werden können, in Runde 3 sind alle 5 möglich, mit

Ausnahme von K, wo es sich auf K2-K5 beschränkt. Es ist wiederum technisch nicht möglich, die Bedingungen für die Entscheidungen 4 und 5 hier bereits einzubauen, was den einzigen wahren Nachteil der Auswertung im Tabellenkalkulationsprogramm darstellt. In Runde 3 muss es demnach Zellen geben, die überprüfen, ob eingetragene Entscheidungen überhaupt erlaubt sind. Dies passiert über folgende Zelleninhalte (für das Beispiel der Finanzen):

```
=WENN(B31="F4";WENN(D26>=–50;"Finanzwert zu
hoch!";"Ok");WENN(B31="F5";WENN(D26<=50;"Finanzwert zu
niedrig!";WENN(G26<=20;"Bildungswert zu niedrig!";"Ok"));"Ok"))
```

Übersetzt heißt das:
Wenn die Entscheidung F4 getroffen wird, aber die Bedingung, F < –50 nicht erfüllt wird, dann erscheint die Warnung, dass der Finanzwert zu hoch sei. Ist er das nicht, zeigt die Zeile „Ok“ an.
Wenn die Entscheidung F5 getroffen wird, aber die Bedingung, F > 50 nicht erfüllt wird, dann erscheint die Warnung, dass der Finanzwert zu niedrig sei. Ist er das nicht, wird weiter überprüft, ob die Bedingung, B > 20 erfüllt wird. Ist dies nicht der Fall, gibt es die Warnung, der Bildungswert sei zu niedrig. Sind beide Bedingungen erfüllt, wird wiederum „Ok“ angezeigt.
Wenn weder die Entscheidung F4 noch F5 getroffen wird, wird ebenfalls „Ok“ angezeigt.

Für die Entscheidung von Kanzlerin oder Kanzler gibt es noch eine zusätzliche Fehlermeldung, da es passieren kann, dass via F4 oder M5 eine KanzlerInentscheidung negiert wird. Dies ist für die anderen Ressorts irrelevant, da hier schlichtweg der gesamte Wert der Entscheidung mit 0 multipliziert werden kann. Für K2 und K3 reicht dies nicht, da die Wahl einer dieser Entscheidungen bereits einen Faktor festlegt, mit dem alle anderen Entscheidungen in dieser Runde multipliziert werden (0,5 bzw. 1,25).

Dieses Problem ließe sich über zwei Wege lösen. Entweder ändert man die Zellen, in denen diese Faktoren stehen derart ab, dass sie in den Fällen, in denen die Entscheidung von Kanzlerin oder Kanzler negiert wird, 1 anzeigt, was doppelte „WENN"-Funktionen in multiplen Zellen benötigt, oder man implementiert eine Warnung, dass im Falle von F4 oder M5 die Entscheidung aus dem Kanzleramt händisch auf „K6" umgestellt werden soll. Darüber, wie die von K1-K5 bestimmten Faktoren definiert sind: =WENN($B$35="K2";0,5;WENN($B$35="K3";1,25;WENN($B$35="K1";WENN(N31=MIN(N$31:N$34);0;1);1))), ergibt sich bei K6 automatisch der Faktor 1, alle fixen Änderungen der Entscheidung werden über den von F4 oder M5 beeinflussten Faktor 0 ohnehin irrelevant.
Um diesen Fehlermeldungen weiteres Gewicht zu verleihen, wird für diese fünf Zellen mit der Funktion Format → bedingte Formatierung der Zellhintergrund derart bestimmt, dass er weiß ist, wenn die Zellen „Ok" anzeigen, aber rot für alle anderen Zellinhalte. Gibt es also eine Entscheidung, die eigentlich nicht zur Verfügung gestanden wäre, so leuchtet eine Zelle rot auf, und zeigt an, worin der Fehler liegt. Dass „Ok" angezeigt wird und nicht bloß eine leere Zelle, ist wiederum auf die technischen Limitationen zurückzuführen. Selbst ein einzelnes Leerzeichen würde in diesem Fall nicht reichen, um die Bedingung für bedingte Formatierung auszulösen.

Der benötigte Output findet sich direkt beim Input, benötigt werden die Zwischenstände nach Runde 1 und 2, sowie der Endstand. Die Zwischenstände werden mit der Hand notiert und an die Gruppen zurückgegeben. Im Zuge der Entwicklung gab es die Überlegung, diese Zwischenstände ausdrucken zu lassen, wobei hier die Ergebnisse Zeitungsberichten nachempfunden hätten werden können, bei denen abhängig vom Zwischenstand einzelne Worte in vorgefertigten Artikeln ausgetauscht werden könnten. Für die Schlagzeile hätte beispielsweise überprüft werden können, welches Ressort den höchsten und welches den niedrigsten Zwischenstand hat, sodass jede Gruppe ein personalisiertes Feedback erhält. Dies würde die Identifikation mit dem Setting wesentlich erhöhen, allerdings wäre als Konsequenz ein Drucker erforderlich, der im Klassenraum nötig wäre, was außerdem den zeitlichen Aufwand erhöhen würde – nicht nur, weil der Druck selbst Zeit in Anspruch nimmt und die Fehleranfälligkeit (fehlerhafte Druckaufträge, leere Druckerpatronen, Papierstau, etc.) signifikant erhöht, sondern auch, weil diese „Zeitungsartikel" gelesen werden würden. Die Übertragung der Zwischenstände per Hand geht wesentlich schneller und gibt den Gruppen mehr Zeit für Absprache und Überlegungen.

Die Berechnung selbst ist sehr simpel gehalten. In der Zeile jedes Ressorts gibt es zunächst die Ausgangswerte der Entscheidungen, welche ähnlich wie in der Übersichtstabelle auf die Liste aller Entscheidungen zugreift.

```
=WENN($B4="F1";W2;WENN($B4="F2";W3;WENN($B4="F3";W4;WENN($B4="F4";W5;WENN
($B4="F5";W6;"")))))
```

Wobei hier wiederum die Auswirkungen auf die einzelnen Ressorts nebeneinander zu finden sind, sodass diese Formel in die benachbarten fünf Zellen automatisch ausgefüllt werden kann. Für die anderen Ressorts müssen nur Kleinigkeiten angepasst werden.

```
=WENN($B5="M1";W8;WENN($B5="M2";W9;WENN($B5="M3";W10;WENN($B5="M4";W11;W
ENN($B5="M5";W12;"")))))
```

Rechts davon gibt es drei Spalten, in denen mögliche Faktoren gelistet sind, es gibt eine Spalte für K (Faktor 0, wenn K1 gewählt ist und diese Zeile den niedrigsten Popularitätswert in dieser Runde hat, Faktor 0,5, wenn K2 gewählt ist, Faktor 1,25 wenn K3 gewählt ist, sonst Faktor 1), eine für F (Faktor 0 für alle außer Zeile F, wenn F4 gewählt ist, sonst Faktor 1) und eine für W (Faktor 0, wenn W5 gewählt ist, und die Zeile den niedrigsten Wirtschaftswert in dieser Runde hat, sonst Faktor 1). Die Zellen, in denen die unmodifizierten Werte der Entscheidungen stehen, werden jeweils mit all diesen Faktoren multipliziert, das Ergebnis ist eine 5x5 Tabelle, die alle Einflüsse einer Runde sammelt. An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass sich nicht allgemein sagen lässt, dass innerhalb einer Zeile alle Ergebnisse der Entscheidung des zugehörigen Ressorts finden lassen, da die Faktoren – insbesondere durch K – bereits berücksichtigt sind. Dafür lassen sich all diese Ergebnisse simpel summieren, um in Addition mit den Zwischenständen vor der entsprechenden Runde den Zwischen- oder Endstand nach dieser Runde anzugeben.

Eine kleine Besonderheit wird noch durch die Entscheidung K4 erreicht, welche den Popularitätswert unabhängig vom Ausgangswert auf 0 setzt. Hierzu ist die Auszahlung

(–1)*(H27+H31+H32+H33+H34), das heißt –1 mal dem aktuellen Zwischenstand direkt bevor K4 als letzte Entscheidung noch abgerechnet wird. Sollten F4 oder W5 für eine Negation von K4 sorgen, wird selbstverständlich noch mit 0 multipliziert, und das Endresultat von P ändert sich nicht mehr.

Alle Interaktionen der Entscheidungen untereinander sind derart fixiert, dass es zu keinen Komplikationen oder Zirkelschlüssen kommen kann. Da K1 in Runde 3 nicht mehr erlaubt ist, wäre bloß ein Konflikt zwischen F4 und W5 möglich, allerdings erlaubt es die Voraussetzung von W5 nicht, dass die Entscheidung bei $F < -50$ getroffen wird, während F4 nur im Fall von $F < -50$ möglich ist, sodass auch hier nie ein Konflikt entstehen kann.

Damit die Auswertung für bis zu sechs Gruppen gleichzeitig passieren kann, wird die gesamte Tabelle markiert und in derselben Datei in einer neuen Tabelle eingefügt. Dadurch gelten hier die exakt selben Regeln und Voraussetzungen, aber es werden alle Gruppenergebnisse gleichzeitig gespeichert und es kann darauf zugegriffen werden. Um die Verwechslungsgefahr zu reduzieren, empfiehlt sich eine Farbcodierung, das heißt die Materialien, die die Schülerinnen und Schüler bekommen, sind auf buntem Papier gedruckt, jede Tabelle hat ebenfalls eine Markierung in derselben Farbe.

Um dafür zu sorgen, dass im Zuge der Anwendung wirklich bloß die für den Input vorgesehenen Zellen verändert werden, werden diese angesprochenen 15 Zellen über die Funktion Zellen formatieren → Zellschutz entsperrt, und die einzelnen Tabellen werden gesperrt. Dies hat als Konsequenz, dass bloß noch in diesen 15 Zellen Änderungen vorgenommen werden können, und durch die bedingte Formatierung beschränken sich auch diese Änderungsmöglichkeiten noch weiter auf die Optionen in den Drop-Down-Menüs.

5 Regeln und Erklärung

Die Schülerinnen und Schüler setzen sich in Gruppen zu fünft zusammen, jeder und jede bekommt eine zufällig ausgewählte Rolle aus den fünf zur Verfügung stehenden Bereichen: Finanzen, Militär, Wirtschaft, Bildung und KanzlerIn. Sie erhalten ein Blatt Papier, auf dem sie ihre Rollenbeschreibung, ihr Spielziel und die zur Verfügung stehenden Entscheidungsmöglichkeiten mit all ihren Auswirkungen vorfinden (siehe 9.2. Materialien).

Die Schülerinnen und Schüler werden, nachdem sie sich über ihre Rolle eingelesen haben, über Ablauf und Belohnungen informiert. Das Spiel läuft in drei Runden ab, nach der letzten Runde wird für jede Gruppe überprüft, welches Ressort die meisten Punkte angesammelt hat, die Leiterin oder der Leiter des Ressorts bekommt als Belohnung Süßigkeiten, die sich im Idealfall leicht teilen lassen. Die Siegerin, beziehungsweise der Sieger der Gruppe, die den insgesamt besten Wert erreicht hat, erhält die doppelte Menge. Während des Spieles dürfen innerhalb der Gruppe Abmachungen getroffen werden, wie diese Süßigkeiten im Falle eines Sieges aufgeteilt würden (deswegen ist die Teilbarkeit relevant, wie beispielsweise bei einer Tafel Schokolade oder einer Menge an Schokoladelinsen). Diese Abmachungen sollen bindend sein. Die Auszahlung in Form von Süßigkeiten ist für eine Schulklasse am angemessensten, während in einer herkömmlichen Testgruppe üblicherweise mit Geld gelockt wird. Die Existenz einer Belohnung ist aber unabdingbar, und im Normalfall motiviert das Versprechen von Schokolade dazu, dass ein Großteil der Klasse auch wirklich gewinnen möchte. Für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die aus verschiedenen Gründen keinen Anreiz durch das Versprechen von Schokolade vorfinden, sollten Alternativen bereit gehalten werden (Süßigkeiten auf einer anderen Basis). Der Umfang der Belohnung sollte groß genug sein, dass eine Teilung unter fünf Personen vernünftig ist, aber nicht so groß, dass diese Teilung allen einen befriedigend großen Teil zukommen lässt. Die physische Präsenz der Belohnung (am LehrerInnentisch liegend) kann dafür sorgen, dass das Ziel nicht aus den Augen verloren wird, und erhöht den Konkurrenzkampf.

Studien haben gezeigt (Colman 1994, S. 185ff), dass in der Situation eines n-Personen-Gefangenendilemmas sowohl die Existenz eines Settings als auch die Anwesenheit von Belohnungen für eine höhere Rate an Defektionen sorgen, wobei davon auszugehen ist, dass beide Elemente für ein Ergebnis sorgen, das der Realität näher kommt als eine abstrakte Auswahl zwischen zwei Strategien, wenn es um nichts geht. Der Eindruck, dass die getroffenen Entscheidungen relevant sind und Folgen haben, soll einerseits über die rollenspielerische Komponente eingeführt werden, andererseits über den Umstand, dass sie in Bezug auf die zu gewinnenden Belohnungen wirklich relevant sind.

Die Gruppe bekommt nun ein paar Minuten Zeit, damit sich alle über ihre Optionen klar werden können, und um eventuell Einzelheiten der Optionen mit dem Rest der Gruppe zu besprechen. Weiters dürfen während des Spieles Koalitionen beschlossen werden, beziehungsweise Gesetzesempfehlungen abgegeben werden. Die Spielerinnen und Spieler sind hierbei jedoch nicht dazu verpflichtet, sich an derartige Abmachungen zu halten. Dies unterscheidet sich von den echten Koalitionen, in denen ein Gruppenmitglied einen Anreiz dazu hat, einem anderen Gruppenmitglied zu helfen, um einen Teil der Belohnung zu kassieren. Diese Unterscheidung zwischen echten Bündnissen, die zu einer Teilung der Belohnung führen, dementsprechend ihrerseits Anreiz für ein gewisses Entscheidungsverhalten bieten, und den losen Bündnissen, bei denen die Gruppe berät, was gemacht werden sollte, muss den Schülerinnen und Schülern auch verdeutlicht werden.

Jede Spielerin und jeder Spieler hat neben der Übersicht über die eigene Rolle insgesamt fünf Karteikarten derselben Farbe (jede Gruppe hat eine eigene Farbe), auf denen jeweils eine der fünf möglichen Entscheidungen mit all ihren Auswirkungen beschrieben sind. Auf diesen Vorderseiten ist durch farbige Markierungen sofort ersichtlich, welchem Ressort sie entstammen. Diese Karten werden verdeckt an den Tischrand gelegt und von der Person, die das Spiel leitet, abgesammelt. Die jeweiligen

Entscheidungen werden im Tabellenkalkulationsprogramm eingegeben, der daraus erfolgende Zwischenstand nach einer Runde wird per Hand aufgeschrieben und danach zusammen mit den Entscheidungskärtchen an die Gruppen zurückgegeben. Die Karten sollen dann etwa eine Minute lang auf dem Tisch liegen bleiben, sodass alle Spielerinnen und Spieler zumindest die Gelegenheit haben zu überprüfen, ob ihre Mitspielerinnen und Mitspieler tatsächlich so gehandelt haben, wie es ausgemacht war, danach bekommt jede und jeder sein oder ihr Kärtchen zurück, und Runde Zwei startet nach demselben Prinzip. Nach dem Ende der dritten Runde werden die Belohnungen verteilt und es wird sichergestellt, dass diese gemäß der getroffenen Vereinbarungen aufgeteilt werden. Damit es hierbei zu keinen Streitigkeiten kommt, sollten die Schülerinnen und Schüler selbstständig über alle Koalitionen Buch führen.

Diese Regeln decken sich über weiteste Strecken mit den grundlegenden Gedanken zu den von Robert Axelrod durchgeführten Turnieren zum Gefangenendilemma für zwei Personen (Axelrod 1984). Die Unterschiede entstehen dadurch, dass das Turnier von programmierten Strategien gespielt wurde, während das hier betrachtete Spiel von real anwesenden Jugendlichen durchgeführt wird. Dies erklärt die Notwendigkeit der Motivation, und die Erlaubnis, unverbindliche Absprachen durchzuführen. „Under these conditions, words not backed by actions are so cheap as to be meaningless." (Axelrod 1984, S. 12; übersetzt: „Unter diesen Bedingungen sind Worte, denen keine Taten folgen, derart billig, dass sie bedeutungslos sind.") Dies gilt für Algorithmen, während es für eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern jedoch von Bedeutung ist, alleine um sich gemeinsam die Regeln zu vergegenwärtigen. Ein weiterer grundlegender Gedanke hierbei ist, dass sich das Verhalten von der ersten zur (klar als solchen ausgegebenen) letzten Runde massiv unterscheiden wird, weshalb Axelrod beim zweiten Turnier keine fix vorgegebene Rundenzahl mehr durchführen ließ, sondern stattdessen eine Wahrscheinlichkeit festlegte, für die ein Spiel nach jeder Runde enden würde. (Axelrod 1980b)
Um den Umfang eines derartigen Spieles einer Schulklasse am eigenen Leib erfahren zu lassen, fehlt im Unterricht die Zeit, allerdings bieten die drei Runden womöglich bereits erste Aufschlüsse dafür, wie die Situation in einer sterileren Form und über wesentlich

mehr Runden aussehen könnte. Dass die Strategie, immer zu kooperieren von anderen ausgenutzt werden könnte, und dass wechselseitige Defektion langfristig gesehen allen schadet, wird bereits deutlich und sollte in der Nachbetrachtung angesprochen werden. Das Ergebnis, dass es im Allgemeinen vorteilhaft ist, „nice" aber „provocable" zu sein, aber von Nachteil, wenn man „envious" ist (Axelrod 1984, S. 110ff). Die Defektionen anderer müssen bestraft werden, aber Rachsucht und das Bedürfnis, mehr Punkte zu haben als die Gegenspieler, schaden langfristig gesehen. Diese Lektion aus dem iterierten Gefangenendilemma führt auch bis zu einem gewissen Grad zu einer Auflösung des Dilemmas selbst. Kooperation unter Androhung von einzelnen Gegenschlägen beschwört eine Situation herauf, in der Kooperation nicht nur auf dem Papier vorteilhaft ist, sondern auch zum Vorteil aller Beteiligten wahrgenommen wird. Die erfolgreichsten Strategien im Verlauf über alle derartigen Turniere basieren stets auf der Strategie namens „tit for tat", welche mit Kooperation beginnt, und ab dem zweiten Durchgang stets die Entscheidung wählt, die in der Runde zuvor auf der gegnerischen Seite verwendet wurde.

Damit das Spiel interessant wird, müssen sowohl Kooperation als auch Defektion realistische Chancen haben, gewählt zu werden. Sobald sich zwei bis drei Gruppen untereinander auf absolute Kooperation einigen, und sich auch bis zum Schluss daran halten, ergibt sich ein eindeutiges Bild, und der Verlauf wird für die Mitglieder der Gruppe eher uninteressant. Gibt es auf der anderen Seite kaum bis gar keine Kooperation, werden jede Runde Defektionen gewählt, und das Ergebnis wird aller Voraussicht nach nicht nur unbefriedigend sein, sondern auch langweilig, da in keiner Runde ein innerer Konflikt oder zumindest eine Überlegung vorhanden ist, für welchen Pfad man sich entscheidet.

Das Ziel muss demnach sein, die Anreize für beide Optionen in Balance zu halten. Folgende Aspekte verlocken zur Kooperation:

a) Die Gruppe kennt sich.

b) Die Gruppe darf sich absprechen.

c) Dass Kooperation für alle gut ist, ist mathematisch leicht einsehbar.

d) Die Belohnung darf geteilt werden.
e) Die stärkste Gruppe bekommt einen Bonus.
f) Das Spiel verläuft über mehrere Runden.

Für Defektion hingegen sprechen:

g) Absprachen sind nicht bindend.
h) Durchgehende Kooperation ist nicht für alle gleich gut.
i) Defektion sieht verlockend aus.
j) Das Setting beschreibt eine realistische Situation.
k) Es gibt Belohnungen für den Sieg.
l) Die Gruppen sind relativ groß.

a) Die Gruppe kennt sich

Dieser Faktor ist schwer zu quantifizieren und hängt unter anderem davon ab, wie ernst das Spiel genommen wird. Vertrauen, das bereits vorhanden ist, kann als Verhandlungsbasis verwendet werden, und ein Vertrauensbruch hat potentiell Folgen, die über das Spiel hinausgehen. Handelt es sich bei einer gesamten Gruppe um einen geschlossenen Freundeskreis, ist es durchaus vorstellbar, dass die sozialen Mechanismen des Freundeskreises eine hundertprozentige Kooperation bewirken. Um diesen möglicherweise dominierenden Faktor zu bekämpfen ist es ratsam, die Gruppen zufällig einzuteilen. Es wird immer noch Situationen geben, in denen das Spiel der Sozialstruktur gegenüber in den Hintergrund tritt, und der Umstand, dass die fünf miteinander interagierenden Personen auch nach Beendigung des Spieles miteinander in Kontakt bleiben werden, wird mit ziemlicher Sicherheit stärker zur Kooperation als zur Defektion verleiten, allerdings nicht in dem Ausmaß wie in einem Freundeskreis. Studien, wie sich Menschen in der Situation eines Gefangenendilemmas verhalten, wenn sie sich vorher bereits kennen, lassen sich nicht finden, es hat sich jedoch gezeigt, dass es im Allgemeinen zur Kooperation anregt, wenn eine zufällige Testgruppe vor dem Spiel Gelegenheit hat, einander kennenzulernen (Colman 1994, S. 182).

b) Die Gruppe darf sich absprechen

Die Gelegenheit zur Absprache schlägt in dieselbe Kerbe, wobei hier scheint, dass ein Gespräch über das Spiel denselben Effekt wie eine echte Absprache hat (Colman 1994, S. 183). Es ist wohl die gemeinsame Reflexion über die Rahmenbedingungen des Spieles, die kollektive Erkenntnis, was Kooperation und Defektion zu bedeuten haben – das Wissen, dass alle zumindest darüber nachgedacht haben, dass eine durchgehende Kooperation für alle günstig ist. Um diesen potentiell starken Effekt abzuschwächen, erhalten die Schülerinnen und Schüler bloß ihre eigenen Entscheidungsmöglichkeiten, was es insgesamt schwieriger macht, in dem kurzen Zeitraum, der ihnen zur Besprechung dient, den gesamten Umfang des Spieles zu erfassen. Zwar ist durchaus angedacht, dass sich alle Spielerinnen und Spieler über die Entscheidungsmöglichkeiten der Anderen informieren, allerdings macht es einen grundlegenden Unterschied, ob die Informationen leicht ersichtlich gesammelt sind, und aber erfragt werden müssten, beziehungsweise ob ein Blatt Papier, das die Informationen enthält durch die ganze Gruppe wandern müsste.

c) Dass Kooperation für alle gut ist, ist mathematisch leicht einsehbar

Die Art, wie die Entscheidungen präsentiert werden (die konkrete Nennung der Einflüsse auf die Punktwerte), sorgt dafür, dass gruppendienliche Entscheidungen schnell identifiziert werden können. Wer eine Summe über alle Punktwerte bildet, kann schnell sehen, dass Kooperation der Gruppe hilft. Dies erfolgt in der herkömmlichen Aufgabenstellung des Gefangenendilemmas in teilweise noch größerem Ausmaß, wenn eine Entscheidung klar als Kooperation oder Defektion gekennzeichnet ist, allerdings liegt der Fokus bei diesen Fragestellungen zumeist auf dem Ertrag für die Spielerin oder den Spieler selbst, die Erträge der Anderen werden nicht betont. Auf den Bögen, die die Übersicht der Entscheidungen eines Ressorts bieten, werden die Auswirkungen auf das eigene Ressort (siehe 9.2. Materialien) hervorgehoben, um diesen Effekt ein wenig auszugleichen.

d) Die Belohnung darf geteilt werden

Dass die Belohnung für die Siegerin oder den Sieger geteilt werden kann, ist unumgänglich, wenn man Koalitionen im Spiel haben möchte. Der herkömmliche Zugang im Gefangenendilemma ist, dass das, was in diesem Fall bloße Punktezahlen sind, gleichzeitig die Auszahlung darstellt. Dies führt dazu, dass es im eigenen Interesse ist, die persönliche Punktezahl oder Auszahlung zu maximieren. Die Entscheidung, hier in eine andere Richtung zu gehen, basiert auf zwei entscheidenden Einschränkungen. Die eine ist, dass eine derartige Auszahlung in Süßigkeiten sehr umständlich sein kann, da alles abgezählt werden müsste, ein Umrechnungsverhältnis von Punkten zu „Stücken Schokolade" beachtet werden und das für etwa fünfundzwanzig Personen einzeln geschehen muss. Bei einem „winner-take-all", das von einem Programm berechnet wird, lässt sich die Siegerin oder der Sieger leicht anzeigen, diese Person bekommt die Belohnung und muss sie dann selbstständig gemäß den Vereinbarungen innerhalb der Gruppe aufteilen. Der andere Aspekt ist, dass im aktuellen System davon auszugehen ist, dass die Meisten auf negativen Ergebnissen landen werden. Negative Auszahlungen können auf zwei Arten gehandhabt werden – die eine ist, Auszahlungen unter Null zu ignorieren, was Entscheidungen ab einem gewissen Punkt belanglos macht, die andere ist, die Auszahlungen entweder derart anzuheben, dass alle positiv sind, oder diesen Schritt durch ein zu Beginn zur Verfügung stehendes Kapital anzudeuten, von dem bei jeder negativen Entwicklung etwas weggenommen wird. Dies führt rasch zu einer Inflation an Belohnungen, und negative Resultate verlieren ihre Bedeutung. Der Umstand, dass die meisten Entscheidungen zu negativen Ergebnissen führen, dass das arithmetische Mittel unter Null liegt, ist bewusst gewählt. So entsteht der Eindruck, dass Kompromisse, Defektion, aber auch schädliche Gruppenmitglieder dafür sorgen, dass es nach einer Runde im ganzen „Staat" schlechter aussieht als zuvor, und dass es nur ganz spezielle Ausgänge gibt (exakt 5 Stück), bei denen es kein negatives Einzelergebnis gibt.

Die Existenz von Koalitionen ist für n-Personen-Gefangenendilemmata auch eher unüblich, die Inklusion in diesem Fall sorgt aber zum Einen für einen größeren Handlungsspielraum, der insbesondere in diesem Setting naheliegend erscheint (der Austausch politischer Gefallen zum gemeinsamen Nutzen), zum Anderen ist damit zu rechnen, dass es auf diese Art mehr Schülerinnen und Schüler gibt, die am Ende belohnt werden, was sich wiederum positiv auf das Verhältnis zur Spieltheorie auswirken kann.

Da direkte Kooperation zweier Ressorts aber nur bedingt möglich ist, sollte sich an den Machtverhältnissen nur wenig ändern – mit einer Person zu kooperieren heißt fast immer, mit der gesamten Gruppe zu kooperieren, sodass die Existenz von Koalitionen nur die primäre Konsequenz hat, dass Kooperation wahrscheinlicher wird.

e) Die stärkste Gruppe bekommt einen Bonus

Wie weiter oben bereits beschrieben ist der Zusammenhalt innerhalb einer Gruppe entscheidend, wenn es um den Willen zur Kooperation geht. Die zusätzliche Belohnung für die Gruppe, die am besten abschneidet, betont, dass auch das Wohl der Gruppe eine Bedeutung und einen Einfluss auf die Belohnung hat. Die doppelte Belohnung wird dennoch an die Person mit dem besten Punktewert ausbezahlt, also lohnt sich Kooperation für die anderen nur dann, wenn diese Siegerin beziehungsweise dieser Sieger ohnehin bereit war, zu teilen. Würde sie automatisch gerecht auf die Gruppe aufgeteilt werden, wäre die Belohnung deutlich größer im Vergleich zu Einzelsiegen, oder würde ein besonderer Fokus auf die Existenz dieser Belohnung gelegt werden, kann das System sehr schnell kippen. Wäre die Belohnung beispielsweise mehr als vier Mal so groß wie die Einzelbelohnung, so ist die Gesamtbelohnung für die Gruppe größer als fünf Einzelbelohnungen, womit bei fairer Verteilung alle Mitglieder besser ausbezahlt werden, als bei einem Einzelsieg ohne Gruppensieg. Dies gilt selbstverständlich nur für den Fall, dass die Gruppe dies als einzige erreicht und sich die Belohnung für den Gruppensieg nicht mit anderen Gruppen teilen muss.

f) Das Spiel verlauft über mehrere Runden

Der Verlauf über mehrere Runden bietet Gelegenheit, Defektionen zu bestrafen. In dem Moment, in dem die erste Defektion vorkommt, unabhängig davon, ob es zu einer Bestrafung kommt oder nicht, ist bereits eine Abweichung von reiner Kooperation gegeben, die Gruppe aus der Balance gebracht, und das Spiel wird automatisch reizvoller. Wichtiger ist also die Frage, ob die Androhung von Rache stark genug ist, um durchgehende Kooperation zu erzwingen. Auch diese Frage ist nur bedingt relevant, da auch ein Ausgang, bei dem bis zur letzten Runde perfekt kooperiert wird, bis es schließlich in der letzten Runde zu einzelnen Defektionen kommt, eine Lektion lehren kann, die in der Aufarbeitung des Spieles angesprochen und offenbart werden kann.

Diese sechs Aspekte können zu einer einzelnen Frage zusammengefasst werden: „Wie wahrscheinlich ist es, dass es mehr als eine Gruppe geben wird, in der alle immer defektieren?“ Dieser Fall von durchgehender Defektion in mehr als einer Gruppe wäre einer der wenigen Fälle, in denen das Spiel nur einen mäßig erfolgreichen Einstieg in die Spieltheorie bieten kann, da es zu wenig Abwechslung gibt. Die Antwort ist ohne intensiver quantitativer Testung nicht zu finden, es sollte aber genügend Anreize zur Kooperation geben.

Diesen Motivatoren zur Kooperation gegenüber stehen sechs Gründe, weshalb es zur Defektion kommen kann.

g) Absprachen sind nicht bindend

Dass die Absprachen nicht bindend sind, ist ein wichtiges Kriterium, sonst würden Entscheidungen nicht von Einzelpersonen mit Einzelinteressen getroffen werden, sondern stets vom Kollektiv. Die Existenz von nicht-bindenden Absprachen motiviert dahingehend zur Defektion, dass die Gruppenmitglieder getäuscht werden, wodurch es zu einer extrem erfolgreichen Runde für ein einzelnes Ressort kommen kann. Darüber hinaus ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich, wenn sich jemand nicht an eine Abmachung gehalten hat, sondern die Gruppe muss aufmerksam genug sein, es auch zu erkennen und zu kontrollieren. Defektoren können dadurch darauf spekulieren, dass ihre Defektion unbemerkt bleibt, und beginnen eventuell bereits vor der letzten Runde damit.

h) Durchgehende Kooperation ist nicht für alle gleich gut

Dieser Aspekt, die unausgeglichenen Punktewerte bei durchgehender Kooperation, ist eine weitere Möglichkeit, die guten Intentionen einer Gruppe nach der ersten Runde zu stören. Wenn eine Gruppe beschließt, stets zu kooperieren, und auch alle vorhaben, sich an diese Abmachung zu halten, kann der Zwischenstand nach einer Runde, bei dem sich zeigt, dass nicht alle im selben Ausmaß davon profitieren, dafür sorgen, dass Einzelne vom kooperativen Weg abkommen. Dies wird vor allem dadurch gemildert, dass eine Abmachung, die sämtliche Belohnungen gerecht aufteilt, den eigenen Punktewert weniger wichtig macht. Allerdings hat dies nur bedingt mit dem Wunsch zu tun, selber gewinnen zu wollen. Die Belohnung in Form von Süßigkeiten ist nicht die einzige Art von Auszahlung, die vorgenommen wird – auch der Stolz, sich „Siegerin“ oder „Sieger“ nennen zu dürfen zählt für Individuen etwas, so wie vielleicht auch der Stolz, „fair“ gespielt zu haben, nie die Gruppenmitglieder verraten zu haben, oder der Stolz, die Gruppe ausgetrickst, ausmanövriert zu haben. Die Belohnungen, die über den Preis selbst hinausgehen, sind mathematisch nur schwer zu quantifizieren, sondern liegen eher im Metier der Psychologie. Es ist allerdings nicht zu leugnen, dass diese Aspekte in einem echten Spiel, das von echten Menschen durchgeführt wird, doch auch relevant sind.

i) Defektion sieht verlockend aus

Dass Defektionen „verlockend aussehen“ ist ein wesentliches Element des Gefangenendilemmas, allerdings lässt sich im Allgemeinen sagen, dass der Effekt bei zwei Personen wesentlich stärker ist als bei drei oder gar fünf. Dies ist wiederum auf den bereits angesprochenen Punkt zurückzuführen, dass sich der Nachteil für Andere bei Defektionen ebenso wie der Vorteil bei Kooperation aufteilt. Der Umstand, dass im Spiel selbst nicht in einer Normalform oder mit abstrakten Situationsbeschreibungen operiert wird, hilft hierbei jedoch enorm. Jede Spielerin und jeder Spieler hat beim eigenen Punktewert einer Entscheidung, die einer Kooperation entspricht, ein negatives Vorzeichen, bei Defektion ein positives. Über die psychologischen Auswirkungen einer derartigen Aufgabenstellung lassen sich nur bedingt Annahmen treffen, die zu überprüfen einer langen quantitativen Analyse bedürfte, was jedoch nicht zu leugnen ist, ist der Umstand, dass im Gegensatz zum Gefangenendilemma für zwei Personen in Normalform der Fall, dass beide kooperieren, nicht explizit in den Raum gestellt wird, sondern erst über Kommunikation innerhalb der Gruppe erkannt werden kann. Das macht die Erkenntnis, dass es für alle am besten wäre, zu kooperieren weniger trivial und legt egoistisches Verhalten zumindest theoretisch näher. Zur Betonung sind auf den Spielmaterialien alle Effekte, die das eigene Ressort betreffen, hervorgehoben.

j) Das Setting beschreibt eine realistische Situation und

k) Es gibt Belohnungen für den Sieg

Dass die Simulation einer realen Situation verstärkt zu Defektionen führt, wurde ebenso wie die Relevanz von realen Belohnungen bereits gezeigt (Colman 1994, 185ff). In dieser Studie wurde verdeutlicht, dass positive Belohnungen und die Existenz eines Szenarios beide unabhängig voneinander zu verstärkter Defektion geführt haben, während negative Belohnungen, beziehungsweise Bestrafungen – das heißt den Testsubjekten wurde eine Menge an Geld zur Verfügung gestellt, von dem bis zur eigentlichen Ausbezahlung je nach Entscheidungen immer etwas weggenommen wurde – und die Bearbeitung in Normalform beide vergleichsweise eher zur Kooperation eingeladen haben. Im Falle dieses Spieles werden beide Motivatoren zur Defektion miteinander verbunden. Dies ergibt sich aus dem Wunsch, durch Realitätsnähe die Schülerinnen und Schüler für die Sache zu begeistern, dass der Versuch einer Emulation der Realität und die daraus resultierende größere Begeisterung zu einem erhöhten Anteil an Defektionen führt, ist naheliegend und ein Mitgrund, wieso es sich hier um ein Dilemma handelt, und die Geschichte voll von Beispielen ist, in denen wechselseitige Defektion zu den zu erwartend negativen Ergebnissen geführt hat.

l) Die Gruppen sind relativ groß

Auch die Gruppengröße wird von Colman berücksichtigt (Colman 1994, S. 181f.), wobei es hier drei Erklärungsversuche dafür gibt, wieso größere Gruppen einen signifikant höheren Anteil an Defektionen aufweisen. Die Theorie der „schlechten Äpfel“ besagt, dass die Erfahrung mit einem Defektor die Wahrscheinlichkeit erhöht, selbst zum Defektor zu werden, da man sieht, dass mit gewissen Individuen schlichtweg nicht kooperiert werden kann. Je größer die Gruppe ist, umso leichter kann ein Mitglied der Gruppe der „schlechte Apfel“ sein, der den Stein ins Rollen bringt. Außerdem reicht hier eventuell bereits das Wissen der Spielerinnen und Spieler, dass in größeren Gruppen wahrscheinlicher ein „schlechter Apfel“ zu finden ist als in kleineren, tendenziell eher zu defektieren. Ein weiterer Ansatz erklärt es darüber, dass mit zunehmender Gruppengröße der Einfluss einzelner Akteure weniger bedeutsam ist, da

Bestrafung im herkömmlichen n-Personen-Gefangenendilemma immer nur für die gesamte Gruppe passieren kann. Der dritte Erklärungsversuch läuft darauf hinaus, dass es leichter fällt, sich in größeren Gruppen zu „verstecken“, was zu vermehrtem egoistischen Handeln führt.
Hier wird deutlich, dass sich die Erkenntnisse erwartungsgemäß auf zufällig zusammengestellte Testgruppen beziehen, bei denen im Normalfall davon auszugehen ist, dass vor und nach der Testung kein Kontakt zwischen den Gruppenmitgliedern herrscht. Das ändert nichts an der Logik innerhalb des erstgenannten Ansatzes, außer dass die Schülerinnen und Schüler eine bessere Vorstellung davon haben, bei welchen ihrer Gruppenmitglieder es sich um „schlechte Äpfel“ handeln könnte. Die relativ große Gruppengröße von fünf sorgt jedoch auch in dieser Situation dafür, dass die Wahrscheinlichkeit für deren Anwesenheit in der Gruppe höher ist als beispielsweise in Dreiergruppen.
Der zweitgenannte Ansatz ist unter der Berücksichtigung des Regelwerkes sehr schwierig zu bearbeiten. Durch die Auswahl zwischen drei Strategien – Kooperation, Defektion und Kompromiss/alternative Defektion – ist es durchaus möglich, bestimmte Spielerinnen oder Spieler zu bestrafen, allerdings mit starker Einschränkung, da nicht jedes Ressort eine spezifische Option der Bestrafung für jedes andere Ressort haben kann. Der individuelle Einfluss ist dadurch ähnlich niedrig wie der ohne der dritten Strategie wäre, allerdings ist die Gefahr eines Gegenschlages höher, da diese zumindest bis zu einem gewissen Grad unter Absprache der Gruppe gezielt vorgenommen werden können.
Die Argumentation des letzten Ansatzes ist für eine Gruppe in einer Schulklasse nur bedingt zu halten, da der Umstand, dass sich innerhalb der Gruppe alle kennen nie dazu führen kann, dass sich ein einzelnes Gruppenmitglied im Schutz der Menge sicher fühlt. Hier verschiebt sich durch die Vertrautheit miteinander vermutlich die Grenze, was eine „große“ Gruppe konstituieren würde.

Wiederum lassen sich die letzten Punkte zu einer prägnanten Frage zusammenfassen: „Wie wahrscheinlich ist es, dass es mehr als eine Gruppe geben wird, in der alle immer kooperieren?“ Wiederum wäre ein derartiges Szenario nur bedingt hilfreich, um einen spannenden Einstieg in das Gebiet der Spieltheorie zu gewähren, und wiederum lässt sich ohne quantitative Analyse nur wenig über die Wahrscheinlichkeiten sagen, wobei davon auszugehen ist, dass durchgehende Kooperation über die ersten beiden Runden hinweg durchaus ein plausibles Szenario darstellt, da das Gruppengefüge einer Klasse den Abmachungen mehr Bindung zuweist, als dies das Regelwerk vorsieht. Trotzdem ist zu erwarten, dass spätestens in der dritten Runde, wenn keine Bestrafungen für Defektionen mehr möglich sind, erste egoistische Entscheidungen getroffen werden.

Insgesamt ist die wichtigste Frage, aus welchen Situationen die Schülerinnen und Schüler etwas lernen können. Die einzigen Fälle, in denen sich kaum ein Gewinn oder Ansatzpunkt finden lassen wird sind jene, in denen fast ausschließlich defektiert wird, und zwar über alle Gruppen hinweg. Lässt sich zumindest eine Gruppe mit Ansätzen von Kooperation finden, so kann diese als leuchtendes Beispiel betrachtet werden, und die Extrapolation kann vorgenommen werden, was in einer Gruppe passiert wäre, die nur kooperiert hätte.
Selbst bei ausschließlicher Kooperation, ließe sich argumentieren, dass eine einzelne Defektion in Runde 3 den Sieg hätte garantieren können, was den Gewinn für Einzelne – je nachdem welche Abmachungen zur Aufteilung der Gewinne getroffen wurden – vermutlich erhöhen hätte können.

Die logistischen Rahmenbedingungen im Klassenraum müssen selbstverständlich miteinbezogen werden. Das heißt insbesondere, dass es Regelvariationen für den Fall geben muss, dass die KlassenschülerInnenanzahl kein Vielfaches von Fünf ist.
Die naheliegende Lösung ist, dass ein Ressort unbesetzt bleibt und prädeterminierte Entscheidungen trifft. Konkret heißt dies, dass das Kanzleramt nicht von der Gruppe gesteuert wird, sondern automatisch die Entscheidung K1 treffen könnte, das heißt, dass in jeder Runde diejenige der vier Entscheidungen negiert wird, welche den niedrigsten Popularitätswert besitzt. Der Vorteil von K1 ist, dass sich die Entscheidung selbst auf alle Ressorts gleich (–5) auswirkt, außerdem bringt es die taktische Komponente ins Spiel, dass bei jeder getroffenen Entscheidung auch zu berücksichtigen ist, ob zu

erwarten ist, dass sie überhaupt zum Tragen kommt. Ein entscheidender Nachteil dabei ist, dass dies die Möglichkeiten zur Kooperation stark einschränkt, und eine Vierergruppe in den meisten Fällen einen klaren Nachteil gegenüber Fünfergruppen hat, wenn es um die Belohnung für die stärkste Gruppe geht. Im entgegengesetzten Fall, würde immer automatisch K3 gewählt werden, hätte die Viergruppe hingegen wieder einen massiven Vorteil. Weitere Optionen wären entweder eine fixierte Abfolge (K3 in Runde 1, K1 in Runde 2, K2 in Runde 3) oder eine zufällige Auswahl via Würfelwurf. Keine dieser Lösungen ist optimal, aber die fixierte Abfolge sorgt für optimale Fairness, nicht nur gegenüber vollständigen Gruppen, sondern auch in Bezug der Vierergruppen aufeinander, im Gegensatz zu der Herangehensweise, bei der die Entscheidungen unabhängig voneinander gewürfelt würden. Weiters kann so ein Szenario geschaffen werden, in dem in Runde 1 Kooperation passiert (K3), um etwaige durchgehende Kooperation weiter zu unterstützen und den geregelten Ablauf nicht bereits zu Beginn durch K1 zu stören, und bei dem in Runde 3 die besonders starken Effekte der freizuschaltenden Entscheidungen abgeschwächt werden. Dass die simulierte Rolle definitiv die des Kanzleramtes ist, steht außer Frage, da nur hier alle Entscheidungen symmetrisch sind, mit der Ausnahme von K1, dessen variierende Auswirkungen auf bestimmte Ressorts jedoch immer noch geringer sind als die aller anderen Rollen.
Bei 21 (oder 16, oder 26) Schülerinnen oder Schülern in der Klasse ist die naheliegende Lösung, dass sich zwei Personen eine Rolle teilen. Das ist zwar dahingehend suboptimal, dass die Identifikation mit der Rolle, welche ein wesentlicher Aspekt bei der Akzeptanz eines Szenarios ist, nicht mehr so stark ist, dafür ergeben sich lauter gleich große und vollständige Gruppen, anstelle von bloß einer einzigen Fünfergruppe.

Sollte der zeitliche Rahmen gesprengt werden, ist ein Abbruch nach zwei Runden ebenfalls problemlos möglich, auch wenn es hier wiederum suboptimal ist, und zumindest vor Start von Runde 2 angekündigt werden sollte, dass es sich um die letzte Runde handelt, um Defektionen, die nicht bestraft werden können, zu ermöglichen. Im Normalfall ist jedoch davon auszugehen, dass ausreichend Zeit für volle drei Runden vorhanden ist – zu veranschlagen sind 10 Minuten zur Regelerklärung und Gruppenbildung, 5 Minuten Absprache vor der Entscheidungsfindung pro Runde und 5

Minuten zur Auswertung und Rückgabe der Ergebnisse pro Runde. Selbst in diesem großzügigen Zeitrahmen blieben noch 10 Minuten als Spielraum übrig. Der Vorteil einer vierten Runde hält sich jedoch in Grenzen, unter anderem dadurch, dass die jeweils vierten und fünften Entscheidungen darauf ausgelegt sind, nur in der letzten Runde angewendet werden zu dürfen. Dies würde sich selbstverständlich leicht über eine zusätzliche Regel festlegen lassen, allerdings ist bereits ein Verlauf über drei Runden in sich abgeschlossen und die Erweiterung um eine Runde bringt kein zusätzliches Element. Es gibt eine erste Runde, um zu sehen, wie sich die Gruppenmitglieder verhalten, eine zweite Runde zur Bestrafung und eine letzte Runde zur weiteren Bestrafung und für mögliche besonderen Aktionen. Eine potentielle vierte Runde würde nur zur Folge haben, dass die Schwellwerte angepasst werden müssten, um die freizuschaltenden Entscheidungsmöglichkeiten nicht zu wahrscheinlich zu machen, was wiederum dazu führen würde, dass eine Streichung der vierten Runde durch Zeitmangel es nahezu unmöglich macht, sie überhaupt frei zu schalten. Zusammengefasst lässt sich sagen, dass drei Runden bereits alles beinhalten, was vorkommen sollte, und zeitlich aller Voraussicht nach ohne größeren Druck in einer einzelnen Unterrichtsstunde Platz finden können.

6 Weitere Unterrichtsplanung

Die Durchführung des Spieles ist der erste Teil einer mehrstündigen Unterrichtssequenz zum Thema Spieltheorie, und soll einen Praxisbezug liefern, um den Einstieg in die theoretischen Feinheiten für die Schülerinnen und Schüler zu erleichtern.

6.1 Nachbetrachtung des Spieles

In einem ersten Schritt soll die Klasse die Frage beantworten, was es heißt, das Spiel zu gewinnen, und welche Gruppe beziehungsweise welches Individuum am besten abgeschnitten hat. Hier kann einerseits darauf eingegangen werden, was es heißt „zu gewinnen" – hat gewonnen, wer am meisten Punkte geholt hat, oder wer die größte Auszahlung erhalten hat? Welche Strategien haben diejenigen verfolgt, die dies erreicht haben, und warum könnte das besser funktioniert haben, als andere Strategien?
Nachdem diese Punkte ausreichend besprochen wurden, im Zweifelsfall auch explizit von der Lehrperson eingebracht werden, kann man die Frage nach einer „Lösung" in den Raum stellen. Was hieße es, das Spiel mathematisch zu lösen – auch diese Frage soll im Plenum besprochen werden. Entscheidend ist hier, dass erkannt wird, wie sehr man von den Entscheidungen der Gegenspielerinnen und Gegenspieler abhängig ist, und dass nur eine Gruppe als Ganzes einen optimalen Weg beschreiten könnte, was jedoch wiederum den Einzelinteressen widerstrebt. Um die Komplexität vor Augen zu führen, sollten die 243 Ausgänge, die alleine in der ersten Runde möglich sind (welche im Zuge dieser Arbeit bereits in einer Tabelle ausgiebig analysiert wurden) entweder per Beamer angezeigt werden, oder zumindest auf der Tafel angedeutet werden. Davon ausgehend wird auf den Entscheidungsbaum mit seinen 243 Verzweigungen hingewiesen, die für alle 3 Runden zu über 14 Millionen (ca. 3^{15}) Verzweigungen werden. Diese Darstellungsform wird als Extensivform bezeichnet, und zur Auflösung

der Komplexität wird die Normalform eingeführt. Hierbei wird sofort deutlich, welche Vor- und Nachteile die beiden Formen mit sich bringen. Die Normalform bringt Übersichtlichkeit und die Möglichkeit einer exakten Bestimmung, allerdings lässt sich nicht der gesamte Bereich auf einmal darstellen, sondern bloß die Interaktion von jeweils 2 Ressorts. Der Aufbau der Bimatrix wird beschrieben, und eine leere Bimatrix wird an die Tafel gezeichnet. Aufgabe der Schülerinnen und Schüler ist nun, anhand der Spielmaterialien, die sie erneut kurzfristig bekommen, zu bestimmen, welche Eintragungen die einzelnen Zellen haben müssen. Dazu werden die Strategiemengen der Ressorts Bildung und Wirtschaft herangezogen. Dies ergibt folgende Bimatrix:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Bildung</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>B2</td><td>B3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Wirtschaft</td><td>W1</td><td>5
5</td><td>20
–10</td><td>25
–20</td></tr>
<tr><td>W2</td><td>–20
15</td><td>–5
0</td><td>0
–10</td></tr>
<tr><td>W3</td><td>–20
25</td><td>–5
10</td><td>0
0</td></tr>
</table>

Nun sollte noch einmal betont werden, was die Eintragungen exakt bedeuten, damit der gesamten Klasse klar ist, wie die Normalform funktioniert.

6.2 Klassische Konzepte der Spieltheorie

6.2.1 Das Gefangenendilemma

Betrachtet man die oben beschriebene Bimatrix, so ist sofort klar, dass die beiden Strategien B2 und W2 jeweils Kompromisse sind und stets zwischen B1 und B3 beziehungsweise W1 und W3 landen, was die Auszahlungen betrifft. Mit dieser Argumentation lässt sich also die mittlere Zeile und die mittlere Spalte streichen, um eine noch übersichtlichere Tabelle zu erhalten, in der nur die Strategien B1, B3, W1 und W3 erlaubt sind.

		Bildung	
		B1	B3
Wirtschaft	W1	5 5	25 –20
	W3	–20 25	0 0

Dieses Problem entspricht dem Gefangenendilemma in allen Kriterien. Die Strategien B3 und W3 sind jeweils streng dominant, die Summe der Auszahlungen für (B1, W1) ist maximal, die bei (W3, B3) ist minimal. Die Auszahlungen sind nicht so extrem wie bei bewusst zur Veranschaulichung erstellten analogen Problemen, dies liegt darin begründet, dass sich in einem n-Personen-Gefangenendilemma die negativen Auswirkungen der Defektion auf mehrere Gegnerinnen und Gegner verteilen, wodurch die Auswirkungen einer Strategie auf die Spielerin beziehungsweise den Spieler, die oder der sie anwendet im Vergleich zu einem 2-Personen-Spiel stärker ist, aber immer noch geringer als die Auswirkung auf die Gegenspielerinnen und Gegenspieler. An der Erkenntnis, dass es sich hierbei um ein Dilemma handelt, ändert dies nichts, Defektionen sind dadurch immer noch verlockend.

Es sollte hierbei ausreichend Zeit dafür aufgebracht werden, zu vermitteln, dass es sich hierbei um ein Dilemma handelt. Die Schülerinnen und Schüler werden mit genau dieser Situation in der vorangegangenen Stunde bereits gerungen haben, der Frage, ob sie mit der Gruppe kooperieren sollen oder nicht, und dass sie die Defektion der Anderen gefürchtet haben, dadurch womöglich präventiv selbst defektiert haben. Hier soll schon früh der historische Kontext hergestellt werden, um Defektion nicht a priori zu verteufeln. Es soll deutlich gemacht werden, dass die egoistische Spielweise mathematisch gesehen eigentlich die richtige ist, und dass genau hier der entscheidende Punkt liegt, der die Aufgabenstellung zu einem Dilemma macht. Die Tafel sollte an dieser Stelle genutzt werden, um die Begriffe „Bildung“ und „Wirtschaft“ und die Strategien „B1, „B3“, „W1“, „W3“ durch andere Begriffe auszutauschen, um die Vielfalt der Problemstellung zu verdeutlichen. Das ursprüngliche Gefangenendilemma, wie in 2.6. beschrieben sollte ebenso eingefügt werden wie die entsprechenden Titel, um den kalten Krieg zu beschreiben, oder die völlig neutralen Bezeichnungen „Kooperation“ und „Defektion“, die üblicherweise verwendet werden, wenn man vom Gefangenendilemma spricht. Ebenso soll sich die Klasse selbst überlegen, ob ihnen noch weitere analoge Situationen einfallen.

6.2.2 Die Iteration des Gefangenendilemmas

Nachdem nun klar gemacht wurde, dass dieses Dilemma vielerorts vorkommt und keinen einfachen Ausweg kennt – ein Umstand, den die Klasse am eigenen Leib erfahren hat und dementsprechend gut nachvollziehen wird können – ist nun der beste Zeitpunkt gekommen, das Dilemma auch wieder aufzulösen. Aufgrund der Erfahrung, die die Schülerinnen und Schüler gemacht haben, ist davon auszugehen, dass sie selbstständig erkennen können, dass bei der iterierten Version des Spiels der Wert von Defektionen nicht ganz so hoch war, da es möglich war, dafür von der Gruppe bestraft zu werden. Wiederum mit Verweis auf den Unterschied zwischen der komplexen Gesamtsituation des Spiels und der mathematisch leichter zu beleuchtenden Normalform soll der Schritt weg vom gespielten Spiel hin zu Axelrods Turnier gemacht werden. Die Rahmenbedingungen dieses Turniers werden beschrieben, also dass jede vorgefertigte Strategie einmal gegen jede andere Strategie antritt, und am Ende nicht zählt, wie viele Duelle gewonnen wurden, sondern wie hoch die Gesamtpunktzahl ist. Um nicht den Anschluss an das Erlebte zu verlieren, ist es wichtig, die Verbindung zum Spiel zu ziehen, die einzigen Unterschiede zu betonen, die darin liegen, dass es sich um 2-Personen-Spiele statt um 5-Personen-Spiele handelte, dass es wesentlich mehr

Runden gab und dass es nur 2 Auswahlmöglichkeiten in jeder Runde gab.

Nun sollen die Schülerinnen und Schüler mit ihren Sitznachbarinnen und Sitznachbarn überlegen, mit welcher Taktik sie ein derartiges Turnier angehen würden. Nach 5 Minuten Besprechung sollen all diese Algorithmen mit dem Rest der Klasse geteilt werden. Hierbei ist nicht wichtig, ob es sich in der Tat um Algorithmen im eigentlichen Sinn handelt, oder ob sie eher vage beschrieben werden. Die Präzision ist eher nachrangig, es geht primär darum, wie rachsüchtig oder nachsichtig die Herangehensweisen sind, und wie sehr sie zur Kooperation bereit sind. Wenn alle Taktiken gesammelt wurden, kann offenbart werden, dass die erfolgreichste Strategie „tit-for-tat“ ist, und diese in ihren groben Zügen vermittelt werden. Es ist davon auszugehen, dass wenigstens eine Zweiergruppe einen Algorithmus entwickelt hat, der zumindest sehr nahe an den Prinzipien von „tit-for-tat“ liegt, dies sollte selbstverständlich aufgegriffen werden. Die Erklärung, warum diese Taktik derart erfolgreich ist, darf auch nicht vorenthalten werden, wobei es auch hier weniger um die exakten Details geht, als um die Kombination der Aspekte, wie sie Axelrod zusammengefasst hat: „nice“, „retaliating“, „forgiving“ und „non-envious“ (Axelrod 1980), also „nett“, „zurückschlagend“, „vergebend“ und „nicht-neidisch“.

Mit dieser positiven Erkenntnis, dass sich Kooperation auszahlt, solange man sich nicht langfristig ausnutzen lässt, kann das Kapitel zum Gefangenendilemma abgehakt werden, aber nicht bevor darauf verwiesen wird, dass der langfristige Nutzen von Kooperation durchaus auch in der Evolution eine Rolle spielt, da auch hier sozusagen viele Runden gespielt werden, und erfolgreiche Strategien (das heißt Individuen, Arten oder Generationen von Individuen) belohnt oder bestraft werden. Kooperation existiert, weil sie sich langfristig gesehen auszahlt.

6.2.3 Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien

Um das Konzept von Nash-Gleichgewichten zu verdeutlichen, soll die Klasse selbstständig, wiederum unter Zuhilfenahme der Spielunterlagen, die Normalform für die Strategien K1, K3, M1 und M3 erstellen (unter der Bedingung, dass M3 die Strategie mit der niedrigsten Popularität wäre, und somit im Falle von K1 negiert wird) und anweisen, wie diese Bimatrix an der Tafel darzustellen ist. Folgende Bimatrix ergibt sich für diese Strategien:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">KanzlerIn</td></tr>
<tr><td>K1</td><td>K3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Militär</td><td>M1</td><td>10
0</td><td>13,75
6,25</td></tr>
<tr><td>M3</td><td>–5
–5</td><td>–11,25
–12,5</td></tr>
</table>

Der Begriff des Nash-Gleichgewichts kann nun eingeführt werden mit der Definition, dass eine Strategiekonfiguration ein Nash-Gleichgewicht darstellt, wenn für beide Spielerinnen oder Spieler gilt, dass eine Abweichung davon zu einer Verschlechterung der Auszahlung führt. Ein Nash-Gleichgewicht ist dadurch eine gute Lösung für ein Problem, weil es eine Konfiguration beschreibt, von der niemand abweichen möchte, wodurch es stabil wird. Dass sich ein Nash-Gleichgewicht nicht immer auffindbar ist, wird durch ein weiteres Beispiel deutlich, das aus dem Spiel gegriffen werden kann. Betrachtet man die Strategien K1, K2, F1, F2 unter der Bedingung, dass F1 durch K1 negiert werden würde, F2 jedoch nicht, so ergibt sich folgende Bimatrix:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">KanzlerIn</td></tr>
<tr><td>K1</td><td>K2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Finanzen</td><td>F1</td><td>–5
–5</td><td>–5,5
7,5</td></tr>
<tr><td>F2</td><td>–11
5</td><td>–3
5</td></tr>
</table>

Hier gibt es offensichtlich keine Stabilität, da es in jeder Situation jemanden gibt, für den die Abweichung eine höhere Auszahlung bieten würde. Im Fall von (F1, K1) ist F2 besser, doch bei (F2, K1) ist umgehend K2 besser ausbezahlt. (F2, K2) ist ebenso wenig stabil, da F1 besser wäre, doch bei (F1, K2) wäre K mit der Strategie K1 besser bedient, womit man wieder bei der ersten betrachteten instabilen Strategiekonfiguration wäre. Dementsprechend gibt es hier kein Nash-Gleichgewicht, zumindest nicht in reinen Strategien.

6.2.4 Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien

Um das Konzept gemischter Strategien einzuführen, ist es zunächst hilfreich, auf die Wiederholung von Spielen einzugehen. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die eine oder andere Strategie in einer einmaligen Situation zu wählen ist zwar ebenfalls zulässig und vernünftig, aber für die Schülerinnen und Schüler schwieriger zu verstehen, insbesondere wenn sie bereits Erfahrung mit wiederholten Spielen gemacht haben, sowohl in der theoretischen Betrachtung als auch in der Praxis. Hier lohnt es sich auch, ein einfacheres Einstiegsbeispiel zu wählen, nämlich „Schere-Stein-Papier“. Bei diesem Spiel, welches auch üblicherweise wiederholt ausgeführt wird, ist schnell ersichtlich, dass eine reine Strategie nicht langfristig erfolgreich sein kann. Es handelt sich auch überhaupt nicht um Zeitverschwendung, wenn man die Klasse die Auszahlungsmatrix, wie sie in Kapitel 2.3. zu finden ist, erstellen lässt. Für ein derart bekanntes Spiel ist es naheliegend, jede der drei Strategien zu jeweils $\frac{1}{3}$ zu wählen, da sonst die Gegenspielerin beziehungsweise der Gegenspieler eine Gegenstrategie wählen könnte, um diese alternative Gewichtung zu schlagen.

Betrachtet wird nun das weiter oben bereits erwähnte Beispiel mit den Strategiemengen {K1, K2} und {F1, F2}. Die erste Frage an die Klasse sollte sein, ob hier wieder gilt, dass jede Strategie mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt werden sollte, beziehungsweise warum oder warum nicht. Sollte es in der Klasse Stimmen für die Herangehensweise geben, lässt sich das ideal zum Lernen nutzen.

Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass F die Strategie F1 wählt und q die Wahrscheinlichkeit, dass K die Strategie K1 wählt. Wenn $p = q = 0{,}5$, so ergibt sich folgendes Auszahlungsbild.

$$H_F = \frac{1}{4} \cdot (5 + 5 + 7{,}5 - 5) = 3{,}123$$

$$H_K = \frac{1}{4} \cdot (-5 - 5{,}5 - 11 - 3) = -6{,}125$$

Hier ist offensichtlich, dass es sowohl für F als auch für K eine reine Strategie gäbe, die eine bessere durchschnittliche Auszahlung ergibt, nämlich F2 (mit Auszahlung 5) beziehungsweise K2 (mit Auszahlung –4,25 unter Berücksichtigung, dass F1 und F2 zu je 50% gewählt werden).

Um das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien zu finden, sollte nun noch einmal die Definition wiederholt werden, dass eine Strategiekonfiguration dann ein Nash-Gleichgewicht darstellt, wenn es für niemanden eine Verbesserung gibt, wenn von dieser Strategie einseitig abgewichen wird. Die Fragestellung ist demnach nicht, wie die eigene Strategie gewählt wird, um eine möglichst hohe Auszahlung zu erhalten, sondern bei welcher gegnerischen Strategie sich Abweichungen nicht auszahlen. Aus der Perspektive von F ist die Fragestellung also: „Bei welchem q ist die erwartete Auszahlung für F1 und für F2 gleich?“, während bei K analog gefragt wird, für welches p die erwartete Auszahlung für K1 und K2 gleich ist. Dieser Gedankenschritt ist vermutlich der schwierigste in der gesamten Unterrichtssequenz und muss entsprechend langsam erklärt werden. Wenn nämlich eine Strategiekonfiguration gewählt wird, in der es dieses Gleichgewicht nicht gibt, dann wird es immer jemanden geben, sodass eine Abweichung sinnvoll ist, was wieder zu dem Problem bei reinen Strategien führt, bei dem die Reaktion auf bestimmte Strategien immer neue Reaktionen zur Folge hätte. Das ist der Grund, wieso das Nash-Gleichgewicht eine Lösung darstellt, weil es eine Konfiguration beschreibt, mit der zwar nicht beide zufrieden sind, aber von der sie zufrieden genug sind, dass sie nicht abweichen sollten.

Mathematisch lässt sich das derart auflösen:

F1: $H_F(q)=(-5)\cdot q+7{,}5\cdot(1-q)=7{,}5-12{,}5\cdot q$

F2: $H_F(q)=5\cdot q+5\cdot(1-q)=5$

F1 = F2 genau dann, wenn $12{,}5\cdot q=2{,}5\Rightarrow q=0{,}2$

Für K gilt:

K1: $H_K(p)=(-5)\cdot p+(-11)\cdot(1-p)=6\cdot p-11$

K2: $(-5{,}5)\cdot p+(-3)\cdot(1-p)=(-2{,}5)\cdot p-3$

K1 = K2 genau dann, wenn $6\cdot p-11=(-2{,}5)\cdot p-3\Rightarrow 8=8{,}5\cdot p\Rightarrow p=\frac{16}{17}$

Dieses Ergebnis ist auf den ersten Blick für viele Schülerinnen und Schüler überraschend, da der Umstand, dass F2 für F besser gewesen wäre, als die Strategie mit *p* = 0,5 (jeweils unter der Bedingung dass *q* = 0,5 ist) eher dazu verleitet hätte, das Nash-Gleichgewicht bei *p* < 0,5 zu suchen. Die Herangehensweise ist jedoch umgekehrt. Der Wert *p* ist so hoch, weil die Auszahlung bei (F2, K1) für K derart schlecht ist, und *q* ist so niedrig, weil die Auszahlung für F bei (F1, K1) so schlecht ist. Konkret betragen die Auszahlungen für so gewählte *p* und *q*:

$$H_F=\frac{16}{17}\cdot\frac{1}{5}\cdot(-5)+\frac{16}{17}\cdot\frac{4}{5}\cdot 7{,}5+\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{5}\cdot 5+\frac{1}{17}\cdot\frac{4}{5}\cdot 5=5$$

$$H_K=\frac{16}{17}\cdot\frac{1}{5}\cdot(-5)+\frac{16}{17}\cdot\frac{4}{5}\cdot(-5{,}5)+\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{5}\cdot(-11)+\frac{1}{17}\cdot\frac{4}{5}\cdot(-3)=-\frac{91}{17}\approx-5{,}35$$

Die Stabilität wird erst dann offensichtlich, wenn die Schülerinnen und Schüler die Auszahlungen für alternative Strategien berechnen. Die Hälfte der Klasse ist nun angewiesen, die erwartete Auszahlung für F zu berechnen, wenn bei gleichem q ein anderes *p* als $\frac{16}{17}$ gewählt wird, während die andere Hälfte die erwartete Auszahlung für K berechnet, wenn bei gleichem *p* ein anderes *q* als 0,2 gewählt wird. Diese alternativen Strategien dürfen sich die Schülerinnen und Schüler selbst aussuchen, wobei die reinen Strategien, also *p* = 0 oder *q* = 0 beziehungsweise *p* = 1 oder *q* = 1 nicht gewählt werden dürfen. Diese kurze Rechenübung wird zu dem Ergebnis führen, dass sich die Auszahlung nie ändern wird, da genau das das Kriterium für das Nash-Gleichgewicht war.

6.3 Spieltheorie außerhalb des gespielten Spieles

Zum Abschluss der Unterrichtssequenz sollte noch einmal darauf eingegangen werden, dass spieltheoretische Problemstellungen nicht etwas sind, was nur in fingierten Szenarien relevant ist. Der erste Ansatz hierfür wäre der Auftrag an die Klasse, sich selbst ein Beispiel zu überlegen, das mit Spieltheorie angegangen werden könnte. Dabei ist natürlich schwierig vorherzusehen, ob Vorschläge kommen, und wie gut sie sind. Hat die Klasse selbst keine Ideen, wird das „Hausübungs-Spiel" vorgeschlagen. Die Akteure in diesem Spiel sind eine Schülerin beziehungsweise ein Schüler (S) und eine Lehrerin oder ein Lehrer (L). Für S gibt es die Strategiemenge (Hausübung schreiben, Hausübung nicht schreiben), für L die Strategiemenge (Hausübung kontrollieren, Hausübung nicht kontrollieren). Die Aufgabe für die Klasse ist nun, selbstständig eine Bimatrix zu erstellen, um das Problem in Normalform darzustellen. Dabei müssen sie sich auch selbst entscheiden, welche Auszahlungen für sie sinnvoll erscheinen. Ist dies erledigt, werden ein paar Vorschläge gesammelt und einige davon ausgewählt. Dass keines dieser Modelle nur richtig oder nur falsch wäre, sollte von Anfang an verdeutlicht werden, da Auszahlungen zumeist subjektiv sind. Die Modellbildung, beziehungsweise die Probleme bei der Modellbildung können hier angesprochen werden. Für die meisten wird es sehr einfach sein, Auszahlungen für S festzulegen, da sie hier ihr eigenes, subjektives Empfinden für diese Situation haben, für L jedoch ist dies nicht mehr so leicht, und die Schülerinnen und Schüler müssen Annahmen treffen, wie es bestimmten L in diesen Situationen geht. Wichtig ist auch, klarzustellen, dass es sich um beliebige L handelt und nicht um die konkrete Lehrperson, die den Unterricht durchführt. Dies soll sicherstellen, dass einerseits mehr Variabilität bei den Modellen ins Spiel kommt, andererseits lässt es die Schülerinnen und Schüler ehrlicher sein, da sie keine wertenden Aussagen über eine sich in der Klasse befindliche Lehrkraft treffen müssen. Da die Auszahlungen von L für das Nash-Gleichgewicht eine wichtige Bedeutung für die Strategiewahl von S haben, ist hierbei eine gute Annäherung wichtig. Im Allgemeinen lassen sich drei verschiedene Versionen unterscheiden (Hauer-Typpelt und Ableitinger 2007, S. 5ff). Die drei in weiterer Folge verwendeten Bimatrizen sind alle aus dem Artikel „Spieltheorie im Schulunterricht – kann es das spielen?“ von Hauer-Typpelt und Ableitinger (Internetquelle 5).

In Version I macht S gerne die Hausübung und mag es besonders, wenn sie auch kontrolliert wird. L kontrolliert gerne, insbesondere, wenn die Hausübung vorhanden ist. Diese Auszahlungen sind sehr optimistisch gehalten, und es ist nicht unbedingt davon auszugehen, dass viele Schülerinnen und Schüler mit ihrem Modell in diese erste Version fallen.

	L kontrolliert	L kontrolliert nicht
S macht HÜ	**2** **2**	1 1
S macht HÜ nicht	1 –2	0 0

In dieser Version gibt es ein simples Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, und es lässt sich ohne größere Rechnung und Überlegung dahingehend lösen.

In Version II hingegen ist der Optimalfall für S, dass die Hausübung nicht gemacht wird, aber auch nicht kontrolliert wird. Diese Situation klingt bereits plausibler, setzt aber immer noch voraus, dass L eine ambitionierte Lehrperson ist, die lieber mehr Arbeit und eifrige S hat als das Gegenteil.

	L kontrolliert	L kontrolliert nicht
S macht HÜ	**2** **1**	1 –1
S macht HÜ nicht	**1** –1	0 **4**

Auch hier gibt es ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien bei der Konfiguration (L kontrolliert, S macht HÜ), allerdings mit einer Besonderheit. Für den Fall, dass L nicht kontrolliert, wäre zwar die Strategie für S, die Hausübung nicht zu machen besser, aber da es für L auf jeden Fall besser ist, zu kontrollieren, ist der Fall, in dem nicht kontrolliert wird, hinfällig, da er von der alternativen Strategie streng dominiert wird. Das Nash-Gleichgewicht wird immer noch auf dieselbe Art gefunden, indem eine Zelle gesucht wird, von der ausgehend keine Abweichungen zu einer höheren Auszahlung zu finden sind, allerdings ist die Auszahlung für S im Nash-Gleichgewicht im Gegensatz zu Version I nicht mehr die maximal mögliche Auszahlung.

Version III stellt den interessantesten Fall dar, und sollte demnach definitiv genauer behandelt werden. Sollte wider erwarten kein einziges Modell in der Klasse so geformt sein, dass für L die fehlende Kontrolle bei gemachter Hausübung besser ausbezahlt wird, als die durchgeführte Kontrolle, kann mit der einfachen Frage, ob es für L nicht besser wäre, wenn gemachte Hausübungen nicht überprüft werden, da dies weniger Arbeit erfordert.

	L kontrolliert	L kontrolliert nicht
S macht HÜ	1 **1**	**2** –1
S macht HÜ nicht	**4** –1	0 **4**

Diese Version ist dahingehend spannender, da wirklich gegeneinander gespielt wird, und wieder im Vordergrund steht, die Strategie zu wählen, bei der man selbst gut, die Gegnerin oder der Gegner aber dementsprechend schlecht aussteigt. Es gibt keine reinen Strategien, mit denen beide glücklich sind, und somit muss erneut mit gemischten Strategien gerechnet werden. Welche Auszahlungen dafür gewählt werden, wird innerhalb der Klasse variieren. Die Schülerinnen und Schüler, die in ihren Modellen derartige Auszahlungen haben, dass es nur ein Nash-Gleichgewicht in einer echt gemischten Strategie gibt, sollen sich dieses Nash-Gleichgewicht für ihren speziellen Fall berechnen, alle anderen sollen das im Plenum besprochene Beispiel, das auf der Tafel zu finden ist, noch einmal nach ihren Vorstellungen abändern, und hierfür das Nash-Gleichgewicht berechnen. Auf diesem Weg wird noch einmal die Berechnung bei gemischten Strategien wiederholt und gefestigt.

Zum Abschluss der Unterrichtssequenz sollen die Schülerinnen und Schüler in Fünfer-Gruppen ihre Ergebnisse miteinander vergleichen. Davon, dass sich diese Ergebnisse unterscheiden werden, ist auszugehen, im Fokus steht hierbei jedoch die Frage, warum sie sich unterscheiden, und welche Auswirkungen die von den Schülerinnen und Schülern persönlich gewählten Auszahlungen auf das Nash-Gleichgewicht haben.

6.4 Stundenbilder

Es folgen die Stundenbilder für alle Einheiten in der Unterrichtssequenz. In der Spalte „Interaktion“ steht die Abkürzung „L“ für „Lehrerin“ oder „Lehrer“, „S“ für einzelne Schülerinnen oder Schüler und „Ss“ für zwei oder mehr Schülerinnen oder Schüler.

Stundenbild: Durchführung des Spiels			
Zeit	Inhalt	Interaktion	Material
10 min	**Begrüßung, Erklärung** Das Spiel wird vorgestellt und erklärt. Die Regeln sowie das Belohnungssystem wird erörtert.	L → Ss	Spielmaterial (zur Veranschau-lichung)
2 min	**Gruppeneinteilung, Platztausch, Austeilen der Materialien**	L → Ss	Spielmaterial
4 min	**Gruppeninterne Besprechung** Die Schülerinnen und Schüler besprechen die Aufteilung der Belohnungen und stellen ihre eigenen Rollen dem Rest der Gruppe vor, eventuelle Rückfragemöglichkeit bei Unklarheiten.	Ss ↔ Ss, (L → Ss)	Spielmaterial, Zettel und Stift (Buchführung für Belohnungen)
5 min	**Besprechung, Runde 1** Die Schülerinnen und Schüler bereden, welche Entscheidungen getroffen werden. Hier wird erinnert, dass diese Abmachungen nicht bindend sind.	Ss ↔ Ss	Spielmaterial
3 min	**Auswertung, Runde 1** Die gewählten Entscheidungskärtchen werden abgesammelt, die Entscheidungen in der Tabelle eingetragen, Ergebnisse aufgeschrieben und zusammen mit den Entscheidungskärtchen zurückgegeben.	L → Ss	Spielmaterial
1 min	**Nachbetrachtung, Runde 1** Das erhaltene Ergebnis wird verarbeitet, gewählte Entscheidungen überprüft.	S	Spielmaterial
5 min	**Besprechung, Runde 2**	Ss ↔ Ss	Spielmaterial
3 min	**Auswertung, Runde 2**	L → Ss	Spielmaterial
1 min	**Nachbetrachtung, Runde 2**	S	Spielmaterial
5 min	**Besprechung, Runde 3**	Ss ↔ Ss	Spielmaterial
3 min	**Auswertung, Runde 3**	L → Ss	Spielmaterial
1 min	**Nachbetrachtung, Runde 3**	S	Spielmaterial
7 min	**Aushändigung der Belohnungen, Gelegenheit zur Besprechung, beziehungsweise zeitlicher Spielraum**	L → Ss	Belohnungen

Stundenbild: Das Gefangenendilemma			
Zeit	Inhalt	Interaktion	Material
7 min	**Begrüßung, Nachbetrachtung: Wer hat gewonnen?** Das Spiel aus der Vorstunde wird besprochen, die Frage wird gestellt, wer eigentlich gewonnen hat.	L ↔ Ss	
5 min	**Nachbetrachtung: Gibt es eine Lösung?** Die Idee der Lösung wird in den Raum gestellt, unter Berücksichtigung der zuvor besprochenen Definition des Sieges.	L ↔ Ss	
5 min	**Die extensive Form** Der Entscheidungsbaum von Runde 1 wird vorgestellt, Besprechung der Sinnhaftigkeit des Entscheidungsbaumes für das gesamte Spiel.	L ↔ Ss, L → Ss	Beamer oder Tafel
8 min	**Die Normalform** Die Bimatrix als Darstellungsmöglichkeit wird vorgestellt und von der Klasse erstellt und ausgefüllt, Fehlendes wird ergänzt, Unklares wird erklärt.	S → L → Ss	Tafel, Spielmaterial
7 min	**Die Mathematik des Gefangenendilemmas** Die erhaltene Bimatrix wird vereinfacht, die Besonderheit des erhaltenen Spieles aus mathematischer Sicht wird hervorgehoben.	L → Ss	Tafel
8 min	**Die Geschichte des Gefangenendilemmas** Die historische Bedeutung des Spieles wird kurz ausgeführt, alternative Situationen, die denselben Gesetzen folgen, werden gemeinsam erarbeitet.	L → Ss, L ↔ Ss	
10 min	**Das Gefangenendilemma für mehr als 2 Personen** Die Situation wird zurück auf das gespielte Spiel gelegt, getroffene Entscheidungen werden unter den neu gewonnen Perspektiven betrachtet. Es wird auf die psychologische Problematik des Vertrauens, sowie auf weitere historische Beispiele für mehr als 2 Personen eingegangen.	L → Ss, L ↔ Ss	

Stundenbild: Die Iteration des Gefangendilemmas			
Zeit	Inhalt	Interaktion	Material
7 min	**Begrüßung, Wiederholung: Das Gefangenendilemma** Die Klasse wiederholt, was in der letzten Stunde über das Gefangenendilemma gelernt wurde, und was das mit dem gespielten Spiel zu tun hat.	S, S → Ss	
10 min	**Auflösung des Dilemmas** Die Frage, wie sich das Dilemma auflösen lässt, wird im Plenum bearbeitet. Das iterierte Gefangenendilemma wird vorgestellt, wie auch das von Axelrod durchgeführte Turnier.	S ↔ Ss/ L ↔ Ss, L → Ss	
8 min	**Das Turnier – Strategienwahl** Die Schülerinnen und Schüler erstellen Strategien, die sie im Turnier anwenden würden.	S ↔ S	
10 min	**Das Turnier – Die Strategien** Strategien werden vorgestellt und begründet (auf freiwilliger Basis). Alle Strategien werden auf der Tafel gesammelt.	S, S → Ss	Tafel
7 min	**Das Turnier – Analyse** Die Strategien werden auf ihre Effektivität überprüft, allgemeine Eigenheiten erfolgreicher Strategien werden gesammelt.	L ↔ Ss, S ↔ Ss	Tafel
8 min	**Das Turnier – Historischer Kontext, Bedeutung** Der Ausgang von Axelrods Turnier wird in kurzen Zügen erklärt, die Strategie „tit-for-tat“ vorgestellt. Die Kriterien für Erfolg werden spezifiziert, die Bedeutung, beispielsweise für die Evolution wird erläutert.	L → Ss	Tafel

Stundenbild: Nash-Gleichgewichte			
Zeit	Inhalt	Interaktion	Material
7 min	**Begrüßung, Das Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien** Der Lösungsansatz des Nash-Gleichgewichts wird vorgestellt, anhand eines aus dem Spiel gegriffenen Beispiels erörtert.	L → Ss, (S → Ss)	Tafel, (Spielmaterial)
4 min	**Gemischte Strategien** Was ist eine gemischte Strategie, wie wäre im Fall einer solchen Strategie vorzugehen? Einfaches Beispiel „Schere-Stein-Papier“.	L → Ss, S → Ss	
8 min	**Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien** Wie lässt sich der Begriff des Nash-Gleichgewichts ausdehnen, wenn reine Strategien nicht befriedigend sind? Wie wird gerechnet? Die Effekte einer Abweichung vom Nash-Gleichgewicht werden selbstständig berechnet.	Ss ↔ Ss, L → Ss, S	Tafel
3 min	**Das Hausübungsspiel – Vorstellung** Die Regeln im Hausübungsspiel werden erklärt, die Aufgabe wird gestellt, passende Auszahlungen zu finden.	L → Ss	
5 min	**Das Hausübungsspiel – Modellierung** Im zweiten Modellierungsschritt weisen die Schülerinnen und Schüler den möglichen Ausgängen Werte zu, die sie für angemessen halten.	S	Hefte
6 min	**Das Hausübungsspiel – Sammlung der Varianten** Auf freiwilliger Basis werden verschiedene Varianten gesammelt, ihre Bedeutung besprochen. Die drei möglichen Versionen sollten vorkommen und werden exemplarisch festgehalten. Dazu werden drei leere Bimatrizen schrittweise gefüllt, ist bereits eine Variante vorhanden, die dieselbe Version abdeckt, wird die neue Variante wieder von der Tafel gelöscht, bis die drei Matrizen mit drei verschiedenen Versionen gefüllt sind.	S → Ss, L → Ss	Tafel
7 min	**Das Hausübungsspiel – Gemischte Strategien** Die Schülerinnen und Schüler berechnen das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien einer Variante (ihrer eigenen, wenn gemischte Strategien nötig sind, oder die an der Tafel	S	Hefte

	stehende Variante von Version III).		
5 min	**Das Hausübungsspiel – Besprechung der Ergebnisse** In Fünfergruppen werden die Ergebnisse besprochen, und darüber diskutiert, wieso es Abweichungen gibt, und welche konkreten Effekte unterschiedliche Auszahlungen auf das Nash-Gleichgewicht haben.	S ↔ Ss	
5 min	**Das Hausübungsspiel – Klärungen** Die in den Gruppen gesammelten Erkenntnisse werden im Plenum besprochen, Ungenauigkeiten, Unklarheiten, Unrichtigkeiten werden ausgemerzt.	Ss ↔ Ss, L ↔ Ss	

7 Praxistest

7.1 Organisatorische Rahmenbedingungen

Der praktische Test des Spieles fand am 21. Dezember 2016 in einer siebten Klasse am Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium Berndorf statt. Diese Klasse wurde von ihrer Mathematiklehrerin als „mathematisch eher ungeschickt“ beschrieben, mit dem Hinweis, dass sie vermutlich mehr Hilfe benötigen, um das Spiel zu verstehen. In Vollbesetzung hätte die Klasse 14 Schülerinnen und Schüler gehabt, was drei Gruppen erlaubt hätte, von denen eine mit nur vier Spielerinnen oder Spielern besetzt wäre, wodurch auch dieser Aspekt hätte ausgetestet werden können, da allerdings zwei Leute fehlten, kam es zur schlechtest möglichen Anzahl von 12. Im Normalfall würde es in dieser Situation nahe liegen, drei Vierergruppen bilden zu lassen, doch aus Testzwecken fiel die Entscheidung darauf, zwei Fünfergruppen zu wählen, in denen es jeweils ein Paar gab, das sich eine Rolle teilte. Auf diesem Weg war zwar der Spielspaß womöglich etwas reduziert, da nicht alle ihre eigene Aufgabe hatten, allerdings war es ein großes Anliegen, das Entscheidungsverhalten in einer vollzähligen Gruppe zu analysieren.

Der zeitliche Ablauf deckte sich über weite Strecken mit der in 6.4. gelisteten Planung. Da vor der Stunde, in der der Test durchgeführt wurde die große Pause war, konnten hier bereits vor dem eigentlichen Beginn mit dem Aufbau begonnen werden. Ohne großen Zeitdruck dauerte es ungefähr vier Minuten, um den Laptop aufzubauen, die Materialien auszupacken, die Belohnungen (Süßigkeiten, nach Wahl mit und ohne Schokolade) auszulegen, und den Klassenraum vorzubereiten, das heißt die Tische und Sessel für die Arbeit in Gruppen zusammen zu rücken. Allerdings konnte die Stunde er mit einigen Minuten Verspätung beginnen, da noch nicht alle Schülerinnen und Schüler anwesend waren. Diese Zeit hätte demnach für den Aufbau verwendet werden können, ohne dass sich der weitere Plan verschieben würde.

Die Klasse wurde über das Setting des Spieles informiert und in Gruppen eingeteilt, dann erhielten sie ihre Spielmaterialien. Nachdem sich jede und jeder ihre Rollenbeschreibung durchgelesen hatte, wurde der weitere Ablauf erklärt und aufkommende Fragen geklärt. An dieser Stelle entwickelten sich die Gruppen völlig unterschiedlich, worauf in weiterer Folge noch eingegangen wird. Während eine Gruppe sehr schnell arbeitete, sodass sie 20 Minuten vor Ende der Stunde bereits ganz fertig war, ging es die andere Gruppe wesentlich gemächlicher an, und folgte – ohne jemals aufgefordert werden zu müssen, schneller zu sein – ziemlich präzise dem oben beschriebenen Zeitplan. Die späteren Runden wurden dann doch etwas schneller als geplant absolviert, sodass auch die langsamere Gruppe 12 Minuten vor dem Ende der Stunde bereits fertig war.

Der Unterschied in der Geschwindigkeit der Gruppen ist durchaus positiv zu sehen. Da die kleinen Kärtchen, auf denen die gefällten Entscheidungen vermerkt sind, abgesammelt werden müssen, um in der Tabelle eingetragen zu werden, sorgt das unterschiedliche Tempo dafür, dass es hierbei zu keinem größeren Stau kommt. Der Umstand, dass eine Gruppe besonders schnell fertig war erlaubte es auch, ein umfassendes Feedback einzuholen, noch bevor die andere Gruppe fertig werden konnte. Insgesamt entstand nie größerer Stress, und alles, was geplant war, ging sich bequem in der einen Schulstunde aus. Leider bestand nicht die Möglichkeit, zumindest einen Teil einer zweiten Stunde anzuhängen, um auch noch einen theoretischen Einblick in die Spieltheorie abzuliefern, und dafür waren die verbleibenden fünf Minuten doch zu kurz.

7.2 Die grüne Gruppe

Die grüne Gruppe war die bedeutend schnellere der beiden. Eine Schülerin übernahm sofort die Kontrolle und organisierte ihre Gruppenmitglieder. Sie schien sofort zu verstehen, worum es ging, und konnte das ihrer Gruppe auch gut vermitteln, sodass es

dort kaum Intervention bedurfte. Eine interessante Entscheidung war, dass sich auch die ganze Gruppe gleich zu Beginn dafür entschied, zu kooperieren, und das über die Möglichkeit der Koalitionen fixierte. Auf dem dafür vorgesehenen Zettel vermerkten sie, dass egal wer gewinnen würde, die Belohnung gerecht unter allen Gruppenmitgliedern aufgeteilt würde. Anders als an dieser Stelle zu erwarten war, entschieden sich jedoch ausnahmslos alle in der Gruppe in Runde 1 für die stärkste Defektion (F1, M2, W3, B3, K2). In Runde 2 änderte sich das Bild marginal, während Finanzen und Bildung den zur Auswahl stehenden Kompromiss wählten, entschied sich Wirtschaft gar für die erste Kooperation in der Gruppe. In der Schlussrunde gab es Kompromisse von Finanzen, Militär und Bildung, sowie Kooperation von Wirtschaft und Defektion von der Kanzlerin. Schlussendlich wurde die Gruppe von der Bildungsministerin gewonnen, da dieses Ressort am meisten von der Kooperation der Wirtschaftsministerin profitierte. Die Gesamtwertung von etwa –56,7 stellt ein besonders schlechtes Ergebnis dar.
Im Laufe des Spieles wurde zwei Mal versucht, eine Entscheidung zu treffen, die aufgrund der Voraussetzungen mancher Gesetze nicht erlaubt war.

Auf die Frage, wieso sich die Gruppe regelrecht selbst zerfleischt hatte, obwohl jede Belohnung ohnehin geteilt werden würde, kam die Antwort, dass es für sie so war, dass sie die Belohnung selbst zwar abgehakt hatten, und durch die angekündigte Kooperation davon überzeugt waren, das bessere Gesamtergebnis einzufahren, dass der persönliche Ehrgeiz wieder geweckt wurde, und alle wiederum befürchteten, von ihren Gruppenmitgliedern hintergangen zu werden. In diesem zugrunde liegenden Misstrauen waren Defektionen die logische Folge.

7.3 Die blaue Gruppe

Während in der grünen Gruppe sofort eine ertragreiche Diskussion initiiert wurde, gab es in der blauen Gruppe niemanden, um die Führung zu übernehmen und das Gespräch

zu starten. Zusätzlich gab es größere Unklarheiten, was die Regeln betraf, allerdings konnten diese Unklarheiten nicht konkret formuliert und nachgefragt werden, sodass die Regeln stattdessen erneut erklärt werden mussten. Nach einiger Zeit und einer direkten Aufforderung begann auch hier eine Diskussion darüber, was gemacht werden sollte. Interessanterweise wurde die Möglichkeit für Koalitionen in dieser Gruppe überhaupt nicht genutzt. Wiederum völlig entgegen den Erwartungen gab es jedoch in der ersten Runde ausschließlich Kooperation (F3, M3, W1, B1, K3). Auch in der zweiten und dritten Runde gab es bloß jeweils eine Kompromissentscheidung, zunächst vom Militärminister, später von der Wirtschaftsministerin. Die Wirtschaftsministerin war es auch, die in ihrer Gruppe gewann, der Gesamtpunktewert von 239,9 hätte kaum höher sein können.
In dieser Gruppe wurde drei Mal versucht, nicht erlaubte Entscheidungen zu treffen.

Für die blaue Gruppe stand die Kooperation im Vordergrund, um besser abzuschneiden als die Gegnerinnen in der grünen Gruppe. Die Möglichkeit, eine Aufteilung der Belohnungen zu fixieren, wurde übersehen und vergessen, beziehungsweise orientierten sie sich eher an Handschlagqualitäten, und die Süßigkeiten wurden auch ohne der schriftlichen Verpflichtung unter der ganzen Gruppe verteilt.

7.4 Feedback

Insgesamt wurde das Spiel von beiden Gruppen sehr positiv aufgefasst, und für interessant befunden. Was sich außerdem durch die gesamte Klasse durchzog war der Umstand, dass es „nicht so kompliziert war, wie anfangs gedacht". Vor allem die Rollenblätter wurden in dieser Hinsicht dafür kritisiert, dass man „bei Politik gleich denkt, dass das sicher kompliziert ist". Um dieses Problem zu lösen gibt es zwei mögliche Zugänge, die einander nicht ausschließen. Im Gespräch mit der grünen Gruppe war zunächst auch zu hören, dass man durchaus auch fünf Runden lang spielen könnte. Das Gegenargument, dass die blaue Gruppe dabei nicht fertig werden würde, und ob es nicht einfacher wäre, eine Proberunde durchzuführen, um den Ablauf einmal aus erster Hand zu sehen, damit erkannt wird, dass es wirklich nur darum geht, ein Kärtchen auszuwählen, und dass die Entscheidung welches der drei Kärtchen gewählt wird, in den Vordergrund rücken kann, stieß auf große Zustimmung, und eine Proberunde wurde von der Gruppe einstimmig als beste Lösung für den schwierig wirkenden Einstieg genannt. Auch in der blauen Gruppe, mit der das Feedbackgespräch später stattfand, war man sich einig, dass eine Proberunde eine große Hilfe gewesen wäre, schneller hineinzufinden. Ein anderer, zusätzlicher Zugang wäre es, eingangs explizit zu erwähnen, dass es nicht so kompliziert ist, wie es vielleicht aussieht. Das würde der Erwartungshaltung, dass ein Spiel mit Politikbezug komplex sein muss, entgegenwirken, ohne dafür das Setting opfern zu müssen, welches wie bereits beschrieben eine wesentliche Komponente ist, um ein realistisches Verhalten in der Situation eines Gefangenendilemmas heraufzubeschwören.

Ein Problem, das sich durch das gesamte Spiel durchgezogen hat, waren die unzulässigen Entscheidungen. Insgesamt kam es fünf Mal vor, dass die Rahmenbedingungen gewisser Gesetze, das heißt Voraussetzungen an den Punktestand, nicht beachtet wurden. Um dem entgegenzuwirken kam der Vorschlag, diese Bedingungen auf den Übersichten farblich oder zumindest fett hervorzuheben. Die hohe Fehlerquote (ein Sechstel aller Entscheidungen mussten dadurch wiederholt werden) indiziert, dass auf jeden Fall Bedarf besteht, diese Regel zu verdeutlichen.

7.5 Fazit

Insgesamt war die Testung als voller Erfolg zu sehen. Das Spiel war verständlich und hat die Schülerinnen und Schüler auch interessiert. Die beiden Gruppen haben sich völlig unterschiedlich verhalten, und auch die Konsequenzen, welches Ressort in den jeweiligen Gruppen gewinnt, waren aufgrund der getroffenen Entscheidungen nachvollziehbar und konsistent mit kooperativem oder nicht-kooperativem Verhalten der einzelnen Spielerinnen und Spieler. Die Implementierung einer Proberunde, beziehungsweise die Notwendigkeit dieser Implementierung wurde deutlich, und sollte auch zeitlich problemlos durchführbar sein. Im Gegenzug lassen sich vor allem spätere Runden etwas beschleunigen, ohne dabei für unnötigen Stress, selbst in langsameren Gruppen zu sorgen. Vor allem würde diese Proberunde auch dafür sorgen, dass spätere Runden schneller ablaufen können, weil allen bereits besser klar geworden ist, was zu tun ist.

Ein Element des Spieles, das sich als wenig erfolgreich herausgestellt hat, ist die Möglichkeit für Koalitionen. Ursprünglich war dies dafür gedacht, alle Variationen – von Koalitionen, die die gesamte Gruppe umfassen über mehrere kleinere Koalitionen zu gar keinen Koalitionen – abzudecken, und vor allem um den Umstand, dass nur ein Fünftel der Klasse am Ende belohnt wird, ein wenig auszugleichen. Wie sich aber gezeigt hat, hat die blaue Gruppe das Konzept gar nicht realisiert oder verstanden, während in der grünen Gruppe die Gesamtkoalition erst recht nicht als Koalition gehandelt hat. Vermutlich würde es reichen, dieses Konzept besser zu erklären, und zwar nach einer Proberunde, wenn das Spiel bereits verstanden wird. Um die beste Lösung dafür zu finden, wie die Belohnungen ausbezahlt werden – ob dies in Abhängigkeit der absoluten Punktzahl geschieht, in Abhängigkeit der relativen Punktzahl, über besser erklärte Koalitionen, oder aber ganz simpel, sodass die Siegerin oder der Sieger alles erhält und sich die anderen Gruppenmitglieder auf ihre oder seine Gnade verlassen müssen, würde wohl noch umfangreiche Testungen benötigen. Am theoretischen Argument für Koalitionen, das in Kapitel 5 intensiv behandelt wurde, ändert sich jedoch wenig.

8 Schlussbetrachtung und Fazit

Im Zuge dieser Arbeit wurden die relevanten Fragen behandelt, um zu evaluieren, welche Rolle Spieltheorie im regulären Mathematikunterricht haben kann und soll: Was ist Spieltheorie überhaupt? Warum hat die Spieltheorie einen Platz im Mathematikunterricht? Wie wird Spieltheorie ideal an die Schülerinnen und Schüler vermittelt? Hierbei sind besonders die beiden letzten Fragen interessant.

8.1 Warum Spieltheorie?

Wenn auch die fixe Verankerung im Lehrplan noch nicht gegeben ist, so ist der Bereich der Spieltheorie dennoch einer, dem in der Zukunft eine größere Rolle beigemessen werden kann. Im Zuge der Umstellung zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung geht der Fokus – gemäß der Zeiten – verstärkt weg vom mathematischen Handwerk, der puren Rechenarbeit und hin zum Verständnis. Die Spieltheorie inkorporiert diesen Fokuswechsel wie kaum ein anderes mathematisches Teilgebiet. Während die aktuelle Lage des Lehrplans ein solches Thema eher als Zusatzkapitel nahelegt, welches behandelt werden kann, wenn in einem Schuljahr die Zeit dafür bleibt, kann das Argument gemacht werden, dass sie eigentlich in den Lehrstoff aufgenommen werden sollte. Bis dahin lässt sich die erstellte Unterrichtssequenz in Klassen einsetzen, mit denen der Rest des Stoffes überdurchschnittlich schnell durchgenommen werden konnte, oder auch im Zuge eines Wahlpflichtfaches.

8.2 Wie kann Spieltheorie vermittelt werden?

Der spielerische Einstieg, der an einer siebten Klasse einer AHS getestet wurde, hat die erhoffte Wirkung gezeigt. Auch in dieser als eher schwachen Klasse beschriebenen Gruppe war genügend Verständnis vorhanden, um das Interesse zu wecken, und um verschiedene Vorgehensweisen zu erleben. Es ist leicht vorstellbar, dass eine Anknüpfung an diesen Einstieg, wie er in Kapitel 6 beschrieben wurde, sehr gut aufgenommen würde. Mit dem Erlebnis, selbst die Situation eines Gefangenendilemmas wahrgenommen zu haben ausgerüstet, wäre es wesentlich einfacher, das Dilemma darin zu erkennen und zu verstehen, als dies bei anderen Einstiegen der Fall gewesen wäre, die ein stärkeres Gewicht auf die theoretische Fundierung legen. Nicht nur ist das Dilemma bereits bekannt, es gibt auch eine Motivation, dieses Dilemma zu analysieren, zu zerlegen und schließlich eine befriedigende Lösung dafür zu finden. Bereits im Gespräch mit den Gruppen hat sich gezeigt, dass die Dissonanz zwischen Vereinbarungen und dem eigentlichen Entscheidungsverhalten für viele Gruppenmitglieder ärgerlich war, insbesondere gegen Ende, als sich herausstellte, dass das egoistische Verhalten echte Konsequenzen in Form einer geringeren Auszahlung hatte. Besonders diese Gruppe hätte sich über eine Gelegenheit gefreut, mehr über das Thema zu erfahren.

Da nicht die gesamte Unterrichtssequenz getestet werden konnte, ist der exakte Ablauf selbstverständlich noch nicht optimiert. Theoretisch betrachtet greift die gesamte Sequenz schlüssig und flüssig ineinander, doch die praktische Situation im Unterricht bietet stets unvorhergesehene Problemstellen. Die Sequenz, wie sie in der Arbeit beschrieben wurde, bietet aber definitiv einen Ausgangspunkt, wie die essentiellen Teile der Spieltheorie in der Oberstufe einer AHS oder BHS vermittelt werden können, der in wiederholten Einsätzen im Unterricht weiter verfeinert werden kann.

9 Anhang

9.1 Literaturverzeichnis

Monographien:

Robert Axelrod, The Evolution of Cooperation (New York 1984).

Siegfried Berninghaus, Karl-Martin Ehrhart, Werner Güth, Strategische Spiele (Berlin/Heidelberg 2006[2]).

Werner Güth, Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele (Berlin/Heidelberg 1999).

Manfred J. Holler, Gerhard Illing, Einführung in die Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2006[6]).

R. D. Luce, H. Raiffa, Games and decisions: introduction and critical survey (New York 1957).

John F. Nash, Non-Cooperative Games (Princeton 1950).

John von Neumann, Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior (Princeton 1944).

Thomas Riechmann, Spieltheorie (München 2010).

Christian Reick, Spieltheorie. Eine Einführung (Eschborn 2015[14]).

Philipp D. Straffin, Game Theory and Strategy (Washington 1993).

Harald Wiese, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin/Heidelberg 2002).

Zeitschriftenartikel:

Robert Axelrod, The Evolution of Strategies in the Iterated Prisoner's Dilemma. In: Lawrence Davis (Hg.) Genetic Algorithms and Simulated Annealing (London 1987). 32 – 41.

Sergiu Hart, Robert Aumann's Game and Economic Theory. In: Scandinavian Journal of Economics 108, Issue 2 (2006). 185 – 211.

John von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. In: Mathematische Annalen 100 (1928). 295 – 320.

Reinhard Selten, Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. In: Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 121 (1965). 301 – 324.

Internetquellen:

Internetquelle 1: Statistik Austria: Belegte ordentliche Studien an öffentlichen Universitäten 2014/15 nach Studienart und Hauptstudienrichtung. http://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bildung_und_kultur/formales_bildungswesen/universitaeten_studium/021636.html (zuletzt abgerufen am 24.2.2016)

Internetquelle 2: Statistik Austria: Ordentliche Studierende an Fachhochschul-Studiengängen 2015/16 nach Studienart, Ausbildungsbereich und Studienort-Bundesland. http://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bildung_und_kultur/formales_bildungswesen/universitaeten_studium/024433.html (zuletzt abgerufen am 24.2.2016)

Internetquelle 3: AHS-Lehrplan für Mathematik https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf (Zuletzt abgerufen am 2.3.2016)

Internetquelle 4: Mathematische Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern für die schriftliche Reifeprüfung
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_am_kompetenzen_2018_teil_a%202015-11-13_0.pdf (Zuletzt abgerufen am 2.3.2016)

9.2 Materialien

Sehr geehrteR FinanzministerIn!

Der Staat ist arm und benötigt Ihre Hilfe. Nutzen Sie die Zeit in der Regierung, um die Staatskasse zu füllen. Vergessen Sie die Kolleginnen und Kollegen in Ihrer Regierung, die Ihnen weiß machen wollen, dass deren Ressorts wichtiger sind und sorgen Sie dafür, dass man in Zukunft ehrfurchtsvoll vom Reichtum Ihrer Heimat spricht, und Ihren Namen für immer in Ehren halten wird.

Ablauf:

In jeder der drei Runden erlässt jedes Regierungsmitglied ein Gesetz, welches einen Einfluss auf alle Ressorts haben wird. Jedes Gesetz kann auch in mehreren Runden erlassen werden – manche sogar in jeder Runde.

Zu Beginn jeder Runde werden 25% des bisher gesammelten Wirtschaftswertes dem Finanzwert gutgeschrieben.

Ziel:

Der Wert für die Finanzen (F) soll am Ende der dritten Runde höher sein als die Werte der Ressorts Militär (M), Wirtschaft (W), Bildung (B) und Popularität (P).

Die möglichen Gesetze:

F1 – Steuererhöhung: **F: +15**, M: -15, W: -10, B: -5, P: -11

F2 – Ausgabenstopp: **F: +10**, M: -15, W: +5, B: -10, P: -6

F3 – Erhöhte öffentliche Ausgaben: **F: -10**, M: +15, W: +5, B: +15, P: +9

F4 – Stilllegung der Regierung (nur möglich, wenn F < -50 ist): **F: +30**, M: -20, W: -20, B: -20, P: -40; außerdem werden alle anderen Gesetze in dieser Runde nicht in Kraft treten

F5 – Investitionen (nur möglich, wenn F > 50 und B > 20 ist): **F: -30**, M: +20, W: +20, B: +20, P: +10

Viel Erfolg!

Sehr geehrteR VerteidigungsministerIn!

Der Staat ist schwach und benötigt Ihre Hilfe. Nutzen Sie die Zeit in der Regierung, um die Militärkraft zu stärken. Vergessen Sie die Kolleginnen und Kollegen in Ihrer Regierung, die Ihnen weiß machen wollen, dass deren Ressorts wichtiger sind und sorgen Sie dafür, dass man in Zukunft ehrfurchtsvoll vom Heer Ihrer Heimat spricht, und Ihren Namen für immer in Ehren halten wird.

Ablauf:
In jeder der drei Runden erlässt jedes Regierungsmitglied ein Gesetz, welches einen Einfluss auf alle Ressorts haben wird. Jedes Gesetz kann auch in mehreren Runden erlassen werden – manche sogar in jeder Runde.

Ziel:
Der Wert für das Militär (M) soll am Ende der dritten Runde höher sein als die Werte der Ressorts Finanzen (F), Wirtschaft (W), Bildung (B) und Popularität (P).

Die möglichen Gesetze:
M1 – Parade: **M: +5**, F: -10, W: -5, B: -10, P: +15
M2 – Stehendes Heer: **M: +10**, F: -10, W: -10, B: -5, P: -1
M3 – Waffenexport: **M: -10**, F: +10, W: +10, B: 0, P: -5

M4 – Milizen (nur möglich, wenn M < -50 ist): **M: +30**, F: -10, W: -10, B: -20, P: +5

M5 – Militärcoup (nur möglich, wenn M > 50 und P < 0 ist): **M: +20**, F: +10, W: 0, B: -10, P: -100; außerdem wird das Gesetz aus dem Kanzleramt in dieser Runde nicht in Kraft treten

Viel Erfolg!

Sehr geehrteR WirtschaftsministerIn!

Der Staat ist unproduktiv und benötigt Ihre Hilfe. Nutzen Sie die Zeit in der Regierung, um die Wirtschaft anzukurbeln. Vergessen Sie die Kolleginnen und Kollegen in Ihrer Regierung, die Ihnen weiß machen wollen, dass deren Ressorts wichtiger sind und sorgen Sie dafür, dass man in Zukunft ehrfurchtsvoll von der Produktivität Ihrer Heimat spricht, und Ihren Namen für immer in Ehren halten wird.

Ablauf:

In jeder der drei Runden erlässt jedes Regierungsmitglied ein Gesetz, welches einen Einfluss auf alle Ressorts haben wird. Jedes Gesetz kann auch in mehreren Runden erlassen werden – manche sogar in jeder Runde.
Zu Beginn jeder Runde werden 25% des bisherigen gesammelten Bildungswertes dem Wirtschaftswert gutgeschrieben.

Ziel:

Der Wert für die Wirtschaft (W) soll am Ende der dritten Runde höher sein als die Werte der Ressorts Militär (M), Finanzen (F), Bildung (B) und Popularität (P).

Die möglichen Gesetze:

W1 – Ausbildungsinitiative: **W: -5**, F: +5, M: +0, B: +15, P: +10
W2 – Längere Arbeitszeiten: **W: +5,** F: +10, M: -5, B: -10, P: -7
W3 – Rüstungsauftrag: **W: +15**, F: -10, M: +5, B: -10, P: -10

W4 – Entwicklungshilfe (nur möglich, wenn W < -50 und F < 0): **W: +20**, F: 0, M: -20, B: +20, P: -50
W5 – Korruption (nur möglich, wenn W > 50 und F ≥ -50): **W: +30**, F: -20, M: -10, B: -20, P: -30; außerdem wird das Gesetz der anderen Ressorts, welches am schlechtesten für die Wirtschaft ist, in dieser Runde nicht in Kraft treten

Viel Erfolg!

Sehr geehrteR BildungsministerIn!

Der Staat ist ungebildet und benötigt Ihre Hilfe. Nutzen Sie die Zeit in der Regierung, um das Volk zu bilden. Vergessen Sie die Kolleginnen und Kollegen in Ihrer Regierung, die Ihnen weiß machen wollen, dass deren Ressorts wichtiger sind und sorgen Sie dafür, dass man in Zukunft ehrfurchtsvoll von der Wissenschaft in Ihrer Heimat spricht, und Ihren Namen für immer in Ehren halten wird.

Ablauf:
In jeder der drei Runden erlässt jedes Regierungsmitglied ein Gesetz, welches einen Einfluss auf alle Ressorts haben wird. Jedes Gesetz kann auch in mehreren Runden erlassen werden – manche sogar in jeder Runde.

Ziel:
Der Wert für das Bildung (B) soll am Ende der dritten Runde höher sein als die Werte der Ressorts Militär (M), Wirtschaft (W), Finanzen (F) und Popularität (P).

Die möglichen Gesetze:
B1 – Privatisierung der Bildung: **B: -10**, F: +5, M: +10, W: +10, P: -9
B2 – Bildungsreform: **B: +5**, F: -5, M: 0, W: -5, P: -4
B3 – Matura für Alle: **B: +10**, F: -10, M: -10, W: -15, P: +11

B4 – Hausunterricht (nur möglich, wenn B < -50 ist): **B: -20**, F: +20, M: +5, W: +10, P: +10

B5 – Uni für Alle (nur möglich, wenn B > 50 ist): **B: +30**, F: -20, M: -10, W: +30, P: +10

Viel Erfolg!

Sehr geehrteR KanzlerIn!

Ihre Regierung wurde neu gewählt, und die Menschen wissen noch nicht, was Sie von Ihnen halten sollen. Vergessen Sie die Kolleginnen und Kollegen in Ihrer Regierung, die Ihnen weiß machen wollen, dass deren Ressorts wichtiger sind und sorgen Sie dafür, dass Sie beliebt genug werden, um bei der nächsten Wahl wiedergewählt zu werden, und Ihr Name für immer in Ehren halten wird.

Ablauf:
In jeder der drei Runden erlässt jedes Regierungsmitglied ein Gesetz, welches einen Einfluss auf alle Ressorts haben wird. Jedes Gesetz kann auch in mehreren Runden erlassen werden – manche sogar in jeder Runde.
Zu Beginn jeder Runde wird ein Sechzehntel aller anderen bisher gesammelten Werte dem Popularitätswert gutgeschrieben.

Ziel:
Der Wert für Popularität (P) soll am Ende der dritten Runde höher sein als die Werte der Ressorts Militär (M), Wirtschaft (W), Bildung (B) und Finanzen (F).

Die möglichen Gesetze:
K1 – Volksabstimmung (nicht in Runde 3 möglich): **P: -5**, F: -5, M: -5, W: -5, B: -5; das Gesetz mit dem niedrigsten P wird negiert
K2 – Veto: **P: -5**; alle anderen Gesetze haben diese Runde bloß halb so starke Auswirkungen
K3 – Unterstützung für die Minister: alle anderen Gesetze wirken sich um 25% stärker aus
K4 – Neuwahlen (nur möglich, wenn P < -50 ist): **P wird auf 0 gesetzt**, F: -10, M: 0, W: -5, B: 0
K5 – Krönung zum/r KönigIn (nur möglich, wenn P > 50 ist): **P: +30**, F: -10, M: +10, W: -10, B: -15

Viel Erfolg!

F1 Steuererhöhung **+15 Finanzen** -15 Militär -10 Wirtschaft -5 Bildung -11 Popularität	F2 Ausgabenstopp **+10 Finanzen** -15 Militär +5Wirtschaft -10 Bildung -6 Popularität	F3 Erhöhte öffent- liche Ausgaben **-10 Finanzen** +15 Militär +5 Wirtschaft +15 Bildung +9 Popularität	F4 Stilllegung der Regierung (F < -50) **+30 Finanzen** -20 Militär -20 Wirtschaft -20 Bildung -40 Popularität **Negiert andere**	F5 Investitionen (F > 50, B > 20) **-30 Finanzen** +20 Militär +20 Wirtschaft +20 Bildung +10 Popularität
M1 Parade **+5 Militär** -10 Finanzen -5 Wirtschaft -10 Bildung +15 Popularität	M2 Stehendes Heer **+10 Militär** -10 Finanzen -10 Wirtschaft -5 Bildung -1 Popularität	M3 Waffenexport **-10 Militär** +10 Finanzen +10 Wirtschaft 0 Bildung -5 Popularität	M4 Milizen (M < -50) **+30 Militär** -10 Finanzen -10 Wirtschaft -20 Bildung +5 Popularität	M5 Militärcoup (M > 50, P <0) **+20 Militär** +10 Finanzen 0 Wirtschaft -10 Bildung -100 Popularität **K wird negiert**
W1 Ausbildungs- initiative **-5 Wirtschaft** +5 Finanzen 0 Militär +15 Bildung +10 Popularität	W2 Längere Arbeitszeiten **+5 Wirtschaft** +10 Finanzen -5 Militär -10 Bildung -7 Popularität	W3 Rüstungsauftrag **+15 Wirtschaft** -10 Finanzen +5 Militär -10 Bildung -10 Popularität	W4 Entwicklungs- hilfe (W < -50, F < 0) **+20 Wirtschaft** 0 Finanzen -20 Militär +20Bildung -50 Popularität	W5 Korruption (W > 50, F ≥ -50) **+30 Wirtschaft** -20 Finanzen -10 Militär -20 Bildung -30 Popularität **Min W negiert**
B1 Privatisierung der Bildung **-10 Bildung** +5Finanzen +10 Militär +10 Wirtschaft -9 Popularität	B2 Bildungsreform **+5 Bildung** -5 Finanzen 0 Militär -5 Wirtschaft -4 Popularität	B3 Matura für Alle **+10 Bildung** -10 Finanzen -10 Militär -15 Wirtschaft +11 Popularität	B4 Hausunterricht (B < -50) **-20 Bildung** +20 Finanzen +5 Militär +10 Wirtschaft +10 Popularität	B5 Uni für Alle (B > 50) **+30 Bildung** -20Finanzen -10 Militär +30 Wirtschaft +10 Popularität

K1 Volksabstim- mung	K2 Veto	K3 Unterstützung für die Minister	K4 Neuwahlen (P < -50)	K5 Krönung zum/r KönigIn (P > 50)
-5 Popularität -5 Finanzen -5 Militär -5 Wirtschaft -5 Bildung **Min K negiert**	**0 Popularität** **Auswirkungen aller Gesetze -50%**	**-5 Popularität** **Auswirkungen aller Gesetze +25%**	**0 Popularität** -10 Finanzen 0 Militär -5 Wirtschaft 0 Bildung **P auf 0 setzen**	**+30 Popularität** -10 Finanzen +10 Militär -10 Wirtschaft -15 Bildung

Zwischenstand nach Runde 1				
Finanzen	Militär	Wirtschaft	Bildung	Kanzleramt

Zwischenstand nach Runde 2				
Finanzen	Militär	Wirtschaft	Bildung	Kanzleramt

Endstand				
Finanzen	Militär	Wirtschaft	Bildung	Kanzleramt

Aufteilung der Belohnung (verpflichtend!)	
Finanzen	
Militär	
Wirtschaft	
Bildung	
Kanzleramt	

Anmerkung: Die Formatierung dieser Diplomarbeit inkludiert breitere Seitenränder als bei gewöhnlichen Ausdrucken, wodurch insbesondere die Karteikarten (S. 109) hier anders dargestellt werden als am eigentlichen Spielmaterial. Inhaltlich ändert sich jedoch nichts.

9.3 Zusammenfassung

Im Zuge dieser Diplomarbeit wird beleuchtet, welche Rolle das Gebiet der Spieltheorie im Mathematikunterricht spielen könnte, beziehungsweise spielen sollte. Hierfür wird zunächst behandelt, welche Aspekte der Spieltheorie für den Einstieg freundlich und für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II angemessen sind. Weiters wird betrachtet, wie sich dieses Thema mit den rechtlichen Rahmenbedingungen vereinbaren lässt, und wie andere Autorinnen und Autoren versucht haben, Spieltheorie für die Schule didaktisch aufzubereiten.

Kernteil der Arbeit ist die Beschreibung der Kreation eines Spieles, welches in einer Schulklasse von den Schülerinnen und Schülern gespielt werden kann, um als Sprungbrett dafür zu dienen, die gewünschten Bereiche auch theoretisch anzusprechen. Hierfür wird beschrieben, welche Entscheidungen vorab getroffen wurden, und welche Prozesse das Spiel von der ersten Konzeption bis hin zur Testung in einer siebten Klasse durchgemacht hat, sowie welche Umstände diese Prozesse beeinflusst haben.

Weiters wird genau ausgelegt, welche Richtung die Unterrichtssequenz nach der Durchführung des Spieles nehmen soll, und wie alle Aspekte der Spieltheorie, die vermittelt werden sollen, an die zuvor gemachte Erfahrung des Spieles angeknüpft werden können.

Abschließend wird anhand der Testspiele analysiert, welche der theoretischen Überlegungen funktionieren und welche nicht, und wie die Erfahrung für die Schülerinnen und Schüler noch besser gestaltet werden könnte.

9.4 Abstract

This diploma thesis offers a look at the topic of game theory and its viability as a subject in the secondary level II. The first step here is to analyze which aspects of game theory are not only useful for beginners, but also within reach of the mathematical capabilities of the students. This approach is put in comparison with those of other authors who have made game theory feasible for students of this age and is also thoroughly examined under the light of the curriculum and other relevant conditions.

The core of the thesis is the creation of a game that can be played in class, as well as a description of the process that went into this creation. All the decisions that influenced the shape of the game from its first inception up to the version that was tested with actual students are explained and justified. This includes issues of balancing and setting, as well as additional rules with the intent to create an experience for the students from which they can draw in the later lessons. The content of these lessons is layed out as well, highlighting the connections between the game the students played and the theories that can be applied to specific situations in the game.

The final part is an analysis of the game testing that took place. The way students behaved and the way they are wanted to behave for an ideal learning experience is put in contrast, ways to streamline the game and make it less confusing and more accesible are discussed.

9.5 Inhalte der CD

Auf der beigelegten Daten-CD finden sich folgende Dateien (in alphabetischer Reihenfolge):

a) auswertung.xls
Diese Tabelle dient der Auswertung einer Spielrunde. Die Entscheidungen der Schülerinnen und Schüler können per Drop-down-Menü eingetragen werden, und die daraus resultierenden Konsequenzen werden automatisch berechnet. Die Datei umfasst sechs Tabellen, um die gleichzeitige Auswertung von bis zu sechs Gruppen zu erlauben.

b) auswertung_20161221.xls
In dieser Tabelle wurden die Entscheidungen der beiden Gruppen der Testung eingetragen. Somit bietet sie einerseits Dokumentation über den Test, als auch eine Demonstration der Funktionsweise der Auswertung.

c) entscheidungen.xls
Diese Tabelle bietet eine Übersicht über die Entscheidungen, die in den ersten beiden Runden des Spieles verfügbar sind, sowie deren Auswirkungen und eine Analyse der möglichen Resultate. Weiters finden sich Blöcke (5-8 Spalten, jeweils von Zeile 1 bis 247), die unterschiedliche Aspekte beleuchten.