universität wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Einführung in Nash-Gleichgewichte und Anwendungen“

verfasst von / submitted by

Sebastian Farrensteiner, BSc

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 407 E
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramt UF Mathematik UF Darstellende Geometrie
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Ulisse Stefanelli, PhD

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ein großes Anwendungsgebiet der Mathematik ist es, Situationen der realen Welt mithilfe von Modellen zu beschreiben. In Situationen, in denen zwei oder mehr Personen (=*Spieler*) mit unterschiedlichen Interessen verschiedenen Möglichkeiten (=*Strategien*) haben wie sie sich einander gegenüber verhalten sollen, liefert die Spieltheorie einige nützliche Werkzeuge. Je nachdem, für welches Verhalten sich die einzelnen *Spieler* entscheiden hat die Situation für jeden einen guten oder schlechten Ausgang (= *Gewinn*). Wir wollen in dieser Arbeit einige Konzepte der Spieltheorie kennenlernen.
In Kapitel 2 beschäftigen wir uns hierfür zuerst mit der einfachsten Form von Spielen: Zwei-Spieler Nullsummenspiele. Diese Spiele zeichnen sich dadurch aus, dass der Gewinn des einen immer zugleich auch der Verlust des anderen Spielers ist. Wir werden in diesem Zusammenhang das Minimax Theorem beweisen und anschließend einige Methoden kennenlernen um sogenannte Nash-Gleichgewichte zu finden. Zwei Namen die zu diesem Kapitel erwähnt werden sollten sind John von Neumann und Oskar Morgenstern - der Namensgeber des Platzes an welcher die Fakultät für Mathematik der Universität Wien zuhause ist. Diese schrieben 1944 zusammen mit dem Buch *'Theory of Games and Economic Behavior'* [5] eines der bekanntesten Werke der Spieltheorie.
In Kapitel 3 verallgemeinern wir die Konzepte aus Kapitel 2 auf n-Spieler und allgemeinere Gewinnfunktionen. Wir werden beweisen, dass jedes dieser Spiele mindestens ein Nash-Gleichgewicht besitzt. Im Fall von zwei Spielern sehen wir mit dem Lemke-Howson Algorithmus schließlich auch einen Weg ein solches zu finden. In diesem Kapitel ist der Name John Nash zu nennen, welcher mit seiner Dissertation *'Non-cooperative Games'* [3] an der Princeton University im Jahr 1950 einen Beweis für die Existenz eines, nach ihm benannten, Nash-Gleichgewichts in einem n-Spieler Spiel brachte. Für die breite Öffentlichkeit ist Nash insbesondere durch den Film *A Beautiful Mind - Genie und Wahnsinn* (auf welchen wir in Kapitel 4.4 kurz eingehen werden) und den Gewinn des Nobelpreises bekannt geworden. Im 4. und letzten Kapitel der Arbeit wollen wir uns kurz mit der Evolutionären Spieltheorie (Falken-Tauben 'Spiel' von Maynard Smith), einer Anwendung im Bereich der Wirtschaft und dem vermutlich bekanntesten Spiel, dem Gefangenendilemma beschäftigen.



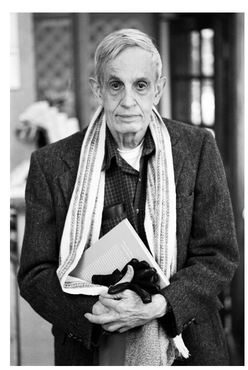


Abbildung 1: Oskar Morgenstern, John von Neumann und John Nash

Nachdem nun angegeben ist womit sich die Arbeit beschäftigt, hier auch einige Informationen, was nicht abgedeckt wird beziehungsweise welche Einschränkungen/Voraussetzungen getroffen wurden: Wir betrachten nur endliche Spiele (d.h. sowohl die Anzahl der Spieler als auch die Anzahl deren möglichen Strategien sind endlich) mit kompletter Information (d.h. jedem Spieler sind bekannt welche Strategien seine Gegner zur Wahl haben und die Gewinne jedes einzelnen (= vollständige Gewinnfunktion)). In Kapitel 3 beschränken wir uns in den Beispielen, aufgrund der einfachen Notation mithilfe einer Bimatrix, auf Zwei-Personen Spiele. Mithilfe der Methoden in 2.5 und 3.5 können wir zwar stets ein Nash-Gleichgewicht in einem Zwei-Spieler Spiel finden, allerdings muss dieses nicht eindeutig sein, womit wir nicht alle finden werden. Für die *Utility Theory*, also der Theorie die hinter dem Aufstellen von Gewinnfunktionen steht, sei auf das Buch von Morton Davis *'Game Theory A Nontechnical Introduction'* [4] verwiesen.

Nun wollen wir aber beginnen, denn:

> *'Game theory is hot.'*
>
> -Wall Street Journal, 13.2.1995, p.14.

2 Zwei Spieler Nullsummenspiele

In diesem Abschnitt widmen wir uns jenen Spielen welche zwei Personen spielen und bei denen der Gewinn von Spieler 1 gleich groß ist wie der Verlust von Spieler 2.

2.1 Was ist ein Nullsummenspiel?

Definition. *Als ein* ***Zwei Spieler Nullsummenspiel*** *bezeichnen wir ein Tripel* (X, Y, A), *wobei* X *und* Y *nichtleere endliche Mengen sind (Menge der Strategien von Spieler 1 und 2) und* $A : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ *eine Funktion ist.*
Ein Element in X *bzw.* Y *nennen wir* ***reine Strategie****. Der Wert* $A(x, y)$ $(x \in X, y \in Y)$ *ist der Gewinn (bzw. Verlust) von Spieler 1 (bzw. Spieler 2), wenn Spieler 1 die Strategie* $x \in X$ *und Spieler 2 die Strategie* $y \in Y$ *wählt. Daher nennen wir* A *die* ***Gewinnfunktion*** *des Spiels.*

Ordnen wir den verschiedenen Strategien von Spieler 1 und 2 natürliche Zahlen zu, d.h. $X = \{1, 2, ..., m\}$ und $Y = \{1, 2, ..., n\}$, so können wir uns die Gewinnfunktion A als eine $m \times n$ Matrix vorstellen, bei der Spieler 1 eine Zeile und Spieler 2 eine Spalte auswählt. Wir sprechen dann von A als der **Gewinnmatrix**.

Zu Beginn des Spiels kennen beide Spieler alle ihre verschiedenen Strategien, jene des Gegners und auch die Gewinnmatrix. Spieler 1 und Spieler 2 wählen dann gleichzeitig (ohne Absprache) eine Strategie aus. Spieler 1 bekommt anschließend den entsprechenden Gewinn. Falls ein Eintrag in der Gewinnmatrix negativ ist, bedeutet das, dass bei dieser Wahl von Strategien Spieler 2 Gewinn und Spieler 1 Verlust macht. Der Begriff Nullsumme kommt daher, da Gewinn des einen Spielers + Verlust des anderen Spielers gleich Null ist. Im Folgenden wollen wir nun solche Spiele *lösen*, d.h. wir suchen möglichst *gute* Strategien beziehungsweise plausible Vorhersagen für das Verhalten der Spieler eines solchen Spiels. Hierfür treffen wir die Annahmen, dass jeder Spieler seinen Gewinn (Verlust) maximieren (minimieren) möchte.

Bei manchen Nullsummenspielen ist es einfach solch ein Strategienpaar zu finden, nämlich dann wenn das Spiel einen so genannten Sattelpunkt besitzt:

Definition. *Wir nennen einen Eintrag* a_{ij} $(i \in X, j \in Y)$ *der Gewinnmatrix* A ***Sattelpunkt****, falls* $a_{ij} > a_{kj}$ $\forall k$ *und* $a_{ij} < a_{ik}$ $\forall k$*, d.h. falls* a_{ij} *der größte Wert in seiner Spalte und der kleinste Wert in seiner Zeile ist.*

Beispiel 2.1. *Betrachten wir die Gewinnmatrix (vgl.. Ferguson [15], S. II-9)*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $a_{22} = 2$ *ein Sattelpunkt.*

Fassen wir kurz in Worten zusammen warum ein solcher Sattelpunkt eventuell eine gute Vorhersage für das Verhalten der beiden Spieler liefert: Spieler 1 möchte seinen Gewinn maximieren, d.h. egal welche Spalte Spieler 2 wählt, er hätte gern jene Zeile in welcher der Gewinn maximal ist. Umgekehrt möchte Spieler 2 seinen Verlust minimieren, d.h. egal welche Zeile Spieler 1 wählt, Spieler 2 hätte gern jene Spalte in welcher sein Verlust minimal ist. Ein Sattelpunkt erfüllt beide diese Wünsche. Anders könnten wir auch sagen: Ein Sattelpunkt ist ein Strategienpaar, bei welchem es keinem der Spieler etwas bringt, wenn er alleine seine Strategie ändert.

2.2 Gemischte Strategien

Wird ein Spiel nicht nur einmal sondern mehrmals gespielt, so kann es in manchen Fällen sinnvoll sein, nicht immer die gleiche Strategie zu spielen sondern die verschiedenen Strategien mit gewissen Wahrscheinlichkeiten zu wählen um seinen durchschnittlich zu erwartenden Gewinn zu maximieren. Somit kommen wir zum Begriff der *gemischten Strategien.*

Definition. *Ein m-Tupel $p = (p_1, p_2, ..., p_m) \in \mathbb{R}^m_+$ (bzw. n-Tupel $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n_+$) nennen wir* ***gemischte Strategie*** *von Spieler 1 (bzw. Spieler 2) falls*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \quad (bzw. \sum_{i=1}^{n} q_i = 1)$$

gilt. Die Menge der gemischten Strategien für Spieler 1 schreiben wir als

$$\Delta_1 = \{p \in \mathbb{R}^m_+ | \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\}.$$

Für Spieler 2 wird Δ_2 analog definiert.

p_i gibt somit die Wahrscheinlichkeit mit welcher Spieler 1 Strategie i wählt an. Man kann also die reinen Strategien ebenfalls als Spezialfall der gemischten Strategien sehen, d.h. beispielsweise zu der reinen Strategie $i \in X$ gehört das zugehörige gemischte Strategietupel $p = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i-teStelle}, 0, ...0) =: e_i \in \mathbb{R}^m$.

Bemerkung: Δ_i ist beschränkt, konvex und abgeschlossen. Ein Beweis hierfür findet sich in Kapitel 3.2.

Beispiel 2.2. *(aus Ferguson [15], S.II-5) Betrachten wir nun ein Spiel: Gerade/Ungerade. Beide Spieler wählen zeitgleich die Zahl* 1 *oder* 2. *Spieler 1 (bzw. Spieler 2) gewinnt, falls die Summe (ist zugleich auch der Gewinnbetrag) der beiden Zahlen ungerade (bzw. gerade) ist.*
Somit kommen wir auf die Strategiemengen $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2\}$ und auf die Gewinnmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Angenommen Spieler 1 spielt in 3 von 5 Spielen $'1'$ *und in den restlichen Spielen* $'2'$ *so können wir uns seinen durchschnittlichen Gewinn berechnen:*

1. *Wenn Spieler 2 Strategie '1' wählt, so gewinnt Spieler 1 in* $\frac{3}{5}$ *der Fälle -2 und in* $\frac{2}{5}$ *der Fälle 3. Also:* $\frac{3}{5} \cdot -2 + \frac{2}{5} \cdot 3 = 0$.

2. *Wenn Spieler 2 Strategie '2' wählt, so gewinnt Spieler 1 in* $\frac{3}{5}$ *der Fälle 3 und in* $\frac{2}{5}$ *der Fälle -4. Also:* $\frac{3}{5} \cdot 3 + \frac{2}{5} \cdot -4 = \frac{1}{5}$.

Somit kann Spieler 1 durch das Verwenden gemischter Strategien zumindest sicherstellen, dass er durchschnittlich keinen Verlust haben wird.

Als nächstes wollen wir eine Verteilung der Wahrscheinlichkeiten finden, so dass Spieler 1 immer den gleichen durchschnittlichen Gewinn bekommt, unabhängig davon welche Strategie Spieler 2 wählt. Sei nun p die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 Strategie 1 wählt. Dann kommen wir auf die folgenden Gleichung:

$$-2 \cdot p + 3 \cdot (1-p) = 3 \cdot p - 4 \cdot (1-p)$$

wobei auf der linken Seite der durchschnittliche Gewinn von Spieler 1 steht, wenn Spieler 2 '1' spielt bzw. auf der rechten Seite falls Spieler 2 '2' spielt. Lösen wir diese Gleichung nach p auf, so bekommen wir

$$p = \frac{7}{12}.$$

Wählt Spieler 1 diesen Wert für p so erwartet ihn der durchschnittliche Gewinn: $-2 \cdot \frac{7}{12} + 3 \cdot \frac{5}{12} = 3 \cdot \frac{7}{12} - 4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{12}$*, unabhängig von dem was Spieler 2 macht.*
Nun könnten wir eine analoge Überlegung für Spieler 2 anstellen mit welcher Wahrscheinlichkeit q er '1' wählen müsste. Führen wir die Rechnung durch so kommen wir auf $q = \frac{7}{12}$*, was ihm einen durchschnittlichen Verlust von* $\frac{7}{12} \cdot (-1) + \frac{5}{12} \cdot 3 = \frac{1}{12}$ *bringt. Somit kann Spieler 2 durch wählen dieser Strategie verhindern, dass sein durchschnittlicher Verlust größer als* $\frac{1}{12}$ *ist.*
Ein solches Paar von Strategien werden wir ***ausgleichende Strategien*** *nennen (vgl. Definition in 2.5.2).*

Was wir bei dem letzten Beispiel bereits stillschweigend verwendet haben, ist die Auszahlung wenn die Spieler gemischte Strategien verwenden. Dies wollen wir uns nun etwas genauer ansehen. Spieler 1 soll nun wieder m (d.h. $X = \{1, 2, ..., m\}$) und Spieler 2 n (d.h. $Y = \{1, 2, ..., n\}$) mögliche Strategien haben. Angenommen Spieler 2 spielt die reine Strategie i und Spieler 1 die gemischte Strategie $p = (p_1, ..., p_m)$. Dann ist die Auszahlung für Spieler 1:

$$A(p, i) = \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot A(k, i) = p \cdot A \cdot e_i^t$$

wobei auf der rechten Seite eine Matrixmultiplikation steht und e_i jener Einheitszeilenvektor ist, der an der i-ten Stelle eine 1 stehen hat, also $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...0) \in \mathbb{R}^n$. e_i^t steht

für den transponierten Vektor.
Denn jede Strategie $i \in X$ wird von Spieler 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von p_i gewählt. Somit ist der zu erwartende Gewinn genau die oben geschriebene Summe. Nun umgekehrt: falls Spieler 1 die reine Strategie $e_i \in \mathbb{R}^m$ und Spieler 2 die gemischte Strategie $q \in \mathbb{R}^n$ spielt so gilt für den Gewinn von Spieler 1 analog:

$$A(i,q) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k) \cdot q_k = e_i \cdot A \cdot q^t$$

Zusammen bekommen wir also das folgende Ergebnis: Spielt Spieler 1 die gemischte Strategie $p \in \Delta_1$ und Spieler 2 $q \in \Delta_2$ so ist der Gewinn für Spieler 1 gleich:

$$A(p,q) = p \cdot A \cdot q^t \tag{1}$$

2.3 Nash-Gleichgewicht

Am Anfang dieses Kapitels wollen wir eine Überlegung anstellen, welche uns zu den passenden Definitionen führen wird: Angenommen Spieler 1 gibt aus irgendeinem Grund die gemischte Strategie $p \in \Delta_1$ vor dem Spiel an, welche er vor hat zu wählen, dann würde Spieler 2 jene Spalte wählen die Spieler 1's Gewinn (somit auch Spieler 2's Verlust) minimiert. Das heißt er würde $q^* \in \Delta_2$ wählen, für welches folgende Gleichung gilt:

$$A(p,q^*) = \min_{q\in\Delta_2} A(p,q) = \min_{q\in\Delta_2}\ p \cdot A \cdot q^t. \tag{2}$$

Spieler 1, in dessen Interesse es liegt möglichst viel Gewinn zu machen, möchte somit den Ausdruck (2) maximieren. Er würde daher jenes $p^* \in \Delta_1$ bekannt geben für welches

$$A(p^*,q^*) = \max_{p\in\Delta_1}\ \min_{q\in\Delta_2} A(p,q) = \max_{p\in\Delta_1}\ \min_{q\in\Delta_2} p \cdot A \cdot q^t \tag{3}$$

gilt.
Umgekehrt: Angenommen Spieler 2 gibt jene gemischte Strategie q bekannt welche er wählen wird. Dann wird Spieler 1 jene Zeile wählen für welche Spieler 2's Gewinn möglichst klein wird, also Spieler 1's Gewinn (= Einträge in der Gewinnmatrix) möglichst groß ist. Das heißt er würde jenes $p^* \in \Delta_1$ wählen für das

$$A(p^*,q) = \max_{p\in\Delta_1} A(p,q) = \max_{p\in\Delta_1}\ p \cdot A \cdot q^t \tag{4}$$

gilt. Spieler 2, der seinen Verlust möglichst gering halten möchte, würde daher als angekündigte Strategie $q^* \in \Delta_2$ jene wählen für welche:

$$A(p^*,q^*) = \min_{q\in\Delta_2}\ \max_{p\in\Delta_1} A(p,q) = \min_{q\in\Delta_2}\ \max_{p\in\Delta_1}\ p \cdot A \cdot q^t \tag{5}$$

gilt.

Definition. *Den Wert* $\underline{V} := \max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} p\cdot A\cdot q^t$ *nennen wir den* ***unteren Wert*** *des Spiels und jenes* p^* *das Gleichung* (3) *erfüllt nennen wir* ***maximin Strategie*** *für Spieler 1. Den Wert* $\overline{V} := \min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} p\cdot A\cdot q^t$ *nennen wir den* ***oberen Wert*** *des Spiels und jenes* q^* *das Gleichung* (5) *erfüllt nennen wir* ***minimax Strategie*** *für Spieler 2.*

In Zukunft werden wir zur Vereinfachung nur von den *minimax* Strategien der beiden Spieler sprechen.

Lemma. *In einem Nullsummen Zwei-Spieler Spiel haben beide Spieler eine minimax Strategie.*

Beweis. (vgl. Ferguson [15], S.II-36) Wir führen den Beweis nur für die minimax Strategie von Spieler 1. Jene von Spieler 2 folgt auf analoger Weise.
Für ein fixes q ist $A(p,q) = p\cdot A\cdot q^t$ die Summe von n linearen Funktionen in Abhängigkeit von p. Somit ist die Funktion $\min_{q\in\Delta_2} p\cdot A\cdot q^t$ in (2) stetig (in Abhängigkeit von p) und da Δ_1 abgeschlossen und beschränkt ist muss das Maximum in einem Punkt $p^* \in \Delta_1$ angenommen werden (Satz vom Minimum und Maximum). $\square$

Wie man schon vermuten konnte, besteht zwischen dem unteren und dem oberen Wert eines Spiels ein Zusammenhang:

Lemma. *Für den unteren Wert* $\underline{V}$ *und den oberen Wert* $\overline{V}$ *eines Zwei Spieler Nullsummenspiels gilt*

$$\underline{V} \leq \overline{V}$$

Beweis. Sei $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Funktion, dann gilt ganz allgemein:

$$\min_{y'} f(x,y') \;\leq\; f(x,y) \;\leq\; \max_{x'} f(x',y)$$

An dieser Ungleichungskette ändert sich auch nichts, wenn wir links das Maximum bzw. rechts das Minimum nehmen, was uns in unserem Fall zu diesem Ergebnis führt:

$$\max_{p^*}\min_{q^*} A(p^*,q^*) \;\leq\; \min_{q^*}\max_{p^*} A(p^*,q^*) \tag{6}$$

$\square$

Definition. *Gilt in einem Zwei Spieler Nullsummenspiel* $\underline{V} = \overline{V} =: V$ *so nennen wir diesen gemeinsamen Wert den* ***Wert des Spiels*** V*. In diesem Fall nennen wir die minimax Strategien der beiden Spieler* ***optimale Strategien****.*

Definition. *Ein Paar* (p^*,q^*) *nennen wir ein* ***Nash-Gleichgewicht*** *eines Zwei Personen Nullsummenspiels, falls*

$$A(p,q^*) \;\leq\; A(p^*,q^*) \;\forall p \in \Delta_1$$

$$A(p^*,q^*) \;\leq\; A(p^*,q) \;\forall q \in \Delta_2$$

gilt.

Bemerkungen:

1. Die erste Ungleichung in der Definition eines Nash-Gleichgewichts besagt, dass Spieler 1 seinen Gewinn nicht vergrößern kann indem er alleine seine Strategie ändert. Analog für Spieler 2: dieser kann seinen Verlust nicht verringern, indem er alleine seine Strategie verändert. Also könnte man ein Nash Gleichgewicht als ein Paar von Strategien beschreiben, bei dem keiner der Spieler einen Vorteil hat, wenn er eigensinnig von der Strategie abweicht.

2. Es ist klar, dass die beiden Ungleichungen in der Definition äquivalent zu

$$\max_{p \in \Delta_1} A(p, q^*) \; = \; A(p^*, q^*) \; = \; \min_{q \in \Delta_2} A(p^*, q)$$

sind.

3. Wir wollen hier bemerken, dass, wenn wir ein *Nash-Gleichgewicht* für ein Spiel gefunden haben, wir damit zugleich auch *optimalen Strategien* für das Spiel haben. Für einen Beweis dieser Aussage vgl. Schritt *(1. ⇒ 2.)* im nächsten Beweis.

4. Ein Nash-Gleichgewicht muss nicht eindeutig sein, wie wir an folgendem Gegenbeispiel sehen können: $M = \{i \in \mathbb{N} : i \leq 10\}$ und $N = \{0\}$ mit der Gewinnfunktion

$$A(p, q) = \sin(\frac{\pi}{2} + p \cdot \pi).$$

Dann hat die Gewinnfunktion für jedes gerade $p \in M$ ein Maximum. Für jedes von diesen gilt, dass keiner der beiden Spieler sich verbessern kann (da Spieler 2 nur eine mögliche Strategie hat) indem er alleine seine Strategie ändert. Diese sind somit alle Nash-Gleichgewichte dieses Spiels.

2.4 Minimax Theorem

Satz. *Für ein Zwei-Spieler Nullsummenspiel sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

1. *Es existiert ein Nash Gleichgewicht*
2. *Das Spiel hat einen Wert V, d.h. $\underline{V} \; = \; V \; = \; \overline{V}$*
3. $\exists \; V \in \mathbb{R}, \; p^{(0)} \in \Delta_1, \; q^{(0)} \in \Delta_2$ *so dass*
   (i) $\sum_{i=1}^{m} \; a_{i,j} \; p_i^{(0)} \geq V, \; j = 1, 2, ...n$
   (ii) $\sum_{j=1}^{n} \; a_{i,j} \; q_j^{(0)} \leq V, \; i = 1, 2, ...m$

Bemerkung: 3.(i) sagt aus, dass Spieler 1 mindestens V als durchschnittlichen Gewinn bekommen kann, egal welche reine Stratgie Spieler 2 wählt. Umgekehrt 3.(ii) bedeutet, dass Spieler 2 verhindern kann, dass sein durchschnittlicher Verlust größer als V ist, egal welche reine Strategie Spieler 1 wählt.

Beweis. (vgl. Angell [27])

(1. ⇒ 2.): Sei (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\overline{V} = \min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} A(p,q) \leq \max_{p\in\Delta_1} A(p,q^*) = A(p^*,q^*) \\ = \min_{q\in\Delta_2} A(p^*,q) \leq \max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} A(p,q) = \underline{V}\end{aligned}$$

Da aber nach dem Lemma zuvor $\underline{V} \leq \overline{V}$ gelten muss, muss hier überall Gleichheit gelten.

(2. ⇒ 3.): Nun nehmen wir an, dass das Spiel einen Wert $V = \underline{V} = \overline{V}$ hat. Weiters sollen $p^{(0)}$ und q^0 die minimax Strategien der beiden Spieler sein. Des weiteren wollen wir mit α_i $(i = 1, ..., m)$ und β_j $(j = 1, ..., n)$ die reinen Strategien der beiden Spieler und mit a_{ij} die Einträge der Gewinnmatrix bezeichnen.
Damit gilt nun:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^{(0)} = A(p^{(0)}, \beta_j) &\overset{(\star\star\star)}{\geq} \min_{q\in\Delta_2} A(p^{(0)},q) \overset{(\star)}{=} \max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} A(p,q) \\ &\overset{(\star\star)}{=} V \overset{(\star\star)}{=} \min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} A(p,q) \overset{(\star)}{=} \max_{p\in\Delta_1} A(p,q^{(0)}) \\ &\overset{(\star\star\star)}{\geq} A(\alpha_i, q^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^{(0)}\end{aligned}$$

Die Gleichheitszeichen bei $(\star)$ kommen direkt von der Definition der minimax Strategien. Jene bei $(\star\star)$ entsprechen genau *2.*, was wir hier als gültig voraussetzen. Die Ungleichheitszeichen $(\star\star\star)$ sind klar, da die reinen Strategien eine Teilmenge der gemischten Strategien sind.

(3. ⇒ 1.): Aus den beiden Gleichungen *(i)* und *(ii)* sehen wir, dass

$$A(p^{(0)},q) \;\geq\; V \;\geq\; A(p,q^{(0)}) \;\; \forall p \in \Delta_1,\; q \in \Delta_2$$

gilt. Setzt man nun rechts $p = p^{(0)}$ und links $q = q^{(0)}$ so sehen wir, dass $V = A(p^{(0)}, q^{(0)})$ gelten muss, was somit *1.* zeigt. □

Nun kommen wir zu dem wichtigsten Theorem in diesem Kapitel, dem sogenannten Minimax Theorem. Um dieses zu beweisen werden wir eine bestimmte Funktion *bauen*, welche gemischte Strategien auf gemischte Strategien abbildet. Wir werden dann zeigen, dass, wenn diese Funktion einen Fixpunkt hat, das Spiel ein Gleichgewicht besitzt. Um die Existenz eines solchen Fixpunktes zu beweisen werden wir den Fixpunktsatz von Brouwer verwenden, welchen wir hier kurz formulieren wollen. Auf einen Beweis wird an dieser Stelle aber verzichtet.

Satz. ***(Brouwer's Fixpunktsatz)*** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, beschränkt und konvex und $f : K \to K$ stetig, dann gibt es einen Punkt $\hat{x} \in K$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$.*

Theorem 1. ***(Minimax Theorem)*** *Sei (X,Y,A) ein Zwei-Spieler Nullsummenspiel. Das Spiel hat einen Wert V und es existiert ein Paar von gemischten Strategien, welche optimale Strategien für die beiden Spieler sind.*

Notation. Für eine reelle Funktion f wird mit $f^+(x)$ die folgend definierte Funktion bezeichnet:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{falls } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Beweis. Wir betrachten die Menge $\Delta_1 \times \Delta_2 \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Von unseren vorherigen Überlegungen wissen wir bereits, dass diese Menge abgeschlossen, beschränkt und konvex ist.
Auf dieser Menge wollen wir uns nun eine Abbildung $T : \Delta_1 \times \Delta_2 \to \Delta_1 \times \Delta_2$ definieren. Dafür definieren wir uns zuerst die Hilfsfunktionen c_i $(i = 1, ...m)$ und d_j (j=1,...,n) wie folgt:

$$c_i(p, q) := (A(\alpha_i, q) - A(p, q))^+$$
$$d_j(p, q) := (A(p, q) - A(p, \beta_j))^+$$

wobei α_i und β_j die reinen Strategien der Spieler sind. Die Funktionen c_i sind ein Maß dafür, wie sehr sich Spieler 1 verbessert, falls er von der gemischten Strategie p zur reinen Strategie α wechselt. Analoges gilt für Spieler 2.

Nun können wir die Funktion $T : (p, q) \in \Delta_1 \times \Delta_2 \mapsto (p', q') \overset{?}{\in} \Delta_1 \times \Delta_2$ definieren: (um das Fragezeichen kümmern wir uns in Kürze)

$$p'_i := \frac{p_i + c_i(p, q)}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k(p, q)}$$

und

$$q'_j := \frac{q_j + d_j(p, q)}{1 + \sum_{k=1}^{n} d_k(p, q)}$$

wobei p_i bzw. q_j jeweils die Einträge in jenem Vektor sind, welcher die gemischte Strategie p bzw. q repräsentiert.
Da $p_i \geq 0$, $c_i \geq 0$ und $1 + \sum_k c_k \geq 1$ wissen wir, dass $p'_i \geq 0$ sein muss. Was wir noch überprüfen müssen, damit wir sicher sein können, dass T tatsächlich wieder auf den Raum $\Delta_1 \times \Delta_2$ abbildet, ist dass die Summe über alle p'_i wieder 1 ergibt:

$$\sum_{i=1}^{m} p'_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i + c_i(p,q)}{1+\sum_{k=1}^{m} c_k(p,q)} \overset{(\star)}{=} \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m} c_k(p,q)} \cdot \sum_{i=1}^{m} (p_i + c_i(p,q)) =$$

$$= \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m} c_k(p,q)} \cdot \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} p_i}_{\overset{(\star\star)}{=} 1} + \sum_{i=1}^{m} c_i(p,q) \right) = 1$$

Bei $(\star)$ können wir den Nenner aus der Summe herausziehen, da dieser nicht von i abhängt und bei $(\star\star)$ verwenden wir, dass $p \in \Delta_1$ ist. Eine analoge Rechnung zeigt: $q'_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} q'_i = 1$ woraus $q' \in \Delta_2$ folgt. Also arbeitet T tatsächlich wie gewünscht.

Im nächsten Schritt wollen wir zeigen, dass ein Fixpunkt der Abbildung T - falls er existiert - ein Nash-Gleichgewicht ist und umgekehrt, wenn wir ein Nash-Gleichgewicht gefunden haben, dass dieses ein Fixpunkt von T sein muss, d.h. wir wollen folgende Behauptung überprüfen:

$$T(\hat{p},\hat{q}) = (\hat{p},\hat{q}) \iff (\hat{p},\hat{q}) \text{ sind ein Nash-Gleichgewicht}$$

Um $(\Leftarrow)$ zu sehen müssen wir nur folgende Überlegung anstellen: Sei $(\hat{p},\hat{q})$ ein Nash-Gleichgewicht. Wie oben bereits festgestellt kann $c_i(\hat{p},\hat{q}) > 0$ nur dann auftreten, wenn es eine reine Strategie gibt, die einen höheren Gewinn (gegen $\hat{q}$) als $\hat{p}$ für Spieler 1 bringt. Würde es eine solche geben wäre das aber ein Widerspruch zu: $(\hat{p},\hat{q})$ sind Nash-Gleichgewicht. Analog für $d_j(\hat{p},\hat{q})$. Somit gilt in diesem Fall $T(\hat{p},\hat{q}) = (\hat{p},\hat{q})$.
Um $(\Rightarrow)$ zu zeigen müssen wir etwas mehr arbeiten. Zuerst werden wir die folgende Behauptung zeigen: Sei $(\hat{p},\hat{q})$ ein Fixpunkt der Abbildung T, dann $\exists i^\star : p_{i^\star} > 0$ und $c_{i^\star}(\hat{p},\hat{q}) = 0$. Um das zu sehen, betrachten wir nochmals den Gewinn von Spieler 1 bei gemischten Strategien:

$$A(\hat{p},\hat{q}) = \sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i \; A(\alpha_i,\hat{q}) \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung können wir folgern, dass es unmöglich ist, dass $\forall i : A(\hat{p},\hat{q}) < A(\alpha_i,\hat{q})$ ist, denn sonst: Sei $M := \min_i A(\alpha_i,\hat{q})$ und es gilt $m > A(\hat{p},\hat{q})$. Dann wäre aber

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i \; A(\alpha_i,\hat{q}) \geq \sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i \cdot M = M \cdot \sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i = M > A(\hat{p},\hat{q})$$

was nun aber ein Widerspruch zu (7) ist. Das heißt, es gibt mindestens einen Index $i^\star$, für welchen $p_{i^\star} > 0$ und $A(\hat{p},\hat{q}) \geq A(\alpha_i,\hat{q})$ gilt, was zu $c_{i^\star}(\hat{p},\hat{q}) = 0$ führt.
Da wir davon ausgehen, dass $(\hat{p},\hat{q})$ ein Fixpunkt der Abbildung T ist, muss

$$\hat{p}_{i^\star} = \frac{\hat{p}_{i^\star} + \overbrace{c_i(\hat{p},\hat{q})}^{=0}}{1+\sum_{k=1}^{m} c_k(\hat{p},\hat{q})} = \frac{\hat{p_{i^\star}}}{1+\sum_{k=1}^{m} c_k(\hat{p},\hat{q})}$$

gelten, was zu $\sum_{k=1}^{m} c_k(\hat{p},\hat{q}) = 0 \Rightarrow \forall i : \ \ c_i(\hat{p},\hat{q}) = 0$ führt. Das heißt $\forall i : A(\hat{p},\hat{q}) \geq A(\alpha_i,\hat{q}) \ \Rightarrow \ A(\hat{p},\hat{q}) \geq A(p,\hat{q})\ \forall p \in X$.
Analoge Überlegungen und Rechnungen führen auf: $A(\hat{p},\hat{q}) \leq A(\hat{p},q)\ \forall q \in Y$. Somit ist $(\hat{p},\hat{q})$ ein Nash-Gleichgewicht.
Um den Beweis zu beenden müssen wir nur noch zeigen, dass T tatsächlich mindestens einen Fixpunkt hat. Hier kommt der Fixpunktsatz von Brouwer ins Spiel: Da $T : (p,q) \in \Delta_1 \times \Delta_2 \mapsto (p',q') \in \Delta_1 \times \Delta_2$ stetig ist und der Raum $\Delta_1 \times \Delta_2$ abgeschlossen, beschränkt und konvex ist, garantiert uns dieser die Existenz. Da wir zuvor schon gezeigt haben, dass ein Nash-Gleichgewicht ein Paar von optimalen Strategien ist haben wir somit das Minimax Theorem bewiesen. □

Somit haben wir nach dem Satz zuvor bewiesen, dass jedes Zwei-Spieler Nullsummenspiel ein Nash-Gleichgewicht besitzt.

2.5 Phantastische Nash-Gleichgewichte und wo sie zu finden sind

In diesem letzten Abschnitt des Kapitels wollen wir uns ansehen wie wir in einigen (einfachen) Fällen Nash-Gleichgewichte eines Spiels finden, bevor wir dann einen Algorithmus kennenlernen, der bei allgemeinen Zwei-Spieler Nullsummenspielen ein Nash-Gleichgewicht finden kann.

2.5.1 Sattelpunkte

Den allereinfachsten Fall haben wir schon kennen gelernt, nämlich jenen wenn das Spiel einen Sattelpunkt besitzt.

Satz. *Ein Sattelpunkt eines Zwei-Spieler Nullsummenspiel ist ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Vergleichen der Definition von Sattelpunkt und Nash-Gleichgewicht zeigt direkt die Behauptung. □

2.5.2 Allgemeine 2x2 Gewinnmatrizen

Nun betrachten wir Zwei-Spieler Nullsummenspiele, bei welchen jeder Spieler genau 2 mögliche Strategien hat, die Gewinnmatrix A also von der Größe 2×2 ist.
Ist der Test auf Sattelpunkte negativ ausgefallen so können wir analog wie in Beispiel 2.2 jene *ausgleichenden* Strategien finden, welche, egal für welche Strategie der jeweils andere Spieler sich entscheidet, auf den gleichen durchschnittlichen Gewinn bzw. Verlust führen. Wir wollen diese nun auch formal definieren:

Definition. *Ein Paar $(\overline{p},\overline{q})$ von gemischten Strategien nennen wir **ausgleichende Strategien**, falls $\forall q \in \Delta_2 : A(\overline{p},q) = V$ und $\forall p \in \Delta_1 : A(p,\overline{q}) = V$ gilt, wobei V der Wert des Spiels ist.*

Satz. *Jedes Zwei-Spieler Nullsummenspiel mit einer 2×2 Gewinnmatrix A ohne Sattelpunkt hat ein Paar von ausgleichenden Strategien.*

Beweis. (vgl. Ferguson [15]) Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Gewinnmatrix unseres Spiels. Angenommen $a > b$ dann muss $d > b$ gelten, da b sonst ein Sattelpunkt wäre. Daraus folgt mit derselben Begründung, dass $d > c$, da sonst d ein Sattelpunkt wäre. Analog sieht man, dass $c < a$ und $a > b$ gelten muss. Dies können wir zu folgender Ungleichungskette zusammenfassen:

$$a > b < d > c < a.$$

Die gleichen Überlegungen nur mit $a < b$ führen zu einer ähnlichen Kette:

$$a < b > d < c > a.$$

(Der Fall $a = b$ führt bei der Annahme, dass es keinen Sattelpunkt gibt, zu einem Widerspruch.)
Da wir davon ausgehen, dass das Spiel keinen Sattelpunkt besitzt muss einer dieser beiden Fälle eintreten.
Nun wollen wir Gleichungen zum Berechnen der ausgleichenden Strategien finden. Angenommen Spieler 1 wählt Zeile 1 mit Wahrscheinlichkeit p, was auf den gemischten Strategievektor $(p, 1-p)$ führt. Nach der Definition von ausgleichenden Strategien soll Spieler 1 den gleichen durchschnittlichen Gewinn bekommen unabhängig von der Wahl der Spalte von Spieler 2 was uns zu der Gleichung

$$p \cdot a + (1-p) \cdot c = p \cdot b + (1-p) \cdot d$$

führt. Auf der linken Seite steht der durchschnittliche Gewinn wenn Spieler 2 die erste Spalte wählt, auf der rechten Seite falls sich Spieler 2 für die zweite Spalte entscheidet. Diese können wir nun leicht auf p umformen:

$$p = \frac{d-c}{(a-b)+(d-c)}.$$

Dieser Ausdruck macht Sinn, da die beiden Summanden $(a-b)$ und $(d-c)$ im Nenner nach den vorangegangenen Überlegungen entweder beide positiv oder negativ sind und somit der Nenner niemals 0 wird. Nun soll Spieler 2 die erste Spalte mit der Wahrscheinlichkeit q wählen. Wir stellen analoge Überlegungen an, welche auf die Gleichung

$$q \cdot a + (1-q) \cdot b = q \cdot c + (1-q) \cdot d$$

führt welche man ebenso leicht umformen kann:

$$q = \frac{d-b}{(a-b)+(d-c)}.$$

Da wir hier nun den gleichen Nenner wie zuvor haben, macht auch dieser Ausdruck Sinn. Berechnen wir nun den durchschnittlichen Gewinn bzw. Verlust der beiden Spieler so sehen wir durch einsetzen der beiden Lösungen für p bzw. q:

$$p \cdot a + (1-p) \cdot c = q \cdot a + (1-q) \cdot b = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{a - b - c + d} =: k.$$

Sei nun V der Wert des Spiels. Um zu sehen, dass $k = V$ gilt, zeigen wir nun noch, dass die gefundenen Strategien ein Nash-Gleichgewicht bilden. Dies ist aber ganz offensichtlich, da wenn Spieler 1 eine Strategie wählt, sodass es für seinen durchschnittlichen Gewinn (und somit auch den durchschnittlichen Verlust von Spieler 2) nicht relevant ist was Spieler 2 für eine wählt, so kann, egal was Spieler 2 wählt, er den durchschnittlichen Gewinn nicht ändern, d.h. sich nicht verbessern indem er alleine seine Strategie ändert. Da dies umgekehrt auch für Spieler 1 gilt, haben wir mit diesem Paar also ein Nash-Gleichgewicht gefunden. □

Somit wissen wir nun nach den abschließenden Überlegungen im Beweis, dass wir auf diese Weise immer ein Nash-Gleichgewicht finden können.

2.5.3 Dominante Strategien

In manchen Fällen ist es möglich, dass man eine Gewinnmatrix, welche *'größer'* als 2×2 ist *verkleinert* indem man dominierte Strategien entfernt. Bevor wir diese Ausdrücke präzisieren, überlegen wir sie anhand eines Beispiels.

Beispiel 2.3. *(vgl. Peham, Haslinger [26]) In diesem 'Spiel' spielt ein Gärtner gegen die Natur. Die Strategien des Gärtners entsprechen verschiedenen Unkrautvernichtern (4 verschiedene Firmen stellen ein solches Produkt her) und jene der Natur entsprechen verschiedenen Arten von Unkraut (3 verschiedene Arten können in diesem speziellen Garten wachsen).*
In der folgenden Tabelle ist angegeben (in %) wie wirkungsvoll Unkrautvernichter U_1, U_2, U_3 bzw. U_4 gegen die verschiedenen Arten von Unkraut P_1, P_2 bzw. P_3 sind.

	P_1	P_2	P_3
U_1	*80 %*	*40 %*	*45 %*
U_2	*30 %*	*60 %*	*70 %*
U_3	*75 %*	*30 %*	*30 %*
U_4	*30 %*	*60 %*	*50 %*

Wir interpretieren das ganze als ein Nullsummenspiel und wollen nun die obere Tabelle in eine 'Gewinnmatrix' für den Gärtner umschreiben:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 80 & 40 & 45 \\ 30 & 60 & 70 \\ 75 & 30 & 30 \\ 30 & 60 & 50 \end{pmatrix}$$

Ein hoher Eintrag in der Matrix A_1 bedeutet gute Chancen für den Gärtner seinen Garten frei von Unkraut zu halten und somit zu gleich schlechte Chancen für die Natur. Schauen wir uns nun die Optionen des Gärtners an und vergleichen diese, so sehen wir, dass Unkrautvernichter U_1 gegen jeden Typ bessere Erfolgschancen hat als U_3. Es wäre für den Gärtner - der seine Chancen maximieren möchte - somit keine gute Wahl U_3 zu wählen, da er in jedem Fall mit U_1 besser abschneidet. Wir können daher diese Option ausschließen. Wir sagen in diesem Fall, dass die erste Zeile die dritte strikt dominiert.
Eine analoge Überlegung führt dazu, dass wir die vierte Zeile ausschließen können, da sie von der zweiten dominiert wird. Hier ist allerdings keine strikte Dominanz mehr, da es Fälle gibt wo beide Optionen gleich gut abschneiden würden (z.B. gegen P_1). Dies führt somit zu folgender neuer Gewinnmatrix:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 80 & 40 & 45 \\ 30 & 60 & 70 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun die Situation aus der Sicht der Natur. Ihr Interesse besteht darin dem Gärtner möglichst schlechte Chancen für Erfolg mit seinem Mittel zu geben. Es wäre also, egal für welches Mittel sich der Gärtner entscheidet, P_2 immer die bessere Wahl als P_3. Wir können somit die dritte Spalte aus der Matrix A_2 entfernen und erhalten somit eine 2×2 Gewinnmatrix für welche wir die Methode aus Kapitel 2.5.2 verwenden können.

$$A = \begin{pmatrix} 80 & 40 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}$$

Wir wollen also den gemischten Strategievektor $p = (p_1, p_2)$ für den Gärtner finden, sodass es egal ist welchen Typ Unkraut die Natur wählt. Dazu müssen wir die Gleichung

$$80 \cdot p_1 + 30 \cdot (1 - p_1) = 40 \cdot p_1 + 60 \cdot (1 - p_1)$$

nach p_1 auflösen, was auf $p = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ führt. Somit sollte der Gärtner für das ursprüngliche Spiel den gemischten Strategievektor $p_1 = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0)$ spielen.

Mit diesem Beispiel haben wir nun schon eine gute Idee davon bekommen, was wir unter *(strikt) dominanten Strategien* verstehen. An dieser Stelle dennoch nochmals eine formale Definition:

Definition. *Sei A die Gewinnmatrix eines Zweispieler Nullsummenspiels und wir notieren die Einträge dieser mit $(A)_{ij} = a_{ij}$. Wir sagen die Zeile k wird von der Zeile l* ***dominiert****, falls $a_{kj} \geq a_{lj}$ $\forall j$, beziehungsweise* ***strikt dominiert****, falls $a_{kj} > a_{lj}$ $\forall j$ gilt. Eine analoge Definition verwenden wir für die (strikte) Dominanz von Spalten.*

Diese Definition von dominanten Zeilen und Spalten bezieht sich nur auf reine Strategien. Wir wollen diese nun auf gemischte Strategien erweitern.

Definition. *Wir sagen die reine Strategie k von Spieler 1 (= k-te Zeile von A) wird von der gemischten Strategie $p = (p_1, ...p_m)$ mit $p_k = 0$* ***dominiert*** *falls $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i \geq a_{kj}$ bzw.* ***strikt dominiert*** *falls $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i > a_{kj}$ gilt. Eine analoge Definition verwenden wir für die (strikte) Dominanz von gemischten Strategien von Spieler 2.*

Bevor wir diesen Abschnitt über Dominante Strategien beenden, sollten wir noch eine Überlegung anstellen ob wir nicht durch das Entfernen von (strikt) dominierten Spalten und Zeilen mögliche Nash-Gleichgewichte verlieren. Bei strikt dominierten Spalten und Zeilen ist die Antwort Nein. Dies sehen wir, wenn wir uns die Definition eines Nash-Gleichgewichts nochmals vor Augen führen, diese besagt, dass kein Spieler sich verbessern kann indem er alleine die Wahl seiner Strategie ändert. Angenommen es sei $(\tilde{p}, \tilde{q}) \in \Delta_1 \times \Delta_2$ ein Nash-Gleichgewicht, wobei es eine Strategie $p^\star \in \Delta_1$ gibt, die $\tilde{p}$ strikt dominiert. Das heißt nach Definition, dass $\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i^\star > \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot \tilde{p}_i$. Somit sieht man, dass egal was Spieler 2 für eine Strategie wählt, Spieler 1 immer besser $p^\star$ wählt, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Bei keiner strikten Dominanz sieht man durch analoge Überlegung, dass man eventuell eine Zeile/Spalte eliminiert die zu einem Nash Gleichgewicht führt, aber zumindest immer eines über bleibt.

2.5.4 Lösen von 2xn bzw. mx2 Matrizen

Für das Lösen von Nullsummenspiele, bei welchen die Gewinnmatrix A die Form $2 \times n$ oder $m \times 2$ hat können wir eine geometrische Überlegung verwenden um ein Nash-Gleichgewicht zu finden. Wir wollen uns dies auch wieder an einem konkreten Beispiel überlegen. (vgl. Ferguson [15])

Beispiel 2.4. *Gegeben ist die Gewinnmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Überlegung ist ähnlich wie in Beispielen zuvor: Wenn Spieler 1 seine erste Strategie mit Wahrscheinlichkeit p und seine zweite mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ spielt, wie viel durchschnittlichen Gewinn, hier mit G abgekürzt, kann er erwarten, je nachdem welche Spalte Spieler 2 wählt? Wir bekommen hier 4 lineare Funktionen (pro Spalte eine): $G_1 = 2 \cdot p + 4 \cdot (1-p)$; $G_2 = 3 \cdot p + (1-p)$; $G_3 = p + 6 \cdot (1-p)$ *und* $G_4 = 5 \cdot p$
Das heißt für jedes $p \in [0,1]$ kann er von einem minimalen durchschnittlichen Gewinn $G(p) = \min_j \{G_j(p)\}$ ausgehen.

Bemerkung und Definition: *Sehen wir die linearen Funktionen als Geraden $(p, G_j(p))$ im $\mathbb{R}^2$ so können wir diesen wie folgt in 2 disjunkte Teilmengen zerlegen:*

$$M_1 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists j \in \{1,2,3,4\} : x_2 \geq G_j(x_1)\}$$

$$M_2 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \forall j \in \{1,2,3,4\} : x_2 < G_j(x_1)\}$$

*Wir nennen $\partial M_1 = \partial M_2$ die **untere Hülle der Funktionen** G_j.*

Das heißt für jeden Wert von p bekommen wir mit $(p, G(p))$ einen Punkt auf der unteren Hülle der Funktionen G_j. Wir müssen nun jenen Wert $\tilde{p}$ finden für den, $G(\tilde{p}) = \max_p G(p) = \max_p \min_j G_j(p)$ gilt (vgl. Minimax Strategien in 2.3). Betrachten wir die

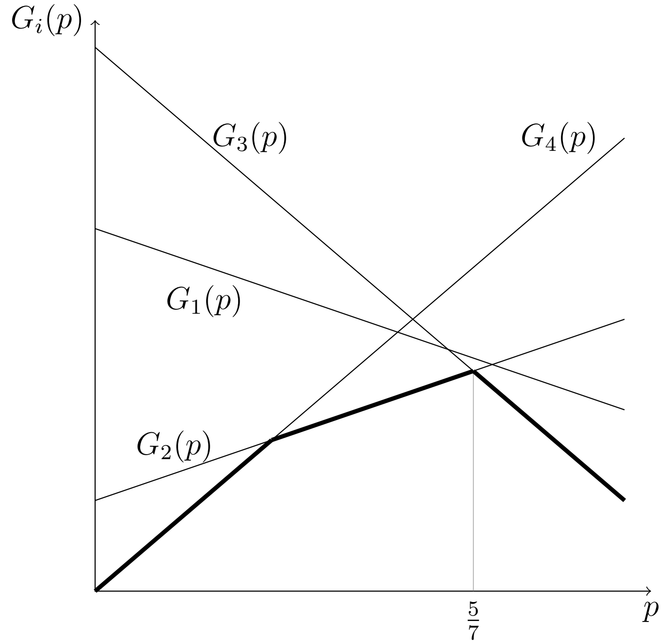


Abbildung 2: Untere Hülle der Funktionen G_i

Funktionsgraphen (in Abbildung 2) so sehen wir, dass dies genau dort der Fall ist wo sich die Graphen von G_2 und G_3 schneiden. Durch lösen der linearen Gleichung $G_2 = 3 \cdot p + (1-p) = p + 6 \cdot (1-p) = G_3$ in p bekommen wir als Lösung $p = \frac{5}{7}$. Dies ist die optimale Strategie von Spieler 1. Um die optimale Strategie von Spieler 2 zu finden überlegen wir uns, dass Spieler 2 seinen Verlust möglichst gering halten möchte, also Spieler 1 Gewinn möglichst klein sein soll. Nachdem wir nun wissen, was Spieler 1 für eine Wahrscheinlichkeit für jede Strategie wählt, muss Spieler 2 Spalte 2 oder 3 wählen, da $G_4(\frac{5}{7}) > G_1(\frac{5}{7}) > G_2(\frac{5}{7}) = G_3(\frac{5}{7})$ gilt. Wir kommen also zu der vereinfachten Gewinnmatrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

führt. Ein solches Spiel können wir bereits lösen was auf die optimale Strategie $\tilde{q} = (0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0)$ für das ursprüngliche Spiel führt.

Bemerkung: Betrachten wir die Funktionsgraphen nochmals, so sehen wir, dass die Funktion G_1 keinen Beitrag zur unteren Hülle hat. Das bedeutet, dass die erste Spalte von den anderen auf irgendeiner Art und Weise dominiert wird. Im Beispiel zuvor von der gemischten Strategie, welche Spalte 2 und 3 mit der Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{2}$ spielt, denn:

$$2 \geq \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$4 \geq \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6.$$

Dass wir so wirklich ein Nash-Gleichgewicht finden ist klar, da diese Methode nur eine Möglichkeit ist die *minimax* Strategie von Spieler 1 zu finden.

2.5.5 Pivot Methode zum Lösen eines allgemeinen Zwei-Spieler Nullsummenspiels

In diesem letzten Abschnitt des Kapitels werden wir einen Algorithmus zum Lösen eines Zwei-Spieler Nullsummenspiele aus Williams [6] kennenlernen. Den Beweis werden wir, so wie auch in der zuvor genannten Quelle, auslassen und die Methode lediglich an einem Beispiel überprüfen und veranschaulichen.

Die Schritte des Algorithmus:

1. Wir überprüfen die Gewinnmatrix A auf negative Zahlen. Sollten einer oder mehrere Einträge negativ sein, so addieren wir eine natürliche Zahl zu allen Einträgen der Gewinnmatrix A. Der Autor empfiehlt auch, etwaige Brüche durch Multiplikation aller Einträge zu beseitigen. Wichtig ist hier anzumerken, dass durch addieren einer Konstanten zu allen Einträgen sich die optimalen Strategien nicht ändern, der Wert des Spiels allerdings schon. Um diesen zu bekommen müssen wir am Ende diese Konstante vom Wert wieder abziehen.

2. Wir erweitern die Matrix A um eine Spalte rechts und eine Zeile unten. Die untere Zeile füllen wir mit -1 und die rechte Spalte mit 1 auf. In die rechte untere Ecke schreiben wir eine 0. Neben der Matrix notieren wir auch noch die Zahl $D = 1$. Diese Erweiterung der Matrix nennen wir das **erste Schema**. Dieses ist nun unterteilt in zwei Bereiche: den *Gewinnmatrixbereich* und den *'äußeren' Bereich*. Wir wollen die Matrix nun noch um einen dritten Bereich erweitern: den *Strategienbereich*. Hierfür beschriften wir die Strategien von Spieler 1 und 2 mit aufsteigenden natürlichen Zahlen $1, 2, ..., m$ bzw. $1, 2, ..., n$. Diese nennen wir im Folgenden die *Strategienamen*. Rechts neben und unterhalb der erweiterten Matrix lassen wir noch je eine Spalte bzw. Zeile frei.

3. In diesem Schritt werden wir ein sogenanntes **Pivot-Element** P aus unserem Schema wählen, hierfür gehen wir wie folgt vor:

   (a) Das Pivot-Element P muss positiv sein.

   (b) Die Zahl in der Spalte von P im äußeren Bereich der Matrix muss negativ sein. Wir nennen diese c.

   (c) Die Zahl in der Zeile von P im äußeren Bereich der Matrix nennen wir r. Für jedes bis jetzt in Frage kommende Pivot Element P berechnen wir nun das **Pivot-Kriterium:** $-\frac{r \cdot c}{P}$.
   Im ersten Schritt sind alle möglichen $c < 0$ und alle möglichen $r > 0$. Hier vereinfacht sich das Pivot-Kriterium auf: $-\frac{1 \cdot (-1)}{P} = \frac{1}{P}$.

(d) In jeder Spalte markieren wir jenes mögliche Pivot-Element mit dem kleinsten Pivot-Kriterium.

(e) Von allen markierten Zahlen markieren wir die größte. Dies ist unser Pivot-Element P.

4. In diesem Schritt bilden wir nun aus unserem vorherigen Schema und dem Pivot-Element P das neue Schema.

   (a) Die Zahl D kommt an die Position wo zuvor das Pivot-Element stand.

   (b) Die Zeile des Pivot-Element bleibt gleich (bis auf D - siehe Schritt 4.(a)).

   (c) Die Elemente in der Spalte des Pivot-Elements wechseln Vorzeichen, bleiben betragsmäßig aber gleich (bis auf D - siehe Schritt 4.(a)).

   (d) Wir ersetzen jede andere Zahl N in unserem Schema (Gewinnmatrixbereich und äußerer Bereich) durch

   $$\frac{N \cdot P - R \cdot C}{D}$$

   wobei C bzw. R jene Zahlen (aus dem vorherigen Schema) sind, die mit N in der selben Spalte und mit P in der selben Zeile bzw. umgekehrt lagen.

   (e) Wir setzen $D = P$.

5. In diesem Schritt brauchen wir nun den dritten Bereich unserer erweiterten Matrix - den Strategienbereich. Mit Schritt 5 beenden wir nun auch den Übergang vom vorherigen Schema zum neuen Schema.

   (a) Wir vertauschen den Strategienamen von Spieler 1, welcher links neben der Pivot-Element Zeile steht mit dem Strategienamen der unterhalb der Pivot-Element Spalte steht. (Beim ersten Schritt, steht unterhalb der Pivot-Spalte nichts, wir vertauschen also das leere Feld mit dem entsprechenden Strategienamen von Spieler 1)

   (b) Wir vertauschen den Strategienamen von Spieler 2, welcher oberhalb der Pivot-Element Spalte steht mit dem Strategienamen der rechts neben der Pivot-Element Zeile steht. (Beim ersten Schritt, steht rechts neben der Pivot-Zeile nichts, wir vertauschen also das leere Feld mit dem entsprechenden Strategienamen von Spieler 2)

6. In diesem Schritt überprüfen wir, ob wir mit unserem Algorithmus fertig sind oder nochmals mit unserem derzeitigen Schema bei Schritt 3 starten müssen. Hierfür überprüfen wir, ob der 'äußere' Bereich unserer erweiterten Matrix ein negatives Element beinhaltet.

   (a) Falls eine oder mehrere negative Zahlen im äußeren Bereich sind, müssen wir auf unser Schema nochmals Schritt 3.,4.,5. und 6. anwenden.

(b) Falls im äußeren Bereich keine negative Zahlen zu finden sind haben wir eine Lösung für unser Spiel gefunden. Diese sieht so aus: Der Wert des Spiels ist die Zahl D dividiert durch die 'Eckzahl im äußeren Bereich'. Hier darf man nicht vergessen, jene zuvor addierte Zahl (Schritt 1) wieder vom Wert des Spiels abzuziehen. Einen passenden gemischten Strategievektor erhalten wir, indem wir den Strategiebereich betrachten. Steht ein Strategiename unterhalb oder rechts daneben so bekommt dieser einen Wert > 0 zugeordnet (d.h. jene Strategien die links daneben oder oberhalb der Matrix stehen werden mit der Wahrscheinlichkeit 0 gespielt). Der äußere Bereich gibt an in welchem Verhältnis man die direkt daneben stehende Strategie im Bezug zu den anderen spielen soll.

Bemerkung: Ist man an mehr Nash-Gleichgewichten interessiert, so kann man den Algorithmus noch um einige Schritte ergänzen, nachzulesen in Williams [6], S.245.

Dies ist nun alles sehr abstrakt, daher wollen wir es an einem Beispiel durchrechnen, welches wir zuvor schon betrachtet haben und schauen, ob wir tatsächlich auf das gleiche Gleichgewicht wie zuvor kommen:

Beispiel 2.5. *In diesem Beispiel wollen wir den Algorithmus anhand der Gewinnmatrix aus Beispiel 2.2 testen. Dort hat die Gewinnmatrix wie folgt ausgesehen:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{+4} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Im ersten Schritt des Algorithmus überprüfen wir, ob alle Einträge positiv sind. In unserer Gewinnmatrix gibt es zwei negative Einträge, wir addieren nun also eine Zahl (hier 4) zu jedem Eintrag in der Matrix A, damit nun alle nicht negativ sind. Hierdurch verändern sich die optimalen Strategien für das Spiel nicht, der Wert aber schon. Deshalb werden wir am Ende des Algorithmus die 4 vom Wert des neu bekommenen Spiels abziehen. In Schritt 2. erweitern wir die Matrix:

		Spieler 2			
		1	2		
Spieler 1	1	2	7^*	1	
	2	7	0	1	
		-1	-1	0	$D = 1$

Dies ist unser erstes Schema. Um nun von diesem auf das zweite zu kommen, müssen wir zuerst unser Pivot-Element P finden. Wie im Algorithmus bereits bemerkt, vereinfacht sich beim ersten Mal das Pivot-Kriterium für potenzielle Kandidaten auf $\frac{1}{P}$. Berechnen wir dies und suchen uns in jeder Spalte jenen Kandidaten aus, für den dieses in der Spalte das Kleinste ist, so bekommen wir in der ersten als auch in der zweiten Spalte die 7. Da für beide das Pivot-Kriterium gleich groß ist wählen wir eine von beiden, z.B. jene in der zweiten Spalte - zuvor schon mit * markiert. Führen wir nun die Schritte 4.(a) - 4.(b)

(D ersetzt das Pivot-Element, Elemente in der Zeile von P bleiben gleich, Elemente in der Spalte von P wechseln Vorzeichen), so kommen wir auf:

Spieler 2

		1	2		
Spieler 1	1	2	1	1	
	2	$.^{1)}$	0	$.^{3)}$	
		$.^{2)}$	1	$.^{4)}$	$D = 1$

Berechnen wir nun die noch fehlenden Elemente gemäß der Formel $\frac{N \cdot P - R \cdot C}{D}$ *so erhalten wir 1)* $\frac{7 \cdot 7 - 0}{1} = 49$, *2)* $\frac{-1 \cdot 7 + 1 \cdot 2}{1} = -5$, *3)* $\frac{1 \cdot 7 - 0}{1} = 7$ *und 4)* $\frac{0 \cdot 7 - (-1) \cdot 1}{1} = 1$, *anschließend setzen wir* $D = P$. *Somit bekommen wir:*

Spieler 2

		1	2		
Spieler 1	1	2	1	1	
	2	49	0	7	
		-5	1	1	$D = 7$

Als letzten Schritt, bevor wir zum zweiten Schema kommen, müssen wir noch die Strategien wie im Algorithmus beschrieben vertauschen: P lag in der Zeile von Strategie 1 von Spieler 1, diese wird daher jetzt unterhalb der Spalte von P geschrieben. Analog dazu: P lag in der Spalte von Strategie 2 von Spieler 2, wir schreiben diese daher rechts neben die Zeile von P:

Spieler 2

		1			
Spieler 1		2	1	1	2
	2	49	0	7	
		-5	1	1	$D = 7$
			1		

Wir überprüfen nun den äußeren Bereich unseres neuen Schemas auf negative Zahlen und werden fündig: -5. *Wir müssen daher die Schritte 3. - 5. des Algorithmus auf dieses neue Schema erneut anwenden. Zuerst beginnt abermals die Suche nach unserem Pivot-Element. Da nach 3.(b) die Zahl in der Spalte des Pivot-Elements im äußeren Bereich negativ sein muss, bleibt nur die erste Spalte übrig mit den beiden Kandidaten* 2 *und* 49. *Um zu entscheiden, welche der beiden unser neues P sein wird, berechnen wir für beide das Pivot-Kriterium und sehen, dass* $-\frac{-5 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2} > \frac{35}{49} = -\frac{-5 \cdot 7}{49}$ *gilt, was uns auf* $P = 49$ *führt. Führen wir nun analog zu vorhin die Schritte 4.(a)-(e) aus und berechnen dabei 1)* $\frac{1 \cdot 49 - 0}{7} = 7$, *2)* $\frac{1 \cdot 49 - (-5) \cdot 0}{7} = 7$, *3)* $\frac{1 \cdot 49 - 7 \cdot 2}{7} = 5$ *und 4)* $\frac{1 \cdot 49 - (-5) \cdot 7}{7} = 12$ *so bekommen wir:*

Spieler 2

Spieler 1

$$\begin{array}{c|c|c||c|c}
 & 1 & & & \\ \hline
 & -2 & 7^{1)} & 5^{3)} & 2 \\ \hline
2 & 7 & 0 & 7 & \\ \hline
 & 5 & 7^{2)} & 12^{4)} & D = 49 \\ \hline
 & & 1 & &
\end{array}$$

Abermals müssen wir auch wieder die Orte der Strategienamen tauschen. Das Pivot-Element ist diesmal in der ersten Spalte und der zweiten Zeile was die Strategie 2 von Spieler 1 dazu bringt unter die erste Spalte zu wandern und die Strategie 1 von Spieler 2 dazu bringt rechts neben die zweite Zeile zu wandern.

Spieler 2

Spieler 1

$$\begin{array}{|c|c||c|c}
\hline
-2 & 7 & 5 & 2 \\ \hline
7 & 0 & 7 & 1 \\ \hline
5 & 7 & 12 & D = 49 \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{} &
\end{array}$$

Überprüfen wir nun den äußeren Bereich unseres dritten Schemas so sehen wir, dass keine negativen Zahlen mehr aufzufinden sind - wir haben somit das Ende des Algorithmus erreicht. Wir müssen nun nur noch die gemischten Strategien und den Wert des Spiels ablesen: Spieler 1 soll für eine optimale Strategie seine Strategien 1 und 2 mit dem Verhältnis $7:5$ *spielen, da die Einträge in einem gemischten Strategievektor in Summe stets 1 ergeben müssen ergibt sich somit:* $p = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})$*. Analog für Spieler 2:* $q = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})$*. Der Wert des Spiels ist* $V = \frac{D}{12} - 4 = \frac{49}{12} - 4 = \frac{1}{12}$*, wobei* (-4) *von der Addition zu Beginn des Algorithmus her kommt.*

3 n-Spieler Spiele

In diesem Kapitel wollen wir uns mit allgemeineren Spielen auseinandersetzen. Bei den meisten Definitionen und Sätzen werden wir eine beliebige Anzahl von Spielern zulassen, bei Beispielen werden wir aus Gründen der Übersichtlichkeit und guten Darstellung nur Zwei-Spieler Spiele betrachten. Einschränkung wie auch im vorherigen Kapitel wird sein, dass es nur endlich viele Spieler mit je endlich vielen Strategien gibt. Die Notationen und Definitionen werden für dieses Kapitel großteils aus dem Buch 'Evolutionary Game Theory' von Weibull [1] stammen.

3.1 Gleichgewichte in reinen Strategien für n-Spieler Spiele

Die Begriffe, die wir nun definieren, erarbeiten und verwenden werden, kamen großteils bereits in Kapitel 2 vor und werden hier verallgemeinert. Den Beginn macht der Begriff des *Spiels*.

Definition. *Sei $I = \{1, 2, ..., n\}$ die* ***Menge der Spieler****. Für jeden Spieler $i \in I$ haben wir eine Menge $S_i = \{1, 2, ..., m_i\}$ der* ***(reinen) Strategien*** *von Spieler i. Den Raum aller möglichen Kombinationen von reinen Strategien bezeichnen wir mit $S := \times_{i \in I} S_i$. Einen Vektor $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ $(\forall i: \ s_i \in S_i)$ nennen wir einen* ***reinen Strategievektor****. Des weiteren bezeichnen wir für jeden Spieler i die* ***Gewinnfunktion*** *von Spieler $i \in I$ mit $\pi_i : S \to \mathbb{R}$. Unter $\pi : s \in S \mapsto (\pi_1, ..., \pi_n) \in \mathbb{R}^n$ verstehen wir die* ***(Gesamt-) Gewinnfunktion****.*
Das Tripel (I, S, π) nennen wir dann ein ***n-Spieler Nichtnullsummenspiel*** *oder kürzer ein* ***n-Spieler Spiel****.*

Bemerkung: Der große Unterschied in der Definition hier zu jener in Kapitel 2 ist, dass es bei zwei Spielern nicht so sein muss, dass der Gewinn des einen gleich dem Verlust des anderen entspricht. Dies macht die Spiele folglich um einiges komplexer.

Betrachtet man Zwei-Personen Spiele, so können wir die Gewinnfunktionen, wie auch schon in Kapitel 2 als Matrizen darstellen. Diesmal wird es allerdings notwendig sein, dass wir pro Spieler eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ bzw. $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ haben. Diese beiden Matrizen können wir dann zu einer sogenannten **Bimatrix** zusammenfassen, wie es im nächsten Beispiel gezeigt wird. Die Zeilen von A und B können wir als die verschiedenen Strategien von Spieler 1 und die Spalten als Strategien von Spieler 2 auffassen. Die Einträge $A(i, j)$ bzw. $B(i, j)$ sind somit die Gewinne von Spieler 1 bzw. 2, falls Spieler 1 Strategie i und Spieler 2 Strategie j wählt.

Bemerkung: Bei Zwei-Spieler Nullsummenspielen gilt somit: $\forall i \in \{1, 2, ..., m_1\}, \ j \in \{1, 2, ..., m_2\}: \ A(i, j) = -B(i, j)$, wodurch wir immer nur eine der Gewinnmatrizen angeben müssen.

Wie auch schon im vorangegangenen Kapitel wollen wir bei diesen neuen allgemeineren Spielen Gleichgewichte finden. Für nur reine Strategien haben wir damals die Sattelpunkte kennengelernt. Mit der folgenden Definition wollen wir diese nun verallgemeinern.
Zur Erinnerung: Nicht jedes Spiel hatte einen Sattelpunkt, wenn es allerdings einen hatte so war es ein Nash-Gleichgewicht.

Definition. *Sei $s = (s_1, ...s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) \in S$ ein reiner Strategievektor. Wir sagen s ist ein* ***Gleichgewicht in reinen Strategien*** *falls*

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ \forall \tilde{s}_i \in S_i:\ \pi_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n\} \geq \pi_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, \tilde{s}_i, s_{i+1}, ..., s_n\}$$

gilt.

Wie auch schon beim Sattelpunkt können wir ein Gleichgewicht in reinen Strategien so in Worte fassen: Kein Spieler kann sich verbessern indem er alleine seine Strategie ändert, d.h. alle anderen Spieler bei ihrer ursprünglichen Strategie bleiben.
Wir wollen ab nun sagen, dass ein Spieler eine **beste Antwort** auf das Strategieprofil der restlichen Spieler spielt, wenn er sich nicht verbessern kann indem er alleine die Strategie ändert. Also: Ein Gleichgewicht in reinen Strategien tritt genau dann ein, wenn jeder Spieler eine beste Antwort auf die Strategien der anderen Spieler spielt.

Bemerkung: Die *ausgleichenden Strategien* aus Kapitel 2.2 bzw 2.5.2 sind beste Antworten aufeinander, denn wenn der Gewinn von Spieler 1 (und bei Nullsummenspielen somit auch für Spieler 2) unabhängig davon ist, was Spieler 2 wählt, so ist jede Wahl von Spieler 2 eine beste Antwort. Umgekehrt gilt dies auch für Spieler 1. (vgl. Ferguson [15])

Diese neuen Begriffe wollen wir uns nun an dem bekannten **Gefangenendilemma** ansehen.

Beispiel 3.1. *Zwei mutmaßliche Verbrecher werden verhaftet und für ein Verhör mit auf das Polizeirevier genommen. Die Beiden werden dort einzeln verhört. Die Beweise reichen allerdings nur für eine Verurteilung für ein kleineres Vergehen, als jenes, für welches sie verdächtigt werden. Die Polizei bietet den beiden Verdächtigen deshalb einen Deal an. Sie haben die Möglichkeit zu schweigen oder den anderen zu 'verpfeifen' (=gestehen). Sollten beide schweigen, so kommen beide für je 3 Jahre für das kleinere Verbrechen ins Gefängnis. Schweigt einer während der andere gesteht, so kommt jener, der sich kooperativ gezeigt hat, frei - der andere muss für 10 Jahre ins Gefängnis. Gestehen beide ihre Straftat so müssen beide 8 Jahre ins Gefängnis. Es wird beiden Gefangenen der Deal genau und vollständig erklärt. Wie werden sich die Beiden entscheiden? Um das näher anzusehen, interpretieren wir diese Situation als ein Zwei-Spieler Spiel, wobei die beiden Verdächtigen die Spieler sind. Wir kommen somit auf die folgenden 'Gewinnmatrizen':*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$$

Da eine hohe Anzahl an Jahren im Gefängnis unerwünscht ist, haben wir bei den Matrizen nur einen 'negativen' Gewinn mit 0 *(=Freispruch) als höchsten Wert.*

Wir können diese beiden Matrizen nun zu einer Bimatrix zusammenfassen, indem wir pro möglicher Strategiepaarung die Gewinne als Tupel aufschreiben:

		Verdächtiger 2	
		schweigen	*gestehen*
Verdächtiger 1	*schweigen*	$(-3,-3)$	$(-10,0)$
	gestehen	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Betrachten wir nun das Spiel aus der Perspektive von Verdächtigem 1. Wir haben die Option zu schweigen oder zu gestehen. Bevor wir unsere Entscheidung treffen sollten wir auch überlegen, was passiert wenn Verdächtiger 2 seine Strategie wählt. Beschließt Verdächtiger 2 zu schweigen, so wäre es für uns besser zu gestehen, da wir in dem Fall gar nicht ins Gefängnis müssten. Gesteht Verdächtiger 2, so ist es für uns ebenfalls besser zu gestehen, da wir dann 'nur' 8 statt 10 Jahre ins Gefängnis müssten. Zusammengefasst heißt das, egal was Verdächtiger 2 macht, wir sind mit der Option gestehen besser dran. Eine Analoge Überlegung könnte Verdächtigen 2 ebenfalls dazu veranlassen, zu gestehen, was zum Ergebnis 8 Jahre Gefängnis für beide führen würde.
$(-8,-8)$ *ist ein Gleichgewicht in reinen Strategien, da sich keiner der beiden 'Spieler' verbessern kann indem er alleine seine Strategie ändert. An dem Beispiel sehen wir, dass ein Gleichgewicht in reinen Strategien nicht unbedingt immer das beste Ergebnis für die beiden Spieler bedeutet und genau darin liegt das Dilemma: Wählen beide Verdächtigen ihre dominante Strategie (vgl. Kapitel 2.5.3), so müssen beide 8 Jahre ins Gefängnis, obwohl es die Möglichkeit geben würde, dass beide nur 3 Jahre 'sitzen' müssten.*
Wir werden später nochmals einen Blick auf das Gefangenendilemma werfen.

Notation: Haben wir eine Bimatrix wie in Beispiel 3.1 gegeben, so schreiben wir $< i, j >$ als Symbol für das Tupel, welches in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte steht $(i \in \{1, ..., m_1\},\ j \in \{1, ..., m_2\})$.

Beispiel 3.2. *Nun wollen wir das folgende, als Bimatrix gegebene Spiel betrachten:*

			Spieler 2	
		A	B	C
	1	$(8,11)$	$(3,4)$	$(5,1)$
Spieler 1	2	$(4,2)$	$(3,1)$	$(9,2)$
	3	$(1,1)$	$(-2,6)$	(12,12)

Hat ein Zwei-Spieler Spiel ein Gleichgewicht in reinen Strategien so können wir einen einfachen ***Algorithmus*** *verwenden um dieses zu finden:*

1. *Schritt: Wir finden auf jede Strategie von Spieler 2 die beste Antwort für Spieler 1, anschließend markieren wir den Gewinn für Spieler 1 bei dieser Strategiekombination. Also hier: Spielt Spieler 2 Strategie A, so ist für Spieler 1 Strategie 1 die beste Antwort*

(da dies den höchsten Gewinn für Spieler 1 bedeutet). Wir markieren also die 8 im Feld $< 1,1 >$. Für Strategie B ist ebenfalls Strategie 1 die beste Antwort, aber diesmal auch Strategie 2 - wir markieren also die 3 im Feld $< 1,2 >$ und die 3 im Feld $< 2,2 >$. Zuletzt für Strategie C markieren wir die 12 im Feld $< 3,3 >$.

2. *Schritt: Wir wiederholen den 1. Schritt, nur diesmal finden wir die beste Antwort für Spieler 2 für jede mögliche Strategie von Spieler 1 und markieren den Gewinn für Spieler 2 im jeweiligen Fall.*
   Also hier markieren wir die Zahlen 11 im Feld $< 1,1 >$, 2 im Feld $< 2,1 >$, 2 in $< 2,3 >$ und 12 in $< 3,3 >$.

3. *Schritt: Haben wir in einem Feld beide Zahlen unterstrichen so ist dies ein Gleichgewicht in reinen Strategien.*

Nach dem Algorithmus sieht die Bimatrix für dieses Beispiel dann so aus:

		Spieler 2		
		A	B	C
	1	$(8^*, 11^*)$	$(3^*, 4)$	$(5, 1)$
Spieler 1	2	$(4, 2^*)$	$(3^*, 1)$	$(9, 2^*)$
	3	$(1, 1)$	$(-2, 6)$	$(12^*, 12^*)$

Wir haben also die Gleichgewichte $< 1,1 >$ und $< 3,3 >$ gefunden. Wir stellen fest, dass ein solches Gleichgewicht in reinen Strategien nicht eindeutig sein muss. Überprüfen wir unser Ergebnis so sehen wir, dass sich tatsächlich keiner der beiden Spieler verbessern kann sollte er alleine vom Gleichgewicht abweichen.
Betrachtet man das Spiel, so ist es wahrscheinlicher, dass sich die beiden Spieler eher für das Gleichgewicht $< 3,3 >$ als für $< 1,1 >$ entscheiden, da für beide der Gewinn größer ist. In diesem Beispiel ist das Gleichgewicht in reinen Strategien - anders als beim Gefangenendilemma in Beispiel 3.1 - auch der höchstmögliche Gewinn für beide Spieler.

3.2 Gemischte Strategien und Gewinnfunktion

Wie auch schon bei den Zwei-Spieler Nullsummenspielen wollen wir nun **gemischte Strategien** einführen, d.h. das der Spieler nicht einfach eine seiner Strategien wählt sondern jede der möglichen Strategien mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit. Dies ist insbesondere dann interessant wenn das Spiel öfters gespielt wird und man seinen durchschnittlich zu erwartenden Gewinn maximieren möchte.

Definition. *Ein m_i-Tupel $p_i = (p_{i_1}, ..., p_{i_{m_i}})$ nennen wir eine* ***gemischte Strategie von Spieler i****, falls*

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_{i_k} = 1 \quad \textit{wobei} \quad \forall k : p_{i_k} \geq 0$$

gilt. Den Raum der gemischten Strategien von Spieler i bezeichnen wir mit:

$$\Delta_i = \{p = (p_1, ..., p_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : \sum_{k=1}^{m_1} p_k = 1 \quad und \quad \forall k : \; p_k \geq 0\}$$

*Eine gemischte Strategie von Spieler i ordnet jeder seiner (reinen) Strategien k eine Wahrscheinlichkeit p_{i_k} zu mit welcher diese gewählt wird. Ist $p_{i_k} > 0$, so sagen wir, dass die reine Strategie k im **Träger** supp(p) von p enthalten ist.*
*Unter einem **Strategieprofil** $P = (p_1, ..., p_n)$ (mit $p_i \in \Delta_i$) verstehen wir ein n-Tupel, welches von jedem Spieler eine gemischte Strategie enthält. Falls jeder Spieler seine gemischte Strategie laut dem Strategieprofil P wählt, so sagen wir 'Das Strategieprofil P wird gespielt'.*
Den Raum der Strategieprofile bezeichnen wir mit $\Theta = \times_{i \in I} \Delta_i$.

Bemerkung: Offensichtlich entsprechen die reinen Strategien $1, 2, ..., m_i \in S_i$ von Spieler i den gemischten Strategien $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{m_i}} \in \Delta_i$, wobei $e_{i_k} := (0, ..., 0, \underset{\text{k-te Stelle}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, ..., 0)$.

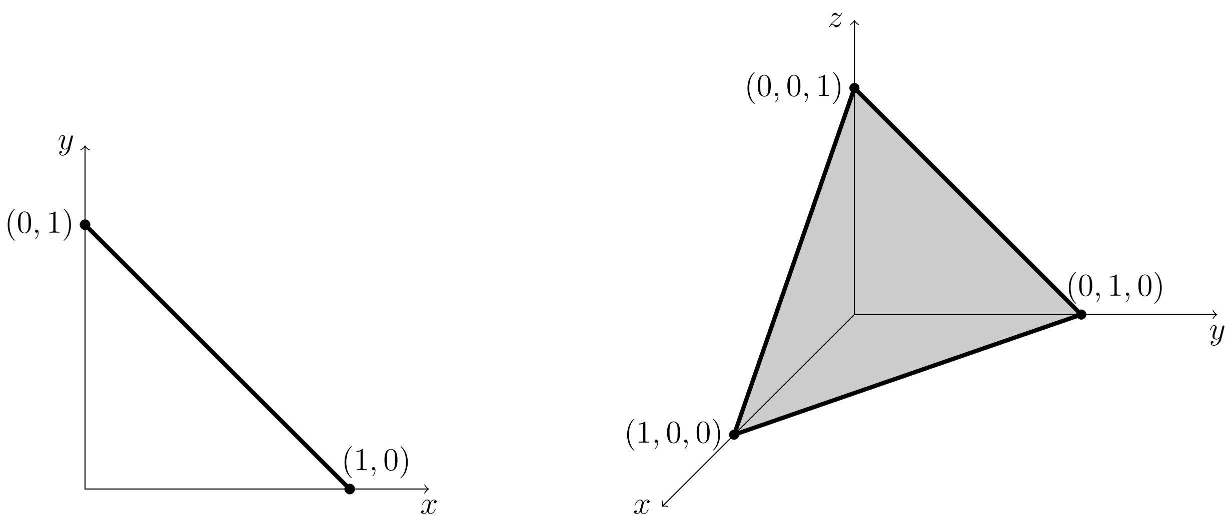
Satz. *Für alle Spieler i ist Δ_i abgeschlossen, beschränkt, konvex und $m_i - 1$ dimensional.*

Beweis. Sei $i \in \{1, ..., n\}$ beliebig. In der Bemerkung zuvor haben wir schon bemerkt, dass die reinen Strategien $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{m_i}}$ in Δ_i liegen. Aber es gilt noch mehr, nämlich dass wir jedes Element $p = (p_1, ..., p_{m_i})$ in Δ_i als Linearkombination der $\{e_{i_k}\}$ schreiben können:

$$p \; = \; \sum_{k=1}^{m_i} p_k \cdot e_{i_k}.$$

Da $\forall k : p_k \in [0, 1]$ ist dies eine Konvexkombination. Somit liegen also alle Element aus Δ_i in der konvexen Hülle $KH(\{e_{i_k}\})$ der e_{i_k}, womit wir gezeigt hätten, dass $\Delta_i \subset KH(\{e_{i_k}\})$. Die Umkehrung $KH(\{e_{i_k}\}) \subset \Delta_{i_k}$ ist offensichtlich erfüllt. Somit gilt $\Delta_i = KH(\{e_{i_k}\})$ und da die konvexe Hülle konvex ist, haben wir gezeigt, dass Δ_i konvex ist.
Offensichtlich gilt $\Delta_i \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^{m_i}$, wobei $B_1(0)$ die Kugel mit Radius 1 und dem Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^{m_i}$ ist. Somit hätten wir auch die Beschränktheit von Δ_i bewiesen.
Für die Abgeschlossenheit zeigen wir, dass das Komplement offen ist. Sei L der lineare Unterraum, welcher von den Elementen in Δ_i aufgespannt wird. Für einen Punkt $q \notin L$, gibt es einen Punkt $p \in L$, der die Normalprojektion des Punktes q auf L ist. Da $q \notin L \Rightarrow p \neq q \Rightarrow dist(p, q) = \rho > 0$. Somit können wir den Ball $B_{\frac{\rho}{2}}(q)$ um q legen, der sicher mit L keinen Punkt gemeinsam hat. Sei nun q ein Punkt in L, aber nicht in der konvexen Hülle $KH(\{e_{i_k}\})$. Auch hier gibt es einen Punkt $p \in KH(\{e_{i_k}\})$ mit $dist(p, q) = \rho = \min_r \; dist(r, q) > 0$ mit $r \in KH(\{e_{i_k}\})$. Auch hier hat der Ball $B_{\frac{\rho}{2}}(q)$ keinen Punkt mit $KH(\{e_{i_k}\})$ gemein, was zeigt, dass das Komplement $\mathbb{R} \backslash KH(\{e_{i_k}\})$ offen ist, was Δ_i abgeschlossen zu Folge hat.

□



(a) $m_i = 2$ (b) $m_i = 3$

Abbildung 3: Form von Δ_i

Als nächstes wollen wir uns auch hier wieder mit dem durchschnittlich zu erwartenden Gewinn beschäftigen, wenn man auch gemischte Strategien zulässt. Dies ist diesmal - durch die höhere Anzahl an Spielern eine kompliziertere Angelegenheit als zuvor in Kapitel 2.
Wir werden die Idee daher langsam entwickeln (siehe Leininger, Amann [20]). Für die reinen Strategievektoren haben wir die Gewinnfunktionen π_i (mit $i = 1, ..., n$). Lassen wir nun gemischte Strategien zu, also sei $P = (p_1, ..., p_n) \in \Theta$ ein beliebiges Strategieprofil. Bei diesem Strategieprofil wird ein bestimmter reiner Strategievektor $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$\omega(s) = p_{1_{s_1}} \cdot ... \cdot p_{n_{s_n}}$$

gespielt, wobei $p_{i_{s_i}}$, jenem Eintrag der gemischten Strategie p_i entspricht, der die Wahrscheinlichkeit festlegt, dass Spieler i die reine Strategie $s_i \in S_i$ spielt. Wenn man genau sein möchte, müssten wir eigentlich $\omega(P, s)$ schreiben - aus Gründen der Übersichtlichkeit bleiben wir aber bei der zuvor verwendeten Schreibweise. Somit haben wir nun die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten reinen Strategievektor berechnet, nun werden wir den Gewinn von diesem für Spieler k mit $\omega(s)$ gewichten und über alle möglichen Strategievektoren in S aufsummieren. Dies führt uns auf den beim Strategieprofil P für Spieler k zu **erwartenden Gewinn**:

$$\Pi_k(P) = \sum_{s \in S} \omega(s) \cdot \pi_k(s). \tag{8}$$

Bemerkung: Da wir uns ja großteils mit Zwei-Spieler Spielen beschäftigen, wollen wir uns die Auszahlungsfunktionen in diesem Fall noch extra ansehen. Wie wir oben schon gesehen haben, können wir die Gewinnfunktionen von Spieler 1 bzw. 2 als Matrizen A und B darstellen. Spielt nun Spieler 1 die gemischte Strategie $p = (p_1, ..., p_{m_1}) \in \Delta_1$ und Spieler

2 $q = (q_1, ..., q_{m_2}) \in \Delta_2$, so hat Spieler 1 den Gewinn $\Pi_1(p, q) = p \cdot A \cdot q^t$ und Spieler 2 $\Pi_2(p, q) = p \cdot B \cdot q^t$. Aus dieser Darstellung sehen wir auch, dass die Gewinnfunktionen in diesem Fall bilinear, d.h. linear in beiden Einträgen, sind.

3.3 Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Notation: Sei $P = (p_1, ..., p_n)$ ein Strategieprofil. Wollen wir nun einen Spieler i seine Strategie ändern lassen, wobei die anderen weiterhin laut P spielen, so schreiben wir $[q_i, P_{-i}] := (p_1, ..., p_{i-1}, q_i, p_{i+1}, ...p_n)$ für das neue Strategieprofil.

Nun wollen wir die Definitionen von '*beste Antwort*' und '*Nash-Gleichgewicht*' auf gemischte Strategien verallgemeinern (vgl. Leininger und Amann [20]).

Definition. *Sei P ein Strategieprofil. Wir nennen $q_i^\star \in \Delta_i$ eine **beste Antwort** von Spieler i auf die Strategien der anderen Spieler, falls*

$$\forall q_i \in \Delta_i : \Pi_i([q_i^\star, P_{-i}]) \geq \Pi_i([q_i, P_{-i}])$$

Wir sagen dann, dass die gemischte Strategie $q_i^\star$ eine beste Antwort auf P_{-i} ist und schreiben kurz: $q_i^\star \in B(P_{-i})$.

Bevor wir uns nun der Definition eines Gleichgewichts in gemischten Strategien widmen, wollen wir uns noch kurz überlegen wann eine Strategie $q_i^\star$ eine beste Antwort für Spieler i ist. Hier hilft uns das '*Antwortkriterium*':

Satz. ***(Antwortkriterium)*** *Sei P ein Strategieprofil. $q_i^\star \in \Delta_i$ ist genau dann eine beste Antwort von Spieler i auf P_{-i}, falls alle reinen Strategien $s \in S_i$ mit $q_{i_s}^\star > 0$ eine beste Antwort auf P_{-i} sind.*

Beweis. Angenommen $q_i^\star \in B(P_{-i})$ ist eine beste Antwort und $s', s'' \in S_i$, sind so, dass ihre Wahrscheinlichkeit gespielt zu werden > 0 ist, d.h. $q_{i_{s'}}^\star > 0$ und $q_{i_{s''}}^\star > 0$. Nun wollen wir annehmen, dass eine der beiden reinen Strategien, o.B.d.A s', eine beste Antwort auf P_{-i} ist, die andere, folglich s'', aber keine beste Antwort auf P_{-i} ist. Also: $s' \in B(P_{-i}), s'' \notin B(P_{-i})$. Das würde bedeuten, dass $\Pi_i([s', P_{-i}]) > \Pi_i([s'', P_{-i}])$ ist.
Somit sehen wir aber einen Widerspruch zu $q_i^\star \in B(P_{-i})$, denn würde man die Wahrscheinlichkeit s'' zu spielen auf 0 setzen und dafür die Wahrscheinlichkeit s' um jenen Wert erhöhen so kommt man auf eine gemischte Strategie $q_i^{\star\star}$, für welche $\Pi_i([q_i^{\star\star}, P_{-i}]) > \Pi_i([q_i^\star, P_{-i}])$ gilt.
Die Richtung ($\Leftarrow$) ist klar. $\square$

Definition. *Sei (I, S, π) ein n-Spieler Spiel. Dann nennen wir ein Strategieprofil $P = (p_1, ..., p_n)$ ein **Gleichgewicht in gemischten Strategien** oder ein **Nash-Gleichgewicht**, falls*

$$\forall i \in I,\ \forall p_i^\star \in \Delta_i :\ \Pi_i(P) \geq \Pi_i([p_i^\star, P_{-i}])$$

gilt.

Bemerkungen:

1. Formulieren wir die Definition aus, so bedeutet diese nichts anderes, als dass jeder Spieler $i \in I$ eine beste Antwort auf das Strategieprofil P_{-i} spielt, also $\forall p_i : \; p_i \in B(P_i)$. Ein Nash-Gleichgewicht ist also ein Strategieprofil bei dem sich keiner der Spieler verbessern kann indem er alleine seine Strategie ändert.

2. Nach dem Antwortkriterium und da die reinen Strategien Spezialfälle der gemischten Strategien sind, sind Gleichgewichte in reinen Strategien Spezialfälle eines Nash-Gleichgewichts.

3. Mithilfe des Antwortkriteriums können wir ein Kriterium formulieren, damit ein Strategieprofil P ein Nash-Gleichgewicht ist:

$$\forall i \in I : \Pi_i(P) = \max_{1 \leq k \leq m_i} \Pi_i([s_i^k, P_{-i}]) \tag{9}$$

wobei s_i^k die k-te reine Strategie von Spieler i ist.

3.4 Existenz eines Nash-Gleichgewichts

Nun kommen wir zum zentralen Satz des Kapitels und der gesamten Arbeit, dem **Existenzsatz von Nash** (siehe Brumm [16] und Nash [3]).

Theorem 2. ***(Existenzsatz von Nash)*** *Jedes endliche n-Spieler Spiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht.*

Den Beweis werden wir ähnlich zum Beweis des Minimax Theorems führen, da dieses ein Spezialfall von diesem Theorem ist. Deshalb werden manche Schritte, welche analog zu vorher ablaufen, nicht mehr bis ins Detail erklärt: für Erklärungen, Notationen bzw. dem Brouwer'schen Fixpunktsatz sei somit auf Kapitel 2.4 verwiesen.

Beweis. Der Beweis hat die gleichen Schritte wie auch jener des Minimax-Theorems:

1. Schritt: Wir definieren uns eine Abbildung $T : \Theta \to \Theta$. Dafür definieren wir uns zuerst Hilfsfunktionen c_i^k (mit $i = 1, ..., n$ und $k = 1, ..., m_i$). Sei $P = (p_1, ..., p_n) \in \Theta$ ein beliebiges Strategieprofil, dann

$$c_i^k(P) := (\Pi_i([s_i^k; P_{-i}]) - \Pi_i(P))^+$$

wobei s_i^k die $k - te$ reine Strategie von Spieler i sein soll. Die Funktionen c_i^k geben also an, um wie viel sich der Gewinn von Spieler i verbessert, wenn er von seiner gemischten Strategie des Strategieprofils zu seiner k-ten reinen Strategie wechselt.
Mithilfe dieser Funktionen können wir jetzt $T : P \in \Theta \mapsto T(P) = (T_1, ..., T_n) \in \Theta$ definieren:

$$T_i(P) := \frac{p_i + \sum_{k=1}^{m_i} c_i^k(P) \cdot s_i^k}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} c_i^k(P)}.$$

2. Schritt: Wir haben schon gezeigt, das $\forall i : \Delta_i$ konvex, abgeschlossen und beschränkt ist. Da Θ das kartesische Produkt der Δ_i ist, bleiben diese Eigenschaften erhalten, also können wir den Brouwer'schen Fixpunktsatz anwenden der uns die Existenz eines Fixpunktes von T liefert.

3. Schritt: Zuletzt müssen wir nur noch zeigen, dass ein Fixpunkt von T ein Nash-Gleichgewicht ist: Sei nun $P = (p_1, ..., p_n) \in \Theta$ ein Fixpunkt von T (mit $p_i = (p_i^1, ..., p_i^{m_i})$). Wie zuvor schon einmal besprochen, können wir die gemischte Strategie p_i als Linearkombination von reinen Strategien $\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k \cdot s_i^k$ schreiben, was uns zu der folgenden Darstellung von P bringt:

$$P = (p_1, ..., p_n) = (\sum_{k=1}^{m_1} p_1^k \cdot s_1^k, ..., \sum_{k=1}^{m_n} p_n^k \cdot s_n^k).$$

   Jeder Spieler i hat eine reine Strategie s_i^l, welche einen Beitrag zu p_i liefert und deren Gewinn maximal so hoch ist wie der jeder anderen, die einen Beitrag liefert, also formal: $\exists 1 \leq l \leq m_i : p_i^l > 0$ und $\Pi_i([s_i^l, P_{-i}]) \leq \Pi_i(P)$ gilt. Daraus folgt aber (nach der Definition) dass $c_i^l(P) = 0$.

   Da P aber ein Fixpunkt von T sein soll, also $(p_1, ..., p_n) = T(P) = (T_1, ..., T_n)$, betrachten wir nun die Funktion $T_i(P) \in \Delta_i$ genauer - insbesondere den $l - ten$ Eintrag T_i^l . Für T_i^l ist nur der l-te Summand der Summe im Zähler relevant, woraus sich

$$T_i^l = \frac{p_i^l + \overbrace{c_i^l(P) \cdot s_i^l}^{=0}}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} c_i^k(P)}$$

   ergibt. Daher muss, damit $T_i^l = p_i^l$ gelten kann, der Zähler $1 + \sum_{k=1}^{m_i} c_i^k(P)$ gleich 1 sein $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{m_i} c_i^k(P) = 0 \overset{c_i^k \geq 0}{\Rightarrow} \forall k \in \{1, ..., m_i\} : c_i^k(P) = 0 = \max(0, \Pi_i([s_i^k; P_{-i}]) - \Pi_i(P)) \Rightarrow \forall k \in \{1, ..., m_i\} : \Pi_i(P) \geq \Pi_i([s_i^k; P_{-i}]) \Rightarrow \Pi_i(P) = \max_{1 \leq k \leq m_i}(\Pi_i([s_i^k, P_{-i}]))$

   Was genau unserem Kriterium (9) für ein Nash-Gleichgewicht entspricht.

$\square$

3.5 Lemke-Howson Algorithmus

Wir wollen uns nun den **Lemke-Howson Algorithmus** ansehen, welcher Nash-Gleichgewichte in einem *Zwei-Spieler Spiel* finden kann. Dieser wurde nach den beiden Mathematikern Carlton E. Lemke und J.T.Howson benannt. Ihr Paper zu diesem Algorithmus wurde veröffentlicht in *'Society for Industrial and Applied Mathematics'* [11]. Wir werden uns in diesem Abschnitt allerdings an die Vorlesungsunterlagen von David Pritchard [12] halten.

Für diesen Abschnitt legen wir die folgenden Notationen fest: Die Strategienmenge für Spieler 1 bzw. 2 bezeichnen wir mit M bzw. N und die Strategien beschriften wir mit den natürlichen Zahlen $1, 2, ..., m, m+1, ..., m+n$, d.h. also: $M = \{1, 2, ..., m\}$ und $N = \{m+1, m+2, ..., m+n\}$. Die Gewinnmatrix für Spieler 1 bzw. 2 schreiben wir als $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bzw. $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mit A_i meinen wir die i-te Zeile der Matrix A und mit B_j die j-te Spalte der Matrix B.
Bevor wir die einzelnen Schritte des Algorithmus beschreiben, definieren wir uns zuerst zwei Mengen/Polytope:

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^m | \forall i \in M : x_i \geq 0 \text{ und } \forall j \in N : x^t B_j \leq 1\}$$
$$P_2 = \{y \in \mathbb{R}^n | \forall j \in N : y_j \geq 0 \text{ und } \forall i \in M : A_i y \leq 1\}$$

Diese beiden Mengen erinnern uns an die gemischten Strategien, es fehlt allerdings die Normierung, so dass die Summe der Komponenten eines Vektors 1 ergibt. Wollen wir einen Vektor aus P_1 oder P_2 normieren so schreiben wir $x^0 := \frac{1}{\sum_i x_i} \cdot x$.

Was bedeutet es wenn eine der Ungleichungen in der Definition unserer Polytope nun aber eine Gleichheit ist? Betrachten wir dies für P_1. Erfüllt ein x für ein i die Gleichung $x_i = 0$ so heißt das, dass die reine Strategie i (=m-Tupel mit einer 1 an der i-ten Stelle und sonst 0) keinen Anteil an x (und somit auch an x^0) hat, bzw. dass i nicht im Träger von x^0 enthalten ist.
Falls ein $x \in P_1$ die Gleichung $1 = x^t B_j$ erfüllt, so heißt dies, dass j eine beste Antwort auf x^0 ist, denn: $x^t B_j \cdot \frac{1}{\sum_i x_i}$ entspricht genau dem Gewinn, den Spieler 2 bekommt wenn er mit der reinen Strategie j gegen x^0 spielt. Da $\forall j \in N$ der Gewinn - laut Ungleichung - maximal $1 \cdot \frac{1}{\sum_i x_i}$ ist und Spieler 2 mit Strategie j dieses Maximum bekommt, muss es eine beste Antwort auf x^0 sein.
Das heißt diese Polytope beinhalten Informationen über *beste Antworten* und über den *Träger* einer gemischten Strategie.

Wir wollen nun zwei Annahmen treffen:

1. Alle Einträge von A und B sind nicht negativ, $\nexists i \in M : A_i$ ist eine Nullzeile und $\nexists j \in N : B_j$ ist Nullspalte. Dies können wir fordern, da wir ansonsten eine positive Zahl zu jedem Eintrag in A und B addieren, so dass die Bedingung erfüllt ist. Dies ändert das Nash-Gleichgewicht nicht (siehe Algorithmus zum Lösen von Nullsummenspielen, Kapitel 2.5.5).

2. Die Polytope P_1 und P_2 sind **einfach**, d.h. dass jede Ecke eines m-dimensionalen Polytops genau m definierende Ungleichungen erfüllt. Man kann zeigen, dass ein

Zwei-Spieler Spiel genau dann diese Annahme erfüllt, wenn die Anzahl der besten Antworten eines Spielers auf eine gemischte Strategie α nicht $|supp(\alpha)|$ übersteigt. Erfüllt ein Zwei-Spieler Spiel diese Bedingung nicht, kann der Algorithmus leicht abgewandelt angewandt werden - auf diesen Fall werden wir aber nicht eingehen (siehe Pritchard [12], S.8).

Exkurs: In diesem kurzen Exkurs wollen wir einige Notationen und Eigenschaften von Polytopen zusammenfassen - ohne diese zu beweisen.
Ein Polytop P ist, wie wir schon gesehen haben, eine Menge welche durch Ungleichungen und Gleichungen definiert wird. Wir sagen die Ungleichung $\mathbb{U}$ ist bindend für einen Punkt $x \in P$, falls für x die Ungleichung $\mathbb{U}$ eine Gleichung ist. Die Menge der für x bindenden Ungleichungen bezeichnen wir mit $\beta(x)$.
Ist das m-dimensionale Polytop P einfach, so gilt, dass jede Ecke e genau m bindende Ungleichungen hat, also $|\beta(e)| = m$. Zwei unterschiedliche Ecken des Polytops $e \neq e'$ haben nie die gleiche Menge an definierenden Ungleichungen, $\beta(e) \neq \beta(e')$. Weiters gibt es für jede Ecke e und jede Ungleichung $\mathbb{U} \in \beta(e)$ genau eine Ecke e' mit $\beta(e) \cap \beta(e') = \beta(e) \backslash \{\mathbb{U}\}$, d.h. ändern wir eine der bindenden Ungleichung einer Ecke auf eine andere so gibt es genau eine andere Ecke des Polytops die diese Menge an bindenden Ungleichungen besitzt. Dies können wir verwenden um die Ecken des Polytops zu durchlaufen: auf diesem Prinzip basiert der Algorithmus.

Als letzten Schritt in unserer Vorarbeit wollen wir den Elementen in P_1 und P_2 *Merkmale* geben und zwar:
Ein Element $x \in P_1$ soll das Merkmal $k \in M = \{1, 2, ..., m\}$ haben, falls $x_k = 0$ ist, also die k-te reine Strategie von Spieler 1 nicht im Träger von x^0 enthalten ist. $x \in P_1$ soll das Merkmal $k \in N = \{m+1, ..., m+n\}$ besitzen falls $x^t B_k = 1$ gilt - also falls die k-te reine Strategie von Spieler 2 eine beste Antwort auf x^0 von Spieler 1 ist.
Analog für $y \in P_2$: y hat das Merkmal $k \in N$ falls $y_k = 0$ und hat das Merkmal $k \in M$, falls $A_k y = 1$.

Satz. *Sei $x \in P_1$ und $y \in P_2$, mit $(x, y) \neq (0, 0)$. x und y besitzen zusammen alle $m + n$ Merkmale genau dann wenn (x^0, y^0) ein Nash-Gleichgewicht ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $i \in M$ beliebig. Dann gilt laut Voraussetzung, dass eine der beiden Strategien das Merkmal i besitzt. Also entweder $x_i = 0$ oder die reine Strategie i ist beste Antwort auf y^0. Da dies $\forall i \in M$ gilt, sehen wir, dass Spieler 1 eine beste Antwort auf y^0 spielt. Analog für Spieler 2. $\Rightarrow$ (x^0, y^0) ist ein Nash-Gleichgewicht.
($\Leftarrow$) Sei (x, y) ein Nash-Gleichgewicht und λ_i (> 0, da Einträge der Gewinnmatrix positiv) der Gewinn von Spieler i ($i = 1, 2$) bei diesem Strategieprofil $\Rightarrow x' = \frac{x}{\lambda_2} \in P_1$ und $y' = \frac{y}{\lambda_1} \in P_2$. Überprüfen wir dies für x': $x'_i \geq 0$ ist sicher erfüllt, da x eine gemischte Strategie war. Weiters gilt $xBy^t = \lambda_2 \;\;\Rightarrow\;\; x'By^t = 1$. y war aber, da (x, y) ein Nash-Gleichgewicht war, eine beste Antwort auf x, d.h. setzt man in der Gleichung eine andere Strategie von Spieler 2 ein, also auch eine reine, kann der Gewinn nur kleiner sein aber nicht größer $\Rightarrow x' \in P_1$. Nun müssen wir noch zeigen, dass x', y' zusammen alle Merkmale

besitzen. Dies ist aber offensichtlich erfüllt, da die beiden beste Antworten aufeinander sind. □

Nun wollen wir den Lemke-Howson Algorithmus aufschreiben und beweisen, dass dieser tatsächlich ein Nash-Gleichgewicht ausgibt:

Algorithm 1 Lemke-Howson Algorithmus

Wir beginnen mit x, y als die Nullvektoren von Länge m bzw. n (Der Vektor x hat also die Merkmale $1, ..., m$ und y die Merkmale $m+1, ..., m+n$)
Sei k_0 eines der Merkmale von x.
$k := k_0$
loop
    Wir entfernen das Merkmal k von x und geben x dafür ein neues. Anschließend definieren wir neu: x als die neue Ecke des Polytops, und k als das neu hinzugefügte Merkmal
    Falls $k = k_0$ endet die Schleife hier.
    Wir entfernen das Merkmal k von y und geben y dafür ein neues. Anschließend definieren wir neu: y als die neue Ecke des Polytops, und k als das neu hinzugefügte Merkmal
    Falls $k = k_0$ endet die Schleife hier.
end loop
return Nash-Gleichgewicht (x^0, y^0)

Beweis. Nach dem Satz zuvor, wissen wir, dass wir mit dem Algorithmus fertig sind, sobald wir zwei Vektoren $x \in P_1$ und $y \in P_2$ gefunden haben, die zusammen alle Merkmale besitzen und nicht die Nullvektoren sind (damit wir sie normieren können).
Im ersten Durchgang der Schleife entfernen wir von x ein beliebiges Merkmal k_0 und fügen dafür ein neues hinzu. Wir springen somit von x auf eine neue Ecke des Polytops, die wir als x neu definieren. Als nächstes entfernen wir das zu x hinzugefügte Merkmal von y. Stand jetzt haben x und y alle Merkmale bis auf jenes ursprünglich von x entfernte.
Dies setzen wir fort: wir fügen y ein neues Merkmal hinzu, wir entfernen x jenes, geben ihm dafür ein neues. Wir entfernen von y dieses usw.
Es gilt also solange $k \neq k_0$, dass genau jenes Merkmal k_0 fehlt. Es gilt aber auch weiterhin, dass sie zusammen in Summe $m + n$ Merkmale besitzen - eines von diesen haben beide gemein. Ist nun aber $k = k_0$ so besitzen beide zusammen alle Merkmale $\Rightarrow$ (x^0, y^0) ist ein Nash-Gleichgewicht. □

Bemerkung: In den verwendeten Vorlesungsnotizen [12] wird ein alternativer Beweis für den Algorithmus zu unserem angeführt. Dieser verwendet teilweise Graphentheorie auf welche wir an dieser Stelle aber nicht näher eingehen wollen. Ein Korollar des Beweises mit Graphentheorie besagt folgendes: Ein nichtdegenerietes (=P_i sind einfach) Zwei-Spieler Spiel hat eine ungerade (also auch endliche) Anzahl an Nash-Gleichgewichten.

Beispiel 3.3. ***(Anwendung des Lemke-Howson Algorithmus)*** *(vgl. Pritchard [12]).* *Wir wollen nun den Algorithmus auf die Bimatrix*

Spieler 2

		4	5	6
	1	(1,2)	$(3,1)$	$(0,0)$
Spieler 1	2	$(0,1)$	$(0,3)$	$(2,1)$
	3	$(2,0)$	$(1,0)$	$(1,3)$

anwenden. Wir haben also ein Zwei-Spieler Spiel wobei Spieler 1 die Menge $M = \{1,2,3\}$ *und Spieler 2 die Menge* $N = \{4,5,6\}$ *als mögliche Strategien haben.*

Die Bimatrix hat keine dominierten Spalten oder Zeilen. Weiters erfüllt sie Annahme 1 und 2.

Zu Beginn des Algorithmus starten wir mit den Nullvektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$*. Weiters definieren wir uns die Variablen* r_i *bzw.* s_j*, so dass:*

$$A_i y + r_i = 1 \text{ und } x^t B_j + s_{j+3} = 1.$$

Mit den Vektoren $r = (r_1, r_2, r_3)^t$ *und* $s = (s_4, s_5, s_6)^t$ *kommen wir somit auf diese zwei* 3×3*-Gleichungssysteme:*

$$Ay + r = 1 \text{ und } x^t B + s = 1.$$

Als nächstes wollen wir diese Gleichungssysteme auf die Form $r = 1 - Ay$ *bzw.* $s = 1 - x^t B$ *umformen und dann zeilenweise ausschreiben, wobei wir somit die Schema [A] und [B] bekommen, die jeweils aus drei Gleichungen bestehen:*

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - y_4 - 3y_5 && [A1] \\ r_2 &= 1 - 2y_6 && [A2] \\ r_3 &= 1 - 2y_4 y_5 - y6 && [A3] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s_4 &= 1 - 2x_1 - x_2 && [B1] \\ s_5 &= 1 - x_1 - 3x_2 && [B2] \\ s_6 &= 1 - x_2 - 3x_3 && [B3] \end{aligned}$$

Der Vektor x *besitzt derzeit die Merkmale 1,2 und 3, Vektor* y *besitzt 4,5 und 6. Laut dem Algorithmus wollen wir* x *nun eines der Merkmale entfernen, z.B. 1. Das heißt wir wählen für* x_1 *einen Wert größer* 0*. Da wir* x *aber stattdessen ein neues Merkmal (4,5 oder 6) dazu geben wollen, müssen wir diesen Wert passend wählen. Damit* x *beispielsweise das*

Merkmal 4 bekommt, müssten wir x_1 so wählen, dass die Gleichung [B1] erfüllt ist. Lösen wir also nun [B1] nach x_1 auf und setzen den Wert den wir für x_1 bekommen auch in die Gleichungen [B2] und [B3] ein so erhalten wir unser zweites [B]-Schema:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s_4 - \frac{1}{2}x_2 \qquad [B^2 1]$$
$$s_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s_4 - \frac{5}{2}x_2 \qquad [B^2 2]$$
$$s_6 = 1 - x_2 - 3x_3 \qquad [B^2 3]$$

Wir haben somit x das Merkmal 4 gegeben, laut Algorithmus müssen wir dieses also nun von y entfernen, d.h wir setzen $y_4 \neq 0$. Wir wollen y nun aber wiederum ein Merkmal stattdessen dazu geben. Da y_4 in den Gleichungen [A1] und [A3] vorkommt stehen diese zur Wahl, wir entscheiden, wie auch der Autor der angegebenen Quelle, mithilfe der Min-Ratio-Regel für [A3] (d.h. wir betrachten die Koeffizienten von y_4 und entscheiden uns für den größten). Also geben wir y das Merkmal 3. Hierfür müssen wir [A3] auf y_4 lösen und dann analog zu vorher den Wert in die anderen Gleichungen einsetzen, wir bekommen dann das Schema $[A^2]$:

$$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r_3 - \frac{5}{2}y_5 + \frac{1}{2}y_6 \qquad [A^2 1]$$
$$r_2 = 1 - 2y_6 \qquad [A^2 2]$$
$$y_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r_3 - \frac{1}{2}y_5 - \frac{1}{2}y_6 \qquad [A^2 3]$$

Der Algorithmus läuft nun solange weiter, bis einer der beiden Vektoren x oder y wieder das Merkmal bekommt welches wir zuerst entfernt hatten - also hier 1.

y wurde zuletzt das Merkmal 3 gegeben, wir müssen dieses daher x wegnehmen und geben ihm aufgrund der Min-Ratio-Regel Merkmal 6:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s_4 - \frac{1}{2}x_2 \qquad [B^3 1]$$
$$s_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s_4 - \frac{5}{2}x_2 \qquad [B^3 2]$$
$$x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}s_6 \qquad [B^3 3]$$

x wurde das Merkmal 6 gegeben, wir müssen dieses daher y wegnehmen und geben ihm aufgrund der Min-Ratio-Regel Merkmal 2:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}r_3 - \frac{5}{2}y_5 - \frac{1}{4}r_2 && [A^3 1] \\
y_6 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r_2 && [A^3 2] \\
y_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}r_3 - \frac{1}{2}y_5 + \frac{1}{4}r_2 && [A^3 3]
\end{aligned}
$$

y wurde das Merkmal 2 gegeben, wir müssen dieses daher x wegnehmen und geben ihm aufgrund der Min-Ratio-Regel Merkmal 5:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2}{5} - \frac{3}{5}s_4 + \frac{1}{5}s_5 && [B^4 1] \\
x_2 &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}s_4 - \frac{2}{5}s_5 && [B^4 2] \\
x_3 &= \frac{4}{15} - \frac{1}{15}s_4 + \frac{2}{15}s_5 - \frac{1}{3}s_6 && [B^4 3]
\end{aligned}
$$

x wurde das Merkmal 5 gegeben, wir müssen dieses daher y wegnehmen und geben ihm aufgrund der Min-Ratio-Regel Merkmal 1:

$$
\begin{aligned}
y_5 &= \frac{3}{10} + \frac{1}{5}r_3 - \frac{2}{5}r_1 - \frac{1}{10}r_2 && [A^4 1] \\
y_6 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r_2 && [A^4 2] \\
y_4 &= \frac{1}{10} - \frac{3}{5}r_3 + \frac{1}{5}r_1 + \frac{3}{10}r_2 && [A^4 3]
\end{aligned}
$$

Nun endet der Algorithmus, da wir y nun das Merkmal gegeben haben, welches wir x im ersten Schritt entfernt hatten. Hätte nun x das Merkmal 1,2 oder 3 bzw y das Merkmal 4,5 oder 6 so wäre das entsprechende x_i bzw. $y_i = 0$. Dies ist aber nicht der Fall, bei uns hat x die Merkmale 4,5,6 und y 1,2,3 was bedeutet, dass $r_i = 0$ und $s_i = 0$. (Genauer für den Fall s_4: x hat das Merkmal 4, d.h $x^t B_4 = 1$, woraus $s_4 = 0$ folgt.) Setzen wir diese in den Schemas [A^4] bzw. [B^4] gleich Null so können wir die Werte von den Komponenten unserer Vektoren x, y direkt ablesen:

$$x = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{15}\right) \text{ und } y = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}\right).$$

Um auf die gemischten Strategien zu kommen, welche das Nash-Gleichgewicht bilden, müssen wir diese beiden Vektoren noch normieren, was zu

$$x^0 = \left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right) \text{ und } y^0 = \left(\frac{1}{9}, \frac{3}{9}, \frac{5}{9}\right)$$

führt.

Beispiel 3.4. *Nun wollen wir den Algorithmus an einem einfacheren Beispiel anwenden, mit welchem wir in Kapitel 4.4 nochmals zu tun haben werden. Die Spieler haben hierfür die folgenden Gewinnmatrizen:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog zum Beispiel vorhin sollen die Strategien von Spieler 1: 1 und 2 bzw von Spieler 2: 3 und 4 heißen. Wir starten wieder mit den Vektoren $x = (0,0)^t$ und $y = (0,0)^t$. Die Komponenten vom Vektor x heißen x_1, x_2 jene von y heißen y_3, y_4. r_i, s_j sind analog zum Beispiel zuvor gewählt.
Wir kommen somit auf die beiden Gleichungssysteme [A] und [B]:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - 3y_4 && [A1] \\ r_2 &= 1 - y_3 - y_4 && [A2] \\ s_3 &= 1 - 3x_2 && [B1] \\ s_4 &= 1 - x_1 - x_2 && [B2] \end{aligned}$$

Wir entfernen nun als ersten Schritt das Merkmal 1 von x und geben ihm dafür, da x_1 nur in der Gleichung [B2] vorkommt, das Merkmal 4:

$$\begin{aligned} s_3 &= 1 - 3x_2 && [B^2 1] \\ x_1 &= 1 - x_2 - s_4 && [B^2 2] \end{aligned}$$

Da wir x das Merkmal 4 gegeben haben müssen wir es von y entfernen. Stattdessen geben wir y (nach der Min-Ratio-Regel) das Merkmal 1:

$$\begin{aligned} y_4 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} r_1 && [A^2 1] \\ r_2 &= \frac{2}{3} - y_3 + \frac{1}{3} r_1 && [A^2 2] \end{aligned}$$

Hier endet der Algorithmus auch schon wieder, da wir y nun das Merkmal gegeben haben, welches wir im ersten Schritt von x entfernt haben. x hat nun die Merkmale 2 und 4; y hat die Merkmale 1 und 3. Dies führt auf: $x_2 = 0, s_4 = 0, r_1 = 0$ und $y_3 = 0$. Hier können wir uns allerdings den Zwischenschritt, die Werte in die Gleichungssysteme einzutragen, sparen, da die Komponenten von x^0 und y^0 in Summe 1 ergeben müssen. Somit bekommen wir $x^0 = (1,0)$ und $y^0 = (0,1)$. Dass dies tatsächlich ein Nash-Gleichgewicht ist sehen

wir schnell, wenn wir die Gewinnmatrizen betrachten: Keiner der beiden Spieler kann sich verbessern indem er alleine seine Strategie ändert.
Hätten wir anfangs das Merkmal 2 *von x entfernt und hätten uns wieder an die Min-Ratio-Regel gehalten so wären wir auf das dazu symmetrische Nash-Gleichgewicht $x^0 = (0,1)$ und $y^0 = (1,0)$ gekommen.*
Wollen wir mithilfe des Algorithmus ein Gleichgewicht in gemischten Strategien für dieses Spiel finden so müssen wir darauf achten, dass am Ende des Algorithmus $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, y_3 \neq 0$ und $y_4 \neq 0$ gilt. Da die beiden Strategien aber zusammen alle Merkmale besitzen sollen muss deshalb x für diesen Fall Merkmal 3 und 4 bzw. y Merkmale 1 und 2 besitzen - hierfür müssen wir von der Min-Ratio-Regel abweichen. Die Schema [A] und [B] zu Beginn sind natürlich ident. Wir beginnen indem wir x das Merkmal 1 entfernen und dafür Merkmal 4 geben, was uns zu den gleichen $[B^2 1]$ bzw. $[B^2 2]$ führt wie zuvor. Wir müssen nun also y Merkmal 4 entfernen und ihm dafür ein anderes geben. Da wir nicht wollen, dass der Algorithmus wie zuvor hier schon abbricht, geben wir y diesmal das Merkmal 2:

$$r_1 = -2 + 3y_3 + 3r_2 \qquad [A^2_\star 1]$$
$$y_4 = 1 - y_3 - r_2 \qquad [A^2_\star 2]$$

Folglich entfernen wir nun x Merkmal 2 und geben ihm dafür 3:

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}s_3 \qquad [B^3_\star 1]$$
$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}s_3 - s_4 \qquad [B^3_\star 2]$$

Als letzten Schritt nehmen wir y das Merkmal 3 und geben ihm dafür 1:

$$y_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}r_1 - r_2 \qquad [A^3_\star 1]$$
$$y_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}r_1 \qquad [A^3_\star 2]$$

Hier endet der Algorithmus und wir haben es wie gewünscht erreicht, dass x Merkmale 3,4 und y Merkmale 1,2 besitzt, dies führt auf $r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ s_3 = 0$ und $s_4 = 0$. Setzen wir dies in die letzten Gleichungssysteme $[A^3_\star]$ und $[B^3_\star]$ ein so bekommen wir die (bereits normierten) gemischten Strategien $x^0 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ und $y^0 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

4 Anwendungen

In diesem letzten Kapitel wollen wir uns mit Anwendungen der Spieltheorie und insbesondere von Nash-Gleichgewichten beschäftigen. Wir werden ein Beispiel aus der Biologie und der Wirtschaft kennen lernen. Weiters werden wir einen Blick darauf werfen, wie sich Spieler verhalten wenn sie das Gefangenendilemma mehrmals gegeneinander spielen.

4.1 Evolutionäre Spieltheorie

Wir wollen uns nun mit der von John Maynard Smith mitbegründeten evolutionären Spieltheorie beschäftigen. In diesem Kapitel folgen wir großteils dem Anfang des Kapitel 2 aus dem Buch 'Evolutionary Game Theory' von Jörgen W. Weibull [1].
Wir betrachten eine Population von Individuen (Tiere, Bakterien,...), die von Natur aus darauf *programmiert* sind eine fixe gemischte oder reine Strategie aus ihrer möglichen Strategiemenge zu spielen. Den Gewinn eines solchen Spiels nehmen wir als Gewinn von Fitness (=bessere Überlebenschance) an. Die Frage mit der wir uns im folgenden beschäftigen wollen ist nun, was passiert, wenn man zu dieser Population eine kleine Gruppe von Individuen (=Mutanten) hinzufügt die eine andere Strategie spielt. Wir wollen mithilfe der Spieltheorie simulieren wie sich diese Mutantengruppe auf die gesamte Population auswirkt. Wird sie die ursprüngliche Form verdrängen? Stirbt die Mutation wieder aus oder leben die beiden Gruppen in einem *Gleichgewicht* zusammen?

Einschränkungen und Annahmen: Damit wir das oben beschriebene simulieren und als Spiel aufschreiben können müssen wir einige Einschränkungen und Annahmen treffen.

1. Die Zahl der Individuen soll sehr *groß* sein, weil ansonsten eine kleine Gruppe von Mutanten bzw. Aktionen eines einzelnen Individuums zu große Auswirkungen auf die gesamte Population hätten.

2. Wir gehen von einer einzelnen Population aus, bei der immer nur ein Paar von Individuen auf einmal gegeneinander 'spielt'. Wir können uns das also so vorstellen, dass nacheinander je zwei Individuen gegeneinander spielen. Wenn das Spiel beendet ist beginnt das nächste Paar.

3. Es gibt in der von uns betrachteten Population zu einem Zeitpunkt immer nur eine einzige Mutation, d.h. die Population hat Zeit auf die Mutantengruppe zu reagieren. Erst wenn die Population wieder in einem Gleichgewicht ist kann die nächste Mutation geschehen.

4. Die Individuen ohne Mutation haben eine fixe reine/gemischte Strategie die sie immer wählen. Ebenso haben die Mutanten eine (andere) fixe Strategie die sie immer spielen.

Wenn wir all das beachten kommen wir auf folgendes Spiel: Da jeweils nur ein Paar (= zwei Individuen) gegeneinander spielt, reicht es von einem Zwei Spieler Spiel auszugehen. Jedes

Individuum hat die gleichen Möglichkeiten (= gleiche Strategienmenge) und den gleichen möglichen Gewinn bzw. Verlust (= gleiche Gewinnfunktion).
Wir nennen die Menge der reinen Strategien eines Individuums $K = \{1, 2, ..., k\}$. Wie schon zuvor in Kapitel 2 und 3 bei Zwei-Spieler Spielen meinen wir mit Δ den Raum der gemischten Strategien für einen Spieler. (Da beide Spieler die gleiche Strategiemenge haben, gibt es hier nur einen.) Mit $\Theta = \Delta^2$ meinen wir den Raum der Strategieprofile. Den Gewinn (von Spieler 1), wenn Spieler 1 Strategie $p \in \Delta$ und Spieler 2 Strategie $q \in \Delta$ spielt, beschriften wir mit $\Pi(p, q)$. (Bei den hier betrachteten Spielen reicht es, die Gewinnfunktion von Spieler 1 zu benennen, da der Gewinn für Spieler 2 aufgrund der Symmetrie des Spiels in dieser Situation $\Pi(q, p)$ ist.) In den Annahmen haben wir gesagt, dass wir davon ausgehen, dass jedes Individuum (Mutant oder nicht Mutant) eine fixe Strategie hat, die es immer spielt. Sei p die Strategie, welche von den Nicht-Mutanten gespielt wird und q die Strategie die von den Mutanten gespielt wird. Der Anteil der Mutanten soll $\epsilon \ \in (0, 1)$ betragen, d.h. wählt man ein zufälliges Individuum aus der Population aus, so ist die Wahrscheinlichkeit einen Mutanten ausgewählt zu haben ϵ und einen Nicht Mutanten ausgewählt zu haben $1 - \epsilon$. Spielt also ein Individuum (nicht Mutant oder Mutant) gegen ein zufällig anderes Individuum, so ist der durchschnittlich zu erwartenden Gewinn gleich groß, wie wenn er gegen ein Individuum spielen würde, welches die gemischte Strategie $\epsilon q + (1 - \epsilon)p$ spielt.

Wir werden die oben beschriebenen Ideen anhand des sehr bekannten Falken-Tauben Spiel näher kennenlernen. Zuvor werden wir aber noch eine Verfeinerung des Nash-Gleichgewichts vornehmen. Wie wir in Kapitel 3 schon gesehen haben, kann ein allgemeines Spiel mehr als ein Nash-Gleichgewicht besitzen. Doch welches von den gefundenen ist dann das passende? Um dies zu klären gibt es Verfeinerungen, also extra Bedingungen an ein Nash-Gleichgewicht, die erfüllt sein sollen. Eine von diesen wollen wir nun definieren:

Definition. *Wir nennen die Strategie p* ***evolutionär stabile Strategie (=ESS)****, falls*

$$\forall q \ (\neq p) \in \Delta : \exists \epsilon_q \in (0, 1) : \forall \epsilon \in (0, \epsilon_q) : \Pi(p, \epsilon q + (1 - \epsilon)p) > \Pi(q, \epsilon q + (1 - \epsilon)p) \quad (10)$$

Bemerkungen:

1. Die Definition können wir wie folgt in Worte fassen: Wir betrachten eine Population bei der jedes Individuum Strategie p wählt. Diese Strategie nennen wir evolutionär stabil, falls es für jede mögliche Mutation q einen Prozentsatz ϵ_q (=Anteil der Mutanten in der Population) gibt, so dass die Individuen welche beim Spiel, gegen ein zufällig ausgewähltes Individuum, p spielen, einen durchschnittlich höheren Gewinn an Fitness haben als jene die q spielen.

2. Ist p eine ESS, so ist (p, p) ein Nash-Gleichgewicht. Um das zu sehen überlegen wir uns, dass p eine beste Antwort auf sich selbst ist. Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann $\exists q \in \Delta : \ \Pi(q, p) > \Pi(p, p)$. Dann würde aber für ein kleines ϵ (=Anteil der Mutanten) gelten, dass q einen höheren Gewinn gegen $\epsilon q + (1 - \epsilon)p$ hat als p, denn: für ein ϵ klein genug gewählt gilt, dass

$$\Pi(q, \epsilon q + (1-\epsilon)p) = \epsilon \cdot \Pi(q,q) + (1-\epsilon) \cdot \underbrace{\Pi(q,p)}_{>\Pi(p,p)} >$$

$$> \epsilon \cdot \Pi(p,q) + (1-\epsilon) \cdot \Pi(p,p) = \Pi(p, \epsilon q + (1-\epsilon)p).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (10). Wir können also etwas umständlich schreiben: Jede Strategie im Strategieprofil (p,p) ist somit beste Antwort auf alle anderen $\Rightarrow$ (p,p) ist ein Nash-Gleichgewicht.
Bezeichnen wir also mit Δ^{NG} die Menge aller Nash-Gleichgewichte des Spiels und mit Δ^{ESS} die Menge der evolutionär stabilen Strategien (=Strategieprofil, bei der jeder Spieler gleiche ESS wählt), so gilt: $\Delta^{ESS} \subseteq \Delta^{NG}$.

3. Es gilt: $\Delta^{ESS} = \{p \in \Delta^{NG} : \Pi(p,q) > \Pi(q,q) \ \forall q \in B(p), q \neq p\}$

Erinnerung: $B(p)$ ist die Menge der besten Antworten auf p.
Beweis: Für den Beweis benennen wir die Menge auf der rechten Seite mit $M := \{p \in \Delta^{NG} : \Pi(p,q) > \Pi(q,q) \ \forall q \in \beta(p), q \neq p\}$. Wir zeigen zuerst, dass wenn $p \in \Delta^{ESS}$ eine evolutionär stabile Strategie ist, p auch in M enthalten sein muss. Sei $q \in B(p)$ also neben p eine zweite beste Antwort auf p. Angenommen es gilt: $\Pi(p,q) \leq \Pi(q,q)$, d.h. das q mindestens so gut gegen q spielen würde wie $p \Rightarrow \ \Pi(p, \epsilon q + (1-\epsilon)p) \leq \Pi(q, \epsilon q + (1-\epsilon)p)$ - dies gilt aufgrund der Linearität von Π, da q nach Voraussetzung beste Antwort auf p ist und nach Annahme mindestens so gut gegen sich selbst ist wie p. Dies ist aber ein Widerspruch zu *'p ist eine ESS'*.
Bleibt noch ($p \in M \Rightarrow p \in \Delta^{ESS}$) zu zeigen: Sei nun also $p \in M$ und $q \in B(p)$.

$$\Pi(p, \epsilon q + (1-\epsilon)p) = \epsilon \cdot \underbrace{\Pi(p,q)}_{\overset{(1)}{>}\Pi(q,q)} + (1-\epsilon) \cdot \underbrace{\Pi(p,p)}_{\overset{(2)}{=}\Pi(q,p)}$$

$$> \epsilon \cdot \Pi(q,q) + (1-\epsilon) \cdot \Pi(q,p) = \Pi(q, \epsilon q + (1-\epsilon)p)$$

Bei (1) verwenden wir das $p \in M$ und bei (2) das $p, q \in B(p)$. Ist $q \notin B(p)$, so haben wir auch bei (2) ein $>$, was an der Aussage nichts ändert, womit gezeigt ist, dass die definierende Gleichung (10) $\forall y \in \Delta$ erfüllt ist $\Rightarrow \ p \in \Delta^{NG}$.

4. Die Menge aus 3. kann man äquivalent in zwei Gleichungen aufschreiben.

$$\Pi(p,p) \geq \Pi(q,p) \ \forall q \in \Delta$$
$$\Pi(p,p) = \Pi(q,p) \ \Rightarrow \Pi(p,q) > \Pi(q,q) \ \forall q \neq p$$

Diese beiden Gleichungen hat Maynard Smith (1974) ursprünglich verwendet um ein ESS zu definieren. In Worten können wir diese beiden Gleichungen so zusammenfassen: p ist genau dann eine ESS, falls es keine Strategie q gibt die *besser* gegen p spielt als p selbst. Falls sie gleich gut gegen p spielt, ist aber p besser gegen q als q selbst. Anders formuliert: Spielen alle Individuen die evolutionär stabile Strategie so hat ein einzelner (bzw. eine kleine Gruppe) keinen Vorteil davon eine andere zu spielen.

Beispiel 4.1. ***(Falken-Tauben Spiel)*** *(vgl. Leininger, Amann [20] und Hotz [14])*
Wir betrachten nun eines der bekanntesten spieltheoretischen Beispiele, das sogenannte Falken-Tauben Spiel/Modell. Hierbei betrachten wir eine Population von Vögeln, wobei zwei Individuen bei einem Aufeinandertreffen je zwei Möglichkeiten haben sich zu verhalten: 'friedfertig' (=Taube) oder 'kampflustig' (=Falke). Der Gewinn ist wie oben beschrieben ein Gewinn an Fitness/Überlebenschance, also beispielsweise Futter oder ein Revier.
Die dabei möglichen Situationen sind wie folgt:

1. *Eine Taube trifft auf eine Taube: beide sind friedfertig und wollen keine Konfrontation, deshalb teilen sie sich den Gewinn.*

2. *Ein Falke trifft auf einen Falken: beide wollen den Gewinn und werden nicht kampflos aufgeben. Einer von beiden wird den Gewinn bekommen, der andere bekommt nichts. Beide tragen Verletzungen aus dem Kampf mit (=negativer Gewinn).*

3. *Eine Taube trifft auf einen Falken: Die Taube gibt kampflos auf und der Falke bekommt den gesamten Gewinn.*

Wir können das oben beschriebene Spiel mithilfe einer Bimatrix aufschreiben:

		Individuum 2	
		Taube	*Falke*
Individuum 1	*Taube*	$\left(\frac{V}{2}, \frac{V}{2}\right)$	$(0, V)$
	Falke	$(V, 0)$	$\left(\frac{V}{2} - c, \frac{V}{2} - c\right)$

Hierbei steht V für den Gewinn und c für die Schwere der Verletzung. Im Fall *Falke gegen Falke* könnte man auch ein leicht abgeändertes Modell betrachten, bei welchem nur der Verlierer eine Verletzung davon trägt. Somit hätten beide - wie auch beim Gewinn V - je eine 50% Chance auf eine Verletzung, was zu dem Bimatrix Eintrag: $(\frac{1}{2} \cdot (V - c), \frac{1}{2} \cdot (V - c))$ führen würde, was die folgende Analyse des Spiels aber nicht grundlegend verändern würde.
Wir wollen nun das Spiel auf evolutionär stabile Strategien untersuchen:

- Ist *'Taube'* eine ESS? Dies können wir leicht überprüfen. Dazu nehmen wir an, dass die von uns beobachtete Population nur Tauben beinhaltet bis auf einen Falken (entspricht kleinst möglichem ϵ in der Definition (10) von ESS). Treffen zwei Tauben aufeinander so teilen sie sich den Gewinn, also bekommt jede $\frac{V}{2}$. Der eine Falke trifft nur auf Tauben und bekommt jedes mal einen Gewinn von V, was besser ist, somit kann Taube keine ESS sein, denn wenn ein einzelner seine Strategie ändert hätte er einen Vorteil.
  Formal (T=Taube, F=Falke): $\Pi(T, T) < \Pi(F, T)$, was der ersten definierenden Eigenschaft nach Maynard Smith widerspricht. Das heißt eine Population von Tauben kann von Falken 'infiltriert' werden.

- Ist *'Falke'* eine ESS? Hierfür machen wir eine Fallunterscheidung

  1. Fall: $\underline{\frac{V}{2} - c > 0}$:

     Hier gilt $\Pi(F,F) > \Pi(T,F)$, womit in diesem Fall *'Falke'* eine ESS ist.
  2. Fall: $\underline{\frac{V}{2} - c < 0}$:

     Hier gilt $\Pi(F,F) < \Pi(T,F)$, womit in diesem Fall *'Falke'* keine ESS ist, d.h. eine Population von Falken kann in diesem Fall von Tauben 'infiltriert' werden.

- Gibt es eine gemischte Strategie, welche eine ESS ist? Um die Frage beantworten zu können überlegen wir zuerst, dass eine gemischte Strategie $R = p \cdot T + (1-p) \cdot F \in \Delta$ die Gleichungen
$$\Pi(T,R) \overset{(1)}{=} \Pi(F,R) \overset{(2)}{=} \Pi(R,R)$$
erfüllen muss um eine ESS zu sein. Angenommen Gleichung (1) würde nicht gelten, dann hätte (o.B.d.A) T einen höheren Gewinn gegen R als F, also $\Pi(T,R) > \Pi(F,R)$. Dies könnten wir uns als Spieler zu nutze machen indem wir den Anteil p in R auf ein passendes $\overline{p} > p$ erhöhen und somit auf eine neue gemischte Strategie $\overline{R}$ kommen. Wählen wir beispielsweise $\overline{p} = 1$ so gilt für $\overline{R}$:
$$\Pi(\overline{R},R) = \Pi(T,R) = p \cdot \Pi(T,R) + (1-p) \cdot \underbrace{\Pi(T,R)}_{>\Pi(F,R)} > p \cdot \Pi(T,R) + (1-p) \cdot \Pi(F,R) = \Pi(R,R),$$
was ein Widerspruch zur ersten Bedingung nach der Definition von Maynard Smith, damit R eine ESS ist, ist. Die Gleichheit in (2) folgt direkt aus (1), denn
$$\Pi(R,R) = \Pi(p \cdot T + (1-p) \cdot F, R) = p \cdot \Pi(T,R) + (1-p) \cdot \underbrace{\Pi(F,R)}_{=\Pi(T,R)} = \Pi(T,R).$$
Gleichung (1) können wir verwenden um einen passenden Wert für p zu berechnen:
$$\begin{aligned}\Pi(T,R) = \Pi(F,R) &\Leftrightarrow p \cdot \Pi(T,T) + (1-p) \cdot \Pi(T,F) = p \cdot \Pi(F,T) + (1-p) \cdot \Pi(F,F) \\ &\Leftrightarrow p \cdot \frac{V}{2} + (1-p) \cdot 0 = p \cdot V + (1-p) \cdot (\frac{V}{2} - c) \\ &\Leftrightarrow p = 1 - \frac{V}{2c}\end{aligned}$$
Wir bekommen somit als ESS die gemischte Strategie: $R = (1 - \frac{V}{2c}) \cdot T + \frac{V}{2c} \cdot F$.

4.2 Duopol

Als nächste Anwendung von Nash-Gleichgewichten wollen wir uns mit einem wirtschaftlichen Thema beschäftigen. Wir werden zwei Modelle (Cournot Modell, Bertrand Modell) kennen lernen, welche beide die Situation zu beschreiben versuchen in welcher zwei Firmen das gleiche Produkt herstellen und beide möglichst viel Gewinn lukrieren möchten. In diesem Abschnitt werden wir der Arbeit von Ferguson [15] folgen.

4.2.1 Cournot - Modell

Beim Cournot Modell (benannt nach Antoine-Augustin Cournot, 1801-1877) bestimmen die beiden Firmen ihre Produktionsmengen für das Produkt. Der Preis ist dann eine Funktion in Abhängigkeit der insgesamt zur Verfügung stehenden Anzahl an Produkten.
Genauer: Firma 1 bzw. Firma 2 bestimmen zeitgleich, ohne zu wissen was die andere Firma macht, ihre Produktionsmengen q_1 bzw. q_2 für das Produkt. Wir gehen davon aus, dass die Firmen lediglich pro hergestelltem Produkt einen Preis von c zahlen müssen - es also keine Fixkosten für beide gibt. Stellt also Firma $i(=1,2)$ q_i Exemplare des Produkts her, so liegen die Kosten bei $c \cdot q_i$. Die insgesamt zur Verfügung stehende Anzahl an Produkten ist dann $Q := q_1 + q_2$ Die Preisfunktion P nehmen wir - etwas realitätsfern - als lineare Funktion mit einem Maximalpreis a an:

$$P(Q) = (a-Q)^+ \;=\; \begin{cases} a-Q & \text{falls } Q < a \\ 0 & \text{falls } Q > a \end{cases}$$

Bemerkung: Im Text von Ferguson wird in den Übungsbeispielen eine 'realistischere' quadratische Preisfunktion vorgeschlagen, bei welcher wir in den einzelnen Schritten mit umständlichen Termen zu tun hätten, weswegen wir bei dieser kurzen Einführung vorerst beim linearen Modell bleiben. Die quadratische Preisfunktion wird dann in Beispiel 4.2 behandelt.

Damit wir es - wie bisher auch - mit einem endlichen Spiel zu tun haben, schränken wir die Strategien der beiden Firmen nun ein: Theoretisch könnten sie so viele Produkte herstellen wie sie wollen, was zu $q_i \in [0,\infty)$ führt. Praktisch haben die beiden Firmen aber ab einer Menge von a keinen Gewinn mehr, was die Einschränkung von $q_i \in \mathbb{N} \cap [0,a]$ durchaus als realistisch erscheinen lässt.
Mit der oben genannten Preisfunktion können wir nun auch die Gewinnfunktionen angeben:

$$\Pi_i(q_1,q_2) = P(q_1,q_2) \cdot q_i - c \cdot q_i = q_i \cdot (a - q_1 - q_2 - c)$$

Beim Angeben der Gewinnfunktionen haben wir noch eine Annahme getroffen, nämlich jene, dass jedes hergestellte Produkt auch tatsächlich verkauft wird. Wir wollen nun einen Punkt $(q_1^\star, q_2^\star) \in [0,a]^2$ finden, in welchem für beide Firmen die Gewinnfunktion maximiert wird. Hierfür verwenden wir eine Methode der Differentialrechnung: Ableitung Null setzen. Dies führt uns auf das Gleichungssystem:

$$I: \quad \frac{\partial}{\partial q_1}\Pi_1(q_1,q_2) = -2\cdot q_1 + a - q_2 - c \stackrel{!}{=} 0$$
$$II: \quad \frac{\partial}{\partial q_2}\Pi_2(q_1,q_2) = -2\cdot q_2 + a - q_1 - c \stackrel{!}{=} 0$$

Dieses können wir lösen und bekommen $(q_1^\star, q_2^\star) = (\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3})$ was auf den Gewinn $\Pi_1(q_1^\star, q_2^\star) = \Pi_2(q_1^\star, q_2^\star) = \frac{(a-c)^2}{9}$ führt.
Wir sehen, dass unsere Lösung nicht immer (abhängig von den Werten von a und c) ganzzahlig sein muss. In diesem Zusammenhang haben wir nun zwei Möglichkeiten damit umzugehen. Falls das Spiel nur einmal gespielt wird runden wir auf die betragsmäßig nächstliegende ganze Zahl auf ($\overline{Z}$) bzw. ab ($\underline{Z}$). Wird das Spiel öfters gespielt, können die Firmen auch gemischte Strategien nutzen, bei welchen sie $\overline{Z}$ und $\underline{Z}$ in einem Verhältnis spielen, welches dem Gleichgewichtspunkt entspricht.
Dass dies wirklich ein Nash-Gleichgewicht ist, können wir uns leicht überlegen. Mit dem Gleichungssystem haben wir ein Paar von Strategien berechnet, welches das Maximum an Gewinn für eine Firma gewinnt, vorausgesetzt die andere Firma ändert ihre Strategie nicht oder anders formuliert: Keine der beiden Firmen hat einen Vorteil davon alleine die Strategie zu ändern.

Spezialfall: Das Cournot Modell kann auch auf die Situation angewendet werden, wenn nur eine Firma das Produkt (Anzahl q) herstellt - wodurch sich die Rechnung vereinfacht: $\Pi = q\cdot(a-q) - c\cdot q \;\; \Rightarrow \Pi'(q) = a - 2q - c \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q^\star = \frac{a-c}{2} \Rightarrow \Pi(q^\star) = \frac{(a-c)^2}{4}$, was einem (logischerweise) höherem Gewinn entspricht als wenn die Firma mit einer anderen konkurrieren müsste.

Verallgemeinerungen: Wir wollen hier kurz einige Ideen für (einfache) Verallgemeinerungen zusammenfassen. Die erste haben wir weiter oben schon erwähnt: lineare Preisfunktion durch eine realistischere ersetzen (siehe Beispiel 4.2). Wir könnten die Produktionskosten der beiden Firmen unterschiedlich hoch wählen ($\Rightarrow \; c_1, c_2$), was den Term $c\cdot q_i$ auf $c_i \cdot q_i$ in der Gewinnfunktion ändern würde. Eine weitere Vereinfachung die wir zuvor getroffen haben war der Wegfall der Fixkosten f_1, f_2 für die beiden Firmen. Diese müssten in der Gewinnfunktion als Konstanten abgezogen werden.
Möchten wir Modelle mit mehr als zwei Firmen, also beispielsweise drei Firmen, betrachten so könnten wir das Modell durch Einführung von q_3, c_3 und f_3 und daraus resultierenden neuen Preis- und Gewinnfunktionen für alle Spieler ausbauen.

Beispiel 4.2. *Wie auch zuvor betrachten wir wieder zwei Firmen die das selbe Produkt in gleicher Qualität herstellen. Die beiden Firmen entscheiden unabhängig und gleichzeitig wie viele Stück des Produkts sie produzieren wollen. Firma 1 produziert q_1 und Firma 2 q_2 Stück. Die Gesamtanzahl der verfügbaren Produkte liegt somit bei $Q = q_1 + q_2$. Die Kosten* *pro Stück liegen bei beiden Firmen bei $c = 1$. Die quadratische Preisfunktion:*

$$P(Q) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot Q^2 - 5 \cdot Q + 26 & \text{falls } 0 \leq Q \leq 10 \\ 1 & \text{falls } 10 \leq Q \end{cases}$$

hängt wie auch zuvor von Q ab. Damit wir wieder ein endliches Spiel betrachten, schränken wir die Anzahl der möglichen Stücke sinnvoll ein. Da $P(Q) - c = P(Q) - 1 = 0 \ \forall Q \geq 10$ ist, soll $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \cap [0, 10]$ gelten. Wir könnten dieses Spiel somit als 10×10 Bimatrix A aufschreiben, wobei der Eintrag $A(i,j) = (\Pi_1(i,j), \Pi_2(i,j)) = (P(i+j) \cdot i - i, P(i+j) \cdot j - j)$ in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte jenen Gewinn für Firma 1 und Firma 2 angibt, wenn Firma 1 i Stücke und Firma 2 j Stücke des Produkts produziert.
Wir wollen also nun ein Wertepaar $(q_1^\star, q_2^\star)$ finden, sodass die Funktionen $\Pi_1(q_1, q_2)$ (bei festem q_2) und $\Pi_2(q_1, q_2)$ (bei festem q_1) an dieser Stelle maximiert werden. Dies hätte zur Folge, dass es für keine der beteiligten Firmen einen Vorteil bringen würde, alleine ihre Strategie zu ändern. Wir kommen somit auf das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I: \ \frac{\partial}{\partial q_1} \Pi_1(q_1, q_2) &= \frac{1}{4} \cdot (3q_1^2 + q_2^2 + 4q_1q_2 - 40q_1 - 20q_2 + 100) \stackrel{!}{=} 0 \\ II: \ \frac{\partial}{\partial q_2} \Pi_2(q_1, q_2) &= \frac{1}{4} \cdot (q_1^2 + 3q_2^2 + 4q_1q_2 - 20q_1 - 40q_2 + 100) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Dieses führt zu den möglichen Lösungen $(q_1^\star, q_2^\star) = (\frac{15}{2}, \frac{5}{2})$ beziehungsweise $(q_1^\star, q_2^\star) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Betrachten wir nun auch die zweiten Ableitungen der Funktionen um Minimumspunkte ausschließen zu können kommen wir auf das Nash-Gleichgewicht: $(q_1^\star, q_2^\star) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Der Gewinn bei diesem Gleichgewicht ist für beide Firmen je $\frac{25}{4}$.
Bevor wir dieses Beispiel und somit das Kapitel über das Cournot Modell abschließen, wollen wir uns auch hier den Spezialfall eines Monopols - also nur eine Firma produziert das Produkt - ansehen: Es werden somit nur $q \in [0, 10]$ Stücke produziert, was zu einer Gewinnfunktion $\Pi(q) = q \cdot (\frac{1}{4} \cdot q^2 - 5 \cdot q + 26) - q$ führt. Analog zu vorhin setzen wir die erste Ableitung gleich Null und lösen die Gleichung nach q auf:

$$\Pi'(q) = \frac{3}{4} \cdot q^2 - 10 \cdot q + 25 \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow q \in \{\frac{10}{3}, 10\}$$

Damit wir das Minimum finden, müssen wir uns also auch noch die zweiten Ableitungen ansehen: $\Pi''\left(\frac{10}{3}\right) = -5$ und $\Pi''(10) = 5$. Somit ist $q = \frac{10}{3}$ unsere gesuchte Lösung. Der Gewinn für die Firma beträgt bei dieser Stückzahl $\Pi\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1000}{27}$.

4.2.2 Bertrand Modell

Anders als beim Cournot Modell legen die Firmen hier nicht die Anzahl der Stücke fest die sie produzieren wollen sondern den Preis. In diesem Fall ist die zu produzierende Stückzahl (=Nachfrage) abhängig vom Preis. Die Festlegung des Preises passiert wieder ohne Absprache und zeitgleich.

Annahmen: Für unser Modell treffen wir einige Annahmen:

- Die Produkte der beiden Hersteller sind komplett ident. Der Konsument kauft daher jenes das billigere. Somit werden persönliche Vorlieben oder Treue gegenüber einer Firma von Seiten des Konsumenten komplett ignoriert.
  Ab jetzt schreiben wir für den Preis von Firma 1 p_1 und von Firma 2 p_2. Es soll weiters $p_1, p_2 > 0$ gelten. Falls beide Firmen den gleichen Preis für ihr Produkt verlangen, also $p_1 = p_2$, so teilen sie sich den Markt gleichmäßig auf, d.h. die eine Hälfte der Konsumenten kauft bei Firma 1 die andere bei Firma 2.

- Die Kosten pro Stück sind für beide Firmen gleich hoch: c. Beide Firmen haben keine Fixkosten zu tragen. Wir fordern weiters auch $p_1, p_2 > c$, da keine der Firmen Verlust machen möchte.

- Die Nachfragefunktion ist linear abhängig von $p = \min\{p_1, p_2\}$:

$$Q(p) = \begin{cases} a - p & \text{für } p < a \\ 0 & \text{für } a < p \end{cases}$$

  wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, welche die maximale Nachfragemenge (bei einem Preis von 0) angibt.

Mit diesen Annahmen kommen wir somit auf die folgende Gewinnfunktion von Firma 1 (jene von Firma 2 ist analog aufgebaut):

$$\Pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} Q(p_1) \cdot (p_1 - c) = (a - p_1) \cdot (p_1 - c) & \text{falls } p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2} \cdot Q(p_1) \cdot (p_1 - c) = \frac{1}{2} \cdot (a - p_1) \cdot (p_1 - c) & \text{falls } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{falls } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Um in diesem Modell ein Nash-Gleichgewicht zu finden brauchen wir keine Berechnungen anzustellen sondern es reicht eine kurze Überlegung. Ein Paar $(p_1^\star, p_2^\star)$ kann nur dann ein Nash-Gleichgewicht sein, falls für mindestens einen der beiden Werte $p_i = c$ gilt, was zu einem Gewinn von 0 für beide Firmen führt. Angenommen $p_1^\star,\ p_2^\star > c$, so könnte eine Firma davon profitieren,wenn sie alleine den Preis minimal senkt und somit die gesamte Nachfrage alleine decken könnte. Dies wäre somit offensichtlich kein Nash-Gleichgewicht. Die somit gefundenen Gleichgewichte sind aber keine gute Vorhersage wie sich zwei Firmen tatsächlich in der Realität verhalten würden, wir müssen also unser Modell überarbeiten.

Für unser neues Modell werden wir eine der Annahmen von oben bearbeiten und wählen hierfür jene, dass die beiden Produkte komplett ident und gleichwertig sind und jeder Konsument einfach jenes kauft, welches den niedrigeren Preis hat. Hierfür führen wir eine Konstante $0 \leq b \leq 1$ ein, welche angibt wie sehr das eine Produkt das andere ersetzen kann. Zur Vereinfachung wählen wir für beide Produkte jeweils die gleiche Konstante, obwohl es in der Realität wohl durchaus so sein würde, dass diese für jedes Produkt einen anderen Wert annimmt. Mit unserer neu eingeführten Konstanten b können wir unsere neue Nachfragefunktionen (diesmal haben beide Firmen eine andere) aufschreiben:

$$Q_1(p_1, p_2) = (a - p_1 + b \cdot p_2)^+$$
$$Q_2(p_1, p_2) = (a - p_2 + b \cdot p_1)^+$$

Dass diese Funktionen Sinn machen und sich so verhalten wie wir das wollen überlegen wir kurz: Eine negativer Wert bei einer Nachfragefunktion macht keinen Sinn, daher kommt das '+'. Verlangt Firma 1 mehr als Firma 2, also zum Beispiel $p_1 = 2 \cdot p_2$ und sind die beiden Produkte jeweils ein guter Ersatz füreinander, also zum Beispiel $b = 0.8$ so erwarten wir, dass $Q_1(p_1, p_2) < Q_2(p_1, p_2)$:

$$\begin{aligned} Q_1(2 \cdot p_2, p_2) &= (a - 2 \cdot p_2 + 0.8 \cdot p_2)^+ = (a - 1.2 \cdot p_2)^+ \overset{p_2 > 0}{\leq} \\ &\leq (a - 0.2 \cdot p_2)^+ = (a - p_2 + 0.8 \cdot p_1)^+ = (a - p_2 + 0.8 \cdot 2 \cdot p_2)^+ = Q_2(2 \cdot p_2, p_2) \end{aligned}$$

Ein Problem haben die neuen Nachfragefunktionen allerdings, denn wenn beide Firmen einen extrem hohen Preis verlangen, so gibt es noch immer eine positive Nachfrage. Da wir uns aber sowieso nur mit endlichen Spielen auseinandersetzen wollen, wählen wir eine obere Schranke P für den möglichen Produktpreis. Dies führt auf die Strategieräume $p_1, p_2 \in [0, P]$. Das Spiel hat nun aber noch immer unendlich viele verschiedene Strategien pro Spieler, wir können dies aber einschränken indem wir nur Preise zulassen die an den ersten zwei Nachkommastellen (Cent) ungleich Null sind. Dies ist keine wirkliche Einschränkung, da in der Realität schließlich auch mit endlichen Preisen hantiert wird.

Mit unseren neuen Nachfragefunktionen ändern sich auch die Gewinnfunktionen:

$$\Pi_1(p_1, p_2) = Q_1(p_1, p_2) \cdot (p_1 - c) = (a - p_1 + b \cdot p_2)^+ \cdot (p_1 - c)$$
$$\Pi_2(p_1, p_2) = Q_2(p_1, p_2) \cdot (p_2 - c) = (a - p_2 + b \cdot p_1)^+ \cdot (p_2 - c)$$

Wir verwenden nun die gleiche Methode wie auch schon zuvor beim Cournot Modell um ein Nash-Gleichgewicht zu finden. Da wir nur an Nash-Gleichgewichten interessiert sind, die tatsächlich realistisch erscheinen, nehmen wir an, dass $(a - p_1 + b \cdot p_2), (a - p_2 + b \cdot p_1) > 0$ gilt, da sonst beide Firmen keinen Gewinn haben.
Wir lösen also nun das Gleichungssystem:

$$I: \ \frac{\partial}{\partial p_1} \Pi_1(p_1, p_2) = a - 2 \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_1 \overset{!}{=} 0$$
$$II: \ \frac{\partial}{\partial p_2} \Pi_2(p_1, p_2) = a - 2 \cdot p_2 + b \cdot p_1 + c \cdot p_2 \overset{!}{=} 0$$

Was uns zu dem Gleichgewichtspunkt $(p_1^\star, p_2^\star) = (\frac{a+c}{2-b}, \frac{a+c}{2-b})$ führt. Der Gewinn für die beiden Firma bei diesem Gleichgewicht ist je $\Pi_1(p_1^\star, p_2^\star) = \Pi_2(p_1^\star, p_2^\star) = \frac{(c \cdot b - c + a)^2}{(b-2)^2}$.

4.3 Gefangenendilemma

Mit dem bekannten Gefangenendilemma haben wir uns schon in Beispiel 3.1 beschäftigt - in diesem Abschnitt wollen wir einen vertiefenden Blick darauf werfen. Wir werden aber eine *gängigere* Form des Spiels betrachten bei welchem die Gewinne positiv sind:

		Verdächtiger 2	
		Z	V
Verdächtiger 1	Z	$(3,3)$	$(0,5)$
	V	$(5,0)$	$(1,1)$

Wie in der Bimatrix schon geschrieben, wollen wir die Strategien nun kurz mit Z für *zusammenarbeiten* und V für *verraten* beschriften.

Im Beispiel 3.1 haben wir schon festgestellt, dass das Nash-Gleichgewicht *(V,V)* nicht den höchsten Gewinn für die beiden Gefangenen darstellt. Im ersten Teil wollen wir uns ansehen ob das Nash-Gleichgewicht aber vielleicht dennoch eine gute Prognose ist wie sich echte Personen in einem solchen Spiel verhalten würden. Im zweiten Teil gehen wir auf das von Axelrod abgehaltene Computer-Simulations-Turnier zum Gefangenendilemma ein und welche Strategien sich bei häufigem Spiel gegeneinander als besonders erfolgreich erwiesen haben. Im letzten Teil des Abschnitts betrachten wir Spiele mit einem *ähnlichen* Aufbau und wie bei diesen das Nash-Gleichgewicht (in reinen Strategien) ist.

4.3.1 Experimente zum Gefangenendilemma

Da das Gefangenendilemma zu den bekanntesten Spielen der Spieltheorie gehört gibt es zu diesem auch einige Experimente, welche sich damit beschäftigen ob das Nash-Gleichgewicht ein guter Indikator dafür ist wie sich die Spieler verhalten würden oder ob es in der Realität dann doch anders ist. Im Buch von Davis (S. 125-130) [4] wird eine Experimentreihe, durchgeführt von Scodel, Minas, Malowe, Rawson, Ratoosh und Lipetz, angeführt, welche ihre Ergebnisse im *'Journal of Conflict Resolution'* in den Jahren 1959-1962 veröffentlichten. Dabei wurde das Verhalten der Spieler in einigen Variationen des Gefangenendilemmas untersucht. Wir wollen hier nun - mit dem Verweis, für mehr, auf Davis - nur mit dem klassischen, oben angegebenen Spiel beschäftigen. Jedes Zwei-Personen-Paar spielte dabei das Spiel 50 mal hintereinander, wobei sie räumlich so getrennt waren, dass eine Kommunikation für Absprache nicht möglich war. Jede der Versuchspersonen wusste aber, was sein Gegenüber die Runden zuvor gewählt hatte. Hierbei wurde festgestellt, dass die Versuchspersonen sich deutlich häufiger dafür entschieden nicht zu kooperieren, als anders. Von den 25 Paaren hatten 20 mehr (beidseitig) unkooperative Entscheidungen als sonst irgendeine der möglichen Kombinationen. Somit hat es den Anschein, dass das Nash-Gleichgewicht, welches bei diesem speziellen Spiel durch Eliminieren von dominierten Strategien gefunden werden kann, doch ein ganz guter Indikator für das Verhalten ist. Es gab dann noch eine kleine Variation des Spiels: wieder 25 Paare die 50 Runden hintereinander spielten, diesmal durften die Gegenspieler allerdings ab der 25. Runde miteinander kommunizieren. Die Resultate vor der 25. Runde waren annähernd gleich wie zuvor. Danach dominierte zwar noch immer die Nicht-Kooperation bei beiden Spielern, doch waren sie mehr bereit zu kooperieren als zuvor ohne Kommunikation.

Als nächstes gehen wir auf die Artikel von *smithsonianmag.com* [24] und *businessinsider.com* [25] aus Juli 2013 ein, die davon berichten, dass das Gefangenendilemma nun auch, von Khadjava und Lange, veröffentlicht im *'Journal of Economic Behavior & Organization*, an Gefängnisinsassen untersucht wurde. Das Experiment lief so ab, dass Paare von einer Gruppe, bestehend aus StudentInnen und Gefängnisinsassinnen (eines Frauengefängnisses), das Gefangenendilemma gegeneinander gespielt haben. Es wurde sowohl die Variante untersucht bei der die beiden Gegenspieler gleichzeitig als auch nacheinander ihre Strategien angeben. Die Gewinne wurden angepasst: für StudentInnen Euro und für die Gefängnisinsassinnen Kaffee und Zigaretten im gleichen Wert. Das Ergebnis war überraschend: Die Gefangenen waren deutlich kooperativer als zuvor angenommen und bei der Variante des gleichzeitigen Entscheidens haben die Gefangenen auch deutlich öfter kooperiert (56%) als die Studenten (37%). Betrachtete man die Ergebnisse von Paaren (von Gegenspielern) so konnten nur 13% der StudentInnen den besten gemeinsamen Gewinn erzielen, bei den Gefangenen war dieser Prozentsatz mit 30% deutlich höher. In der Variante in der sich die Gegenspieler nacheinander entschieden haben - wo die Möglichkeit den anderen für seine Kooperation auszunützen sehr einfach ist - haben deutlich mehr StudentInnen kooperiert (63%) als bei der anderen Variante. Bei den Gefangenen blieb dieser Prozentsatz etwa gleich. Für den gemeinsamen Gewinn von Paaren bedeutet dies einen Anstieg auf 39% bei den Paaren von StudentInnen.

4.3.2 Computer Simulations Turnier

In den 1980er veranstaltete Professor Robert Axelrod mehrere Turniere, bei welchen man seine Strategien für ein wiederholtes Gefangenendilemma einreichen konnte. Beim ersten Turnier musste jede Strategie gegen jede (auch sich selbst) einmal antreten. Jede Paarung hat 200 mal gegeneinander gespielt, wobei die Strategien sich merken konnten, was das Gegenüber bisher in der Begegnung gespielt hat. Insgesamt waren beim ersten Turnier 15 Strategien vertreten wobei eine davon, *Random*, jeden Zug zufällig zwischen *kooperieren* und *verraten* ausgesucht hat. Der Gewinner des Turniers war jene Strategie mit dem meisten Gewinn. Das Turnier wurde fünfmal wiederholt um Zufälle keine zu große Gewichtung zukommen zu lassen. Der Gewinner von diesem und auch von den darauffolgenden Turnieren war die sogenannte *tit-for-tat* Strategie. Wir wollen uns - um zu sehen wie unterschiedlich diese eingereichten Strategien teilweise waren - hier nun einige der gespielten Strategien ansehen (vgl. Homepage axelrod.readtehdocs.io [28]):

- *Tit-For-Tat:* Die Strategie beginnt mit *zusammen arbeiten* und spiegelt dann immer das Verhalten des Gegenübers im vorangegangenen Zug.
  Platz: 1

- *Nydegger:* Die Strategie spielt die ersten drei Runden wie Tit-For-Tat, mit der Ausnahme, falls die Strategie in der ersten Runde alleine *kooperiert* und in der zweiten Runde alleine *verraten* hat, dann wählt sie in der dritten Runde *verraten*. Nach der dritten Runde hängt die Entscheidung für die Wahl der Strategie von den drei vorangegangenen Runden ab, genauer: der Wert a_i hängt von der i-ten Runde davor ab (also i=1 ist die letzte Runde). Es gilt $a_i = 0$ falls keiner der Spieler *verraten* hat, $a_i = 1$ falls nur die Strategie selbst *verraten* hat, $a_i = 2$ falls nur die gegnerische Strategie *verraten* hat beziehungsweise $a_i = 3$ falls beide *verraten* haben. Daraus berechnen wir:
  $$A = 16 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 + a_3$$
  Die Strategie wählt *verraten* genau dann wenn
  $$A \in \{1, 6, 7, 17, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 38, 39, 45, 49, 54, 55, 58, 61\}$$
  .
  Platz: 3

- *Gorfman:* Die Strategie wählt *verraten* für die ersten beiden Runden und spiegelt dann die Wahl des Gegners für die nächsten fünf Runden. Für das restliche Spiel wählt die Strategie *kooperieren*, falls die beiden Spieler in der Runde zuvor die gleiche Wahl getroffen haben, ansonsten *kooperiert* die Strategie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$.
  Platz: 4

Aus dem erfolgreichen Abschneiden mancher Strategien konnten die folgenden Lehren gezogen werden, welche Eigenschaften eine Strategie bei wiederholtem Gefangenen Dilemma erfolgreich macht: (vgl Tesfatsion [21] und [22])

1. *Nett sein*: nicht als erster *verraten*

2. *Vergeltung/Erziehung:* schlechtes Verhalten des Gegenspielers sollte nicht ignoriert werden.

3. *Verzeihung:* Den meisten Profit können beide Spieler herausholen, wenn sie zusammenarbeiten, deshalb sollten sie verzeihen können, also nach einem Fehltritt des Gegenspielers und einer entsprechenden Strafe - siehe *Vergeltung/Erziehung* - wieder zum Kooperieren übergehen.

4. *Klare Absichten:* Die Strategie sollte mit ihren Zügen klar machen was ihre Absicht ist und dass sie bereit ist zu kooperieren, solange sie nicht betrogen wird.

5. *Ökologisch:* Um einen langfristigen Erfolg über mehrere Turniere zu haben sollte die Strategie gegen sich selbst erfolgreich sein.

Wir sehen, dass die Strategie *Tit-For-Tat* alle diese Faktoren berücksichtigt.

4.3.3 Spiele mit ähnlichem Aufbau

Betrachten wir die Gewinnbimatrix und achten nur auf die Struktur der Auszahlungen, so können wir folgendes Schema herauslesen (vgl Tesfatsion [21] und [22]):

		Spieler 2	
		Z	V
Spieler 1	Z	(R, R)	(S, T)
	V	(T, S)	(U, U)

mit $R = 3, S = 0, T = 5$ und $U = 1$, also $T > R > P > S$. Diese Ungleichung kann man durch vertauschen auf $4! = 24$ Arten anordnen. Wir wollen vier von diesen nun kennenlernen und die Nash-Gleichgewichte in (reinen) Strategien herausfinden.

1. **Dead Lock Game:** $T > P > R > S$
   Zum Beispiel:

		Spieler 2	
		Z	V
Spieler 1	Z	$(R = 1, R = 1)$	$(S = 0, T = 3)$
	V	$(T = 3, S = 0)$	$(U = 2, U = 2)$

   Dieses mal ist wieder - wie auch schon zuvor beim klassischen Gefangenendilemma - (V, V) das einzige Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Der Unterschied liegt darin, dass es diesmal besser für beide Spieler ist als (Z, Z) und somit auch eine gute Vermutung nahelegt wie sich die beiden Spieler verhalten werden.

2. **The Chicken Game** $T > R > S > P$
   Zum Beispiel:

		Spieler 2	
		Z	V
Spieler 1	Z	$(R = 2, R = 2)$	$(S = 1, T = 3)$
	V	$(T = 3, S = 1)$	$(U = 0, U = 0)$

   Dieses Spiel beschreibt die Situation wie man sie auch im Film *'The Fast and the Furious 7'* sehen kann, in welcher die Autos von Vin Diesel und seinem Gegenspieler Jason Statham aufeinander zu rasen. Beide der Spieler haben die Möglichkeit *Z=ausweichen* oder *V=gerade aus weiterfahren*. Weicht keiner von beiden aus so prallen die Autos mit voller Wucht aufeinander und beide Fahrer tragen schwere Verletzungen davon. Weicht nur einer der beiden Fahrer aus so 'verliert' er das Duell und wird als Feigling (Chicken) abgestempelt, der andere geht als Gewinner hervor.

Weichen beide aus, so gewinnt keiner, aber es wird auch keiner als Feigling abgestempelt da ja der andere auch ausgewichen ist.

In diesem Spiel sind (Z, V) und (V, Z) die beiden Nash-Gleichgewichte.

3. **Stag Hunt Game:** $R > T > P > S$
Zum Beispiel:

		Spieler 2	
		Z	V
Spieler 1	Z	$(R = 3, R = 3)$	$(S = 0, T = 2)$
	V	$(T = 2, S = 0)$	$(U = 1, U = 1)$

Dieses Spiel geht auf Jean-Jacques Rousseau (französischer Philosoph, 1712-1778) zurück und heißt zu Deutsch 'Hirschjagd': Zwei Jäger sind zusammen im Wald. Beide haben die Wahl *Z=in Stellung bleiben* um einen großen Hirschen zu jagen oder *V=sich verlocken lassen* und die vorbeilaufenden Hasen zu erlegen. Damit der Hirsch erlegt werden kann müssen beide Spieler in Stellung bleiben und auf den richtigen Moment warten. Die Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien sind bei diesem Spiel (Z, Z) bzw. (V, V), wobei das erste von den beiden für beide Jäger den höchstmöglichen Gewinn bedeuten würde.

4. **Battle of the Sexes:** $T > S > R = U = 0$
Zum Beispiel:

		Spieler 2	
		Z	V
Spieler 1	Z	$(R = 0, R = 0)$	$(S = 1, T = 12)$
	V	$(T = 12, S = 1)$	$(U = 0, U = 0)$

Dieses Spiel beschreibt die Situation in der ein Paar überlegt was sie für ihren Sonntagabend planen sollen. Er würde gern ein Fußballmatch schauen, Sie würde gerne ins Ballett gehen. Beide haben nun die Möglichkeit *Z=das zu tun was der Partner möchte* oder *V=das zu tun was er/sie selber möchte*. Es ist beiden wichtig etwas gemeinsam zu unternehmen, deshalb ist der *'Gewinn'* für beide gleich Null wenn sie getrennt unterwegs sind. Die Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien sind in diesem Spiel *(Z,V)* und *(V,Z)*. Ein guter Ratschlag für die beiden wäre somit, dass sie abwechselnd entscheiden dürfen.

4.4 'The Problem with the Blonde'

Zum Abschluss der Arbeit wollen wir uns mit einer Szene aus dem Film *'A Beautiful Mind - Genie und Wahnsinn'* beschäftigen. Der Film, bei welchem Ron Howard Regie führte und

welcher im Jahr 2002 vier Oscar (Bester Film, Beste Regie, Beste Nebendarstellerin und Bestes adaptiertes Drehbuch) gewinnen konnte und vier weitere Nominierungen bekam, erzählt das Leben von John Nash (gespielt von Russell Crowe), wobei seine Krankheit - Schizophrenie - im Vordergrund steht. Am Ende des Films gibt es auch eine Szene in welcher er den Nobelpreis in Wirtschaftswissenschaften für seine Erfolge im Bereich der Spieltheorie verliehen bekommt.
In der von uns betrachteten Szene sitzen Nash und ein paar seiner Studienkollegen in einer Bar. Nash ist vertieft in einen Stapel von Papier vor ihm um eine große Idee für seine Doktorarbeit zu finden, als eine blonde Frau mit einigen brünetten Freundinnen die Bar betritt. Nash und seine Kollegen sind ganz angetan von *der Blonden* und scherzen das jeder von ihnen sie gerne ansprechen würde. Plötzlich schaut Nash auf, und es wird in einer filmisch toll umgesetzten Szene mit herrlicher Musikuntermalung von James Horner versucht anhand dieser Situation ein Nash-Gleichgewicht zu erklären. Nash erklärt hierbei seinen Freunden, dass es nicht klug ist, wenn jeder von ihnen sich auf die *Blonde* stürzt, da sie sich so gegenseitig blockieren und sie somit keiner bekommt. Danach würden sie zu ihren *brünetten* Freundinnen gehen, die aber kein Interesse mehr an ihnen haben, da keiner gerne zweite Wahl ist. Nash's Vorschlag ist daher, dass keiner von ihnen mit der *Blonden* flirtet, sondern sich jeder direkt einer der *Brünetten* nähert und sie anspricht - so kommen sie sich nicht in die Quere, keiner verletzt die Gefühle der *Brünetten* und so hat jeder von ihnen schlussendlich Erfolg. Mit seiner neuen Idee stürzt Nash anschließend aus der Bar wobei er sich bei der *Blonden* noch für den Einfall bedankt.
Das Problem an dieser Szene ist nur, dass es sich hierbei nicht um ein Nash-Gleichgewicht handelt. Erinnern wir uns nochmal an die definierende Eigenschaft: Keiner der Spieler kann sich verbessern indem er alleine seine Strategie ändert. In dieser Situation kann sich aber ein einzelner verbessern wenn er alleine seine Strategie ändert, denn wenn alle anderen sich den *Brünetten* annähern so ist die *Blonde* alleine und er könnte sie ansprechen ohne von den anderen blockiert zu werden.

Doch was für Nash-Gleichgewichte gibt es für dieses Spiel? Dafür übersetzen wir die oben beschriebene Situation in die Sprache der Spieltheorie: Wir betrachten ein n-Spieler Spiel, bei dem jeder Spieler zwei Strategien hat, Strategie 1 '*Blonde* ansprechen' und Strategie 2 '*Brünette* ansprechen'. Für alle der Spieler gilt, dass jeder lieber die *Blonde* ansprechen würde, aber bevor er leer ausgeht ausgeht würde er auch die *Brünette* ansprechen. Wir gehen davon aus, dass alle *Brünetten* für unsere n Spieler gleich attraktiv sind. Was noch fehlt ist unsere zu den Annahmen passende Gewinnfunktion für einen Spieler i: Wählt Spieler i '*Brünette ansprechen*' so bekommt er stets einen Gewinn von 1, wählt er allerdings '*Blonde ansprechen*' so kann er einen Gewinn von 3 bekommen, falls er der einzige Spieler ist der sich für diese Strategie entschieden hat oder 0 falls es mindestens noch einen zweiten gibt.
Nach einer kurzen Überlegung sehen wir, dass die Gleichgewichte in reinen Strategien genau jene sind, bei welchen genau ein Spieler '*Blonde ansprechen*' wählt und die anderen sich für '*Brünette ansprechen*' entscheiden. In der zuvor beschriebenen Bar-Szene könnten die *Spieler* durch einen Zufallsgenerator (z.B. Würfel) entscheiden welcher von ihnen die

Blonde ansprechen darf, beziehungsweise in der Sprache der Spieltheorie gesagt: für welches der n möglichen Nash-Gleichgewichte sie sich entscheiden.
Wir wollen uns nun überlegen, ob es auch ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gibt - auch wenn diese Barszene eine Situation ist die sich nur einmal ereignet und somit keine Wiederholung des Spiels zulässt. Wir betrachten hierfür allerdings nur den Fall $n = 2$, d.h. zwei Freunde sitzen in der Bar, welche die *Blondine* mit mindestens zwei *Brünetten* Freundinnen betritt. Die Gewinnbimatrix für das Spiel sieht dann so aus:

		Freund 2	
		Blond	*Brünett*
Freund 1	*Blond*	$(0,0)$	$(3,1)$
	Brünett	$(1,3)$	$(1,1)$

Wie wir schon zuvor festgehalten haben, ist (*Blond,Brünett*) bzw. (*Brünett,Blond*) ein Gleichgewicht in reinen Strategien. Um jene Gleichgewichte in gemischten Strategien zu finden verwenden wir den gleichen Ansatz wie auch schon früher: ausgleichende Strategien, d.h. *Freund 1* spielt Strategie *Blond* mit Wahrscheinlichkeit p und *Brünett* mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$, analog sind die Wahrscheinlichkeiten für *Freund 2* q und $(1-q)$. Wir wollen nun Paare $(p^\star, q^\star) \in \Delta^2$ finden, sodass es beiden Spielern für den durchschnittlichen Gewinn egal ist welche Strategie der jeweils andere Spieler spielt. Sind also Π_1, Π_2 die Gewinnfunktionen für *Freund 1* bzw. *Freund 2*, so soll für $(p^\star, q^\star)$ also $\Pi_1(p^\star, q) = c_1 \ \forall q \in \Delta$ und $\Pi_2(p, q^\star) = c_2 \ \forall p \in \Delta$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstant, gelten. Im folgenden kürzen wir *Blond* mit *Bl* und *Brünett* mit *Br* ab. Wir kommen auf das Gleichungssystem: (vgl. Hammoud [23])

$$I: \ \Pi_1(Bl, q \cdot Bl + (1-q) \cdot Br) = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 3 \stackrel{!}{=} q \cdot 1 + (1-q) \cdot 1 = \Pi_1(Br, q \cdot Bl + (1-q) \cdot Br)$$

$$II: \ \Pi_2(p \cdot Bl + (1-p) \cdot Br, Bl) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 3 \stackrel{!}{=} p \cdot 1 + (1-p) \cdot 1 = \Pi_2(p \cdot Bl + (1-p) \cdot Br, Br)$$

Lösen wir das System so kommen wir auf die Werte $(\overline{p}, \overline{q}) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, was uns zu den gemischten Strategien $p^\star = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ und $q^\star = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ führt. $(p^\star, q^\star)$ bilden das gesuchte Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.
Wir haben zuvor mithilfe des Lemke-Howson Algorithmus in Kapitel 3.5 (Beispiel 3.4) schon einen alternativen Weg gesehen um für dieses Spiel das selbe Nash-Gleichgewicht zu berechnen.

5 Literatur

Bücher

[1] J. W. Weibull : *Evolutionary Game Theory*, Massachusetts Institute of Technology, (1995)

[2] A. A. Cournot, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, (1838)

[3] J. Nash, *Non-cooperative Games* , Princeton University, (1950)

[4] M. D. Davis, *Game Theory A Nontechnical Introduction*, Dover Publictaions, (1983)

[5] J. v. Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic*, Princeton University Press, (1944)

[6] J.D. Williams: *The Complete Strategyst*, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966

Artikel

[7] M. Khadjavi, A. Lange, Prisoners and their dilemma, *Journal of Economic Behavior & Organization* 92 (2013), 163–175

[8] S. Robinson, The Problem with Blondes, *SIAM News* 35 (2002)
http://www.msri.org/people/members/sara/articles/blondes.pdf (Aufgerufen am 3. Februar 2019)

[9] U. Schäfer, Wie erklärt man ein Nash-Gleichgewicht?, *Elem. Math.* 62 (2007), 1–7
https://www.ems-ph.org/journals/show_issue.php?issn=0013-6018& vol=62& iss=1 (Aufgerufen am 4. Februar 2019)

[10] L. Samuelson, Evolution and Game Theory, *Journal of Economic Perspectives* 16 (2002), 47–66

[11] C. E. Lemke, J. T. Howson Jr., Equilibrium points of bimatrix games, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 12 (1964), 413–423

Skripten, Vorlesungsnotizen

[12] D. Pritchard, *Game Theory and Algorithms, Lecture 6: The Lemke-Howson Algorith*, EPFL Lausanne (2011)

http://ints.io/daveagp/gta/lecture6.pdf (Aufgerufen am 3. Februar 2019)

[13] M. A. Goodrich: *Proof of the Minimax Theorem* (2007)
https://students.cs.byu.edu/~cs670ta/MinimaxTheoremProof.pdf (Aufgerufen am 3. Februar 2019)

[14] H. Hotz, *A Short Introduction to Game Theory* (2006)
https://www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey/teaching/archiv/sose_06/softmatter/talks/Heiko_Hotz-Spieltheorie-Handout.pdf (Aufgerufen am 3. Februar 2019)

[15] T. S. Ferguson *Game Theory*, University of California at Los Angeles (2005):
https://www.math.ucla.edu/~tom/ (Aufgerufen am 3. Februar 2019)

[16] J. Brumm, *John Nashs zweiter Beweis der Existenz von Nash-Gleichgewichten* (2004)
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/artikel/Nash2.pdf (Aufgerufen am 3. Februar 2019)

[17] B. Nebel, *Spieltheorie* (2009)
http://www2.informatik.uni-freiburg.de/~ki/teaching/ss09/gametheory/spieltheorie.pdf (Aufgerufen am 3. Februar 2019)

[18] T. Rees, *An Introduction To Evolutionary Game Theory*, UBC Department of Computer Science
https://www.cs.ubc.ca/~kevinlb/teaching/cs532a%20-%202004-5/Class%20projects/Tim.pdf (Aufgerufen am 4. Februar 2019)

[19] S. Keeling, *Einführung in die Spieltheorie*', Karl-Franzens-Universität Graz
https://imsc.uni-graz.at/keeling/manuskripten/spieltheorie.pdf (Aufgerufen am 4. Februar 2019)

[20] W. Leininger, E. Amann, *Einführung in die Spieltheorie*, Universität Dortmund
https://www.ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/gess/chair-of-sociology-dam/documents/education/spieltheorie/literatur/Leininger%20Amann%20Einf%C3%BChrung%200708-ST1-Vorlesung-Skript.pdf (Aufgerufen am 4. Februar 2019)

[21] L. Tesfatsion (2007), *Game Theory: Basic Concepts and Terminology*
http://www2.econ.iastate.edu/classes/econ308/tesfatsion/gamedef.308.pdf

[22] L. Tesfatsion, *Notes on Axelrod's Iterated Prisoner's Dilemma (IPD) Tournaments*
http://www2.econ.iastate.edu/classes/econ308/tesfatsion/axeltmts.pdf

[23] N. Hammoud, *Game Theory: Lecture 2*, University of Oxford (2017)
http://people.maths.ox.ac.uk/griffit4/Math_Alive/3/game_theory2.pdf (Aufgerufen am 12.

Februar 2019)

Web-Links

[24] R. Evelith für Smithsonian.com am 25. Juli 2013 (aufgerufen am 3. Februar 2019): https://www.smithsonianmag.com/smart-news/what-happens-when-you-test-the-prisoners-dilemma-on-prisoners-18221040/

[25] M. Nisen für Business Insider am 21.Juli 2013 (Aufgerufen am 3. Februar 2019): https://www.businessinsider.com/prisoners-dilemma-in-real-life-2013-7?IR=T

[26] Peham, Haslinger (2010), *Spieltheorie* (2010)
https://www.mat.univie.ac.at/~schmitt/lva/09w/Spieltheorie.pdf (Aufgerufen am 3. Februar 2019)

[27] T. S. Angell: 'von Neumann Minimax Theorem'
http://www.math.udel.edu/~angell/minimax (Aufgerufen am 9. Februar 2019)

[28] Documentation for the Axelrod Python Library:
https://axelrod.readthedocs.io/en/stable/index.html (Aufgerufen am 12. Februar 2019)

Abbildungen

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Abbildung 1:
Oskar Morgenstern, Quelle: *Archivalien: Österreichisches Staatsarchiv: AVA, PA Morgenstern; Archiv der Universität Wien: RA GZ 677-1937/38*
John von Neumann: Quelle: *Los Alamos National Laboratory:*
http://www.lanl.gov/history/atomicbomb/images/NeumannL.GIF

John Nash, Quelle: *Fotografie von Peter Badge,*
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:John_Forbes_Nash,_Jr._by_Peter_Badge.jpg (Aufgerufen am 6. Februar 2019)

6 Anhang

Abstract

Die vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit den grundlegenden Konzepten der Spieltheorie. Dabei werden Spiele in Normalform mit endlich vielen Spielern und endlichen Strategiemengen betrachtet. Im ersten Teil wird auf Nullsummenspiele eingegangen welche im darauffolgenden Kapitel auf n-Spieler Spiele mit allgemeinen Gewinnfunktionen verallgemeinert werden. Für die betrachteten Spiele sollen 'gute' Strategien für die Spieler gefunden werden - hierfür werden Nash-Gleichgewichte definiert und dann Methoden erklärt wie solche gefunden werden können. Im Fall des Zwei-Spieler Spiels wird mit dem Lemke-Howson Algorithmus eine Möglichkeit gezeigt, wie man stets ein Nash-Gleichgewicht finden kann. Im letzten Teil wird auf Anwendungen im Bereich der evolutionären Spieltheorie und der Wirtschaft eingegangen. Weiters wird das bekannte Spiel 'Gefangenendilemma' näher betrachtet.