

Seite 29	Feld der rotierenden Kugel
" 31	Feld " " Hohlkugel
" 39	Kinematik der homogenen Lösung in Polarkoordinaten
" 41	" " " " " " mit $\sqrt{g} = 1$

Brief an Einstein 14.7. 1917.

Wie Ihnen Prof. Frank vielleicht erzählt haben wird, beschäftigt sich die junge Wiener Schule eingehend mit der Gravitationstheorie. Mein Freund Frank hat im Herbst in der Phys. Zeitschr. eine kleine Notiz darüber enthalten kann, ~~und~~ arbeitet gespannt an einer neuen Publication und ich habe ebenfalls in den letzten Monaten die von mir militärtechnische Tätigkeit übrig liegend, einiger gerechnet. Ich ~~schickte~~ <sup>schickte</sup> Ihnen ~~darüber~~ <sup>darüber</sup> einen kleinen Bericht senden, in der Hoffnung einer vielleicht einen weiteren <sup>von Ihnen direkt</sup> ~~Zugang~~ zu erhalten — wir sind ja hier in Wien seit Borens Tod verwaisert und müssen uns selber weiterhelfen.

Ich beschäftige mich vor allem mit dem Problem der Relativität der Rotationsbewegung, ~~das Problem ist~~ — ein Problem, welches natürlich in Ihrer Theorie als ~~folgt~~ <sup>zu betrachten</sup> ist. Das <sup>(z.B.)</sup> sowohl im System (I) rotierende Erde, ruhender Fixsternhimmel, als auch im System (II) ruhender Fixsternhimmel derselben Bewegungsstufe für auf der Erdoberfläche befindliche Beobachter gelten, dafür garantiert uns ja die allgemeine Invarianz der Feld- und Bewegungsgleichungen. Damit wäre die Sache eigentlich erledigt. Es gibt aber viele Physiker (besonders die Experimentellen), denen diese Resultate zu abstrakt mathematisch ist und die ~~plurimod~~ <sup>an einem konkreten Beispiel</sup> ~~anzuhängen~~ <sup>beweisen</sup> ~~haben~~ <sup>würden</sup>, dass ~~bezüglich~~ <sup>die</sup> Rotationsbewegung ~~ferner~~ <sup>man</sup> nach Ihrer Theorie auf einem ruhenden Mannpunkt eine Kraft nach Art der Zentrifugalkraft hervorbringen imstande ist. Um das zu zeigen, ging ich so vor: Ich denke mir eine ~~dünne~~ <sup>dünne</sup> Hohlkugel von Radius  $a$  (des Fixsternhimmel) mit der ~~Umlaufgeschwindigkeit~~ <sup>Umlaufgeschwindigkeit</sup>  $\omega$  um die  $z$ -Achse rotierend und berechne nach der Methode der näherungsweise Integration der Feldgleichungen (Bull. Ber. 1916 S. 688) das Feld im Suppunkt  $x = b, y = z = 0$ :  $b \ll a$ . Ich ~~erhalte~~ <sup>erhalte</sup> ~~folgendes~~ <sup>folgendes</sup> ~~Resultat~~ <sup>Resultat</sup> bis auf ~~höherer~~ <sup>höherer</sup> Ordnung in  $4a$ .



$$g_{xx} = -1 + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{a} \left\{ 1 + \omega^2 a^2 \left[ 1 + \frac{1}{10} \frac{b^2}{a^2} \right] \right\}$$

M ist die Masse der Kugel. Das Glied, auf das es ankommt (alles übrige ist ja konstant) ist:  $\frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{a} \frac{1}{10} \cdot \omega^2 b^2$  Durch Differentiation ergibt sich für die Beschleunigung  $\frac{d^2x}{dt^2} = \text{const.} \cdot \omega^2 b$ . Das entspricht ~~also~~ ganz der Zentrifugalkraft, womit also an einem einfachen Beispiel die Äquivalenz der Systeme ~~rotierender Erde - ruhende I und II~~ <sup>von früher</sup> nachgewiesen wäre. Nicht interessiert nun meist allein die Kraft auf einen Punkt außerhalb der Kugelschale. Für den Mittelpunkt mit den Polarkoordinaten  $r$  und  $\theta$ , ( $\varphi=0$ ) wird:

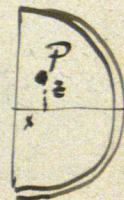
$$g_{xx} = -1 + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{a} \left\{ 1 + \omega^2 a^2 \left[ 1 - \frac{1}{5} \frac{b^2}{a^2} (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta) \right] \right\} = -1 + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{a} \left\{ 1 + \omega^2 a^2 \left[ 1 + \frac{1}{10} \frac{b^2}{a^2} (1 - 3 \sin^2 \theta) \right] \right\}$$

Das Glied, worauf es ankommt, wird:

$$\frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{a} \frac{\omega^2 b^2}{5} (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta) = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{a} \frac{\omega^2}{5} \left( \frac{r^2}{2} - r^2 \right) = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{a} \frac{\omega^2 b^2}{10} (1 - 3 \sin^2 \theta)$$

In meinem Entwürfen tritt nun für <sup>einen</sup> außerhalb der Äquatorscheibe liegenden Punkt ~~noch~~ eine axiale <sup>Kraft</sup> ~~Glied~~ auf, welches ihn in die Äquatorscheibe ~~hinzieht~~.

Wenn man das Entstehen dieser Kraftglieder aus dem Integralen der Feldgleichungen verfolgt, so erkennt man folgendes: Jede Flächenelemente der Kugel, welche in der Nähe der Äquator liegen, haben nämlich ihre höhere Drehwindigkeit auch größere gravitierende Masse. Das Feld einer rotierenden Kugel mit konstanter Flächendichte ist also äquivalent dem einer ruhenden mit einer Dichteverteilung, die (übertrieben gezeichnet) die Fig. entspricht:



Dass eine auf einen Punkt P eine radiale und eine axiale Kraft wirken wird, ist natürlich nicht erstaunlich. Nichtsdesto weniger wird man nun aus Relativitätsgründen das folgende korollare Gesetz fordern müssen: Damit ein Massenpunkt innerhalb einer ruhenden, mit konstanter Dichte besetzten <sup>(bei Abwesenheit anderer Massen im System)</sup> Kugel eine konstante Bewegung längs eines Kreises ausführt, dessen Ebene nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ist erforderlich: a) eine Kraft gegen den Mittelpunkt seiner Kreisbahn hin, b) eine Kraft senkrecht zur Ebene der Bewegung. Voraussetzung ist die Abwesenheit weiterer Massen im Universum.

Es liegt nun nahe zu fragen: Wie kommt es, dass wir bei Rotationsbewegungen immer nur die radiale Kraft und nie die axiale beobachtet haben?



Der Fehler liegt jedenfalls an der unrichtigen Approximation des Kosinus durch eine Kugelfläche. Ein befriedigenderes Resultat erhielt man durch Berechnung des Feldes im Innern einer rotierenden Kugelfläche. Das führt aber, ~~auf Integrale, deren Integranden~~ wie ich mir durch eine flüchtige Betrachtung gewichtete Integrale, deren Integranden elliptische Integrale sind. Ich habe daher die Berechnung einstweilen unterlassen, ~~da~~ ich denke, es lohnt sich nicht der Mühe, da ~~ein Resultat herauszukommen wird~~ denn es handelt sich ja nur darum ein einfaches Schulbeispiel zu zeigen, dass tatsächlich eine allgemeine Relativität besteht, welche ja das Fundament der ganzen Sache ist.

Praktisch interessanter wäre es zu untersuchen, welchen Einfluss die Eigenrotation der Sonne auf die Planetenbahnen (bzw. die Rotation der Planeten auf die Satellitenbahnen) hat. Ich habe zu diesem Zwecke das Feld einer rotierenden Kugelfläche für außerhalb liegende entfernteste Aufpunkte berechnet. Es ergibt sich:

$$g_{00} = -1 + \frac{k}{4\pi} \frac{M}{bc} \left\{ 1 + \frac{3\alpha^2 \omega^2}{5} \left[ 1 + \frac{a^2}{4b^2} (1 - 3 \cos^2 \theta) \right] \right\}$$

M und a sind Masse und Radius der Kugel ~~der Kugel~~,

der Aufpunkt hat die Koordinaten:  $r = b$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \theta$ .  $b \gg a$

höhere Potenzen als  $\alpha^2/c^2$  und  $\omega^2$  wurden vernachlässigt.

Der Einfluss der Rotation besteht für sehr entfernt gelegene Punkte nur aus einer Vergrößerung der scheinbaren Masse; bei Aufpunkten, für welche  $\alpha^2/c^2$  nicht mehr vernachlässigt werden kann, tritt ein Glied hinzu, welches dem Felde seine Zentralsymmetrie nimmt raubt. Halten Sie es für möglich, dass man einen Einfluss auf ~~den Jupiter~~ inneren Jupiters beobachtet könnte. Der Jupiter hat von allen Planeten das größte  $\omega$  und das größte  $a$  - ich fürchte, dass aber trotz dem der Effekt gegenüber den Störungen der Monde untereinander und gegenüber der Erdbewegung zu klein ist.

Au Schluß eine kleine Bemerkung zu Ihrer kosmologischen Arbeit:

Das "minkowski" Linienelement der sphärischen Welt (Gl. (12) S. 150) lässt sich ganz schön in Polarkoordinaten ausdrücken, welche für diesen Raum orthogonale Koordinaten sind. Es heißt dann:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right) dt^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dr^2$$



13. 2. 12

Brief an Einstein Forts.

111

B 35-3157

52

Man kann es dann natürlich ganz leicht auf Einstein-Koordinaten transformieren, wovon ich die Kürze halber solche warte, für die  $\sqrt{g} = 1$  ist.

Man erhält

$$-ds^2 = \frac{dx_i^2}{k^4} + \frac{k^2 dk^2}{4-k^2} + k^2(1-k^2) dq^2 - dt^2$$

mit  $k_0 = c_0 D$ ,  $k_i = R \int \frac{k^2 dk}{\sqrt{R^2 - k^2}} = -\frac{R^3}{2} \left\{ \frac{k}{R} \sqrt{1 - \frac{k^2}{R^2}} - \arcsin \frac{k}{R} \right\}$

Soll ich meine Resultate betreffs der Rotationsbewegung publizieren, wie sie sind, oder wollen Sie mir, nach ~~den~~ ~~einigen~~ ~~oder~~ ~~den~~ ~~anderen~~ ~~etwas~~ ~~weiter~~ ~~zu~~ ~~rechnen~~? Ich habe jetzt während der Sommerferien mehr ~~Zeit~~ ~~und~~ ~~verbrachte~~ meine ganze theoretische Tätigkeit der Gravitationsforschung widmen, welche ich für den einzig wichtigen Punkt in dieser sogenannten "grossen Zeit" halte.



Brief an Einstein vom 3. 12. 07.

Nach mehrmonatlicher Pause, die mit intensiver praktischer Arbeit ausgefüllt war, komme ich jetzt endlich wieder zur wissenschaftlichen Tätigkeit zurück und bin nun daran meine kleine ~~Text~~ Relativitätstheorie vom Sommer zusammenzufassen und in zwei Artikeln in der Phys. Zeitsch. zu veröffentlichen. Mir sind dabei mancherlei Bedenken aufgefallen, die ich ~~aber~~ in der Publikation zunächst unterdrücken möchte, über die ich mich aber gerne mit Ihnen direkt auseinandersetzen ~~wäre~~ möchte.

Gemäß der allgem. Relativitätstheorie soll es eine raum-zeitliche Mannigfaltigkeit geben, deren Gravitationsfeld einem „Zentrifugalfeld“ äquivalent ist. Auch wird man aus den Erfahrungen über die Fixsterne sagen können, dass diese raum-zeitliche Verteilung eine solche ist, dass die Materie ~~wie~~ im geraden und geraden wie im starren Körper nur eine Drehung erfährt. Sagen wir mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $Z$ -Achse. Soll das Gravitationsfeld durch Materie einem „Zentrifugalfeld“ äquivalent sein, so müssen in einem in der  $Z$ - $X$  Ebene gelegenen Aufpunkt folgende Feldkomponenten existieren ( $x_4 = t$ ):

$$T'_{44} = C \omega^2 x^2 + 2T'_{24} = C' \omega$$

wobei  $C$  und  $C'$  Konstante sind. (Die Feldberechnung für eine rotierende Kugel liefert ja auch tatsächlich solche ~~Feldkomponenten~~  $T$ 's) Wenn man natürlich verlangt, dass auf einem Massenpunkt, welcher ~~mit~~ ebenfalls mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  die  $Z$ -Achse umläuft keine Kraftwirkung auftritt, da von ihm aus gesehen alles in Ruhe ist. Dann heißt die  $X$ -Komponente der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \left\{ T'_{44} + 2(T'_{14} \dot{x} + T'_{24} \dot{y} + T'_{34} \dot{z}) \right\} \left( \frac{dx_4}{ds} \right)^2 + [x, y, z]_2$$

Für den mitgedrehten Massenpunkt (der sich gerade in der  $XZ$  Ebene befindet) ist  $\dot{x} = \dot{z} = 0$   $\dot{y} = \omega x$ . Also

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = [C \omega^2 x + C' \omega^2 x] \left( \frac{dx_4}{ds} \right)^2 + [\dots x, y, z]_2$$

Soll diese Annahme auch im Grenzfall derine Inhomogenitäten



wenn wir also, so muss  $C = -C'$  sein. Mit anderen Worten: die  
 Faktoren von  $w^2 x$  in der Zentrifugalkraft und von  $w^2 z$  in der  
 Corioliskraft müssen dem Absolutwert nach einander gleich sein.  
 Wenn aber die  $T$ 's nur ~~gewöhnliches~~ ~~indisches~~ Zentrifugalfeld  
 der gewöhnlichen Mathematik repräsentieren sollte, so müsste  
 wegen der Formeln  $mw^2 x$  und  $2mwz$

$$2C = -C' \text{ sein}$$

Wie kann sich diese Gegenätze vereinbaren?

Nach an einer anderen Stelle tritt ein zweites störend auf.

In einem stationären Gravitationsfeld, in dem alle  $g_{\mu\nu}$  von  $x_4$  unabhän-  
 glich sind, gelten die ~~in~~ in erster Näherung die Gleichungen

$$-T_{44}^{11} = +T_{14}^{14} = \frac{\rho g_{44}}{2} \text{ u. s. w. } T_{44}^{14} = 0$$

Die Bewegungsgleichungen ~~in~~ im Ursprungspunkte in diesem Felde sind

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \left\{ T_{\mu\nu}^{11} + 2 \left( T_{14}^{11} x + T_{24}^{11} y + T_{34}^{11} z \right) \right\} \left( \frac{dx_4}{ds} \right)^2 + \left[ \dots x, y, z \right]^2$$

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} = T_{44}^{44} + 2 \left( T_{14}^{14} x + T_{24}^{14} y + T_{34}^{14} z \right) \left( \frac{dx_4}{ds} \right)^2 + \left[ \dots \right]$$

Nun ist für langsame Bewegungen  $\frac{d^2 x_4}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$ , während die komplizierten  
 Glieder der rechten Seite die doppelte Leistung darstellen. Es stimmt also die  
 Energiebilanz nicht. Ich konnte nicht daran, dass sich das aufklären lassen  
 wird. Schrödinger meinte, der Fehler liege darin, dass durch die Bewegung  
 des Ursprungspunktes dem Felde sein stationärer Charakter genommen  
 wird, dass also  $T_{44}^{14}$  in der verwendeten Näherung nicht ~~ist~~ ~~sondern~~ ~~gleich~~  
 0 gesetzt werden kann. Ich widersetzte darauf, dass in der Elektronenphysik  
 ja auch die Bewegung eines Elektrons das Feld stört, dass aber dort  
 trotzdem  $\frac{d^2 x_4}{ds^2} = 1 \cdot (c^2)$  gilt.

Vielleicht bin mir ich jetzt ~~genau~~ mit meinem Gedankenkreis aus der

Theorie heraus um die Sache zu kopieren, aber item, es ist in Wien allgemein  
 der mir die Paradoxien in befriedigender Weise zu lösen vermochte.

Mit bestem Grusse

Herzliche Grüße  
 Ihre treue  
 Frau Stephanie Hausknecht