MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Über Beispiele Zeta-regularisierter Produkte“

verfasst von / submitted by

Aaron Gärtner, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2021 / Vienna 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 504 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Chemie UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	Mag. Dr. Stefan Haller, Privatdoz.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle zuallererst bei meinem Betreuer Stefan Haller bedanken, der mich auf die regularisierten Produkte aufmerksam gemacht hat und sich viel Zeit nahm, um mir konstruktives Feedback zu geben. Wenn ich nicht weiterwusste, stand er mir bei Fragen stets zur Seite. Seine Vorschläge und Ideen haben den Aufbau und Inhalt dieser Arbeit wesentlich beeinflusst. Er gab mir die Zeit, die ich brauchte und war sehr verständnisvoll und geduldig, wenn ich einmal nicht weiterwusste.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Eltern, Tanten, Onkel und meinen drei Geschwistern bedanken, ohne deren emotionale und finanzielle Unterstützung ich die letzten sieben Jahre Studium nicht geschafft hätte. Vor allem seit der Pandemie sind die Belastungen für mich gestiegen, weshalb ich besonders dankbar bin.

Ebenso möchte ich mich bei meinen Freunden bedanken, die akzeptiert haben, dass mein Studium in den letzten Monaten oberste Priorität hatte. Sie haben trotz meiner geringen Kapazität sich zu treffen (sei es online oder „in echt“) zu mir gehalten.

Einleitung

Zuerst soll das Zeta-regularisierte Produkt folgendermaßen definiert werden:

Man hat eine Folge von positiven reellen Zahlen λ_k, die gegen unendlich gehen. Unter der Voraussetzung, dass die Zeta-Funktion $\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}$ für $\Re(s)$ hinreichend groß konvergiert und sich zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt, die bei $s = 0$ holomorph ist,

kann das Zeta-regularisierte Produkt der λ_k wie folgt definiert werden:

$$\widehat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k := e^{-\zeta'(0)}.$$

Im Folgenden werden ein paar elementare Eigenschaften dieses regularisierten Produktes bewiesen.

Außerdem setzt sich die Arbeit mit dem klassischen Fall des regularisierten Produktes auseinander. In diesem Abschnitt wird es darum gehen, das regularisierte Produkt $\widehat{\prod\limits_{k=0}^{\infty}} (k+u) = u \cdot (1+u) \cdot (2+u) \cdot (3+u) \cdot (4+u) \cdots$ für $\lambda_k = k + u$ mit $u > 0$ zu bestimmen, also die Ableitung der Hurwitz-Zeta-Funktion:

$$\zeta(s, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+u)^s}$$

bei $s = 0$ zu berechnen.

Um die Berechnung von Zeta-regularisierten Produkten zu verstehen, wird die zugrundeliegende Mathematik zunächst in ihren Grundzügen erklärt. Dazu gehören Eigenschaften der Hurwitz-Zeta-Funktion, der Gamma-Funktion und der Stirling-Formel.

Ziel dieses Abschnitts ist vor allem die Berechnung von $\zeta'(0)$ im klassischen Fall. Dies geschieht einmal mit einer Funktionalgleichung:

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

und einmal auf elementarerem Weg ohne Funktionalgleichung.

Zentral hierbei ist vor allem auch die Herleitung der sogenannten Lerch-Formel:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k+u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u)},$$

mit der dem regularisierten Produkt im klassischen Fall ein Wert zugeordnet wird.

In einem weiteren Abschnitt soll die Formel von Mizuno hergeleitet werden:

Für $u_j > 0$ gilt:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}\left(\prod_{j=1}^{n}(k+u_j)\right) = \frac{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(u_j)}.$$

Hierbei hängen die λ_k polynomial von k ab.

Nach Abhandlung einiger Beispiele zu dieser Formel möchten wir die Formel weiter adaptieren.

Im letzten Kapitel wird dazu eine verallgemeinerte Lerch-Formel mit Vielfachheit $a \cdot k+b$ formuliert und hergeleitet:

Für $u_j > 0$ und ganzzahlige $a > 0$ bzw. ganzzahlige $b \geq 0$ gilt für das regularisierte Produkt mit linearer Vielfachheit $a \cdot k + b$:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}\left(\prod_{j=1}^{n}(k+u_j)\right)^{a\cdot k+b} = \left(e^{\frac{n}{2}\cdot V}\prod_{j=1}^{n}\frac{(2\pi)^{-\frac{u_j}{2}}\cdot e^{-\zeta'(-1)}}{\Gamma_2(1+u_j)}\right)^a \cdot \left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u_j)}\right)^b,$$

wobei $V = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}u_j^2 - \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}u_j\right)^2$ die Varianz von $u_1, ..., u_n$ bezeichnet.

Hierbei ist darauf zu achten, dass der Exponent $a \cdot k + b$ im Produkt als Vielfachheit zu verstehen ist.

Es handelt sich dabei um ein Zeta-regularisiertes Produkt von λ_k, die polynomial wachsen, mit linearer Vielfachheit $a \cdot k + b$.

Auch für diese Formel werden Beispiele vorgestellt.

Inhaltsverzeichnis

1 Formulierung eines regularisierten Produktes

Wir betrachten reelle Zahlen:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \to \infty.$$

Das gebildete Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ konvergiert nicht. Mit Hilfe der Zeta-Regularisierung kann diesem Produkt jedoch ein Wert zugeordnet werden.

Dazu betrachten wir zunächst die assoziierte Zeta-Funktion mit s als komplexe Variable:

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}. \tag{1}$$

Bei den nachfolgenden Rechnungen handelt es sich um formale Überlegungen, bei der Konvergenzfragen zunächst ausgeblendet werden. Diese dienen als Motivation für eine Definition der Zeta-Regularisierung.

Durch Differentiation ($\frac{d}{dx}(\frac{1}{a^x}) = -\frac{\log(a)}{a^x}$) erhält man

$$-\zeta^{'}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} \log \lambda_k.$$

Setzt man nun s = 0, so erhält man in wenigen Schritten folgendes Produkt:

$$-\zeta^{'}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \log \lambda_k = \log \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Wir versuchen das Zeta-regularisierte Produkt wie folgt zu definieren:

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k := e^{-\zeta^{'}(0)}. \tag{2}$$

Nun möchten wir sicherstellen, dass $\zeta^{'}(0)$ Sinn macht. Dazu definieren wir zunächst:

Definition 1.1 (Abszisse der absoluten Konvergenz)**.** Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}$ eine Reihe mit den reellen Zahlen $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \to \infty$ mit s als komplexe Variable, dann wird:

$$\alpha = \inf \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} < \infty \right\}.$$

die Abszisse der absoluten Konvergenz genannt. Somit konvergiert diese Dirichletreihe für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \alpha$ absolut [1, S.215].

Voraussetzung 1: Sei $\alpha < \infty$.

Wenn die erste Voraussetzung erfüllt ist, konvergiert $\zeta(s)$ für alle s mit $\Re(s) > \alpha$ absolut und $\zeta(s)$ stellt auf der offenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha\}$ eine holomorphe Funktion dar.

Voraussetzung 2: Die Zeta-Funktion lässt sich zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ ausdehnen, die bei $s = 0$ holomorph ist.

1.1 Voraussetzung 1

Lemma 1.2. *Ist $\alpha < \infty$ dann konvergiert $\zeta(s)$ für alle s mit $\Re(s) > \alpha$ absolut und $\zeta(s)$ stellt auf der offenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha\}$ eine holomorphe Funktion dar.*

Um diese Tatsache nachzuvollziehen, sollen im Folgenden wichtige Begriffe zum Verständnis definiert werden:

Definition 1.3 (Holomorphe Funktionen)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt komplex differenzierbar an der Stelle z_0, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0)$ existiert. Ist f überall in U komplex differenzierbar, so heißt f holomorph [2, Kapitel 1].

Definition 1.4 (Kompakte Konvergenz)**.** Sei G eine offene Teilmenge in $\mathbb{C}$. Eine Folge holomorpher Funktionen auf G heißt kompakt konvergent, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig konvergiert [2, Kapitel 9].

Definition 1.5 (Supremumsnorm)**.** Sei U eine Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann setzt man

$$|f|_U := \sup \{|f(x)| : x \in U\}$$

[3, Kapitel 21].

Definition 1.6 (Normale Konvergenz)**.** Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ von Funktionen $f_\nu : X \to \mathbb{C}$ heißt normal konvergent in X, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} |f_\nu|_U < \infty$. Die normale Konvergenz ist nicht für Folgen, sondern nur für Reihen definiert [4, Kapitel 3.3.1].

Mit Hilfe von Gleichung: $|\lambda^s| = \lambda^{\Re(s)}$ für alle $\lambda > 0$ und $s \in \mathbb{C}$ [4, Kapitel 5.5.4] erhalten wir für $\epsilon > 0$ folgende Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-s}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\alpha-\epsilon} < \infty, \text{ für } \Re(s) \geq \alpha + \epsilon \tag{3}$$

[5, Kapitel 11.3].

Aus dieser Abschätzung und dem Majorantenkriterium nach Weierstraß[1] folgt, dass die Reihe (1) auf der abgeschlossenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha\}$ normal konvergiert. Wenn eine Reihe normal konvergiert, konvergiert sie lokal gleichmäßig und somit kompakt.

Satz 1.7 (Konvergenzsatz von Weierstraß[2])**.** *Die Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge holomorpher Funktionen ist selbst holomorph [2, Kapitel 9].*

Mit Hilfe von Satz (1.7) folgt nun, dass die Reihe (1) auf der offenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha\}$ holomorph ist.

[1] Nachzulesen in [4, Kapitel 3.2.2].

[2] Dieser kann über den Cauchyschen Integralsatz und den Satz von Morera bewiesen werden. Mehr dazu in [2, Kapitel 3 und 4].

1.2 Voraussetzung 2

Bevor wir Voraussetzung 2 näher betrachten, definieren wir für das Verständnis grundlegende Begriffe:

Definition 1.8 (Isolierte Singularität)**.** Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus z_0 \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt z_0 eine isolierte Singularität von f [2, Kapitel 5].

Man unterscheidet drei Arten von isolierten Singularitäten: hebbare Singularitäten, Pole und wesentliche Singularitäten.

Definition 1.9 (Hebbare Singularitäten)**.** z_0 heißt hebbare Singularität, wenn sich f durch geeignete Festsetzung von $f(z_0)$ zu einer holomorphen Funktion auf ganz U fortsetzen lässt [2, Kapitel 5].

Definition 1.10 (Pole)**.** z_0 heißt Pol von f, wenn z_0 nicht hebbar ist, aber ein $m \geq 1$ existiert, sodass $(z-z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität bei z_0 hat. Das kleinste derartige m heißt die Ordnung des Poles [2, Kapitel 5].

Definition 1.11 (Wesentliche Singularitäten)**.** Ist die isolierte Singularität z_0 von f weder hebbar noch ein Pol, so heißt sie eine wesentliche Sigularität von f [2, Kapitel 5].

Definition 1.12 (Meromorphe Funktionen)**.** Eine Funktion f heißt meromorph in D, wenn es eine (von f abhängende) diskrete Teilmenge $P(f)$ von D gibt, sodass f in $D \setminus P(f)$ holomorph ist und in jedem Punkt von $P(f)$ einen Pol hat. Die Menge $P(f)$ heißt die Polstellenmenge von f und ist stets abgeschlossen und diskret in D [4, Kapitel 10.3.1].

Voraussetzung 2: Die Zeta-Funktion lässt sich zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ ausdehnen, die bei $s = 0$ holomorph ist. D.h. es existiert eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, die bei $s = 0$ holomorph ist und die auf der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha\}$ mit $\zeta(s)$ übereinstimmt. Falls so eine Ausdehnung existiert, dann ist sie eindeutig bestimmt und wird ebenfalls mit ζ bezeichnet. Dies folgt aus dem Identitätssatz der Funktionentheorie.

Definition 1.13 (Gebiet)**.** Eine nichtleere, offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ nennt man ein Gebiet [2, Kapitel 4].

Satz 1.14 (Identitätssatz der Funktionentheorie[3])**.** *Sei G ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, die auf einer Teilmenge von G, welche in G einen Häufungspunkt besitzt, übereinstimmen. Dann gilt $f = g$ auf ganz G [2, Satz 12 in Kapitel 4].*

[3] Einen Beweis findet man z.B. in [2, Kapitel 4].

Die Polstellenmenge $P(f)$ einer meromorphen Funktion f auf $\mathbb{C}$ ist diskret (kann aber unendlich viele Punkte beinhalten, etwa beim Tangens) und daher ist $G = \mathbb{C} \setminus P(f)$ ein Gebiet, auf das der Identitätssatz angewendet werden kann.

Definition 1.15 (Regularisiertes Produkt)**.** Man hat eine Folge von positiven reellen Zahlen λ_k, die gegen unendlich gehen. Unter den beiden zuvor erwähnten Voraussetzungen kann das Zeta-regularisierte Produkt der λ_k wie folgt definiert werden:

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k := e^{-\zeta'(0)}.$$

2 Elementare Eigenschaften des regularisierten Produktes

Nachdem die Voraussetzungen des definierten regularisierten Produktes im letzten Kapitel geklärt wurden, sollen in diesem Kapitel ein paar elementare Eigenschaften des regularisierten Produktes (2) näher betrachtet werden [1 und 6].

Lemma 2.1. $\hat{\prod\limits_{k=1}^{\infty}} \lambda_k$ *existiert genau dann, wenn* $\hat{\prod\limits_{k=2}^{\infty}} \lambda_k$ *existiert und es gilt folgende Gleichung:*

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k = \lambda_1 \cdot \hat{\prod_{k=2}^{\infty}} \lambda_k.$$

Beweis. Die Zeta-Funktionen $\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}$ und $\tilde{\zeta}(s) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \lambda_k^{-s}$ hängen folgendermaßen zusammen:

$$\zeta(s) = \lambda_1^{-s} + \tilde{\zeta}(s). \tag{4}$$

Die zwei Zeta-Funktionen unterscheiden sich nur durch einen Term voneinander, der holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist. Deswegen lässt sich die Zeta-Funktion $\tilde{\zeta}(s)$ genau dann meromorph fortsetzen, wenn sich die Zeta-Funktion $\zeta(s)$ meromorph fortsetzen lässt. Leitet man Gleichung (4) ab und setzt s = 0 erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \zeta^{'}(s) &= -\lambda_1^{-s} \log(\lambda_1) + \tilde{\zeta}^{'}(s) \\ \zeta^{'}(0) &= -\log(\lambda_1) + \tilde{\zeta}^{'}(0). \end{aligned}$$

Durch Exponentieren und mit Hilfe der Definition für das regularisierte Produkt (Gleichung (2)) erhält man nun:

$$\begin{aligned} e^{-\zeta^{'}(0)} &= \lambda_1 \cdot e^{-\tilde{\zeta}^{'}(0)} \\ \hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k &= \lambda_1 \cdot \hat{\prod_{k=2}^{\infty}} \lambda_k. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.2. *Sei $\mathbb{N} = I \cup J$ mit $I \cap J = \emptyset$ eine disjunkte Zerlegung, wobei I und J unendliche Mengen sind. Wenn $\hat{\prod\limits_{k \in I}^{\infty}} \lambda_k$ und $\hat{\prod\limits_{k \in J}^{\infty}} \lambda_k$ existieren, dann existiert auch $\hat{\prod\limits_{k=1}^{\infty}} \lambda_k$ und es gilt folgende Gleichung:*

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k = \hat{\prod_{k \in I}^{\infty}} \lambda_k \cdot \hat{\prod_{k \in J}^{\infty}} \lambda_k$$

[6, Gleichung (1.3)].

Beweis. Die Zeta-Funktionen $\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}$, $\zeta_I(s) = \sum\limits_{k \in I} \lambda_k^{-s}$ und $\zeta_J(s) = \sum\limits_{k \in J} \lambda_k^{-s}$ hängen folgendermaßen zusammen:

$$\zeta(s) = \zeta_I(s) + \zeta_J(s). \tag{5}$$

Lässt sich nun sowohl $\zeta_I(s)$ als auch $\zeta_J(s)$ meromorph fortsetzen, dann lässt sich auch deren Summe meromorph fortsetzen und somit auch $\zeta(s)$. Leitet man Gleichung (5) ab und setzt s $= 0$ erhält man folgende Gleichungen:

$$\zeta'(s) = \zeta_I'(s) + \zeta_J'(s)$$
$$\zeta'(0) = \zeta_I'(0) + \zeta_J'(0).$$

Durch Exponentieren und mit Hilfe der Definition für das regularisierte Produkt (Gleichung (2)) erhält man nun:

$$e^{-\zeta'(0)} = e^{-\zeta_I'(0)} \cdot e^{-\zeta_J'(0)}$$
$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k = \hat{\prod_{k \in I}^{\infty}} \lambda_k \cdot \hat{\prod_{k \in J}^{\infty}} \lambda_k.$$

□

Lemma 2.3. *Sei $a > 0$. $\hat{\prod\limits_{k=1}^{\infty}} \lambda_k^a$ existiert genau dann, wenn $\hat{\prod\limits_{k=1}^{\infty}} \lambda_k$ existiert und es gilt folgende Gleichung:*

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k^a = \left(\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k \right)^a$$

[6, Gleichung (1.4)].

Beweis. Die Zeta-Funktionen $\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}$ und $\tilde{\zeta}(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^a)^{-s}$ hängen folgendermaßen zusammen:

$$\tilde{\zeta}(s) = \zeta(a \cdot s). \tag{6}$$

Die Zeta-Funktion $\tilde{\zeta}(s)$ lässt sich genau dann meromorph fortsetzen, wenn sich die Zeta-Funktion $\zeta(a \cdot s)$ meromorph fortsetzen lässt. Leitet man Gleichung (6) ab und setzt s = 0 erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}'(s) &= a \cdot \zeta'(a \cdot s) \\ \tilde{\zeta}'(0) &= a \cdot \zeta'(0). \end{aligned}$$

Durch Exponentieren und mit Hilfe der Definition für das regularisierte Produkt (Gleichung (2)) erhält man nun:

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{\zeta}'(0)} &= \left(e^{-\zeta'(0)} \right)^a \\ \hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k^a &= \left(\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k \right)^a . \end{aligned}$$

□

Lemma 2.4. *Sei $a > 0$. $\hat{\prod}_{k=1}^{\infty}(a\lambda_k)$ existiert genau dann, wenn $\hat{\prod}_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ existiert und es gilt folgende Gleichung:*

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}}(a\lambda_k) = a^{\zeta(0)} \cdot \left(\hat{\prod_{k=1}^{\infty}}\lambda_k\right)$$

[6, Gleichung (1.5)].

Beweis. Die Zeta-Funktionen $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-s}$ und $\tilde{\zeta}(s) = \sum_{k=1}^{\infty}(a\lambda_k)^{-s}$ hängen folgendermaßen zusammen:

$$\tilde{\zeta}(s) = a^{-s} \cdot \zeta(s). \tag{7}$$

Die Zeta-Funktion $\tilde{\zeta}(s)$ lässt sich genau dann meromorph fortsetzen, wenn sich die Zeta-Funktion $\zeta(s)$ meromorph fortsetzen lässt. Leitet man Gleichung (7) ab und setzt s = 0 erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}'(s) &= -a^{-s}\log a \cdot \zeta(s) + a^{-s}\zeta'(s)\\ \tilde{\zeta}'(0) &= -\log a \cdot \zeta(0) + \zeta'(0).\end{aligned}$$

Durch Exponentieren und mit Hilfe der Definition für das regularisierte Produkt (Gleichung (2)) erhält man nun:

$$\begin{aligned}e^{-\tilde{\zeta}'(0)} &= a^{\zeta(0)} \cdot \left(e^{-\zeta'(0)}\right)\\ \hat{\prod_{k=1}^{\infty}}(a\lambda_k) &= a^{\zeta(0)} \cdot \left(\hat{\prod_{k=1}^{\infty}}\lambda_k\right).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.5. Für eine weitere Folge $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \to \infty$ gilt i.A. jedoch:

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}}(\lambda_k\mu_k) \neq \left(\hat{\prod_{k=1}^{\infty}}\lambda_k\right) \cdot \left(\hat{\prod_{k=1}^{\infty}}\mu_k\right)$$

[6, Gleichung (3.14)].

3 Der klassische Fall des regularisierten Produktes

Wir betrachten nun $\lambda_k = k + u$ mit $u > 0$ und wollen

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k+u) = u \cdot (1+u) \cdot (2+u) \cdot (3+u) \cdot (4+u) \cdots$$

bestimmen. Die damit assoziierte Zeta-Funktion ist die Hurwitz-Zeta-Funktion,

$$\zeta(s,u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+u)^s}. \tag{8}$$

Setzt man $u = 1$ erhält man die Riemann-Zeta-Funktion,

$$\zeta(s,1) = \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Diese zwei Gleichungen kommen als mögliche klassische Fälle für $\lambda_k = k$ in Gleichung (6.11) in der Arbeit von Voros vor [7, Kapitel 6c].

Im Nachfolgenden sollen grundlegende Eigenschaften dieser Funktionen besprochen werden.

Lemma 3.1. *Die Hurwitz-Zeta-Funktion und die Riemann-Zeta-Funktion konvergieren nach Remmert [4, Kapitel 5.5.4] für $\Re(s) > 1$ und stellen auf dieser offenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ eine holomorphe Funktion dar. Die Abszisse der absoluten Konvergenz ist daher $\alpha = 1$.*

Beweis. Für $\Re(s) = \sigma > 1$ folgt die gewünschte Eigenschaft aus der Abschätzung durch ein Integral, das man explizit ausrechnen kann:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |(k+u)^{-s}| = \sum_{k=0}^{\infty} (k+u)^{-\sigma} &\leq u^{-\sigma} + \int_0^{\infty} (k+u)^{-\sigma}\, dk \\ &= u^{-\sigma} + \left(\frac{(k+u)^{-\sigma+1}}{-\sigma+1} \right)\Bigg|_0^{\infty} = u^{-\sigma} - \frac{u^{-\sigma+1}}{-\sigma+1}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung und dem Majorantenkriterium nach Weierstraß[4] folgt, dass die Reihe (8) auf der offenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ normal und somit kompakt konvergiert. Daher lässt sich Satz 1.7 (Konvergenzsatz von Weierstraß) anwenden und Reihe (8) stellt eine holomorphe Funktion dar.

$\square$

Satz 3.2 (Analytische Fortsetzung der Hurwitz-Zeta-Funktion)**.** *Für $\Re(s) > -1$ ist die analytische Fortsetzung der Hurwitz-Zeta-Funktion gegeben durch:*

$$\zeta(s,u) = \frac{u^{1-s}}{s-1} + \frac{u^{-s}}{2} - s\int_0^\infty \frac{B_1(\{x\})}{(x+u)^{s+1}}\,dx.$$

Dabei gilt: B_k sind die Bernoulli-Zahlen, $B_m(x)$ die Bernoulli-Polynome und $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ ist die Sägezahnfunktion, wobei der Ausdruck $\lfloor x \rfloor$ die Gaußklammer darstellt (größte ganze Zahl $\leq x$). Die Bernoulli-Zahlen und Bernoulli-Polynome zum Index $m = 1$ lauten: $B_1 = -\frac{1}{2}$ und $B_1(\{x\}) = \{x\} - \frac{1}{2} = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ [8, Kapitel D.5].

Die analytische Fortsetzung der Hurwitz-Zeta-Funktion wird im Buch von Lang beschrieben [9, Theorem 3.1 in Kapitel 15.3].

Für den Beweis dieser Darstellung kann die Eulersche Summenformel verwendet werden.

Lemma 3.3 (Eulersche Summenformel)**.** *Ist f auf dem Intervall $[a,b]$ m-mal stetig differenzierbar, dann gilt:*

$$\sum_{n=a}^{b-1} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!}\, f^{k-1}(x)\Big|_a^b + (-1)^{m+1}\int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx$$

[8, Gleichung (D.5.1) in Kapitel D.5].

[4] Nachzulesen in [4, Kapitel 3.2.2].

Beweis. Satz 3.2. Wir verwenden die Eulersche Summenformel mit $a = 0$, $b = \infty$ und dem Funktionsreihen-Index $m = 1$.

Nun betrachten wir $\Re(s) > 1$ und wenden die Eulersche Summenformel auf die Funktion $f(x) = (x+u)^{-s}$ an. Wir orientieren uns dabei eng an der Darstellung in [8, Kapitel D.5]:

$$\begin{aligned}\zeta(s,u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+u)^s} &= \int_0^\infty \frac{1}{(x+u)^s}\,dx + \frac{B_1}{1!}\cdot \frac{1}{(x+u)^s}\bigg|_0^\infty \\ &+ \int_0^\infty \frac{B_1(\{x\})}{1!}(-s)(x+u)^{-s-1}\,dx \\ &= \frac{(x+u)^{-s+1}}{-s+1}\bigg|_0^\infty + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \frac{1}{(x+u)^s}\bigg|_0^\infty - s\int_0^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}}{(x+u)^{s+1}}\,dx \\ &= \frac{u^{1-s}}{s-1} + \frac{u^{-s}}{2} - s\int_0^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}}{(x+u)^{s+1}}\,dx\end{aligned}$$

Mit $|x - \lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ kann folgende Abschätzung für $\Re(s) \geq \epsilon > 0$ gemacht werden:

$$\int_1^\infty \left|\frac{x-\lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}}{(x+u)^{s+1}}\right| dx \leq \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2}}{(x+u)^{\epsilon+1}}\,dx = \frac{\frac{1}{2}(x+u)^{-\epsilon}}{-\epsilon}\bigg|_1^\infty = \frac{\frac{1}{2}\,(1+u)^{-\epsilon}}{\epsilon}.$$

Außerdem kann das Integral $\int\limits_0^1 \left|\frac{x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}}{(x+u)^{s+1}}\right| dx$ folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\frac{x-\lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}}{(x+u)^{s+1}}\right| dx &\leq \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{(x+u)^{\Re(s)+1}}\,dx \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x+u)^{-\Re(s)}}{-\Re(s)}\bigg|_0^1 = -\frac{\frac{1}{2}\,(1+u)^{-\Re(s)}}{\Re(s)} + \frac{\frac{1}{2}u^{-\Re(s)}}{\Re(s)}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser beiden Abschätzungen und dem Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale[5] folgt, dass das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}}{(x+u)^{s+1}}\,dx$ kompakt konvergent in der offenen

[5] Nachzulesen in [10, Kapitel 2.3.1].

Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$ ist. Daher stellt dieses Integral eine in $\Re(s) > 0$ holomorphe Funktion dar. Die restlichen Summanden sind in dieser offenen Halbebene, außer in $s = 1$, ebenfalls holomorph [11, Kapitel 1.5].

Nun bleibt noch zu zeigen, dass das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{x-\lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{(x+u)^{s+1}}\, dx$ für $\Re(s) > -1$ konvergiert und holomorph in s ist.

Partielle Integration liefert:

$$\int_0^b \frac{x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{(x+u)^{s+1}}\, dx = \left. \frac{(x - \lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor) + \frac{1}{6}}{2 \cdot (x+u)^{s+1}} \right|_0^b + (s+1) \int_0^b \frac{(x - \lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor) + \frac{1}{6}}{2 \cdot (x+u)^{s+2}}\, dx.$$

In dieser Darstellung kann zunächst für jedes s integriert werden. Für $\Re(s) > -1$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{(x+u)^{s+1}}\, dx &= \left. \frac{(x - \lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor) + \frac{1}{6}}{2 \cdot (x+u)^{s+1}} \right|_0^\infty \\ &\quad + (s+1) \int_0^\infty \frac{(x - \lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor) + \frac{1}{6}}{2 \cdot (x+u)^{s+2}}\, dx \\ &= -\frac{1}{12u^{s+1}} + (s+1) \int_0^\infty \frac{(x - \lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor) + \frac{1}{6}}{2 \cdot (x+u)^{s+2}}\, dx. \end{aligned} \tag{9}$$

Wir möchten nun das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{(x-\lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor) + \frac{1}{6}}{2 \cdot (x+u)^{s+2}}\, dx$ abschätzen. Mit $\left| (x - \lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor) + \frac{1}{6} \right| \leq \frac{1}{6}$ kann für $\Re(s) > -1 + \epsilon$ zunächst folgende Abschätzung gemacht werden:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left| \frac{(x - \lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor) + \frac{1}{6}}{2 \cdot (x+u)^{s+2}} \right| dx &\leq \int_1^\infty \frac{\frac{1}{6}}{2 \cdot (x+u)^{\epsilon+1}}\, dx \\ &= \left. \frac{(x+u)^{-\epsilon}}{12 \cdot (-\epsilon)} \right|_1^\infty = \frac{(1+u)^{-\epsilon}}{12 \cdot \epsilon}. \end{aligned}$$

Außerdem kann das Integral $\int\limits_0^1 \left| \frac{(x-\lfloor x\rfloor)^2-(x-\lfloor x\rfloor)+\frac{1}{6}}{2\cdot(x+u)^{s+2}} \right| dx$ folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left| \frac{(x-\lfloor x\rfloor)^2-(x-\lfloor x\rfloor)+\frac{1}{6}}{2\cdot(x+u)^{s+2}} \right| dx &\leq \int_0^1 \frac{\frac{1}{6}}{2\cdot(x+u)^{\Re(s)+2}}\,dx = \frac{(x+u)^{-\Re(s)-1}}{12\cdot(-\Re(s)-1)}\bigg|_0^1 \\ &= -\frac{(1+u)^{-\Re(s)-1}}{12\cdot(\Re(s)+1)} + \frac{u^{-\Re(s)-1}}{12\cdot(\Re(s)+1)}.\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Abschätzungen und dem Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale[6] folgt, dass das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{(x-\lfloor x\rfloor)^2-(x-\lfloor x\rfloor)+\frac{1}{6}}{2\cdot(x+u)^{s+2}}\,dx$ für $\Re(s) > -1$ kompakt konvergent ist. Das Integral stellt daher eine in $\Re(s) > -1$ holomorphe Funktion dar.

□

Äquivalent dazu könnte man auch die Eulersche Summenformel (Lemma 3.3) auf die Funktion $f(x) = (x+u)^{-s}$ für $m = 2$ anwenden. Man erhält folgende Gleichung (die Bernoulli-Zahlen und Bernoulli-Polynome zum Index $m = 2$ lauten: $B_2 = \frac{1}{6}$ und $B_2(\{x\}) = (x-\lfloor x\rfloor)^2-(x-\lfloor x\rfloor)+\frac{1}{6}$):

$$\begin{aligned}\zeta(s,u) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+u)^s} = \int_0^\infty \frac{1}{(x+u)^s}\,dx \\ &+ \left[\left(\frac{B_1}{1!}\cdot\frac{1}{(x+u)^s}\right)+\left(\frac{B_2}{2!}\cdot\frac{-s}{(x+u)^{s+1}}\right)\right]\bigg|_0^\infty \\ &- \int_0^\infty \frac{B_2(\{x\})}{2!}(s^2+s)(x+u)^{-s-2}\,dx \\ &= \frac{(x+u)^{-s+1}}{-s+1}\bigg|_0^\infty + \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(x+u)^s}+\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{-s}{(x+u)^{s+1}}\right)\right]\bigg|_0^\infty \\ &- (s^2+s)\int_0^\infty \frac{(x-\lfloor x\rfloor)^2-(x-\lfloor x\rfloor)+\frac{1}{6}}{2\cdot(x+u)^{s+2}}\,dx \\ &= \frac{u^{1-s}}{s-1}+\frac{u^{-s}}{2}+\frac{s\cdot u^{-s-1}}{12} - (s^2+s)\int_0^\infty \frac{(x-\lfloor x\rfloor)^2-(x-\lfloor x\rfloor)+\frac{1}{6}}{2\cdot(x+u)^{s+2}}\,dx. \qquad (10)\end{aligned}$$

Wenn man die Formel in Satz 3.2 mit Gleichung (9) kombiniert, dann erhält man Gleichung (10).

6 Nachzulesen in [10, Kapitel 2.3.1].

Korollar 3.4 (Analytische Fortsetzung der Riemann-Zeta-Funktion)**.** *Für $\Re(s) > -1$ ist die analytische Fortsetzung der Riemann-Zeta-Funktion gegeben durch:*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{B_1(\{x\})}{x^{s+1}}\,dx \tag{11}$$

[8, Kapitel D.5].

Beweis. Durch Einsetzen von $u = 1$ in Satz 3.2 und Substitution des Integrals erhält man sofort Gleichung (11). □

3.1 Grundlagen

3.1.1 Die Gammafunktion

Definition 3.5 (Eulersche Gammafunktion)**.** Die Eulersche Gammafunktion wird im Buch von Schiekel [8, Kapitel C.2] folgendermaßen definiert:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt, \text{ für } z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0. \tag{12}$$

$\Gamma(z)$ konvergiert für alle z mit $\Re(z) > 0$ absolut. Das Integral konvergiert sogar kompakt und stellt auf der offenen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ eine holomorphe Funktion dar. Dies kann mit Hilfe der Arbeit von Artin nachvollzogen werden [12, Gleichung (4)].

Aus Gleichung (12) folgt direkt:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$$

Außerdem erhält man mit Gleichung (12):

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt\; t^z(-e^{-t})\Big|_0^\infty - z\int_0^\infty t^{z-1}(-e^{-t})\,dt \\ &= z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = z \cdot \Gamma(z),\end{aligned}$$

also

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) \tag{13}$$

und

$$\Gamma(n+1) = n!$$

[7, Kapitel C.2].

Gleichung (13) bezeichnet man üblicherweise als Funktionalgleichung der Gamma-Funktion [12, Gleichung (5)].

Bei Lemma 3.6 handelt es sich um einen oft benötigten Wert.

Lemma 3.6. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *[8, Kapitel C.2]*

Beweis. Wir orientieren uns an dem Beweis in [8, Kapitel C.2].

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt$ erhält man durch Einsetzen in Gleichung (12). Wir substituieren $t = \frac{x^2}{2}$ und $dt = x\, dx$ und erhalten:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \sqrt{2} \cdot x^{-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\, dx = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

und daher

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy.$$

Mit Hilfe der Transformationsformel für Mehrfachintegrale erhalten wir daraus:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, d\phi\, dr = \frac{2\pi}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr.$$

Durch Substituieren mit $s = r^2$ und $ds = 2r\,dr$ folgt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s}{2}}}{2}\,ds = \frac{\pi}{2}(-2e^{-\frac{s}{2}})\Big|_0^\infty = \pi.$$

Man erhält also wie in der Arbeit von Schiekel [8, Kapitel C.2] beschrieben:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

Eine andere Möglichkeit, die Gammafunktion darzustellen, ist das Weierstraß-Produkt. Dazu benötigen wir die Euler-Mascheroni-Konstante.

Definition 3.7 (Euler-Mascheroni-Konstante)**.** Die Euler-Mascheroni-Konstante γ wird im Buch von Lang [9, Kapitel 15.2] folgendermaßen definiert:

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

Der Grenzwert in Definition 3.7 existiert. Für Details kann in der Arbeit von Schiekel [8, Gleichung (C.8.6) in Kapitel C.8] nachgeschlagen werden.

Folgende Gleichung beschreibt nach Schiekel einen Zusammenhang zwischen der Zeta-Funktion und der Euler-Mascheroni-Konstante:

Lemma 3.8. *Es gilt folgender Grenzwert:*

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$$

[8, Kapitel D.5].

Beweis. Wir orientieren uns an dem Beweis in [8, Kapitel D.5].

Durch Umformen von Gleichung (11) (Analytische Fortsetzung der Riemann-Zeta-Funktion) erhält man:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{x^{s+1}}\,dx.$$

Wir betrachten nun den Grenzwert für $s \to 1$ und erhalten die Euler-Mascheroni-Konstante durch mehrere elementare Umformungen:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) &= -\int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{x^2}\,dx + \frac{1}{2} = \int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^2}\,dx + \left(\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^\infty + \frac{1}{2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^2}\,dx + 1 = \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}\,dx - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx\right) + 1\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}\,dx - (\log x)\Big|_1^n\right) + 1\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\int_m^{m+1} \frac{m}{x^2}\,dx - \log n\right) + 1\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{-m}{x}\Big|_m^{m+1} - \log n\right) + 1\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{-m}{m+1} + 1\right) - \log n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m+1} - \log n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = \gamma.$$

□

Satz 3.9 (Darstellung der Gammafunktion als Weierstraß-Produkt)**.** *Die Gammafunktion kann als Weierstraß-Produkt wie folgt dargestellt werden:*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{14}$$

[9, Γ1. in Kapitel 15.2].

Das Weierstraß-Produkt für den Kehrwert der Gammafunktion konvergiert für alle z aus $\mathbb{C}$.

Hinweis: Die Gammafunktion hat Pole der ersten Ordnung in den negativen ganzen Zahlen. Mit $\frac{1}{\Gamma(z)}$ erhält man eine ganze Funktion. Eine ganze Funktion ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte und holomorphe Funktion.

Satz 3.10 (Ergänzungssatz der Gammafunktion)**.** *Der Ergänzungssatz der Gammafunktion lautet:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{15}$$

[9, Γ5. in Kapitel 15.2].

Bemerkung 3.11. Durch Einsetzen von $z = \frac{1}{2}$ in Gleichung (15) erhält man ebenso: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (vgl. Lemma 3.6).

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (13) können wir Gleichung (15) in die Form:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z \cdot \sin \pi z} \tag{16}$$

bringen [12, S.26].

In der Literatur findet man unter anderem auch folgende Produkt-Darstellung der Gammafunktion, die für alle z verschieden von den negativen ganzen Zahlen konvergiert:

Lemma 3.12 (Gauß-Darstellung)**.** *Für alle z verschieden von den negativen ganzen Zahlen gilt:*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^z}{z \cdot (z+1) \cdots (z+n)}$$

[9, Γ7. in Kapitel 15.2].

Der Grenzwert $\Gamma(z)$ existiert und die Gauß-Darstellung lässt sich wie folgt herleiten.

Beweis. Wir orientieren uns eng an der Darstellung in [8, Kapitel C.8].

Aus Gleichung (14)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

folgt durch Bilden des Kehrwerts und Umformen:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{n}}}{(1+\frac{z}{n})} = \frac{e^{-z\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)\right)}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{n}}}{(1+\frac{z}{n})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{z\log n}}{z(1+\frac{z}{1})(1+\frac{z}{2})\cdots(1+\frac{z}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\end{aligned}$$

□

3.1.2 Die Stirling-Formel

Satz 3.13 (Stirling Formel[7])**.** *Die Stirling Formel lautet:*

$$\log\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log(2\pi) - \int_0^{\infty} \frac{B_1(\{t\})}{x+t}\,dt, \tag{17}$$

$$\text{wobei } B_1(\{t\}) = t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2} \text{ und } x \in \mathbb{R}^+$$

[9, Γ13. in Kapitel 15.2].

Lemma 3.14.

$$\frac{1}{2} - \int_0^{\infty} \frac{B_1(\{t\})}{(1+t)^2}\,dt = \gamma \tag{18}$$

[9, Lemma 2.1. in Kapitel 15.2].

[7] Einen Beweis findet man z.B. in [9, Kapitel 15.2], dieser beruht auf der Eulerschen Summenformel. In [10, Kapitel 2.4] findet man einen Beweis, für den der Eindeutigkeitssatz von Wielandt verwendet wird.

Beweis. Wir orientieren uns eng an der Darstellung in [9, Kapitel 15.2].

Wir wenden die Eulersche Summenformel (Lemma 3.3) auf die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ an. Man erhält folgende Gleichung:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \log(n+1) + \frac{1}{2} - \int_0^\infty B_1(\{t\}) \frac{1}{(1+t)^2} \, dt.$$

Da $B_1(\{t\})$ beschränkt ist, konvergiert das Integral auf der rechten Seite absolut. Subtrahiert man $\log(n+1)$ auf beiden Seiten der Gleichung, erhält man bereits die Euler-Mascheroni-Konstante (Definition 3.7).

□

Bemerkung 3.15. Lemma 3.14 folgt auch aus Gleichung (11) und Lemma 3.8.

Lemma 3.16.

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \mathcal{O}(s-1)$$

[9, Korollar 3.3. in Kapitel 15.3].

$\mathcal{O}(s-1)$ ist eine analytische Funktion, die in der Nähe von $s = 1$ durch $s - 1$ teilbar ist.

Beweis. Wir betrachten folgende Funktion, die für s > 0 holomorph ist:

$$f(s) = \frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{B_1(\{x\})}{x^{s+1}} \, dx.$$

Setzt man $s = 1$ in die Funktion ein, erhält man durch Anwenden von Lemma 3.14 eine Funktion der Form $\gamma + \mathcal{O}(s-1)$. Da sich jede holomorphe Funktion lokal in eine Taylorreihe entwickeln lässt, kann die Funktion $f(s)$ um $s = 1$ als Taylorreihe angeschrieben werden und $s - 1$ daher herausgehoben werden:

$$\frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{B_1(\{x\})}{x^{s+1}} \, dx = \gamma + \sum_{k=1}^\infty a_k (s-1)^k = \gamma + (s-1) \sum_{k=1}^\infty a_k (s-1)^{k-1}.$$

Durch Einsetzen in Gleichung (11) erhält man die zu zeigende Gleichung.

□

3.2 Berechnung von $\zeta'(0)$ im klassischen Fall ohne Funktionalgleichung

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung des folgenden Satzes:

Satz 3.17 (Lerch-Formel)**.** *Für $\lambda_k = k + u$ gilt folgender Zusammenhang:*

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k+u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u)} \tag{19}$$

[9, Kapitel 15.3].

Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}(s^2)$ eine analytische Funktion, die in der Nähe von $s = 0$ durch s^2 teilbar ist. Dann gilt folgende Gleichung:

Lemma 3.18.

$$\zeta(s,u) = \frac{1}{2} - u - \left(\log \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u)}\right) s + \mathcal{O}(s^2) \tag{20}$$

[9, Theorem 3.2. in Kapitel 15.3].

Beweis. Wir betrachten zunächst Satz 3.2. Aufgrund der Holomorphie vom Integral bei 0 lässt sich das Integral in eine Taylorreihe um 0 entwickeln.

Entwickelt man $\zeta(s,u)$ aus Satz 3.2 in eine Taylorreihe um 0 erhält man:

$$\begin{aligned} \zeta(s,u) &= \zeta(0,u) + \zeta'(0,u)\cdot s + \mathcal{O}(s^2) \\ &= -u + \frac{1}{2} + s \cdot \left(u \log u - u - \frac{\log u}{2} - \int_0^\infty \frac{B_1(\{x\})}{x+u}\, dx\right) + \mathcal{O}(s^2). \end{aligned} \tag{21}$$

Durch Einsetzen der Stirling Formel (Satz 3.13) in Gleichung (21) erhält man:

$$\zeta(s,u) = \frac{1}{2} - u - \left(\log \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u)}\right) s + \mathcal{O}(s^2).$$

□

Als Konsequenz aus Lemma 3.18 ergibt sich:

$$\zeta'(0,u) = -\log \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u)}.$$

bzw. für $u = 1$:

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi. \tag{22}$$

Daraus folgt nun unmittelbar der Satz, um den es in diesem Abschnitt geht (Satz 3.17):

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k+u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u)}$$

[9, Kapitel 15.3].

$u > 0$ kann auch durch ein komplexes z mit $\Re(z) > 0$ ersetzt werden. Da dies im Rahmen dieser Arbeit nicht notwendig ist, soll dies an dieser Stelle nur erwähnt bleiben.

3.3 Berechnung von $\zeta'(0)$ im klassischen Fall mit Funktionalgleichung

Im Folgenden soll ein anderer Zugang beschrieben werden, wie man zum Wert $\zeta'(0)$ im klassischen Fall kommt. Dazu werden zunächst zwei verschiedene Integraldarstellungen der Hurwitz-Zeta-Funktion bzw. Riemann-Zeta-Funktion vorgestellt. Mit Hilfe dieser ist es dann möglich eine Funktionalgleichung zu bestimmen, mit der man den Wert $\zeta'(0)$ berechnen kann (es gibt aber auch andere Zugänge, wie man die Funktionalgleichung herleiten kann).

3.3.1 Integraldarstellungen der Hurwitz- und Riemann-Zeta-Funktion

Satz 3.19. *Für $\Re(s) > 1$ gilt folgende Integraldarstellung der Hurwitz-Zeta-Funktion:*

$$\zeta(s,u) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}e^{-uz}}{1-e^{-z}}\,dz. \tag{23}$$

Für $u = 1$ folgt die Integraldarstellung für die Riemann-Zeta-Funktion:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}e^{-z}}{1-e^{-z}}\,dz. \tag{24}$$

Diese Integraldarstellungen sind in Apostols Buch zu finden [5, Theorem 12.2].

Beweis. Wir orientieren uns eng an der Darstellung in [13, Kapitel 1.4][8].

Zunächst substituieren wir $t = (n+u)z$ in der Eulerschen Gammafunktion (Gleichung 12) und dividieren durch $(n+u)^s$, wobei $n \geq 0$ ist:

$$\frac{\Gamma(s)}{(n+u)^s} = \int_0^\infty z^{s-1} \cdot e^{-(n+u)z}\,dz.$$

Nun summieren wir über n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{(n+u)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty z^{s-1} \cdot e^{-(n+u)z}\,dz.$$

Vertauschung von Summation und Integration liefert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{s-1}e^{-uz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}\,dz.$$

Wegen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{-n} = \frac{1}{1-x}$ (Summenformel für die geometrische Reihe) erhalten wir:

$$\zeta(s,u) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}e^{-uz}}{1-e^{-z}}\,dz.$$

□

[8] Der Ausdruck $\Pi(s-1)$ im Text von Edwards ist eine weniger gebräuchliche Notation für die Gamma-Funktion, die auf Gauß zurückgeht.

Satz 3.20. *Für $\Re(s) > 1$ gilt folgende Integraldarstellung der Hurwitz-Zeta-Funktion (Hankel'sche Integraldarstellung) für $0 < u < 1$:*

$$\zeta(s,u) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^{uz}-1}\, dz. \tag{25}$$

Für $u = 1$ folgt die Integraldarstellung für die Riemann-Zeta-Funktion:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^{z}-1}\, dz. \tag{26}$$

Die Hankel'sche Integraldarstellung ist in Apostols Buch zu finden [5, Theorem 12.6].

Das Integral konvergiert für alle s, da $(e^{uz}-1)z$ längs der positiven reellen Achse schneller wächst als $(-z)^s$. Gleichung (25) und (26) stellen außerdem jeweils eine analytische Fortsetzung für alle s dar, außer in $s = 1$ [13, Kapitel 1.4].

Beweis. Wir orientieren uns eng am Beweis in [13, Kapitel 1.4].

Wir betrachten zunächst folgendes Kurvenintegral: $\int\limits_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^s}{e^{uz}-1}\frac{dz}{z}$. Es handelt sich um ein Kurvenintegral, welches bei $+\infty$ startet, weiter zum Ursprung über der reellen Achse geht, den Ursprung einmal in der positiven Richtung umkreist und dann weiter zu $+\infty$ unter der reellen Achse geht.

$(-z)^s$ lässt sich als $(-z)^s = e^{s\log(-z)}$ schreiben und ist auf der positiven reellen Achse daher nicht eindeutig definiert. Das Integral verläuft daher einmal etwas über der reellen Achse ($+\infty \to 0$) und einmal etwas unter der reellen Achse ($0 \to +\infty$). Dadurch bekommt man Werte, die sich um ein Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden. Der genaue Verlauf des Integrals spielt keine Rolle, da das Integral wegunabhängig ist. Wir können das Integral daher anschreiben als:

$$\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-z)^s}{e^{uz}-1}\frac{dz}{z} + \int_{|z|=\delta} \frac{(-z)^s}{e^{uz}-1}\frac{dz}{z} + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{(-z)^s}{e^{uz}-1}\frac{dz}{z}.$$

Der mittlere Term konvergiert für $\delta \to 0$ gegen 0, falls $s > 1$, da $\frac{z}{e^{uz}-1}$ in der Nähe von $z = 0$ nichtsingulär ist.

Man erhält durch Anwenden der Euler'schen Identität ($e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$):

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^s}{e^{uz}-1} \frac{dz}{z} = \lim_{\delta \to 0} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{s(\log(z)+i\pi)}}{(e^{uz}-1)z}\, dz + \int_{+\infty}^{\delta} \frac{e^{s(\log(z)-i\pi)}}{(e^{uz}-1)z}\, dz \right).$$

Diese Gleichung kann zu folgender Gleichung umgeformt werden:

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\int_{\delta}^{+\infty} e^{i\pi s} \frac{z^{s-1}}{e^{uz}-1}\, dz - \int_{\delta}^{+\infty} e^{-i\pi s} \frac{z^{s-1}}{e^{uz}-1}\, dz \right) = \left(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s} \right) \int_0^{\infty} \frac{z^{s-1}}{e^{uz}-1}\, dz.$$

Durch Einsetzen in Gleichung (23) erhalten wir:

$$\left(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s} \right) \zeta(s,u) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^s}{e^{uz}-1} \frac{dz}{z}.$$

Mit $\sin(s) = \frac{1}{2i}(e^{is} - e^{-is})$ erhalten wir:

$$2i \sin(\pi s) \zeta(s,u) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^s}{e^{uz}-1} \frac{dz}{z}.$$

Durch Anwenden des Ergänzungssatzes der Gammafunktion (Satz 3.10) kommt man schlussendlich zu folgendem Ausdruck:

$$\zeta(s,u) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^{uz}-1}\, dz.$$

Für $u = 1$ folgt die Integraldarstellung für die Riemann-Zeta-Funktion:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^{z}-1}\, dz.$$

$\square$

3.3.2 Die Funktionalgleichung

Da die Funktionalgleichung für ein allgemeines bzw. rationales u relativ kompliziert ist, beschäftigt sich diese Arbeit lediglich mit der Funktionalgleichung der Riemann-Zeta-Funktion für $u = 1$.

Satz 3.21. *Die Riemann'sche Zeta-Funktion erfüllt für alle s folgende Funktionalgleichung:*

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{27}$$

Diese Gleichung kann z.B. im Buch von Edwards nachgeschlagen werden [13, Gleichung (4) in Kapitel 1.6].

In der Literatur sind verschiedene Beweise der Funktionalgleichung der Riemann'schen Zetafunktion zu finden:

- Beweis durch Manipulation des Integrals, zu finden in [13, Kapitel 1.6]: Man verändert den Integrationsweg des Kurvenintegrals. Im Komplexen ändert sich das Integral dabei nicht. Hierbei wird Gleichung (26) verwendet.
- Beweis über die Jacobi-Identität, zu finden in [13, Kapitel 1.7]. Hierbei wird Gleichung (12) verwendet.
- Beweis über Fourier-Reihen, zu finden in [14, Kapitel 2.1]. Hierbei wird Gleichung (11) verwendet.

3.3.3 Berechnung von $\zeta'(0)$

Nun möchten wir $\zeta'(0)$ mit Hilfe der Funktionalgleichung (Gleichung (27)) berechnen.

Für die logarithmische Ableitung der Funktionalgleichung erhalten wir:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log(2\pi) + \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}. \tag{28}$$

Die Gleichung befindet sich in leicht modifizierter Form im Buch von Titchmarsh [14, Kapitel 2.4 nach Gleichung (2.4.5)]:

$$\frac{-\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log(2\pi) - \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi s}{2}\right) + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Hinweis: Diese Darstellung erhält man, wenn man s durch $1-s$ ersetzt.

Um den nächsten Schritt nachvollziehen zu können, benötigt man zunächst folgende Tatsachen:

- $\cot(s) = \frac{1}{s} + \mathcal{O}(s)$ wenn s gegen 0 strebt. Daher gilt: $\lim\limits_{s\to 0} \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \frac{1}{s} = 0$.
- Aus Satz 3.13 und Lemma 3.14 folgt: $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \log\Gamma'(1) = -\gamma$.
- Aus Lemma 3.16 folgt:

  $$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + \mathcal{O}(1),$$

  wenn s gegen 1 strebt. Durch nochmaliges Anwenden von Lemma 3.16 erhält man:

  $$\zeta'(s) = \left(-\frac{1}{s-1} + \gamma\right)\cdot\zeta(s) + \mathcal{O}(1). \tag{29}$$

  Da $\frac{1}{\zeta(s)} = \mathcal{O}(s-1)$, folgt durch Multiplikation mit Gleichung (29) nun,

  $$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \gamma + \mathcal{O}(s-1),$$

  wenn s gegen 1 strebt. Daraus folgt: $\lim\limits_{s\to 0} \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} - \frac{1}{s} = \gamma$.

Aus diesen drei Tatsachen lässt sich schließen, dass die letzten drei Summanden in der logarithmischen Ableitung der Funktionalgleichung (Gleichung (28)) den Grenzwert 0 haben, wenn s gegen 0 strebt.

Mit $s \to 0$ folgt also:

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log(2\pi) \tag{30}$$

[14, Kapitel 2.4 nach Gleichung (2.4.5)].

Setzt man $s = 0$ in Gleichung (11) ein, erhält man $-\frac{1}{2}$. Diesen Wert kann man nun in Gleichung (30) einsetzen und erhält:

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi).$$

Daraus folgt für $\hat{\prod}_{k=1}^{\infty} k$:

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots = \sqrt{2\pi}.$$

Das entspricht der Lerch-Formel (Satz 3.17) für $u = 1$.

4 Die verallgemeinerte Lerch-Formel

In diesem Abschnitt soll die verallgemeinerte Lerch-Formel von Mizuno bewiesen werden. Diese wird sich noch als sehr nützlich erweisen. Die Formel von Mizuno verallgemeinert die in Kapitel 3 besprochene Lerch-Formel (Satz (3.17)), die für den klassischen Fall gilt.

Satz 4.1 (Verallgemeinerte Lerch-Formel von Mizuno.)**.** *Für* $u_j > 0$ *gilt:*

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} \left(\prod_{j=1}^{n} (k + u_j) \right) = \frac{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(u_j)}$$

[15, Theorem 1].

Wenn die λ_k polynomial von k abhängen, dann kann man das Polynom faktorisieren und die Formel von Mizuno anwenden.

4.1 Herleitung der verallgemeinerten Lerch-Formel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \prod\limits_{j=1}^{n} (1 + \frac{xu_j}{k})^{-s}$ in einer reellen Variablen x und bilden die ersten zwei Ableitungen.

Für die erste Ableitung erhalten wir:

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} (-s) \left(1 + \frac{xu_j}{k}\right)^{-s-1} \frac{u_j}{k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left(1 + \frac{xu_l}{k}\right)^{-s},$$

und für die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{j=1}^{n} (-s)(-s-1) \left(1 + \frac{xu_j}{k}\right)^{-s-2} \frac{u_j^2}{k^2} \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left(1 + \frac{xu_l}{k}\right)^{-s} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} (-s) \left(1 + \frac{xu_j}{k}\right)^{-s-1} \frac{u_j}{k} \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} (-s) \left(1 + \frac{xu_l}{k}\right)^{-s-1} \frac{u_l}{k} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l,j}}^{n} \left(1 + \frac{xu_m}{k}\right)^{-s}. \end{aligned} \tag{31}$$

Wir benötigen eine Abschätzung für $f''(x)$. Dazu verwenden wir folgende Abschätzung für $0 \leq x \leq 1$, $u > 0$, $k \geq 1$ und $s \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{xu}{k}\right)^{-s-2}\right| &= \left(1+\frac{xu}{k}\right)^{\Re(-s-2)}, \text{ da } \left(1+\frac{xu}{k}\right) > 0 \\ &\leq \left(1+\frac{xu}{k}\right)^{|s|+2}, \text{ da } \left(1+\frac{xu}{k}\right) \geq 1 \\ &\leq (1+u)^{|s|+2}, \text{ da } \frac{x}{k} \leq 1.\end{aligned}$$

Analog lassen sich die folgenden beiden Abschätzungen zeigen:

$$\left|\left(1+\frac{xu}{k}\right)^{-s-1}\right| \leq (1+u)^{|s|+2},$$

und

$$\left|\left(1+\frac{xu}{k}\right)^{-s}\right| \leq (1+u)^{|s|+2}.$$

Man erhält die Abschätzung für $f''(x)$ (Gleichung (31)) durch Anwenden der Dreiecksungleichung und den gerade gezeigten Abschätzungen:

$$|f''(x)| \leq \frac{1}{k^2}(|s|+1)^2\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2 \prod_{m=1}^{n}(1+u_m)^{|s|+2}, \text{ für } 0 \leq x \leq 1.$$

Lemma 4.2. *Mit* $C_s = (|s|+1)^2\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2 \prod_{m=1}^{n}(1+u_m)^{|s|+2}$ *gilt für jedes s:*

$$\left|k^{-ns}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{u_j}{k}\right)^{-s} - 1 + s\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)\frac{1}{k}\right)\right| \leq C_s\ k^{-n\Re(s)-2}. \tag{32}$$

Beweis. Nach der Taylorformel mit Integralrestglied gilt:

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 f''(t)(1-t)\,dt.$$

Wir wenden die Standardabschätzung fürs Integral an und erhalten:

$$\begin{aligned}|f(1) - f(0) - f'(0)| &= \left| \left(\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{u_j}{k}\right)^{-s} - 1 + s \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \right) \frac{1}{k} \right) \right| \\ &= \left| \int_0^1 f''(t)(1-t)\,dt \right| \leq \int_0^1 |f''(t)|\,|1-t|\,dt.\end{aligned}$$

Nach Abschätzung mit $|f''(x)| \leq \frac{C_s}{k^2}$ für $0 \leq x \leq 1$ und $|1-t| \leq 1$ erhält man:

$$\int_0^1 |f''(t)(1-t)|\,dt \leq \int_0^1 \frac{C_s}{k^2}\,dt = \frac{C_s}{k^2}.$$

Daraus folgt nun Abschätzung (32) für jedes s.

□

Lemma 4.3. *Der Ausdruck* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-ns} \left(\prod\limits_{j=1}^{n} (1 + \frac{u_j}{k})^{-s} - 1 + s \left(\sum\limits_{j=1}^{n} u_j \right) \frac{1}{k} \right)$ *konvergiert für* $\Re(s) > -\frac{1}{n}$ *normal.*

Beweis. Sei K eine kompakte Teilmenge in $\mathbb{C}$. Da C_s stetig von s abhängt, existiert $C_K := \max\limits_{s \in K} C_s$.

Aus Lemma 4.2 folgt nun:

$$\left| k^{-ns} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{u_j}{k}\right)^{-s} - 1 + s \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \right) \frac{1}{k} \right) \right| \leq C_K\ k^{-n\Re(s)-2} \text{ für alle } s \in K. \tag{33}$$

Abschätzung (33) liefert die Majorante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k^{-n\Re(s)-2} < \infty$. Diese Majorante lässt sich aufsummieren, wenn folgende Bedingung gilt: $-n\Re(s) - 2 < -1$ bzw. $\Re(s) > -\frac{1}{n}$. Aus dem Majorantenkriterium[9] folgt direkt, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-ns} \left(\prod\limits_{j=1}^{n} (1 + \frac{u_j}{k})^{-s} - 1 + s \left(\sum\limits_{j=1}^{n} u_j \right) \frac{1}{k} \right)$ normal in der offenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -\frac{1}{n}\}$ konvergiert.

□

[9] Nachzulesen in [4, Kapitel 3.2.2].

Im Folgenden orientieren wir uns eng am Beweis in [15, S.160-161].

Definition 4.4. Für $\Re(s) > \frac{1}{n}$ definieren wir:

$$\Lambda(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} (k + u_j) \right)^{-s} = \left(\prod_{j=1}^{n} u_j \right)^{-s} + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} (k + u_j)^{-s}.$$

$\Lambda(s)$ kann nun auch geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}\Lambda(s) = &\left(\prod_{j=1}^{n} u_j \right)^{-s} + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-ns} - s \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(ns+1)} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k^{-ns} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{u_j}{k} \right)^{-s} - 1 + s \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \right) \frac{1}{k} \right).\end{aligned}$$

Wir formen nun um zu einer Gleichung, in der wir sehen, dass $\Lambda(s)$ eine meromorphe Fortsetzung in der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -\frac{1}{n}\}$ besitzt:

$$\begin{aligned}\Lambda(s) = &\left(\prod_{j=1}^{n} u_j \right)^{-s} + \zeta(ns) - s \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \right) \zeta(ns + 1) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} (k + u_j)^{-s} - k^{-ns} + s \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \right) k^{-(ns+1)} \right).\end{aligned}$$

Wobei Lemma 4.3 sicherstellt, dass der vierte Summand auf der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -\frac{1}{n}\}$ holomorph ist.

Nun möchten wir $\Lambda'(0)$ berechnen. Wir verwenden obige Gleichung für $\Lambda(s)$, $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \mathcal{O}(s-1)$ Lemma (3.16) und $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi$ (Gleichung (22)). Wegen der normalen Konvergenz (Lemma 4.3) darf gliedweise differenziert werden[10]:

$$\Lambda'(0) = -\sum_{j=1}^{n} \log u_j - \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{u_j}{k} \right) - \frac{u_j}{k} \right) + \gamma \cdot u_j \right) - \frac{n}{2} \log 2\pi.$$

[10] Weierstraßer Konvergenzsatz. Nachzulesen in [9, Kapitel 5.1, Theorem 1.2].

Daraus folgt mit Hilfe der Weierstraß-Darstellung der Gammafunktion (Satz 3.9):

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}\left(\prod_{j=1}^{n}(k+u_j)\right)=e^{-\Lambda'(0)}=\prod_{j=1}^{n}e^{\gamma u_j}u_j\left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{u_j}{k}\right)e^{-\frac{u_j}{k}}\right)\cdot(2\pi)^{\frac{n}{2}}=\frac{(\sqrt{2\pi})^n}{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(u_j)}.$$

Aus der verallgemeinerten Lerch-Formel (Satz 4.1) kann die in Kapitel drei besprochene Lerch-Formel für die Hurwitz-Zeta-Funktion (Satz 3.17) nun sehr einfach hergeleitet werden. Dazu muss lediglich $n=1$ gesetzt werden. Um zur Formel für die Riemann-Zeta-Funktion zu gelangen, setzt man zusätzlich noch $u=1$.

4.2 Beispiele

Zunächst möchten wir die verallgemeinerte Lerch-Formel (Satz 4.1) für den Fall $\lambda_k=k^2$ anwenden. Das sind genau die Eigenwerte vom Laplace-Operator am Kreis.

Wobei an dieser Stelle erwähnt werden soll, dass es nicht unbedingt notwendig ist, die Formel von Mizuno zu verwenden. Das regularisierte Produkt kann auch durch Anwenden von Lemma 2.3 und Satz 3.17 berechnet werden. Für $u=1$ gilt dann:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k+1)^2=\hat{\prod_{k=1}^{\infty}}k^2\overset{\text{Lemma 2.3}}{=}\left(\hat{\prod_{k=1}^{\infty}}k\right)^2\overset{\text{Satz 3.17}}{=}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1)}\right)^2=2\pi.$$

Mit Hilfe der Formel von Mizuno (Satz 4.1) erhält man den Wert des regularisierten Produktes für den Fall $\lambda_k=k^2$ mit $n=2$ und $u_j=1$ ebenso:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k+1)^2=\hat{\prod_{k=1}^{\infty}}k^2=\frac{2\pi}{\Gamma(1)\cdot\Gamma(1)}=2\pi.$$

Das regularisierte Produkt für den Fall $\lambda_k = k^n$ kann man ebenfalls mit Hilfe von Lemma 2.3 und Satz 3.17 oder der Formel von Mizuno (Satz 4.1) berechnen:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} (k+1)^n = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n.$$

Betrachtet man den Fall $\lambda_k = k^2 - \lambda$, so muss man zunächst faktorisieren, um in die Formel von Mizuno (Satz 4.1) einsetzen zu können:

$$k^2 - \lambda = (k - \sqrt{\lambda}) \cdot (k + \sqrt{\lambda}), \text{ d.h. } u_1 = \sqrt{\lambda} \text{ und } u_2 = -\sqrt{\lambda}$$

Nun stellt sich das Problem, dass die Formel von Mizuno in dieser Arbeit bisher nur für $u_j > 0$ besprochen wurde.

Die Formel von Mizuno (Satz 4.1) kann auch für komplexe u_j formuliert werden:

Satz 4.5 (Verallgemeinerte Lerch-Formel von Mizuno für komplexe u_j)**.** *Für $u_j \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ gilt:*

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} \left(\prod_{j=1}^{n} (k + u_j) \right) = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(u_j)}$$

[15, Theorem 1].

Das regularisierte Produkt für $\lambda_k = k^2 - \lambda$, mit $\lambda > 0$ und λ ist keine Quadratzahl, lässt sich nun folgendermaßen berechnen:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} (k - \sqrt{\lambda}) \cdot (k + \sqrt{\lambda}) = \frac{2\pi}{\Gamma(\sqrt{\lambda}) \cdot \Gamma(-\sqrt{\lambda})}.$$

Mithilfe von Gleichung (16) kann man das regularisierte Produkt anschreiben als:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} (k^2 - \lambda) = -2\sqrt{\lambda} \cdot \sin \pi \sqrt{\lambda}.$$

Für den Fall $\lambda_k = k^4 - \lambda$, mit $\lambda > 0$ und λ ist keine vierte Potenz, erhalten wir:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k - \sqrt[4]{\lambda}) \cdot (k + \sqrt[4]{\lambda}) \cdot (k - i\sqrt[4]{\lambda}) \cdot (k + i\sqrt[4]{\lambda})$$
$$= \frac{(2\pi)^2}{\Gamma(\sqrt[4]{\lambda}) \cdot \Gamma(-\sqrt[4]{\lambda}) \cdot \Gamma(i\sqrt[4]{\lambda}) \cdot \Gamma(-i\sqrt[4]{\lambda})}.$$

Durch zweimaliges Anwenden von Gleichung (16) und der Gleichung $\sin(iz) = i\sinh(z)$ kann man das regularisierte Produkt folgendermaßen anschreiben:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k^4 - \lambda) = -4\sqrt{\lambda} \cdot \sin\pi\sqrt[4]{\lambda} \cdot \sinh\pi\sqrt[4]{\lambda}.$$

Für den Fall $\lambda_k = k^{2n} - \lambda$, mit $\lambda > 0$ und λ ist keine 2n-te Potenz, erhalten wir:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k - \sqrt[2n]{\lambda}) = \hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k - \sqrt[2n]{\lambda} \cdot \zeta_{2n}^k)(k + \sqrt[2n]{\lambda} \cdot \zeta_{2n}^k)$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{2n}}{\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(\sqrt[2n]{\lambda} \cdot \zeta_{2n}^k) \cdot \Gamma(-\sqrt[2n]{\lambda} \cdot \zeta_{2n}^k)},$$

wobei $\zeta_{2n}^k = e^{i\left(\frac{\pi k}{n}\right)}$ die 2n-te Einheitswurzel ist.

Mithilfe von Gleichung (16) und elementaren Umformungen kann man das regularisierte Produkt folgendermaßen anschreiben:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k - \sqrt[2n]{\lambda}) = -2\sqrt[n]{\lambda}\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_{2n}^k \cdot \sin\left(\pi \cdot \sqrt[2n]{\lambda} \cdot \zeta_{2n}^k\right).$$

Den Ausdruck $\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_{2n}^k$ kann man noch mit Hilfe der Formel für arithmetische Summen $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ aufsummieren. Man erhält:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k - \sqrt[2n]{\lambda}) = -2\sqrt[n]{\lambda} \cdot e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\pi \cdot \sqrt[2n]{\lambda} \cdot \zeta_{2n}^k\right).$$

Mit Hilfe der Euler'schen Identität $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ kann man nun folgende Formel anschreiben:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}(k - \sqrt[2n]{\lambda}) = -2\sqrt[n]{\lambda} \cdot i^{(n-1)} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\pi \cdot \sqrt[2n]{\lambda} \cdot \zeta_{2n}^k\right).$$

5 Eine verallgemeinerte Lerch-Formel mit linearer Vielfachheit

Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung folgender Zeta-regularisierter Produkte:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} \left(\prod_{j=1}^{n} (k+u_j) \right)^{a\cdot k+b} = e^{-\frac{d}{ds}|_{s=0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a\cdot k+b) \prod\limits_{j=1}^{n} (k+u_j)^{-s}}.$$

Wir betrachten $\lambda_k = \prod\limits_{j=1}^{n} (k+u_j)$ jeweils mit Vielfachheit $a \cdot k + b$. Da der Exponent $a \cdot k + b$ als Vielfachheit zu verstehen ist, schränken wir uns auf ganzzahlige a und b ein.

Satz 5.1 (Verallgemeinerte Lerch-Formel mit Vielfachheit $a \cdot k + b$)**.** *Für $u_j > 0$ und ganzzahlige $a > 0$ bzw. ganzzahlige $b \geq 0$ gilt für das regularisierte Produkt mit linearer Vielfachheit $a \cdot k + b$:*

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} \left(\prod_{j=1}^{n} (k+u_j) \right)^{a\cdot k+b} = \left(e^{\frac{n}{2}\cdot V} \prod_{j=1}^{n} \frac{(2\pi)^{-\frac{u_j}{2}} \cdot e^{-\zeta'(-1)}}{\Gamma_2(1+u_j)} \right)^{a} \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u_j)} \right)^{b},$$

wobei $V = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} u_j^2 - \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} u_j \right)^2$ die Varianz von $u_1, ..., u_n$ bezeichnet.

Das regularisierte Produkt mit linearer Vielfachheit $a \cdot k + b$ lässt sich analog zu Abschnitt 4.1 beweisen.

Definition 5.2 (Doppel-Gammafunktion)**.** Die Doppel-Gammafunktion wird wie folgt definiert:

$$\frac{1}{\Gamma_2(1+z)} = (2\pi)^{\frac{z}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left((1+\gamma)z^2+z\right)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right)^k \cdot e^{-z+\frac{z^2}{2k}}$$

[7, Gleichung (6.29)].

Die Doppel-Gammafunktion erfüllt folgende Funktionalgleichung:

$$\frac{1}{\Gamma_2(1+z)} = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_2(z)} \tag{35}$$

[7, Gleichung (A.3) im Anhang].

Mit Hilfe dieser Funktionalgleichung erhält man die Werte bei positiven ganzzahligen n

$$\Gamma_2(n+1) \cdot (n!)^n = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n$$

[16, Kapitel 12.5, Aufgabe 48].

5.1 Herleitung der verallgemeinerten Lerch-Formel mit linearer Vielfachheit

Zunächst betrachten wir ein weiteres Glied in der Taylorformel und schätzen mit $f'''(x)$ ab. Modifiziert man die Formel von Mizuno mit Vielfachheiten, erhält man für ein Taylorpolynom zweiter Ordnung keine normale Konvergenz mehr.

Wir betrachten daher wieder die Funktion $f(x) = \prod\limits_{j=1}^{n} (1 + \frac{xu_j}{k})^{-s}$ in einer reellen Variable x und bestimmen die dritten Ableitung:

$$\begin{aligned} f'''(x) = &\sum_{j=1}^{n} (-s)(-s-1)(-s-2) \left(1 + \frac{xu_j}{k}\right)^{-s-3} \frac{u_j^3}{k^3} \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left(1 + \frac{xu_l}{k}\right)^{-s} \\ &+ 3 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (-s)(-s-1) \left(1 + \frac{xu_j}{k}\right)^{-s-2} \frac{u_j^2}{k^2} \right. \\ &\left. \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} (-s) \left(1 + \frac{xu_l}{k}\right)^{-s-1} \frac{u_l}{k} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l,j}}^{n} \left(1 + \frac{xu_m}{k}\right)^{-s} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} (-s) \left(1 + \frac{xu_j}{k}\right)^{-s-1} \frac{u_j}{k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} (-s) \left(1 + \frac{xu_l}{k}\right)^{-s-1} \frac{u_l}{k} \\ &\cdot \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l,j}}^{n} (-s) \left(1 + \frac{xu_m}{k}\right)^{-s-1} \frac{u_m}{k} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l,j,m}}^{n} \left(1 + \frac{xu_p}{k}\right)^{-s} . \end{aligned} \tag{36}$$

Wir benötigen nun eine Abschätzung für $f'''(x)$. Dazu verwenden wir folgende Abschätzung für $0 \leq x \leq 1$, $u > 0$, $k \geq 1$ und $s \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\left| \left(1 + \frac{xu}{k}\right)^{-s-3} \right| &= \left(1 + \frac{xu}{k}\right)^{\Re(-s-3)}, \text{ da } \left(1 + \frac{xu}{k}\right) > 0 \\
&\leq \left(1 + \frac{xu}{k}\right)^{|s|+3}, \text{ da } \left(1 + \frac{xu}{k}\right) \geq 1 \\
&\leq (1+u)^{|s|+3}, \text{ da } \frac{x}{k} \leq 1.
\end{aligned}$$

Analog lassen sich die folgenden Abschätzungen zeigen:

$$\left| \left(1 + \frac{xu}{k}\right)^{-s-2} \right| \leq (1+u)^{|s|+3},$$

$$\left| \left(1 + \frac{xu}{k}\right)^{-s-1} \right| \leq (1+u)^{|s|+3},$$

und

$$\left| \left(1 + \frac{xu}{k}\right)^{-s} \right| \leq (1+u)^{|s|+3}.$$

Man erhält die Abschätzung für $f'''(x)$ (Gleichung (36)) durch Anwenden der Dreiecksungleichung und den gerade gezeigten Abschätzungen:

$$|f'''(x)| \leq \frac{1}{k^3} (|s|+2)^3 \left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^3 \prod_{p=1}^{n} (1+u_p)^{|s|+3}, \text{ für } 0 \leq x \leq 1.$$

Lemma 5.3. *Mit $C_s = (|s|+2)^3 \left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^3 \prod_{p=1}^{n} (1+u_p)^{|s|+3}$ gilt für jedes s:*

$$\left| k^{1-ns} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{u_j}{k}\right)^{-s} - 1 + \frac{s}{k} \sum_{j=1}^{n} u_j - \frac{s^2}{2k^2} \sum_{j,l=1}^{n} u_j u_l - \frac{s}{2k^2} \sum_{j=1}^{n} u_j^2 \right) \right| \leq \frac{C_s}{2} k^{-n\Re(s)-2}. \tag{37}$$

Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 4.2. Man erhält eine stärkere Abschätzung als in Abschnitt 4.1.

Beweis. Nach der Taylorformel mit Integralrestglied gilt:

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 f'''(t)(1-t)^2\,dt.$$

Wir wenden die Standardabschätzung fürs Integral an und erhalten:

$$\begin{aligned}
\left|f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{f''(0)}{2}\right| &= \Bigg|\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{u_j}{k}\right)^{-s} - 1 + \frac{s}{k}\sum_{j=1}^{n} u_j\right.\\
&\quad \left. - \frac{s^2}{2k^2}\sum_{j,l=1}^{n} u_j u_l - \frac{s}{2k^2}\sum_{j=1}^{n} u_j^2\right)\Bigg|\\
&= \frac{1}{2}\left|\int_0^1 f'''(t)(1-t)^2\,dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left|f'''(t)\right|\left|(1-t)^2\right|\,dt.
\end{aligned}$$

Nach Abschätzung mit $|f'''(x)| \leq \frac{C_s}{k^3}$ für $0 \leq x \leq 1$ und $|(1-t)^2| \leq 1$ erhält man:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left|f'''(t)(1-t)^2\right|\,dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{C_s}{k^3}\,dt = \frac{C_s}{2k^3}.$$

Daraus folgt nun Abschätzung (37) für jedes s.

□

Lemma 5.4. *Der Ausdruck*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1-ns}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{u_j}{k}\right)^{-s} - 1 + \frac{s}{k}\sum_{j=1}^{n} u_j - \frac{s^2}{2k^2}\sum_{j,l=1}^{n} u_j u_l - \frac{s}{2k^2}\sum_{j=1}^{n} u_j^2\right)$$

konvergiert für $\Re(s) > -\frac{1}{n}$ *normal.*

Beweis. Sei K eine kompakte Teilmenge in $\mathbb{C}$. Da C_s stetig von s abhängt, existiert $C_K := \max_{s \in K} C_s$.

Aus Lemma 5.3 folgt nun:

$$\left| k^{1-ns} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{u_j}{k}\right)^{-s} - 1 + \frac{s}{k} \sum_{j=1}^{n} u_j - \frac{s^2}{2k^2} \sum_{j,l=1}^{n} u_j u_l - \frac{s}{2k^2} \sum_{j=1}^{n} u_j^2 \right) \right| \tag{38}$$
$$\leq \frac{C_K}{2} k^{-n\Re(s)-2} \text{ für alle } s \in K.$$

Abschätzung (38) liefert die Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} k^{-n\Re(s)-2} < \infty$. Diese Majorante lässt sich aufsummieren, wenn folgende Bedingung gilt: $-n\Re(s) - 2 < -1$ bzw. $\Re(s) > -\frac{1}{n}$. Aus dem Majorantenkriterium[11] folgt direkt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1-ns} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{u_j}{k}\right)^{-s} - 1 + \frac{s}{k} \sum_{j=1}^{n} u_j - \frac{s^2}{2k^2} \sum_{j,l=1}^{n} u_j u_l - \frac{s}{2k^2} \sum_{j=1}^{n} u_j^2 \right)$$

normal in der offenen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -\frac{1}{n}\}$ konvergiert.

$\square$

Wir betrachten zunächst Vielfachheit k und multiplizieren dazu die Summanden in Definition 4.4 mit k:

$$M(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\prod_{j=1}^{n} (k + u_j)^{-s} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-ns} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{u_j}{k}\right)^{-s} \right)$$

$M(s)$ kann nun auch geschrieben werden als:

$$M(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-ns} - s \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{k=1}^{\infty} k^{-ns} + \frac{s}{2} \sum_{j=1}^{n} u_j^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(ns+1)} + \frac{s^2}{2} \sum_{j,l=1}^{n} u_j u_l \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(ns+1)}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-ns} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{u_j}{k}\right)^{-s} - 1 + \frac{s}{k} \sum_{j=1}^{n} u_j - \frac{s^2}{2k^2} \sum_{j,l=1}^{n} u_j u_l - \frac{s}{2k^2} \sum_{j=1}^{n} u_j^2 \right).$$

[11] Nachzulesen in [4, Kapitel 3.2.2].

Wir formen nun zu einer Gleichung um, in der wir sehen, dass $M(s)$ eine meromorphe Fortsetzung in der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -\frac{1}{n}\}$ besitzt:

$$\begin{aligned}
M(s) = \zeta(ns-1) - s\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)\zeta(ns) + \frac{s}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j^2\right)\zeta(ns+1) + \frac{s^2}{2}\left(\sum_{j,l=1}^{n} u_j u_l\right)\zeta(ns+1) \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\prod_{j=1}^{n} (k+u_j)^{-s} - k^{-ns} + s\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right) k^{-(ns+1)}\right. \\
\left. - \frac{s^2}{2}\left(\sum_{j,l=1}^{n} u_j u_l\right) k^{-(ns+2)} - \frac{s}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j^2\right) k^{-(ns+2)}\right).
\end{aligned}$$

Nun möchten wir $M'(0)$ berechnen. Aufgrund von Lemma 5.4 und dem Konvergenzsatz von Weierstraß[12] darf die Reihe im letzten Summanden gliedweise differenziert werden und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
M'(0) = n \cdot \zeta'(-1) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} u_j + \frac{\gamma}{2}\sum_{j=1}^{n} u_j^2 + \frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2 \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} k \left(-\sum_{j=1}^{n} \log(k+u_j) + n\log k + \sum_{j=1}^{n} u_j k^{-1} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} u_j^2 k^{-2}\right) \\
= \frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{n}\left(k\left(\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{u_j}{k}\right) - \frac{u_j}{k} + \frac{u_j^2}{2k^2}\right) - \frac{u_j}{2} - \frac{\gamma}{2}u_j^2 - \zeta'(-1)\right).
\end{aligned}$$

[12] Weierstraßer Konvergenzsatz. Nachzulesen in [9, Kapitel 5.1, Theorem 1.2].

Man erhält mit Hilfe elementarer Umformungen und Definition 5.2 eine Formel zur Berechnung des regularisierten Produktes für $\lambda_k = \prod_{j=1}^{n} (k + u_j)$ mit Vielfachheit k:

$$\begin{aligned}
\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} \left(\prod_{j=1}^{n} (k + u_j) \right)^{k} &= e^{-M'(0)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} u_j^2 - \frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2} \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\gamma u_j^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}u_j} e^{-\frac{1}{2}u_j^2} e^{-\zeta'(-1)} \\
&\cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u_j}{k}\right)^{k} e^{-u_j} e^{\frac{u_j^2}{2k}} \\
&= e^{\frac{n}{2}\cdot V} \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\gamma u_j^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}u_j} e^{-\frac{1}{2}u_j^2} e^{-\zeta'(-1)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u_j}{k}\right)^{k} e^{-u_j} e^{\frac{u_j^2}{2k}} \\
&= e^{\frac{n}{2}\cdot V} \prod_{j=1}^{n} \frac{(2\pi)^{-\frac{u_j}{2}} \cdot e^{-\zeta'(-1)}}{\Gamma_2(1 + u_j)}, \qquad (39)
\end{aligned}$$

wobei $V = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_j^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2$ die Varianz von $u_1, ..., u_n$ bezeichnet.

Das regularisierte Produkt mit linearer Vielfachheit $a \cdot k + b$ erhält man mit Hilfe von Lemma 2.3:

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k^{a\cdot k} = \left(\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} (\lambda_k)^k \right)^{a}$$

bzw.

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k^{b} = \left(\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k \right)^{b}$$

und Lemma 2.2:

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k^{a\cdot k+b} = \hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k^{a\cdot k} \cdot \hat{\prod_{k=1}^{\infty}} \lambda_k^{b} \text{ für a,b} > 0.$$

Durch Kombination von Gleichung (39) mit der Formel von Mizuno (Satz 4.1) erhält man für $u_j > 0$ und ganzzahlige $a > 0$ bzw. ganzzahlige $b \geq 0$ das regularisierte Produkt mit linearer Vielfachheit $a \cdot k + b$, wie zu Beginn dieses Abschnitts gefordert:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} \left(\prod_{j=1}^{n} (k + u_j) \right)^{a \cdot k + b} = \left(e^{\frac{n}{2} \cdot V} \prod_{j=1}^{n} \frac{(2\pi)^{-\frac{u_j}{2}} \cdot e^{-\zeta'(-1)}}{\Gamma_2(1 + u_j)} \right)^{a} \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(u_j)} \right)^{b}.$$

Wir erhalten eine Formel, in der die Eigenwerte polynomial wachsen und die Vielfachheit unabhängig dazu linear wächst.

5.2 Beispiele

Setzen wir $n = 1$, $a = 1$ und $b = 0$ in Satz 5.1 ein, erhalten wir:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} (k + u)^k = \frac{(2\pi)^{-\frac{u}{2}} \cdot e^{-\zeta'(-1)}}{\Gamma_2(1 + u)}.$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (A.21) in der Arbeit von Voros [7, Gleichung (A.21) im Anhang].

Setzen wir $n = 2$, $a = 1$ und $b = 0$ in Satz 5.1 ein, erhalten wir:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} ((k + u_1)(k + u_2))^k = e^{\frac{(u_1 - u_2)^2}{4}} \prod_{j=1}^{2} \frac{(2\pi)^{-\frac{u_j}{2}} \cdot e^{-\zeta'(-1)}}{\Gamma_2(1 + u_j)}.$$

Wegen des Faktors $e^{\frac{(u_1-u_2)^2}{4}}$ erhält man für das regularisierte Produkt in diesem Fall nicht das Produkt der beiden Terme für $n = 1$. Es handelt sich hier um ein Beispiel zu Bemerkung 2.5. Für die Folge λ_k nehmen wir $k + u_1$ mit Vielfachheit k und für μ_k nehmen wir $k + u_2$ mit Vielfachheit k und erhalten Ungleichheit in Bemerkung 2.5, falls u_1 und u_2 verschieden sind.

Setzen wir $n = 2$, $a = 2$ und $b = 1$ in Satz 5.1 ein, erhalten wir:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} ((k+u_1)(k+u_2))^{2\cdot k+1} = e^{\frac{(u_1-u_2)^2}{2}} \frac{(2\pi)^{1-u_1-u_2} \cdot e^{-4\zeta'(-1)}}{\Gamma(u_1)\cdot\Gamma(u_2)\cdot\Gamma_2(1+u_1)^2\cdot\Gamma_2(1+u_2)^2}. \tag{40}$$

Mit $u_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda}$ und $u_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\lambda}$ erhalten wir:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}} \left(\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \lambda\right)^{2\cdot k+1} = \frac{e^{2\lambda}\cdot e^{-4\zeta'(-1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\sqrt{\lambda})\cdot\Gamma(\frac{1}{2}-\sqrt{\lambda})\cdot\Gamma_2(\frac{3}{2}+\sqrt{\lambda})^2\cdot\Gamma_2(\frac{3}{2}-\sqrt{\lambda})^2}. \tag{41}$$

Das entspricht dem Ergebnis von Voros [7], das sich durch Kombination der Gleichungen (6.24), (6.32), (6.38), (6.39) und (A.3) ergibt.

Beginnt man bei $k = 1$ zu summieren, erhält man aus Gleichung (40) mit Hilfe der Funktionalgleichung der Gamma-Funktion (Gleichung (27)):

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} ((k+u_1)(k+u_2))^{2\cdot k+1} = e^{\frac{(u_1-u_2)^2}{2}} \frac{(2\pi)^{1-u_1-u_2} \cdot e^{-4\zeta'(-1)}}{\Gamma(1+u_1)\cdot\Gamma(1+u_2)\cdot\Gamma_2(1+u_1)^2\cdot\Gamma_2(1+u_2)^2}.$$

Mit $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ und $\Gamma(1) = \Gamma(2) = \Gamma_2(1) = \Gamma_2(2) = 1$ erhalten wir:

$$\hat{\prod_{k=1}^{\infty}} (k\cdot(k+1))^{2\cdot k+1} = e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-4\zeta'(-1)}.$$

Das entspricht der Formel für $\det' \Delta_{S^2}$ in der Arbeit von Quine und Choi [17, S.726], wobei $\det' \Delta_{S^2}$ die Zeta-regularisierte Determinante des Laplace Operators für 2-dimensionale Sphären bezeichnet.

Hinweis: Um das regularisierte Produkt von höherdimensionalen Sphären zu berechnen, müsste man die Vielfachheit polynomial wachsen lassen.

Wir betrachten $\lambda_k = k\cdot(k+1) + \frac{1}{4}$ mit Multiplizität $2k+1$. Das regularisierte Produkt für λ_k kann berechnet werden, indem $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$ in Gleichung (40) oder $\lambda = 0$ in

Gleichung (41) eingesetzt wird. Alternativ findet man in der Arbeit von Voros folgende Gleichung, die uns dabei hilft, das regularisierte Produkt für diesen Fall auf andere, elementarere Weise zu berechnen:

$$M\left(s, u_1 = u_2 = \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\left[k(k+1) + \frac{1}{4}\right]^{-s} = \left(2^{2s} - 2\right)\zeta\left(2s-1\right). \tag{42}$$

[7, Kapitel 6d, Gleichung (6.18)]

Durch folgende Umformungen erhält man Gleichung (42):

$$\begin{aligned}
M\left(s, u_1 = u_2 = \frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\left(k\left(k+1\right) + \frac{1}{4}\right)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-s} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(k + \frac{1}{2}\right)^{-(2s-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\left(2k+1\right)2^{-1}\right)^{-(2s-1)} \\
&= 2^{1+2s-1}\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-(2s-1)} = 2^{2s}\left(\sum_{l=0}^{\infty} l^{-(2s-1)} - \sum_{k=0}^{\infty} (2k)^{-(2s-1)}\right) \\
&= 2^{2s}\left(\sum_{l=0}^{\infty} l^{-(2s-1)} - 2^{-(2s-1)}\sum_{k=0}^{\infty} k^{-(2s-1)}\right) \\
&= 2^{2s}\left(\zeta\left(2s-1\right) - 2^{-(2s-1)}\zeta\left(2s-1\right)\right) = \left(2^{2s} - 2\right)\zeta\left(2s-1\right).
\end{aligned}$$

Für $M'(0, u_1 = u_2 = \frac{1}{2})$ erhält man:

$$M'\left(0, u_1 = u_2 = \frac{1}{2}\right) = -\frac{\log 2}{6} - 2 \cdot \zeta'(-1).$$

Das regularisierte Produkt ist nun:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)^2\right)^{2\cdot k+1} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot e^{2\cdot\zeta'(-1)}. \tag{43}$$

Mit Hilfe von Satz 5.1 kann dieses regularisierte Produkt ebenso berechnet werden. Dazu setzen wir zunächst in die Formel ein:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{2\cdot k+1}=\frac{e^{-4\zeta'(-1)}}{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma_2\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\Gamma_2\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}. \tag{44}$$

Mit Hilfe von Lemma 3.6 und Gleichung (35) erhält man:

$$\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{2\cdot k+1}=\frac{e^{-4\zeta'(-1)}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma_2(\frac{1}{2})^4}.$$

Für $\frac{1}{\Gamma_2(\frac{1}{2})}$ findet man folgenden Wert:

$$\frac{1}{\Gamma_2(\frac{1}{2})}=e^{\frac{3\zeta'(-1)}{2}}\pi^{-\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{24}} \tag{45}$$

[7, Gleichung (6.39) im Anhang].

Mit Gleichung (45) und Lemma 3.6 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\hat{\prod_{k=0}^{\infty}}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{2\cdot k+1}&=\frac{e^{-4\zeta'(-1)}\cdot\pi}{\left(e^{-\frac{3\zeta'(-1)}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}2^{-\frac{1}{24}}\right)^4}\\&=2^{\frac{1}{6}}\cdot e^{2\cdot\zeta'(-1)}\end{aligned}$$

Man erhält durch Anwenden der Formel in Satz 5.1 (Gleichung (44)) dasselbe regularisierte Produkt, wie durch Anwendung der Gleichung von Voros (Gleichung (43)).

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Zeta-regularisierten Produkten ganz bestimmter Zahlenfolgen und setzt sich mit deren grundlegenden Eigenschaften auseinander. Außerdem werden Zeta-regularisierte Produkte im klassischen Fall betrachtet, also für die Ableitung der Hurwitz-Zeta-Funktion bei $s = 0$.

Zentrale Formeln dieser Arbeit sind eine verallgemeinerte Lerch-Formel von Mizuno und eine analoge Formel mit linear wachsenden Vielfachheiten, die eine Formel von Voros verallgemeinert. In weiterer Folge werden auch Beispiele zu diesen Formeln vorgestellt.

Abstract

This paper deals with zeta-regularized products of very specific number sequences and deals with their basic properties. Furthermore, zeta-regularized products are considered in the classical case, i.e. for the derivative of the Hurwitz zeta function at $s = 0$.

Central formulas of this work are a generalized Lerch formula of Mizuno and an analogous formula with linearly growing multiplicities which generalizes a formula of Voros. Subsequently, examples of these formulas are also presented.

Literatur

[1] Quine, J. R., Heydari, S. H. und Song, R. Y. (1993): *Zeta Regularized Products.* Transactions of the American Mathematical Society, Volume 338, Number 1, S.215.

[2] Jänich, K. (1980): *Einführung in die Funktionentheorie.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[3] Forster, O. (2016): *Analysis I.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

[4] Remmert, R. (1995): *Funktionentheorie I.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[5] Apostol, T. M. (1976): *Introduction to Analytic Number Theory.* New York: Springer-Verlag.

[6] Kimoto, K., Kurokawa, N., Sonoki, C. und Wakayama, M. (2004): *Some examples of generalized zeta regularized products.* Kodai Math. J. 27, 321-335.

[7] Voros, A. (1987): *Spectral Functions, Special Functions and the Selberg Zeta Function.* Gif-sur-Yvette: Springer-Verlag.

[8] Schiekel, B. (2019): *Zeta-Funktionen in der Physik - eine Einführung.* Ulm: Eigenverlag.

[9] Lang, S. (1999): *Complex Analysis.* New York: Springer-Verlag.

[10] Remmert, R. (1995): *Funktionentheorie II.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[11] Maier, H. und Haase, D. (2007): *Analytische Zahlentheorie.* Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie Universität Ulm. Abrufbar unter: `https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.zawa/lehre/12sem-pz/Analytische_Zahlentheorie_SS_2007.pdf` (18.03.2021)

[12] Artin, E. (1931): *Einführung in die Theorie der Gammafunktion.* Leipzig: B. G. Teubner.

[13] Edwards, H. M. (1974): *Riemann's Zeta Function.* New York: Dover Publications.

[14] Titchmarsh, E. C. (1986): *The Theory Of The Riemann Zeta-Function.* New York: Clarendon Press.

[15] Mizuno, Y. (2005): *Generalized Lerch formulas: Examples of zeta-regularized products.* Osaka: Journal of Number Theory - Elsevier.

[16] Whittaker, E.T., Watson, G.N. (1996): *A Course of Modern Analysis*. New York: Cambridge University Press.

[17] Quine, J. R., Choi, J (1996): *Zeta Regularized Products and Functional Determinants on Spheres*. Rocky Mountain Journey of Mathematics, Volume 26, Number 2, S.726.