MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Die Mediante - nützliches Werkzeug und weniger Fehler in der Bruchrechnung?“

verfasst von / submitted by

Florian Anton Damböck, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 520 523 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Master Lehramt UF Mathematik + UF Physik
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mir während meines Studiums immer helfend zur Seite standen.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger, welcher mich nicht nur bei der Themenfindung meiner Arbeit tatkräftig unterstützt hat, sondern mir auch während meines Schreibprozesses immer helfend zu Seite stand. Vor allem seine Leidenschaft für die Fachdidaktik und seine Neugierde für neue und noch unerforschte Gebiete, haben mich von Beginn an inspiriert und angespornt, mich mit der Thematik meiner Arbeit auseinanderzusetzen.

Ein großer Dank geht auch an meine Eltern, die mir während meines gesamten Studiums immer unterstützend zur Seite standen und mir den nötigen Rückhalt gaben.

Zum Schluss möchte ich mich besonders bei meiner langjährigen Studienkollegin und mittlerweile Verlobten Judith Kühleitner bedanken. Ohne deinem anspornenden Ehrgeiz, deiner Zielstrebigkeit und deiner Hilfsbereitschaft wäre ein Studium in so kurzer Zeit nicht möglich gewesen und hätte nur halb so viel Freude gemacht. Auch möchte ich dir für deine Hilfe beim Überarbeiten dieser Arbeit danken!

Abstract

Es ist allseits bekannt, dass die Bruchrechnung zu den schwierigeren Themen der Unterstufe zählt und es daher auch ein viel beforschtes Gebiet darstellt. Im Zuge dieser Arbeit beschäftige ich mich vor allem mit einem bestimmten Fehler bei der Addition von Bruchzahlen, bei dem die SchülerInnen jeweils die Zähler und Nenner paarweise addieren, anstatt die Bruchzahlen zuerst auf den gleichen Nenner zu bringen und anschließend zu addieren. Diese paarweise Addition bildet die Mediante, welche als neuer Begriff eingeführt werden soll. Untersucht wurde diesbezüglich, welchen Einfluss die Einführung der Mediante auf die Leistungen der SchülerInnen bei der Addition von Bruchzahlen hat. Die Untersuchung ergab, dass die Behandlung dieses Begriffs tendenziell für mehr Verwirrung sorgt, als dass sie positiv zum Unterricht beiträgt. Welche Rahmenbedingung bei der Untersuchung herrschten und wie aussagekräftig das Ergebnis wirklich ist, wird im Verlauf dieser Arbeit näher erläutert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Zuge meiner Lehrtätigkeit am Gymnasium BG/BRG Lilienfeld habe ich mich bereits sehr stark mit dem Thema Bruchrechnung auseinandergesetzt und die Schwierigkeiten dieses Gebiets für SchülerInnen kennengelernt. Ein häufiger Fehler, den SchülerInnen beim Addieren und Subtrahieren von Bruchzahlen begehen, ist, dass sie die Bruchzahlen nicht zuerst auf den gleichen Nenner bringen, sondern direkt Zähler und Zähler bzw. Nenner und Nenner addieren/subtrahieren, was natürlich falsch ist, sobald unterschiedliche Nenner gegeben sind. Mein Betreuer, Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger, hat in der neuen Auflage seines Schulbuches „Das ist Mathematik 2“ [4] versucht, diesem oben genannten Fehler mit der Einführung der „Mediante “ entgegenzuwirken. Ziel meiner Arbeit ist es, empirisch zu erforschen, inwiefern die Einführung der „Mediante“ tatsächlich zum besseren Verständnis der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen bei SchülerInnen beiträgt.

Die empirische Forschung erfolgt anhand eines Tests, welcher am Ende des Bruchrechenunterrichts stattfindet. Insgesamt nehmen sechs Klassen der sechsten Schulstufe an der Untersuchung teil, wobei je zwei Klassen von derselben Lehrperson unterrichtet werden. Entscheidend ist hier, dass jede Lehrperson die „Mediante“ nur in einer ihrer beiden Klassen unterrichtet und in der Parallelklasse kein Wort darüber verloren wird. Am Ende der Untersuchung werden die Tests ausgewertet und die Klassen untereinander verglichen. Dadurch lässt sich am Ende eine Aussage darüber machen, welche Auswirkungen die Einführung der „Mediante“ auf die anschließenden Leistungen der SchülerInnen hat.

In der nachfolgenden Arbeit wird zunächst geklärt, welche Grundvorstellungen der Bruchrechnung zugrunde liegen und wo die typischen Fehler der SchülerInnen verankert sind. Außerdem werde ich näher auf die Addition und Subtraktion von Bruchzahlen eingehen und erläutern, was man sich unter der „Mediante“ vorstellen kann.

2 Grundvorstellungen im Mathematikunterricht

2.1 Das Grundvorstellungskonzept

An oberster Stelle unseres heutigen Mathematikunterrichts steht das „Verstehen“ mathematischer Zusammenhänge. Als Paradebeispiel dafür gilt die derzeitige Zentralmatura, welche im ersten Teil sogenannte Grundkompetenzen abprüft, die aufzeigen sollen, ob ein/e SchülerIn die jeweilige Kompetenz aufweist bzw. die mathematische Struktur hinter einer Aufgabe verstanden hat. Ein schwerwiegender Fehler, den Lehrpersonen im Mathematikunterricht aber immer noch häufig begehen, ist der zu schnelle Übergang auf eine formal-regelhafte Ebene. So konzentriert man sich bei der Bruchrechnung viel zu sehr auf Merksätze und Regeln wie “Zwei Bruchzahlen werden multipliziert, indem.... „ und vernachlässigt anschauliche Darstellungen, wie zum Beispiel das Teilen von Torten oder das Zusammenzählen von Pizzastücken. Dadurch wird aber schlicht und einfach das bloße Auswendiglernen gefördert, wodurch jegliches Verständnis verloren geht. [5, S.4] Vielmehr führt so ein Unterricht dazu, dass SchülerInnen die auswendig gelernten Regeln durcheinander bringen und vertauschen, da sie nie verstanden haben, warum diese Regeln überhaupt Geltung finden. [2, S.4]

„Bruchrechnen ohne dahinter stehende Vorstellungen ist ein totes Wissen, das man nicht anwenden kann. “[5, S.8]

Als Lösung dieses Problems schlägt Günther Malle eine Trennung des Unterrichts in zwei Phasen vor:

- inhaltlich-anschauliche Phase
- formal-regelhafte Phase

Im Folgenden betrachten wir wieder das Beispiel der Bruchrechnung. In der inhaltlich-anschaulichen Phase geht es darum, die Bruchzahlen und Rechenanweisungen anschaulich darzustellen, sodass die SchülerInnen eine Vorstellungen zur Bruchrechnung entwickeln. Diese Phase sollte immer am Anfang eines Themas stehen, bevor man im Anschluss zur zweiten Phase, der formal-regelhaften Phase übergeht. In dieser Phase können nun die Regeln eingeführt und das Lösen von Bruchrechenaufgaben geübt werden. Im speziellen Fall der Bruchrechnung könnte man in der

5. Schulstufe verstärkt auf den inhaltlich-anschaulichen Aspekt eingehen und erst in der 6. Schulstufe die Regeln der Bruchrechnung einführen, da das Thema im Lehrplan beider Klassen vermerkt ist. [5, S.4]

2.2 Das Grundvorstellungskonzept von Wilhelm Oehl

Auch Wilhelm Oehl schreibt in seinem Buch „Der Rechenunterricht in der Grundschule“ [6], welches 1962 veröffentlicht wurde, über zweierlei Arten von Strukturverbindungen. [7, 74] (siehe Abb.1)

- „*Beziehungen zwischen verschiedenen Begriffen auf der mathematischen Ebene.*“
- „*Beziehungen zwischen diesen Begriffen und entsprechenden Sachsituationen auf der Ebene der Realität*“

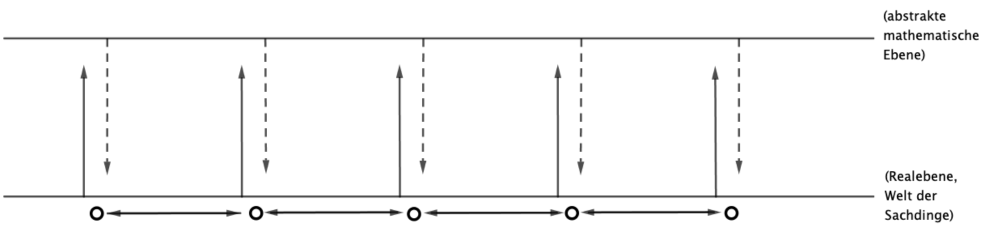

Abbildung 1: Arten von Strukturverbindungen [6, S.16]

Oehl zufolge soll der Zugang zu neuen Lehrinhalten immer über Anschauungs- und Handlungssituationen der Realitätsebene stattfinden. Dadurch kann an die bestehenden Schülervorstellungen angeknüpft werden. Analog zu den beiden Phasen nach Malle [5] soll auch hier erst im Anschluss der Übergang zur abstrakten mathematischen Ebene stattfinden und das Verständnis des Begriffskomplexes erweitert werden. Es ist zwar auch möglich, durch innermathematische Beziehungen ein Verständnis für einen neuen Begriff bzw. einen mathematischen Zusammenhang zu erwerben und im Anschluss Parallelen zur Realität zu ziehen, doch dies bleibt nur den leistungsstarken SchülerInnen vorbehalten.

Als „Grundvorstellungen“ bezeichnet Oehl dabei „*das Strukturbewusstsein, das zwischen Anschauungs- bzw. Handlungszusammenhängen und mathematischen Inhalten vermittelt*“.[6]
Diese Grundvorstellungen sind nicht nur unabdingbar für das Verständnis mathematischer Inhalte und deren Sinnhaftigkeit verantwortlich, sondern sind auch Basis dafür, einen Begriff auf neue Anwendungsgebiete umzulegen. Hier betont Oehl immer wieder den Begriff des „Wiedererkennens“ bereits bekannter mathematischer Strukturen in neuen Sachsituationen. [7, S.74]

2.3 Erweiterung des Grundvorstellungskonzepts

Rudolf vom Hofe bezeichnet in seinem Buch „Grundvorstellungen mathematischer Inhalte“[7] als Ziel dieses Konzepts, die mathematischen Inhalte mit der persönlichen Begriffsbildung in Beziehung zu setzen. Diese Beziehungen lassen sich durch drei Aspekte näher beschreiben: [3, S.51]

- *Sinnkonstituierung* – Bezeichnet das Anknüpfen an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge.
- *Aufbau mentaler Repräsentationen* – Ermöglicht operatives Handeln auf der Vorstellungsebene.
- *Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs* – Beschreibt die Fähigkeit mathematische Strukturen in Sachproblemen zu erkennen.

Diese drei Aspekte geben bereits einen Einblick darin, welche kognitiven Schritte nötig sind, um einen mathematischen Zusammenhang „verstehen“ zu können. Vor allem die „Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs“ [7, ebd.] unterstreicht die Notwendigkeit von Grundvorstellungen für außerschulische Sachprobleme. Im Zuge gezielter Studien hat man versucht, sogenannte Grundvorstellungen zu definieren, wodurch diese auch als Vergleichsbasis herangezogen werden können. Angenommen SchülerInnen haben Probleme bei der Bruchrechnung, so kann man systematisch abklären, wo das Problem liegen könnte und sucht nach individuellen Vorstellungen, die von den allgemein definierten Grundvorstellungen abweichen. [3, ebd.]

Durch Grundvorstellungen ist es außerdem möglich, zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen zu wechseln (siehe Abb.2).

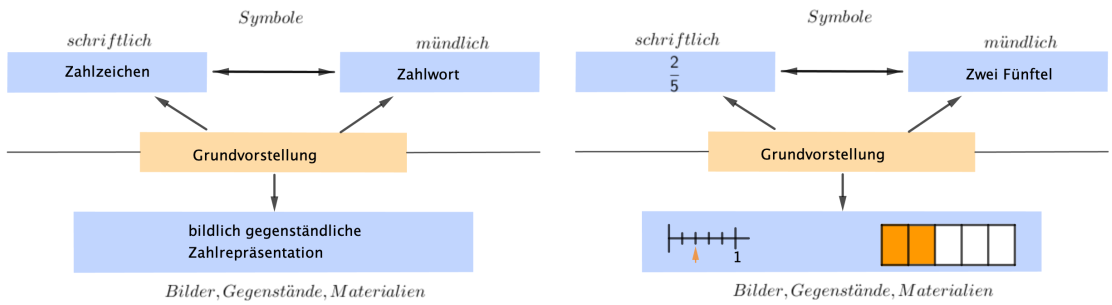

Abbildung 2: Darstellungsebenen [2, S.1]

Der Wechsel soll jedoch nicht nur zwischen den unterschiedlichen Darstellungsebenen, sondern auch zwischen den Symbolen und bildlich-gegenständlichen Zahlrepräsentationen stattfinden und beherrscht werden. Erst dann kann von einem grundlegenden Verständnis die Rede sein.
Betrachten wir das oben abgebildete Beispiel (siehe Abb.2) ein wenig näher, so benötigt man grundlegende Vorstellungen zur Bruchzahl $\frac{2}{5}$, um ihn überhaupt erst bildlich darstellen zu können. Erst, wenn die SchülerInnen die Bruchzahl als Teil eines Ganzen interpretieren können, wissen sie auch, wie man ein gegebenes Rechteck teilt, um einen gegebenen Bruchteil einzeichnen zu können.[2]
Die Grundvorstellungen bilden also die Basis für neues Wissen und können gleichzeitig Ursache für ein fehlendes Verständnis sein, falls sie nicht beherrscht werden. Das folgende Zitat soll die Bedeutung des Grundvorstellungskonzepts noch einmal hervorheben:

„*Auf psychologischer Ebene gibt es viele unterschiedliche und z.T. konträre Vorstellungskonzepte - auf didaktischer Ebene hingegen schält sich ein von Elementen deutlicher Kontinuität geprägtes Grundvorstellungskonzept heraus, das sich als weitgehend unabhängig von psychologischen Beschreibungsmodellen erweist.*“ [7, S.95]

2.4 Grundvorstellungen bei der Bruchrechnung

In diesem Teil der Arbeit werde ich die wichtigsten Grundvorstellungen bei der Bruchrechnung nach Malle anführen. Wie im ersten Abschnitt bereits erwähnt wurde, ist es bei der Einführung der Bruchrechnung notwendig, zuerst grundlegende Vorstellungen zu Bruchzahlen zu entwickeln. Auch das Rechnen sollte zunächst nur anhand dieser Vorstellungen passieren und erst anschließend zu den formalen Rechenregeln übergegangen werden. Die nachfolgenden Grundvorstellungen sollte ein/e SchülerIn am Ende der Bruchrechnung besitzen.

2.4.1 Grundvorstellung 1: Bruchzahl als Teil eines Ganzen

Ein Ganzes, das kann entweder ein Objekt oder eine Größe sein, wird geteilt. Dabei sagt uns der Nenner, in wie viele Teile wir das Ganze teilen und der Zähler gibt uns Auskunft darüber, wie viele Teile wir nehmen bzw. gesucht sind. [5, S.4]

Beispiel:

- Möchte man $\frac{3}{4}$ einer Torte, also eine Dreivierteltorte, so sagt uns der Nenner, dass wir die „ganze“ Torte in vier gleich große Teile teilen. Der Zähler zeigt, dass wir nur drei Stücke davon wollen. Bildlich würde man dieses Beispiel folgendermaßen an die Tafel skizzieren:

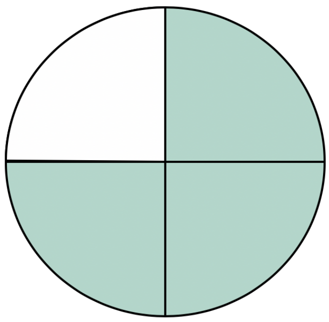

Abbildung 3: Eine Dreivierteltorte

Man sollte als Lehrperson stets unterschiedliche Darstellungsarten verwenden, um den SchülerInnen eine flexible Vorstellung der mathematischen Zusammenhänge zu ermöglichen. Eine Möglichkeit, den SchülerInnen die Grundvorstellung auf der

Realebene (Oehl [1962]) darzustellen, wäre das Teilen eines Apfels bzw. das Falten eines Blattes Papier und das anschließende Besprechen der einzelnen Bruchteile.

2.4.2 Grundvorstellung 2: Bruchzahl als relativer Anteil: $\frac{a}{b}$ von c

Diese Grundvorstellung kann als Spezialfall der 1. Grundvorstellung verstanden werden und ist am einfachsten anhand eines Beispiels zu zeigen. [5, S.4]

Beispiel:

- Max verdient im Monat 1000€. Davon gibt er $\frac{3}{5}$ für Miete und Essen aus und $\frac{2}{5}$ investiert er in die unterschiedlichsten Freizeitaktivitäten. Wie viel Euro gibt Max im Monat für Miete und Essen bzw. seine Freizeitaktivitäten aus?

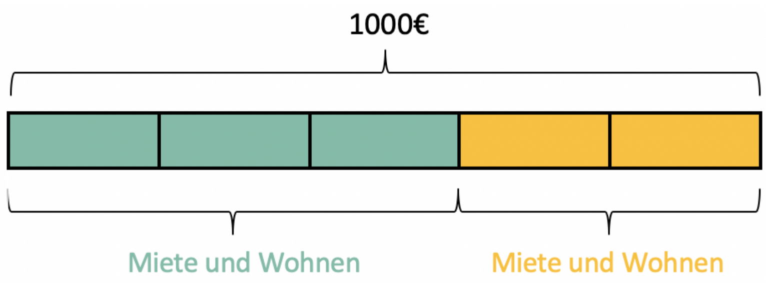

Abbildung 4: Relative Anteile

  - Miete und Essen: $\frac{3}{5}$ von 1000€
  - Freizeitaktivitäten: $\frac{2}{5}$ von 1000€

2.4.3 Grundvorstellung 3: Bruchzahl als Vergleichsoperator: $\frac{a}{b}$ mal so viel wie c, $\frac{a}{b}$ mal so groß wie c, $\frac{a}{b}$ mal so schwer wie c, ...

Wie der Name schon sagt, werden hier Vergleiche zwischen zwei Mengen bzw. Größen angestellt. Dabei werden nicht immer zwangsläufig Anzahlen von Objekten verglichen, sondern auch andere Maße wie zum Beispiel Längen, Massen oder andere Größenbereiche. [5, S.4]

Beispiel:

- Kiste 1 enthält $\frac{4}{7}$ mal so viele Murmeln wie Kiste 2.

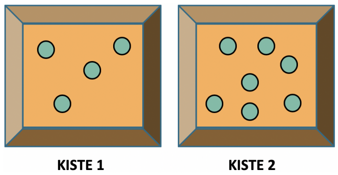

Abbildung 5: Murmeln in Kisten

2.4.4 Grundvorstellung 4: Bruchzahl als Resultat einer Division: $\frac{a}{b} = a : b$

Hier sollen die SchülerInnen ein Verständnis dafür bekommen, dass ein Bruch nichts anderes als eine Division ist, bei der das Divisionszeichen durch einen Bruchstrich ersetzt wurde. In diesem Zusammenhang bedeutet $\frac{3}{4}$ nicht nur „3 von $\frac{1}{4}$-Pizzastücken“, sondern auch „Teile 3(Pizzen) durch 4“. [4, S.44]
Das ist für SchülerInnen aber nicht selbstverständlich und muss unter Einbezug der bisherigen Grundvorstellungen erarbeitet werden. Betrachtet man beispielsweise die Bruchzahl $\frac{3}{4}$ m, so gibt es zwei zentrale Vorstellungen bzw. Interpretationen [13]:

- **„Bruch als Teil eines Ganzen“**
  Betrachtet man die Bruchzahl $\frac{3}{4}$, so sagt uns der Nenner, in wie viele Teile wir das Ganze teilen und der Zähler gibt uns Auskunft darüber, wie viele Teile wir nehmen bzw. gesucht sind. (1. Grundvorstellung)

  $\frac{3}{4}$ m bedeutet also: $(1 \text{ m} : 4) \cdot 3 = \frac{1}{4}$ m $\cdot 3$

- **„Bruch als Teil von mehreren Ganzen“**
  Anders als bei der 1. Grundvorstellung werden hier mehrere Ganze aufgeteilt. In diesem Zusammenhang beschreibt der Zähler die Anzahl der Ganzen und der Nenner, auf wie viele Teile der Zähler gleichmäßig aufgeteilt werden soll.

$\frac{3}{4}$ m bedeutet also: $(1 \text{ m} \cdot 3) : 4 = 3 \text{ m} : 4$

Letztendlich beschreiben beide Vorstellungen genau dasselbe, aber damit auch den SchülerInnen klar wird, dass $\frac{1}{4}$ m $\cdot 3$ gleich 3 m : 4 ist, muss auch dieser Zusammenhang gezeigt werden. Dies kann auf ikonischer Ebene zum Beispiel durch Flächen gezeigt werden:

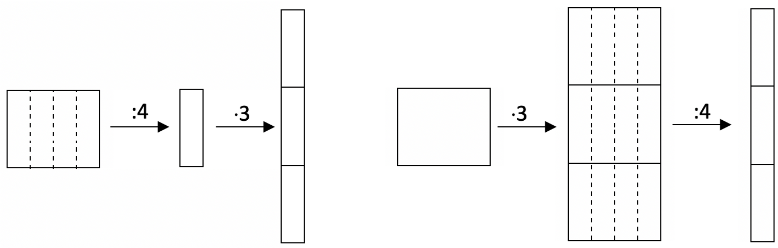

Abbildung 6: Anschauliche Darstellung durch Flächen

Im Folgenden wird beispielhaft gezeigt wie die Aufgabenstellung „Teile 3(Pizzen) durch 4“ anschaulich erarbeitet werden kann. [13]

Beispiel: Judith, Max, Florian und Werner bestellen drei Pizzen. Wie müssen diese aufgeteilt werden, damit jeder von ihnen gleich viel erhält?

- **1.Möglichkeit:** Die Pizzen treffen nacheinander ein, daher bekommt jedes Kind $\frac{1}{4}$ einer jeden Pizza.

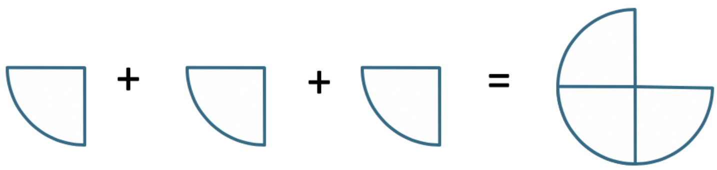

Abbildung 7: Jede Pizza wird einzeln aufgeteilt

Jedes Kind bekommt: (3 Pizzen) : 4 = $\frac{1}{4}$ Pizza $\cdot$ 3 = $\frac{3}{4}$ Pizza

- **2.Möglichkeit:** Kommen alle 3 Pizzen gleichzeitig an, so werden diese gedanklich übereinander gelegt und wieder geviertelt. Anschließend bekommt jedes Kind drei $\frac{1}{4}$-Stücke Pizza.

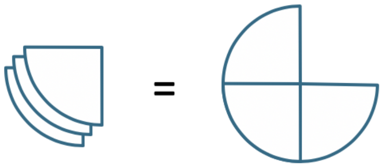

Abbildung 8: Alle drei Pizzen werden gleichzeitig aufgeteilt

Jedes Kind bekommt: (3 Pizzen) : 4 = $\frac{1}{4}$ Pizza $\cdot$ 3 = $\frac{3}{4}$ Pizza

2.4.5 Grundvorstellung 5: Bruchzahl als Verhältnis: $\frac{a}{b} = a : b$ [a zu b]

Beispiel:

- Die Längen zweier Strecken verhalten sich wie 4:5.

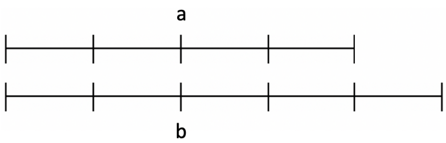

Abbildung 9: Verhältnis zweier Strecken

Im Gegensatz zu den bisherigen Grundvorstellungen ist der Doppelpunkt hier nicht als Divisionszeichen aufzufassen, sondern als Verhältniszeichen. Im Sinne der Überschrift $\frac{a}{b} = a : b$ ist die Proportion $a : b = 4 : 5$ auch gleichbedeutend mit $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$. Den SchülerInnen fällt aber vor allem dieses kognitive Umdenken sehr schwer. Das ist auch der Grund dafür, warum SchülerInnen auch später versuchen, das Denken in Bruchzahlen so gut es geht zu vermeiden und sich auf das Denken in natürlichen Zahlen zu beschränken.
Das Verhältnis a:b war aber nicht immer ein eigenständiges Denkobjekt und hatte zum Beispiel zur Zeit der alten Griechen gar keine Existenzberechtigung. Es gab zwar Verhältnisse, aber eine Proportionsaussage a:b=4:5 wurde immer als Beziehung zwischen vier eigenständigen Denkobjekten gesehen und geschrieben. Heutzutage sehen wir diese Proportion viel mehr als Gleichung zweier eigenständiger Verhältnisse. Dieses Problem der alten Griechen war Anlass dafür, dass sie sich lediglich auf die Proportionslehre konzentrierten und keine Bruchrechnung entwickelten. Erst im 15. Jahrhundert wurden die Brüche als eigenständige Denkobjekte anerkannt. [5, S.5]

2.4.6 Grundvorstellung 6: Bruchzahl als Quasikardinalzahl: $\frac{2}{3} = 2$ Drittel

Anhand dieser Grundvorstellung lässt sich das Bruchrechnen auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen zurückführen. Der Nenner wird hier als eigenständige Einheit aufgefasst, die anschließend nur noch mit Hilfe der Zähler zusammengefasst werden muss. Für die SchülerInnen ist diese Grundvorstellung leichter nachvollziehbar, wenn die Schreibweise von „1 Fünftel" anstelle von „$\frac{1}{5}$" auch im vorhergehenden Unterricht des Öfteren verwendet wurde. Im Grunde stellt diese Grundvorstellung aber lediglich eine Konkretisierung der 1. Grundvorstellung dar und legt dabei den Grundstein für die Addition von Bruchzahlen mit gleichem Nenner. [5, S.5]

Beispiel:

- $$\begin{aligned} \tfrac{1}{8} + \tfrac{5}{8} &= 1 \text{ Achtel} + 5 \text{ Achtel} \\ &= 6 \text{ Achtel} \\ &= \tfrac{6}{8} \end{aligned}$$

2.4.7 Grundvorstellung 7: Bruchzahl als Quasiordinalzahl: $\frac{1}{4}$...jeder Vierte

Diese Grundvorstellung findet nur bei Stammbrüchen Anwendung, wobei die Aussage „Jedes dritte Herz ist rot." auf zwei verschiedene Arten interpretiert werden kann. [5, S.5]

- Im strikten Sinn: Auf zwei farblose Herzen folgt immer ein rotes Herz.

Abbildung 10: Anordnung im strikten Sinn

- Im statistischen Sinn: Ein Drittel aller Herzen sind rot.

Abbildung 11: Anordnung im statistischen Sinn

2.4.8 Grundvorstellung 8: Bruchzahl als absoluter Anteil

Bei dieser Grundvorstellung wird die Bruchzahl „$\frac{3}{4}$" als „drei von vier" interpretiert. Diese Darstellung findet vor allem in der Praxis Anwendung, zum Beispiel bei Berichterstattungen in Zeitungen bzw. im Fernsehen:

- „Fünf von sieben Abgeordneten treten nicht mehr für "Jetzt" an" [14]
- „Drei von vier Jugendlichen klagen über Kopfschmerzen" [15]

Sie birgt bei der Einführung in der Schule aber die Gefahr, dass der klassische Additionsfehler damit stärker unterstützt wird, bei dem Zähler und Nenner paarweise addiert werden.

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{5}{7}$$

Würde man hingegen die absoluten Anteile addieren wollen, so würde die Rechnung stimmen. Das ist auch gleichzeitig der Grund dafür, warum man mit den absoluten Anteilen in der Schule nicht rechnet und nur für statistische Erhebungen heranzieht. [5, S.5]

2.4.9 Grundvorstellung 9: Erweitern als Verfeinerung und Kürzen als Vergröberung der Einteilung

In der Schule sollte in der ersten Phase des Unterrichts ganz auf die Begriffe „erweitern" und „kürzen" verzichtet und nur von „verfeinern" und „vergröbern" gesprochen werden. Auf Rechenregeln sollte zu Beginn wieder komplett verzichtet und die Grundvorstellung anschaulich näher gebracht werden. [5, S.6]

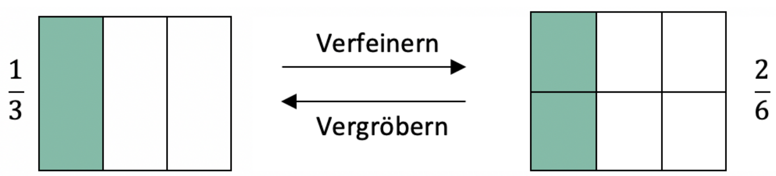

Abbildung 12: Erweitern und Kürzen

Dabei eignet es sich am besten, einen ersten Impuls durch eine leicht realisierbare Handlung zu setzen. Ziel dabei ist es, den SchülerInnen die Gleichwertigkeit von

Bruchzahlen bei der Vergröberung und Verfeinerung zu vermitteln. Eine Möglichkeit wäre wieder das Teilen eines Apfels oder das Falten eines Blatt Papiers. [2, S.43]

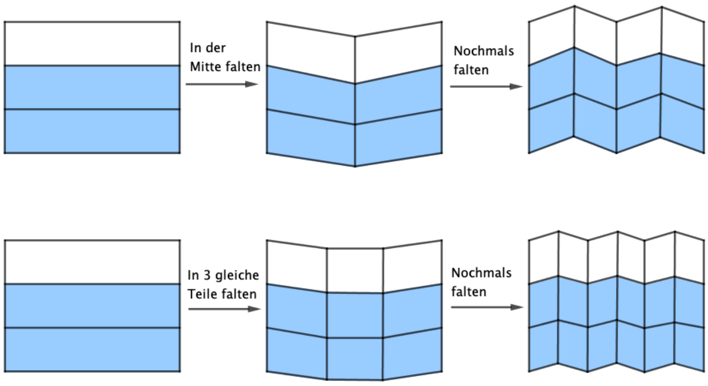

Abbildung 13: Falten von Papierblättern (2, ebd.)

In Abbildung 13 sieht man sehr gut, dass der Anteil der blauen Fläche immer gleich bleibt, während die Anzahl der Unterteilungen immer größer wird. Im ersten Fall wird aus $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ und $\frac{8}{12}$, im zweiten Fall aus $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{9}$ und $\frac{12}{18}$.

Die SchülerInnen verbinden mit dem Begriff des Erweiterns aber oft eine Vergrößerung bzw. eine Verkleinerung in Bezug auf das Kürzen. Padberg sieht das als möglichen Problembereich, da SchülerInnen womöglich eine falsche Vorstellung entwickeln und außer Acht lassen, dass sich der „Wert der Brüche“ nicht ändert. [2, S.52]

2.4.10 Grundvorstellung 10: Addieren als Zusammenfügen oder Hinzufügen, Subtrahieren als Wegnehmen

Die Vorstellung der Addition und Subtraktion kann hier sehr stark an das Rechnen mit den natürlichen Zahlen angelehnt werden. So werden bei der Addition entweder zwei Bruchzahlen zusammengefügt, was als zweistellige Operation aufgefasst werden kann, oder zu einer bestehenden Bruchzahl eine weitere hinzugefügt, was einer einstelligen Operation gleichkommt. Selbiges gilt auch bei der Subtraktion von Bruchzahlen. [5, S.6]

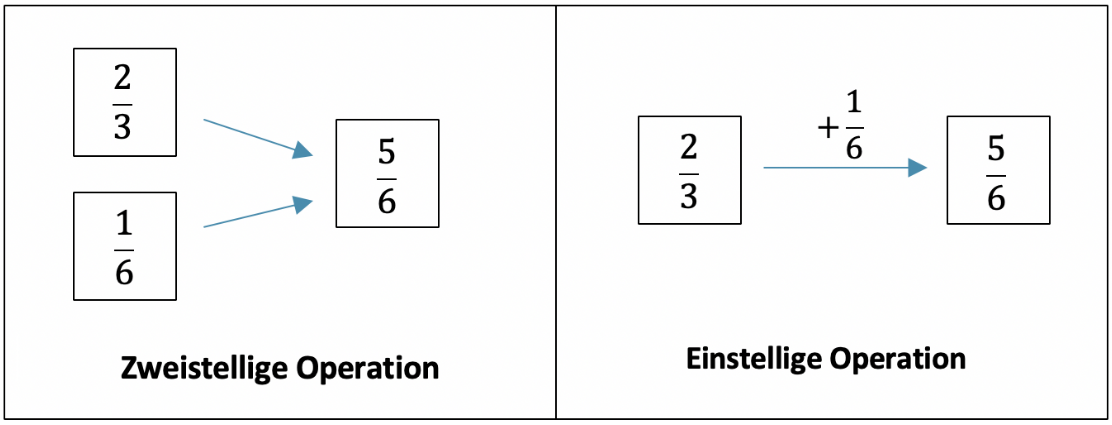

Abbildung 14: Addieren als Zusammenfügen bzw. Hinzufügen

In der Schule stützt man sich bei der Einführung dieser Grundvorstellung sehr stark auf anschauliche Darstellungen. So werden zum Beispiel Torten- oder Pizzastücke sowohl graphisch dargestellt und addiert, wobei die Addition auch rechnerisch nachvollzogen wird.

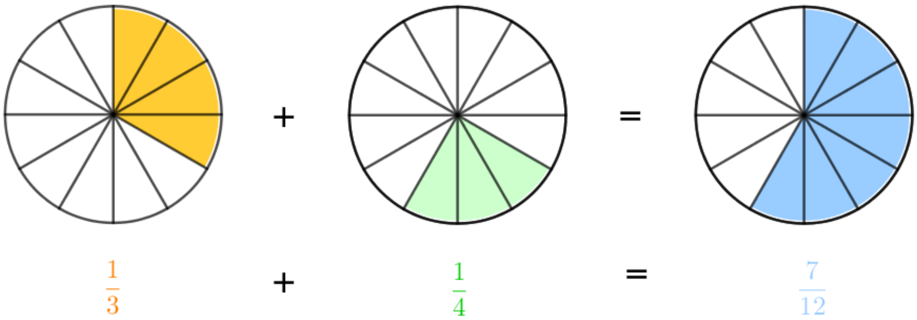

Abbildung 15: Addieren von Flächen [4]

2.4.11 Grundvorstellung 11: Addieren als Vorwärtsschreiten, Subtrahieren als Rückwärtsschreiten

Auch hier kann wieder eine Analogie zwischen Rechnen mit Bruchzahlen und natürlichen Zahlen gezogen werden. Stellt man die Rechnung auf einem Zahlenstrahl dar, so beschreibt die Addition ein Vorwärtsschreiten nach rechts, während die Subtraktion ein Rückwärtsschreiten nach links verdeutlicht.[5, S.6]

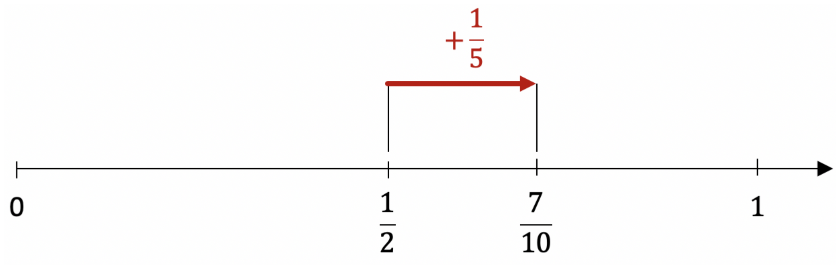

Abbildung 16: Addieren Vorwärtsschreiten

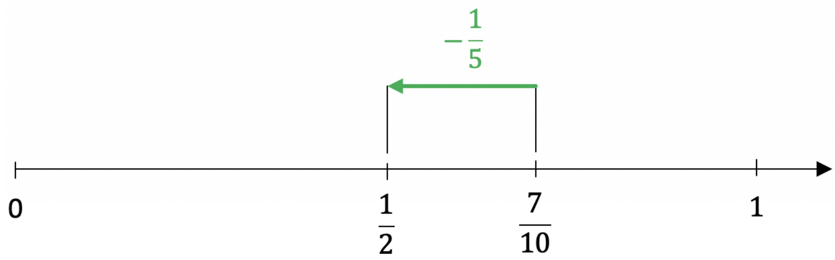

Abbildung 17: Subtrahieren als Rückwärtsschreiten

2.4.12 Grundvorstellung 12: Multiplikation als abgekürzte Addition

Wie schon bei den natürlichen Zahlen kann die Multiplikation auch bei der Bruchrechnung als vereinfachte bzw. abgekürzte Addition gedeutet werden, sofern der erste Faktor in der Menge der natürlichen Zahlen liegt.[5, S.6]

Beispiel:

$$4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \qquad\qquad n \cdot \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + ... + \frac{a}{b}}_{n \text{ Summanden}}$$

2.4.13 Grundvorstellung 13: Von-Deutung der Multiplikation

Die Von-Deutung der Multiplikation bezeichnet die Deutung, dass man von einer natürlichen Zahl oder einer Bruchzahl einen Bruchteil berechnet. So könnte man die Rechnung $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ als $\frac{3}{4}$ von $\frac{4}{5}$ bzw. umgekehrt als $\frac{4}{5}$ von $\frac{3}{4}$ deuten. Das Wort „von“ wird in diesem Zusammenhang als „mal“ interpretiert, doch werden nicht nur Bruchzahlen miteinander multipliziert, sondern auch Bruchzahlen mit natürlichen Zahlen.

Beispiel:

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3}{4} \text{ von } 5 \qquad\qquad \frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \text{ von } n$$

Auch hier scheint die Von-Deutung auf den ersten Blick völlig plausibel, doch stößt sie auf Hürden, sobald man die Rechnung umdreht und aufgrund ihrer Kommutativität als $5 \cdot \frac{3}{4}$ anschreibt. Nun kann die Rechnung nicht mehr als „5 von $\frac{3}{4}$“ gedeutet werden, da dies wenig Sinn machen würde. Die Lösung dieses Problems liegt aber ganz einfach in unserer Sprache, weshalb man in der Praxis auch oft vom 5-fachen bzw. $\frac{3}{4}$-fachen einer Bruchzahl spricht.

Ein weiteres Problem, welches bei der Multiplikation von $\frac{3}{4}$ mit 5 beachtet werden muss, ist die Tatsache, dass die Grundvorstellung 12 nicht auf das Beispiel umgelegt werden kann, da die Multiplikation nicht als abgekürzte Addition gedeutet werden kann. Dieses Problem lässt sich aber ganz einfach dadurch lösen, dass zunächst die Kommutativität gezeigt wird und im Anschluss $5 \cdot \frac{3}{4}$ angeschrieben wird. Dies geschieht am besten auf ikonischer oder enaktiver Ebene. (siehe Abb. 18)

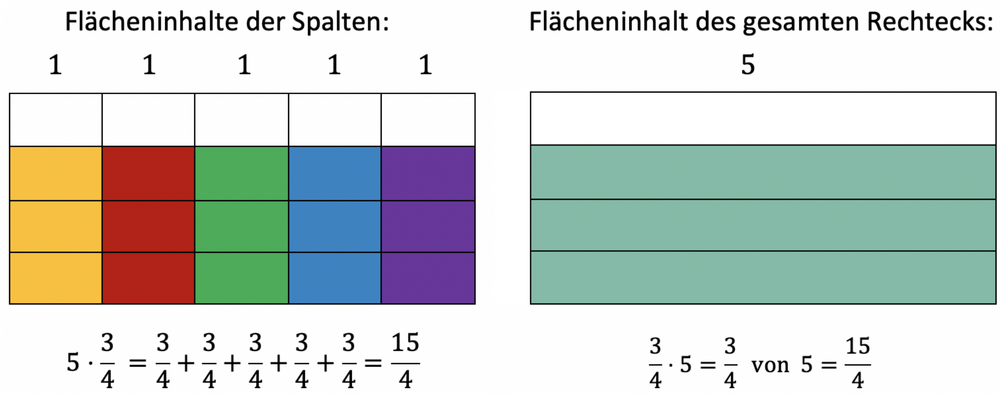

Abbildung 18: Kommutativität der Multiplikation [5, S.6]

Abbildung 18 zeigt sehr anschaulich, dass es für das Ergebnis vollkommen egal ist, wo die natürliche Zahl und wo die Bruchzahl steht. Daher ist es nur vernünftig zu behaupten: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d}$
Die Gültigkeit des Kommutativgesetzes sollte aber auch hier gezeigt werden. Dies

kann auf ganz ähnliche Weise geschehen. (siehe Abb. 19)

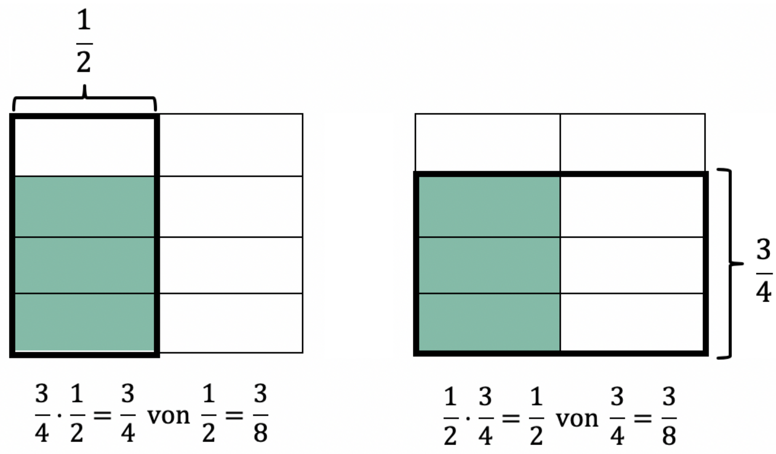

Abbildung 19: Kommutativität der Multiplikation [5, S.7]

An dieser Stelle muss den SchülerInnen auch klar gemacht werden, dass das Ergebnis einer Multiplikation nicht immer größer sein muss als jede der beiden Ausgangszahlen. Anders als bei den natürlichen Zahlen, kann es bei der Bruchrechnung durchaus passieren, dass das Produkt kleiner ist, als eine der beiden Zahlen, da schließlich Bruchteile „von" gegebenen Zahlen oder Bruchzahlen genommen werden. [5, S.7]

2.4.14 Grundvorstellung 14: Dividieren als Teilen (bzw. Verteilen)

Dieser Grundvorstellung nach wird eine Bruchzahl durch eine natürliche Zahl geteilt bzw. eine gegebene Menge entsprechend verteilt.

Beispiel:
$\frac{6}{7}$ Liter Traubensaft soll auf 3 Personen aufgeteilt werden. Wie viel Liter Orangensaft bekommt jeder?

$\frac{6}{7}\text{l} : 3 = \frac{2}{7}\text{l}$
Jeder erhält $\frac{2}{7}$l Traubensaft.

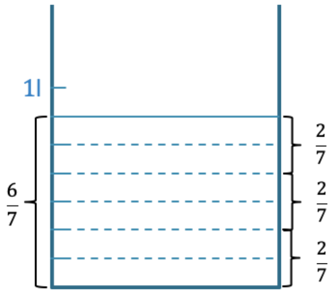

Abbildung 20: Division - Bruchzahl durch natürliche Zahl

Diese Interpretation der Division funktioniert natürlich ausschließlich mit natürlichen Zahlen, da die Personenanzahl keine Bruchzahl sein kann. [5, S.7]

2.4.15 Grundvorstellung 15: Dividieren als Messen (bzw. Aufteilen)

Um durch Bruchzahlen, anstatt natürlicher Zahlen, dividieren zu können, benötigt man eine bestehende Grundvorstellung, nämlich jene des Messens bzw. Aufteilens. Hier betrachtet man zum einen eine Größe und zum anderen ein Maß, wobei es darum geht, wie oft das Maß in der Größe enthalten ist.

Beispiel:
$\frac{3}{4}l$ Orangensaft soll in $\frac{1}{4}$- Liter Gläser gefüllt werden. Wie viele Gläser können damit gefüllt werden?

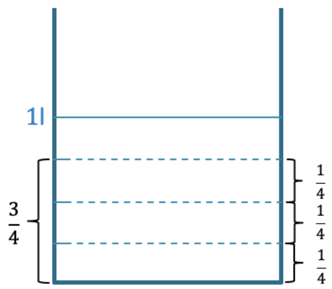

Abbildung 21: Division - Bruchzahl durch Bruchzahl

$\frac{3}{4}l : \frac{1}{4}l = 3$
Es können insgesamt 3 Gläser gefüllt werden.

Damit diese Grundvorstellung Sinn ergibt, soll der Dividend zumindest am Anfang gleich groß oder größer als der Divisor sein. Außerdem sollte das Ergebnis idealerweise eine natürliche Zahl sein, da es bei Beispielen wie dem obigen zu Problemen kommen kann. Ist das nicht der Fall, muss entweder gerundet werden, oder man akzeptiert, dass ein Glas nicht vollgefüllt ist. Das angeführte Beispiel kann aber auch auf zwei weitere Varianten interpretiert werden.

Die Division kann auch als fortlaufende Subtraktion betrachtet werden. Dabei wird der vorhandene Orangensaft so lange in Gläser abgefüllt, bis nichts mehr übrig ist. Mathematisch betrachtet lässt sich dieser Sachverhalt folgendermaßen darstellen:

$$\frac{3}{4}l - \underbrace{\frac{1}{4}l - \frac{1}{4}l - \frac{1}{4}l}_{\text{3 Subtrahenden}} = 0, \text{also: } \frac{3}{4}l : \frac{1}{4}l = 3$$

Die Division lässt sich aber auch als Additions- bzw. Multiplikationsaufgabe lösen. Im Gegensatz zur fortlaufenden Subtraktion, werden hier die Gläser addiert, welche nacheinander gefüllt werden können. So ergibt sich folgender mathematischer Zusammenhang:

$$\underbrace{\frac{1}{4}l + \frac{1}{4}l + \frac{1}{4}l}_{\text{3 Summanden}} = \frac{3}{4}l$$

Bei der Division von Bruchzahlen müssen auch einige Vorstellungen aufgegeben werden, die bei der Division von natürlichen Zahlen Geltung fanden. Beispielsweise muss der Quotient nicht mehr kleiner als der Dividend sein. [5, S.8]

2.4.16 Grundvorstellungen als Voraussetzung für Anwendungen

Treffen SchülerInnen auf eine bestimmte Situation, in welcher die Bruchrechnung zur Anwendung kommt, so ordnen sie den vorkommenden Größen zunächst Bruchzahlen zu. Diese müssen im Anschluss mit Hilfe von Rechenoperationen miteinander verknüpft werden. Doch genau hier haben die SchülerInnen oft Schwierigkeiten, die richtigen Operationen zu wählen. Günther Malle sieht die Grundvorstellungen als „Mittlerrolle zwischen der Situation und den zu wählenden Rechenoperationen“. [5, S.8]

Situation ↔ Grundvorstellungen ↔ Rechenoperationen

Malle bezeichnet ein Wissen ohne Grundvorstellungen als „totes Wissen “, welches nutzlos ist und schnell vergessen wird. [5, ebd.]

2.5 Zwei zentrale Grundvorstellungen bei Padberg

Padberg sieht innerhalb der unterschiedlichen Grundvorstellungen viele Überlappungen und versucht, diese auf zwei zentrale Grundvorstellungen zusammenzuführen.

2.5.1 Bruch als Anteil

Zur ersten Grundvorstellung zählt Padberg zum einen „Bruch als Anteil eines Ganzen“ (kontinuierlich und diskret), zum anderen „Bruch als Anteil mehrerer Ganzer“[2, S.21]. Um ein Verständnis dafür gewinnen zu können, werde ich ein paar Beispiele nennen:

Beispiele:

- Maria und Lukas bestellen sich eine Pizza und teilen sie in vier gleich große Teile. Drei davon sind für Lukas bestimmt. Welchen Anteil der Pizza bekommt Lukas? (kontinuierlich)

- Zu Ostern bekommt Lisa sechs farbige Eier geschenkt. Drei davon sind grün. Welcher Anteil der Eier ist grün? (diskret)

- Sonja, Max und Marlies teilen sich zwei Pizzen fair (gleichmäßig) auf. Welchen Anteil bekommt jedes der drei Kinder? (Bruch als Anteil mehrerer Ganzer)

2.5.2 Bruch als Operator

Als zweite Grundvorstellung nennt Padberg die Interpretation eines Bruches als Operator. Dieser Grundvorstellung ordnet er eine weitaus größere Bedeutung zu, als jener des Anteils. Sie ist vor allem bei der Multiplikation von Bruchzahlen grundlegend, wobei die „Von-Deutung“ dabei eine zentrale Rolle spielt. Auch hier werde ich zwei Beispiele anführen:

Beispiele:

- Belege $\frac{3}{4}$ der Pizza mit Salami. (kontinuierlich)
- $\frac{1}{4}$ *von* 8 Ostereiern sind rot. (diskret)

Die beiden vorgestellten zentralen Grundvorstellungen hängen sehr eng zusammen. Die Operatoren-Vorstellung spielt eine wichtige Rolle bei der „Herstellung“, weshalb man auch von der dynamischen Komponente spricht. Die Anteil-Grundvorstellung bezieht sich mehr auf das „Ergebnis“, weshalb man auch von der statischen Komponente spricht. Dem Verhältnisaspekt ordnet Padberg eine eher untergeordnete Rolle zu, was er darin begründet, dass diese Vorstellung keine Voraussetzung für den Aufbau der Bruchrechnung darstellt. Diese führt bei Einführung der Addition von Bruchzahlen sogar eher zu Fehlvorstellungen, als dass sie helfen würde. Nur beim Kürzen und Erweitern ist die Vorstellung vom Verhältnis laut Padberg hilfreich. [2, S.22]

3 Addition und Subtraktion von Bruchzahlen

Da sich die Forschungsfrage hauptsächlich auf die Addition und Subtraktion von Bruchzahlen bezieht, werde ich in diesem Abschnitt versuchen, näher auf die unterschiedlichen Aspekte und Schwierigkeiten dieses Teilgebiets der Bruchrechnung einzugehen.

3.1 Anschauliche Vorkenntnisse

Der Hauptgrund, weshalb die Addition und Subtraktion von Bruchzahlen bei einigen SchülerInnen durchaus zu Problemen führt, sind die mangelnden anschaulichen Vorkenntnisse, die die SchülerInnen in den Unterricht mitbringen. In der Schule wird dem zu wenig entgegengesteuert und viel zu früh mit der systematischen Erarbeitung des Stoffgebiets begonnen. Damit die SchülerInnen ein fundiertes Verständnis entwickeln können, ist es nötig, zuallererst mit anschaulichen Beispielen zu beginnen, wie das Addieren und Subtrahieren von gleich großen Tortenstücken. Nach und nach kann dann ein fließender Übergang zum formalen Rechenweg angesteuert und eine Verbindung hergestellt werden, die es auch den schwachen SchülerInnen ermöglicht, zu folgen. Eine Untersuchung zur Bruchrechnung zeigte, dass nur 20% der teilnehmenden SchülerInnen folgende Aufgabe richtig lösen konnten: „Schraffiere zunächst die Hälfte dieses Rechtecks, danach schraffiere noch ein Viertel dieses Rechtecks. Wie viel hast du insgesamt schraffiert? “. [2, S.73]
Die Grundlage für die Addition und Subtraktion von Bruchzahlen stellt jedoch bereits das „Ordnen und Vergleichen von Bruchzahlen“ dar. Damit ein Vergleich von Bruchzahlen möglich ist, werden diese zunächst immer auf gleichen Nenner gebracht, bevor im Anschluss nur noch die Anzahl der gleich großen Stücke verglichen werden muss. Haben die SchülerInnen diese Vorgehensweise einmal verstanden, kann bei der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen direkt darauf zurückgegriffen und angeknüpft werden.

3.2 Grundvorstellungen und anschauliche Wege zur Addition und Subtraktion von Bruchzahlen

Bei der Addition von Bruchzahlen wird außerdem auf jene Grundvorstellung zurückgegriffen, die auch schon bei der Addition natürlicher Zahlen zum Tragen kam. Dabei beschreibt die Addition ein „Hinzufügen“ bzw. „Zusammenlegen“. Um eine Vorstellung davon zu bekommen, wie die Addition von Bruchzahlen anschaulich eingeführt werden könnte, werde ich im Folgenden ein Beispiel näher erläutern. [2, S.74]

Beispiel: Bei einem Sportfest wurden von den unterschiedlichen Vereinen verschiedene Kuchen mitgebracht, doch am Ende des Tages blieben reichlich Stücke übrig. Diese versuchen die Standbesitzer nun auf jeweils ein Blech zusammenzulegen, wobei die Stücke gleich groß sein sollen. Wir schauen uns dazu die Situationen der einzelnen Stände an.

- **Stand 1:** Der erste Stand verkaufte nur Erdbeer- und Zitronenkuchen, wobei zweiterer eindeutig beliebter war.

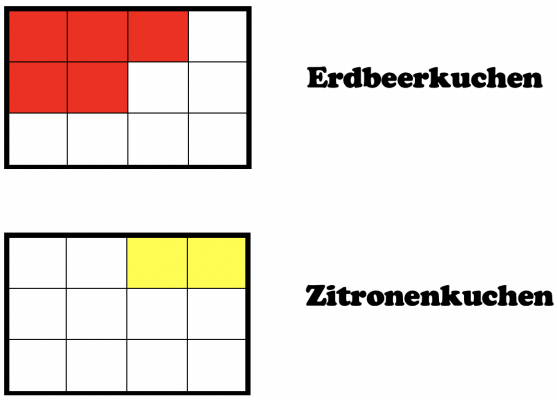

Abbildung 22: Gleich große Stücke

Während beim Erdbeerkuchen noch 5 von 12 Stücken, also $\frac{5}{12}$ des Kuchens übrig sind, wurden beim Zitronenkuchen nur 2 von 12 Stücken, also $\frac{2}{12}$ des Kuchens nicht verkauft. Da die Stücke jeweils gleich groß sind, lassen sich die Kuchen ohne weiteres auf ein Blech zusammenschieben, weshalb die Stücke lediglich addiert werden müssen. Somit wurden beim Stand 1 insgesamt $\frac{7}{12}$

Kuchen nicht verkauft.

Dies wäre eine sehr anschauliche Weise, die Addition gleichnamiger Brüche einzuführen, da wir in beiden Fällen den Nenner 12 haben. Das Zusammenführen der Stücke erinnert uns hierbei wieder an das Zusammenzählen von Äpfeln oder Birnen bei den natürlichen Zahlen. Stattdessen werden hier aber Anteile in Form von Kuchenstücken addiert. Hier wird also auf den Quasikardinalzahlaspekt von Bruchzahlen (6. Grundvorstellung) zurückgegriffen.

- **Stand 2:** Der zweite Stand verkaufte nur Pfirsich- und Blaubeerkuchen.

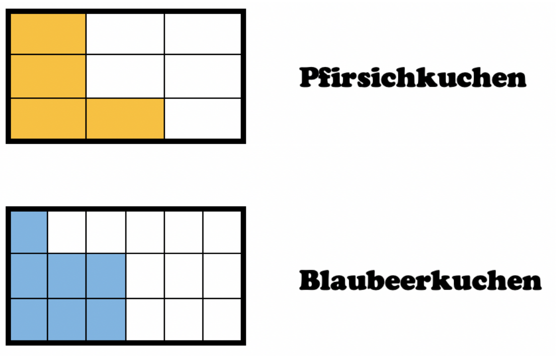

Abbildung 23: Unterschiedlich große Stücke

Während vom Pfirsichkuchen noch 4 von 9 Stücken übrig sind, sind es beim Blaubeerkuchen noch 7 von 18 Stücken. Die Stücke auf den zwei Blechen sind hier jedoch unterschiedlich groß, also können sie nicht so einfach auf ein Blech zusammengeführt werden. Teilt man jedoch jedes der übrig gebliebenen Pfirsichkuchen-Stücke in zwei gleich große Teile, so wird die Anzahl der Stücke verdoppelt und sie bekommen dieselbe Größe. Vom Pfirsichkuchen sind nach der Teilung noch 8 von 18 Stücken, also $\frac{8}{18}$ Kuchen und vom Zitronenkuchen $\frac{7}{18}$ übrig. Nun lassen sich die beiden Anteile analog zur Vorgehensweise von Stand 1 ganz einfach zusammenführen, indem die Anzahlen der Stücke addiert werden. Somit wurden beim Stand 2 insgesamt 8+7, also $\frac{15}{18}$ Kuchen, nicht verkauft.

- **Stand 3:** Der dritte Stand verkaufte nur Kirsch- und Zwetschkenkuchen.

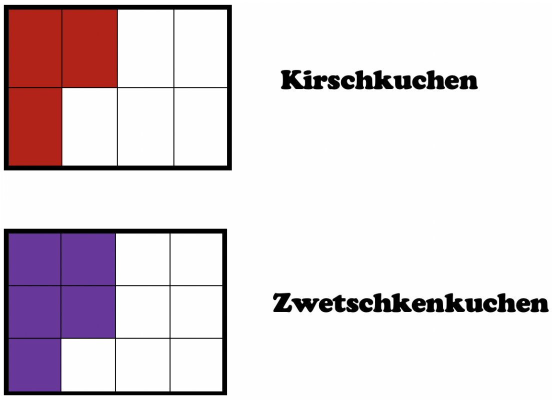

Abbildung 24: Unterschiedlich große Stücke

Auch hier sind die Stücke wieder unterschiedlich groß, doch lässt sich hier die Vorgehensweise von Stand 2 nicht ohne Weiteres anwenden, da es nichts bringen würde, bloß einen Kuchen weiter zu teilen. Vielmehr muss hier versucht werden, beide Kuchen jeweils so zu teilen, dass man letztendlich gleich große Stücke erhält. So könnte man die Kirschkuchenstücke in drei und die Zwetschkenkuchenstücke in zwei gleich große Teile teilen, um die Anteile im Anschluss wieder addieren zu können.

Sobald die Stücke gleich groß sind und die Brüche somit auf gleichen Nenner gebracht wurden, kommt auch hier erneut die Grundvorstellung der Addition zum Tragen, die auch schon bei Stand 1 klar wurde. Die Schwierigkeit liegt hier also nicht an der konzeptionellen Seite, sondern bei der Ergebnisfindung. Schließlich müssen die Bruchzahlen zunächst auf den gleichen Nenner bzw. auf gleich große Stücke gebracht werden, um sie im Anschluss addieren zu können. Anhand dieses Beispiels sieht man aber auch sehr gut, dass der anschaulichen Darstellung und Lösung von Bruchrechenbeispielen Grenzen gesetzt sind und es ab einem gewissen Zeitpunkt einfacher wird, auf Bruchzahlen und formale Rechenwege umzusteigen. Aber auch beim Erweitern und Kürzen von Brüchen sollte immer wieder anschaulich klar gemacht werden, was man hier eigentlich macht bzw. bezwecken will.

Die Subtraktion unterliegt der Grundvorstellung des Wegnehmens oder Vergleichens, wodurch Unterschiede berechnet werden können. Auch die Subtraktion kann sehr anschaulich durch Kuchen- oder Tortenbeispiele eingeführt und viele Gemeinsamkeiten mit den Rechenregeln bei natürlichen Zahlen festgestellt werden. So lässt sich auch hier Schritt für Schritt zeigen, dass es in manchen Fällen notwendig ist, einen oder mehrere Kuchen noch einmal zu unterteilen, um einen gegebenen Anteil abziehen zu können.

Eine weitere Analogie des Rechnens mit Bruchzahlen zu den natürlichen Zahlen ist die Vorstellung der Addition als Umkehrung der Subtraktion. Wissen wir, dass $\frac{5}{7}$ das Ergebnis der Additionsaufgabe $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ ist, so schließt das auch mit ein, dass $\frac{2}{7}$ das Ergebnis der Subtraktionsaufgabe $\frac{5}{7} - \frac{3}{7}$ sein muss. Das hilft den SchülerInnen wiederum, da das Lösen und damit einhergehende Deuten von Textaufgaben auf bereits bekannte Denkmuster aus der Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen zurückzuführen ist. Einzig die Rechnungen an sich müssen anders gelöst werden, doch der Ansatz bleibt derselbe. [2, S.75]

3.3 Systematische Behandlung

Führt man die Addition und Subtraktion von Bruchzahlen anschaulich mit Hilfe von Tortendiagrammen oder Rechtecken ein, so erkennen SchülerInnen sehr schnell, dass das Addieren und Subtrahieren sehr einfach ist, wenn bereits eine gemeinsame Unterteilung vorliegt. Schwierigkeiten gibt es erst dann, wenn man ungleiche Unterteilungen hat und man einen Lösungsweg finden muss. [2, S.78]
Rathgeb-Schnierer spricht in einem ihrer Bücher von einem Zahlenblick, den man erlernen soll, um den Rechenaufwand erheblich zu minimieren. Durch den anfänglichen Blick soll in kurzer Zeit herausgefunden werden, welcher Lösungsweg am attraktivsten scheint und am meisten Zeit einspart.[8] Diesbezüglich heben Marxer/Wittmann beim Lösen von Bruchrechenaufgaben folgende Aspekte besonders hervor:

- „Das Einschätzen von Brüchen und Aufgaben vor dem Rechnen, das heißt das Erkennen und Bewerten der jeweils spezifischen Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen einer Aufgabe im Hinblick darauf, ob sie für die Lösung hilfreich sein können.

- Das Wählen von Lösungswegen, die den aufgabenspezifischen Gegebenheiten gerecht werden, indem die jeweils spezifischen Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen einer Aufgabe genutzt werden, statt isolierte Automatismen." [9, S.28]

Wie zuvor schon umgehend erläutert wurde, kommen bei der systematischen Erarbeitung von Bruchrechenaufgaben häufig Rechtecke zum Einsatz, die im Anschluss weiter unterteilt werden. Die Darstellung der Rechtecke ist deshalb so praktisch, da man stets eine gemeinsame Unterteilung erreicht, wenn man dieses entsprechend dem ersten Nenner senkrecht und entsprechend dem zweiten Nenner waagrecht unterteilt. Die so entstandene Unterteilung entspricht aber nur in bestimmten Fällen der gröbsten bzw. minimalen Unterteilung, nämlich genau dann, wenn die beiden gegebenen Bruchzahlen teilerfremd sind. Dieses Unterteilen ist dann mit dem Gleichnamigmachen von Brüchen gleichzusetzen, wobei die gröbste Unterteilung rein rechnerisch durch das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) gefunden werden kann. [2, S.78]
Mit Hilfe eines geschulten Zahlenblicks kann hier beispielsweise Zeit gespart werden, indem man das kleinste gemeinsame Vielfache versucht durch Nachdenken und Kopfrechnen zu finden. Vor allem bei kleineren Nennern ist dies oft möglich und bedarf keines großen Rechengeschicks.

„Sind die Brüche gleichnamig, so addiert bzw. subtrahiert man die Zähler und behält den gemeinsamen Nenner bei. Sind die Brüche ungleichnamig, so macht man sie zunächst gleichnamig. Dann addiert bzw. subtrahiert man sie." [2, S.79]

3.4 Addieren und Subtrahieren gemischter Zahlen

Rechnet man mit gemischten Zahlen, so lässt man die Grundvorstellungen des Addierens und Subtrahierens unverändert und stellt lediglich eine Verknüpfung des bereits Bekannten zu einer neuen Schreibweise her. Definiert man die gemischte Zahl $4\frac{2}{7}$ zum Beispiel als $4 + \frac{2}{7}$, dann kommt zu einer Additionsaufgabe wie $4\frac{2}{7} + 3\frac{4}{7} = 4 + 3 + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ zur bereits bekannten Addition der Bruchzahlen lediglich das Addieren natürlicher Zahlen, in dem Fall $3+4$, hinzu. Dieselbe Aufgabe könnte natürlich auch gelöst werden, indem beide gemischten Zahlen als Bruchzahlen angeschrieben werden, doch ist das auch gleichzeitig die aufwendigere Variante. [2, S.79]

Das Subtrahieren gemischter Zahlen fällt SchülerInnen jedoch schon etwas schwerer. Natürlich könnte man auch hier den aufwendigeren Weg beschreiten und alle gemischten Zahlen in Bruchzahlen verwandeln, doch wollen dies sicher nicht alle. Betrachtet man eine Subtraktionsaufgabe wie $5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{4} = 5\frac{8}{12} - 3\frac{3}{12} = 2\frac{5}{12}$, so lässt sich auch diese ohne große Hürden lösen, während die Aufgabe $6\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2}$ zu viel größeren Problemen führt. Bringt man bei Aufgabe 2 beide Bruchzahlen auf gleichen Nenner, so muss man ein Ganzes der ersten gemischten Zahl umwandeln, um die beiden Zähler im Anschluss subtrahieren zu können. Die Rechnung sieht dann folgendermaßen aus: $6\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2} = 6\frac{2}{6} - 3\frac{3}{6} = 5\frac{8}{6} - 3\frac{3}{6} = 2\frac{5}{6}$ [2, ebd.]

Die Schreibweise der gemischten Zahlen steht häufig in der Kritik, doch hat sie auch durchaus ihre Vorteile und Berechtigung.

Vorteile der Schreibweise:

- Beim Vergleichen von Bruchzahlen: $\frac{37}{3} < \frac{53}{4}$, denn $12\frac{1}{3} < 13\frac{1}{4}$
- Beim Addieren von Bruchzahlen: $\frac{37}{3} + \frac{53}{4} = 12\frac{1}{3} + 13\frac{1}{4} = 25\frac{7}{12}$
- Beim Subtrahieren von Bruchzahlen: $\frac{38}{3} - \frac{29}{4} = 12\frac{2}{3} - 7\frac{1}{4} = 5\frac{5}{12}$

Nachteile der Schreibweise:

- Sie stellt keine korrekte Bezeichnungsweise der Zahlen dar, da man $4\frac{2}{5}$ auch einfach als $\frac{22}{5}$ schreiben kann und man anstelle von „gemischten Zahlen" eigentlich von „gemischten Zahlzeichen" sprechen müsste.
- Es herrscht eine große Verwechslungsgefahr mit der algebraischen Schreibweise, in welcher $a\frac{b}{c}$ nicht als $a + \frac{b}{c}$ sondern als $a \cdot \frac{b}{c}$ gedeutet wird. Das ist auch der Grund, weshalb viele FachdidaktikerInnen immer wieder vor der Schreibweise bei gemischten Zahlen warnen und empfehlen, ausschließlich bei der ursprünglichen Bruchschreibweise zu bleiben. [2, S.80]

4 Schwierigkeiten und häufige Fehler bei der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen

4.1 Grundvorstellungen und Rechenkalkül

Die Bruchrechnung zählt schon immer zu den schwierigen Themen in der 5. und 6. Schulstufe, was nicht immer an der Komplexität des Stoffes liegt, sondern auch durch die Art der Einführung durch die Lehrperson maßgeblich beeinflusst wird. Während die einen Lehrpersonen auf Anschaulichkeit und Anwendungsorientierung setzen, stützen sich andere wiederum auf reine Kalkülaufgaben und Anwenden von Regeln.

Im Zuge des PALMA - Projekts (R.Pektrun, München; R. vom Hofe, Bielefeld; W.Blum, Kassel)[1] wurde eine eingebettete Untersuchung zum Thema Bruchrechnung durchgeführt, welche sich ebenfalls mit den Problembereichen und Hürden dieses Themas auseinandersetzt. Insgesamt nahmen 1010 Lernende, welche sich am Ende des 6.Schuljahres befanden, teil.

Im Zuge dieser Untersuchung wurde zum Beispiel genauer auf die oben erwähnte Problematik eingegangen, ob SchülerInnen die Bruchrechnung bloß als formale Regelanwendung kennengelernt haben, oder, ob hier wirklich inhaltliche Grundvorstellungen existieren. Um das herauszufinden, bekamen die SchülerInnen die Rechnung $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ sowohl als Rechenaufgabe, als auch als ikonische Darstellung mit der Aufgabenstellung „Färbe zuerst $\frac{1}{4}$ des Kreises und dann noch $\frac{1}{6}$ des Kreises. Welchen Bruchteil des Kreises hast du insgesamt gefärbt?“. [1]

Die geometrisch eingekleidete Aufgabe (Kurz: **G**) wurde insgesamt von 31% der Teilnehmenden richtig gelöst, während es bei der reinen Kalkülaufgabe (Kurz: **K**) 66% waren, die die Aufgabe geschafft haben. Interessant ist hier auch, welche Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen der beiden Aufgaben festgestellt werden können:

G richtig und K richtig: 25%

G richtig und K falsch: 5%

K richtig und G falsch: 33%

K falsch und G falsch: 36%

Hier wird schnell deutlich, dass jene SchülerInnen, welche die geometrisch eingekleidete Aufgabe richtig lösen konnten, auch bei der Kalkülaufgabe kaum Probleme hatten, während es umgekehrt ganz anders aussieht. Allgemein könnte man hieraus auch den Schluss ziehen, dass jene SchülerInnen, die die Grundvorstellungen erlernt haben, auch keine Probleme damit haben, formale Rechnungen zu lösen. Hat man diese Grundvorstellungen nicht, wird das Lösen von Bruchaufgaben mehr zum Anwenden auswendiggelernter aber unverstandener Regeln, wodurch jegliche Abweichungen der eintrainierten Beispiele und Vorgehensweisen Schwierigkeiten bereiten.

Auch Malle/Huber [10, S.20] haben bei einer Untersuchung mit 200 österreichischen GymnasialschülerInnen gezeigt, wie schwer es SchülerInnenn fällt, Aufgaben mit geometrischen Veranschaulichungen zu lösen. In einem speziellen Fall bekamen die SchülerInnen die Aufgabe, die Rechnung $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ auf verschiedene Arten graphisch zu veranschaulichen. Ob sie das mit Hilfe von Kreisen, Rechtecken oder anderen Möglichkeiten umsetzten, stand ihnen frei. Tragischerweise schaffte es nur in etwa die Hälfte der teilnehmenden SchülerInnen, die Aufgabe richtig oder zumindest teilweise richtig zu lösen. Als besonders schwierig stellte sich die Veranschaulichung auf dem Zahlenstahl heraus. Malle und Huber sehen hier ein mangelndes Verständnis der Grundvorstellungen zur Addition, denn obwohl sich diese von den natürlichen Zahlen ausgehend nicht maßgeblich verändert haben, treten hier dennoch große Schwierigkeiten auf.

4.2 Schwierigkeitsfaktoren

Es zeigt sich mehr und mehr, dass es den SchülerInnen oft leichter fällt, reine Kalkülaufgaben zu lösen als auf Grundvorstellungen zurückzugreifen. Das Anwenden unverstandener Regeln mag zwar für leichte Aufgaben wie $\frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ funktionieren und ausreichen, doch gibt es viele unterschiedliche Aspekte, die eine Aufgabe erheblich verkomplizieren und Lernende schnell an die Grenzen stoßen lassen, wenn sie nicht die nötigen Grundvorstellungen besitzen. So spielen folgende Faktoren eine wichtige Rolle bei der Komplexität einer Aufgabe [2, S.86]:

- Die Größe des Zählers und des Nenners – Das Erweitern und Kürzen bzw. auch das Auffinden eines kleinsten gemeinsamen Vielfachen wird mit größeren Zahlen schwieriger

- Die Kürzbarkeit von Bruchzahlen – Können Bruchzahlen gekürzt werden, so werden auch Zähler und Nenner kleiner

- Die Verbindung von Bruchzahlen mit natürlichen Zahlen

- Der Einsatz gemischter Zahlen

4.3 Addieren und Subtrahieren von Bruchzahlen

Auch Padberg [11] hat im Zuge einer an der Universität Bielefeld durchgeführten Studie die Addition und Subtraktion bei der Bruchrechnung näher untersucht. Dazu gab es unterschiedliche Aufgaben zur Addition und Subtraktion von Bruchzahlen, aber auch Aufgaben von Bruchzahlen in Verbindung mit natürlichen Zahlen. Folgende Ergebnisse konnten ausgemacht werden [2, S.86]:

- Addition gleichnamiger Bruchzahlen: 85% richtig

- Addition ungleichnamiger Bruchzahlen: 70% richtig

- Natürliche Zahl plus Bruchzahl: 55 % richtig

- Bruchzahl plus natürlicher Zahl: 50% richtig

Wie man eindeutig erkennen kann, hatten die SchülerInnen vor allem Probleme damit, die Bruchzahlen mit den natürlichen Zahlen zu vermischen und diese zusammenzuzählen. Überraschenderweise fiel ihnen die Addition ungleichnamiger Bruchzahlen gar nicht so schwer, wie man vielleicht vermuten würde. Auch bei der Subtraktion sehen die Ergebnisse ähnlich und wie folgt aus [2, ebd.]:

- Subtraktion gleichnamiger Bruchzahlen: 80% richtig

- Subtraktion ungleichnamiger Bruchzahlen: 70% richtig

- Natürliche Zahl minus Bruchzahl: 45% richtig

Da sich diese Mastarbeit vor allem mit der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen beschäftigt, werde ich mich in diesem Abschnitt hauptsächlich darauf konzentrieren.

Die Schwierigkeiten ergeben sich dabei durch eine falsche Lösungsstrategie bzw. einen falschen Gedankengang. Die SchülerInnen rechnen folgendermaßen:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Dieser Fehler basiert auch bei der Subtraktion auf demselben Prinzip:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Bei der Subtraktion kommt der Fehler jedoch eher seltener vor, da der oben angeführte Gedankengang nur dann möglich ist, wenn $a > c$ und $b > d$. Sind die Bedingungen nicht erfüllt, so weichen die SchülerInnen von der üblichen Vorgehensweise ab und es entstehen neue Fehler. Betrachten wir beispielsweise die Aufgabe $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$ so werden die Zähler ganz normal subtrahiert, doch da dies bei den Nennern nicht so einfach möglich ist, wird einfach einer der beiden Nenner als neuer Nenner im Ergebnis angeschrieben. [2, S.87]
Erwartungsgemäß passierte der Fehler der paarweisen Addition von Zähler und Nenner bei ungleichnamigen Bruchzahlen häufiger, als bei gleichnamigen Bruchzahlen. Gute 10% der TeilnehmerInnen der Untersuchung formulierten die Additionsregel sogar genau nach dieser Fehlvorstellung. So bekamen 16% aller teilnehmenden SchülerInnen bei der Aufgabe $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ als Ergebnis $\frac{2}{10}$ heraus. [2, S.88]

Mögliche Ursachen zur Fehlvorstellung:

- Die SchülerInnen sehen die Bruchzahl nicht bloß als eine Zahl, sondern als eine Zusammensetzung aus zwei voneinander unabhängigen natürlichen Zahlen. Daher kommt auch die Fehlvorstellung, dass sie die natürlichen Zahlen im Anschluss unabhängig voneinander addieren und subtrahieren.
- Den SchülerInnen fehlt die anschauliche Vorstellung zur Addition und Subtraktion von Bruchzahlen. Sie verstehen dabei nicht, dass hier stehts auf

dieselbe Bezugsgröße zurückgegriffen werden muss.

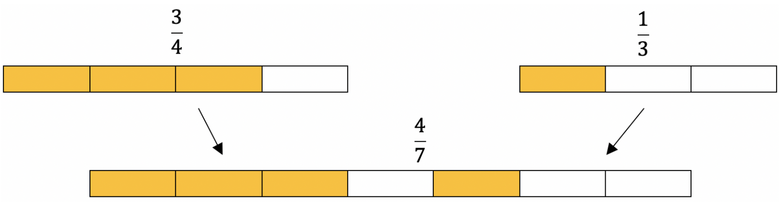

Abbildung 25: Zusammenführen unterschiedlicher Bezugsgrößen

- SchülerInnen verwechseln das Addieren und Subtrahieren von Bruchzahlen mit dem Addieren und Subtrahieren von Verhältnissen. Hier können nämlich durchaus unterschiedliche Bezugsgrößen zusammengeführt werden, denn die Bezugsgröße des Ergebnisses ergibt sich als Summe der Bezugsgrößen der vorkommenden Summanden.

  Beispiel: In einer Klasse sind 10 von 24 SchülerInnen männlich, während in der anderen Klasse 8 von 17 Kindern Buben sind. Insgesamt sind 18 (10+8) von 41 (24+17) SchülerInnen männlich.

- SchülerInnen übertragen gewisse Lösungsstrategien und Regeln beim Rechnen mit natürlichen Zahlen auch auf das Rechnen mit Bruchzahlen. Anstatt stellenweise zu addieren, wie es bei den natürlichen Zahlen üblich ist, wird nun also Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner addiert, da dies der bisherigen Vorgehensweise systematisch am meisten ähnelt.

- Haben SchülerInnen bereits die Multiplikation von Bruchzahlen kennengelernt, so kommen sie in Versuchung, die intuitive Lösungsstrategie der Multiplikation auch auf die Addition und Subtraktion auszuweiten. [2, S.89]

- Generell neigen SchülerInnen sehr stark dazu, die Regeln so gut es geht anzupassen, um zu einem plausiblen Ergebnis zu gelangen. Dies führt natürlich auch zu den unterschiedlichsten Fehlstrategien, welche auch ganz anders aussehen können als die bisher erwähnten. [12, S.31]

Mehrere Untersuchungen zeigten aber, dass das Hauptproblem bei der Bruchrechnung gar nicht so sehr die rechnerischen syntaktischen Fähigkeiten sind, sondern viel mehr die inhaltlichen semantischen Defizite, die die SchülerInnen aufweisen. Wird hier der Aufbau von gewissen Grundvorstellungen verabsäumt, so finden die Kinder eigene Erklärungen und Lösungsstrategien bzw. übertragen bereits bekannte Vorstellungen auf die Bruchrechnung, was in vielen Fällen zu Problemen und Fehlern führt.

5 Die Mediante

Wie in der bisherigen Arbeit schon mehrmals angeführt wurde, begehen SchülerInnen beim Addieren von Bruchzahlen häufig den Fehler, dass sie Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner addieren. In der Schule wird jedoch kaum erwähnt, warum dieser Ausdruck falsch sein muss bzw. kennen die SchülerInnen die eigentliche Bedeutung dieser Rechnung nicht.

Sind zwei Bruchzahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben, so nennt man den Ausdruck $\frac{a+c}{b+d}$ die Mediante in Bezug auf $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.
Dazu definieren wir zunächst eine neue Rechenart $\oplus$:

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}$$

Die Mediante hat die Eigenschaft, dass sie immer zwischen den beiden ursprünglichen Bruchzahlen liegt. Auf diese Weise lassen sich in der Schule natürlich sehr schnell Zwischenbrüche finden und es muss nicht immer auf gleichen Nenner gebracht werden.

Beispiel: Finde eine Bruchzahl, die zwischen $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ liegt!“

Lösungsweg mit Mediante: $\frac{4}{5} \oplus \frac{5}{6} = \frac{4+5}{5+6} = \frac{9}{11}$

$\Rightarrow \frac{9}{11}$ liegt zwischen $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$!

Sobald man eine gegebene Bruchzahl $\frac{x}{y}$ so mit einer beliebigen Bruchzahl verbindet ($\oplus$), bekommt man eine Bruchzahl, die zwischen den zwei Ursprünglichen liegt. Führe ich die Rechnung mehrmals durch und verwende dabei immer die Bruchzahl $\frac{x}{y}$ und das Ergebnis aus der vorhergehenden Rechnung, bekommt man damit Ergebnisse, die immer näher an $\frac{x}{y}$ heranrücken. [13]

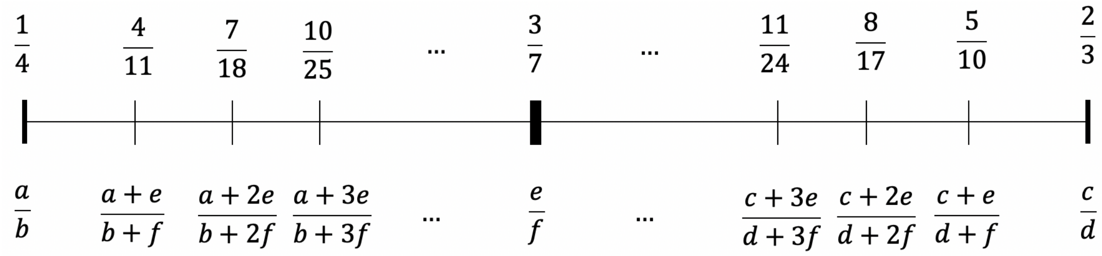

Abbildung 26: Mehrmalige Berechnung der Mediante

Begründung, warum die Mediante immer zwischen den ursprünglichen Bruchzahlen liegt [13]:

- **Algebraische Begründung:**
  Wenn $a, b, c, d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dann folgt: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

  <u>*Beweis:*</u>

  $$\begin{aligned} \tfrac{a}{b} &< \tfrac{c}{d} && |\cdot b,\ \cdot d \text{ mit } b > 0 \text{ und } d > 0 \\ \Rightarrow a \cdot d &< c \cdot b && |+a \cdot b \\ \Rightarrow a \cdot d + a \cdot b &< c \cdot b + a \cdot b && \\ \Rightarrow a(b+d) &< b(a+c) && |\cdot \tfrac{1}{b},\ \cdot \tfrac{1}{b+d} \\ \Rightarrow \tfrac{a}{b} &< \tfrac{a+c}{b+d} && \end{aligned}$$

  Der Beweis für $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ funktioniert analog.

- **Inhaltliche Begründung – Alkoholgehalt:**
  Wir betrachten zwei Getränke mit unterschiedlichem Alkoholgehalt, welcher mit Hilfe von Bruchzahlen angegeben wird:

  - $\frac{a}{b}$: a Liter Alkohol von b Liter Gesamtvolumen
  - $\frac{c}{d}$: c Liter Alkohol von d Liter Gesamtvolumen

  Würde man die beiden alkoholischen Getränke mischen, so befindet sich anschließend $a + c$ Liter Alkohol in $b + d$ Liter Gesamtvolumen. Hier wird intuitiv schnell klar, dass der neue Alkoholgehalt $\frac{a+c}{b+d}$ irgendwo zwischen jenen der beiden ursprünglichen Getränke liegen muss, da beim Mischen die Konzentrationen einander quasi ausgleichen.

- **Inhaltliche Begründung – Pizzastücke:**
  - Gruppe 1: a Pizzen werden auf b Personen aufgeteilt. Jede/r bekommt also $\frac{a}{b}$ Pizza!
  - Gruppe 2: c Pizzen werden auf d Personen aufgeteilt. Jede/r bekommt also $\frac{c}{d}$ Pizza!

  Vereinigen sich die beiden Gruppen nun und teilen alle $a + c$ Pizzen gerecht auf $b + d$ Personen auf, so bekommt jede/r $\frac{a+c}{b+d}$ Pizza. Diejenigen Personen, welche zuvor weniger bekommen hätten, bekommen nun größere Stücke, während sich die Personen aus der anderen Gruppe nun mit weniger Pizza zufrieden geben müssen.

- **Geometrische Begründung:**
  Die Mediante kann auch geometrisch mit Hilfe von Steigungen begründet werden. Betrachtet man die Steigungen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, so beschreibt der Ausdruck $\frac{a+c}{b+d}$ eine mittlere Steigung.

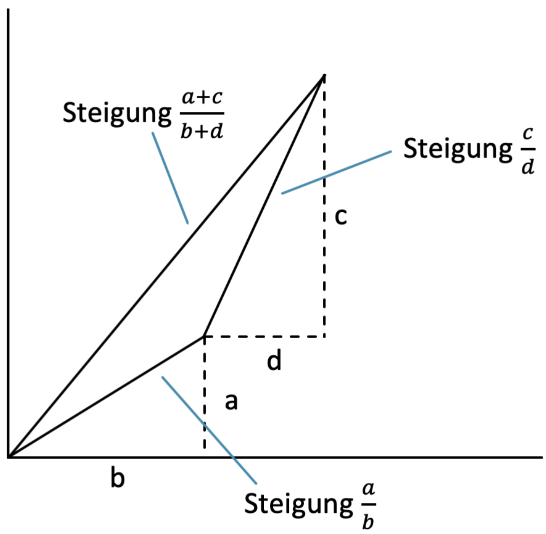

Abbildung 27: Berechnung einer mittleren Steigung

Ziel der Mediante ist es, die Verwechslungsgefahr der Lösungsstrategien bei der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen zu vermindern. Will man zwei positive Bruchzahlen addieren, so muss das Ergebnis logischerweise größer sein als jeder

der beiden Summanden und kann daher auch nicht dazwischen liegen. Diese Schärfung der jeweiligen Bedeutungen der Rechenarten, soll Klarheit darüber schaffen, welcher Rechenweg der sinnvollste und einzig richtige ist. Außerdem stellt die Mediante eine leichte Methode für das Auffinden von „Zwischenbrüchen“ dar und hat daher auch praktischen Nutzen.

6 Methodik

In diesem Kapitel werde ich näher auf die Vorgehensweise meiner Datenerhebung und die Rahmenbedingungen der Untersuchung eingehen. Außerdem werde ich erläutern, wie ich bei der Auswertung der erfassten Daten vorgegangen bin.

6.1 Herangehensweise

Ziel dieser Arbeit ist es herauszufinden, inwiefern sich die Einführung der Mediante positiv oder negativ auf die Leistungen beim Addieren und Subtrahieren von Bruchzahlen auswirkt. Besonders interessant ist hier die Frage, ob SchülerInnen den Fehler der paarweisen Addition und Subtraktion von Zähler und Nenner weniger häufig begehen, wenn sie wissen, was diese Rechnung tatsächlich bedeutet.

Um das herauszufinden, ist es nötig, eine Vielzahl an SchülerInnen in die Untersuchung mit einzubinden, damit das anschließende Ergebnis auch Gültigkeit hat. Aus diesem Grund habe ich die Untersuchung quantitativ angelegt und mit Hilfe von Testbögen durchgeführt. Das hat den entscheidenden Vorteil, dass man gleiche Bedingungen für eine Vielzahl von Personen schaffen kann, deren Ergebnisse im Anschluss verglichen werden können. Vor allem die Vergleichbarkeit spielt hier eine entscheidende Rolle, da die Leistungen der SchülerInnen in einer Klasse ohnehin sehr heterogen verteilt sind. Nun muss aber auch noch festgelegt werden, wie man am besten untersucht, ob es eine Leistungssteigerung beim Addieren und Subtrahieren von Bruchzahlen gibt, wenn die Mediante zuvor eingeführt wurde. Dazu braucht man im Anschluss einen Vergleichswert, mit dem die Leistungen verglichen werden, da man nicht weiß, wie die Klasse ohne die Mediante abgeschlossen hätte.

Um diesen Aspekt zu berücksichtigen, habe ich in meiner Untersuchung insgesamt sechs Klassen mit eingebunden, die sich alle in der sechsten Schulstufe befinden. Diese wurden so gewählt, dass jeweils zwei Klassen von derselben Lehrperson unterrichtet werden. Das heißt, es nehmen drei Lehrpersonen mit jeweils zwei zweiten Klassen an der Untersuchung teil.

Der Ablauf wird sein, dass eine Klasse einer jeden teilnehmenden Lehrperson,

wie bisher und ohne Erwähnung der Mediante, unterrichtet wird, während in der Parallelklasse die Einführung der Mediante ergänzt wird. Dabei soll stark darauf geachtet werden, dass die gesamte Bruchrechnung völlig ident behandelt und lediglich in einer der beiden Klassen die Mediante ergänzt wird.
Für die Einführung der Mediante bekommen die teilnehmenden Lehrpersonen eine, von mir ausgearbeitete Planung, damit gewährleistet wird, dass die Mediante auch ausreichend behandelt wird und man den Begriff nicht nur anklingen lässt. Den Testbogen bekommen die SchülerInnen erst am Ende der Bruchrechnung, damit sich auch ein langfristiger Effekt untersuchen lässt.

6.2 Einführung der Mediante im Unterricht

Damit die Untersuchungsergebnisse im Anschluss sinnvoll ausgewertet werden können und glaubhaft sind, muss zuvor auch sichergestellt werden, dass die Mediante in jeweils einer der beiden Klassen auch wirklich ausführlich genug eingeführt wurde. Es reicht dabei nicht nur ein Erwähnen dieses Begriffs, sondern es müssen auch Aufgaben mit der Mediante gelöst werden, um den Sinn dieses Begriffs anschaulich zu zeigen und das Verständnis der SchülerInnen zu fördern. Kein/e SchülerIn wird sich einen bloßen Begriff merken, wenn er/sie die Bedeutung dazu nicht kennt und nicht weiß, wie dieser richtig eingesetzt wird, geschweige denn, wozu er/sie den Begriff überhaupt lernen soll.
Aus diesem Grund bekommen die an der Untersuchung teilnehmenden Lehrpersonen eine vorgeschlagene Planung, wie die Mediante eingeführt werden soll, um eine ausführliche Behandlung dieses Begriffes zu gewährleisten. Um einen Einblick zu bekommen, wie diese Planung in etwa aussieht, werde ich Ausschnitte davon als Bild einfügen und meine Begründungen dazu anführen. Die Planung muss aber als Vorschlag für einen Hefteintrag verstanden werden und beinhaltet nicht die Erklärungen, welche von der Lehrperson individuell erfolgen.
Gleich zu Beginn der Einführung der Mediante soll gezeigt werden, dass der Ausdruck $\frac{a+c}{b+d}$ bei der Addition der Bruchzahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ nicht nur eine falsche Lösungsstrategie der Addition, sondern einen ganz eigenen Begriff darstellt. Mit Hilfe eines geschickt gewählten Beispiels wie $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ wird den SchülerInnen sehr anschaulich gezeigt, dass der vorgeschlagene Lösungsweg auf keinen Fall stimmen kann. Im Zuge

Die Mediante (S.50)

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$ ist **sicher falsch addiert**, denn $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ ist sicher größer als 1.

Der Term $\frac{a+c}{b+d}$ wird als **Mediante** zu $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ bezeichnet.

Besondere Eigenschaft der Mediante: Sie liegt immer zwischen den beiden Ausgangsbrüchen!

➔ Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Abbildung 28: Auszug aus der Planung

dessen wird sofort die Chance ergriffen und dem „falschen Weg" eine völlig neue Bedeutung eingeräumt. Die Eigenschaft der Mediante wird den SchülerInnen aber nicht rein mathematisch, sondern inhaltlich mit Hilfe von Pizzastücken argumentiert, wobei auf das Beispiel im Buch „Das ist Mathematik 2" von H. Humenberger zurückgegriffen wird, welches von allen teilnehmenden Lehrpersonen genutzt wird. Dieses Beispiel werde ich in kurzer Form näher erläutern.

Beispiel - Pizzastücke:

- **Gruppe A:** 3 Personen teilen sich 2 Pizzen. $\Rightarrow$ Jede/r bekommt $\frac{2}{3}$ Pizza!

Abbildung 29: $\frac{2}{3}$ einer Pizza

- **Gruppe B:** 4 Personen teilen sich 3 Pizzen. $\Rightarrow$ Jede/r bekommt $\frac{3}{4}$ Pizza!

Abbildung 30: $\frac{3}{4}$ einer Pizza

- **Gruppe A+B:** Gruppe A und Gruppe B vereinigen sich.
  Folglich teilen sich 7 Personen 5 Pizzen.
  $\Rightarrow$ Jede/r bekommt $\frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$ Pizza!

Abbildung 31: $\frac{5}{7}$ einer Pizza

Rechnet man die Mediante aus, um auf die Größe der Pizzastücke zu kommen, welche jede Person in der Gruppe bekommt, so ist anhand der abgebildeten Pizzen klar ersichtlich, dass das Ergebnis zwischen den beiden ursprünglichen Mengenangaben liegt.

Vor allem in der Schule sollte dieser Begriff möglichst anschaulich eingeführt werden, da dieser den künftigen Stoff erleichtern und keine zusätzliche Hürde darstellen soll.
Ist nun klar, dass die Mediante ein praktisches Werkzeug darstellt, welches in einfacher Art und Weise Zwischenbrüche liefert, so kann man im Anschluss daran zu den Beispielen bzw. Aufgaben übergehen und die SchülerInnen die Mediante selbst einsetzen lassen. Dazu gibt es im Buch eigene Beispiele, die ich hier wieder als Bild anführen werde.

177) a) ges.: 1) Mediante

2) Überprüfe durch Erweitern, ob die Mediante zwischen den gegebenen Brüchen liegt!

geg.: $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$

Abbildung 32: Auszug aus der Planung

Im ersten Beispiel soll die Mediante zunächst berechnet und im Anschluss auf ihre Richtigkeit überprüft werden. Dadurch sollen die SchülerInnen selbst erkennen, wie schnell die Aufgabe mit Hilfe der Mediante im Vergleich zur alternativen Methode, bei der man die Bruchzahlen auf gleichen Nenner bringt, gelöst werden kann.

179) ges.: Drei Bruchzahlen, die zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ liegen! Verwende das Prinzip der Mediante!

Abbildung 33: Auszug aus der Planung

Im zweiten vorgeschlagenen Beispiel soll den SchülerInnen gezeigt werden, dass das Prinzip der Mediante auch mehrmals angewendet werden kann, um infolgedessen auch mehrere Zwischenbrüche zu bekommen. Um die Rechnungen zu veranschaulichen bietet sich ein Zahlenstrahl an, in den man die gegebenen Bruchzahlen einzeichnet und errechnete Bruchzahlen immer wieder ergänzt.

Ziel dieser Unterrichtseinheiten sollte sein, dass die SchülerInnen die Mediante als praktisches Werkzeug zum Finden von Zwischenbrüchen akzeptieren und diese infolgedessen selbstständig zum Einsatz bringen. Kapitelmäßig gehört die Mediante zum „Ordnen von Bruchzahlen“ und sollte auch im Zuge dessen eingeführt werden. Wichtig ist hier auch ein klarer Schnitt zwischen der Mediante und der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen. Wird zwischen diesen Kapiteln nicht klar getrennt, kann es zu Verwechslungsschwierigkeiten kommen, die den entgegengesetzten Effekt hervorrufen können als jenen, den wir uns als Lehrperson wünschen.

6.3 Testbogen

Nachdem sich diese Masterarbeit hauptsächlich auf die Addition und Subtraktion von Bruchzahlen bezieht und diese näher untersucht wird, sollte mit Hilfe eines Testbogens vor allem dieser Teilaspekt der Bruchrechnung abgeprüft werden. Doch im Zuge meiner Arbeit möchte ich nicht nur feststellen, wie viele SchülerInnen die Aufgaben zur Addition und Subtraktion richtig oder falsch beantworten, sondern auch Informationen darüber erlangen, wie die SchülerInnen bei anderen Aufgaben zur Bruchrechnung abschneiden. Aus diesem Grund habe ich zum Beispiel Theoriefragen zu Zähler und Nenner einer Bruchzahl, oder eine Aufgabe zur Verbindung der vier Grundrechenarten im Testbogen ergänzt, doch darauf werde ich gleich im Anschluss genauer Bezug nehmen.
Der Grund dafür, warum ich zusätzliche Informationen über die Leistungen der SchülerInnen erfahren möchte, ist, dass man dadurch feststellen kann, welche

Grundvorstellungen dem/der SchülerIn eventuell fehlen, um ein gewisses Ergebnis zu rechtfertigen. Hier muss aber noch ein wenig weitergedacht und berücksichtigt werden, dass die Einführung der Mediante nicht ausschließlich positive Aspekte mit sich bringen muss. Es kann durchaus passieren, dass sie die SchülerInnen womöglich mehr verwirrt, als dass sie einen Nutzen bringt. Schließlich müssen die Kinder einen weiteren Begriff lernen und zuordnen, den sie natürlich genauso verwechseln könnten. Vor allem für schwache SchülerInnen könnte das ein Grund mehr sein, völlig durcheinander zu kommen. Genauso gut ist es möglich, dass SchülerInnen völlig richtig addieren und subtrahieren, aber alle anderen Aufgaben falsch lösen. Aus diesem Grund möchte ich mit Hilfe einer gewissen Aufgabenvariation versuchen, das anschließende Ergebnis genauer begründen und hinterfragen zu können. Damit ein wenig klarer wird, um welche Aufgaben es sich hier handelt, werde ich diese nacheinander angeben und meine Intentionen dazu ergänzen.

6.3.1 Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Gib in Worten an, was der Zähler beschreibt!

Gib in Worten an, was der Nenner beschreibt!

Abbildung 34: Testbogen - Aufgabe 1

Die erste Aufgabe dient dazu, herauszufinden, ob der/die SchülerIn überhaupt Grundvorstellungen zu Brüchen besitzt. Dazu sollen sie mit eigenen Worten beschreiben, was der Zähler bzw. der Nenner beschreibt. Je nachdem, wie die Antworten hier ausfallen, sieht man sehr schnell, ob der/die SchülerIn verstanden hat, was eine Bruchzahl eigentlich darstellt, oder, ob er/sie bloß auswendig gelernte

Regeln und Formeln anwendet, ohne grundlegendem Verständnis für die Materie.

6.3.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2: Gib drei Bruchzahlen an, die zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ liegen! Unterstreiche dein Ergebnis!

Abbildung 35: Testbogen - Aufgabe 2

Die zweite Aufgabe soll nun schon einen ersten Einblick geben, wie sehr die SchülerInnen die Mediante bereits verinnerlicht haben, und ob sie diese auch selbstständig im Zuge eines Beispiels anwenden würden. Diese Aufgabe ist deshalb so interessant, da das Finden eines Zwischenbruches in der Erarbeitungsphase der Mediante ausschließlich mit dieser gelöst wurde, während die Parallelklasse die Bruchzahlen auf denselben Nenner bringen mussten. Je nachdem, wie die SchülerInnen bei der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen abschneiden, kann ein Zusammenhang mit dieser Aufgabe und dem Einsatz der Mediante beim Lösen von Aufgabe 2 hergestellt werden.
Bei der Erstellung der Angabe wurde insbesondere darauf geachtet, dass man die Aufgabe nur durch mehrmaliges Erweitern lösen kann und es nicht genügt $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ auf Zwanzigstel zu erweitern. Auch das stellt eine weitere Hürde dar, die auch für die Klassen ohne die Mediante beachtet werden muss.

6.3.3 Aufgabe 3

Aufgabe 3: Führe die folgenden Rechnungen durch!

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$ ____________________

b) $\frac{7}{4}-\frac{4}{3}=$ ____________________

c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=$ ____________________

d) $\frac{4}{5}+\frac{5}{4}=$ ____________________

e) $\frac{4}{7}+\frac{3}{9}=$ ____________________

Abbildung 36: Testbogen - Aufgabe 3

Diese Aufgabe stellt den Kern der Untersuchung dar und liefert uns Informationen darüber, welche Fehler SchülerInnen beim Addieren bzw. Subtrahieren von Bruchzahlen begehen. Wie schon erwähnt gibt es hier auch Aufgaben zur Subtraktion, unter anderem um Eintönigkeit zu vermeiden, doch im Zuge der weiteren Bearbeitung und Auswertung der Daten werde ich mich vor allem auf die Additionen beziehen.
Hier wurde darauf geachtet, dass die Aufgaben in unterschiedliche Schwierigkeitsgrade unterteilt sind. Während bei Nummer a nur eine der beiden Bruchzahlen erweitert werden muss, müssen bei Beispiel d und e jeweils beide erweitert werden. Zusätzlich wirken die Bruchzahlen bei Nummer d sehr ähnlich, da sie sich lediglich durch die Vertauschung von Zähler und Nenner unterscheiden. Auch das könnte die SchülerInnen dazu verleiten, eigene Lösungsstrategien zu finden und auszuprobieren. Ziel ist es hier aber nicht, die SchülerInnen zu verwirren, sondern viel mehr zu testen, wie sicher sie in ihren Lösungsstrategien sind.

6.3.4 Aufgabe 4

Aufgabe 4: Führe die folgende Rechnung durch!

$$\left(1\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) : \frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$$

Abbildung 37: Testbogen - Aufgabe 4

Die vierte und letzte Aufgabe soll zeigen, wie die SchülerInnen mit der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen umgehen, wenn es nicht primär um diese Rechenoperation geht. Zusätzlich zur Addition und Subtraktion werden hier aber auch die Vorrangregel und die Divison von Bruchzahlen abgeprüft. Das gibt uns zusätzlich wieder einen Aufschluss über die Leistung der SchülerInnen, und ob sie es schaffen, mehrere Rechenoperationen in einer Rechnung zu kombinieren und trotzdem den jeweils richtigen Lösungsansatz zu wählen.
Um die Rechnung noch ein wenig zu verkomplizieren bzw. von der Addition abzulenken, wurde auch eine gemischte Zahl in die Aufgabe eingebunden. Ich spreche hier deshalb bewusst von Ablenkung, weil die SchülerInnen den Fokus hier nicht primär auf die Addition und Subtraktion legen sollen, sondern auf die Rechnung als Ganzes. Schließlich kann es durchaus sein, dass SchülerInnen gewisse Rechenoperationen in vereinfachten Aufgaben richtig ausführen können, bei der Kombination mehrerer Grundrechnungsarten aber durcheinander kommen.

6.4 Rahmenbedingungen (Gymnasium, Schüleranzahl, unangekündigt angekündigt? Unterschiedliche Schulen?)

Insgesamt nahmen drei Lehrpersonen aus zwei Gymnasien an der Untersuchung teil, wobei sich die Suche als äußerst schwierig herausstellte, da nur Lehrpersonen in Frage kamen, die zur Zeit zwei zweite Klassen unterrichten. Nach zig Anfragen konnte ich schlussendlich drei Lehrpersonen ausfindig machen und mobilisieren. Trotz zahlreicher Versuche, konnte ich leider keine NMS-Lehrpersonen für die Teilnahme an der Untersuchung gewinnen. Der Hauptgrund, so wurde es mir sehr oft mitgeteilt, liegt vor allem darin, dass das NMS-Lehrpersonal sehr eng mit der PH

zusammenarbeitet und daher ohnehin schon stark ausgelastet ist. Daher sind viele Lehrkräfte verständlicherweise auch nicht bereit, sich freiwillig zusätzlichen Stress und Arbeit aufzuhalsen. Das gilt aber nur für die befragten Schulen und nicht für die NMS im Allgemeinen.
Schade ist die ausschließliche Teilnahme von GymnasiallehrerInnen deshalb, weil man hier im Allgemeinen weniger leistungsschwache SchülerInnen findet und die Untersuchung darauf abzielt, eine Leistungssteigerung nach Einführung der Mediante festzustellen. Würden SchülerInnen so gut wie keine Fehler machen, kann auch keine Steigerung stattfinden bzw. ist das Ergebnis schlussendlich nicht so aussagekräftig.

Aufgrund der Anonymisierung der an der Untersuchung teilnehmenden Lehrpersonen, spreche ich in der weiteren Arbeit nur noch von Lehrperson 1, 2 und 3. Um unterscheiden zu können, welche Klasse einer Lehrperson jene mit bzw. ohne der Mediante ist, werde ich die Abkürzungen „o“ für „ohne Mediante“ und „m“ für „mit Mediante“ an die jeweilige Lehrperson anhängen.

Beipsiel: 2o - Beschreibt die Lehrperson 2 und ihre Klasse ohne Einführung der Mediante

Insgesamt nahmen 132 SchülerInnen an der Untersuchung teil, wobei die SchülerInnenzahl recht gleichmäßig auf die Klassen verteilt war.

SchülerInnenzahl:

- 1o: 21 SchülerInnen
- 1m: 19 SchülerInnen
- 2o: 23 SchülerInnen
- 2m: 23 SchülerInnen
- 3o: 24 SchülerInnen
- 3m: 22 SchülerInnen

Informationen zu 1 und 2: Die Lehrpersonen unterrichten beide in demselben Gymnasium, dessen Ort ich aufgrund der Anonymisierung nicht näher bekannt geben werde. Lehrperson 1 kann ich aufgrund ihrer vielen Dienstjahre ruhigen Gewissens als bereits sehr erfahrene Lehrperson beschreiben, während Lehrperson 2 erst ein paar Jahre im Berufsleben steht. Beide Lehrpersonen führten die Mediante, laut eigenen Angaben, wie besprochen ein und teilten den Testbogen erst am Ende der Bruchrechnung aus. Der Zeitpunkt der Testung war jedoch in der Woche vor der Schularbeit, zu der hauptsächlich die Bruchrechnung abgeprüft wurde. Das heißt auch, dass das Thema für SchülerInnen noch ganz frisch war und sie genau in der Übungsphase für die Schularbeit steckten. Das ist deshalb interessant, weil Lehrperson 3 hier einen anderen Zeitpunkt wählte.

Informationen zu L3: Die dritte Lehrperson unterrichtet in einem anderen Gymnasium, unterrichtet aber ebenfalls zwei zweite Klassen. Auch diese hat die vorgeschlagene Planung wie vorgesehen durchgeführt, doch die Testung selbst fand etwas später statt, nämlich in etwa einem Monat nach der Abschlussschularbeit zur Bruchrechnung. Das stellt einen gravierenden Unterschied zu den beiden anderen Lehrpersonen dar, da die SchülerInnen nicht mehr frisch in das Thema eingeübt sind. Aus diesem Grund lassen sich die Ergebnisse der dritten Lehrperson auch nicht so einfach mit jenen der anderen beiden vergleichen. Eine zeitgleiche Untersuchung wäre hier natürlich wünschenswert gewesen, jedoch lässt sich auf diese Weise eine langfristige Wirkung der Mediante untersuchen.

In allen Klassen wurde die Testung unangekündigt durchgeführt, weshalb sich die SchülerInnen nicht darauf vorbereiten konnten, sofern sie das bei 1 und 2 aufgrund der bevorstehenden Schularbeit nicht ohnehin schon taten.

6.5 Auswertung

Die Auswertung fand mit Hilfe einer Excel-Tabelle statt, wobei hier nicht nur wichtig war, ob der/die SchülerIn die jeweilige Aufgabe richtig oder falsch gelöst hat, sondern vor allem welcher Lösungsweg jeweils verwendet wurde. Vor allem bei Aufgabe zwei und drei habe ich in der Tabelle zu jedem/jeder SchülerIn Notizen gemacht, wie hier vorgegangen wurde. Um näher zu erläutern, worauf mein Fokus bei der jeweiligen Auswertung der Aufgaben lag, und ein Zurückblättern zu den Angaben zu vermeiden, werde ich diese jeweils noch einmal als Bild anführen.

Aufgabe 1:

Gib in Worten an, was der Zähler beschreibt!

Gib in Worten an, was der Nenner beschreibt!

In Aufgabe 1 ging es mir vor allem darum, wie sich SchülerInnen bei eigenständigen Formulierungen tun bzw. ob sie die Bedeutung einer Bruchzahl an sich verstanden haben. Konnten die SchülerInnen einen der beiden Begriffe definieren, so haben sie in meiner Tabelle einen halben Punkt eingetragen bekommen, mit der Notiz, welcher Begriff falsch war. Interessant ist bei dieser Aufgabe auch die Grenze, ab wann eine Beschreibung als richtig bewertet wird. Beim Zähler reichte es für mich, wenn die SchülerInnen sinngemäß formuliert haben, dass er die vorhandenen (gemeinten) Stücke zählt, oder aber auch angibt, welche Menge im Anschluss gleichmäßig aufgeteilt werden soll.

Beim Nenner war es schon etwas schwieriger und oft nicht eindeutig, ob die SchülerInnen einfach geraten haben, oder sich teilweise nur recht schlecht ausdrücken konnten. Hier habe ich in der Tabelle oft ganze Sätze dazu geschrieben oder nur die Notiz „schwammige Formulierung“ ergänzt. Als richtig wurden sinngemäßge Formulierungen akzepiert wie „Der Nenner gibt an, in wie viele Stücke ein Ganzes geteilt wird“ oder „Der Nenner gibt an, in wie viele gleichmäßige Teile die Menge des Zählers geteilt werden soll.“

Aufgabe 2: Gib drei Bruchzahlen an, die zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ liegen! Unterstreiche dein Ergebnis!

Bei der Aufgabe 2 wurde verstärkt darauf geachtet, ob sie mit Hilfe der Mediante gelöst, oder doch auf gleichnamige Nenner zurückgegriffen wurde. Konnten die

SchülerInnen hingegen nur einen statt drei Zwischenbrüche finden, so bekamen sie in meiner Tabelle einen halben Punkt.

Aufgabe 3: Führe die folgenden Rechnungen durch!

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$ ______________________________

b) $\frac{7}{4}-\frac{4}{3}=$ ______________________________

c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=$ ______________________________

d) $\frac{4}{5}+\frac{5}{4}=$ ______________________________

e) $\frac{4}{7}+\frac{3}{9}=$ ______________________________

Auch bei Aufgabe drei ging es sehr stark darum, wie die SchülerInnen die Aufgaben gelöst haben. Hier wurden alle „falschen“ Lösungsstrategien genau dokumentiert, da diese im Anschluss Auskunft darüber geben, ob die Einführung der Mediante einen positiven Effekt liefert. Rechenfehler wurden als solche ausgewiesen, aber werden im Zuge dieser Arbeit eher vernachlässigt, da es vor allem um die Lösungsstrategie geht.

Aufgabe 4: Führe die folgende Rechnung durch!

$$\left(1\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right):\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$$

Bei Aufgabe 4 lag der Fokus natürlich wieder auf der Addition, aber auch andere Rechenfehler wurden genau dokumentiert. Hier gibt es schließlich auch mehrere mögliche Fehlerquellen und dadurch auch die unterschiedlichsten Fehler.

Um die Ergebnisse im Anschluss anschaulich darstellen zu können, wurden die Daten im Zuge der Auswertung in Diagramme übertragen, welche ebenfalls mit Excel erstellt wurden.

7 Ergebnisse

Im folgenden Abschnitt werde ich versuchen, die Ergebnisse der Untersuchung so gut es geht zu veranschaulichen und zu beschreiben. Da es jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, auf alle erfassten Daten und Notizen meinerseits einzugehen, werde ich die Fülle an Informationen auf die wichtigsten Punkte und Aussagen reduzieren und wenn erforderlich, auch graphisch veranschaulichen. Damit man dennoch den Überblick behält, werde ich die Ergebnisse nach den vier Aufgaben strukturieren und vorerst auf jede Aufgabe einzeln Bezug nehmen. Im Anschluss werde ich versuchen, einen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen und dem Einsatz der Mediante herzustellen. Im letzten Schritt werde ich die Ergebnisse mit dem theoretischen Standpunkt aus der Literatur vergleichen und untersuchen, inwiefern sich diese damit vereinen lassen.

7.1 Darstellung der Ergebnisse zu ausgewählten Aufgabenstellungen des Testbogens

7.1.1 Ergebnisse – Aufgabe1

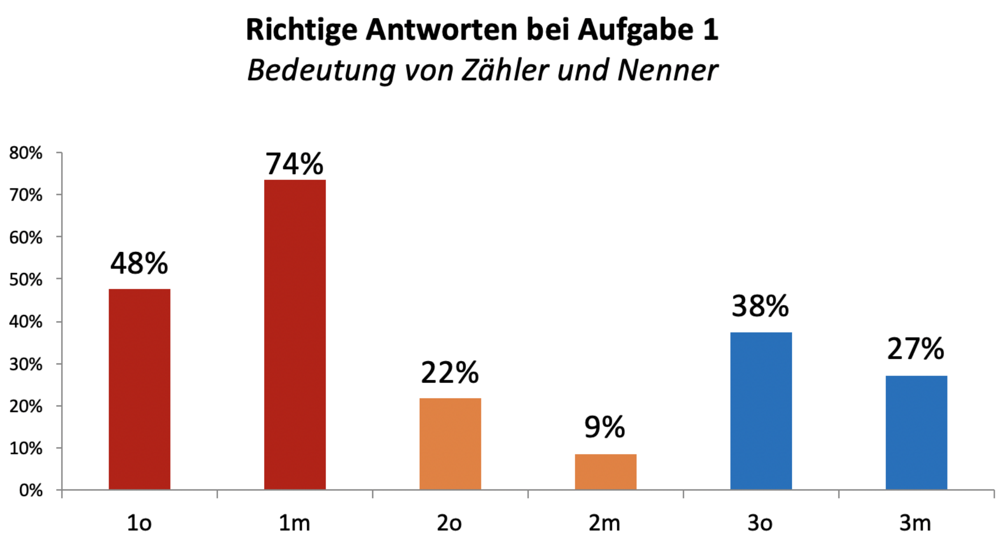

Abbildung 38: Aufgabe 1 – Ergebnis

Wie man der Abbildung 38 sehr gut entnehmen kann, gab es bei Aufgabe 1 einige

Schwierigkeiten. Während in einer Klasse knapp dreiviertel aller SchülerInnen die Aufgabe richtig lösen konnten, waren es in den anderen teilweise deutlich weniger als die Hälfte. In der Klasse 2m waren es bloß 9% aller SchülerInnen, die den Zähler und Nenner richtig definieren konnten. „Richtig“ bezeichnet hier das korrekte Definieren beider Begriffe, das heißt, ist ein Begriff falsch beschrieben, wird man in diesem Diagramm nicht mehr angeführt. Dabei gab es keine/n einzige/n SchülerIn, welche/r zwar den Zähler falsch hatte, aber den Nenner dennoch richtig beschreiben konnte. Wie die Verteilung aussieht, wenn man vergleicht, wie viele SchülerInnen bloß den Nenner falsch formuliert haben und jene, die alles falsch haben, zeigt uns die Abbildung 39.

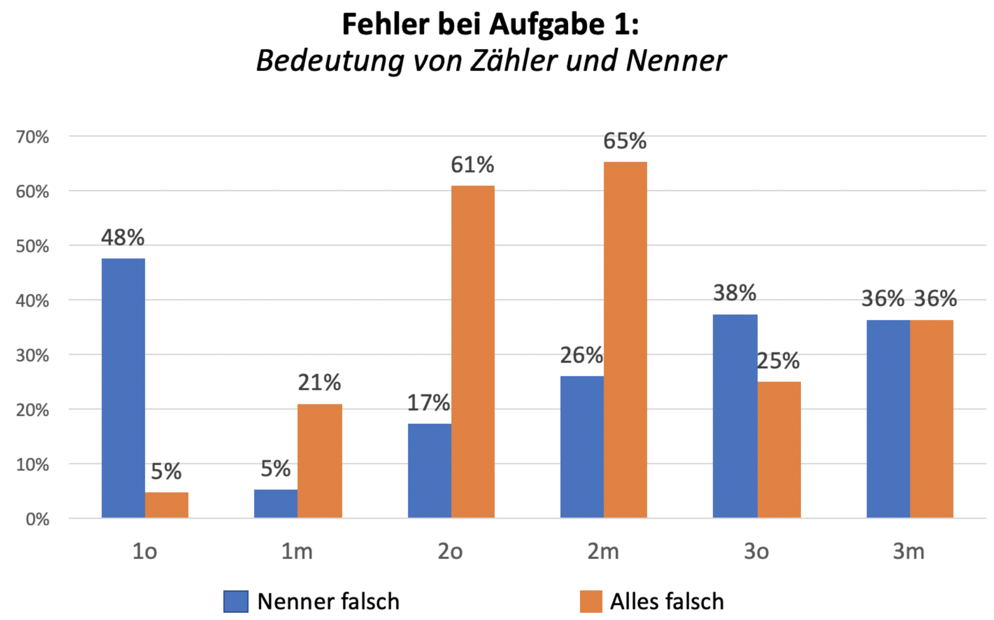

Abbildung 39: Aufgabe 1 – Fehler

Offensichtlich haben sehr viele SchülerInnen starke Probleme bei der Bedeutung des Nenners, während nur in drei von sechs Klassen der Großteil der Kinder alles falsch hatte. Vor allem diese Aufgabe zeigt sehr gut, dass den Kindern die Grundvorstellung dazu fehlt und somit auch ein gewisses Verständnis. Denn wenn Kinder nicht wissen, was die jeweiligen Komponenten einer Bruchzahl eigentlich bedeuten, dann fällt es einem schwer, zu glauben, dass sie die Rechenvorgänge durchschaut haben. Mit „durchschaut“ meine ich aber nicht die Fähigkeit, bloße Kalkülauf-

gaben zu lösen, sondern die Gründe zu verstehen, warum man die Bruchzahlen bei der Addition und Subtraktion zunächst auf den gleichen Nenner bringt, oder warum man bei der Division letztendlich mit dem Kehrwert multipliziert.
Bei Lehrperson 2 ist auch noch erschreckend, dass sich zu dem Zeitpunkt beide Klassen mitten in der Schularbeitsvorbereitung befanden und dennoch über 60% keinen der beiden Begriffe definieren konnten.
Bei der Beschreibung des Nenners gab es einige Antworten, die im Zuge der Auswertung öfter vorkamen, aber so nicht wirklich unterrichtet wurden. Folgende Formulierungen waren mit kleinen Abweichungen mehrmals zu lesen:

- „Der Nenner gibt an, wie der Bruch heißt."
- „Der Nenner gibt die Größe des Bruches an."

Sehr oft beschrieben SchülerInnen den Nenner, sowie auch den Zähler lediglich mit „oberer und unterer Zahl".

7.1.2 Ergebnisse – Aufgabe2

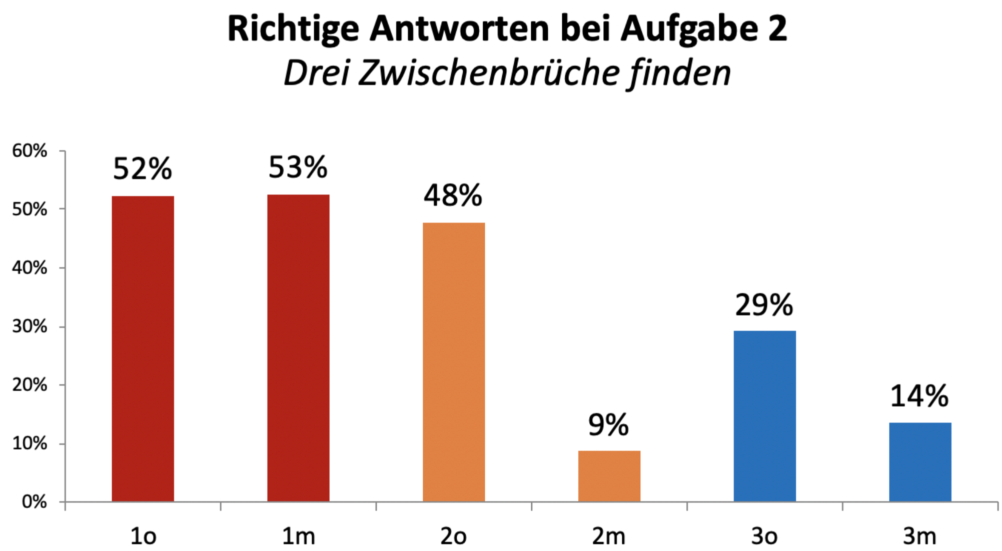

Abbildung 40: Aufgabe 2 – Ergebnis

In Abbildung 40 wird veranschaulicht, wie viele SchülerInnen aus jeder Klasse Aufgabe 2 richtig lösen konnten. Die Aufgabe gilt aber nur dann als richtig gelöst,

wenn mindestens drei Zwischenbrüche gefunden wurden. Ein kurzer Blick auf das gezeigte Diagramm reicht schon, um zu sehen, dass vor allem die Klassen 2m und 3m, also jene mit der Einführung der Mediante, deutlich schlechter abgeschnitten haben. Das sind auch genau jene Klassen, die das Finden von Zwischenbrüchen ausschließlich mit Hilfe der Mediante geübt haben. Nach Rücksprache mit Lehrperson 1 bekam ich diesbezüglich noch die Information, dass sie die Mediante zwar mit solchen Beispielen eingeführt hat, die herkömmliche Methode mit „auf gleichen Nenner bringen" dennoch genauso ausführlich, wie auch in der Parallelklasse durchgemacht hat. Das erklärt natürlich auch, warum beide Klassen von Lehrperson 1 in etwa gleich abgeschnitten haben.
Insgesamt erkennt man aber auch den Unterschied, dass die Bruchrechnung in den Klassen 3o und 3m schon eine Zeit her ist.

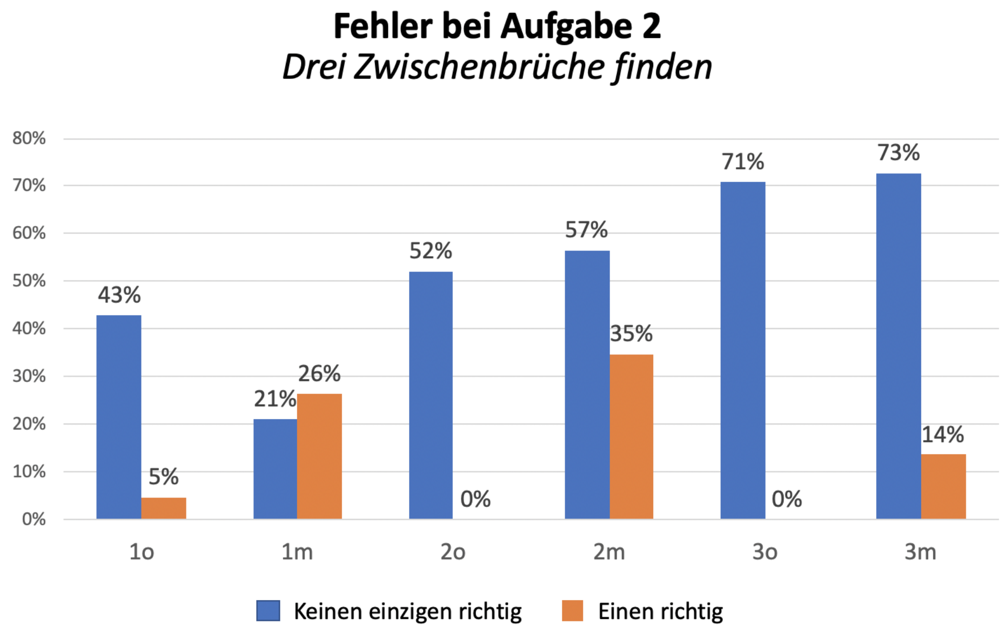

Abbildung 41: Aufgabe 2 - Fehler

Schauen wir uns die Fehler noch einmal genauer an, so sieht man in Abbildung 41, dass der Großteil jener SchülerInnen, welche die Aufgabe nicht richtig gelöst haben, keinen einzigen Zwischenbruch finden konnten. Interessant ist hier aber die Tatsache, dass es fast ausschließlich in den Klassen mit der Medianten-Einführung ein paar wenigen SchülerInnen gelungen ist, zumindest einen korrekten Zwischenbruch

anzugeben. Dies lässt auf den ersten Blick bereits vermuten, dass die betroffenen SchülerInnen womöglich das Prinzip der Mediante angewendet, aber dieses kein zweites bzw. drittes Mal wiederholt haben. In manchen Fällen stimmt das sogar, jedoch trifft das nicht auf alle SchülerInnen zu, welche lediglich einen Zwischenbruch finden konnten. Generell gab es aber keine/n einzige/n SchülerIn welche/r nur zwei Zwischenbrüche finden konnte. Das liegt aber vor allem an der Auswahl der gegebenen Brüche, da diese nicht nur auf den kleinsten gemeinsamen Nenner gebracht, sondern anschließend auch erweitert werden mussten, um drei Zwischenbrüche herauslesen zu können.
Folgendes Diagramm (Abbildung 42) liefert eine Übersicht über alle SchülerInnen aus den Klassen mit der Medianten-Einführung (1m,2m,3m) die mindestens einen richtigen Zwischenbruch finden konnten. Es zeigt dabei die Verteilung, wie viele SchülerInnen auf gleichen Nenner gebracht bzw. die Mediante verwendet haben, um einen oder mehrere Zwischenbrüche zu bekommen.

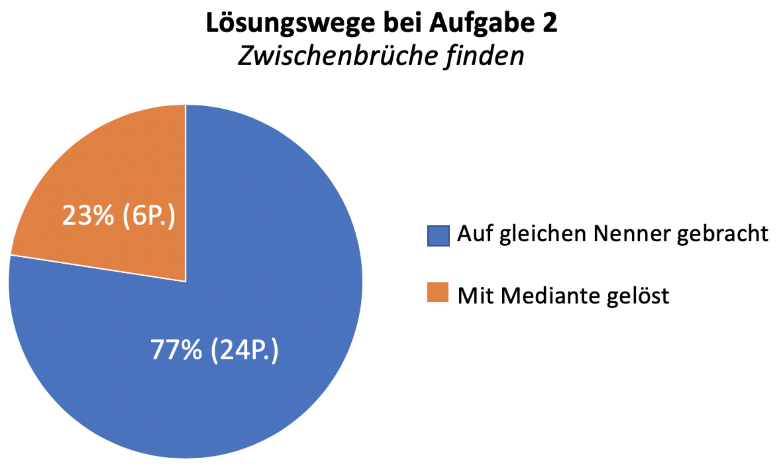

Abbildung 42: Aufgabe 2 – Lösungsstrategien

Von den insgesamt 30 SchülerInnen, die Aufgabe 3 zumindest teilweise richtig lösen konnten, verwendeten nur 6 SchülerInnen das Prinzip der Mediante, um zu einem richtigen Zwischenbruch zu gelangen, was in etwa 23% entspricht. Das sieht in dem Kreisdiagramm auf den ersten Blick womöglich gar nicht so wenig aus, doch sollte man hier die Grundgesamtheit nicht außer Acht lassen. Denn von den 64 SchülerInnen, die genau solche Beispiele in der Schule mit Hilfe der Mediante gelöst haben, wendeten nur 6 davon das Prinzip auch bei Aufgabe 2 an. (siehe Abbildung 43)

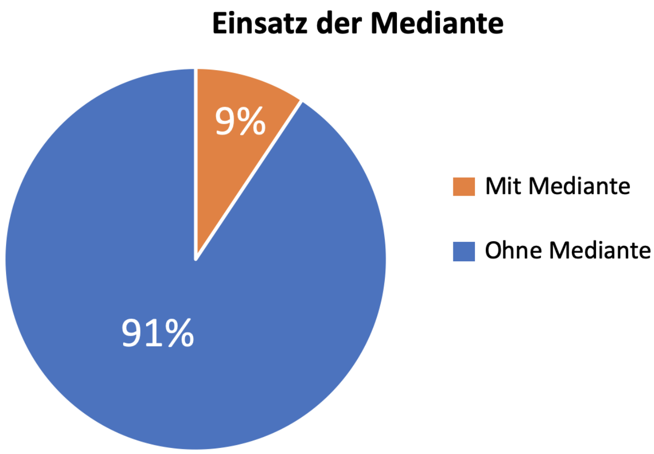

Abbildung 43: Aufgabe 2 – Einsatz der Mediante in Prozent

Da Zwischenbrüche in den Klassen der Mediante aber kaum anders berechnet und nur zur Überprüfung auf gleichen Nenner gebracht wurden, scheiterten gerade diese Klassen deutlich an dieser Aufgabe, wie wir bereits in Abbildung 40 sehen konnten.

7.1.3 Ergebnisse – Aufgabe 3

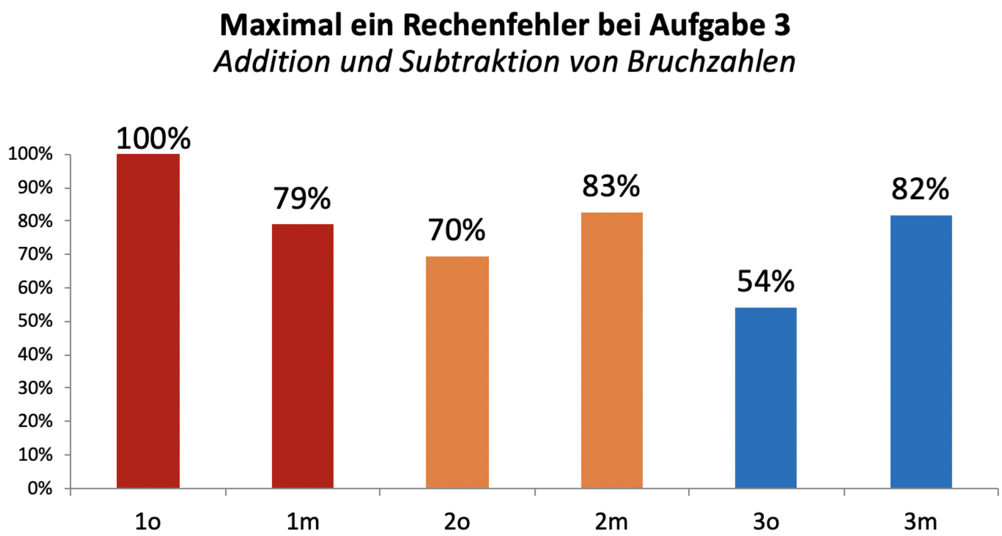

Abbildung 44: Aufgabe 3 – Richtige Lösung mit maximal einem Rechenfehler

Da bei Aufgabe 3 vor allem die Lösungsstrategien von Interesse sind und die Rechenfehler vorerst nicht beachtet werden müssen, habe ich in Abbildung 44 die Prozente jener SchülerInnen abgebildet, welche bei Aufgabe 3 höchstens einen Rechenfehler haben.
Im Vergleich zu den ersten beiden Aufgaben fällt hier sofort auf, dass die SchülerInnen verhältnismäßig gut abgeschnitten haben. So haben in der Klasse 1o alle SchülerInnen die Aufgabe richtig bzw. mit maximal einem Rechenfehler gelöst und auch in den anderen Klassen fiel die Bilanz relativ gut aus. Vergleicht man die Klassen untereinander, so schnitt einzig bei Lehrperson 1 jene Klasse ohne die Mediante besser ab. Bei den anderen beiden Lehrpersonen liegen jedoch die beiden Klassen mit der Mediante weiter vorne, was aber nicht zwangsläufig an der Einführung dieser liegen muss. Damit wir genauere Informationen zu den Fehlerarten bekommen, werfen wir einen Blick auf folgende Abbildung:

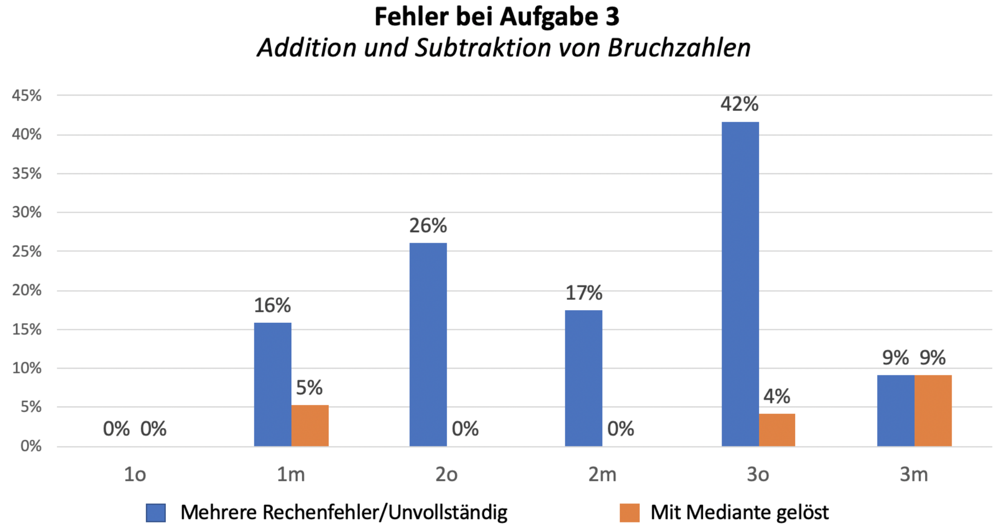

Abbildung 45: Aufgabe 3 – Einsatz der Mediante in Prozent

Abbildung 45 stellt das wohl wichtigste Ergebnis der gesamten Untersuchung dar, nämlich, wie viele SchülerInnen den Fehler der paarweisen Addition von Zähler und Nenner tatsächlich begangen haben. Überraschenderweise liefert die Untersuchung in Aufgabe 3 zumindest in Ansätzen das genaue Gegenteil von dem, was eigentlich erhofft wurde. Denn genau diesen einen Fehler begehen bis auf eine/n SchülerIn der 3o ausschließlich Kinder aus den „Medianten - Klassen“. Ich habe hier jedoch bewusst von „Ansätzen“ gesprochen, da es sich auch hier nur um drei SchülerInnen handelt, die die Mediante unterrichtet bekamen und diese auch hier fälschlicherweise anwendeten. Ein/e der drei betroffenen SchülerInnen beging den Fehler jedoch nur bei Beispiel „a)“ und löste alle weiteren völlig richtig. Alle anderen Kinder begingen mehr als einen Rechenfehler oder lösten die Aufgaben nur unvollständig. Hier gab es jedoch niemanden, der gar keine Aufgabe lösen konnte oder es nicht zumindest probiert hat.

Hier ist meiner Meinung nach genau jener Fall eingetreten, den ich zuvor bereits befürchtet und beschrieben habe. Da es sich hier nämlich ausschließlich um eher leistungsstärkere SchülerInnen aus Gymnasien handelt, gibt es generell weniger Probleme bei der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen. An sich ist das Ergebnis ja auch ein sehr erfreuliches, doch wenn die SchülerInnen von Haus aus kaum Fehler in Form der Mediante begehen, kann auch schwer eine Steigerung in dieser Hinsicht stattfinden und festgemacht werden. Nichtsdestotrotz fielen die ersten beiden Aufgaben trotzdem nicht überragend aus, was aber wieder zeigt, dass es gar nicht so sehr an den rechnerischen Fähigkeiten scheitert, sondern vielmehr an den inhaltlichen Defiziten der SchülerInnen.

7.1.4 Ergebnisse – Aufgabe 4

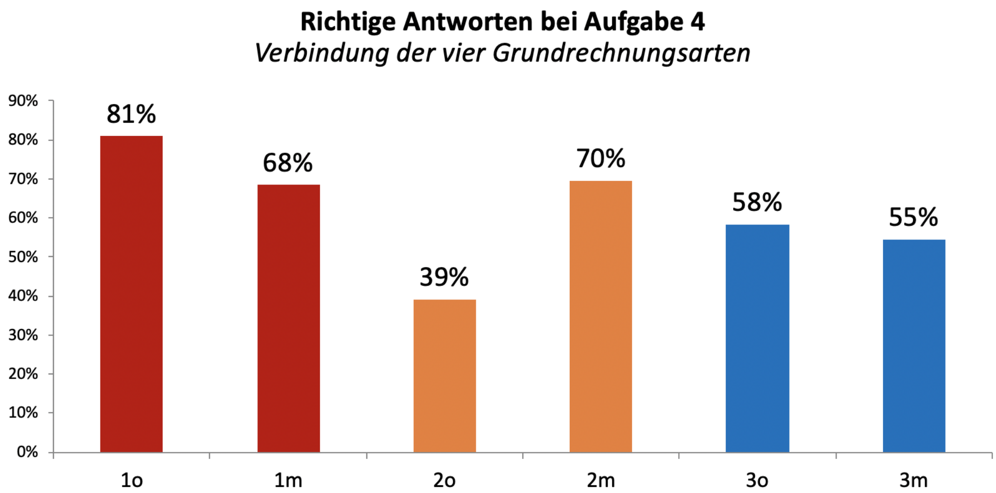

Abbildung 46: Aufgabe 4 – Ergebnis

Bevor wir im Anschluss versuchen, die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Aufgabenstellungen näher zu untersuchen, werfen wir noch einen Blick auf das Ergebnis der vierten und letzten Aufgabe. Abbildung 46 zeigt die Prozente der SchülerInnen einer jeden Klasse, die Aufgabe 4 richtig lösen konnten. Bis auf die Klasse 2o zeigt sich hier aber keine große Abweichung von den Leistungen der jeweiligen Parallelklasse, doch hier spielten mehrere Faktoren mit, die zu Schwierigkeiten führen konnten. Für uns ist hier jedoch nur von Interesse, wie sich die SchülerInnen bei der Addition und Subtraktion getan haben, weshalb ich nicht näher auf die anderen Fehler eingehen werde. Überraschenderweise hat kein/e einzige/r SchülerIn den Fehler der Addition durch Bilden der Mediante begangen und auch die Subtraktion wurde korrekt berechnet, sofern sie probiert wurde. Drei der vier SchülerInnen, die den klassischen Fehler in Aufgabe 3 begangen haben, konn-

ten Aufgabe 4 gar nicht lösen und haben es auch gar nicht probiert.
Das zeigt natürlich auch, dass diese SchülerInnen womöglich generell ein wenig leistungsschwächer sind und aus diesem Grund bei der Addition von Bruchzahlen zu Verwechslungen neigen. Der/die vierte SchülerIn, welche/r den Fehler in Aufgabe 3 nur in der ersten Aufgabe beging und nachher richtig weiter rechnete, hat die Addition und Subtraktion auch in Aufgabe 4 völlig richtig gelöst.
Alle anderen SchülerInnen, die Aufgabe 4 zwar probiert haben, aber aus verschiedenen Gründen scheiterten, begingen in den meisten Fällen einen der zwei folgenden Fehler:

- **Bruchdivison**: Es wurde mit der Bruchzahl multipliziert, ohne zuvor den Kehrwert zu bilden, d.h. es wurde eigentlich multipliziert statt dividiert.
- **Vorrangfehler**: Es wurde zuerst subtrahiert und erst im Anschluss dividiert.

Abgesehen davon gab es immer wieder einige Rechenfehler, die ich jedoch nicht einzeln ausweisen werde.

7.2 Zusammenhänge zwischen den Aufgabenstellungen

In der bisherigen Arbeit wurden bereits die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben präsentiert, aber um im Anschluss eine Aussage über den Einsatz der Mediante im Unterricht fällen zu können, muss ein Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Aufgaben hergestellt werden. Wie bereits mehrmals erwähnt wurde, stellt Aufgabe 3 das Kernstück der Testung und somit auch dieser Arbeit dar, da hier genau jene SchülerInnen ausgemacht werden können, die Probleme beim Addieren und Subtrahieren von Bruchzahlen haben. Da es sich dabei, abgesehen von Rechenfehlern und unvollständigen Rechnungen, lediglich um vier SchülerInnen handelt, werden diese im weiteren Abschnitt noch einmal genauer unter die Lupe genommen. Interessant ist hier nämlich vor allem, wie jene SchülerInnen in Aufgabe 2 abgeschnitten haben und, ob sie hier auch auf das Prinzip der Mediante zurückgegriffen haben. Damit wir hier aber nicht die Übersicht verlieren, werde ich die Ergebnisse der betroffenen SchülerInnen in Form einer Tabelle darstellen. (siehe Abbildung 47)

Fehler bei der Addition und Subtraktion durch Mediante

Klasse	Schüler	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4
1o	-				
1m	SchülerIn 1	Nenner falsch	Mit Mediante	Mit Mediante	
2o	-				
2m	-				
3o	SchülerIn 2			Mit Mediante	
3m	SchülerIn 3		Mit Mediante	Mit Mediante	Gemischte Zahl falsch umgewandelt
	SchülerIn 4			Mit Mediante	

Abbildung 47: Ergebnisse der SchülerInnen in den unterschiedlichen Aufgaben

Damit hier keine Verwirrung herrscht, werde ich diese Tabelle kurz näher erläutern. Die Spalten stellen die jeweiligen Aufgaben dar, während die Klassen jeweils zeilenweise aufgelistet werden. In dieser Tabelle sind aber nur jene SchülerInnen eingetragen, welche Aufgabe 3 fälschlicherweise mit dem Prinzip der Mediante gelöst haben. Jene Felder, welche rot markiert sind, zeigen falsch gelöste Beispiele an, während gelbe Felder für teilweise richtig und grüne Felder für richtig gelöste Aufgaben stehen. Außerdem habe ich jeweils kurz ergänzt, welchen Fehler der/die SchülerIn bei den jeweiligen Aufgaben begangen hat bzw. wie gerechnet wurde. Besonders hervorgehoben wurde hier natürlich der Einsatz der Mediante, da darauf unser besonderes Augenmerk liegt.

Betrachten wir zunächst die SchülerInnen 2 und 4, so sehen wir, dass diese alle Aufgaben, außer Aufgabe 1, falsch oder gar nicht lösen konnten. Steht keine Begründung im roten Feld der Tabelle, so weiß man, dass der/die SchülerIn die Aufgabe nicht einmal probiert hat. Dies lässt uns zunächst natürlich vermuten, dass diese SchülerInnen eher als leistungsschwach eingestuft werden können, doch haben beide von ihnen Aufgabe 1 vollständig gelöst. Denken wir noch einmal an die Ergebnisse von Aufgabe 1 zurück, so ist das insofern überraschend, da die Lösungsbilanz relativ schlecht war. Das Ergebnis widerspricht außerdem auch der fachdidaktischen Ansicht, dass SchülerInnen oft gute rechnerische Fähigkeiten besitzen, aber inhaltliche Probleme haben, wobei man aufgrund von Aufgabe 1 nicht auf die Allgemeinheit schließen kann.

Viel interessanter sind jedoch die beiden SchülerInnen 1 und 3, da diese die Mediante nicht nur bei Aufgabe 3 fälschlicherweise angewendet haben, sondern auch in Aufgabe 2. Wie schon einmal erwähnt, hat SchülerIn 3 die Mediante nur bei der ersten Rechnung der Aufgabe 3 eingesetzt und alle folgenden Rechnungen richtig gemacht. Dennoch könnte man hier die Vermutung aufstellen, dass die SchülerInnen ihre Lösungsstrategie aus Aufgabe 2 einfach auf die nächste Aufgabe übertragen haben. Denken wir kurz zurück an die Ergebnisse von Aufgabe 2 und betrachten noch einmal Abbildung 42, so sehen wir, dass nur insgesamt sechs SchülerInnen das Prinzip der Mediante beim Lösen der Aufgabe verwendeten. Von den lediglich sechs Schülerinnen haben zwei, also ein Drittel, den Fehler mit der Mediante auch bei Aufgabe 3 begangen. Dazu kommt noch, dass es ohnehin nur vier Personen gibt, die diesen Fehler auch hier begangen haben.
Das liefert uns einen ersten Hinweis dafür, dass die Mediante die SchülerInnen womöglich mehr verwirrt, als dass sie positiv zum Verständnis der Bruchrechnung beiträgt. Natürlich muss man die Ergebnisse auch hier stark relativieren, da man nur eine sehr geringe Zahl an SchülerInnen hat, die den Fehler tatsächlich begangen haben. Nichtsdestotrotz befinden sich drei der insgesamt vier SchülerInnen mit dem „Medianten-Fehler" in Klassen, in welchen die Mediante eingeführt wurde.

Was man in diesem Fall deutlich sieht, ist der Leistungsunterschied zwischen Frage 1 und dem Rest des Testbogens. Wenn in einer Klasse, in dem Fall die Klasse 2m, eine Woche vor der Bruchrechnungs-Schularbeit nur 9% aller SchülerInnen wissen, was Zähler und Nenner jeweils beschreiben, aber 83% der Kinder keine Probleme bei der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen haben, dann fehlen den SchülerInnen eindeutig wichtige Grundvorstellungen. Das zeigt sehr deutlich, dass SchülerInnen Aufgaben auf syntaktischer Ebene sehr gut lösen können, während sie auf semantischer Ebene Probleme haben.

7.3 Rückführung der Ergebnisse auf die theoretische Grundlage

In diesem Abschnitt der Arbeit möchte ich versuchen, die Ergebnisse der Untersuchung mit dem theoretischen Hintergrund aus dem ersten Teil der Arbeit zu vergleichen, um eventuelle Parallelen zu ziehen. Erinnern wir uns noch einmal zurück an den momentanen didaktischen Forschungsstand, so wird auch hier sehr oft von der Problematik der Verwechslung von Lösungsstrategien bei der Bruchrechnung gesprochen. Auch wenn es die unterschiedlichsten Variationen von falschen Lösungswegen gibt, so zeigt sich jener des unbewussten Einsatzes der Mediante dennoch am häufigsten. In der Literatur gibt es aber kaum konkrete Vorschläge, wie man dem Denkfehler entgegenwirken kann. Hier wird lediglich darauf beharrt, die Bruchrechnung möglichst anschaulich und ausführlich einzuführen und dabei gewisse Grundvorstellungen bewusst zu stärken. Warum man die Bruchzahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ nicht als $\frac{a+c}{b+d}$ zusammenzählen darf, wird jedoch nur dahingehend besprochen, dass gezeigt wird, wie es richtig geht. Alle anderen Wege werden ganz einfach für falsch erklärt. Unser Ansatz war es nun, genau diesem Fehler eine Bedeutung zuzuweisen und den SchülerInnen klar zu machen, dass dieser Fehler auf keinen Fall die Lösung der Addition von Bruchzahlen sein kann, weil er ja schon die Mediante beschreibt.

Leider lieferte unser Versuchsergebnis aber die Tendenz, dass die Einführung der Mediante womöglich mehr für Verwirrung sorgt, als dass sie positiv zur Erarbeitung der Bruchrechnung beiträgt. Die Betonung liegt dabei aber immer auf „Tendenz", da der Stichprobenumfang zu klein ist bzw. die Ergebnisse nicht eindeutig genug sind, um ein klares Urteil darüber abzugeben, wie gewinnbringend der Einsatz der Mediante wirklich ist. Um ein aussagekräftigeres Ergebnis zu erlangen, müsste der Stichprobenumfang erweitert und noch mehr Kinder in die Untersuchung miteinbezogen werden. Außerdem sollten auch die Neuen Mittelschulen an der Untersuchung teilnehmen, damit auch schwächere Leistungsgruppen untersucht werden können. Auch mit dem Begriff der „Mediante"sollte vor der Testung bewusster umgegangen und nicht nur ein Mal erwähnt werden. Hier würde es sich auch anbieten, die Untersuchung ein wenig später noch einmal durchzuführen. Zum Beispiel könnte die „Mediante"in der 3.Klasse wieder aufgegriffen und thematisiert

werden, um die Testung im Anschluss noch einmal durchzuführen.
Bisher wurde die Einführung des Mediantenbegriffs im Unterricht noch nie untersucht, weswegen ich hier auch auf keine andere Studie zurückgreifen kann, doch die Mediante findet sich als Rechnung sehr wohl in der Literatur wieder. So schreibt G. Malle in „Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Rechenoperationen“ [10] von der Addition absoluter Anteile und empfiehlt dabei, diese bei der Einführung der Bruchrechnung ganz wegzulassen. Die Mediante ist nämlich im Endeffekt nichts anderes als ein Zusammenzählen dieser absoluten Anteile. Als Grund dafür nennt Malle die Verwechslungsgefahr mit der Addition von Bruchzahlen und die Unwichtigkeit dieser Rechnung. Außerdem meint er, dass SchülerInnen ohnehin schon mit Begriffen und Rechnungen überhäuft werden und es hier nicht sinnvoll ist, einen weiteren Begriff einzuführen, wenn dieser nicht unbedingt notwendig ist. [5]
Aus diesem Grund gibt es auch die Grundvorstellungen, welche die zentralen Stützen der Bruchrechnung darstellen und zeigen, welche wesentlichen Dinge die SchülerInnen verstanden haben sollen. Diese bauen aufeinander auf, weswegen es umso schwieriger wird Neues zu erlernen, wenn der bisherige Stoff noch nicht wirklich verstanden wurde. Diese Grundvorstellungen stellen sicher, dass die SchülerInnen nicht nur rechnerische Fähigkeiten erlernen, sondern auch inhaltliche Fragen beantworten können und die Gründe hinter den Rechenvorgängen verstehen.

Aufgabe 1 stellt ein klassisches Beispiel dafür dar, dass die Bruchrechnung womöglich zu schnell eingeführt bzw. nicht anschaulich genug vermittelt wurde. Im Zuge dessen bezeichneten nämlich viele SchülerInnen den Zähler und Nenner lediglich als „obere und untere Zahl“ und gaben keine näheren Erklärungen dazu ab. Grundsätzlich haben die SchülerInnen ja auch recht, aber sie haben dabei nicht verstanden, dass Zähler und Nenner eine bestimmte Bedeutung haben und man die Bruchzahl dadurch auf eine gewisse Weise interpretieren kann. Diese Aussagen bekräftigen nur noch deutlicher, dass sich SchülerInnen immer weniger mit den inhaltlichen Bedeutungen von Rechnungen beschäftigen und oft nur noch üben, wie man reine Kalkülaufgaben am besten lösen kann.

7.4 Diskussion

Wie in dieser Arbeit bereits mehrmals erwähnt wurde, ist es schwer auszumachen, ob es sich bei den vier SchülerInnen, die als einzige den Fehler mit der Mediante bei der Addition und Subtraktion begangen haben, um zufällige Leistungen handelt, oder ob sich hier bereits eine Tendenz abzeichnet, die tatsächlich allgemein gültig ist. Ich habe bereits vor der Untersuchung einige Gespräche mit den an der Untersuchung teilnehmenden Lehrpersonen geführt, worum es unter anderem um ihre Meinungen zu diesem Thema ging. Diese waren von Beginn an sehr skeptisch und überzeugt davon, dass die Einführung der Mediante nichts an den Leistungen der SchülerInnen ändern wird. Vielmehr hat mir zum Beispiel Lehrperson 1 zuvor versichert, dass es vor allem bei den leistungsschwächeren SchülerInnen zu mehr Verwirrung führt. Sie hat ihre Meinung auch damit begründet, dass sie in ihrer jahrzehntelangen Karriere als Lehrperson die Erfahrung gemacht hat, dass eine anschauliche Darstellung des Unterrichtsstoffes der Schlüssel zum Erfolg ist.
Ich denke aber, dass ein wesentlicher Faktor sein kann, dass es sich bei den befragten Lehrpersonen ausschließlich um GymnasiallehrerInnen handelt und keine Neue Mittelschule in der Untersuchung miteingebunden wurde. Ich bin überzeugt davon, dass es genug leistungsschwächere Schulen bzw. Klassen gibt, in denen die Ergebnisse nicht so gut ausfallen würden und der Fehler mit der Mediante trotz anschaulicher Einführung öfter als nur zwei, drei Mal passiert. Womöglich würde in solchen Klassen das Versuchsergebnis ganz anders aussehen, doch auch hier stellt sich die Frage, ob sich die Einführung der Mediante so stark bemerkbar macht, dass ein Vergleich mehrerer Klassen ein eindeutiges Ergebnis hervorruft. Außerdem müssten auch hier wieder Lehrpersonen gefunden werden, welche zwei zweite Klassen unterrichten, da die Bedingungen sonst ganz anders wären. Was man aber ohnehin nur schwer beeinflussen kann, ist die Heterogenität der Klassen selbst. So kann es durchaus sein, dass eine Klasse von Haus aus schlechtere Leistungen liefert, als zum Beispiel die Parallelklasse.

Ganz gleich wie eine weitere Untersuchung ausfallen mag, bin ich aufgrund der bisher geführten Gespräche mit Kolleginnen und Kollegen sehr skeptisch, ob die Mediante auch vom Lehrpersonal akzeptiert werden würde. Selbst, wenn sich bei einer kommenden Untersuchung zeigen mag, dass die Einführung der Mediante zumindest in den meisten Fällen doch zu besseren Leistungen bei der Addition von Bruchzahlen führt, so heißt das noch lange nicht, dass die Mediante auch in den Schulen unterrichtet wird. Aus diesem Grund halte ich eine groß angelegte Studie in Form einer Dissertation für den einzigen Weg, ein hoffentlich eindeutiges Ergebnis zu erlangen, welches auch das Lehrpersonal davon überzeugt, die Mediante zu verwenden oder eben darauf zu verzichten.

Was man im Zuge dieser Arbeit aber sehr deutlich gesehen hat, ist die Tatsache, dass SchülerInnen die Mediante anscheinend sehr schnell vergessen haben und nach kurzer Zeit nicht mehr darauf zurückgreifen. Vor allem Beispiele wie Aufgabe 2 wurden in der Erarbeitung der Bruchrechnung nahezu ausschließlich mit Hilfe der Mediante gelöst. Lediglich Lehrperson 1 hat das Finden von Zwischenbrüchen zusätzlich durch „gleichnamig-machen“ der Bruchzahlen gelöst. Haben die SchülerInnen das Prinzip der Mediante bereits nach so kurzer Zeit anscheinend vergessen, fällt es nur sehr schwer, zu glauben, dass die Einführung der Mediante auch langfristig einen positiven Effekt erzielen kann. Aus diesem Grund macht die Einführung der Mediante nur dann Sinn, wenn sie auch mehrmals im Unterricht erwähnt und verwendet wird.

7.5 Conclusio

Abschließend sollen in diesem Abschnitt der Arbeit die Ergebnisse noch einmal zusammengefasst und darüber reflektiert werden, wie sinnvoll die Einführung der Mediante im Unterricht erscheint.

Die Auswertung der erfassten Daten hat eine Tendenz gezeigt, dass die Einführung der Mediante für mehr Verwirrung und Fehler sorgt als der herkömmliche Unterricht ohne Erwähnung des Begriffes. Die Tendenz zeichnete sich aber lediglich durch vier von 62 SchülerInnen aus, weshalb das Ergebnis nur bedingt Gültigkeit hat. Ein möglicher Grund für das durchaus positive Abschneiden der SchülerInnen bei der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen könnte das unbewusste Handeln der Lehrpersonen sein. Da diese wussten, dass es bei der Untersuchung genau um diesen einen Fehler ging, konzentrierten sie sich womöglich bereits während des Unterrichts verstärkt darauf, genau auf diesen Fehler hinzuweisen. Die Begeisterung der beteiligten Lehrpersonen hielt sich jedoch von Anfang an in Grenzen, was darauf schließen lässt, dass die Mediante in den Klassen nicht gerade als Gewinn dargestellt wurde. Hier macht es einen großen Unterschied wie stark der Begriff im Unterricht forciert wird und ob die Lehrpersonen auch weiterhin auf ihn zurückgreifen, um einen langfristigen Lernerfolg feststellen zu können.

Nichtsdestotrotz hat die Untersuchung gezeigt, dass Schülerinnen auch ohne Einführung der Mediante tolle Leistungen erbringen können und oft schon eine anschauliche Erklärung zu besseren Lernerfolgen führt. Das trifft jedoch vor allem auf die untersuchten Klassen und leistungsstärkeren SchülerInnen zu, da keine anderen Schultypen in die Untersuchung miteingebunden waren.

Fazit ist also, dass es oft reicht, sich anstelle der Mediante auf einen anschaulichen und interaktiven Unterricht zu konzentrieren. Nach jetzigem Standpunkt würde ich vorerst auch von der Einführung der Mediante im Unterricht abraten, mir aber wünschen, dass eine größer angelegte Studie, womöglich in Form einer Dissertation, ein besser abgesichertes Ergebnis liefert.

Literatur

[1] S. Wartha.(2007).*Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*, volume 54 of *Texte zur mathematischen Forschung und Lehre*. Franzbecker, Hildesheim and Berlin.

[2] F. Padberg; S. Wartha.(2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer Spektrum, 5.Auflage.

[3] G. Wittmann.(2006). *Grundvorstellungen zu Bruchzahlen - auch für leistungsschwache Schüler?*. Mathematica didactica, 29(2): 49-74.

[4] H.Humenberger (Hrsg.), J. Hasibeder, M. Himmelsabach, J. Schüller-Reichl, D. Litschauer, H. Groß. (2017). *Das ist Mathematik 2*. öbv.

[5] G. Malle.(2004). *Grundvorstellungen zu Bruchzahlen*. Mathematik lehren,(123):4-8.

[6] W. Oehl.(1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule*. Schrödel, 4.Auflage.

[7] R. vom Hofe.(1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Texte zur Didaktik der Mathematik. Spektrum, Akademischer Verlag, Heidelberg and Berlin and Oxford.

[8] E. Rathgeb-Schnierer.(2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen: Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze*. Franzbecker, Hildesheim.

[9] M. Marxer und G. Wittmann. (2011). *Förderung des Zahlenblicks - Mit Brüchen rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen.*. Der Mathematikunterricht, 57(3):26-36.

[10] G. Malle und S. Huber.(2004). *Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Rechenoperationen*. Mathematik lehren, (123): 20-22.

[11] F. Padberg.(1986). *Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung - Bestandsaufnahme und Konsequenzen.* Der Mathematikunterricht, (3):58-77.

[12] A. Eichelmann, S. Narciss, L. Schnaubert, E. Melis. (2011). *Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen - Ein Review zu empirischen Fehleranalysen.* J Math Didakt, 33:29-57.

[13] J. Humenberger. (2018/19). *Schulmathematik Arithmetik und Algebra.* Skriptum.

[14] APA/Robert Jaeger: *Fünf von sieben Abgeordneten treten nicht mehr für „Jetzt“ an*, in: Die Presse, 02.07.2019, https://diepresse.com/home/innenpolitik/5653299/Fuenf-von-sieben-Abgeordneten-treten-nicht-mehr-fuer-Jetzt-an (24.07.2019).

[15] APA: *Drei von vier Jugendlichen klagen über Kopfschmerzen*, in: Der Standard, 27.11.2018, https://www.derstandard.at/story/2000092404546/drei-von-vier-jugendlichen-klagen-ueber-kopfschmerzen (24.07.2019).