MASTERARBEIT / MASTER’S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master‘s Thesis

„Mathematische Fehlvorstellungen und Lösungsansätze im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeit“

verfasst von / submitted by

Katharina Wittmann, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2020 / Vienna 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 199 520 525
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Mathematik Unterrichtsfach Psychologie und Philosophie
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger
Mitbetreut von / Co-Supervisor:	Mag. Dr. Andreas Ulovec

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Intuitive menschliche Urteile und die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung passen nicht immer zusammen (Böcherer-Linder, Eichler & Vogel, 2018, S. 128; Wassner, 2004, S. 15). Eindrucksvoll zeigt sich dies speziell im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeit (Cosmides & Tooby, 1996, S. 2). Das „Ziegenproblem" (engl. Monty Hall problem) oder auch „Drei-Türen-Problem" genannt, ist wohl eines der bekanntesten Beispiele im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeit, bei dem „die Intuition in die Irre führen [kann]." (Tietze, Klika & Wolpers, 2002, S. 157). Weltweit wurde diesbezüglich diskutiert (Borovcnik, 2013, S. 4; Krauss & Wang, 2003, S. 3f). Ausgangspunkt für die Diskussion war folgendes Szenario:

> Stellen Sie sich vor: Sie nehmen bei einer Spielshow teil, bei der Sie ein Auto gewinnen können. Sie stehen vor drei verschlossenen Türen und haben die Wahl eine davon zu öffnen. Hinter einer davon befindet sich ein Auto, und hinter den anderen beiden jeweils eine Ziege. Angenommen Sie möchten Tür 1 öffnen, Sie teilen Ihre Wahl dem Moderator mit. Daraufhin öffnet der Moderator eine Tür, hinter der sich eine Ziege befindet (Er weiß, hinter welcher Türe sich das Auto befindet. Wenn Sie mit Ihrer Erstwahl zufällig die Tür, hinter der sich das Auto befindet, erwischt haben, dann öffnet der Moderator jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ eine der beiden anderen Türen). Nun sagt der Moderator zu Ihnen „Wollen Sie Ihre Wahl verändern, oder bleiben Sie bei Ihrer Wahl und möchten Tür 1 öffnen?" (Krauss & Wang, 2003, S. 1).

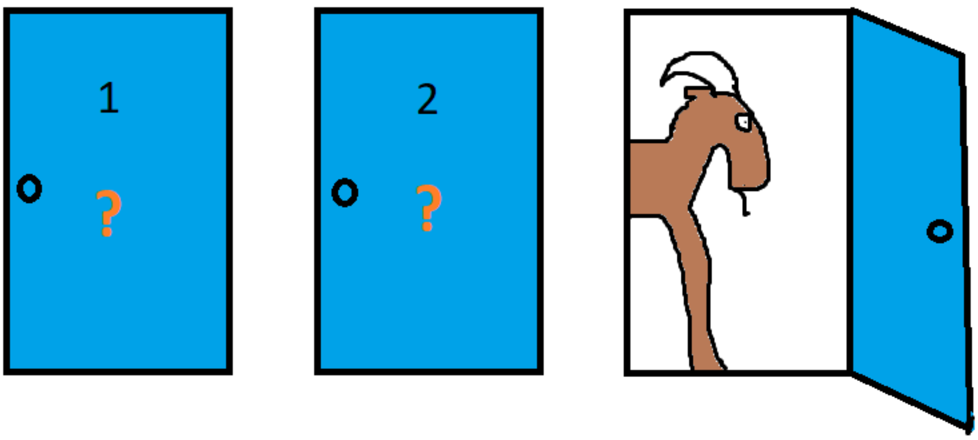


Abbildung 1.1: Ziegenproblem

Es stellt sich nun die Frage, ob es wahrscheinlicher ist, dass das Auto hinter Tür 1 oder hinter Tür 2 ist. Die Lösung[1], mit der die Gewinnwahrscheinlichkeit erhöht (sogar verdoppelt) werden kann, ist, die ursprünglich getroffene Wahl zu ändern. Diese Lösung sorgte für unzählige Debatten. Viele Personen, u. a. auch Mathematiker und Akademiker, konnten bzw. wollten die Lösung nicht nachvollziehen. Einige sagten, dass die erste Wahl reiner Zufall sei und man dafür quasi keine „Verantwortung" trägt. Ein Wechsel würde eine Entscheidung bedeuten, bei der man beeinflusst sein hätte können – wenn man dann verliert, ist man quasi selbst „schuld". Andere argumentierten, dass die Wahrscheinlichkeit, nachdem der Moderator eine Tür geöffnet hat, nun für die zwei verbleibenden Türen gleich sei. Denn wenn zwei Türen zur Auswahl stehen würden, wäre die Chance jene Türe, hinter der sich das Auto befindet, zu öffnen, 1 : 2, also 50 % (Borovcnik, 2013, S. 4, 12).

Man erkennt, dass das Ziegenproblem viel Raum für Diskussionen gegeben hat. Es gibt viele weitere, wenn gleich nicht „weltbekannte" Aufgaben bzw. Paradoxien[2] bei denen „[…] die menschliche Intuition stark und systematisch von einem normativ korrekten Ergebnis abweicht." (Krauss, 2003, S. 2). Solche Aufgaben findet man v. a. im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten und dem daraus folgenden Satz von Bayes (Krauss, 2003, S. 2).

[1] Eine genaue Erklärung der Lösung findet man in Kapitel „4.1.4 Schwierigkeiten, das bedingende Ereignis exakt zu definieren".

[2] Unter Paradoxa bzw. Paradoxien versteht man, dass eine „[…] Aussage im Widerspruch […] zu einer anderen, die bis dato für selbstverständlich gehalten wird[, steht] […] oder, daß mehrere Aussagen über dieselbe Sache, obwohl je einzeln gut begründet, einander widersprechen." (Schupp, 2004, S. 11).

Theoretischer Teil

2. Zufall

Ein Bestandteil einer jeden stochastischen Situation ist der Zufall. Da eben jeder stochastischen Situation der Zufall innewohnt, ist es wichtig angemessene Vorstellungen vom Zufall zu entwickeln. Genauso ist das Verständnis des Konzepts Zufall grundlegend für weitere Bereiche der Stochastik[3], wie beispielsweise Konzepte zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (Tietze et al., 2002, S. 146). Sill (1993, S. 84) schreibt sogar, dass alle grundlegenden Konzepte der Stochastik mit dem Konzept des Zufalls verbunden sind.

Zu den Konzepten der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehören unter anderem die bedingte Wahrscheinlichkeit und der daraus folgende Satz von Bayes.

2.1 Bedeutungen im Alltag vs. in der Wissenschaft

Der Begriff Zufall hat keine einheitliche Definition, weil er unterschiedliche Bedeutungen haben kann (Hauer-Typpelt, 2011, S. 77). Gerade im alltäglichen Gebrauch unterscheidet sich die Bedeutung besonders stark vom wissenschaftlich mathematischen Gebrauch (Sill, 2005, S. 2f).

<u>Zufall in der Alltagssprache (Beispiele)</u>

In der Alltagssprache wird der Begriff Zufall meist für ein Ereignis, das sehr selten eintritt, verwendet. Personen assoziieren damit meist ein großes Glück oder ein großes Pech (Steinbring, 1991, S. 512-515). Aber auch Ereignisse, die unerwartet waren oder nicht erklärbar eintreten, werden als Zufall bezeichnet (Büchter, Hußmann, Leuders & Prediger, 2005, S. 3). Genauso wird eines von gleich wahrscheinlichen Ereignissen als zufällig betrachtet, beispielsweise wird der Ausgang eines Münzwurfs als zufällig angesehen (Sill, 1993, S. 85). Im Allgemeinen werden Ereignisse als zufällig beschrieben, wenn diese unvorhergesehen passieren oder auch sehr ungewöhnlich sind, also wenn ihnen etwas Außergewöhnliches, Besonderes, Bedeutsames, Denkwürdiges oder Auffälliges innewohnt (Hefendehl-Hebeker, 1983, S. 7).

[3] Zur Vollständigkeit: Die Stochastik ist ein Gebiet der Mathematik (Tietze et al., 2002, S. 1), sie umfasst zwei Wissenschaftsdisziplinen – die beschreibende und beurteilende Statistik. Letztere umfasst die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Sill, 2005, S. 2). Anwendungen der Stochastik „[…] bestehen aus der Beschreibung stochastischer Situationen, der Modellbildung und schließlich der Entscheidungsfindung." (Tietze et al., 2002, S. 1).

Zufall im wissenschaftlich mathematischen Gebrauch (Beispiele)

Der Begriff Zufall steht im wissenschaftlich mathematischen Gebrauch für völlige Regellosigkeit. Für die Auswahl eines von mehreren Objekten ist die Wahrscheinlichkeit dieselbe, es gibt keine Regelmäßigkeit. Weiters ist der Zufall etwas vom Menschen Unabhängiges, sobald der Mensch beispielsweise Einfluss auf eine Ziehung (z. B. Ziehung aus einer durchsichtigen Urne) hat, ist diese bzw. das Ergebnis nicht mehr zufällig. Genauso ist der Zufall eine Folge eines Mangels an Informationen, denn je mehr Informationen man hat, desto weniger zufällig ist z. B. das Ereignis. Bei vollständiger Information verschwindet der Zufall sogar zur Gänze (Sill, 1993, S. 85f; 2005, S. 3f).

Im Allgemeinen wird ein Ereignis als zufällig betrachtet, wenn es eintreten kann, aber nicht eintreten muss (Hauer-Typpelt, 2011, S. 77; Sill, 1993, S. 85f; Tietze et al., 2002, S. 146ff).

Schlussfolgerungen für die Schule

Lernende bringen bereits viele intuitive vorunterrichtliche Erfahrungen und Vorstellungen in den Unterricht mit. Meistens haben sie sehr prägende Erfahrungen in Bezug auf den Zufall gemacht, beispielsweise werden bei dem Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ seitens der Kinder, Jugendlichen aber auch Erwachsenen Aussagen wie „Der Sechser kommt nie, das ist ja typisch“ getätigt (Büchter et al., 2005, S. 1f). Aufgrund dieser prägenden Erfahrungen gestaltet sich der Aufbau eines richtigen Verständnisses des Zufalls für viele Schüler*innen schwierig. Im Stochastik-Schulunterricht werden „plötzlich“ alle Ereignisse, die möglich sind, als zufällig betrachtet (Sill, 1991, S. 450). In der Alltagssprache hingegen nur solche, die unerwartet, unvorhersehbar, außergewöhnlich, denkwürdig oder bemerkenswert sind (Hefendehl-Hebeker, 1983, S. 7). Sill (1993, S. 86f) betont, wie wichtig deshalb eine schrittweise Gewöhnung für das richtige Verständnis von Zufall ist. Hauer-Typpelt (2011, S. 77-79) schlägt vor, den Begriff Zufall anhand von realen oder realitätsgetreuen Situationen bzw. Problemstellungen zu erarbeiten. Büchter et al. (2005, S. 3f) empfehlen die Vor-Erfahrungen der Schüler*innen aufzugreifen und darauf aufbauend den Begriff Zufall zu erarbeiten. Auch hier geht es darum, dass Schüler*innen neue Erfahrungen, die bewusst anders sind, mit dem Zufall machen. Dabei soll die Aufmerksamkeit eines Einzelergebnisses auf die „lange Sicht“ verlagert werden. Hauer-Typpelt (2011, S. 79) führt das Würfeln mit einem herkömmlichen Würfel, das Werfen einer Münze oder Ziehungen aus einem Behälter als geeignete Möglichkeiten an, um die Aufmerksamkeit der Lernenden zu verlagern. Sill (1993, S. 87) fügt als Empfehlung noch hinzu, den Zufall, wie beispielsweise ein zufälliges Ereignis, aus dynamischer Sicht zu betrachten, also Zufälligkeit mit einem zeitlich ablaufenden Prozess oder Vorgang in Verbindung zu setzen. Weiters sollte nicht von Zufallsexperimenten oder Zufallsversuchen gesprochen werden, sondern von „zufälligen Vorgängen“ oder „Vorgängen mit zufälligem Ergebnis“. Dadurch soll laut Sill die vorgeschlagene dynamische Sichtweise, nämlich Zufälligkeit als Eigenschaft und nicht als Erscheinung zu betrachten, deutlich werden.

2.3 Arten von zufälligen Vorgängen & Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Man kann zwischen verschiedenen Arten von zufälligen Vorgängen unterscheiden. Je nach Art lassen sich unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsbegriffe herausarbeiten (Sill, 2005, S. 4):

1.) Vorgänge in der Natur

Bei Vorgängen in der Natur geht es um „echte“ Objekte. Diese Objekte gibt es tatsächlich, sie sind real. Diese realen Objekte werden dann vom Menschen untersucht. Die untersuchte bzw. berechnete Wahrscheinlichkeit wird nicht vom Menschen beeinflusst und existiert daher unabhängig vom Menschen. Die Wahrscheinlichkeit ist somit „objektiv“. Man spricht auch vom objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff (Sill, 2005, S. 4).

Schmelzer (2018, S. 1613) führt vier Sichtweisen an, die dem objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff zugeordnet werden:

- *Klassischer/Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff*
  Bei diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff ergeben sich Wahrscheinlichkeiten durch die Berechnung des Quotienten von der Anzahl günstiger und der Anzahl möglicher Fälle (Riemer, 1991, S. 17). Alle möglichen Fälle werden als gleichwahrscheinlich angesehen (Biehler & Engel, 2015, S. 223). Die Wahrscheinlichkeit wird somit durch diese Anteile (günstige, mögliche) festgelegt (Schmelzer, 2018, S. 1613).
- *Prognostischer Wahrscheinlichkeitsbegriff*
  Bei diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff werden Wahrscheinlichkeiten als Prognosen für zu erwartende relative Häufigkeiten aufgefasst. Genauer gesagt, sind es Prognosen, um diese dann zukünftig relative Häufigkeiten schwanken werden (Riemer, 1991, S. 19). Diese Prognosen hängen vom Informationsstand ab (Schmelzer, 2018, S. 1613).

- *Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff*
  Hier werden „[…] Wahrscheinlichkeiten als Grenzwert der relativen Häufigkeiten in unendlich langen Versuchsserien [beschrieben]" (Schmelzer, 2018, S. 1613).
- *Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff*
  Dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff basiert auf den Axiomen von Kolomogorow. Hierbei wird die Beschaffenheit bzw. werden Merkmale von Wahrscheinlichkeiten (Schmelzer, 2018, S. 1613) sowie Rechenregeln (Biehler & Engel, 2015, S. 224) festgelegt. Biehler und Engel (2015, S. 224) merken an, dass die Axiome zu allen Wahrscheinlichkeitsbegriffen passen.

2.) Vorgänge im Denken

Aus Vorgängen im Denken resultieren Gedanken oder Annahmen. Der Inhalt dieser Vorgänge hängt vom Menschen ab, genauer gesagt von den Kenntnissen oder geistigen Fähigkeiten des Individuums oder einer Gruppe. Das hat zur Folge, dass sich die Wahrscheinlichkeit, beispielsweise mit neu gewonnen Kenntnissen, ändern kann. Die Wahrscheinlichkeit hängt somit vom Menschen ab, welcher die Gedanken (subjektiv) äußert. Man spricht auch vom subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff (Sill, 2005, S. 4). Bei der subjektiven Wahrscheinlichkeit geht es um den Grad[4] an persönlichem, subjektivem Vertrauen (Biehler & Engel, 2015, S. 223; Borovcnik, 2013, S. 6f), inneren Überzeugungen und Vermutungen (Schmelzer, 2018, S. 1613) und/oder „[…] ein Urteil des denkenden Subjekts über eine Aussage […]" (Borovcnik, 2013, S. 6). Als Beispiel führen Biehler und Engel (2015, S. 223) die als fair angenommene Wette an. Bei einer fair angenommenen Wette ist der Wert einer Auszahlung (= Gewinn) gleich groß wie jener des Wetteinsatzes (Hackmann, 1972, S. 112). Ein Beispiel für eine als fair angenommene Wette wäre, wenn der Wetteinsatz für eine Wette zwei Euro beträgt und im Falle eines Gewinns die Auszahlung ebenfalls zwei Euro beträgt. Der erwartete Gewinn liegt somit bei Null (Arens et al., 2017, S. 224).

Sill (2005, S. 4) merkt an, dass Vorgänge in der Natur und im Denken oftmals miteinander verbunden sind. Als Beispiel nennt er, wenn Annahmen (subjektiv) zu

[4] Der Grad des persönlichen Vertrauens setzt sich meist aus vergangenen relativen Häufigkeiten zu Experimenten, Expertenwissen sowie persönlichen Erwartungen zusammen (Borovcnik, 2013, S. 6f).

Wahrscheinlichkeiten (objektiv) formuliert und untersucht werden, das ist beispielsweise beim Würfeln oder Werfen mit einer Münze der Fall.

Ausgehend von den Wahrscheinlichkeitsbegriffen lassen sich Grundvorstellungen[5] zu Wahrscheinlichkeiten ableiten (Malle & Malle, 2003, S. 53; Schmelzer, 2018, S. 1613):

Wahrscheinlichkeit als …

… relativer Anteil

… Maß für eine Erwartung

… Schätzwerte (Prognosen) für relative Häufigkeit

… als subjektives Vertrauen.

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses von einem anderen (möglicherweise bereits eingetretenen) Ereignis abhängt, dann spricht man von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Tietze et al. sprechen im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten von „[…] [der] Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses *A* […] unter der Voraussetzung, dass ein Ereignis *B* eingetreten ist.“ (Tietze et al., 2002, S. 7). Als Beispiel für bedingte Wahrscheinlichkeiten führen die Autoren mehrstufige Zufallsexperimente an, diese können analysiert und daraus einzelne Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.

3.1 Bezeichnung „bedingte Wahrscheinlichkeit“ und deren Problematik

Die Formulierung „Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ des Ereignisses *A* unter der Bedingung, daß das Ereignis *B* schon eingetreten ist, …“ (Bandt, 1995, S. 225), wie sie in Schulbüchern zu bedingten Wahrscheinlichkeit zu finden ist, kritisierte Bandt bereits im Jahre 1995. Er beschreibt diese als „blödsinnig“ und erachtet das Wort „bedingt“ als „unzweckmäßig“ (Bandt, 1995, S. 225). Ihm geht es hierbei um die Bedeutung der Bedingung als das Eintreten eines Ereignisses. Denn man kann (manchmal, nicht immer!) die beiden oben genannten Ereignisse A und B formal miteinander vertauschen (siehe Urnenbeispiel in Kapitel „4.2.3 Die Zeitgebundenheit des Denkens“). Hieraus kann sich eine mögliche Verständnisschwierigkeit von Seiten der Schüler*innen ergeben: Es stellt sich für ihn die Frage,

[5] In Kapitel „4.1 Grundvorstellung vs. Fehlvorstellung“ wird näher auf den Begriff Grundvorstellung und seine Bedeutung eingegangen.

wenn man, die beiden Ereignisse formal miteinander vertauschen kann, welches der beiden Ereignisse dann als erstes eingetreten ist. Tietze et al. (2002, S. 139f) weisen bei solchen Formulierungen darauf hin, dass diese einen kausalen Zusammenhang erwecken können. Die Formulierung ist somit unangemessen und kann aufgrund des „vorgetäuschten“ kausalen Zusammenhangs zu Missverständnissen führen. Ebenso sieht Bender (1997, S. 24), dass allein der Begriff der „bedingten Wahrscheinlichkeit“ irreführend ist. Die Begründung ist ähnlich wie die vorherige, dem Begriff wird eine gewisse Kausalität beigemessen. Bender sieht allerdings in der Wortwahl die Möglichkeit Unterschiede zwischen stochastischen und kausalen Unabhängigkeiten zu beleuchten. Der irreführende Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ kann laut ihm als Anlass genommen werden, um stochastisches Denken zu fördern.

Sill (2005, S. 4) plädiert trotz obiger Problematiken dafür den Fachausdruck „bedingte Wahrscheinlichkeit“ in der Sekundarstufe 2 zu verwenden. Für ihn ist es wichtig, dass hinreichend viele inhaltliche Aspekte zu dem Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ kommuniziert und vermittelt werden.

3.2 Schreibweise und deren Problematik

Um eine bedingte Wahrscheinlichkeit auszudrücken, gibt es zwei zulässige Schreibweisen (Sill, 2005, S. 5):

1.) $P_B(A)$
2.) $P(A|B)$

Bei der ersten Schreibweise handelt es sich laut Sill (2005, S. 5) um ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß. Die Schreibweise „verkleinert“ die Grundmenge, es wird nur noch die Teilmenge, die zum Ereignis B gehört, betrachtet. Weiters weist Sill auf Schwierigkeiten bezüglich der mündlichen Formulierung hin – die mündliche und schriftliche Reihenfolge von $P_B(A)$ ist genau umgekehrt.

Folgt man beispielsweise dem Schulbuch von Malle et al. (2018, S. 249) kann man die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)/P(A|B)$ zum Beispiel als „die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung/Voraussetzung von B“ lesen. Die Reihenfolge der Schreib- und Sprechweise stimmt also nur bei der Schreibweise $P(A|B)$ überein, bei der Schreibweise $P_B(A)$ nicht (Krüger, Sill & Sikora, 2015, 252f). Sill (2005, S. 5) schlägt aus diesem Grund vor, die Schreibweise $P(A|B)$ in der Schule bevorzugt zu verwenden. Die Autoren weisen aber darauf hin, dass es sich bei „[…] [„A|B“] nicht um eine Verknüpfung von Ereignissen im üblichen Sinne handelt, d. h., [„

A|B“] [⋯] ist kein Ereignis und die Schreibweise […] [P(A|B)] ist daher fachlich problematisch.“ (Krüger et al., 2015, S. 253).

3.3 Formel und Folgerungen der bedingten Wahrscheinlichkeit

Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit P(A|B) (Eckstein, 2010, S. 148; Humenberger, 2017, S. 20):

Seien A und B zwei zufällige Ereignisse mit P(B) > 0. Dann heißt die durch $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ definierte Zahl „bedingte Wahrscheinlichkeit von *A* unter der Bedingung *B*“.

Durch Umformung ergibt sich $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$. Diese Formel ist die allgemeine **Multiplikationsregel**. Die Multiplikationsregel bezieht sich auf ein „und“-Ereignis, also, dass A *und* B eintreten (Eckstein, 2010, S. 151; Humenberger, 2017, S. 24).

Definition des Satzes von Bayes (Eckstein, 2010, S. 154; Humenberger, 2017, S. 29):

Die Definition des Satzes von Bayes erhält man aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und dem daraus abgeleiteten Multiplikationssatz:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(B)}$$

Die (kurze) Formel für den Satz von Bayes lautet somit:

$$P(A|B) := \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(B)}$$

Die Formel des Satzes von Bayes kann mit Hilfe des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit noch genauer ausgedrückt werden.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (Eckstein, 2010, S. 152; Humenberger, 2017, S. 27):

Sei A_i (i= 1, 2, …, n) eine vollständige Ereignisdisjunktion. Es gilt $P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n) = 1$. Dann gilt für ein zufälliges Ereignis B:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) \cdot P(B|Ai)$$

Anm.: Eine vollständige Ereignisdisjunktion von Ω wird von den Ereignissen $A_1, \ldots, A_n \neq \emptyset$ gebildet, wenn $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ (wobei $i \neq j$) gelten.

Setzt man die Formel des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit in den Satz von Bayes ein, erhält man die **„volle" Formel des Satzes von Bayes** (Eckstein, 2010, S. 154; Humenberger, 2017, S. 29):

$$P(A|B) := \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(Ai) \cdot P(B|Ai)}$$

In dieser Arbeit werden folgende Formeln konkret angeführt:

Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P(A\|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Satz von Bayes („volle" Formel)	$P(A\|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\|B) \cdot P(B)}{P(B)} = \frac{P(A\|B) \cdot P(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(Ai) \cdot P(B\mid Ai)}$

4. Mathematische Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeit

4.1 Grundvorstellung vs. Fehlvorstellung

Grundvorstellung

Man kann zwischen primären und sekundären Grundvorstellungen[6] unterscheiden. Primäre Grundvorstellungen beziehen sich auf vorschulische Erfahrungen (Vom Hofe & Blum, 2016, S. 234). Diese Erfahrungen werden im täglichen Leben gemacht, durch sie können Menschen angemessen auf Umweltsituationen reagieren (Riemer, 1985, S. 51f). Sekundäre Grundvorstellungen dagegen entstehen durch eine mathematische Unterweisung (Schmelzer, 2018, S. 1612). Sie werden also in einem Lehr- und Lernprozess erworben (Riemer, 1985, S. 53), das bedeutet auch, dass (im Idealfall) primäre Grundvorstellungen ständig durch sekundäre Grundvorstellungen ergänzt und erweitert werden (Vom Hofe, 2014, S. 1267). Grundvorstellungen sind damit dynamisch, also veränderbare geistige Modelle (Noll, 2020, S.

[6] Riemer (1985, S. 51-55) sowie Tietze et al. (2002, S. 138f) sprechen in diesem Zusammenhang von primären und sekundären Intuitionen.

25; Schmelzer, 2018, S. 1612). „Sie repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und ermöglichen, eine Verbindung zwischen Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungszusammenhänge herzustellen.“ (Schmelzer, 2018, S. 1611).

Angemessene Grundvorstellungen stellen die Voraussetzung dar, um beurteilen zu können, ob es sich um eine stochastische Situation handelt. Dies bezieht sich auch auf außerunterrichtliche Situationen (Hauer-Typpelt, 2011, S. 76; Schmelzer, 2018, S. 1613). Ein Beispiel für eine außerunterrichtliche Situation sind medizinische Diagnosen oder Tests. Damit man diese verstehen und rational beurteilen kann, benötigt man geeignete Grundvorstellungen (Hauer-Typpelt, 2011, S. 75).

Fehlvorstellung

Eine Fehlvorstellung entsteht dann, wenn primäre und sekundäre Grundvorstellungen nicht oder nicht zutreffend miteinander verknüpft werden. Wenn so eine Verknüpfung bzw. Erweiterung nicht stattfindet, dann entwickeln sich (falsche) primäre Grundvorstellungen zu Fehlvorstellungen. Vom Hofe schreibt in diesem Zusammenhang: „Wird eine geordnete Erweiterung des Grundvorstellungsgefüges nicht erreicht, so können alte intuitive Annahmen zu unbewusst wirksamen Fehlvorstellungen werden und das Verständnis neuer mathematischer Inhalte beeinträchtigen.“ (Vom Hofe, 2014, S. 1267). Weiters können Fehlvorstellungen auftreten, wenn primäre und sekundäre Grundvorstellungen nicht miteinander vereinbar sind. Das ist beispielsweise der Fall, wenn das Vorwissen einer Person falsch ist. In einem solchen Fall muss das Vorwissen angepasst bzw. korrigiert werden (Ohrndorf, 2016, S. 22). Auch Schupp (2004, S. 10) betont in diesem Zusammenhang die Wichtigkeit der Überführung von primären zu geeigneten sekundären Grundvorstellungen, es gilt zu vermeiden, dass falsche primäre Grundvorstellungen bei den Lernenden bestehen bleiben oder womöglich sogar die Vorstellungen dominieren.

Im Allgemeinen kann man sagen, dass „Fehlvorstellungen[,] Vorstellungen [sind], die den fachwissenschaftlich korrekten Konzepten widersprechen oder von ihnen abweichen.“ (Ohrndorf, 2016, S. 23).

4.2 Exemplarische Fehlvorstellungen

Im Folgenden soll näher auf exemplarisch ausgewählte Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten und des Satzes von Bayes eingegangen werden:

4.2.1 Basisratenfehler

Unter dem Basisratenfehler (engl. base-rate fallacy) versteht man, dass Menschen die Tendenz haben die a-priori Wahrscheinlichkeit, auch Basisrate genannt, nicht bei ihren Urteilen miteinzubeziehen (Bar-Hillel, 1980, S. 211; Lesage, Navarrete & De Neys, 2013, S. 28f; Wassner, 2004, S. 15; Watson & Kelly, 2007, S. 214). Die a-priori Wahrscheinlichkeit (Basisrate) meint eine Vorinformation oder eine Hintergrundinformation (Kahneman & Tversky, 1973, S. 239), z. B. wie sich eine Grundgesamtheit bzw. Grundmenge zusammensetzt. Untersuchungen von Diaz und Batanero (2009, S. 135) zeigen, dass Personen die Basisrate nicht nur bei intuitiven Schätzungen vernachlässigen, sondern auch wenn sie Berechnungen dazu anstellen. Mit Hilfe des folgenden Beispiels soll der Basisratenfehler besser veranschaulicht werden:

„Das Taxiproblem“

Ein Taxi war in einen nächtlichen Verkehrsunfall mit Fahrerflucht verwickelt. In der Stadt, in der sich der Unfall ereignete, gibt es zwei Taxiunternehmen, eines mit blauen Fahrzeugen und eines mit grünen Fahrzeugen. Folgende Daten sind nun gegeben: 85 % aller Taxis in der Stadt sind grün und 15 % blau. Ein Zeuge sagt aus, das Unfalltaxi sei blau gewesen. Das Gericht prüft daraufhin die Zuverlässigkeit des Zeugen unter vergleichbaren Bedingungen, der Zeuge sollte bei Nacht die Farbe von Taxiautos identifizieren. In der Versuchsreihe (die Hälfte der Taxis war blau, die andere Hälfte war grün) wurde festgestellt, dass der Zeuge die Taxifarbe in 80 % aller Versuche korrekt identifizieren konnte, in 20 % der Fälle irrte er sich. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass das Unfalltaxi tatsächlich blau war? (vgl. z. B. Bar-Hillel, 1980, S. 211f; Wassner, 2004, S. 15)

Man erhält zwei Informationen: Eine Hintergrundinformation, wie viele Taxis in der Stadt welche Farbe haben (85 % grün, 15 % blau), die die Basisrate also die a-priori Wahrscheinlichkeit widerspiegelt und die Information vom Zeugen, die sich direkt auf das fragliche Taxi bezieht, also eine „spätere“ Information (Bar-Hillel, 1980, S. 212). Mit Hilfe des Satzes von Bayes können Hintergrundinformationen (Basisrate) und „spätere“ Informationen gemeinsam betrachtet werden (Bar-Hillel, 1980, S. 212; Diaz & Batanero, 2009, S. 135): Im obigen „Taxibeispiel“ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Taxi tatsächlich blau war, nachdem der Zeuge aussagt, dass das Unfallauto blau war, gesucht. Aus mathematischer Sicht kann man die Aufgabe wie folgt lösen: Folgend steht „Zb“ dafür, dass der Zeuge ein blaues Auto als solches erkennt (80/20), „Tb“ steht dafür, dass das Taxi blau ist (15/85) („¬[7]Tb“ steht dafür das das Taxi grün ist) (vgl. für ähnliche Berechnung Bar-Hillel, 1980, S. 212; Tversky & Kahneman, 1982, S. 157):

$$P(Tb|Zb) = \frac{P(Zb|Tb) \cdot P(Tb)}{P(Zb|Tb) \cdot P(Tb) + P(Zb|\neg Tb) \cdot P(\neg Tb)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}15}{0{,}8 \cdot 0{,}15 + 0{,}2 \cdot 0{,}85} \approx 0{,}41$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Taxi *tatsächlich* blau war, wenn der Zeuge aussagt, dass es blau war, beträgt also ungefähr 41%. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein grünes Taxi den Unfall verursachte, größer ist als jene, dass ein blaues Taxi den Unfall verursacht hat – obwohl der Zeuge „blau“ sagt (Tversky & Kahneman, 1982, S. 157). Das Ergebnis klingt plausibel, wenn man die niedrige Basisrate blauer Taxis (15 %) bedenkt (Bröder & Hilbig, 2017, S. 633).

Die meisten Versuchspersonen ignorierten jedoch die a-priori Wahrscheinlichkeit und schätzten die Wahrscheinlichkeit, dass das Taxi tatsächlich blau war, auf 80 % (Bar-Hillel, 1980, S. 212f). Die Wahrscheinlichkeit, dass das Taxi tatsächlich blau ist, wurde somit mit der Zuverlässigkeit des Zeugens gleichgesetzt (Bröder & Hilbig, 2017, S. 633). Als weiteren möglichen Grund für die Untersuchungsergebnisse (Mehrheit schätzte 80 %) wurde die Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis angeführt (Villejoubert & Mandel, 2002, S. 171f, 177). Das bedeutet, dass nicht die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(Tb|Zb), also, dass das Taxi tatsächlich blau war, wenn der Zeuge „blau“ sagt (41 %), herangezogen wurde. Stattdessen wurde die Wahrscheinlichkeit P(Zb|Tb), also, dass der Zeuge blau sagt, wenn das Taxi blau ist (= Zuverlässigkeit des Zeugens), diese entspricht im obigen Beispiel 80 %, verwendet. Auf diese Fehlvorstellung soll im nächsten Kapitel („4.2.2 Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“) näher eingegangen werden.

Das „Taxiproblem“ wurde in unterschiedlichen Ausführungen untersucht. So haben beispielsweise Tversky und Kahneman (1982, S. 157f) die Aufgabenstellung verändert, es wurde „85 % aller Taxis in der Stadt sind grün und 15 % blau“ durch „Obwohl die beiden Unternehmen in etwa gleich groß sind, verursachen 85 % der Taxiunfälle in der Stadt grüne Autos und 15 % blaue Autos.“ ersetzt. Die vorherige zufällige Basisrate (von Taxis) wurde mit einer kausalen Basisrate (von Unfällen) ersetzt. Der Median der Versuchspersonen-Schätzungen lag dieses Mal bei 0,6 (also 60 %). Die Median-Schätzung der Versuchspersonen

[7] Hier und folgend stellt das Zeichen „¬“ eine Verneinung dar. „¬Tb“ bedeutet, dass das Taxi nicht blau war, in unserem Beispiel ist das Taxi, wenn es nicht blau war, grün.

lag nun zwar zwischen der Zuverlässigkeit des Zeugen (80 %) und der richtigen Antwort (41 %), dennoch verschwand der Basisratenfehler nicht völlig. Die beiden Autoren weisen in Bezug auf die Basisrate bei letztgenannter Formulierung darauf hin, dass diese kausal ist, weil der Unterschied in der Unfallrate zwischen Unternehmen gleicher Größe leicht den Schluss zulässt, dass die Fahrer der grünen Taxis rücksichtsloser und/oder weniger kompetent sind als jene der blauen Taxis. Dass das Ausmaß der Fehleinschätzungen von solchen Wahrscheinlichkeiten von der Ausgestaltung der Aufgabe abhängt, bestätigen auch Untersuchungen von Koehler (1996, S. 1). Die Untersuchungsergebnisse von Bar-Hillel (1980, S. 216f) weisen darauf hin, dass Personen zwei Informationen nur dann miteinander vereinen bzw. integrieren, wenn ihnen beide als gleichermaßen relevant erscheinen. Wenn diese nicht als gleichermaßen relevant empfunden werden (das ist zum Beispiel der Fall, wenn sich eine Information auf den beurteilenden Sachverhalt spezifischer bezieht), wird die zweite Information mit geringerer Relevanz oftmals nicht mehr beachtet. Ausgehend davon kommt Bar-Hillel (1980, S. 232) zu dem Schluss, dass Basisraten die subjektive Wahrscheinlichkeitsbeurteilung beeinflussen können.

Auch im täglichen Leben kommt man mit Anwendungen der bedingten Wahrscheinlichkeiten in Berührung, ohne es wirklich „mitzubekommen“. So werden beispielsweise bei der Debatte zur biometrischen Gesichtserkennung bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Verdeutlichung der Effizienz herangezogen. Man kann jedoch sehr leicht eine gewisse Sicherheit vortäuschen, indem man nur von einer sehr hohen Trefferrate und einer niedrigen Falschakzeptanzrate berichtet, nicht aber die *tatsächliche* Trefferrate thematisiert. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen:

<u>Gesichtserkennung</u>

Die Einführung einer biometrischen Gesichtserkennung wird immer wieder diskutiert. Das Bundespolizeipräsidium Potsdam (2018) hat ein Projekt zur Systemerprobung intelligenter Videoanalysen durchgeführt. Im Bericht der Bundespolizei wird u. a. „Geeignete Kamerapositionen (Neigung, Zoom und vor allem Lichtverhältnisse) lassen Trefferraten eines einzelnen Systems von deutlich über 80% und Falschakzeptanzraten von unter 0,1% erwarten.“ (Bundespolizeipräsidium Potsdam, 2018, S. 82) als <u>wesentliche bedeutende Erkenntnis</u> angeführt. Die Zahlen wirken auf den ersten Blick erfolgsversprechend – die Software erfasst vier von fünf (80 %) der gesuchten Personen. Dennoch liefert das System, wenn man sich den gesamten Bericht durchliest, eher schlechte Ergebnisse. Endt und Wormer (2019, o. S.)

verdeutlichen dies an folgendem Zahlenbeispiel: Angenommen man hat 1000 Personen, von denen fünf gesuchte Personen sind. Dann identifiziert das System vier der fünf Personen richtig UND bei einer Fehlerrate von 0,1 % identifiziert das System ungefähr zehn weitere Personen (von den übrigen 995 nicht verdächtigen Personen). Also insgesamt identifiziert das System 14 Personen (vier Verdächtige, zehn Nichtverdächtige). Die Trefferquote der tatsächlich Verdächtigen unter allen vom System identifizierten Personen liegt bei ca. 29 % (= $\frac{4}{14}$) (Endt & Wormer, 2019, o. S.). Wenn man dieses System ausweiten würde, beispielsweise Flughäfen, Bahnhöfe, Einkaufszentren, öffentliche Verkehrsmittel und so weiter mit Kameras ausstatten würde, dann wären die Ergebnisse noch schlechter. Glaser (2019, S. 294-296) zeigt dies an folgendem Beispiel: Angenommen auf 1.000.000 Menschen kommen 100 gesuchte Straftäter. Die Software würde 99 % der Gesuchten erkennen (deutlich mehr als in den 80 % des Projekts), dann würden 99 der 100 Gesuchten UND 9999 (= 999.900 · 0,01) nicht gesuchter Menschen (0,1 %) erkannt werden. Das bedeutet, dass nicht einmal 1 % (= $\frac{99}{99 + 9999}$) aller erkannten Personen auch gesuchte Straftäter wären (Glaser, 2019, S. 294-296). Umgekehrt wären mehr als 99 % der vermeintlichen Treffer der Software keine gesuchten Personen. Die Zahlen, die in der Zusammenfassung von dem Bundespolizeipräsidium als bedeutend hervorgestrichen werden, täuschen lediglich eine Sicherheit vor – wie sich gezeigt hat, sind die meisten vom System erfassten Personen nicht verdächtig (Endt & Wormer, 2019, o. S.). Entscheidend für „wesentlich bedeutende Erkenntnisse", wie sie von der Bundespolizeipräsidium Potsdam beschrieben werden, sind also nicht nur hohe Trefferraten (80 %) und niedrige Falschpositivraten (0,1 %), sondern auch die Einbeziehung der Basisrate, nur dadurch können Aussagen zu *tatsächlichen* Trefferraten getätigt werden. Nur die tatsächliche Trefferrate kann Aufschluss über die Effizienz des Systems zur biometrischen Gesichtserkennung geben.

Ein weiteres Beispiel für die Vernachlässigung des Basisratenfehlers wäre der genetische Fingerabdruck (Gigerenzer, 2015, S. 221ff). Auch in anderen praxisnahen Kontexten wird oftmals die Basisrate vernachlässigt, etwa bei der Interpretation einer medizinischen Diagnose (Bar-Hillel, 1980, S. 213).

Mögliche Erklärung des Basisratenfehlers

Menschen greifen auf bestimmte Heuristiken zurück, um Wahrscheinlichkeitsschätzungen bzw. Urteile abzugeben. Eine Heuristik ist eine Lösungsstrategie, vergleichbar mit einer Faustregel. Diese Faustregeln führen jedoch oftmals zu Fehlern oder Täuschungen, weil diese einen Sachverhalt zu sehr vereinfachen (Bröder & Hilbig, 2017, S. 634). Eine solche Vereinfachung kann unter anderem zu oben angesprochener Tendenz der Vernachlässigung der

Basisrate (a-priori Wahrscheinlichkeit) führen, ein typischer Fehler. Dieser Fehler wurde durch das heuristische Prinzip der Repräsentativität erklärt (u. a. Kahneman & Tversky, 1973, S. 238-243; Tversky & Kahneman, 1982, S. 153f). Darunter versteht man, dass Menschen ein, für einen Zufallsprozess, repräsentatives Ereignis wahrscheinlicher als ein anderes, weniger repräsentatives Ereignis, einschätzen (Wassner, 2004, S. 16). Ein solcher Zufallsprozess kann beispielsweise ein Lotto-Tipp sein. Bei Lotto-Tipps verteilen die meisten Personen ihre „Kreuzerl" über den gesamten Lotto-Schein. Die wenigsten würden die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 wählen, obwohl objektiv betrachtet alle Tipps dieselbe Wahrscheinlichkeit haben (Büchter et al., 2005, S. 3f). Dennoch erachten die meisten Personen „zufällig aussehende Kreuzerl" als repräsentativer. Auch die Glückszahl, Geburtstage oder Jahrestage werden angekreuzt mit dem Gedanken „dass diese Glück bringen würden" und somit wahrscheinlicher bei der Ziehung gezogen werden würden. Beck (2014, S. 29) führt als weiteres Beispiel an, dass man eine Person namens Steve, die als zurückhaltend, sehr hilfsbereit, wenig an Menschen interessiert ist, zurückgezogen lebt, Ordnung und Struktur braucht und einen Sinn für Details hat, eher als Bibliothekar als als Landwirt einordnen würde – obwohl es prozentual gesehen viel weniger Bibliothekare als Landwirte gibt und damit die Wahrscheinlichkeit, dass Steve ein Bibliothekar ist, sinkt. Die Beschreibung trifft allerdings für einen Stereotypen-Bibliothekar eher zu und ist damit repräsentativer. Ein weiteres Beispiel ist das „[…] Verhalten von Roulette-Spieler, die nach einer langen Serie von „rot" [auf „schwarz" setzen mit der Begründung, dass dies] […] mit höherer Wahrscheinlichkeit auftritt, da ein Ausgleich der Auftretenshäufigkeiten beider Farben erfolgen muss [...]" (Wassner, 2004, S. 16). Das Ereignis „schwarz" erscheint repräsentativer. Wenn man diesen Gedanken auf das vorher beschriebene Taxiproblem überträgt, würde das bedeuten, dass für die Beurteilung der gesuchten Wahrscheinlichkeit (nämlich mit welcher Wahrscheinlichkeit, das Taxi tatsächlich blau war), die Wahrscheinlichkeit $P(Zb|Tb)$, also die Zuverlässigkeit des Zeugens (80 %), die relevant erscheinenden Merkmale der Aufgabenstellung besser als die Wahrscheinlichkeit $P(Tb)$ (also die Basisrate) widerspiegelt (Wassner, 2004, S. 16).

Gigerenzer et al. (1999, S. 222-233) und Koehler (1996, S. 10) sind der Meinung, dass die Repräsentativitätsheuristik gute Anhaltspunkte liefert, um das Phänomen Basisratenfehler zu betrachten, allerdings nicht ausreicht, um es genau zu erklären. Der Grund dafür ist, dass damit zugrundeliegende kognitive Prozesse nicht erklärt werden können (Wassner, 2004, S. 18), die Heuristik sei zu vage und unspezifisch (Gigerenzer, 1996, S. 592). Weiters merkt Gigerenzer (1996, S. 595) an, dass man mit Hilfe von Heuristiken so gut wie jedes menschlich Verhalten erklären kann, und dadurch wiederrum eigentlich „nichts" erklären kann. Er erachtet deshalb die Heuristik als unzureichende Erklärung. Bestärkt werden die genannten Meinungen durch die Untersuchungsergebnisse von Gigerenzer und Hoffrage (1995, S. 694f). Die beiden haben mehrere Erklärungsansätze identifizieren können, die zu dem Basisratenfehler führen bzw. diesen verstärken, dazu zählen der „Fisherian“ Algorithmus und der „Likelihood substraction“ Algorithmus. Beim „Fisherian“ Algorithmus „[…] wird die zur gesuchten Wahrscheinlichkeit inverse bedingte […] Wahrscheinlichkeit […] angegeben.“ (Wassner, 2004, S. 29). Also geht es, wie weiter oben bereits angeschnitten, um die Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis, also, dass statt der Wahrscheinlichkeit P(Tb|Zb) die Wahrscheinlichkeit P(Zb|Tb) für die Schätzungen herangezogen wurde. Beim „Likelihood substraction“ Algorithmus werden die Wahrscheinlichkeiten, welche aus der Angabe abzulesen sind, subtrahiert (Wassner, 2004, S. 29). Im Taxibeispiel z. B. würden, wenn man diesem Algorithmus unterliegt, die Wahrscheinlichkeiten P(Zb|Tb) und P(Zb|¬Tb) voneinander abgezogen werden, also P(Zb|Tb) – P(Zb|¬Tb) = 80 – 20 = 60 %. Es gibt somit mehrere Erklärungsansätze, die zu dem Basisratenfehler führen können.

4.2.2 Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis

Der angesprochene „Fisherian“-Algorithmus stellt eine weitere Fehlvorstellung dar, auf die in dieser Arbeit eingegangen werden soll: Mehrere Untersuchungen zeigen, dass Menschen das bedingte und bedingende Ereignis oftmals miteinander verwechseln oder sogar gleichsetzen (engl. inverse fallacy oder confusion of the inverse) (Casscells, Schoenberger, & Grayboys, 1978, S. 999f; Eddy, 1982, S. 254; Gigerenzer & Hoffrage, 1995, S. 684; Koehler 1996, S. 10; Wegier & Shaffer, 2017, S. 1882f, 1888). Die Wahrscheinlichkeit P(A|B) wird also mit jener Wahrscheinlichkeit P(B|A) vertauscht oder gleichgesetzt (Borovcnik, 2013, S. 3f; Villejoubert & Mandel, 2002, S. 171f).

Diese Verwechslung bzw. Gleichsetzung kann aufgrund von ungeeigneten bzw. unklaren Formulierungen zustande kommen. Ein mögliches Beispiel, für so eine unglücklich gewählte Aufgabenformulierung, ist das folgende: „Es gibt zwei Gefäße. Im ersten Gefäß liegen 7 blaue und 2 gelbe Kugel, im zweiten Gefäß liegen 3 blaue und 5 gelbe Kugeln. Zuerst wird zufällig das Gefäß gewählt, dann eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gelbe Kugel aus dem ersten Gefäß stammt?“ (Hauer-Typpelt, 2007, S. 60). Aufgrund der gewählten Formulierung sind zwei Deutungen der Fragestellung zulässig bzw. denkbar: Zum Einen ist davon auszugehen, dass eine gelbe Kugel gezogen wurde und die Frage mit welcher Wahrscheinlichkeit diese aus dem ersten Behälter stammt, wird gestellt. Folglich ist die bedingte Wahrscheinlichkeit P(Kugel stammt aus dem 1. Gefäß | Kugel ist gelb) gesucht. Zum

Anderen ist aufgrund der gewählten Formulierung auch die Deutung zulässig, dass aus dem ersten Behälter gezogen wird und die Frage mit welcher Wahrscheinlichkeit eine gelbe Kugel daraus stammt, wird gestellt. Also P(Kugel ist gelb | Kugel stammt aus dem 1. Gefäß) (Hauer-Typpelt, 2007, S. 60f). Wichtig ist, dass dem Aufgabensteller bewusst ist, was er wissen möchte. Sollte man auf die erste der beiden genannten Deutungen abzielen, dann wäre eine passendere bzw. klarere Formulierung, wie z. B. „Zuerst wird ein Behälter zufällig gewählt, dann eine gelbe Kugel daraus gezogen – mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus dem ersten Behälter?“, sinnvoll (Hauer-Typpelt, 2007, S. 61). Bereits kleinste Formulierungsveränderungen können beeinflussen, wie die Aufgabe bearbeitet wird. Je nach Formulierung (gleichbleibender Inhalt) wird die Aufgabe anders wahrgenommen und aufgrund des Wahrgenommenen wird ein Lösungsweg gewählt (Borovcnik, 2013, S. 10). Dass man die Aufgabenstellung falsch versteht, kann auch laut Bea und Scholz (1995, S. 300) auf komplizierte Formulierungen zurückgeführt werden. Als Ursache dafür wird die Überforderung des Kurzzeitgedächtnisses genannt. Hauer-Typpelt (2007, S. 61) schreibt, dass selbst nachdem ein grundsätzliches Verständnis zu bedingten Wahrscheinlichkeiten entwickelt worden ist, immer noch aufgrund von unklaren Formulierungen oder welchen, die mehrere Deutungen zulassen, zu Schwierigkeiten kommen kann.

Als eine mögliche Hilfestellung schlägt Hauer-Typpelt (2007, S. 61) vor, bereits bei der ersten Begriffsfestlegung die Unterschiede einfacher Beispiele, wie z. B. P(Person ist ein Vater | Person ist ein Mann) vs. P(Person ist ein Mann | Person ist ein Vater), zu besprechen.

Nicht nur in der Schule und unabhängig von konkreten Aufgabenformulierungen, begegnet man dem Fehler, bedingendes und bedingtes Ereignis zu vertauschen. Folgend zwei Beispiele aus dem juristischen und medizinischen Bereich:

<u>Justiz</u>

Es gibt einige Beispiele, bei denen in der Justiz mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten falsch argumentiert wurde. Auf den Fall von Sally Clark soll kurz eingegangen werden:

Hintergrundinformation: Sally Clark und ihr Ehemann Steve Clark verloren innerhalb eines Jahres zwei Kinder. Im Dezember 1996 starb ihr erster Sohn Christopher (11 Wochen alt), etwa ein Jahr später, im Jänner 1998, verstarb ihr zweiter Sohn Harry (8 Wochen alt). Die Mutter der verstorbenen Kinder, Sally Clark, wurde daraufhin wegen Doppelmordes angeklagt. Ein Sachverständiger (Kinderarzt) argumentierte gegen Sally Clark, ein plötzlicher Kindstod in niedrigen Risikogruppen (Nichtraucher usw.) komme bei ca. einem von 8500 Babys vor. Dass dies bei zwei Babys in derselben Familie passiert, sei so unwahrscheinlich, dass es vorsätzliche Morde gewesen sein müssen, so der Sachverständige (Ballinger, 2016, S. 98f). Anders (mit bedingten Wahrscheinlichkeiten) ausgedrückt: P(beide Kinder sterben | Sally Clark ist unschuldig) = sehr klein. Aus der Wahrscheinlichkeit P(beide Kinder sterben | Sally Clark ist unschuldig) = sehr klein kann jedoch nicht automatisch die Wahrscheinlichkeit P(Sally Clark ist unschuldig | beide Kinder sterben) = sehr klein abgeleitet werden. Der Sachverständige hat aber vermutlich die beiden Wahrscheinlichkeiten gleichsetzt (Humenberger, 2017, S. 23). Nach drei Jahren Gefängnishaft wurde Revision eingelegt und Sally Clark wurde freigesprochen. Ein paar Jahre später, starb sie jedoch leider an einer Alkoholvergiftung (Ballinger, 2016, S. 124). Neben dem genannten Fehler wurden in den Argumentationen, dass Sally Clark schuldig sei, an mehreren Stellen mathematische Fehler und Fehlinterpretationen getätigt, auf die in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden soll.

Wie sich im Fall von Sally Clark gezeigt hat, spielen die Aussagen oder Schlussfolgerungen von Sachverständigen in gerichtlichen Prozessen eine nicht zu vernachlässigende Rolle. In diesem Zusammenhang zeigte sich bei einer Untersuchung von Koehler (1996, S. 10), dass viele Gerichtsmediziner die beiden Wahrscheinlichkeiten P(Übereinstimmung | Nicht die Quelle des Spurenmaterials) und P(Nicht die Quelle des Spurenmaterials | Übereinstimmung) fälschlicherweise gleichsetzen: Gerichtsmediziner können eine Wahrscheinlichkeit angeben, dass eine Person, die nicht die Quelle des Spurenmaterials war (quasi unschuldig ist), dennoch eine Übereinstimmung (einen „Treffer“) erhält. Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit P(Übereinstimmung | Nicht die Quelle des Spurenmaterials) oder auch P(Treffer | unschuldig) und spiegelt die Falschpositivrate wider, also dass jemand, obwohl er unschuldig ist, als Treffer (= möglicher Schuldiger) eingestuft wird. Diese Wahrscheinlichkeit sollte im Idealfall (niedrige Fehlerquote eines Tests) immer möglichst klein sein. Wenn nun aber diese Wahrscheinlichkeit, also P(Übereinstimmung | Nicht die Quelle des Spurenmaterials) oder auch P(Treffer | unschuldig), mit der Wahrscheinlichkeit P(Nicht die Quelle des Spurenmaterials | Übereinstimmung) oder auch P(unschuldig | Treffer) gleichgesetzt bzw. als diese von Gerichtsmedizinern interpretiert wird, wie Koehler (1996, S. 10) berichtet, ist dies problematisch. Denn die Wahrscheinlichkeit P(Nicht die Quelle des Spurenmaterials | Übereinstimmung) oder auch P(unschuldig | Treffer) hat eine ganz andere Bedeutung, nämlich, dass man bei einer Übereinstimmung bzw. bei einem Treffer auch tatsächlich unschuldig ist. Wenn nun beispielsweise ein Gerichtsmediziner dieser Fehlvorstellung unterliegt und die Wahrscheinlichkeit P(Treffer | unschuldig), welche sehr klein sein sollte als die Wahrscheinlichkeit P(unschuldig | Treffer) interpretiert bzw. mit dieser gleichsetzt, bedeutet das, dass die Wahrscheinlichkeit unschuldig bei einem Treffer zu sein, sehr klein ist. Durch so eine (falsche) Gleichsetzung kann sich der Schuldzuspruch laut Koehler (1993, S. 222-229) seitens der Geschworenen in einem potenziellen Mordfall drastisch erhöhen. Die Fehlvorstellung bedingtes und bedingendes Ereignis gleichzusetzen, kann, wie sich im Falle von Sally Clark gezeigt hat, fatale Folgen für (womöglich unschuldige) Angeklagte haben.

Medizinische Diagnosen

Solche Verwechslungen können auch im medizinischen Bereich auftauchen, etwa bei Diagnosen: Oftmals werden bei medizinischen Diagnosen die Wahrscheinlichkeiten für eine Krankheit bei positiven Befundergebnis und für ein positives Befundergebnis bei *tatsächlich* vorliegender Krankheit verwechselt oder gleichgesetzt (Eddy, 1982, S. 253f; Garcia-Retamero & Hoffrage, 2013, S. 27; Gigerenzer, 2015, S. 67-70; Meehl & Rosen, 1955, S. 4-6). Bei Wahrscheinlichkeiten zu tatsächlich vorliegenden Krankheiten werden neben richtigen Treffern (jemand hat Brustkrebs und bekommt ein positives Ergebnis) auch Falschpositive Treffer (jemand hat keinen Brustkrebs, bekommt aber dennoch ein positives Ergebnis) miteinbezogen. Vergleiche dazu in Kapitel „4.2.1 Basisratenfehler“ die Gesichtserkennung. Mehrere Untersuchungen (Casscells et al., 1978, S. 999f; Eddy, 1982, S. 253f; Gigerenzer, 2015, S. 67-70; Hammerton, 1973, S. 252-254) zeigen, dass die Wahrscheinlichkeiten P(Krankheit | positives Testergebnis) und P(positives Testergebnis | Krankheit) von Ärzten verwechselt oder gleichgesetzt werden. So haben beispielsweise bei der Untersuchung von Eddy (1982, S. 253f) 95 von 100 Ärzten angegeben, dass die Wahrscheinlichkeit P(Krebs | Test positiv), also die Wahrscheinlichkeit tatsächlich Brustkrebs zu haben, zwischen 70 und 80 % liegt, die richtige Antwort wäre jedoch 7,8 %.

Kurze Erklärung der Ergebnisse: Die Aufgabe lautete, dass 1 % der Frauen an Brustkrebs leidet. Wenn eine Frau Brustkrebs hat, dann bekommt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % ein positives Testergebnis. Wenn eine Frau keinen Brustkrebs hat, dann bekommt sie dennoch mit einer Wahrscheinlichkeit von 9,6 % ein positives Testergebnis. Angenommen eine Frau bekommt ein positives Testergebnis, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich Krebs hat? (vgl. Eddy, 1982, S. 251-253). Die Frage zielt auf die bedingte Wahrscheinlichkeit P(Krebs| Test positiv) ab und wird wie folgt berechnet:

$$\text{P(Krebs} \mid \text{Test positiv)} = \frac{\text{P(Test positiv} \mid \text{Krebs)} \cdot \text{P(Krebs)}}{\text{P(Test positiv} \mid \text{Krebs)} \cdot \text{P(Krebs)} + \text{P(Test positiv} \mid \neg\,\text{Krebs)} \cdot \text{P(}\neg\,\text{Krebs)}} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}01}{0{,}8 \cdot 0{,}01 + 0{,}096 \cdot 0{,}99} \approx 0{,}078$$

Die meisten Versuchspersonen, die die Wahrscheinlichkeit zwischen 70 und 80 % schätzten, haben vermutlich die beiden Wahrscheinlichkeiten P(Krebs | Test positiv) und P(Test positiv | Krebs) verwechselt oder gleichgesetzt, denn es gilt P(Test positiv | Krebs) = 80 % (direkt aus Angabe ablesbar).

Diese mögliche Fehlinterpretation betrifft nicht nur die Brustkrebsmammografie, sondern auch den „Combined-Test" (Vorsorgeuntersuchung in der Schwangerschaft, Trisomie) oder HIV-Tests (siehe dazu Böer, 2018, S. 111-123; Hauer-Typpelt, 2007, S. 54-59; Gigerenzer, 2015, S. 67-70; Wegier & Shaffer, 2017, S. 1882ff). Wie diese Fehlinterpretation oder Fehlvorstellung „überwunden" bzw. minimiert werden kann, wird in Kapitel „5.1 Häufigkeitskonzept" besprochen. Dabei wird obiges Brustkrebs-Beispiel nochmals aufgegriffen und weitere Studienergebnisse mit Ärzten vorgestellt.

Abschließend soll angemerkt werden, dass das Taxiproblem und auch die angesprochenen medizinischen Diagnosen dem Basisratenfehler oder der Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis nicht eindeutig zugeordnet werden können. So werden oftmals die Ergebnisse von Untersuchungen diesbezüglich auf die ein oder andere Fehlvorstellung zurückgeführt. In der Literatur wird diskutiert wie die beiden Fehlvorstellungen miteinander zusammenhängen. So schlagen einige Autoren (siehe dazu Villejoubert & Mandel, 2002, S. 172) vor, dass sich die Verwechslung der beiden Ereignisse aus dem Basisratenfehler ableiten lässt (u. a. Bar-Hillel, 1980, S. 221-223), andere Autoren sind der Meinung, dass es genau umgekehrt ist, also dass sich der Basisratenfehler aus der Verwechslung ableiten lässt (u. a. Wolfe, 1995, S. 101). Unterstützt wird letzteres durch Untersuchungen von Wolfe (1995, S. 99-101), bei denen sich die Testergebnisse jener Versuchspersonen, die trainiert wurden, die beiden Wahrscheinlichkeiten P(A|B) und P(B|A) zu unterscheiden und der Kontrollgruppe (diese wurden nicht trainiert) voneinander unterschieden. Es zeigte sich, dass weniger Versuchspersonen, die trainiert wurden, die Basisrate vernachlässigten als Personen aus der Kontrollgruppe. Er führt das Ergebnis darauf zurück, dass eben die Verwechslung zwischen bedingtem und bedingendem Ereignis den Ursprung des Basisratenfehlers darstellt.

4.2.3 Die Zeitgebundenheit des Denkens

Eine weitere Fehlvorstellung ist die „Zeitgebundenheit des Denkens" (engl.: fallacy of the time axis). Folgendes Beispiel (siehe z. B. Borovcnik, 2013, S. 1; Tietze et al., 2002, S. 9) soll verdeutlichen, dass unser Denken an zeitliche Abläufe gebunden ist und wie stark wir uns dementsprechend an der chronologischen Reihenfolge von Ereignissen in Bezug auf Wahrscheinlichkeitseinschätzungen orientieren (Diaz & Batanero, 2009, S. 134):

Man hat eine Urne, in dieser befinden sich zwei schwarze Kugeln und zwei weiße Kugeln. Es wird zweimal, ohne Zurücklegen gezogen. Nun gibt es zwei Aufgabenstellungen:

1.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel weiß ist, wenn die erste Kugel weiß war?

2.) Die erste Kugel wird gezogen, deren Farbe bleibt unbekannt. Die zweite Kugel ist weiß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel ebenfalls weiß war?

Die erste Aufgabenstellung bereitet den Schüler*innen im Allgemeinen keine Probleme (Borovcnik, 2013, S. 1-3). Sie kommen durch die Argumentation, dass sich nach dem ersten Ziehen noch drei Kugeln in der Urne befinden, von denen nur noch eine weiß ist, mit Hilfe von Laplace schnell auf die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ (Hauer-Typpelt, 2007, S. 63). Borovcnik (2013, S. 1-3) schreibt in diesem Zusammenhang, dass bei bekannter Zusammensetzung der Kugeln, diese die Wahrscheinlichkeit sozusagen „verursacht". Die Begründung für das Wahrscheinlichkeitsergebnis von $\frac{1}{3}$ ist somit meist auf die Kausalität zurückzuführen.

Bei der zweiten Aufgabenstellung gibt es eine „Umkehrung der zeitlichen Reihenfolge" (Borovcnik, 1991, S. 47). Untersuchungen von Fischbein und Schnarch (1997, S. 99f) zu dieser Aufgabenstellung zeigen, dass 30 % der Versuchspersonen, die erste Aufgabe lösen konnten, die zweite jedoch nicht. Die Mehrheit gibt als gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ an. Laut Diaz und Batanero (2009, S. 134) argumentieren die Schüler*innen meist, dass das Ergebnis der zweiten Ziehung irrelevant ist, weil man bei der ersten Kugelziehung noch nicht die zweite gezogen hat und dadurch die Wahrscheinlichkeit der vorherigen (in diesem Fall der ersten) Ziehung nicht beeinflussen könne. Falk (1986, S. 292) schreibt ebenfalls von Schüler*innen, die der Ansicht sind, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses einer Ziehung nicht für ein später eintretendes Ereignis eine Bedingung darstellen kann. Der ersten Kugel wäre es quasi egal, ob die zweite Kugel weiß oder schwarz ist. Die Schüler*innen stützen ihre Antwort ausschließlich auf die Urnenbelegung zu Beginn des Versuchs. Sie schließen die erhaltenen Informationen über das spätere Ereignis in ihren Berechnungen aus. Ein Grund für die Informationsignorierung könnte laut Borovcnik (2013, S. 2) sein, dass die Schüler*innen keine passende Urnenbelegung mehr finden, die die Aufgabenstellung repräsentiert und deshalb auf Ersatzstrategien ausweichen. Eine solche Ersatzstrategie wäre die Argumentation, dass man beim ersten Zug zwei schwarze und zwei weiße Kugeln hatte, also „zwei zu zwei" ($= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$) und dass, spätere Ereignisse frühere nicht beeinflussen könnten. Die Untersuchungen von Diaz und Batanero (2009, S. 134) zeigen ebenfalls, dass die meisten Schüler*innen die Tatsache verstehen und akzeptieren, dass das Ergebnis eines Ereignisses das Ergebnis eines späteren Ereignisses beeinflussen kann (siehe 1. Aufgabenstellung), allerdings sind sie auch der Meinung, dass ein Ergebnis eines Ereignisses nicht ein anderes Ergebnis eines Ereignisses beeinflussen kann, das bereits geschehen ist (siehe 2. Aufgabenstellung). Falk (1986, S. 292) schreibt, dass diese falsche Annahme dazu führt, dass die Aufgabe nicht richtig gelöst wird. Um die Aufgabe richtig zu lösen, müsste man die Information, dass die zweite Kugel, die gezogen wurde, weiß ist, miteinbeziehen. Denn die Aufgabenstellung zielt auf den *aktuellen* Wissensstand ab. Diese zweite Ziehung hat die Urnenbelegung verändert – für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit in der ersten Ziehung sind nun nur noch eine weiße und zwei schwarze Kugeln relevant.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die beiden gesuchten Wahrscheinlichkeiten P(2. weiß | 1. weiß) in der ersten und P(1. weiß | 2. weiß) in der zweiten Aufgabe dieselben sind. Psychologisch gesehen, werden die beiden Aufgabenstellungen allerdings nicht als symmetrisch und somit gleich wahrscheinlich wahrgenommen (Falk, 1986, S. 292). Bei der ersten Aufgabenstellung stimmt der Zeitfaktor mit der richtigen Interpretation der Bedingungen überein (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 102), die kausale Schlussfolgerung ist somit mit der natürlichen Zeitachse kompatibel (Falk, 1986, S. 292). Bei der zweiten Aufgabenstellung ignorieren viele Schüler*innen die Bedingung und fokussieren sich ausschließlich auf den zeitlichen Aspekt (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 102). Um die Aufgabe zu richtig zu lösen, benötigt man eine probabilistische[8] Argumentation, bei der man die zeitliche Ordnung vernachlässigt (Falk, 1986, S. 292).

<u>Empfehlungen für den Unterricht</u>

Laut Hauer-Typpelt (2007, S. 63) kann der Gedanke der Symmetrie in den beiden Aufgabenstellungen deutlich gemacht werden, wenn man bei Aufgabe 2 nur von dem Wissen ausgeht, dass die Farbe der zweiten gezogenen Kugel weiß ist – von den drei verbleibenden Kugeln in der Urne weiß man, dass zwei davon schwarz sind und eine weiß ist. Das bedeutet, dass die erste Kugel mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ weiß ist. Bei dieser Überlegung rückt die zeitliche Abfolge in den Hintergrund.

[8] Eine probabilistische Aussage gibt Auskunft mit welcher Wahrscheinlichkeit beispielsweise ein Ereignis eintritt. Man kann sagen, dass es eine Wahrscheinlichkeitsaussage ist.

Falk (1986, S. 292f) schlägt vor, Beispiele in der Schule zu bringen, bei denen neu gewonnene Informationen genutzt werden, um frühere Annahmen zu modifizieren. Dadurch können Rückschlüsse gemacht werden und Annahmen präzisiert werden. Dennoch bleiben es natürlich Annahmen und werden nicht zu Tatsachen. Als Beispiel nennt er archäologische Ausgrabungen. Ausgehend von neuen archäologischen Funden können Einschätzungen auf die Vergangenheit abgeleitet werden. In anderen Worten: Durch neue Informationen können Rückschlüsse auf die Vergangenheit getroffen werden. Genauso könnte man eine solche Ursache/Wirkung-Beziehung anhand einer Krankheit (Ursache) und deren Symptomen (Wirkung) verdeutlichen. Die Krankheit bekommt der Mensch vor den Symptomen. Jedoch wird in der Medizin von den Symptomen, die erst nach der Krankheit auftreten, auf Krankheiten bzw. Wahrscheinlichkeiten von Krankheiten geschlossen. Auch hier zeigt sich, dass man mit Hilfe später eintretender Ereignisse (Symptome) auf zuerst eintretende Ereignisse (Krankheit) schließen kann.

Mögliche Erklärung

Das oben angeführte Urnenbeispiel verdeutlicht, wie sehr unser Denken an die Zeit bzw. die zeitliche Abfolge von Ereignissen gebunden ist. Die Fehlvorstellung ist besonders schwer zu überwinden, weil wir laut Pozo (1987, zitiert nach Diaz & Batanero, 2009, S. 133) unsere gesamten Kenntnisse weitgehend unter Berücksichtigung von Ursachen und Wirkungen organisieren. Ursachen und Wirkungen sind dabei zeitlich und logisch gesehen nacheinander ablaufende Ereignisse, dabei geht die Ursache immer der Wirkung voraus (Tversky & Kahneman, 1977, S. 2/1). Diaz und Batanero (2009, S. 134) schreiben, dass man im Allgemeinen von Kausalität (also der Beziehung zwischen Ursache und Wirkung) spricht, wenn ein Ereignis A die Ursache eines anderen Ereignisses B ist und immer dann, wenn A eintritt auch B eintritt. Mit einer bedingten Wahrscheinlichkeit kann man diese Kausalitäts-Beziehung wie folgt darstellen: $P(B|A) = 1$. Wenn man nun die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A) = 1$ betrachtet, gilt der „Umkehrschluss“ allerdings nicht. Denn wenn $P(B|A) = 1$ gilt, dann muss das Ereignis A nicht der Grund bzw. ursächlich für das Ereignis B sein. Die beiden Ereignisse A und B der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(B|A) = 1$ können, müssen aber nicht kausal zusammenhängen (Diaz & Batanero, 2009, S. 134). In vielen Situationen, wie beispielsweise in obigem Urnen-Beispiel, impliziert eine bedingte Beziehung keine Kausalität. Wie die Beziehung zweier Ereignisse A und B von einer (bedingten) Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ wahrgenommen werden, hängt vom Kontext ab (Tversky & Kahneman, 1982, S. 160). So wird, wie oben bereits gesagt, die Beziehung zwischen den Ereignissen A und B in $P(B|A)$ als kausal angesehen, wenn A als Ursache von B wahrgenommen wird. Wenn aber B als möglicher Grund von A wahrgenommen wird, dann wird P(B|A) als diagnostische Beziehung wahrgenommen (Tversky & Kahneman, 1977, S. 1/1). Borovcnik (2013, S. 3-4) und Stilgenbauer, Baratgin und Douven (2017, S. 1f) veranschaulichen dies an einem Beispiel: P(positives Testergebnis | Krankheit) bzw. P(Wirkung | Ursache) wird als kausale Beziehung aufgefasst, denn die Krankheit war zuerst da, die Symptome wurden durch die Krankheit sozusagen „verursacht". Eine diagnostische Beziehung hingegen kann man sich wie eine Diagnose vorstellen – man schließt von etwas auf etwas anderes, das vorher schon da war. Also P(Krankheit | positives Testergebnis) bzw. P(Ursache | Wirkung). Die Untersuchungen von Tversky und Kahneman (1977, S. 2/2) weisen darauf hin, dass sich die unterschiedlich wahrgenommene Beziehung zwischen den beiden Ereignissen A und B auf die Beurteilung der Wahrscheinlichkeit P(B|A) auswirkt: Wird die Beziehung zwischen den Ereignissen A und B als kausal angesehen, überschätzen die meisten Personen deren Wahrscheinlichkeit. Wird hingegen die Beziehung als diagnostisch angesehen, obwohl diese objektiv gesehen dieselbe Information beinhalten, wird die Wahrscheinlichkeit P(B|A) eher ignoriert. Die Tendenz die Wahrscheinlichkeit P(Wirkung | Ursache) höher als die Wahrscheinlichkeit P(Ursache | Wirkung) einzuschätzen, zeigte sich in deren Untersuchung. So wurden Versuchspersonen gefragt, welche der folgenden Antworten am wahrscheinlichsten sei:

a.) Ein Mädchen hat blaue Augen, wenn ihre Mutter blaue Augen hat.

b.) Die Mutter hat blaue Augen, wenn ihre Tochter blaue Augen hat.

c.) a.) und b.) sind gleichwahrscheinlich.

Seitens der Versuchspersonen gab es eine starke Tendenz für Antwortmöglichkeit a.): 106 Personen entschieden sich für a.), 34 Personen entschieden sich für b.) und 35 Personen entschieden sich für die korrekte Antwort c.). Ähnliche Ergebnisse gab es bei einem zweiten Beispiel, bei dem es um die Größe des Sohnes und jener des Vaters ging (Tversky & Kahneman, 1977, S. 2/2). Für Pollatsek, Well, Konold und Hardiman (1987, S. 257) sind diese Ergebnisse noch lange kein Beleg für eine kausale Wahrnehmungsverzerrung bei der Beurteilung von bedingten Wahrscheinlichkeiten. So könnten beispielsweise die Versuchspersonen den Wortlaut des Problems nicht vollständig verstanden haben. Weiters könnte das Beispiel, speziell dessen Formulierung, von den Versuchspersonen eher als ein Urteil über Kausalität als über eine Konditionalität interpretiert worden sein.

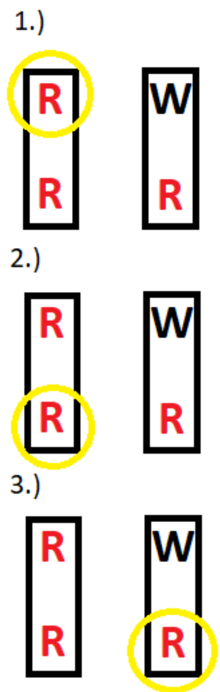
4.2.4 Schwierigkeiten, das bedingende Ereignis exakt zu definieren

Auch die Fehlvorstellung „Schwierigkeiten, das bedingende Ereignis exakt zu definieren“ soll anhand eines Beispiels erläutert werden:

Man stelle sich vor: In einem Hut befinden sich drei Karten. Davon ist eine auf beiden Seiten rot (RR), eine auf beiden Seiten weiß (WW) und eine ist auf einer Seite rot, auf der anderen Seite weiß (RW). Nun wird eine Karte gezogen und auf den Tisch gelegt, die zu sehende Seite ist rot. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Seite ebenfalls rot ist? (u. a. Bar-Hillel & Falk, 1982, S. 119; Falk, 1986, S. 293).

Bei einem Einführungskurs zu Wahrscheinlichkeiten von Bar-Hillel und Falk (1982, S. 119) wurde diese Aufgabe 53 Psychologiestudierenden vorgelegt. 35 Personen, also $\frac{2}{3}$, der befragten Studierenden antwortete, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Seite ebenfalls rot sei $\frac{1}{2}$ ist (= 50 %). Hauptbegründung für die Antwort war, dass die Karte WW nicht mehr in Frage kommen kann, zwei Karten RW und RR stehen noch zur Auswahl. Die beiden Karten sind gleichwahrscheinlich, weil zu Beginn zufällig gezogen wurde (Bar-Hillel & Falk, 1982, S. 119). Die Argumentation, dass die Karte WW ausgeschlossen werden kann, ist korrekt. Allerdings ist das bedingende Ereignis nicht durch den Ausgang der gezogenen Karte definiert, sondern durch die sechs möglichen Kartenseiten, die gleichwahrscheinlich sind. Es wurde eine Karte gezogen, die zu sehende Seite ist rot. Genau *das* ist das Ereignis, an das man die Wahrscheinlichkeit „auf der zweiten Seite ebenfalls rot“ bedingen oder verknüpfen sollte: In zwei von drei Möglichkeiten ist die gezogene Karte auf der zweiten Seite ebenfalls rot. Die korrekte Antwort ist daher $\frac{2}{3}$ (Falk, 1986, S. 294).

Folgende Grafik soll dies nochmals verdeutlichen:



Die gelb eingekreiste Karte ist die zu sehende rote Karte. Dafür gibt es insgesamt drei Möglichkeiten.

Bei Möglichkeit 1.) ist die Farbe auf der Rückseite ebenfalls rot.

Bei Möglichkeit 2.) ist die Farbe auf der Rückseite ebenfalls rot.

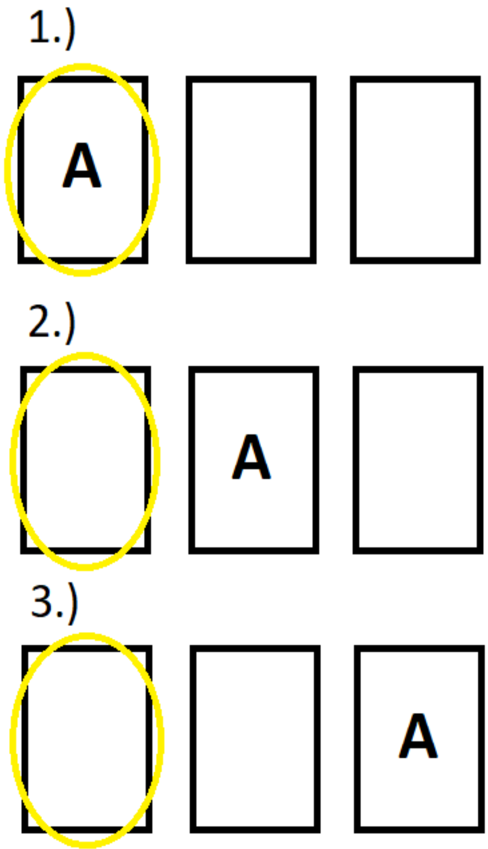
Bei Möglichkeit 3.) ist die Farbe auf der Rückseite weiß.

In zwei von drei Fällen ist die Rückseite rot, also liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{3}$.

Abbildung 4.1: Drei-Karten Problem – Erklärung

Eine weitere Erklärung bzw. eine Interpretation für die Aufgabe, ist die folgende: Die aufgedeckte Karte ist rot. Damit kommen noch zwei Karten in Frage: RR und RW. Allerdings sind die beiden Karten nicht gleichwahrscheinlich – rot ist ein Indiz für RR, denn bei RR ist die Wahrscheinlichkeit („rot zu ziehen“) doppelt so groß wie bei RW (Falk, 1986, S. 294; Götz & Humenberger, 2008, S. 53f).

Ähnliches gilt auch für das eingangs angeführte Ziegenproblem. Auch hier gilt: Wenn der Moderator eine Türe öffnet, bedeutet das nicht, dass die beiden verbleibenden Türen gleichwahrscheinlich sind. Zur Erinnerung: Es gibt drei Türen, hinter einer davon ist das zu gewinnende Auto. Angenommen der Kandidat oder die Kandidatin wählt o.B.d.A. Tür 1. Daraufhin öffnet der Moderator eine Tür, hinter der sich eine Ziege befindet (der Moderator weiß ja hinter welcher Türe sich das Auto befindet). Abbildung 4.2 soll das Ziegenproblem veranschaulichen. Dabei steht „A“ für das Auto, dafür gibt es insgesamt drei Möglichkeiten (entweder das Auto ist hinter der ersten, zweiten oder dritten Türe). Die gelb eingekreiste Türe ist o.B.d.A. die erste Wahl des Kandidaten bzw. der Kandidatin. Wenn man nun die einzelnen Möglichkeiten betrachtet, gilt:



Bei der 1.) Möglichkeit kann der Moderator zwischen der zweiten und dritten Türe wählen. Ein Wechsel würde eine Niederlage bedeuten.

Bei der 2.) Möglichkeit ist der Moderator gezwungen Tür 3 zu öffnen. Ein Wechsel würde einen Sieg bedeuten.

Bei der 3.) Möglichkeit ist der Moderator gezwungen Tür 2 zu öffnen. Ein Wechsel würde einen Sieg bedeuten.

Das bedeutet, dass der Kandidat oder die Kandidatin bei einem Wechsel in zwei von drei Fällen das Auto gewinnt. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt bei einem Wechsel daher $\frac{2}{3}$ und bei einem Nicht-Wechsel (man bleibt der ursprünglichen Wahl) $\frac{1}{3}$.

Abbildung 4.2: Ziegenproblem – Erklärung

Die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Wechsel ist somit doppelt so groß wie jene eines Nicht-Wechsels. Bei Borovcnik (2013, S. 12-16) findet man weitere Erklärungen bzw. Darstellungen (Baumdiagramm, Vierfeldertafel, usw.), die das Ziegenproblem erläutern. Diese Schwierigkeit bzw. Fehlvorstellung in verschiedenen Variationen gibt es noch bei weiteren bekannten Beispielen wie z. B. dem „Töchterparadoxon/Das Problem des anderen Kindes“ oder dem „Bertand’schen Schubladenproblem“ (siehe dazu Götz & Humenberger, 2008, S. 51-57; Hauer-Typpelt, 2007, S. 64f).

<u>Weitere Fehlvorstellungen</u>

Im Folgenden werden weitere Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten erläutert, die allerdings in der empirischen Untersuchung (siehe 2. Teil) nicht betrachtet bzw. im Fragebogen nicht untersucht werden. Dennoch macht es sich diese Arbeit zum Ziel einen kurzen Überblick über die Fülle an Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten zu geben.

4.2.5 Falsche Bedingungen

Eine Möglichkeit zu verfälschenden Aussagen mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten zu gelangen, ist wenn man falsche Bedingungen, genauer gesagt nicht relevante Bedingungen für die Berechnung verwendet. Folgend zwei Beispiele, die dies verdeutlichen sollen, dazu:

<u>Beispiel 1</u>

„Je älter desto glücklicher" lautete eine Schlagzeile in den 1970er Jahren. Begründet wurde diese dadurch, dass „Der Anteil der Selbstmörder unter allen Verstorbenen […] mit wachsendem Alter ab[nimmt]." (Bauer, Gigerenzer & Krämer, 2014, S. 152). Die Folgerung ist korrekt, denn von allen Todesfällen bei den 20-25-Jährigen stirbt ca. jede fünfte Person aufgrund von Suizid, bei den 70-75-Jährigen ca. jede neunte Person (Bauer et al., 2014, S. 152). Mit bedingten Wahrscheinlichkeiten formuliert, ergibt sich somit:

P(S[9] | 20-25 J. und sterben) = $\frac{1}{5}$ und P(S | 70-75 J. und sterben) = $\frac{1}{9}$

Die Bedingung „unter allen Verstorbenen" ist in diesem Kontext allerdings nicht relevant und somit die falsche Bedingung. Denn während bei den 70-75-Jährigen viele verschiedene Ursachen für einen Tod in Frage kommen, ist dies bei den 20-25-Jährigen nicht der Fall. Des Weiteren sterben viel mehr 70-75-Jährige als 20-25-Jährige. Aus diesem Grund sollte die Bedingung „und sterben" nicht in die Berechnung einbezogen werden. Die relevante Bedingung dagegen wäre der Anteil *aller* Mitglieder der jeweiligen Altersgruppe. Mit dieser Bedingung ergeben sich ganz andere Zahlen: Von den 20-25-Jährigen begehen 6 von 100.000 und von den 70-75-Jährigen 12 von 100.000 Suizid (Bauer et al., 2014, S. 152). Wieder mit bedingten Wahrscheinlichkeiten formuliert, ergibt sich:

P(S | 20-25 J.) = $\frac{6}{100.000}$ und P(S | 70-75 J.) = $\frac{12}{100.000}$

Untenstehende Grafik soll dies nochmals verdeutlichen (Bauer et al., 2014, S. 153):

[9] Die Abkürzung S steht für Suizid.

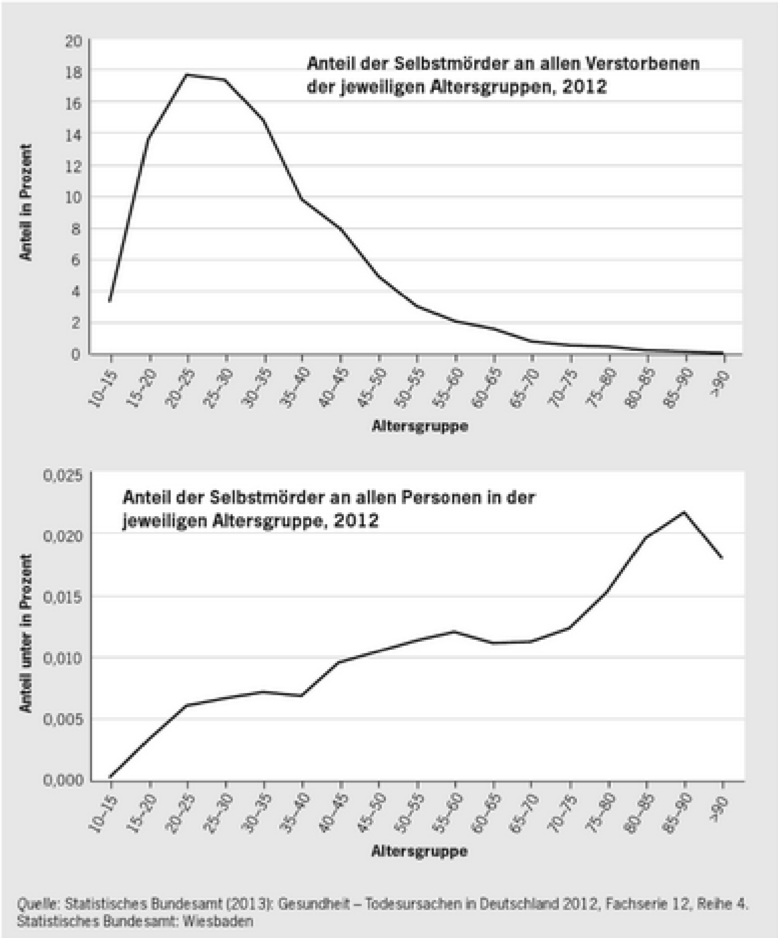


Abbildung 4.3: Anteile der Suizide

Die Abbildung verdeutlicht gut, wie sich die Suizid-Raten mit steigendem Lebensalter erhöht bzw. verringert – je nachdem, ob relevante oder nicht relevante Bedingungen für die Berechnung verwendet werden. Die Schlagzeile „Je älter desto glücklicher" kann man also nicht von den Suizid-Raten ableiten.

<u>Beispiel 2: Justiz</u>

Auch in der Justiz wurde bereits des Öfteren mit falschen bzw. nicht relevanten Bedingungen argumentiert. Diese, eigentlich irrelevanten, Argumentationen verhalfen bereits vermutlich Schuldigen einer Gefängnisstrafe zu entgehen. Ein sehr bekanntes Beispiel dafür stellt der Fall von O. J. Simpson im Jahre 1995 dar: O. J. Simpson wurde des Mordes seiner Frau angeklagt. Aus der Vergangenheit war bekannt, dass Simpson seine Frau mindestens einmal misshandelt hatte. Es hieß, dass er sehr eifersüchtig war und einen Hang zur Gewalt hatte (Bauer et al., 2014, S. 153). Seine Verteidigung argumentierte, dass bereits stattgefundene Misshandlungen und Schläge nicht als Beweis angeführt werden sollten, mit der Begründung, dass die meisten Frauen von ihren Ehemännern oder Partnern umgebracht werden unabhängig davon, ob sie zuvor von ihnen misshandelt wurden (Gigerenzer, 2015, S. 198). Denn ca. 4 Millionen Frauen werden von ihren Partnern geschlagen, allerdings werden „nur“ 1432 von ihrem Partner auch umgebracht. Die meisten Gewalttaten würden somit nicht mit einem Mord enden (Dershowitz, 1996, zitiert nach Gigerenzer, 2015, S. 199). Die Verteidigung folgerte daraus, dass man einen Mord nicht von einer stattgefundenen Misshandlung ableiten könne: In lediglich ca. 1 von 2500 Fällen ermordet ein Mann seine Frau, wenn er sie zuvor geschlagen hat (1432 : 4 Millionen = ca. 1 : 2500) (Gigerenzer, 2015, S. 199). Es ergibt sich folgende bedingte Wahrscheinlichkeit (Bauer et al., 2014, S. 153f): P(ermorden | schlagen) = $\frac{1}{2500}$ (= 1 : 2500). Die sehr geringe Wahrscheinlichkeit, die im Prozess angeführt wurde, hat vermutlich dazu beigetragen, dass O. J. Simpson freigesprochen wurde. Nach dem Prozess argumentierte Good (1995, S. 541) gegen die Folgerungen und Argumente der Verteidigung, denn die Wahrscheinlichkeit, dass der Partner die Frau umbringt, wenn er sie zuvor geschlagen hat, ist nicht relevant für diesen Fall. Denn man *weiß bereits*, dass die Frau umgebracht wurde. Daraus folgert er, dass die Frau geschlagen *und* ermordet wurde, die relevante Bedingung ist. Die gesuchte und relevante Wahrscheinlichkeit ist somit jene, dass der Partner der Mörder sei, wenn dieser die Frau zuvor misshandelt hat und die Frau ermordet wurde. Die Wahrscheinlichkeit (bei der tatsächlich gesuchten Wahrscheinlichkeit) ist eine ganz andere: Denn in 40 von 45 Fällen ist der Partner auch der Mörder. Die hier entscheidende bedingte Wahrscheinlichkeit ist somit (Bauer et al., 2014, S. 154; Gigerenzer 2015, S. 200-202): P(Partner = Mörder | schlagen und Frau wurde ermordet) = $\frac{8}{9}$ (40:45 = 8:9), was ca. 89 % entspricht. Bei dieser berechneten Wahrscheinlichkeit wirkt O. J. Simpson auf den ersten Blick nicht mehr ganz so unschuldig, wie bei jener, die die Verteidigung vornahm.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sowohl in dem ersten als auch in dem zweiten hier angeführten Beispiel Schlussfolgerungen getroffen wurden, die für den Sachverhalt eigentlich nicht relevant waren. Beim ersten Beispiel wurde die Bedingung „und sterben“ ungerechtfertigt hinzugenommen und beim zweiten Beispiel wurde die Bedingung „und ermorden“ nicht beachtet.

4.2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit wird mit konjungierter Wahrscheinlichkeit verwechselt

Ebenfalls ein häufiger Fehler ist, dass bedingte und konjungierte miteinander Wahrscheinlichkeiten verwechselt werden (Bea & Scholz, 1995, S. 299). Also, dass P(A|B) mit P(A∩B) verwechselt wird. Zur Erinnerung: P(A∩B) bezieht sich auf ein „und“-Ereignis, also, dass A *und* B eintreten. In Kapitel „3.3 Formel und Folgerungen der bedingten Wahrscheinlichkeit“ wird die Formel unter der „Multiplikationsregel“ angeführt. Das

Auftauchen dieses Fehlers bestätigt eine Untersuchung von Gigerenzer und Hoffrage (1995, S. 694f), dort haben einige Versuchspersonen die beiden Wahrscheinlichkeiten für die Berechnung einer Aufgabenstellung miteinander verwechselt – also statt der Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ wurde die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ für die Berechnung herangezogen. Die Autoren merken an, dass die konjungierte Wahrscheinlich $P(A \cap B)$ nur zum gleichen Ergebnis wie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ führen würde, wenn $P(B)$ gleich 1 wäre. Da $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ bzw. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ gilt. In dem Versuchsbeispiel war dies ($P(B) = 1$) allerdings nicht der Fall.

Hauer-Typpelt (2007, S. 63) verweist darauf, dass die Gleichsetzung von bedingter mit konjungierter Wahrscheinlichkeit bei dem Arbeiten mit Baumdiagrammen vorkommen kann.

4.2.7 Wahrscheinlichkeiten werden fälschlicherweise zu 1 ergänzt

In der Schule kann es passieren, dass Schüler*innen Wahrscheinlichkeiten fälschlicherweise zu 1 ergänzen. Hauer-Typpelt (2007, S. 62) nennt hier ein Beispiel aus ihrer eigenen Praxiserfahrung. Eine Schülerin sagte: „Wenn ich nicht krank bin, bekomme ich mit 10%-iger Wahrscheinlichkeit einen positiven Test. Das heißt doch, dass ich bei einem positiven Test zu 90% krank bin.“ (Hauer-Typpelt, 2007, S. 62). Aus dieser Aussage kann man schließen, dass womöglich folgende (falsche) Annahme getätigt wurde: P(positiver Test | ¬ K) + P(K[10] | positiver Test) = 1, die Wahrscheinlichkeit also fälschlicherweise zu 1 ergänzt wurde. Es gilt lediglich folgende Schlussfolgerung: Wenn eine Person gesund ist und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 einen positiven Test bekommt, dann bekommt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 einen negativen Test. Man beachte hier den Unterschied. Es gilt P(positiver Test | ¬ K) + P(¬ positiver Test | ¬ K) = 1

<u>Justiz</u>

Nicht nur in der Schule, sondern auch in der Justiz wird mit Wahrscheinlichkeiten, insbesondere mit bedingten Wahrscheinlichkeiten gearbeitet. Wie sich in folgendem Beispiel zeigen wird, kann die genannte Fehlvorstellung fatale Folgen für Einzelpersonen haben:

Folgendes hat sich im Jahre 1973 im Wuppertal in Deutschland ereignet: Ein Ehepaar ging im Wald spazieren als ein Fremder auftauchte und drei Mal auf den Gatten mit einer Waffe schoss. Der Fremde wollte die Frau vergewaltigen, diese wehrte sich und völlig unerwartet stand der

[10] K steht für „krank“, ¬ K steht für „nicht krank“

angeschossene Gatte auf, um ihr zu helfen. Daraufhin schoss der Fremde zwei Mal in den Kopf der Frau und floh. Die Frau starb, der Gatte überlebte den Überfall. Ein paar Tage später entdeckte ein Förster ein Auto (dieses war 20 km vom Tatort entfernt) eines 25-jährigen Schornsteinfegers, der seine Wochenenden öfter in diesem Wald verbrachte. Der Gatte meinte zunächst ihn auf einem Foto erkennen zu können, war sich bei einer späteren Gegenüberstellung allerdings nicht mehr sicher. Der Gatte verdächtigte auch eine andere Person, diese kam jedoch nicht als Täter in Frage. Daraufhin wurde der Schornsteinfeger, als einziger Verdächtiger, angeklagt. Dieser bestritt die Tat verübt zu haben (Gigerenzer, 2015, S. 215f; Rheinischer Merkur, 1974, S. 89).

Für das Gerichtsverfahren wurden zwei Gutachter herangezogen, beide berechneten eine sehr hohe Wahrscheinlichkeit (ca. 97 und 99 %), dass der angeklagte Schornsteinfeger der Täter sei (Schrage, 1980, S. 88-91). Auf eine Überlegung (von einem der beiden Gutachter) soll im Folgenden näher eingegangen werden (siehe dazu auch Hauer-Typpelt, 2007, S. 62f; Schrage, 1980, S. 90-91):

„K“ bezeichne das Ereignis bzw. die Hypothese, dass der vermeintliche Täter Kontakt mit dem Mordopfer hatte. Der Kontakt würde einer Täterschaft gleichen.

„A“ bezeichne das Ereignis, dass die Blutspuren, die an der Kleidung des Schornsteinfegers gefunden wurden, mit jener Blutgruppe des Opfers übereinstimmen.

„B“ bezeichne das Ereignis, dass die Blutspuren, die unter den Fingernägeln des Opfers, mit jener Blutgruppe des Schornsteinfegers übereinstimmen.

Daraus ergibt sich aufgrund der Verteilung der Blutgruppen in der Bevölkerung unter der Annahme, dass es keinen Kontakt ($\neg K$) zwischen Angeklagten und Opfer gab, folgende Wahrscheinlichkeiten: $P(A \mid \neg K) = 0{,}1569$ – das entspricht 15,69 % und $P(B \mid \neg K) = 0{,}1727$ – das entspricht 17,27 %

Es ergibt sich nun folgende Wahrscheinlichkeit, wobei das Ereignis C das Zusammentreffen der Ereignisse A und B darstellt (Die beiden Ereignisse A und B können als unabhängig angenommen werden): $P(C \mid \neg K) = P(A \cap B \mid \neg K) = P(A \mid \neg K) \cdot P(B \mid \neg K) = 0{,}027$ – das entspricht 2,7 %

Der Gutachter wusste nun, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Ereignisse A und B zusammen auftreten, unter der Annahme, dass Täter und Mordopfer keinen Kontakt hatten bei 2,7 % lag. Nun folgerte er, wenn die beiden Ereignisse A und B zusammen auftreten und der

Täter und das Mordopfer *Kontakt hatten*, dann liegt dafür die Wahrscheinlichkeit bei 97,3 % (100 - 2,7). In dieser Schlussfolgerung liegt die Fehlvorstellung: Es gilt nämlich nicht(!) $P(C \mid \neg K) + P(K \mid C) = 1$ (Schrage, 1980, S. 90). Die falsche Beziehung wurde als Argumentationsbasis von dem Gutachter verwendet (Hauer-Typpelt, 2007, S. 62f). Die Berechnungen des Gutachters wurden verworfen, als Beweise, dass der Angeklagte, zum Tatzeitpunkt angehalten wurde (100 km vom Tatort entfernt) auftauchten (Gigerenzer, 2015, S. 217).

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten kann man sich in Zahlen ausgedrückt wie folgt vorstellen: Wenn man davon ausgeht, dass 100.000 Männer im Wuppertaler Wald das Verbrechen begehen hätten können, dann müsste man bei dem Täter die beiden Übereinstimmungen (Ereignis A und Ereignis B) finden (Fehler durch Probenvertauschungen oder dergleichen, welche durch das Labor verursacht werden könnten, werden außer Acht gelassen). Dann bleiben nun 99.999 Männer über, bei denen 2,7 % (Berechnung von vorhin) die beiden Übereinstimmungen zeigen. In Zahlen ausgedrückt wären das ca. 2.700 Männer. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, aufgrund der beiden Überstimmungen, dass der Beklagte auch der Mörder sei, nicht 97,3 % (Fehlvorstellung) wie der damalige Gutachter annahm, sondern einer von 2.700, das entspricht wiederum ca. 0,1 % ($\frac{1}{2700}$) (Gigerenzer, 1998, S. 23). Es ist bemerkenswert, dass eine falsche Annahme zu solchen Unterschieden bei Vorhersagen führen kann. Denn eine Wahrscheinlichkeit von 97,3 % und 0,1 % der Mörder zu sein, also ziemlich sicher und ziemlich unsicher der Mörder zu sein, sind ganz andere Zahlen bzw. lassen ganz andere Folgerungen zu. Auch in diesem Beispiel zeigt sich, wie wichtig ein Verständnis bedingter Wahrscheinlichkeiten ist.

Anm.: Die Annahme, dass 100.000 Männer die Tat begangen haben könnten, dient der besseren Veranschaulichung. Diese Annahme muss je nach Beweislage geändert werden. Dennoch können durch Vergrößerungen (z. B. alle Männer aus Europa) bzw. Verkleinerungen der Bezugsmenge obere und untere Grenzen für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Verdacht zu dem Beklagten bestätigt werden könnte, schlussgefolgert werden (Gigerenzer, 2015, S. 217).

Wie sich in obigem Beispiel zeigte, können statistische Argumentationen zu falschen Schlüssen in gerichtlichen Verfahren führen. Das ist nicht das einzige Beispiel, bei dem statistische Daten (siehe oben O. J. Simpson, Sally Clark) falsch interpretiert wurden. Aus diesem Grund plädiert Tribe (1971, S. 1393) dafür, dass die Verwendung von Statistik in Gerichtsverfahren ausgeschlossen werden sollte. Die Gefahr, dass diese manipuliert, falsch interpretiert oder schwer zu verstehen ist, ist seiner Meinung nach zu groß. Gigerenzer (2015, S. 218f) argumentiert, dass beispielsweise DNA-Evidenz, wenn entscheidende Zusammenhänge richtig interpretiert und verstanden werden, zur Gerechtigkeit beitragen können. Er fordert, dass sich Jus-Studierende bereits während der Ausbildung mit Fallbeispielen, bei denen falsch argumentiert wurde, auseinandersetzen. Um das Verständnis zu fördern, sollten Rollenspiele, bei denen sie in der Rolle des Verteidigers als auch in der Rolle des Anklägers sind, durchspielen. Ihden (2017) beschreibt wie eine solche Uni-Lehrveranstaltung aussehen kann. Als Lernziel nennt sie u. a. die „Fähigkeit des kritischen Hinterfragens statistischer Kennzahlen/Gutachten in Gerichtsurteilen“ (Ihden, 2017, S. 189). Weiters merkt Gigerenzer (2015, S. 218f) an, dass es wichtig wäre, dass die Gerichte festlegen, in welcher Form statistische Daten während eines Prozesses präsentiert werden. Er empfiehlt mit natürlichen Häufigkeiten zu arbeiten (siehe vorheriges Beispiel; mehr dazu im folgenden Kapitel „5.1 Häufigkeitskonzept).

5. Lösungsansätze/ Mögliche Umsetzungsformen in der Schule

5.1 Häufigkeitskonzept

Im Kapitel „4.2 Exemplarische Fehlvorstellungen“ wurden u. a. typische Beispielfragen, die Fehlvorstellung verdeutlichen sollen bzw. mit denen diese untersucht wurden, angeführt (z. B. das Taxiproblem). Diese Beispielfragen sind meist mit relativen Häufigkeiten dargestellt worden. Im vorherigen Kapitel „4.2.7 Wahrscheinlichkeiten werden fälschlicherweise zu 1 ergänzt“ wurden natürliche Häufigkeiten bereits angeschnitten. Im folgenden Kapitel soll auf diese näher eingegangen werden:

Natürliche Häufigkeiten vs. relative Häufigkeiten

Wassner (2004, S. 21) beobachtet, dass Unsicherheiten im Allgemeinen meist mit Hilfe von relativen Häufigkeiten mitgeteilt werden. Gigerenzer (1998, S. 12) weist darauf hin, dass das eine relativ neue Entwicklung ist: Erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurden relative Häufigkeiten (also Wahrscheinlichkeiten oder Prozentzahlen) verwendet, um Unsicherheiten in der Alltagssprache zu kommunizieren (in westlichen Ländern). So werden beispielsweise Wetterprognosen in Form von relativen Häufigkeiten, also in Prozentzahlen berichtet (Gigerenzer, 2015, S. 76), wie z. B. „die Regenwahrscheinlichkeit für Samstag liegt bei 90 %“. Bevor diese Mathematisierung von Unsicherheiten mit relativen Häufigkeiten stattgefunden hat (Hacking, 1975, S: 11-17; Wassner, 2004, S. 21), haben sich Menschen auf natürliche Häufigkeiten bezogen (Gigerenzer, 1998, S. 12). Natürliche Häufigkeiten[11] werden anders als bei relativen Häufigkeiten nicht in Prozentzahlen angegeben, sondern in Form von Anteilen wie beispielsweise „7 von 77 Frauen mit positiven Testergebnis haben tatsächlich Brustkrebs“. Solche Prognosen werden ausgehend von den gemachten Erfahrungen abgegeben (Gigerenzer, 2015, S. 74f). Wassner schreibt in diesem Zusammenhang von einem „[…] simple[n] Zählvorgang […]“ (Wassner, 2004, S. 22) von bestimmten Merkmalen, wodurch dann natürliche Häufigkeiten entstehen. Folgend ein Beispiel (mit unterschiedlichen Formulierungen), welches den Unterschied zwischen relativen und natürlichen Häufigkeiten verdeutlichen soll:

Brustkrebs-Mammografie Beispiel und Studienergebnisse

Hoffrage und Gigerenzer (1998, S. 539) haben mit 48 Ärzten, die durchschnittlich 14 Jahre Berufserfahrung aufweisen konnten, eine Untersuchung durchgeführt. Die Stichprobe wurde in zwei Gruppen geteilt, eine bekam eine Aufgabenstellung, die mit relativen Häufigkeiten dargestellt wurde, die andere bekam dieselbe nur mit natürlichen Häufigkeiten formuliert. Die Aufgabe haben die beiden von Eddy (1982, S. 251-253) übernommen und abgewandelt.

Folgend die beiden Aufgaben im Vergleich (Gigerenzer & Hoffrage, 1995, S. 688).

Formulierung mit relativen Häufigkeiten	Formulierung mit natürlichen Häufigkeiten
“The probability of breast cancer is 1 % for a woman at age forty who participates in routine screening. If a woman has breast cancer, the probability is 80 % that she will get a positive mammography. If a woman does not have breast cancer, the probability is 9.6 % that she will also get a positive mammography. A woman in this age group had a positive mammography in a routine screening. What is the probability that she	“10 out of every 1,000 women at age forty who participate in routine screening have breast cancer. 8 of every 10 women with breast cancer will get a positive mammography. 95 out of every 990 women without breast cancer will also get a positive mammography. Here is a new representative sample of women at age forty who got a positive mammography in routine screening. How many of these women do you expect to

[11] Krauss, Weber, Binder & Bruckmaier (2020, S. 9) sprechen in diesem Zusammenhang auch von absoluten Häufigkeiten.

actually has breast cancer? _____ %“ (Gigerenzer & Hoffrage, 1995, S. 688).	actually have breast cancer? __ out of ___ ” (Gigerenzer & Hoffrage, 1995, S. 688).

Zur Erinnerung: Bei Eddy (1982, S. 253f) haben 95 von 100 Ärzten angegeben, dass die Wahrscheinlichkeit P(Krebs | Test positiv) zwischen 70 und 80 % liegt, tatsächlich liegt diese bei 7,8 %. Ähnliche Ergebnisse (Formulierung mit relativen Häufigkeiten) gab es bei Hoffrage und Gigerenzer (1998, S. 539), so schätzte $\frac{1}{3}$ der Personen die Wahrscheinlichkeit tatsächlich Brustkrebs zu haben auf 90 %. Der Mittelwert der Schätzungen lag bei rund 70 % und lediglich zwei der insgesamt 24 befragten Ärzte gaben die korrekte Antwort. Andere Ergebnisse gab es bei der Aufgabe, die mit den natürlichen Häufigkeiten formuliert wurde. Hier zeigte sich eine deutlich geringere Streuung der Ergebnisse: Lediglich fünf Personen entschieden sich für Wahrscheinlichkeiten über 50 %. Weiters hatte ca. die Hälfte der Befragten die korrekte Antwort gegeben (siehe dafür neben Hoffrage & Gigerenzer, 1998; auch Gigerenzer, 2015, S. 67-70).

Zusammenfassend zeigte sich ein deutlicher Unterschied in der „Erfolgsbilanz“ zwischen den beiden Gruppen, die Versuchspersonen der Gruppe mit natürlichen Häufigkeiten konnte die Aufgabe deutlich öfter lösen als jene mit relativen Häufigkeiten. Im Allgemeinen schnitt die Gruppe mit den natürlichen Häufigkeiten wesentlich besser ab als jene mit den relativen Häufigkeiten (geringere Streuung, mehr Schätzungen im Bereich der Lösung). Spätere Studien, die natürliche und relative Häufigkeiten vergleichen, kommen zu ähnlichen Ergebnissen (Binder, Krauss & Bruckmaier, 2015, S. 7f; Cosmides & Tooby, 1996, S. 53-59; McDowell & Jacobs, 2017, S. 1300). In der Praxis können solche Fehlvorstellungen fatale Folgen für betroffene Patienten haben. Sowohl Ärzte (Diagnosen verstehen, richtig vermitteln) als auch Patienten (Ergebnisse kritisch hinterfragen, rationaler Umgang) sollten mit bedingten Wahrscheinlichkeiten umgehen können bzw. ein Grundverständnis davon haben, um kein Opfer von Falsch-Diagnosen zu werden.

Als mögliche Gründe für die Unterschiede werden u. a. genannt:

1.) Evolutionsbedingte Erklärung:

Menschen können aufgrund der langsamen evolutionären Anpassung nicht bzw. eher schlecht mit numerischen Formaten wie beispielsweise „85 % aller Taxis sind blau“ umgehen (Wassner, 2004, S. 21). Dagegen haben Menschen bereits seit Urzeiten

Informationen über Risiken in Form von natürlichen Häufigkeiten erlangt, unser Verstand ist quasi daran gewohnt. Die natürlichen Häufigkeiten werden direkt aus der Beobachtung abgeleitet (Gigerenzer, 2015, S. 74f). Ein Beispiel für eine solche Beobachtung oder Erfahrung könnte sein „von 100 Taxis sind 85 blau“ (Wassner, 2004, S. 21) oder „an 15 von 31 Tagen regnet es im Mai“.

2.) Die Darstellung und die Berechnung

Die Darstellung mit natürlichen Häufigkeiten erledigt bereits einen Teil der Berechnungen und die Berechnung ist deutlich einfacher. Man muss nur zwei Zahlen, die bereits in der Angabe bei obigem Beispiel enthalten sind, beachten. Die Anzahl der Personen mit positivem Ergebnis, die krank sind und die Anzahl jener Personen mit positivem Ergebnis, die nicht krank sind. Es gibt sowohl für natürliche als auch relative Häufigkeiten Regeln/Formeln des Satzes von Bayes (Gigerenzer, 2015, S. 71):

- Für Angaben mit natürlichen Häufigkeiten gilt: P(krank| positiver Test) = $\frac{a}{a+b}$. Dabei steht „a“ für die Anzahl der Personen, die ein positives Testergebnis erhalten haben und tatsächlich krank sind, „b“ für die Anzahl der Personen, die ein positives Testergebnis erhalten haben und eigentlich nicht krank sind.
- Für Angaben mit relativen Häufigkeiten gilt: P(krank | positiver Test) = $\frac{\text{P(positiver Test | krank)} \cdot \text{P(krank)}}{\text{P(positiver Test | krank)} \cdot \text{P(krank)} + \text{P(positiver Test | } \neg \text{ krank)} \cdot \text{P(}\neg\text{ krank)}}$

Generell benötigt man bei der Berechnung mit natürlichen Häufigkeiten keine Verknüpfungsregeln für Wahrscheinlichkeiten. Genauso sind weniger Rechenoperationen durchzuführen (Wassner, 2004, S. 27).

Folgende Abbildung[12] soll den Unterschied zwischen natürlichen und relativen Häufigkeiten nochmals verdeutlichen (Gigerenzer, 2015, S. 72):

[12] Anm.: Hier beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau Brustkrebs hat 0,8 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau erkrankt ist und einen positiven Test erhält, 90 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau einen positiven Test erhält, aber nicht krank ist, 7 %.

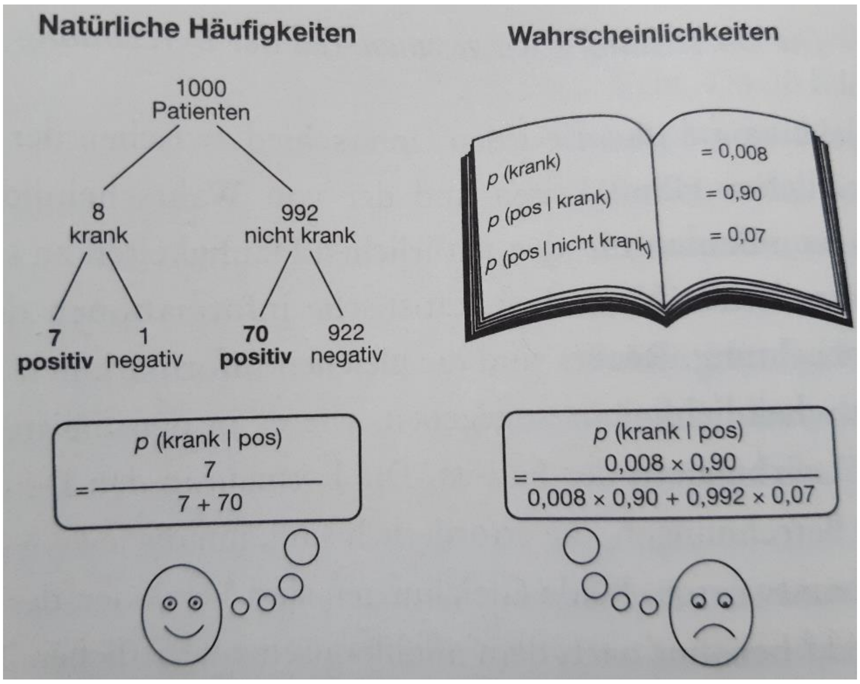


Abbildung 5.1: Berechnung mit natürlichen vs. relativen Häufigkeiten

> Weiters wird die Basisrate bei dem Abbildungsbeispiel mit natürlichen Häufigkeiten bereits in der Aufgabe mitverarbeitet: 10 von 1000 haben Brustkrebs, von diesen 10 Personen bekommen 8 ein positives Ergebnis. Die Basisrate wird durch die Formulierung *Anteil eines Anteils* in jedem Schritt mitberücksichtigt. Dadurch wird der Basisratenfehler (die Vernachlässigung der Basisrate) verhindert (Wassner, 2004, S. 22). Auch Sloman et al. (2003, S. 298f) merken an, dass die Beschreibung, *10 von 1000 und von diesen 10 bekommen 8 …*, die Teilmengen-Grundmengen-Beziehung zu erkennen, erleichtert.

Eine entscheidende Rolle in Bezug auf das Lösungsverhalten bei Aufgabenstellungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten spielt also, wie die Information repräsentiert wird (Hoffrage und Gigerenzer, 1998, S. 539f; Wassner, 2004, S. 21-24; Wassner, Martignon & Sedlmeier, 2002, S. 48). So schreibt Krauss, dass „Der Widerspruch zwischen Mathematik und Intuition […] „repariert" [werden kann], wenn man die probabilistische Information in ein natürliches Informationsformat übersetzt.“ (Krauss, 2003, S. 4).

5.2 Visualisierungen

5.2.1 Einfluss von Visualisierungen auf den Wissenserwerb

Visualisierungen in Form von grafischen Darstellungen (Rach, 2018, S. 3) bzw. Repräsentationen eines mathematischen Sachverhalts helfen bei der Verarbeitung von Informationen (Wassner, 2004, S. 24). Das gilt auch bzw. insbesondere bei stochastischen Aufgaben (Böcherer-Linder & Eichler, 2014, S. 1; Wassner, 2004, S. 24) im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten (Bea & Scholz, 1995, S. 320). Dies wurde unter anderem in einer Untersuchung von Binder et al. (2015, S. 7) bestätigt, so wurden Textaufgaben, die zusätzlich mit einer grafischen Darstellung veranschaulicht wurden, häufiger gelöst als Textaufgaben ohne grafische Darstellung. Als grafische Darstellungsmöglichkeit wurden in dieser Untersuchung das Baumdiagramm und die Vierfeldertafel verwendet. Böcherer-Linder und Eichler (2014, S. 9) schreiben, dass Visualisierungen im Allgemeinen den Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten erleichtern. Das gilt v. a. dann, wenn die Informationen mit natürlichen Häufigkeiten dargestellt werden (Binder et al., 2015, S. 7; Wassner et al., 2002, S. 48). Eine stark vereinfachte Erklärung (für den positiven Effekt von Visualisierungen) ist, dass Informationen besser behalten und wiedergegeben werden können, wenn sie über mehrere Sinneskanäle wahrgenommen werden. Laut der dualen Kodierungstheorie von Paivio werden Informationen besser verarbeitet, wenn diese sowohl visuell (hier in Form einer grafischen Darstellung) als auch verbal (hier in Form einer Textaufgabe) wahrgenommen werden (Anderson & Funke, 2007, S. 130).

Wassner (2004, S. 25) schlägt vor, dass grafische Darstellungen auf natürlichen Häufigkeiten basieren sollten. Unterstützt wird dies durch die Ergebnisse der Untersuchung von Binder et. al (2015, S. 7): Es zeigt sich, dass die Lösungshäufigkeit bei Aufgaben mit zusätzlichen grafischen Darstellungen, die die Information der Aufgabe in Form von natürlichen Häufigkeiten widerspiegelte, am größten war – rund jede zweite Versuchsperson konnte die Aufgabe lösen. Bei Visualisierungen mit relativen Häufigkeiten lag die Lösungswahrscheinlichkeit bei lediglich 6 %. Aus diesen Ergebnissen folgern Binder et al., dass Visualisierungen lediglich begrenzt in ihrer Erfolgsbilanz sind, wenn die Aufgabe mit relativen Häufigkeiten dargestellt wird.

Weiters fordert Wassner (2004, S. 25), dass es nachvollziehbar sein muss, wie diese natürlichen Häufigkeiten gebildet werden. Genauso sollte die grafische Darstellung die Mehrstufigkeit des Prozesses abbilden können, da ja bei der Beurteilung bzw. Einschätzung auch mehrere Merkmale einbezogen werden müssen. Beispielsweise beim Taxiproblem (siehe Kapitel „4.2.1

Basisratenfehler“) muss sowohl die Basisrate (wie viele grüne und blaue Taxis gibt es?) als auch die Fähigkeit des Zeugen, die Farbe richtig zu identifizieren (unter vergleichbaren Bedingungen konnte er die Farbe in 80 % der Fälle richtig identifizieren) in die Berechnung miteinbezogen werden. Weiters sollte die grafische Darstellung laut Wassner (2004, S. 25) hierarchische Beziehungen abbilden. Fischbein (1977, S. 164) fordert auch, dass die Visualisierung so gestaltet sein muss, dass sie ohne Text der Aufgabe auskommen kann. Die Visualisierung allein sollte theoretisch ausreichend sein, die statistische Information zu erfassen. Mit anderen Worten: Die Visualisierung sollte eine gewisse Autonomie besitzen.

5.2.2 Exemplarische Visualisierungsformen

Es gibt viele Möglichkeiten einer Visualisierung. Beispiele wären das Einheitsquadrat, das Baumdiagramm, das Venn-Diagramm, das Piktogramm oder die Vierfeldertafel. Folgend soll auf zwei Visualisierungsformen, die häufig in der Schule verwendet werden, näher eingegangen werden:

Baumdiagramm

- Kahn et al. (2015, S. 96-98) ordnen das Baumdiagramm als „branch style“ ein. Dabei werden „Teilmenge-Grundmenge-Beziehungen […] durch Äste dargestellt, die die logische Verknüpfung zwischen einer Teilmenge und ihrer Grundmenge repräsentieren.“ (Böcherer-Linder et. al, 2018, S. 133).
- Die Konstruktion eines Baumdiagramms erfolgt deduktiv: Von einem tatsächlichen Zustand (Ursache) werden Beobachtungen (mögliche Wirkungen) durch Äste dargestellt. Jedem Ast wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Die Konstruktion ist einfach und intuitiv (Bea & Scholz, 1995, S. 303).
- Rechenregeln wie die Multiplikationsregel kann man direkt aus dem Baumdiagramm ablesen (Bea & Scholz, 1995, S. 303; Binder et al., 2015, S. 8; Rach, 2018, S. 3f). Fischbein (1977, S. 157) schreibt, dass das „Problem“ mit Hilfe eines Baumdiagramms nicht nur dargestellt wird, sondern gleichzeitig gelöst wird.
- Wassner (2004, S. 25) ist der Meinung, dass sich das Baumdiagramm gut eignet, um mehrstufige Prozesse abzubilden. Eine mögliche Hierarchie wird sichtbar. Laut Eichler und Vogel (2010, S. 29) kann man damit den Satz von Bayes veranschaulichen und „nachentdecken“.

Einheitsquadrat

- Das Einheitsquadrat wird von Khan et al. (2015, S. 96-98) als „nested style“ eingeordnet. Die Grund- und Teilmengen (Böcherer-Linder et al., 2018, S. 133) bzw. die Wahrscheinlichkeiten (Eichler & Vogel, 2010, S. 29f) werden in Form von Flächen dargestellt. Die Flächen liegen nebeneinander, somit ist, anders als beim Baumdiagramm, keine hierarchische Struktur erkennbar (Böcherer-Linder et al., 2018, S. 133). Allerdings werden die Flächen proportional zu den Größen der dargestellten Daten aufgeteilt, das Einheitsquadrat stellt damit die Anteile der Teilmengen sowohl im numerischen als auch im geometrischen Sinn dar (Bea & Scholz, 1995, S. 306; Böcherer-Linder & Eichler, 2017, S. 3, 9).
- Weiters wird durch diese Flächenvisualisierung deutlich, welche Bereiche, in anderen enthalten sind. Es entsteht ein Bild von Mengen, die in anderen Mengen enthalten sind (Böcherer-Linder & Eichler, 2017, S. 3).
- Bei der Konstruktion werden die Hypothesen horizontal und Beobachtungen vertikal abgetragen. Rechenregeln können intuitiv abgelesen werden (Bea & Scholz, 1995, S. 306; Rach, 2018, S. 3f).

Folgend Beispiele zu den beiden Visualisierungsformen (links: Baumdiagramm, rechts: Einheitsquadrat) (Böcherer-Linder & Eichler, 2017, S. 3):

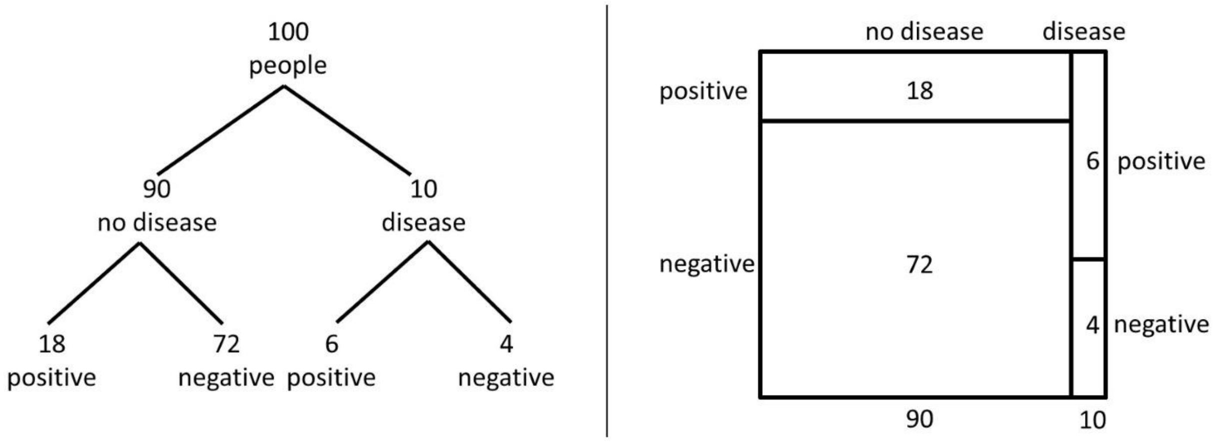


Abbildung 5.2: Baumdiagramm und Einheitsquadrat

5.2.2.3 Vergleich zwischen Baumdiagramm und Einheitsquadrat

Baumdiagramm

☺ Mit Hilfe eines Baumdiagramm wird die chronologische Reihenfolge der Informationen leichter erkennbar. Die sequenzielle Struktur ist eine Stärke des Baumdiagramms (Eichler & Vogel, 2010, S. 28f; Sedlmeier & Gigerenzer, 2001, S. 396).

☹ Das Baumdiagramm kann keine Proportionen der Informationen darstellen. Das Grundgerüst des Baumdiagramms (die Äste) bleibt immer gleich. Lediglich die Werte, die man einträgt, verändern sich (je nach Aufgabe) (Eichler & Vogel, 2010, S. 28f). Somit werden die Teilmengen nur im numerischen Sinn dargestellt, nicht aber im geometrischen (Bea & Scholz, 1995, S. 303; Böcherer-Linder & Eichler, 2017, S. 3).

Einheitsquadrat

☺ Mit Hilfe eines Einheitsquadrates können die Proportionen der Informationen anschaulich dargestellt werden. So kann man beispielsweise die Verhältnisse der einzelnen Werte darstellen und bei Variation der Werte Unterschiede in den Größen der Flächen feststellen. Das ist mit Unterstützung eines Computers schnell und einfach möglich (Eichler & Vogel, 2010, S. 29). Auch Oldford und Cherry (2006, S. 30) schreiben, dass Wahrscheinlichkeiten eben durch die gegebene Flächenproportionalität visuell begründet werden können, gleichzeitig werden dadurch auch die Wahrscheinlichkeitsregeln verdeutlicht.

Folgende Abbildung soll dies im Vergleich zum Baumdiagramm verdeutlichen (Böcherer-Linder, Eichler & Vogel, 2017, S. 31):

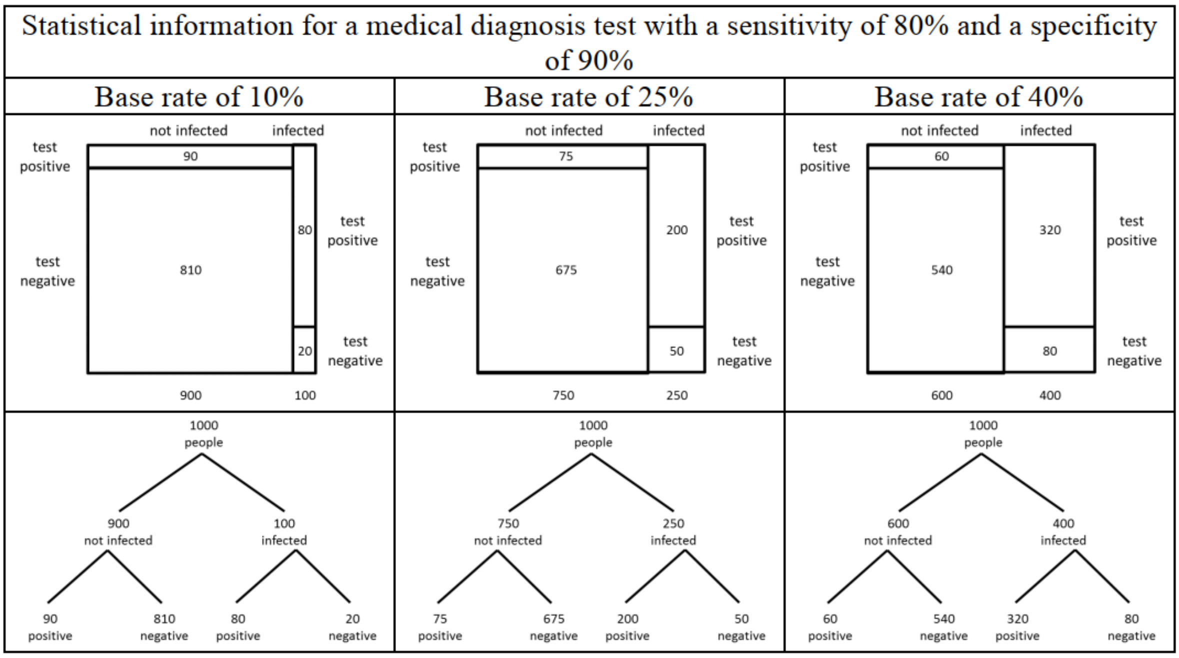


Abbildung. 5.2.1: Geometrischer Vergleich zwischen Baumdiagramm und Einheitsquadrat

☹ Das Einheitsquadrat beinhaltet keine sequenzielle Struktur.

5.2.2.4 Studienergebnisse

In einer Studie von Böcherer-Linder und Eichler (2017, S. 5, 8-10) wurden oben vorgestellte Visualisierungen miteinander verglichen. Die in der Untersuchung verwendeten Aufgaben bestanden aus einem Text und einer Visualisierung, die die statistische Information des Textes widerspiegelte. Alle Aufgaben (Text und Visualisierung) wurden mit natürlichen Häufigkeiten dargestellt. Das Ergebnis der Studie war, dass das Einheitsquadrat im Vergleich zum Baumdiagramm deutlich besser abschnitt. Als Grund dafür wird angeführt, dass das Baumdiagramm nicht immer die notwendigen Teilmengenbeziehungen darstellt, die zur Berechnung notwendig sind (Böcherer-Linder & Eichler, 2017, S. 9; Böcherer-Linder et al., 2018, S. 134). Beispielsweise ist in dem in Kapitel „5.1.1 Natürliche Häufigkeiten vs. relative Häufigkeiten“ beschriebenen Brustkrebs-Beispiel u. a. die Menge der erkrankten Personen unter allen positiv getesteten Personen gesucht. Diese Teilmenge lässt sich aber nicht direkt aus dem Baumdiagramm ablesen. Die Teilmenge entspricht somit nicht der vertikalen Hierarchie des Baumdiagramms (Böcherer-Linder et al., 2018, S. 134). Wenn die „gesuchte“ Teilmenge nicht der Hierarchie des Baumdiagramms entspricht, dann ist die Beziehung nicht grafisch hervorstechend. Umgekehrt, wenn die „gesuchte“ Teilmenge der Hierarchie des Baumdiagramms entspricht, dann ist die Beziehung grafisch hervorstechend (Böcherer-Linder

& Eichler, 2017, S. 9). Bei Aufgaben, bei denen die gesuchte Beziehung grafisch hervorsticht, war die Lösungshäufigkeit beim Baumdiagramm und beim Einheitsquadrat ähnlich gut. Es wurde kein signifikanter Unterschied festgestellt. Bei Aufgaben, bei denen die gesuchte Beziehung grafisch nicht hervorsticht, die „gesuchte“ Teilmenge also nicht direkt entlang eines Pfades ablesbar ist, war die Lösungshäufigkeit bei Aufgaben mit einem Einheitsquadrat deutlich höher als bei jenen mit einem Baumdiagramm. Denn das Einheitsquadrat bildet sowohl vertikale als auch horizontale Teilmengenbeziehungen ab, so ist beispielsweise oben bereits erwähnte Menge der erkrankten Personen unter allen positiv getesteten Personen im Einheitsquadrat erkennbar (anders als beim Baumdiagramm) (Böcherer-Linder et al., 2018, S. 134). Die Autoren Böcherer-Linder und Eichler (2017, S. 9f) sehen die Stärke des Einheitsquadrats in der grafischen Transparenz der Teilmengenbeziehungen. Die beiden kommen zu dem Schluss, dass das Einheitsquadrat eine effektive Visualisierung für den Satz von Bayes darstellt. Es kann sowohl für die Kommunikation von Unsicherheiten verwendet werden als auch für den Mathematikunterricht. Bei der Untersuchung von Bea und Scholz (1995, S. 307ff) werden u. a. das Baumdiagramm und das Einheitsquadrat miteinander verglichen. Auch hier ist das Einheitsquadrat gegenüber dem Baumdiagramm überlegen. Begründet wird dies dadurch, dass das Einheitsquadrat die relevanten Informationen des Sachverhalts besser visualisiert und die Mächtigkeit der einzelnen Wahrscheinlichkeiten geometrisch sichtbar macht. Der intuitiv zugängliche Eindruck, der dadurch entsteht, erhöht die Lösungshäufigkeit. Binder et al. (2015, S. 7f) sowie Bea und Scholl (1995, S. 320f) fordern deshalb, dass das Einheitsquadrat in der Schule, speziell bei der Erarbeitung von bedingten Wahrscheinlichkeiten, verwendet wird. Böcherer-Linder et al. plädieren ebenfalls für die Verwendung des Einheitsquadrats, denn die „[…] transparente Darstellung der Teilmengenstruktur […] begünstigt das zwar langsamere, aber regelbasierte, logische Denken und hilft, dadurch Fehlschlüsse [wie beispielsweise den Basisratenfehler] zu vermeiden […]“ (Böcherer-Linder et al., 2018, S. 136). Rach (2018, S. 11, 13) schreibt, dass beide Visualisierungsformen (Baumdiagramm mit natürlich Häufigkeiten und Einheitsquadrat) hilfreich bei der Bearbeitung von Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit sind. Von Schüler*innen-Seite jedoch das Baumdiagramm mit natürlichen Häufigkeiten gegenüber dem Einheitsquadrat bevorzugt wird. Den Ergebnissen ihrer Untersuchung entnimmt Rach, dass die Schüler*innen mit dem Einheitsquadrat gut umgehen können, es jedoch nicht als hilfreich einstufen.

5.3 Mögliche Erarbeitung in der Schule

Wie sich in den vorherigen Kapiteln gezeigt hat, ist die Darstellung einer Aufgabenstellung mit natürlichen Häufigkeiten sowie Visualisierungen wie beispielsweise dem Einheitsquadrat oder dem Baumdiagramm (jeweils Darstellung mit natürlichen Häufigkeiten) für das Verständnis von bedingten Wahrscheinlichkeiten enorm hilfreich. Im Schulunterricht sollten diese Lösungsansätze für ein besseres Verständnis verwendet und thematisiert werden. Folgend soll, unabhängig von den bisher besprochenen Lösungen, auf eine mögliche Erarbeitung in der Schule eingegangen werden:

Hinter dem sogenannten Spiralprinzip (dieses geht auf Jerome Bruner zurück) steckt die Idee, dass mathematische Inhalte oder Konzepte über Schuljahrgänge hinweg, immer wieder erneut aufgegriffen und erweitert werden. Die Erweiterung findet jedes Mal auf einem höheren Niveau statt. Gleichzeitig wird durch die regelmäßige Wiederholung der Inhalte sichergestellt, dass diese vertieft und verfestigt werden (Reiss & Hammer, 2013, S. 66). Dieser fortlaufende Lernprozess soll gewährleisten, dass die Schüler*innen angemessene Grundvorstellungen entwickeln können. Bei dem Thema Stochastik ist das leider nur bedingt möglich, beispielsweise findet der Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung erst in der 10. Schulstufe statt. Diese späte und meist kurze Beschäftigung mit (bedingten) Wahrscheinlichkeiten, führt meist zu Schwierigkeiten bei der Interpretation von z. B. Testergebnissen oder dem allgemeinen Verstehen von stochastischen Konzepten (Hauer-Typpelt, 2011, S. 75). Auch Gras und Totohasina (1995, S. 49) merken an, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung, v. a. aber der Themenbereich bedingte Wahrscheinlichkeit, bei Schüler*innen zu Verständnisproblemen führen kann. Als Ursache werden die vorhandenen primären Grundvorstellungen, die sich oftmals schwer mit sekundären Grundvorstellungen vereinbaren lassen, angeführt.

Krüger et al. (2015, S. 254) sehen eine mögliche Lösung in einer schrittweisen Erarbeitung, bei der eine langfristige Entwicklung von bedingten Wahrscheinlichkeiten möglich ist. Dies wird möglich, wenn man verschiedene Aufgabentypen, die in verschiedenen Jahrgängen behandelt werden können, miteinander verknüpft bzw. eine Beziehung zu bedingten Wahrscheinlichkeiten herstellt (Krüger et al., 2015, S. 254). Konkret handelt es sich um folgende Aufgabentypen: „Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Vorgängen, Untersuchung statistischer Daten bei mehrdimensionalen Merkmalen, Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Hypothesen nach neuen Informationen“ (Sill, 2005, S. 7).

Wie genau diese Verknüpfung von statten gehen kann, soll im Folgenden erläutert werden: Bei der *Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Vorgängen* kann man ein klassisches Urnenbeispiel ohne Zurücklegen oder ähnliches besprechen (Krüger et al., 2015, S. 255), wie zum Beispiel: In einer Urne befinden sich 8 Kugeln, davon sind 3 rot und 5 blau. Nun zieht man ohne Zurücklegen zwei Mal hintereinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Farbfolge rot-blau, blau-rot, rot-rot und blau-blau ist? (Beispiel abgewandelt von Dorfmayr, Mistlbacher, Sator & Zillner, 2018, S. 213). Bei so einem (einfachen) Einführungsbeispiel wird deutlich, dass ein „[…] zuerst eingetretenes Ereignis A eine Bedingung für das danach eintretende Ereignis B [ist].“ (Krüger et al., 2015, S. 255). Mit Hilfe eines Baumdiagramms kann man die Situation grafisch veranschaulichen, berechnet werden kann die bedingte Wahrscheinlichkeit mittels der „Pfade“. Eine genaue Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten bedarf es an dieser Stelle nicht. Solch ein Beispiel könnte bereits in der 7. oder 8. Schulstufe behandelt werden (Krüger et al., 2015, S. 255). Die Aufgabenstellung ermöglicht zwei Teilaspekte von bedingten Wahrscheinlichkeiten näher zu beleuchtet:

> „Werden bei mehrstufigen Vorgängen Baumdiagramme zur Veranschaulichung genutzt, so sind alle Wahrscheinlichkeiten an den Pfaden ab der 2. Stufe bedingte Wahrscheinlichkeiten.“ (Sill, 2005, S. 6).
>
> und
>
> „Wenn zwei Ereignisse A und B […] zeitlich nacheinander eintreten […] so kann das zuerst eingetretene Ereignis A eine Bedingung für das Eintreten des zweiten Ereignisses B sein. Die bedingte Wahrscheinlichkeit […] [ist] die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B, unter der Voraussetzung, dass A eingetreten ist (bzw. unter der Bedingung A). Man spricht auch von der durch A bedingten Wahrscheinlichkeit von B.“ (Sill, 2005, S. 6).

Anschließend kann man zur *Untersuchung statistischer Daten bei mehrdimensionalen Merkmalen* übergehen. Daten, wie beispielsweise wie viele Mädchen und Buben aus der Klasse gerne zeichnen bzw. nicht gerne zeichnen, können für eine solche Untersuchung herangezogen werden. An dieser Stelle kann der Unterschied zum vorherigen Aufgabentyp in Bezug auf die Sprechweise thematisiert werden. Hier wäre eine Beschreibung wie „dass jemand gerne zeichnet, unter der Bedingung, dass er ein Bub ist, beträgt …“ eher ungeeignet (Krüger et al., 2015, S. 255f). Die Formulierung sollte sich direkt auf das Beispiel beziehen wie „Für einen zufällig ausgewählten Jungen beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er gerne […] [zeichnet], 5/13." (Krüger et al., 2015, S. 256). Auch bei diesem Aufgabentyp (der zum Beispiel in der 9. Schulstufe durchgemacht werden könnte) kann ein Teilaspekt von bedingten Wahrscheinlichkeiten thematisiert werden:

> „Werden Verhältnisse bzw. Anteile in Datenmengen als Wahrscheinlichkeiten interpretiert, so können bedingte Wahrscheinlichkeiten als Verhältnisse bzw. Anteile in bestimmten Teilmengen der Daten aufgefasst werden. Die Daten können in Form absoluter oder relativer Häufigkeiten vorliegen." (Sill, 2005, S. 6).

In Bezug auf geeignete Formulierungen merkt Bender (1997, S. 24) an, dass auch Fragestellungen einen logischen Sinn ergeben sollten. So sollte beispielsweise eine Formulierung wie „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zuerst gezogene Karte ein Ass ist, unter der Bedingung, daß die zweite Karte dann ein Bube ist?" (Bender, 1997, S. 24) vermieden werden, denn die Formulierung „[…] [impliziert] eine Umkehrung des natürlichen Zeitablaufs […]" (Bender, 1997, S. 24). Eine besser gewählte Formulierung der Aufgabenstellung würde lauten „Jemand zieht nacheinander zwei Karten von einem verdeckten Skatkartenstapel, schaut sie sich an und teilt mir mit, daß die zweite Karte ein Bube ist. Wie groß ist dann, d.h. mit diesem Wissen, die Wahrscheinlichkeit, daß die zuerst gezogene Karte ein Ass ist?" (Bender, 1997, S. 24).

Der Aufgabentyp *Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Hypothesen nach neuen Informationen* stellt die Hauptanwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit dar (Sill, 2005, S. 9). So finden sich in vielen Schulbüchern (10. Schuljahrgang) Aufgaben, die zu diesem Aufgabentyp zählen meist in dem Kapitel „bedingte Wahrscheinlichkeit" oder dem „Satz von Bayes" (vgl. dazu z. B. Dorfmayr et al., 2018, S. 212-215). Gerade bei diesem Aufgabentyp treten vermehrt Fehlvorstellungen auf, wie beispielsweise in den Kapiteln „4.2.1 Basisratenfehler" und „4.2.2 Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis" deutlich wurde. Schüler*innen haben „[…] bereits inhaltliche Vorstellungen zum Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit ausgebildet […]" (Krüger et al., 2015, S. 254), Krüger et al. empfehlen deswegen, die Verknüpfung zu den ersten beiden vorgestellten Aufgabentypen deutlich zu machen.

Dieser Aufgabentyp ermöglicht die Thematisierung des folgenden Teilaspekts:

> „Wenn das Ereignis B eine Hypothese ist (als Ergebnis eines Denkprozesses) und das Ereignis A eine Information zu dem Sachverhalt darstellt, zu dem die Hypothese formuliert wurde, so ist […] [P(B|A)] die neue Wahrscheinlichkeit der Hypothese B nach Kenntnis der Information A, die auch als Indiz […] bezeichnet wird." (Sill, 2005, S. 6).

Auch Hauer-Typpelt (2007, S. 54f) empfiehlt (ähnlich wie Krüger et al., 2015) in der Schule anfangs auf eine genaue Begriffsbeschreibung zu verzichten, um die Schüler*innen nicht bereits zu Beginn der Thematik zu überfordern. Stattdessen sollte die Thematik mit Beispielen eingeführt und veranschaulicht werden. Besonders eignen sich, ihrer Meinung nach, dafür anwendungsorientierte Beispiele, wie medizinische Tests. Durch die Behandlung solcher Beispiele soll ein grundlegendes Verständnis des Begriffs ausgebildet werden. Sobald die Schüler*innen dieses haben, kann eine Begriffsbildung stattfinden (Hauer-Typpelt, 2007, S. 54f).

Wie bereits in Kapitel „3.1 Bezeichnung der „bedingte Wahrscheinlichkeit" und deren Problematik" erwähnt, kritisiert Bandt (1995, S. 225) die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit wie sie in Schulbüchern zu finden ist, er erachtet auch die Beschreibung mit dem Begriff „[…] „bedingt" […] für unzweckmäßig" (Bandt, 1995, S. 225). Er plädiert dafür die Wahrscheinlichkeit P(A|B) als Anteil von A, bezogen auf die Gesamtmenge von B zu betrachten. Damit sollte laut ihm jede*r Schüler*in umgehen können, die Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit hingegen muss laut Bandt (1995, S. 225f) nicht jede Person können. Mit dieser Herangehensweise könnte man folgenden Teilaspekt von bedingten Wahrscheinlichkeiten „abdecken":

> „Werden Verhältnisse bzw. Anteile in Datenmengen als Wahrscheinlichkeiten interpretiert, so können bedingte Wahrscheinlichkeiten als Verhältnisse bzw. Anteile in bestimmten Teilmengen der Daten aufgefasst werden." (Sill, 2005, S. 6).

Damit Schüler*innen bei der Einführung bedingter Wahrscheinlichkeiten nicht überfordert sind, empfiehlt es sich Verknüpfungen zu anderen, bereits bekannten Inhalten herzustellen.

Durch die Verknüpfung können mehrere Teilaspekte bedingter Wahrscheinlichkeiten thematisiert werden, wodurch ein tieferes Begriffsverständnis ermöglicht werden kann. Weiters empfiehlt es sich in Hinblick auf die Ergebnisse in Kapitel „5.1 Häufigkeitskonzept“ und „5.2 Einfluss von Visualisierungen auf den Wissenserwerb“ auch mit natürlichen Häufigkeiten zu arbeiten (und den Verständnisunterschied zu relativen Häufigkeiten zu thematisieren) sowie grafische Hilfsdarstellungen zu verwenden.

Empirischer Teil

6. Forschungsfragen und Hypothesen

6.1 Forschungsfragen

Allgemein:

- Gibt es Fehlvorstellungen[13,14] im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeit bei Studierenden? Wenn ja, welche?

Speziell:

- Gibt es Unterschiede bei der Häufigkeit von Fehlvorstellungen bei Studierenden mit mathematischem und ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium, inwieweit unterscheidet sich diese?
- Inwiefern ändert sich die Tendenz zu Fehlschlüssen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten nach Absolvierung von Stochastik-Kursen des Mathematikstudiums (Lehramt mit UF Mathematik)?
- Inwiefern ändert sich die Häufigkeit des Basisratenfehlers und der Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis, wenn die Aufgabenstellung mit absoluten Häufigkeiten statt mit relativen Häufigkeiten dargestellt wird?
- Inwiefern ändert sich die Häufigkeit des Basisratenfehlers und der Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis, wenn die Aufgabenstellung zusätzlich mit einem Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten veranschaulicht wird im Vergleich zu einer Aufgabenstellung, die nur mit absoluten Häufigkeiten dargestellt wird?

[13] Insgesamt sollen drei Fehlvorstellungen untersucht werden: der Basisratenfehler/die Verwechslung von bedingendem und bedingtem Ereignis, die Zeitgebundenheit des Denkens (Verwechslung von Konditionalität und Kausalität) und die Schwierigkeit, das bedingte Ereignis exakt zu definieren. Anm.: Die ersten beiden Fehlvorstellungen können bei den Beispielen nicht strikt getrennt werden und werden deswegen gemeinsam betrachtet.

[14] Hier und auch folgend ist mit „Fehlvorstellung“ die „typische Fehlvorstellung“ gemeint, also die typische falsche Antwortmöglichkeit, welche in der Literatur beschrieben wird und von dort übernommen wurde.

6. 2 Forschungshypothesen

Zu den Forschungsfragen wurden die folgenden Hypothesen aufgestellt:

Allgemein:

1.) Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Speziell:

2.) Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.
3.) Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige Antworten) als jene, die keine Kurse absolvierten.
4.) Wird die Aufgabenstellung mit absoluten Häufigkeiten dargestellt, treten der Basisratenfehler und die Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis seltener auf als bei relativen Häufigkeiten.
5.) Wird die Aufgabenstellung zusätzlich mit einem Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten veranschaulicht, treten der Basisratenfehler und die Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis seltener auf als bei absoluten Häufigkeiten.

7. Methode und Durchführung

Messinstrument

Mit Hilfe eines Online-Fragebogens sollen die Forschungshypothesen beantwortet werden. Der Fragebogen richtete sich an Studierende als Befragungsgruppe. Zunächst wurden demographische Daten wie Alter und Geschlecht auf freiwilliger Basis (Versuchspersonen konnten diese Fragen auch überspringen) erfragt. Dann wurden Fragen zum Studienschwerpunkt, genauer gesagt ob das Studium einen oder keinen mathematischen Schwerpunkt habe, gestellt. Bei Auswahl eines mathematischen Schwerpunkts wurden weitere Daten zum Studium und zur Absolvierung von Stochastik-Kursen (Lehramt mit Unterrichtsfach Mathematik) ermittelt. Ziel dieser ersten Befragung war, die Studierenden in Gruppen einordnen zu können, um dann die Ergebnisse der Fragebögen miteinander vergleichen zu können. So wurden beispielsweise bei der Auswertung für Hypothese 1, 4 und 5 die Ergebnisse aller Versuchsteilnehmer herangezogen, bei Hypothese 2 wurden nur die Ergebnisse von Studierenden mit mathematischem und ohne mathematischen Schwerpunkt verglichen und bei

Hypothese 3 wurden nur Ergebnisse von Lehramtsstudierenden mit UF Mathematik herangezogen.

Anschließend wurden 5 Aufgaben gestellt. Dabei spiegelt die Aufgabe 1 die Fehlvorstellung „die Zeitgebundenheit des Denkens“, Aufgabe 2 die „Schwierigkeit, das bedingende Ereignis exakt zu definieren“ und Aufgabe 3 - 5 den „Basisratenfehler“ und die „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ (in unterschiedlichen Darstellungsformen) wider. Am Ende des Fragebogens hatten die Versuchspersonen die Möglichkeit die Lösungen sowie eine kurze Erklärung aller Aufgaben einzusehen.

Auswertungsinstrument

Die Daten wurden mit Hilfe des Statistikprogramms IBM SPSS Statistics, Version 26 analysiert und ausgewertet. Prozentwerte werden gerundet angegeben.

Stichprobe

Den Online-Fragebogen haben 243 Studierende vollständig (bis zur letzten Aufgabe) ausgefüllt. Abgebrochene Fragebögen werden in die Auswertung nicht miteinbezogen.

<u>Geschlecht:</u>

Von den 243 Studierenden waren 131 weiblich und 109 männlich, 3 Personen haben diese (freiwillige) Frage nicht beantwortet.

<u>Alter:</u>

Es gaben 15 Personen (6,2 %) an jünger als 20 Jahre alt zu sein, 151 Personen (62,1 %) waren zwischen 20 und 25 Jahre alt, 38 Personen (15,6 %) zwischen 26 und 30 Jahre alt und 39 Personen (16 %) gaben an, älter als 30 Jahre alt zu sein.

Der Großteil der befragten Studierenden war somit zwischen 20 und 25 Jahren alt.

<u>Mathematischer Schwerpunkt im Studium:</u>

Weiters gaben 178 Personen (73,3 %) an, dass ihr Studium einen mathematischen Schwerpunkt hat/te. 65 Personen (26,7 %) haben/hatten keinen mathematischen Schwerpunkt in ihrem Studium.

Von den 178 Personen, die angaben, dass ihr Studium einen mathematischen Schwerpunkt hat/te, …

… studieren 83 Personen derzeit im Bachelor-Lehramtsstudium Mathematik.
… haben 9 Personen das Bachelor-Lehramtsstudium Mathematik bereits abgeschlossen.

… studieren 16 Personen derzeit im Master-Lehramtsstudium Mathematik.

… haben 2 Personen bereits das Master-Lehramtsstudium Mathematik abgeschlossen.

… studieren 4 Personen derzeit das Diplomstudium mit UF Mathematik.

… haben 2 Personen bereits das Diplomstudium mit UF Mathematik abgeschlossen.

… gaben 69 Personen an, etwas anderes als Mathematik auf Lehramt zu studieren.

Anm.: Bei den 16 Personen, die sich derzeit im Master-Lehramtsstudium Mathematik befinden, haben 5 Personen angeben, dass sie das Bachelor-Lehramtsstudium bereits abgeschlossen haben. Die restlichen 11 Personen haben weder angeben, dass sie derzeit im Bachelor-Lehramtsstudium sind, noch, dass sie es abgeschlossen haben. Es ist nicht möglich zu sagen, ob diese 11 Personen die Antwortmöglichkeiten überlesen haben, oder Quereinsteiger sind. Weiters haben 2 Personen, die angaben derzeit das Diplomstudium mit UF Mathematik zu studieren, auch angegeben, dass sie das Bachelor-Lehramtsstudium Mathematik bereits abgeschlossen haben.

Kurse im Studium

Von den 109 Personen, die angaben ein Lehramtsstudium mit Mathematik zu studieren, haben bereits …

… 38 Personen die VO Schulmathematik Stochastik absolviert.

… 49 Personen die UE Schulmathematik Stochastik absolviert.

…52 Personen die VO Stochastik für das Lehramt absolviert.

… 68 Personen die UE Stochastik für das Lehramt absolviert.

… 44 Personen keinen dieser Kurse absolviert.

Von den 109 Personen haben …

… 32 Personen alle oben genannten Kurse absolviert.

… 44 keinen dieser Kurse absolviert.

… 33 einen, zwei oder drei Kurse absolviert.

8. Ergebnisse

Aufgabe 1

Die erste Aufgabe am Fragebogen lautete: In einer Urne befinden sich zwei schwarze und zwei weiße Kugeln. Es wird zweimal, ohne Zurücklegen gezogen.

1.) Wie groß ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel weiß ist, wenn die erste Kugel weiß war?
2.) Die erste Kugel wird gezogen, deren Farbe bleibt unbekannt. Die zweite Kugel ist weiß. Wie groß ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel weiß war?

Als Antwort am Fragebogen konnte man entweder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ wählen.

Die richtige Antwort ist bei beiden Fragen $\frac{1}{3}$. Bei der ersten Aufgabe sollten die meisten Personen keine Probleme haben, denn der Zeitfaktor stimmt mit der richtigen Interpretation der Bedingungen überein (siehe Theorieteil: Fischbein & Schnarch, 1997, S. 102). Die Antwortmöglichkeit $\frac{1}{2}$ bei der zweiten Aufgabe repräsentiert die typische Antwort, welche der Fehlvorstellung „Die Zeitgebundenheit des Denkens" zugeordnet wird.

1. Hypothese

Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Wie in untenstehenden Abbildungen ersichtlich, haben insgesamt 185 von 243 Personen (76,1 %) die erste Aufgabe korrekt gelöst. Die zweite Aufgabe haben 99 von 243 Personen (40,7 %) korrekt gelöst. Die Erfolgshäufigkeit war deutlich geringer als bei der ersten Aufgabe. Zudem fällt auf, dass einige Personen, genauer gesagt 87 Personen (35,8 %) sich für die Antwortmöglichkeit $\frac{1}{2}$ entschieden haben. Genau diese Antwort, also die Überlegung, dass die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beträgt, stellt die typische Fehlvorstellung („Zeitgebundenheit des Denkens") dar. Es zeigt sich, dass die meisten Personen die Aufgabe korrekt lösen konnten, allerdings sind fast genauso viele Personen der typischen Fehlvorstellung unterlegen. Folgend Kreisdiagramme, die die Antworthäufigkeiten nochmals veranschaulichen sollen:

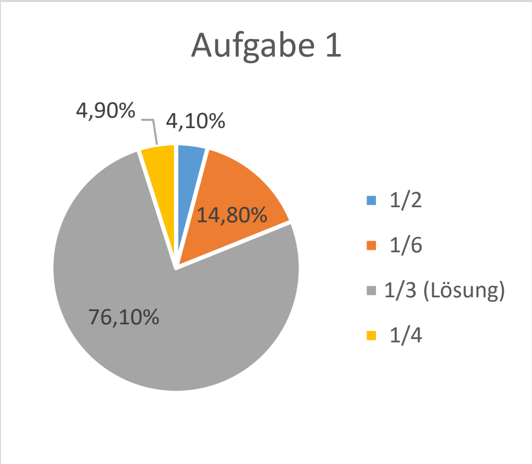


Abbildung 8.1.1: Aufgabe 1

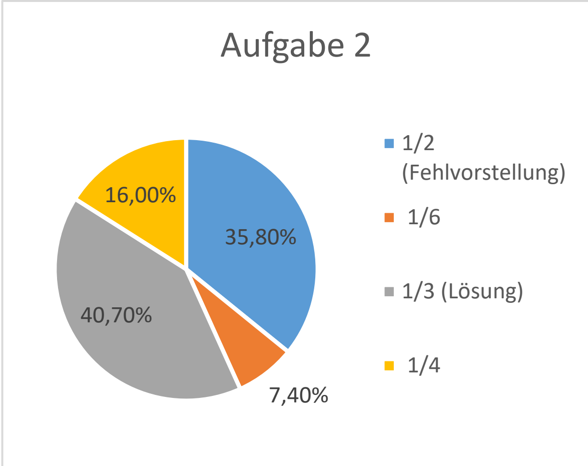


Abbildung 8.1.2: Aufgabe 2

Weiters zeigte sich, dass …

… 86 Personen (35,39 %) beide Aufgaben korrekt lösten.

… 99 Personen (40,74 %) die erste Aufgabe korrekt und die zweite Aufgabe nicht korrekt lösten (Fehlvorstellung).

… 45 Personen (18,52 %) keine der beiden Aufgaben korrekt lösen konnten.

… 13 Personen (5,35 %) die erste Aufgabe nicht korrekt, dafür die zweite Aufgabe korrekt lösten.

Die Anteile der richtigen Antworten und jener, die die typische Fehlvorstellung widerspiegeln, sind relativ ausgeglichen. Dennoch ist die Fehlvorstellung bei Studierenden vorhanden. Aus diesem Grund wird die Hypothese „*Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.*“ in Bezug auf die „Zeitgebundenheit des Denkens bestätigt“.

2. Hypothese

Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.

Die erste Aufgabe bereitete beiden Gruppen (Personen mit und ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium) keine Probleme, mehr als 70 % beider Gruppen konnte die Aufgabe korrekt lösen. Es gibt keinen signifikanten Unterschied bezüglich des korrekten Lösens bei den beiden Gruppen.

Die zweite Aufgabe konnte von etwas weniger als der Hälfte (45 %) der Personen mit mathematischem Schwerpunkt und von etwas weniger als einem Drittel (29,2 %) der Personen ohne mathematischen Schwerpunkt korrekt gelöst werden. Es gibt einen signifikanten Unterschied bezüglich des korrekten Lösens bei den beiden Gruppen (Chi²-Test, $p < 0{,}05$):

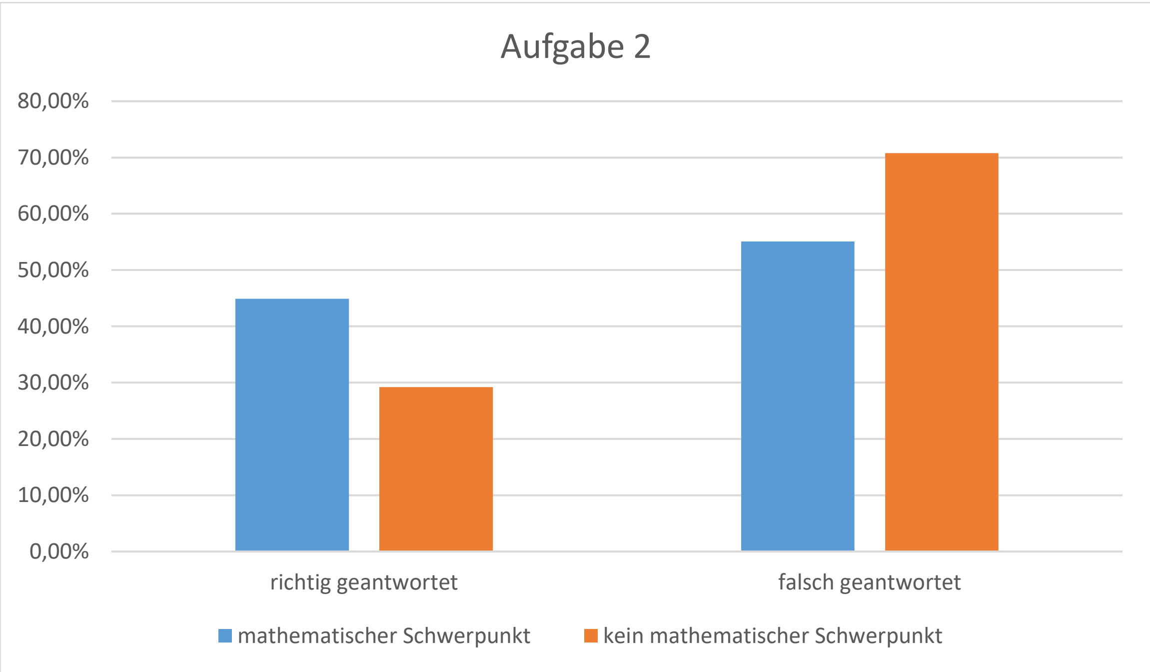


Abbildung 8.1.3: Aufgabe 2

37,1 % der Personen mit mathematischem Schwerpunkt und 32,3 % der Personen ohne mathematischen Schwerpunkt sind der Fehlvorstellung unterlegen und haben die Antwortmöglichkeit $\frac{1}{2}$ gewählt. Es gibt keinen signifikanten Unterschied bezüglich der Auftrittshäufigkeit der Fehlvorstellung „Die Zeitgebundenheit des Denkens“, was der Antwortmöglichkeit $\frac{1}{2}$ entspricht, bei den beiden Gruppen:

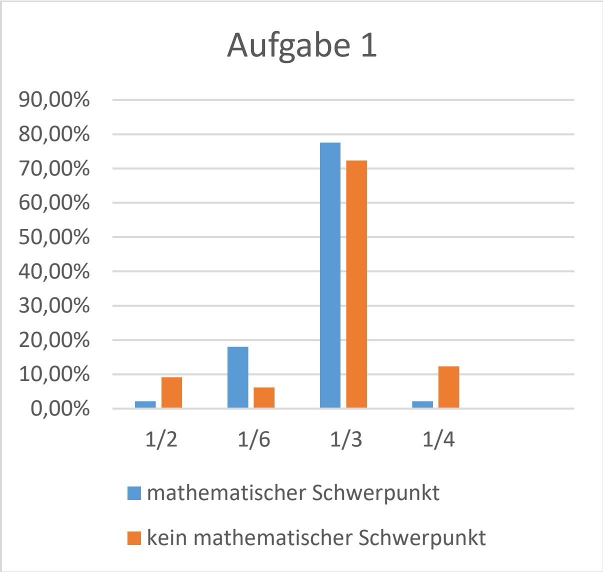


Abbildung 8.1.4: Aufgabe 1

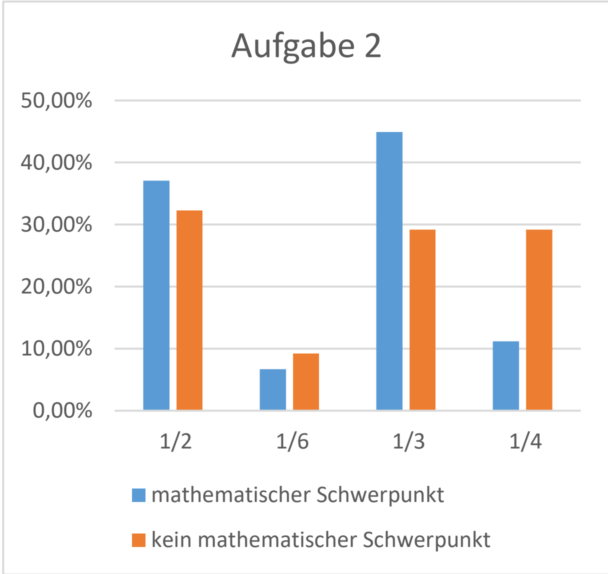


Abbildung 8.1.5: Aufgabe 2

Es zeigt sich, dass ein mathematischer Schwerpunkt im Studium keinen signifikanten Unterschied macht, ob man der Fehlvorstellung „Die Zeitgebundenheit des Denkens“ unterliegt. Die Hypothese „*Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.“* wird daher verworfen. Anzumerken ist, dass es einen signifikanten Unterschied zwischen Studierenden mit mathematischem und ohne mathematischen Schwerpunkt bezüglich des korrekten Lösens gibt. So haben Studierende mit mathematischem Schwerpunkt die Aufgabe häufiger korrekt lösen können, als jene ohne mathematischen Schwerpunkt.

3. Hypothese

Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige) als jene die keine Kurse absolviert haben.

<u>Aufgabe 1</u>

Bei Aufgabe 1 gibt es keine signifikanten Unterschiede bezüglich des korrekten Lösens der Aufgabe. So haben Personen, die alle, keinen oder einen bis drei Kurse absolviert haben, eine Erfolgsbilanz von 65 - 73 %.

Aufgabe 2

Bei Aufgabe 2 gibt es einen signifikanten Unterschied bezüglich des korrekten Lösens der Aufgabe zwischen Personen, die alle Kurse und jenen die keine Kurse absolviert haben (Chi²-Test, $p < 0{,}05$). Bei Personen, die alle Kurse abgeschlossen haben, ist die Anzahl richtiger und falscher Antworten relativ ausgeglichen, etwas mehr als die Hälfte konnte die Aufgabe richtig lösen. Bei Personen, die keine Kurse abgeschlossen haben, überwiegt der Anteil falsch beantworteter Fragen (72,7 %):

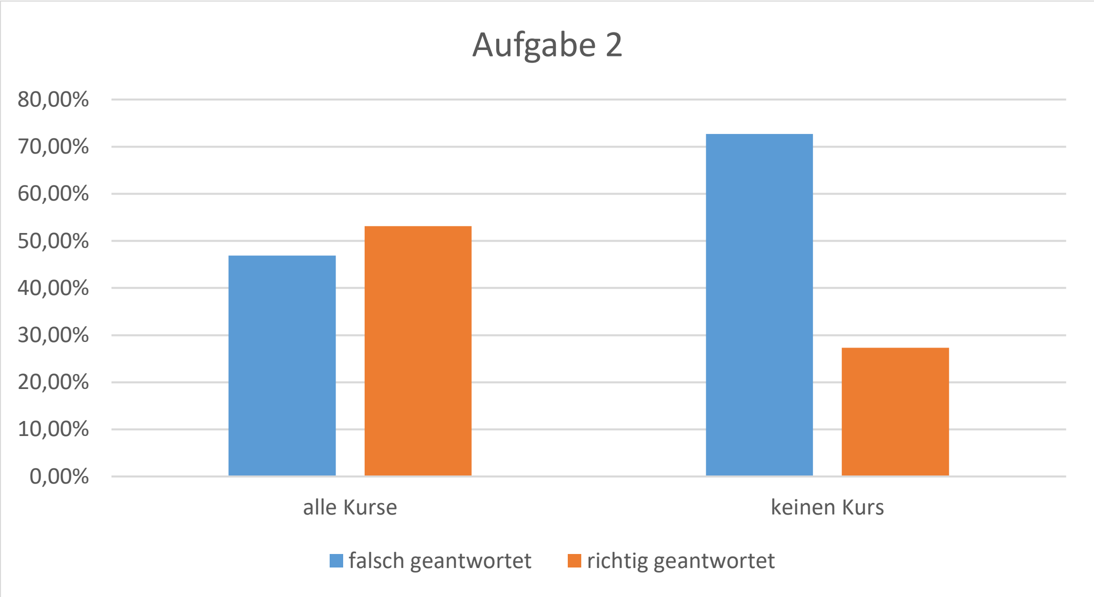


Abbildung 8.1.6: Aufgabe 2

Weiters gibt es einen signifikanten Unterschied bezüglich der Fehlvorstellung bei Personen, die keinen und ein bis drei Kurse absolviert haben (Chi²-Test, $p < 0{,}05$). Die Mehrheit jener Personen ohne Kurse sind der Fehlvorstellung unterlegen:

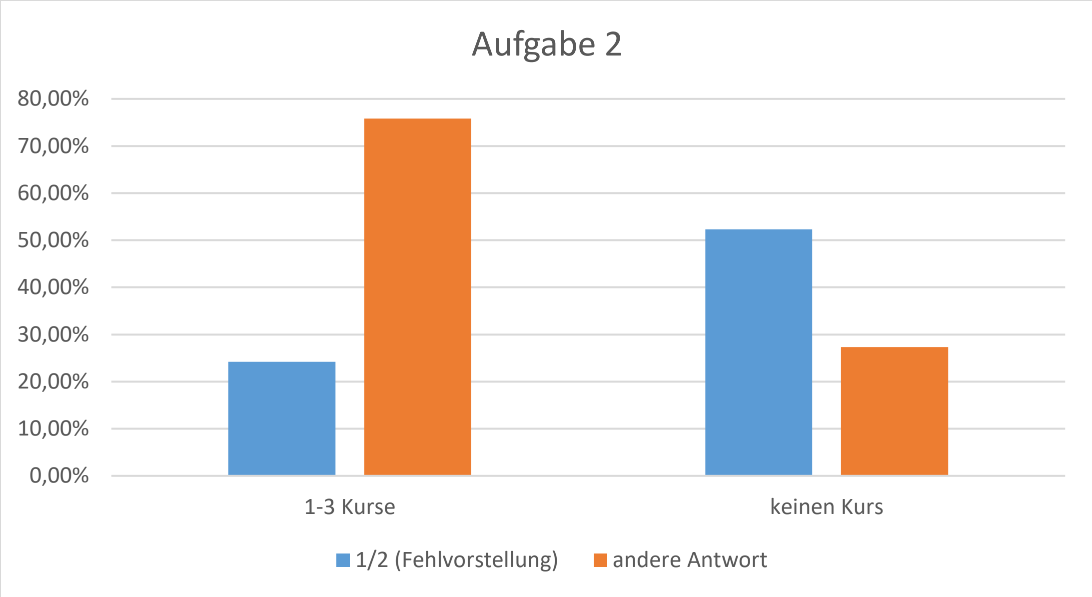


Abbildung 8.1.7: Aufgabe 2

Die Hypothese „*Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige) als jene die keine Kurse absolviert haben.“* kann somit bestätigt werden.

Aufgabe 2

Die zweite Aufgabe am Fragebogen lautete: In einem Hut befinden sich drei Karten. Davon ist eine auf beiden Seiten rot (RR), eine auf beiden Seiten weiß (WW) und eine ist auf einer Seite rot, auf der anderen Seite weiß (RW). Nun wird eine Karte gezogen und auf den Tisch gelegt, die zu sehende Seite ist rot.

Wie groß ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Seite ebenfalls rot ist?

Als Antwort am Fragebogen konnte man entweder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ wählen. Die richtige Antwort lautet $\frac{2}{3}$. Die Antwortmöglichkeit $\frac{1}{2}$ repräsentiert die typische Fehlvorstellung „Schwierigkeit, das bedingende Ereignis exakt zu definieren“.

1. Hypothese

Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Insgesamt haben sich 110 von 243 der Studierenden (45,3 %) für die Antwortmöglichkeit $\frac{1}{2}$ entschieden. Genau diese Antwort, also die Überlegung, dass die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beträgt, stellt die typische Fehlvorstellung („Schwierigkeiten, das bedingende Ereignis zu definieren“) dar. Weiters haben sich 66 von 243 Personen (27,2 %) für die korrekte Antwort entschieden:

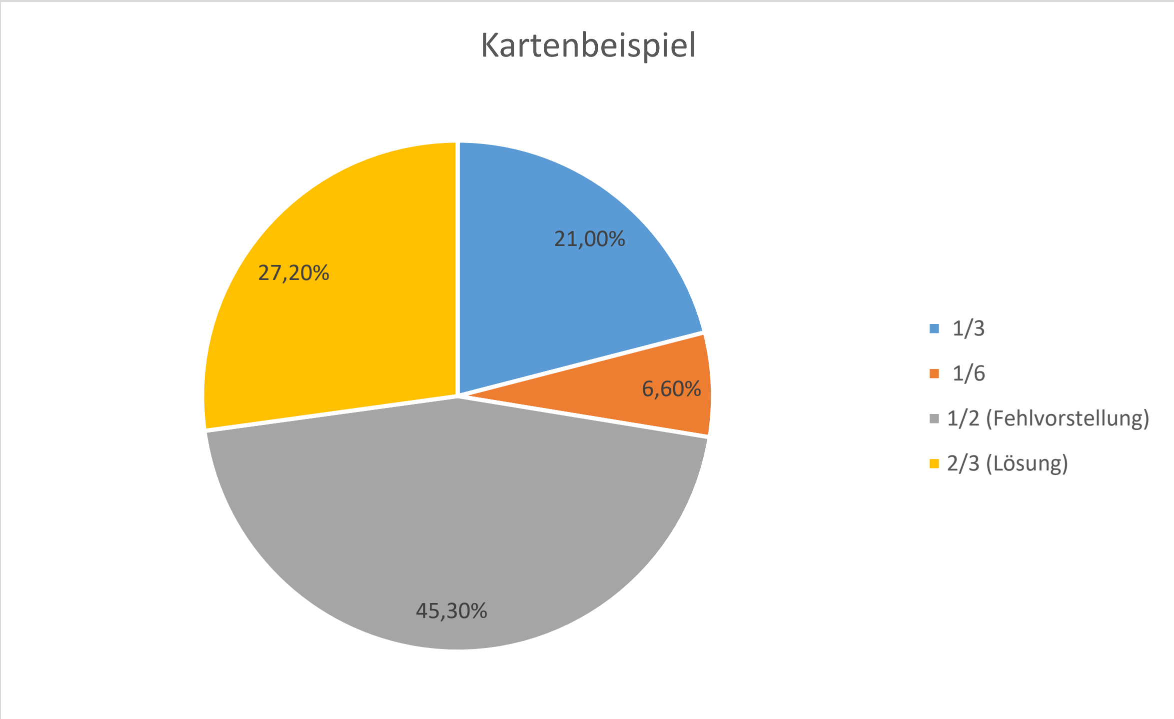


Abbildung 8.2.1: Kartenbeispiel

Da fast die Hälfte aller Studierenden der Fehlvorstellung unterlegen ist, wird die Hypothese „*Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.*“ in Bezug auf „Schwierigkeiten, das bedingende Ereignis exakt zu definieren“, bestätigt.

2. Hypothese

Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.

Fast die Hälfte der Studierenden (48,9 %) mit mathematischem Schwerpunkt entschied sich für die Antwortmöglichkeit $\frac{1}{2}$ und unterlag somit der typischen Fehlvorstellung, die in der Literatur angegeben wird. Dagegen entschieden sich lediglich 35,4 % der Personen ohne mathematischen Schwerpunkt für die Antwort $\frac{1}{2}$. Obwohl der Fehlvorstellung um 13,5 % mehr Personen mit mathematischem als ohne mathematischen Schwerpunkt unterlegen sind, gab es keine signifikanten Unterschiede (lediglich $p < 0{,}61$, Chi²-Test) bezüglich der Auftrittshäufigkeit der Fehlvorstellung.

Folgende Grafik zeigt das allgemeine Antwortverhalten der Versuchspersonen:

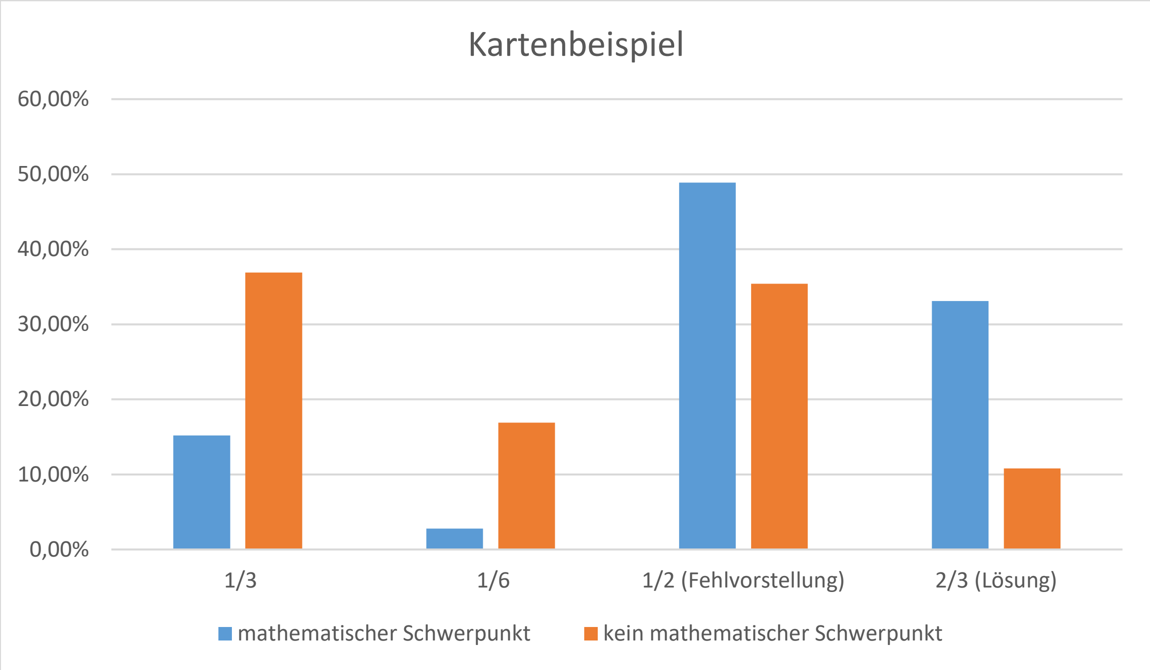


Abbildung 8.2.2: Kartenbeispiel

Einen hochsignifikanten Unterschied gab es bezüglich des korrekten Lösens bei den beiden Gruppen (Chi²-Test, $p < 0{,}01$). Knappe 11 % der Personen ohne und ca. 33 % mit mathematischem Schwerpunkt konnten die Aufgabe korrekt lösen:

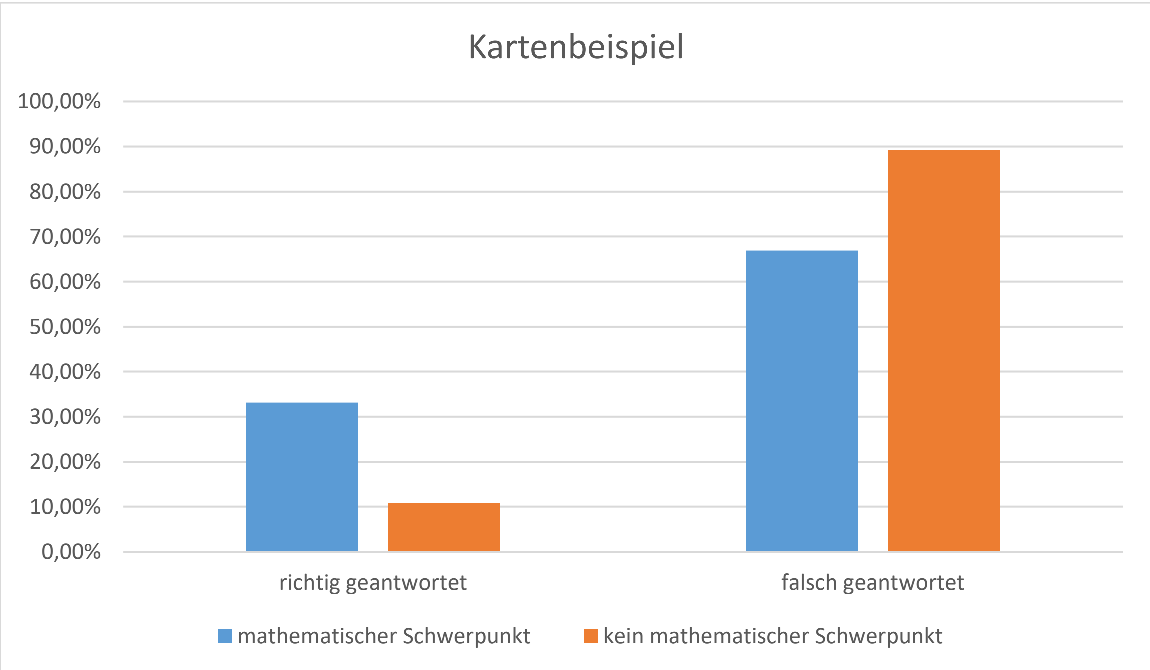


Abbildung 8.2.3: Kartenbeispiel

Es zeigt sich, dass ein mathematischer Schwerpunkt im Studium keinen signifikanten Unterschied macht, ob man der Fehlvorstellung „Schwierigkeiten, dass bedingende Ereignis exakt zu definieren“ unterliegt. Die Hypothese „*Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.“* wird daher verworfen. Anzumerken ist, dass es einen signifikanten Unterschied zwischen Studierenden mit und ohne mathematischen Schwerpunkt bezüglich des korrekten Lösens gibt. So haben Studierende mit mathematischem Schwerpunkt die Aufgabe häufiger korrekt lösen können als jene ohne solchen Schwerpunkt.

3. Hypothese

Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige Antworten) als jene, die keine Kurse absolvierten.

Es gibt keine signifikanten Unterschiede bei Personen, die alle und ein bis drei Kurse absolviert haben in Bezug auf die Erfolgsbilanz sowie auf die Auftrittshäufigkeit von der typischen Fehlvorstellung.

Es gibt einen hoch signifikanten Unterschied bezüglich des korrekten Lösens der Aufgabe sowohl zwischen Personen, die alle Kurse und jenen die keine Kurse absolviert haben, sowie zwischen Personen, die ein bis drei Kurse und jenen die keine Kurse absolviert haben (Chi^2-Test, $p < 0,01$). Bei Personen, die alle Kurse und ein bis drei Kurse abgeschlossen haben, ist die Anzahl richtiger und falscher Antworten relativ (ca. 40 zu 60 %) ausgeglichen. Bei Personen, die keine Kurse abgeschlossen haben, überwiegt deutlich der Anteil falsch beantworteter Fragen (86,4 %):

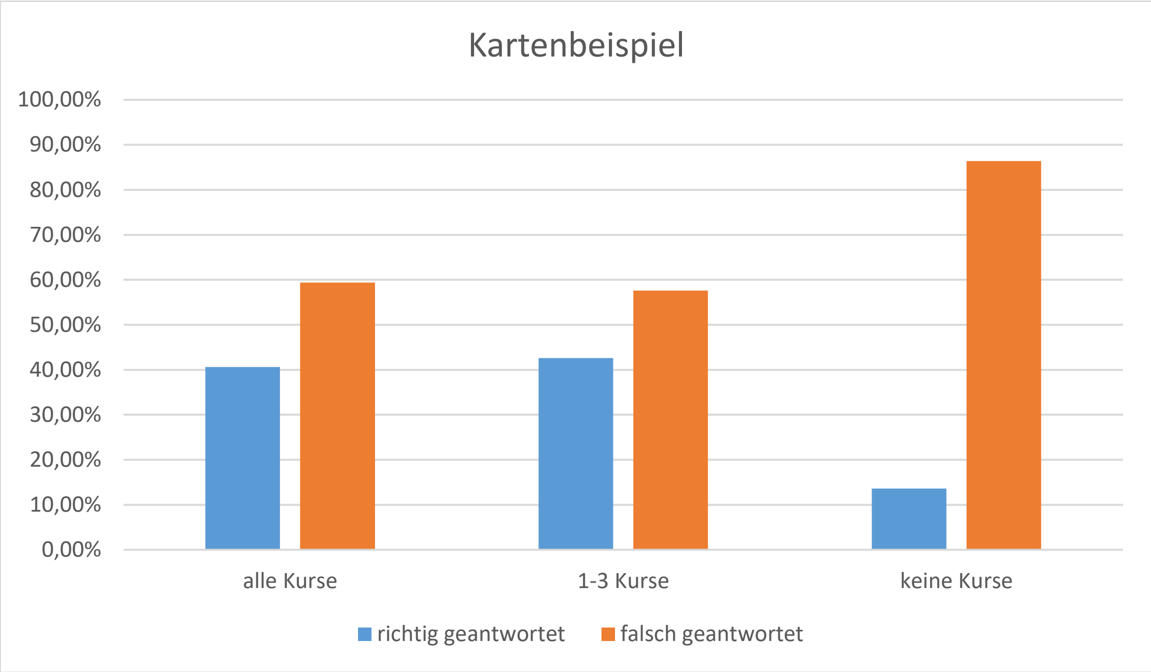


Abbildung 8.2.4: Kartenbeispiel

Weiters gibt es einen signifikanten Unterschied zwischen Personen, die ein bis drei und keine Kurse absolviert haben bezüglich der Auftrittshäufigkeit der typischen Fehlvorstellung. Die Fehlvorstellung trat fast doppelt so häufig bei Personen ohne Kurse (61,4 %) auf als bei Personen mit ein bis drei Kursen (33,3 %):

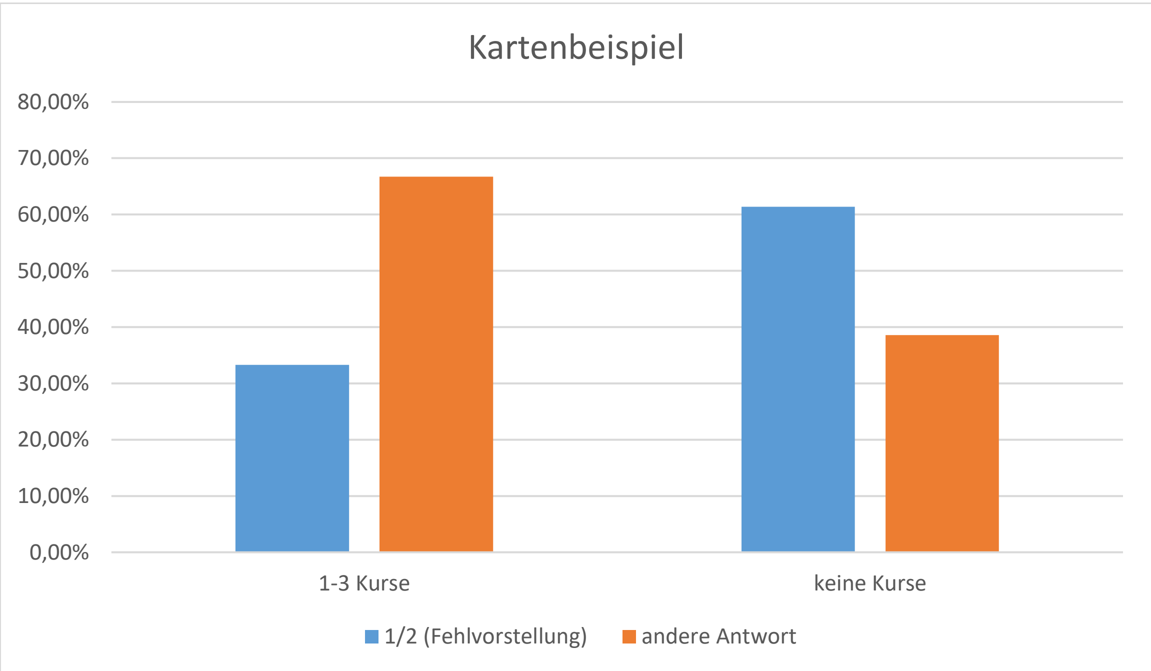


Abbildung 8.2.5: Kartenbeispiel

Die Hypothese „*Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige) als jene die keine Kurse absolviert haben.“* kann somit bestätigt werden.

Aufgabe 3

Die dritte Aufgabe am Fragebogen lautete: In einer Stadt mit 1 Million Einwohnern leben 100 Bankräuber und 999.900 Nicht-Bankräuber. In einem Versuch, die Bankräuber zu schnappen, installiert die Stadt ein Alarmsystem mit einer Überwachungskamera und einer automatischen Gesichtserkennungssoftware. Von den 100 Bankräubern werden 99 Personen von der Kamera richtig erkannt. Von den 999.900 Nicht-Bankräubern werden 9999 Personen fälschlicherweise als Bankräuber erkannt.

Angenommen das System schlägt bei einer zufällig ausgewählten Person dieser Stadt Alarm, die Kamera hat diese Person als Bankräuber „identifiziert“.

Kreuzen Sie Zutreffendes bitte an:

- In 99 von 100 Fällen ist die „identifizierte“ Person ein Bankräuber.
- In 99 von 9990 Fällen ist die „identifiziere“ Person ein Bankräuber.
- In 99 von 9999 Fällen ist die „identifiziere“ Person ein Bankräuber.
- In 99 von 10098 Fällen ist die „identifizierte“ Person ein Bankräuber.

Die richtige Antwort lautet „In 99 von 10098 Fällen ist die „identifizierte“ Person ein Bankräuber.“. Die Antwort „In 99 von 100 Fällen ist die „identifizierte“ Person ein Bankräuber.“ repräsentiert die Fehlvorstellung „Basisratenfehler“ und „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“.

1. Hypothese

Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Wie in untenstehender Abbildung ersichtlich, konnte die Mehrheit der Studierenden (141 von 243 Personen, das entspricht 58 %) die Aufgabe korrekt lösen. Weitere 45 von 243 Personen (18,5 %) sind der Fehlvorstellung unterlegen:

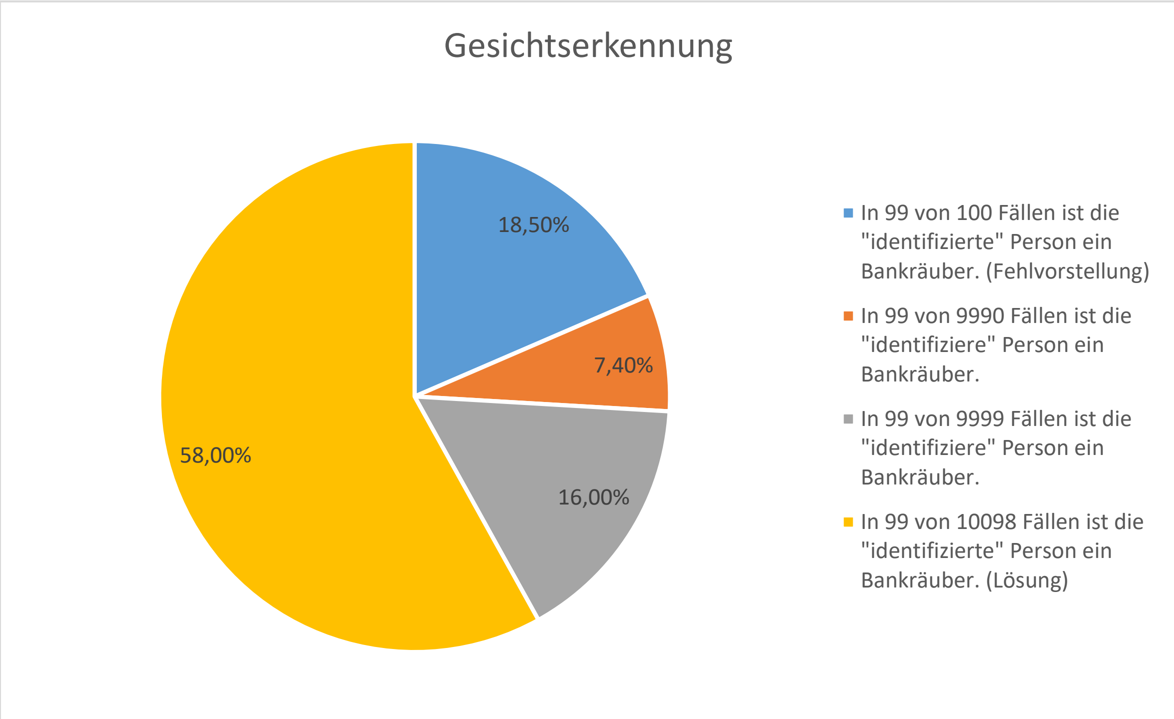


Abbildung 8.3.1: Gesichtserkennung

Die Mehrheit der Studierenden entschied sich für die richtige Lösung. Die Hypothese „*Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.*“ wird in Bezug auf den „Basisratenfehler“ und die „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ bei einer Aufgabenformulierung mit natürlichen Häufigkeiten durch die Ergebnisse des Fragebogens verworfen.

2. Hypothese

Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.

Einen hoch signifikanten Unterschied gab es bezüglich des korrekten Lösens bei den beiden Gruppen (Chi²-Test, $p < 0{,}01$). Wie in untenstehender Grafik ersichtlich, konnten deutlich mehr

Personen mit mathematischem Schwerpunkt (67,4 %) als ohne mathematischen Schwerpunkt (32,3 %) die Aufgabe richtig lösen:

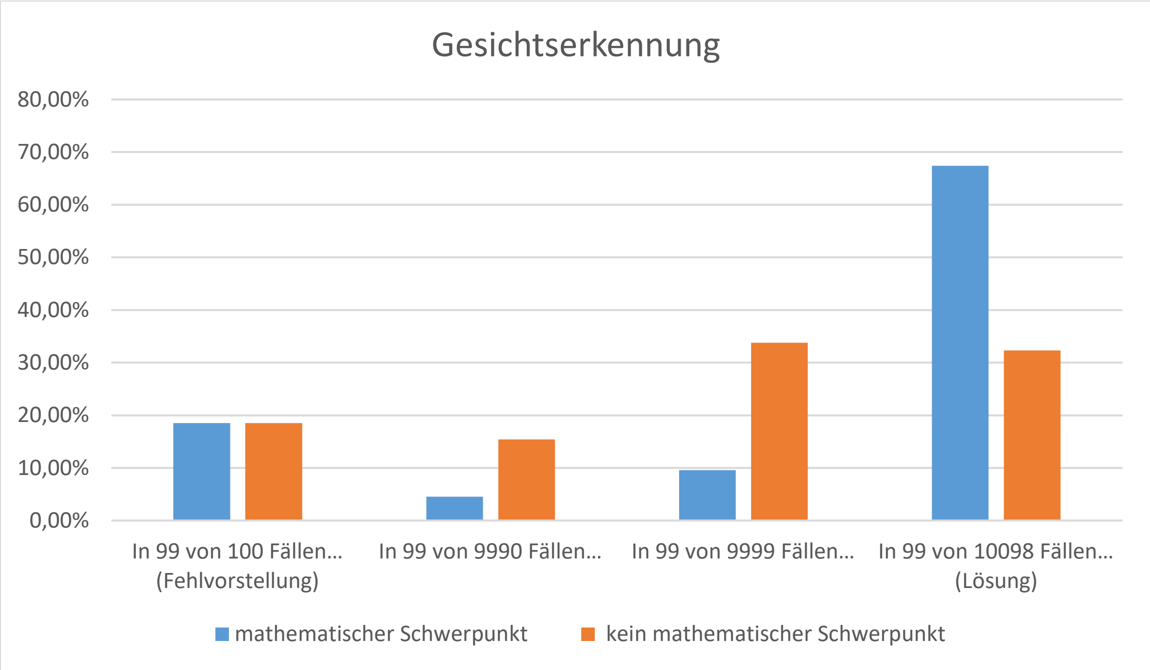


Abbildung 8.3.2: Gesichtserkennung

Es gab keine signifikanten Unterschiede in Bezug auf die Auftrittshäufigkeit der Fehlvorstellung bei Studierenden mit und ohne mathematischen Schwerpunkt.

Es zeigt sich, dass ein mathematischer Schwerpunkt im Studium keinen signifikanten Unterschied macht, ob man den Fehlvorstellungen „Basisratenfehler“ und „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ unterliegt, wenn die Aufgabenstellung in natürlichen Häufigkeiten formuliert wird. Die Hypothese *„Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.“* wird daher verworfen. Anzumerken ist, dass es einen hoch signifikanten Unterschied zwischen Studierenden mit mathematischem und ohne mathematischen Schwerpunkt bezüglich des korrekten Lösens gibt. So haben Studierende mit mathematischem Schwerpunkt die Aufgabe deutlich häufiger korrekt lösen können als jene ohne diesen Schwerpunkt.

3. Hypothese

Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige Antworten) als jene, die keine Kurse absolvierten.

Es gibt keine signifikanten Unterschiede bezüglich des korrekten Lösens bei den drei Gruppen. Die Erfolgsbilanz lag bei allen Gruppen bei ca. 60 %.

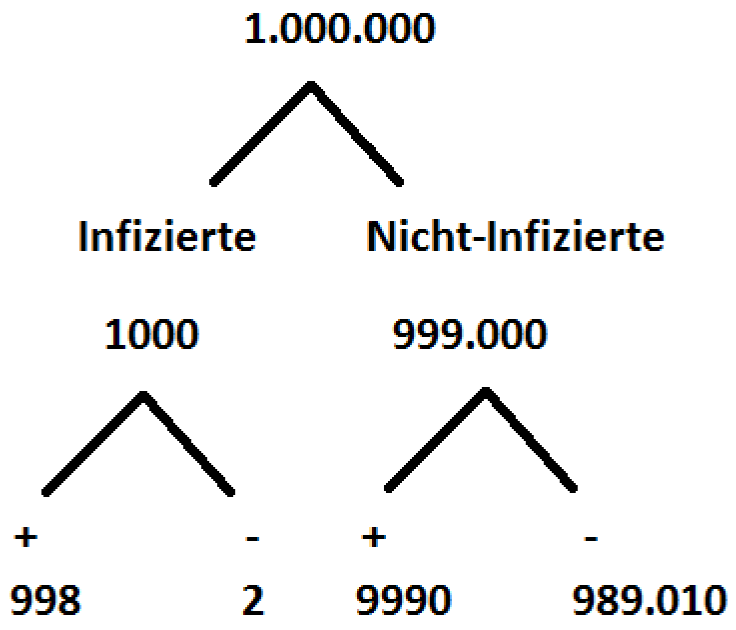
Signifikante Unterschiede gibt es bei Personen, die alle Kurse und ein bis drei Kurse absolviert haben, bezüglich der Auftrittshäufigkeit der Fehlvorstellung (Chi²-Test, $p < 0{,}05$). So sind 37,5 % jener Personen mit allen Kursen und 15,2 % jener Personen mit ein bis drei Kursen der Fehlvorstellung unterlegen.

Die Hypothese „*Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige Antworten) als jene, die keine Kurse absolvierten.“* kann somit in Bezug auf den „Basisratenfehler“ und die „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ bei einer Aufgabendarstellung mit natürlichen Häufigkeiten verworfen werden.

Aufgabe 4

Die vierte Aufgabe am Fragebogen lautete: In Deutschland ist die Zahl der mit AIDS Infizierten Personen relativ gering, ca. 1000 von 1.000.000 Personen sind damit infiziert. Der AIDS-Test hat eine hohe Zuverlässigkeit, so bekommen 998 von 1000 Infizierten ein positives Testergebnis. Von den 999.000 nicht infizierten Personen bekommen 9990 Personen fälschlicherweise ebenfalls ein positives Testergebnis.

Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten



Anm.: + bedeutet, dass das Testergebnis positiv ist.

- bedeutet, dass das Testergebnis negativ ist.

Angenommen eine Person erhält ein positives Testergebnis. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese tatsächlich mit AIDS infiziert ist?

Kreuzen Sie Zutreffendes bitte an:

- ○ In 998 von 1000 Fällen ist die „infizierte“ Person tatsächlich infiziert.
- ○ In 9990 von 999.900 Fällen ist die „infizierte“ Person tatsächlich infiziert.
- ○ In 998 von 10988 Fällen ist die „infizierte“ Person tatsächlich infiziert.
- ○ In 998 von 1.000.000 Fällen ist die „infizierte“ Person tatsächlich infiziert.

Die richtige Antwort lautet „In 998 von 10988 Fällen ist die „infizierte“ Person tatsächlich infiziert.“. Die Antwort „In 998 von 1000 Fällen ist die „infizierte“ Person tatsächlich infiziert.“ repräsentiert die Fehlvorstellung „Basisratenfehler“ und „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“.

1. Hypothese

Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Wie in untenstehender Abbildung ersichtlich, konnte die Mehrheit der Studierenden (149 von 243 Personen, das entspricht 61,3 %) die Aufgabe korrekt lösen. Weitere 38 von 243 Personen (15,6 %) sind der Fehlvorstellung unterlegen:

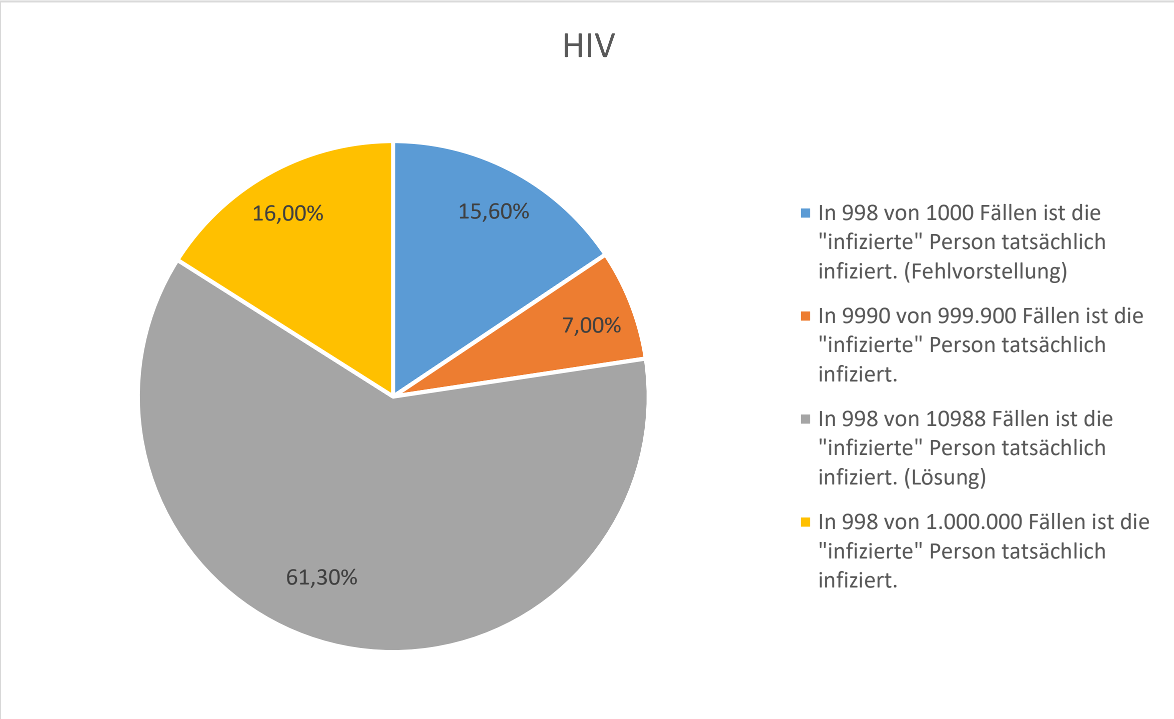


Abbildung 8.4.1: HIV-Beispiel

Die Mehrheit der Studierenden entschied sich für die richtige Lösung. Die Hypothese „*Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.*“ wird in Bezug auf den „Basisratenfehler“ und die „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ bei einer Aufgabenformulierung mit natürlichen Häufigkeiten und zusätzlichem Baumdiagramm durch die Ergebnisse des Fragebogens verworfen.

2. Hypothese

Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.

Es gab keine Unterschiede in Bezug auf die Auftrittshäufigkeit der Fehlvorstellung.

Einen hoch signifikanten Unterschied gab es bezüglich des korrekten Lösens bei den beiden Gruppen (Chi²-Test, $p < 0{,}01$). Wie in untenstehender Grafik ersichtlich, konnten deutlich mehr Personen mit mathematischem Schwerpunkt (70,2 %) als ohne mathematischen Schwerpunkt (36,9 %) die Aufgabe richtig lösen:

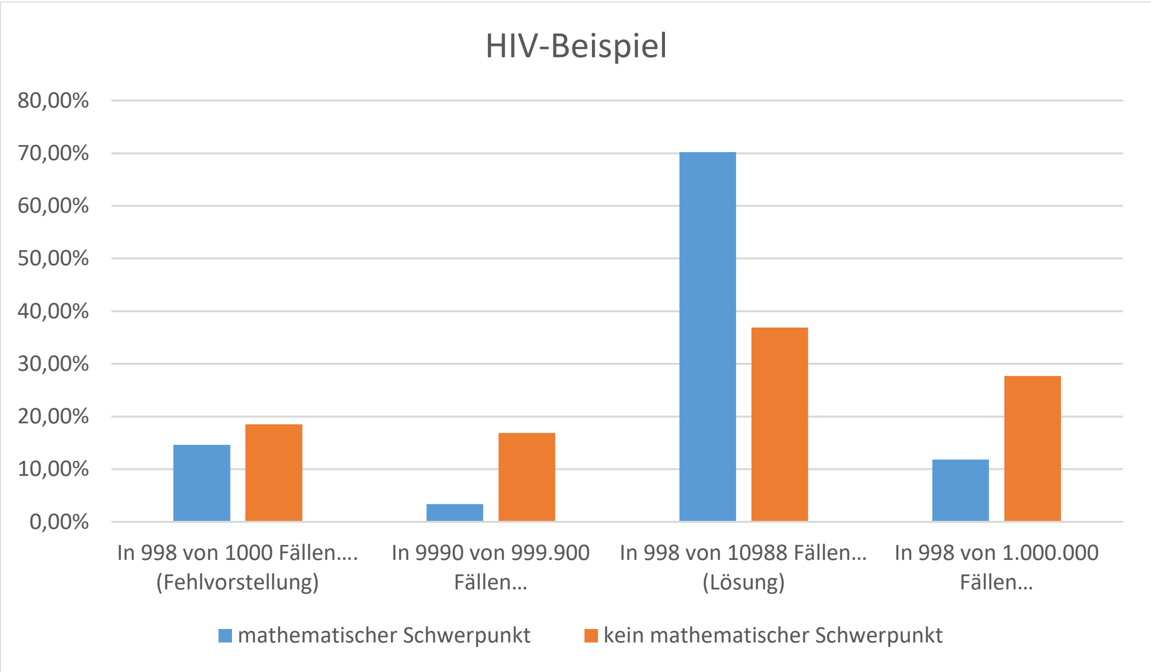


Abbildung 8.4.2: HIV-Beispiel

Es zeigt sich, dass ein mathematischer Schwerpunkt im Studium keinen signifikanten Unterschied macht, ob man den Fehlvorstellungen „Basisratenfehler" und „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis" unterliegt, wenn die Aufgabenstellung in natürlichen Häufigkeiten formuliert und zusätzlichem Baumdiagramm veranschaulicht wird. Die Hypothese „*Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.*" wird daher verworfen. Anzumerken ist, dass es einen hoch signifikanten Unterschied zwischen Studierenden mit und ohne mathematischen Schwerpunkt bezüglich des korrekten Lösens gibt. So haben Studierende mit mathematischem Schwerpunkt die

Aufgabe deutlich häufiger korrekt lösen können, als jene ohne Schwerpunkt.

3. Hypothese

Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige Antworten) als jene, die keine Kurse absolvierten.

Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den drei Gruppen (alle, keine, 1-3 Kurse). Alle Gruppen hatten eine Erfolgsbilanz zwischen ca. 60-69 %, der Fehlvorstellung sind zwischen 12-20 % unterlegen. Die Gruppe, die alle Kurse absolviert hat, schnitt am besten ab. Die beiden anderen schnitten fast identisch ab.

Die Hypothese „*Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige Antworten) als jene, die keine Kurse absolvierten.“* kann somit in Bezug auf den „Basisratenfehler“ und die „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ bei einer Aufgabendarstellung mit absoluten Häufigkeiten und zusätzlichen Baumdiagramm verworfen werden.

Aufgabe 5

Die fünfte Aufgabe am Fragebogen lautete: Um die Früherkennung von Brustkrebs ab einem bestimmten Alter zu fördern, wird Frauen empfohlen, regelmäßig an Screenings (Reihentests für Frauen ohne Symptome) teilzunehmen. Angenommen, es wird in einer bestimmten Gegend des Landes ein solches Brustkrebs-Screening mit Hilfe von Mammographie durchgeführt. In der betreffenden Gegend liegen folgende Angaben über Frauen zwischen 40 und 50 Jahren vor, bei denen sich keine Symptome zeigen und die am Mammographie-Screening teilnehmen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Frauen Brustkrebs hat, beträgt 0,8 %. Wenn eine Frau Brustkrebs hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 90 %, dass ihr Mammogramm positiv ausfällt. Wenn eine Frau jedoch *keinen* Brustkrebs hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 7 %, dass ihr Mammogramm positiv ausfällt.

Angenommen, bei einer Frau ist das Mammogramm positiv. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich Brustkrebs hat?

Als Antwort am Fragebogen konnte man entweder ca. 1, 8, 15, 43, 50, 56, 70, 80 oder 90 % auswählen. Die richtige Antwort lautet ca. 8 %. Hier wird in der Literatur keine konkrete Zahl als Fehlvorstellung genannt, sondern nur, dass die meisten Personen sehr hohe (70-90 %) Wahrscheinlichkeiten angeben. Daher werden folgend die Antworten 70, 80 und 90 % als typische Antwort für die Fehlvorstellung „Basisratenfehler“ und „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ eingestuft.

1. Hypothese

Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Wie in untenstehender Abbildung ersichtlich, haben sich 102 von 243 Personen (42 %) für die richtige Antwort entschieden. Weiters sind 76 von 243 Personen (31,3 %) der Fehlvorstellung (70, 80 oder 90 % als Antwort) unterlegen:

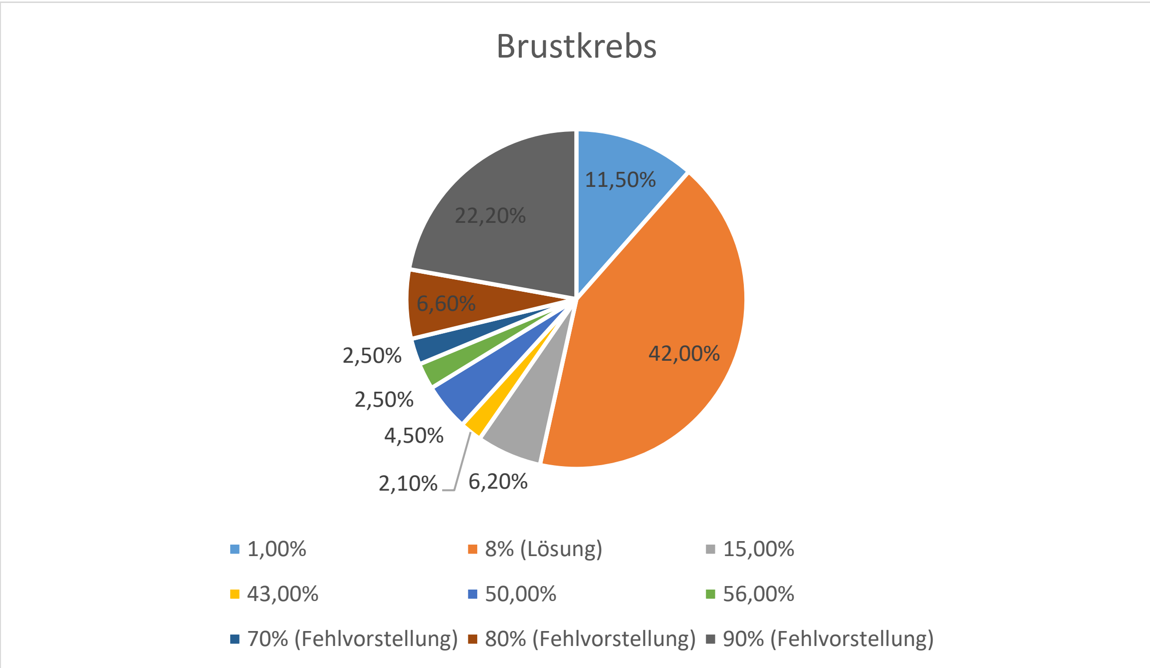


Abbildung 8.5.1: Brustkrebs-Beispiel

Der Anteil an richtigen Antworten (42 %) ist verglichen mit ähnlichen Aufgaben aus der Literatur sehr hoch, dagegen der Anteil an Antworten, die die typische Fehlvorstellung widerspiegeln relativ gering (31,3 %).

Bei Eddy (1982, S. 253f) sind beispielsweise 95 % der Versuchspersonen der Fehlvorstellung unterlegen. Auch wenn das Ergebnis in Bezug auf die Fehlvorstellung dieser empirischen Untersuchung deutlich geringer ausgefallen ist, als jene in der Literatur, hat dennoch eine von drei Personen die typischen Fehlvorstellungen. Die Hypothese „*Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.*“ wird aus diesem Grund in Bezug auf den Basisratenfehler und die Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis bei einer Aufgabenstellung mit relativen Häufigkeiten bestätigt.

2. Hypothese

Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.

Einen hochsignifikanten Unterschied gab es bezüglich des korrekten Lösens bei den beiden Gruppen (Chi²-Test, $p < 0,01$). Wie in untenstehender Grafik ersichtlich, konnte die Mehrheit mit mathematischem Schwerpunkt (52,2 %) die Aufgabe richtig lösen, dagegen konnten nur knappe 14 % der Personen ohne mathematischen Schwerpunkt die Aufgabe lösen:

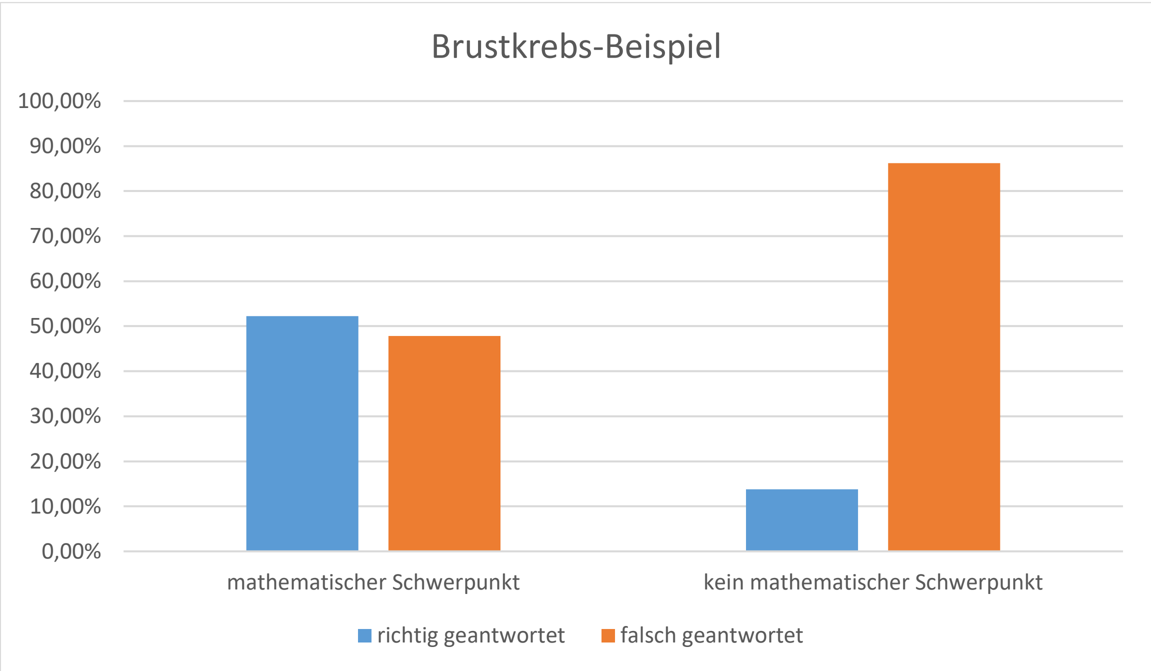


Abbildung 8.5.2: Brustkrebs-Beispiel

Weiters haben sich insgesamt 23 % der Personen mit und 53,8 % jener ohne mathematischen Schwerpunkt für die Antwortmöglichkeit 70, 80 oder 90 % (typische Fehlvorstellung) entschieden. Der Unterschied ist hoch signifikant (Chi²-Test, $p < 0{,}01$):

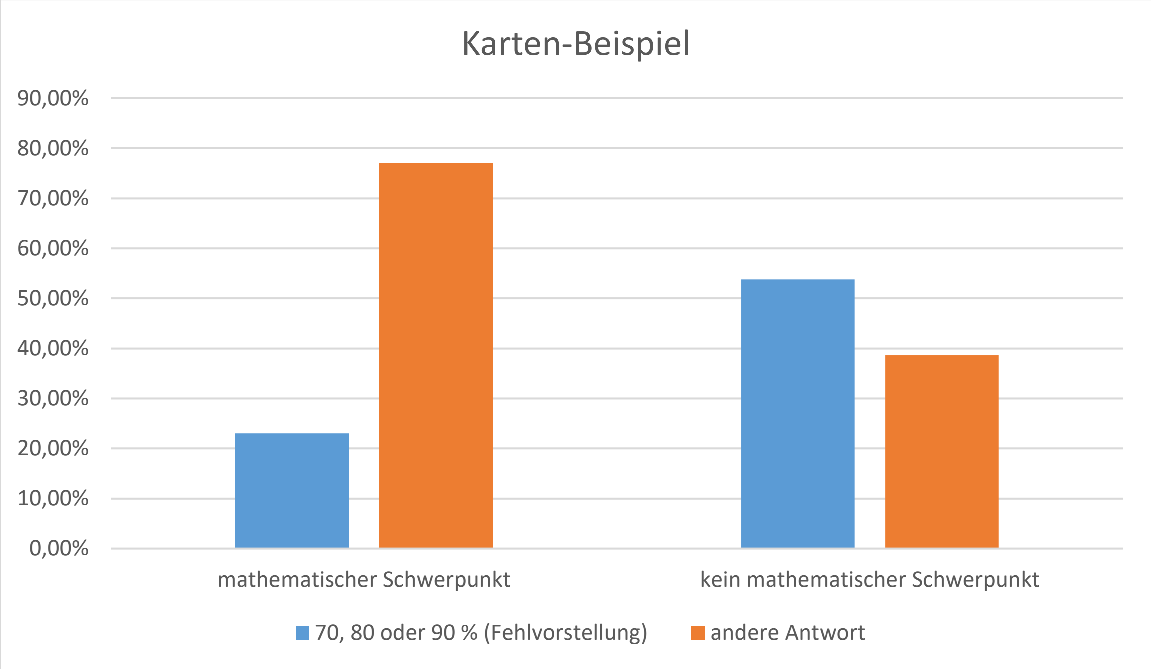


Abbildung 8.5.3: Brustkrebs-Beispiel

Es zeigt sich, dass ein mathematischer Schwerpunkt im Studium einen hoch signifikanten Unterschied macht, ob man den Fehlvorstellungen „Basisratenfehler“ und „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ unterliegt, wenn die Aufgabenstellung in relativen Häufigkeiten dargestellt wird. Die Hypothese „*Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.*“ wird daher bestätigt.

3. Hypothese

Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige Antworten) als jene, die keine Kurse absolvierten.

Es gibt keine signifikanten Unterschiede zwischen den drei Gruppen (alle, keine, 1-3 Kurse). Alle Gruppen hatten eine Erfolgsbilanz zwischen ca. 39-50 %, der Fehlvorstellung sind zwischen 28-32 % unterlegen. Anzumerken ist, dass die Erfolgsbilanz bei Personen ohne Kurse und ein bis drei Kursen fast identisch war, die Gruppe, die alle Kurse absolviert hatte, hatte die größte Erfolgsbilanz (50 %).

Die Hypothese „*Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige Antworten) als jene, die keine Kurse absolvierten.*“ kann somit in Bezug auf den „Basisratenfehler“ und die „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ bei einer Aufgabendarstellung mit relativen Häufigkeiten verworfen werden.

Vergleich zwischen Aufgabe 3 & 5

4. Hypothese

Wird die Aufgabenstellung mit absoluten Häufigkeiten dargestellt, treten der Basisratenfehler und die Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis seltener auf als bei relativen Häufigkeiten.

Die Daten der folgenden Auflistungstabelle sind für eine kurze Übersicht von den jeweils 1. Hypothesen der Aufgabe 3 und Aufgabe 5 entnommen worden:

	Aufgabe mit natürlichen Häufigkeiten	Aufgabe mit relativen Häufigkeiten
Richtig gelöst	141 (58 %)	102 (42 %)
Falsch gelöst	102 (42 %)	141 (58 %)
Fehlvorstellung unterlegen	45 (18,5 %)	76 (31,3 %)

Weiters konnten von den 243 Personen …

… 81 Personen (33,34 %) beide Aufgaben korrekt lösen.

… 60 Personen (24,69 %) die Aufgabe 3 (natürliche H.) korrekt und die Aufgabe 5 (relative H.) nicht korrekt lösen.

… 81 Personen (33,34 %) haben keine der beiden Aufgaben korrekt gelöst.

… 21 Personen (8,64 %) haben Aufgabe 5 (relative H.) korrekt und die Aufgabe 3 (natürliche H.) nicht korrekt lösen.

Weiters sind von den 243 Personen …

… 21 Personen (8,64 %) bei beiden Aufgaben der Fehlvorstellung unterlegen.

… 24 Personen (9,88 %) sind bei der Aufgabe 3 (natürliche H.) der Fehlvorstellung unterlegen und bei Aufgabe 5 (relative H.) nicht.

… 143 Personen (58,85 %) sind bei keiner der beiden Aufgaben einer typischen Fehlvorstellung unterlegen (unabhängig davon ob sie die Aufgabe richtig oder falsch beantwortet haben).

… 55 Personen (22,63 %) sind bei der Aufgabe 5 (relative H.) der Fehlvorstellung unterlegen und bei Aufgabe 3 (natürliche H.) nicht.

Die Unterschiede zwischen den beiden Aufgaben sind hoch signifikant (Chi²-Test, $p < 0{,}01$) bezüglich des korrekten Lösens. Es macht somit für die richtige Beantwortung einen Unterschied, ob die Aufgabenstellung in natürlichen oder relativen Häufigkeiten dargestellt wird.

Weiters gibt es einen hoch signifikanten Unterschied bezüglich der Auftrittshäufigkeit der Fehlvorstellung bei den beiden Aufgaben (Chi²-Test, $p < 0{,}01$). Die Darstellung der Aufgabenstellung macht einen Unterschied, ob man der Fehlvorstellung unterliegt.

Die Hypothese „*Wird die Aufgabenstellung mit absoluten Häufigkeiten dargestellt, treten der Basisratenfehler und die Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis seltener auf als bei relativen Häufigkeiten.*“ wird daher bestätigt.

Vergleich Aufgabe 3 & 4

5. Hypothese

Wird die Aufgabenstellung zusätzlich mit einem Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten veranschaulicht, treten der Basisratenfehler und die Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis seltener auf als bei absoluten Häufigkeiten.

Die Daten der folgenden Auflistungstabelle sind für eine kurze Übersicht von den jeweils 1. Hypothesen der Aufgabe 3 und Aufgabe 4 entnommen worden:

	Aufgabe mit natürlichen Häufigkeiten	Aufgabe mit natürlichen Häufigkeiten + Baumdiagramm
Richtig gelöst	141 (58 %)	149 (61,3 %)
Falsch gelöst	102 (42 %)	94 (38,7 %)
Fehlvorstellung unterlegen	45 (18,5 %)	38 (15,6 %)

Weiters konnten von den 243 Personen …

… 123 Personen (50,6 %) beide Aufgaben korrekt lösen.

… 18 Personen (7,4 %) die Aufgabe 3 (natürliche H.) korrekt und die Aufgabe 4 (natürliche H. + Baumdiagramm) nicht korrekt lösen.

… 76 Personen (31,3 %) haben keine der beiden Aufgaben korrekt gelöst.

… 26 Personen (10,7 %) haben Aufgabe 4 (natürliche H. + Baumdiagramm) korrekt und die Aufgabe 3 (natürliche H.) nicht korrekt lösen.

Es gibt keine signifikanten Unterschiede bei der Beantwortung (richtig/falsch) bei den beiden Aufgaben. Weiters gibt es keine signifikanten Unterschiede bezüglich der Auftrittshäufigkeit der Fehlvorstellung.

Da es keine signifikanten Unterschiede bei den beiden Aufgaben gibt, wird die Hypothese „*Wird die Aufgabenstellung zusätzlich mit einem Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten veranschaulicht, treten der Basisratenfehler und die Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis seltener auf als bei absoluten Häufigkeiten.*“ verworfen.

Weitere Ergebnisse: Vergleich zwischen den Geschlechtern

Frauen und Männer

Bei allen Aufgaben, außer bei Aufgabe 2, gibt es signifikante bis hochsignifikante Unterschiede in Bezug auf das korrekte Lösen zwischen männlichen (insg. 109 Personen) und weiblichen (insg. 131 Personen) Versuchspersonen. So schnitten männliche Versuchspersonen besser ab als weibliche Versuchspersonen (Chi²-Test, $p < 0{,}05$ bzw. $p < 0{,}01$).

Der typischen Fehlvorstellung sind bei Aufgabe 4 und 5 signifikant mehr weibliche Versuchspersonen als männliche Versuchspersonen unterlegen. Bei Aufgabe 1, 2 und 3 gibt es keine signifikanten Unterschiede in Bezug auf die Auftrittshäufigkeit der typischen Fehlvorstellung.

Frauen und Männer mit mathematischem Schwerpunkt

Vergleicht man Frauen (insg. 87 Personen) und Männer (insg. 88 Personen) mit mathematischem Schwerpunkt, dann gibt es in Bezug auf die Auftrittshäufigkeit der Fehlvorstellung „Basisratenfehler/Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis" (Aufgabe 3 - 5) signifikante bis hochsignifikante Unterschiede (Chi²-Test, $p < 0{,}05$ bzw. $p < 0{,}01$). Deutlich mehr weibliche als männliche Versuchspersonen sind der typischen Fehlvorstellung unterlegen (Chi²-Test, $p < 0{,}05$).

Bei Aufgabe 3 und 4 (Darstellung in natürlichen Häufigkeiten, natürlichen Häufigkeiten mit zusätzlichem Baumdiagramm) gibt es hochsignifikante Unterschiede in Bezug auf die Erfolgsbilanz (Chi²-Test, $p < 0{,}01$). Deutlich mehr männliche als weibliche Versuchspersonen haben die Aufgabe korrekt lösen können. Auch bei Aufgabe 5 (Darstellung in relativen Häufigkeiten) gibt es Unterschiede, wenn auch „nur" signifikante Unterschiede in Bezug auf das korrekte Lösen (Chi²-Test, $p < 0{,}05$).

Bei Aufgabe 1 und 2 gab es weder in Bezug auf die Auftrittshäufigkeit der typischen Fehlvorstellung noch auf das korrekte Lösen signifikante Unterschiede.

Frauen und Männer ohne mathematischen Schwerpunkt

Es gab lediglich bei Aufgabe 2 in Bezug auf die Auftrittshäufigkeit der typischen Fehlvorstellung signifikante Unterschiede. Männliche Versuchspersonen sind der Fehlvorstellung öfter unterlegen als weibliche Versuchspersonen.

Anzumerken ist, dass mehr als doppelt so viele Frauen (insg. 44) ohne mathematischen Schwerpunkt als Männer (insg. 21) ohne mathematischen Schwerpunkt an der Untersuchung teilgenommen haben. Die kleine Stichprobengröße kann Auswirkungen auf die Ergebnisse haben.

9. Diskussion

Hypothese 1

Kurze Zusammenfassung der Ergebnisse:

	Richtig beantwortet	Typische Fehlvorstellung
Aufgabe 1 (2. Aufgabenstellung) Zeitgebundenheit des Denkens	40,7 %	35,8 %
Aufgabe 2 Schwierigkeiten, das bedingende Ereignis exakt zu definieren	27,2 %	45,3 %
Aufgabe 3 Basisratenfehler (natürliche H.)	58 %	18,5 %
Aufgabe 4 Basisratenfehler (natürliche H. + Baumdiagramm)	61,3 %	15,6 %
Aufgabe 5 Basisratenfehler (relative H.)	42 %	31,3 %

Man erkennt gut, dass bei Aufgabe 1, 2 und 5 das Vorhandensein von typischen Fehlvorstellungen zum Vorschein kommt (> 30 % der Versuchspersonen sind der Fehlvorstellung unterlegen), speziell ausgeprägt sind diese bei Aufgabe 2 – fast jede zweite Person ist der typischen Fehlvorstellung unterlegen.

Bei Aufgabe 3 und 4 treten typische Fehlvorstellungen nur noch bedingt auf, die Lösungsrate ist deutlich höher als bei den anderen Beispielen.

Die Hypothese „*Studierende haben Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten.*“ kann daher in Bezug auf die Fehlvorstellungen „die Zeitgebundenheit des Denkens“, „Schwierigkeiten, das bedingende Ereignis exakt zu definieren“ und den „Basisratenfehler/Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ (bei einer Darstellung mit relativen Häufigkeiten) bestätigt werden. Bei Aufgabenstellungen mit natürlichen Häufigkeiten sowie zusätzlichem Baumdiagramm wird der „Basisratenfehler“ und die „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“ verringert, allerdings verschwinden die Fehlvorstellungen nicht völlig.

Hypothese 2

Überraschend war, dass lediglich bei Aufgabe 5 die Hypothese „*Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt im Studium treten Fehlvorstellungen häufiger auf als bei Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt.*“ bestätigt werden konnte.

Der Großteil der Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt entschied sich bei im Allgemeinen für die Fehlvorstellung oder die richtige Antwort. Andere Antworten wurden von ihnen eher weniger berücksichtigt bzw. vermutlich sofort ausgeschlossen. Bei Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt hingegen gab es nicht so eine Tendenz. Die gegebenen Antworten verteilen sich über mehrere bis alle Antwortmöglichkeiten. Bei beispielsweise Aufgabe 1 (2. Aufgabenstellung) entschieden sich ähnlich viele Personen für die Fehlvorstellung, die richtige Antwort und die Antwort $\frac{1}{4}$. Deswegen gibt es in Bezug auf die typische Fehlvorstellung meist keine signifikanten Unterschiede. Ein weiterer möglicher Grund könnten die unterschiedlich großen Stichprobengruppen sein. So gab es 178 Studierende mit mathematischem Schwerpunkt und lediglich 65 Studierende ohne mathematischen Schwerpunkt. Die relativ kleine Stichprobengruppe könnte für die gleichmäßige Verteilung verantwortlich sein. Weitere Untersuchungen könnten dies genauer untersuchen. Eventuell müsste man dann die Antwortmöglichkeiten, die den typischen Fehlvorstellungen zugeordnet werden, erweitern.

Signifikante (teilweise sogar hochsignifikante) Unterschiede gibt es bezüglich des korrekten Lösens. Studierende mit mathematischem Schwerpunkt schnitten bei allen Aufgaben besser ab als jene ohne mathematischen Schwerpunkt.

Weiters gibt es bei allen Aufgaben hochsignifikante Unterschiede bezüglich des allgemeinen Antwortverhaltens. Wie oben schon erwähnt, ist die Verteilung der gegebenen Antworten bei den beiden Gruppen in Bezug auf die Antwortmöglichkeiten sehr unterschiedlich.

Hypothese 3

Die Hypothese „*Studierende, die bereits Kurse (VO, UE) zu Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie absolviert haben, schneiden besser ab (mehr richtige Antworten) als jene, die keine Kurse absolvierten.*“ konnte nur bei den ersten beiden Aufgaben bestätigt werden. Bei den restlichen Aufgaben gab es keine signifikanten Unterschiede zwischen Studierenden mit allen, keinen oder ein bis drei absolvierten Kursen in Bezug auf die Lösungshäufigkeit.

Überraschend ist das Ergebnis bei Aufgabe 5 – sowohl bei dem korrekten Lösen als auch bei dem Vorhandensein der typischen Fehlvorstellung gibt es keine signifikanten Unterschiede in Bezug auf bereits absolvierte Kurse. Mögliche Gründe (Interpretation): Die Versuchspersonen könnten durch die „Voraufgaben" 3 und 4 bereits auf Aufgabe 5 vorbereitet bzw. sensibilisiert worden sein. Auch möglich wäre, dass sie sich die vorgestellte Situation in natürliche Häufigkeiten oder in ein Baumdiagramm (welche in den Beispielen davor behandelt wurden) umgewandelt haben und so die Aufgabe erfolgreich lösen konnten. Weitere Untersuchungen könnten einen solchen möglichen Effekt, ob die Reihenfolge der Aufgaben zum „Basisratenfehler" bzw. zur „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis" einen Einfluss auf die Lösungshäufigkeit hat, näher beleuchten.

Weiters ist das Ergebnis bei Aufgabe 3 überraschend. Hier sind hauptsächlich Personen, die bereits alle Kurse absolviert haben, z. T mit signifikanten Unterschieden der Fehlvorstellung unterlegen. Auch bei der ersten Fragestellung bei Aufgabe 1, die eigentlich keine Fehlvorstellung widerspiegelt, überrascht das Ergebnis. Es gibt zwar keine signifikanten Unterschiede bei den drei Gruppen, dennoch schnitten Personen, die alle Kurse absolviert haben, am „schlechtesten" ab (65,6 % zu 72,7 %). Die Ergebnisse könnten möglicherweise aufgrund der kleinen Stichproben (jede Gruppe umfasst zwischen 32 und 44 Personen) verfälschend sein.

Vergleicht man das allgemeine Antwortverhalten, also die Verteilung über alle Antwortmöglichkeiten hinweg, gibt es nur bei Aufgabe 2 signifikante Unterschiede.

Hypothese 4

In mehreren Untersuchungen konnte bestätigt werden, dass das Aufgabenformat (ob die Aufgabenstellung in natürlichen oder relativen Häufigkeiten dargestellt wird) einen Unterschied sowohl auf die Erfolgsbilanz als auch auf die Auftrittshäufigkeit von Fehlvorstellungen macht (z. B. bei Binder et al., 2015, S. 7f; Cosmides & Tooby, 1996, S. 53-59; Hoffrage und Gigerenzer, 1998, S. 539f; McDowell & Jacobs, 2017, S. 1300f). Dies konnte auch in dieser Untersuchung bestätigt werden – so gibt es hochsignifikante Unterschiede in Bezug auf die Lösungshäufigkeit sowie das Auftreten von Fehlvorstellung je nach Formulierung (natürliche und relative Häufigkeiten) der Aufgabe.

Hypothese 5

Die Hypothese „*Wird die Aufgabenstellung zusätzlich mit einem Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten veranschaulicht, treten der Basisratenfehler und die Verwechslung von bedingtem* *und bedingendem Ereignis seltener auf als bei absoluten Häufigkeiten.*“ wurde in dieser empirischen Untersuchung nicht bestätigt. Sowohl die Lösungshäufigkeit als auch das Auftreten von Fehlvorstellungen war bei beiden Aufgaben sehr ähnlich. Minimal bessere Ergebnisse konnten die Versuchspersonen bei jener Aufgabe, die zusätzlich mit einem Baumdiagramm veranschaulicht wurde, erzielen. Die Unterschiede waren allerdings nicht signifikant, wie beispielsweise in der Untersuchung von Binder et al. (2015, S. 6-8). Dort konnte die Hypothese mit 259 Schüler*innen eines deutschen Gymnasiums bestätigt werden.

Der Vergleich zwischen den Geschlechtern allgemein und in Bezug auf den Studienschwerpunkt bringt interessante Ergebnisse. So schnitten männliche Versuchspersonen zum Teil deutlich besser ab als weibliche Versuchspersonen. Die unterschiedlich großen Stichprobengrößen könnten dafür verantwortlich sein. Weitere Untersuchungen könnten den Geschlechteraspekt näher betrachten.

10. Fazit

Ad.) Theoretischer Teil

Ein allgemeines Bildungsziel, welches im Lehrplan der AHS verankert ist, lautet:

> „Die allgemein bildende höhere Schule hat im Sinne des § 2 des Schulorganisationsgesetzes an der Heranbildung der jungen Menschen mitzuwirken, nämlich beim Erwerb von Wissen, bei der Entwicklung von Kompetenzen und bei der Vermittlung von Werten. Dabei ist die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern.“ (§ 2 Absatz 4 Verordnung des Bundesministers für Unterricht und Kunst vom 14. November 1984 über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen, idgF).

Die **Bereitschaft zum selbstständigen Denken** und zur **kritischen Reflexion** sollen **besonders gefördert** werden. Die bedingte Wahrscheinlichkeit und auch der sich daraus ableitende Satz von Bayes, eignen sich sehr gut, um diesem Ziel gerecht zu werden. So kann man beispielsweise in der Schule die Ergebnisse bzw. was ein positives Ergebnis einer medizinischen Diagnose bedeutet, thematisieren. Hauer-Typpelt (2011, S. 75) schreibt in diesem Zusammenhang, dass der Stochastikunterricht dazu befähigen soll, mit (eigenen) positiven medizinischen Testergebnissen, die auf eine Infektion oder Krankheit hindeuten, aber nicht mit Sicherheit feststellen, rational umgehen zu können. „Bayesianisches Denken in adäquater Form eignet [sich hervorragend] […], Lernende dazu zu bringen, Vorgehensweisen und Ergebnisse kritisch zu betrachten und sie eher als Entscheidungshilfen denn als Entscheidungen anzusehen.“ (Wassner, 2004, S. 11).

Aber auch die Thematisierung anderer praxisnaher Beispiele wie die Ergebnisse des Gesichtserkennungs-Projekts können darauf aufmerksam machen, wie Ergebnisse geschönt dargestellt werden können. Es ist wichtig, dass man solche Ergebnisse, die zum Teil als „Errungenschaft“ dargestellt werden, kritisch hinterfragt und in der Lage ist, selbstständig darüber nachzudenken. Dazu gehört auch, nachzuvollziehen wie diese Ergebnisse zustande gekommen sind – das wäre der „Idealfall“. Natürlich kann nicht von jeder Person, bei der der Mathematikunterricht schon Jahre oder Jahrzehnte her ist, erwartet werden, dass diese sich noch an die bedingte Wahrscheinlichkeit erinnern kann. Deswegen sollte sich jede Universität (diverse Studien, wie z. B. Medizin, Jus), jedes Gericht (vgl. dazu z. B. O. J. Simpson), jedes Unternehmen (Test-Entwicklung, Test-Ergebnisdarstellung) und so weiter als Ziel setzen, statistische Daten transparent, also auf eine für jede Person zugängliche Weise, darzustellen. Das kann beispielsweise mit Hilfe von natürlichen Häufigkeiten, Visualisierungen oder einfachen Erklärungen funktionieren. Denn wie Gigerenzer (2015) schreibt, „[ist] [d]ie beste Technik kaum etwas wert, wenn die Menschen nicht verstehen, was ihre Produkte und Ergebnisse wirklich bedeuten.“ (Gigerenzer, 2015, S. 20). Ich denke, dass die Thematisierung von Fehlvorstellungen im Unterricht ebenfalls wichtig ist, weil sie auch zu selbstständigem Denken und kritischen Reflexionen führen kann. Typische Beispiele, wie sie im Fragebogen der empirischen Untersuchung zu finden sind, bieten Diskussionsstoff und können das Verständnis zu bedingten Wahrscheinlichkeiten vertiefen. Weiters können sie als Ausgangspunkt für die Erarbeitung von Lösungen herangezogen werden. Dabei können beispielsweise unterschiedliche Darstellungsformen (relative, natürliche Häufigkeiten) und deren Auswirkungen auf die Lösungshäufigkeit thematisiert werden. Wichtig ist, dass bereits Schüler*innen ein Verständnis zu bedingten Wahrscheinlichkeiten entwickeln, sensibilisiert für Fehlvorstellungen werden und Lösungsstrategien erlernen. Genauso sollten Schüler*innen sensibilisiert werden, dass mathematische Gesetze und die menschliche Intuition nicht immer übereinstimmen. Auch der Umgang mit Unsicherheiten, der den meisten Menschen nicht leichtfällt, sollte geübt werden.

Des Weiteren können die Schüler*innen durch solche praxisnahen Aufgaben erkennen, dass man Mathematik „brauchen“ kann. Viele Schüler*innen bekommen im Unterricht ein falsches bzw. nicht angemessenes Bild von Mathematik vermittelt, da lediglich mit (unhinterfragten) Formeln gerechnet wird. Die Mathematik ist dann für viele Schüler*innen mit einer Ansammlung von Rezepten vergleichbar. Gerade mit praxisrelevanten Aufgabenstellungen kann zum Denken angeregt, Sachverhalte hinterfragt und die Motivation gefördert werden. Zudem haben die Aufgabenstellungen, bei denen Fehlvorstellungen auftreten, die in dieser Arbeit angeführt wurden, meist überraschende Ergebnisse, durch die das Interesse an der Mathematik geweckt werden kann. Gleichzeitig kann der Unterricht durch solche Aufgabenstellungen abwechslungsreich gestaltet werden.[15]

Ad.) Empirischer Teil

Die Ergebnisse der empirischen Untersuchung verdeutlichen, dass nach wie vor Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten bei Studierenden auftreten. Ein möglicher Grund dafür kann die späte und kurze Behandlung bedingter Wahrscheinlichkeiten

[15] Die Gedanken wurden unter anderem von der LV „Schulmathematik Angewandte Mathematik“ angestoßen.

in der Schule sein (Hauer-Typpelt, 2011, S. 75). Dadurch könnte ein grundlegendes Verständnis nicht entwickelt worden sein. Eine mögliche Erarbeitung (Spiralprinzip) wie Krüger et al. (2015) sie vorschlagen, wäre sinnvoll.

Weiters zeigen die Ergebnisse, dass die Darstellungsform mit natürlichen Häufigkeiten und Visualisierungen (Baumdiagramm) einen positiven Einfluss auf die Lösungshäufigkeit haben. Dies entspricht auch den Ergebnissen bei Wassner (2004, S. 163f), dort wird in diesem Zusammenhang von einem „[…] *hohen und noch nach Monaten stabilen Lernerfolg* […]“ gesprochen (Wassner, 2004, S. 163). Wichtig ist daher, dass Schüler*innen bereits in der Schule geeignete Lösungsstrategien kennenlernen, die sie auch noch im späteren Erwachsenenleben bzw. Studierendenleben anwenden können. Mehrere Autoren empfehlen bedingte Wahrscheinlichkeiten bereits in der Sekundarstufe 1 in den Unterricht zu integrieren (z. B. Krüger et al., 2015, S. 251, 254; Wassner, 2004, S. 163-165), dabei sollte v. a. auf „*häufigkeitsbasierten Unterrichtskonzepte*[n] [aufgebaut werden, um] […] [grundlegende] *Intuitionen* und Vorstellungen des Menschen [zu fördern] […]“ (Wassner, 2004, S. 168). Weiters zeigen die Ergebnisse der beiden ersten Aufgaben, dass man Fehlvorstellungen mit dem Besuch bzw. der Absolvierung von Stochastik-Kursen verringern kann und die Lösungshäufigkeit vermehren kann. Die Beschäftigung mit Stochastik kann ein besseres Verständnis von bedingten Wahrscheinlichkeiten fördern.

Es gab zwei Rückmeldungen von Studierenden mit mathematischem Schwerpunkt, dass ihnen die Umfrage „Spaß gemacht hat“. Von Seiten der Studierenden ohne mathematischen Schwerpunkt kam hauptsächlich die Rückmeldung, dass die Aufgaben „ziemlich schwer“ waren, sie teilweise „nur raten konnten“ und, dass „Mathe und sie keine Freunde mehr werden“ ABER auch „sehr interessante Fragestellungen“ und „sehr interessantes Thema“. Daraus schließe ich, dass allgemeines und grundsätzliches Interesse an solchen Fragestellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeit besteht, weil eben der Praxisbezug deutlich wird, allerdings den meisten Personen das Verständnis für bedingte Wahrscheinlichkeiten fehlt. Aufgrund des fehlenden Verständnisses sank dann vermutlich die Motivation für Mathematik. Dieses Verständnis sollte am besten mit verschiedenen Lösungsstrategien aufgebaut werden, denn es zeigt sich, dass bei natürlichen Häufigkeiten und zusätzlichen Baumdiagramm, die Studierenden am besten abschnitten (in Bezug auf den „Basisratenfehler“/“Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“).

Literaturverzeichnis

Anderson, J., & Funke, J. (2007). *Kognitive Psychologie (6. Aufl.)*. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.

Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., & Stachel, H. (2017). *Ergänzungen und Vertiefungen zu Arens et al., Mathematik*. Berlin Heidelberg: Springer.

Ballinger, A. (2016). *Gender, truth and state power: Capitalising on punishment*. New York: Routledge.

Bandt, C. (1995). Behutsam zur Stochastik. *Mathematik in der Schule, 33*(4), 227-234.

Bar-Hillel, M. (1980). The base-rate fallacy in probability jugdments. *Acta Psychologica*, *44*, 211-233.

Bar-Hillel, M., & Falk, R. (1982). Some teasers concerning conditional probabilities. *Cognition, 11*, 109-122.

Bauer, T., Gigerenzer, G., & Krämer, W. (2014). *Warum dick nicht doof macht und Genmais nicht tötet.* Frankfurt: Campus-Verlag.

Bea, W., & Scholz, R. W. (1995). Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. *Journal für Mathematik-Didaktik, 16*, 299-327.

Beck, H. (2014). *Behavioral Economics*. Wiesbaden: Springer.

Bender, P. (1997). Grundvorstellungen und Grundverständnisse für den Stochastikunterricht. *Stochastik in der Schule, 17*(1), 8-33.

Biehler, R., & Engel, J. (2015). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 221-251). Berlin Heidelberg: Springer.

Binder, K., Krauss, S., & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information - an empirical study on tree diagrams and 2 × 2 tables. *Frontiers in psychology, 6*(1186), 1-9.

Böcherer-Linder, K., & Eichler, A. (2014). Der Einfluss der Visualisierung auf den Wissenserwerb im Bereich bedingte Wahrscheinlichkeit. In J. Roth, & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 209-212). Münster: WTM-Verlag.

Böcherer-Linder, K., & Eichler, A. (2017). The impact of visualizing nested sets. An empirical study on tree diagrams and unit squares. *Frontiers in psychology*, *8*(2026), 1-11.

Böcherer-Linder, K., Eichler, A., & Vogel, M. (2017). The impact of visualization on flexible Bayesian reasoning. *Avances de Investigación en Educación Matemática – AEIM*, *11/2017*, 25-46.

Böcherer-Linder, K., Eichler, A., & Vogel, M. (2018). Die Formel von Bayes: Kognitionspsychologische Grundlagen und empirische Untersuchungen zur Bestimmung von Teilmenge-Grundmenge-Beziehungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 39*(1), 127-146.

Böer, H. (2018). AIDS – Was ist von einem positiven Test-Ergebnis zu halten?. In H.-S. Siller, G. Greefrath, & W. Blum (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht* (S.111-124). Wiesbaden: Springer.

Borovcnik, M. (1991). Ein intuitiver Zugang zur bedingten Wahrscheinlichkeit. *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 19,* 44-62.

Borovcnik, M. (2013). Bedingte Wahrscheinlichkeiten - Ein Schlüssel zur Stochastik. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 46*, 1-18.

Bröder, A., & Hilbig, B. E. (2017). Urteilen und Entscheiden. In J. Müsseler, & M. Rieger (Hrsg.), *Allgemeine Psychologie* (S. 619-663). Berlin Heidelberg: Springer.

Bundespolizeipräsidium Potsdam (2018). *Biometrische Gesichtserkennung*. Abgerufen unter https://www.bundespolizei.de/Web/DE/04Aktuelles/01Meldungen/2018/10/181011_abschlussbericht_gesichtserkennung_down.pdf?__blob=publicationFile.

Büchter, A., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (2005). Den Zufall im Griff? Stochastische Vorstellungen fördern. *PM - Praxis der Mathematik in der Schule, 4,* 1-7.

Casscells, W., Schoenberger, A., & Graboys, T. B. (1978). Interpretation by physicians of clinical laboratory results. *The New England Journal of Medicine*, *299*, 999-100.

Cosmides, L., & Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition*, *58*(1), 1-73.

Diaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(3), 131-162.

Dorfmayr, A., Mistlbacher, A., Sator, K., & Zillner, M. (2018). *Thema Mathematik 6*. Linz: Veritas.

Eckstein, P. (2010). *Statistik für Wirtschaftswissenschaftler: Eine realdatenbasierte Einführung mit SPSS* (2. Aufl.). Wiesbaden: Springer.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Hrsg.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (S. 249-267). New York: Cambridge University Press.

Eichler, A. & Vogel, M. (2010). Die (Bild-)Formel von Bayes. *PM - Praxis der Mathematik in der Schule, 52*(32), 25-30.

Endt, C., & Wormer, V. (2019). *Das Problem mit den Falsch-Positiven*. *Süddeutsche Zeitung*. Abgerufen unter https://projekte.sueddeutsche.de/artikel/digital/falsch-positive-machen-prognose-algorithmen-zum-problem-e716375/

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson, & J. Swift (Hrsg.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (S. 292-297). Victoria: International Statistical Institute.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 153-165.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic: Intuitively based misconceptions. *Journal of Research in Mathematics Education, 28*(1), 95-106.

Garcia-Retamero, R., & Hoffrage, U. (2013). Visual representation of statistical information improves diagnostic inferences in doctors and their patient. *Social Science & Medicine, 83,* 27-33.

Gigerenzer, G. (1996). On narrow norms and vague heuristics: A reply to Kahneman and Tversky (1996). *Psychological Review, 103*(3), 592-596.

Gigerenzer, G. (1998). Ecological intelligence: An adaptation for frequencies. In D. Cummins, & C. Allen (Hrsg.), *The evolution of mind* (S. 9-29). New York: Oxford University Press.

Gigerenzer, G. (2015). *Das Einmaleins der Skepsis: Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken*. München: Piper.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102*, 684-704.

Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter, T., Daston, L., Beatty, J., & Krüger, L. (1999). *The empire of chance: How probability changed science and everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press.

Glaser, C. (2019). Prävalenzfehler. In C. Glaser (Hrsg.), *Risiko im Management* (S. 293-296). Wiesbaden: Springer.

Good, I. J. (1995). When batterer turns murderer. *Nature, 375*(6532), 541.

Götz, S., & Humenberger, J. (2008). Das Problem des anderen Kindes. *Der Mathematikunterricht, 54*(1), 50-60.

Gras, R., & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d’obstacles épistémologiques à la notion de probabilité (Student´s conceptions on conditional probability revealed by a data analysis method: implication – similarity – correlation). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hackmann, J. (1972*). Zur wohlfahrtstheoretischen Behandlung von Verteilungsproblemen*. Berlin: Duncker & Humblot.

Hammerton, M. (1973). A case of radical probability estimation. *Journal of Experimental Psychology, 101,* 252-254.

Hauer-Typpelt, P. (2007). Unbedingt „Bedingte Wahrscheinlichkeit“? Der Satz von Bayes im Schulunterricht. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 39,* 54-65.

Hauer-Typpelt, P. (2011). Tragfähige Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln. Vorschläge für den Stochastikunterricht. *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 43*, 75-87.

Hefendehl-Hebeker, L. (1983). Der Begriff "Ereignis" im Stochastikunterricht. *Stochastik in der Schule, 3*(2), 4-16.

Hoffrage, U., & Gigernzer, G. (1998). Using natural frequencies to improve diagnostic inferences. *Academic Medicine, 73,* 538-540.

Humenberger, J. (2017). *Schulmathematik Stochastik.* Skriptum zur Lehrveranstaltung „Schulmathematik Stochastik“ an der Universität Wien.

Humenberger, J. (2019). *Schulmathematik Angewandte Mathematik*. Skriptum zur Lehrveranstaltung „Schulmathematik Angewandte Mathematik“ an der Universität Wien.

Ihden, T. (2017). „Statistik vor Gericht“ – Ein Schlüsselqualifikationskurs für Juristinnen und Juristen. *ZDRW Zeitschrift für Didaktik der Rechtswissenschaft, 3,* 187-195.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychological Review, 80,* 237-251.

Khan, A., Breslav, S., Glueck, M., & Hornbæk, K. (2015). Benefits of visualization in the mammography problem. *International Journal of Human-Computer Studies, 83,* 94-113.

Koehler, J. J. (1993). DNA matches and statistics: Important questions, surprising answers. *Judicature, 76*(5), 222-229.

Koehler, J. J. (1996). The base rate fallacy reconsidered: Descriptive, normative, and methodological challenges. *Behavior and Brain Sciences, 19,* 1-54.

Krauss, S. (2003). Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann*: Das „*Häufigkeitskonzept*”. Stochastik in der Schule, 23*(1), 2-9.

Krauss, S., & Wang, X. T. (2003). The psychology of the Monty Hall problem: Discovering psychological mechanisms for solving a tenacious brain teaser. *Journal of Experimental Psychology, 132*(1), 3-22.

Krauss, S., Weber, P., & Binder, K. (2020). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. *Journal für Mathematik-Didaktik, 1-37.*

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015*). Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I.* Berlin Heidelberg: Springer.

Lesage, E., Navarrete, G., & De Neys, W. (2013). Evolutionary modules and Bayesian facilitation: The role of general cognitive resources. *Thinking & Reasoning, 19*(1), 27-53.

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B., & Ulovec, A. (2018). *Mathematik verstehen 6*. Wien: öbv&hpt Verlagsgesellschaft.

Malle, G., & Malle, S. (2003). Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen?. *Mathematik lehren, 118,* 52-56.

McDowell, M., & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychological Bulletin*, *143*(12), 1273-1312.

Meehl, P., & Rosen, A. (1955). Antecedent probability and the efficiency of psychometric signs of patterns, or cutting scores. *Psychological Bulletin, 52,* 194-215.

Noll, A. (2020). *Lesebarrieren in einem inklusiven Mathematikunterricht überwinden. Ergebnisse einer qualitativen und einer quantitativen Studie*. Wiesbaden: Springer.

Ohrndorf, L. (2016). *Entwicklung und Validierung eines Instruments zur Messung des Wissens über Fehlvorstellungen in der Informatik*. (Dissertation, Universität Paderborn, Nordrhein-Westfalen, Deutschland). Abgerufen unter https://pdfs.semanticscholar.org/df06/70aff86e51fe3f12c8f105a399d8da5c05c5.pdf

Oldford, R. W., & Cherry, W. H. (2006*). Picturing probability: The poverty of Venn diagrams, the richness of eikosograms*. Waterloo. Aberufen unter http://www.stats.uwaterloo.ca/~rwoldfor/papers/venn/eikosograms/paperpdf.pdf

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probability. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, *40,* 255-269.

Rach, S. (2018). Visualisierungen bedingter Wahrscheinlichkeiten - Präferenzen von Schülerinnen und Schülern. *Mathematica Didactica, 41*(1), 1-18.

Reiss, K., & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe.* Basel: Birkhäuser.

Rheinischer Merkur. (1974). *Alibi des Schornsteinfegers: Unwahrscheinliche Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem Mordprozess, 39.*

Riemer, W. (1985). *Neue Ideen zur Stochastik*. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Riemer, W. (1991). *Stochastische Probleme aus elementarer Sicht*. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Schmelzer, N. (2018). Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S.1611-1614). Münster: WTM-Verlag.

Schrage, G. (1980). Schwierigkeiten mit stochastischer Modellbildung – zwei Beispiele aus der Praxis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 1*, 86-101.

Schupp, H. (2004). Allgemeinbildender Stochastikunterricht. *Stochastik in der Schule, 24*(3), 4-13.

Sedlmeier, P., & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of Experimental Psychology: General, 130*(3), 380-400.

Sill, H.-D. (1991). Grundbegriffe stochastischer Allgemeinbildung. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1991* (S.449-452). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Sill, H.-D. (1993). Zum Zufallsbegriff in der stochastischen Allgemeinbildung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 25*(2), 84-88.

Sill, H.-D. (2005). Probleme und Möglichkeiten zur Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit. In TU Dresden, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften (Hrsg.), *10. Dresdner Kolloquium zur Mathematik und ihrer Didaktik* (S. 40/1-40/10). Abgerufen unter http://www.math.uni-rostock.de/~sill/Publikationen/Stochastik/Bedingte_Wahr_Dresden_05_02.pdf.

Sloman, S. A., Over, D., Slovak, L., & Stibel, J. M. (2003). Frequency illusions and other fallacies. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 91*(2), 296-309.

Steinbring, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 503-522.

Stilgenbauer, J.-L., Baratgin, J., & Douven, I. (2017). Reasoning strategies for diagnostic probability estimates in causal contexts: Preference for defeasible deduction over abduction. *CEUR Workshop Proceedings, 1872*. Abgerufen unter http://ceur-ws.org/Vol-1872/paper2p.pdf.

Tiezte, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II (Band 3). Didaktik der Stochastik.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Tribe, L. H. (1971). Trial by mathematics: Precision and ritual in the legal process. *Harvard Law Review, 84*, 1329-1393.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1977). Causal schemata in judgment under uncertainty. Abgerufen unter https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a056667.pdf.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Hrsg.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (S. 153-160). New York: Cambridge University Press.

Villejoubert, G., & Mandel, D. R. (2002). The inverse fallacy: An account of deviations from Bayes's theorem and the additivity principle. *Memory & Cognition*, *30*, 171-178.

Vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In J. Roth, & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1267-1270). Münster: WTM-Verlag.

Vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). „Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*, 225-254.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens*. Hildesheim: Franzbecker.

Wassner, C., Martignon, L., & Sedlmeier, P. (2002). Die Bedeutung der Darstellungsform für das alltagsorientierte Lehren von Stochastik. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (S. 35-50). Weinheim: Beltz.

Watson, J., & Kelly, B. (2007). The development of conditional probability reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(2), 213-235.

Wegier, P., & Shaffer, V. (2017). Aiding risk information learning through simulated experience (ARISE): Using simulated outcomes to improve understanding of conditional probabilities in prenatal Down syndrome screening. *Patient education and counseling*, *100*, 1882-1889.

Wolfe, C. R. (1995). Information seeking on Bayesian conditional probability problems: A fuzzy-trace theory account. *Journal of Behavioral Decision Making*, *8*, 85-108.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 8.5.1 - 8.5.3: Brustkrebs-Beispiel
(Eigene Darstellung)

Anhang

Zusammenfassung

Bei einer Fehlvorstellung handelt es sich um eine „falsche“ Vorstellung, also eine Vorstellung, die mit fachwissenschaftlichen Konzepten nicht übereinstimmt bzw. diesen sogar widerspricht (Ohrndorf, 2016, S. 23). Gerade im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeit weisen Personen Fehlvorstellungen auf. Ein Beispiel für eine solche Fehlvorstellung ist die „Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis“. Diese Fehlvorstellung tritt auch im außerschulischen Bereich auf, wie beispielsweise bei medizinischen Diagnosen. Hier kann eine Verwechslung oder sogar Gleichsetzung der beiden Ereignisse, also z. B. P(Krebs| positives Testergebnis) = P(positives Testergebnis| Krebs) bedeuten, dass man bei Erhalt eines positiven Testergebnis sofort annimmt, dass man tatsächlich Krebs hat. In anderen Worten: Unterliegt ein Arzt oder eine Ärztin dieser Fehlvorstellung, dann ist die Gefahr eine Falschdiagnose zu bekommen, groß. Eine weitere Fehlvorstellung ist die „Zeitgebundenheit des Denkens“. Menschen haben oftmals Schwierigkeiten damit, sich bei der Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten von der zeitlichen Abfolge von Ereignissen zu lösen. So fällt es vielen Menschen schwer, zu akzeptieren, dass spätere Ereignisse einen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von zuvor eingetretenen (bereits geschehenen) Ereignisse haben können. Solche Fehlvorstellungen können im Allgemeinen recht hartnäckig und teilweise schwer zu überwinden sein. Im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeit zeigt sich, dass diese durch Abänderungen der Problemdarstellung reduziert, teilweise minimiert werden können, beispielsweise hat die Darstellung in natürlichen (Anteile) statt relativen Häufigkeiten (Prozentzahlen) einen großen Einfluss darauf, wie Menschen Wahrscheinlichkeiten beurteilen. Auch grafische Darstellungen, wie z. B. das Baumdiagramm, visualisieren die „Problemdarstellung“ und helfen bei deren Verarbeitung. Darüber hinaus wurde eine empirische Untersuchung zu diesem Thema durchgeführt. Im Rahmen dieser Untersuchung hat sich u. a. gezeigt bzw. bestätigt, dass sich die Ergebnisse jener Aufgaben mit natürlichen und relativen Häufigkeiten hoch signifikant unterscheiden. Also, dass es einen Unterschied sowohl in Bezug auf die Lösungshäufigkeit als auch auf die Auftrittshäufigkeit der Fehlvorstellung macht, ob die Aufgabe in Anteilen (7 von 70) oder in relativen Häufigkeiten bzw. Prozentzahlen (0,1 bzw. 10 %) dargestellt wird. Die Versuchspersonen schnitten bei der Aufgabe, die in Anteilen dargestellt wurde, deutlich besser ab.

Abstract (Englisch)

A misconception is a conception that does not agree with or even contradicts scientific concepts (Ohrndorf, 2016, S. 23). Especially in the field of conditional probability people have misconceptions. An example of such a misconception is the "confusion of the inverse". This misconception also occurs in work and adult life, such as medical diagnoses. Here, a confusion or even an equation of the two events, e.g. P(cancer| positive test result) = P(positive test result| cancer) can lead to the assumption, that you certainly have cancer, when indeed, it is only the possibility. In other words: If a doctor has this misconception, the risk of getting a wrong diagnosis (and as a consequence a wrong treatment) is high. Another misconception is the "fallacy of the time axis". People often find it difficult to detach themselves from the temporal sequence of events when assessing probabilities. For example, many people find it difficult to accept that later events can have an influence on the probability of events that have occurred (already happened) before. Such misconceptions can generally be quite persistent and sometimes difficult to overcome. In the area of conditional probability, it has been shown that misconceptions can be reduced, and in some cases minimized, by changing the way the problem is presented. For example, presenting it in natural (proportions) rather than relative frequencies (percentages) has a great influence on how people judge probabilities. Graphical representations, such as the tree diagram, also visualize the "problem" and help in its processing. In the course of the thesis, an empirical study on this topic was conducted. The results of the study showed or confirmed, among other things, that the results of those tasks with natural and relative frequencies differ with high significance. Thus, it makes a difference regarding the incidence of solution as well as occurrence of the misconception whether the task is presented in proportions (7 out of 70) or in relative frequencies or percentages (0,1 or 10 %). The test persons performed significantly better in tasks when presented in proportions.

Fragebogen

Informationsblatt

Ich möchte Sie recht herzlich zu dieser empirischen Untersuchung einladen. Zunächst noch ein paar Informationen. Bitte lesen Sie sich diese sorgfältig durch.

Was ist der Zweck dieser Studie?

Es werden exemplarisch ausgewählte mathematische Fehlvorstellungen sowie Lösungsansätze im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeit untersucht.

Was erwartet mich?

Es werden demographische Daten (Altersbereich und Geschlecht) sowie kurze Fragen zum Studienschwerpunkt erfragt. Diese Informationen dienen lediglich dazu Vergleiche in der Stichprobe ziehen zu können. Anschließend werden 5 Aufgaben im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten gestellt.

Muss ich an der Untersuchung teilnehmen?

Die Teilnahme an der Untersuchung ist freiwillig und anonym. Der Fragebogen wurde begleitend zu einer Masterarbeit erstellt. Sie würden mit Ihrer Teilnahme einen äußerst wertvollen Beitrag für meine Masterarbeit leisten. Trotzdem können Sie natürlich jederzeit ohne Angabe von Gründen abbrechen.

Was muss ich tun?

Falls Sie sich entscheiden an der Untersuchung teilzunehmen, füllen Sie den Fragebogen aus. Dieser wird ca. 15 Minuten in Anspruch nehmen. Am Ende des Fragebogens haben Sie die Möglichkeit die Lösungen zu den 5 Aufgaben einzusehen.

Zunächst kurze Fragen zu Ihrer Person.
Kreuzen Sie Zutreffendes bitte an (Ein Weiterklicken ist bei diesen beiden Fragen auch ohne Antwort möglich):

Ich bin ...

- ○ ... jünger als 20 Jahre alt.
- ○ ... 20 bis 25 Jahre alt.
- ○ ... 26 bis 30 Jahre alt.
- ○ ... älter als 30 Jahre alt.

- ○ ... weiblich.
- ○ ... männlich.

Kreuzen Sie Zutreffendes bitte an:

- ○ Mein Studium hat(te) einen mathematischen Schwerpunkt.
- ○ Mein Studium hat(te) keinen mathematischen Schwerpunkt.

Kreuzen Sie Zutreffendes bitte an:

- ☐ Ich studiere derzeit im Bachelor-Lehramtsstudium Mathematik.
- ☐ Ich habe das Bachelor-Lehramtsstudium Mathematik bereits abgeschlossen.
- ☐ Ich studiere derzeit im Master-Lehramtsstudium Mathematik.
- ☐ Ich habe bereits das Master-Lehramtsstudium Mathematik abgeschlossen.
- ☐ Ich studiere derzeit das Diplomstudium mit UF Mathematik.
- ☐ Ich habe bereits das Diplomstudium mit UF Mathematik abgeschlossen.
- ☐ Nichts davon trifft zu.

Welche Kurse zur Stochastik wurden im Bachelor-Lehramtsstudium Mathematik/Diplomstudium mit UF Mathematik bereits absolviert?

- ☐ VO Schulmathematik Stochastik
- ☐ UE Schulmathematik Stochastik
- ☐ VO Stochastik für das Lehramt
- ☐ UE Stochastik für das Lehramt
- ☐ Ich habe keinen dieser Kurse bereits absolviert.

1. Aufgabe

In einer Urne befinden sich zwei schwarze und zwei weiße Kugeln. Es wird zweimal, ohne Zurücklegen gezogen.

Wie groß ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel weiß ist, wenn die erste Kugel weiß war?

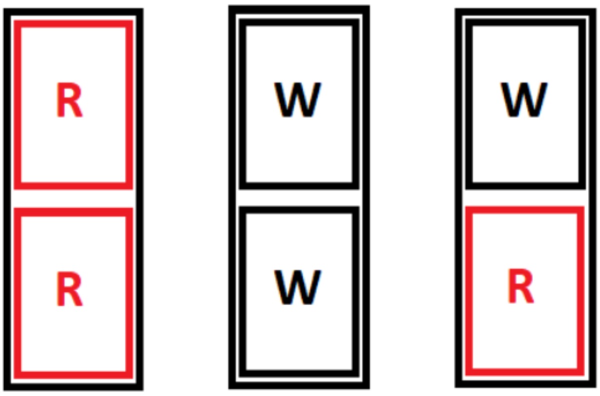
- ◯ 1/2
- ◯ 1/6
- ◯ 1/3
- ◯ 1/4

Die erste Kugel wird gezogen, deren Farbe bleibt unbekannt. Die zweite Kugel ist weiß. Wie groß ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel weiß war?

- ◯ 1/3
- ◯ 1/6
- ◯ 1/2
- ◯ 1/4

2. Aufgabe

In einem Hut befinden sich drei Karten. Davon ist eine auf beiden Seiten rot (RR), eine auf beiden Seiten weiß (WW) und eine ist auf einer Seite rot, auf der anderen Seite weiß (RW).



Nun wird eine Karte gezogen und auf den Tisch gelegt, die zu sehende Seite ist rot.

Wie groß ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Seite ebenfalls rot ist?

- ◯ 1/3
- ◯ 1/6
- ◯ 1/2
- ◯ 2/3

3. Aufgabe

In einer Stadt mit 1 Million Einwohnern leben 100 Bankräuber und 999.900 Nicht-Bankräuber. In einem Versuch, die Bankräuber zu schnappen, installiert die Stadt ein Alarmsystem mit einer Überwachungskamera und einer automatischen Gesichtserkennungssoftware.

Von den 100 Bankräubern werden 99 Personen von der Kamera richtig erkannt.

Von den 999.900 Nicht-Bankräubern werden 9999 Personen fälschlicherweise als Bankräuber erkannt.

Angenommen das System schlägt bei einer zufällig ausgewählten Person dieser Stadt Alarm, die Kamera hat diese Person als Bankräuber „identifiziert". Wie hoch ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass die „identifizierte" Person tatsächlich ein Bankräuber ist?

Kreuzen Sie Zutreffendes bitte an.

- ◯ In 99 von 100 Fällen ist die „identifizierte" Person ein Bankräuber.
- ◯ In 99 von 9990 Fällen ist die „identifiziere" Person ein Bankräuber.
- ◯ In 99 von 9999 Fällen ist die „identifiziere" Person ein Bankräuber.
- ◯ In 99 von 10098 Fällen ist die „identifizierte" Person ein Bankräuber.

4. Aufgabe

In Deutschland ist die Zahl der mit AIDS Infizierten Personen relativ gering, ca. 1000 von 1.000.000 Personen sind damit infiziert.

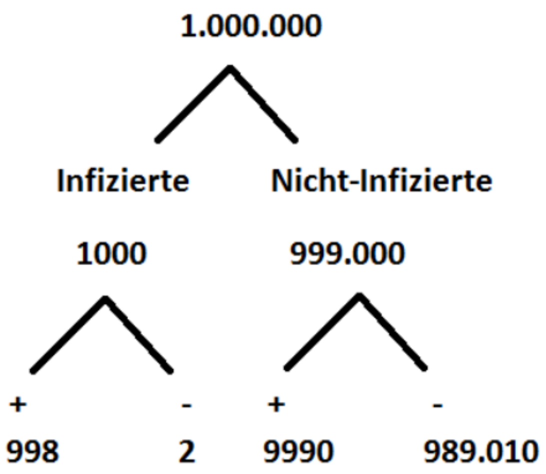
Der AIDS-Test hat eine hohe Zuverlässigkeit:

Von den 1000 Infizierten bekommen 998 ein positives Testergebnis.

Von den 999.900 nicht infizierten Personen bekommen 9990 Personen fälschlicherweise ebenfalls ein positives Testergebnis.

Angenommen eine Person erhält ein positives Testergebnis. Wie hoch ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass diese tatsächlich mit AIDS infiziert ist?

Hilfestellung mittels Baumdiagramm:



Kreuzen Sie Zutreffendes bitte an:

- ◯ In 998 von 1000 Fällen ist die „infizierte" Person tatsächlich infiziert.
- ◯ In 9990 von 999.900 Fällen ist die „infizierte" Person tatsächlich infiziert.
- ◯ In 998 von 10988 Fällen ist die „infizierte" Person tatsächlich infiziert.
- ◯ In 998 von 1.000.000 Fällen ist die „infizierte" Person tatsächlich infiziert.

5. Aufgabe

Um die Früherkennung von Brustkrebs ab einem bestimmten Alter zu fördern, wird Frauen empfohlen, regelmäßig an Screenings (Reihentests für Frauen ohne Symptome) teilzunehmen. Angenommen, es wird in einer bestimmten Gegend des Landes ein solches Brustkrebs-Screening mit Hilfe von Mammographie durchgeführt. In der betreffenden Gegend liegen folgende Angaben über Frauen zwischen 40 und 50 Jahren vor, bei denen sich keine Symptome zeigen und die am Mammographie-Screening teilnehmen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Frauen Brustkrebs hat, beträgt 1 %.

Wenn eine Frau Brustkrebs hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 90 %, dass ihr Mammogramm positiv ausfällt.

Wenn eine Frau jedoch keinen Brustkrebs hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 10 %, dass ihr Mammogramm positiv ausfällt.

Angenommen, bei einer Frau ist das Mammogramm positiv. Wie hoch ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich Brustkrebs hat?

[Bitte auswählen]

1. Möchten Sie gerne die Lösungen zu den Aufgaben einsehen?

- ◯ Ja
- ◯ Nein

1. Aufgabe (Lösung)
In einer Urne befinden sich zwei schwarze und zwei weiße Kugeln. Es wird zweimal, ohne Zurücklegen gezogen

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel weiß ist, wenn die erste Kugel weiß war? 1/3

Erklärung: Die erste gezogene Kugel ist weiß. Nun sind noch drei Kugeln in der Urne. Davon sind zwei schwarz und eine weiß, also ziehe ich mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 eine weiße Kugel und mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 eine schwarze Kugel.

Die erste Kugel wird gezogen, deren Farbe bleibt unbekannt. Die zweite Kugel ist weiß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel weiß war? 1/3

Erklärung: Die Aufgabe zielt auf den *aktuellen* Wissensstand ab. Die zweite Ziehung (weiß) hat die Urnenbelegung verändert. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit in der ersten Ziehung sind nun nur noch eine weiße und zwei schwarze Kugeln relevant. Also liegt die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel weiß war, wenn die zweite Kugel weiß ist, bei 1/3.

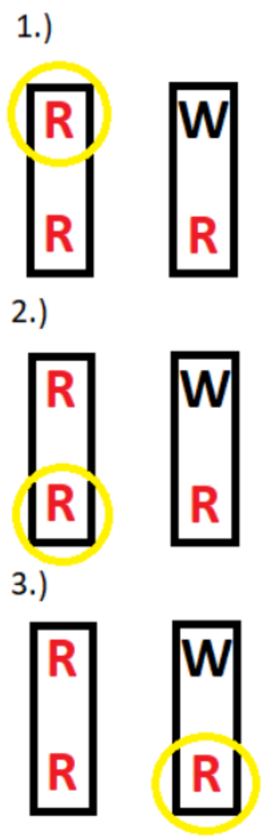
2. Aufgabe (Lösung)

In einem Hut befinden sich drei Karten. Davon ist eine auf beiden Seiten rot (RR), eine auf beiden Seiten weiß (WW) und eine ist auf einer Seite rot, auf der anderen Seite weiß (RW).
Nun wird eine Karte gezogen und auf den Tisch gelegt, die zu sehende Seite ist rot.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Seite ebenfalls rot ist? 2/3

Erklärung: Die aufgedeckte Karte ist rot. Damit kommen noch zwei Karten in Frage: RR und RW. Allerdings sind die beiden Karten nicht gleichwahrscheinlich – rot ist ein Indiz für RR, denn bei RR ist die Wahrscheinlichkeit („rot zu ziehen“) doppelt so groß wie bei RW.

Alternative Erklärung:



Die gelb eingekreiste Karte ist die zu sehende rote Karte. Dafür gibt es insgesamt drei Möglichkeiten.

Bei Möglichkeit 1.) ist die Farbe auf der Rückseite ebenfalls rot.
Bei Möglichkeit 2.) ist die Farbe auf der Rückseite ebenfalls rot.
Bei Möglichkeit 3.) ist die Farbe auf der Rückseite weiß.

In zwei von drei Fällen ist die Rückseite rot, also liegt die Wahrscheinlichkeit bei 2/3.

3. Aufgabe (Lösung)

In einer Stadt mit 1 Million Einwohnern leben 100 Bankräuber und 999.900 Nicht-Bankräuber. In einem Versuch, die Bankräuber zu schnappen, installiert die Stadt ein Alarmsystem mit einer Überwachungskamera und einer automatischen Gesichtserkennungssoftware.

Von den 100 Bankräubern werden 99 Personen von der Kamera richtig erkannt.
Von den 999.900 Nicht-Bankräubern werden 9999 Personen fälschlicherweise als Bankräuber erkannt.

Angenommen das System schlägt bei einer zufällig ausgewählten Person dieser Stadt Alarm, die Kamera hat diese Person als Bankräuber „identifiziert". *Wie hoch ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass die "identifizierte" Person tatsächlich ein Bankräuber ist?*

In 99 von 10098 Fällen ist die „identifizierte" Person ein Bankräuber.

Erklärung: Es werden 99 Bankräuber und 9999 Nicht-Bankräuber von der Kamera als Bankräuber „identifiziert". Das sind insgesamt 10098 (=99+9999) Personen. Von diesen 10098 Personen sind lediglich 99 Personen tatsächlich Bankräuber.

4. Aufgabe (Lösung)

In Deutschland ist die Zahl der mit AIDS Infizierten Personen relativ gering, ca. 1000 von 1.000.000 Personen sind damit infiziert.
Der AIDS-Test hat eine hohe Zuverlässigkeit: Von den 1000 Infizierten bekommen 998 ein positives Testergebnis. Von den 999.900 nicht infizierten Personen bekommen 9990 Personen fälschlicherweise ebenfalls ein positives Testergebnis.

Angenommen eine Person erhält ein positives Testergebnis. *Wie hoch ist Ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeit, dass diese tatsächlich mit AIDS infiziert ist?*

In 998 von 10988 Fällen ist die „infizierte" Person tatsächlich infiziert.

Erklärung: Es bekommen 998 tatsächlich infizierte Personen ein positives Testergebnis, 9990 nicht-infizierte Personen bekommen ebenfalls ein positives Testergebnis. Damit bekommen insgesamt 10988 (=998+9990) Personen ein positives Testergebnis, von diesen sind jedoch lediglich 998 Personen tatsächlich infiziert.

5. Aufgabe (Lösung)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Frauen Brustkrebs hat, beträgt 1 %. Wenn eine Frau Brustkrebs hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 90 %, dass ihr Mammogramm positiv ausfällt. Wenn eine Frau jedoch keinen Brustkrebs hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 10 %, dass ihr Mammogramm positiv ausfällt. Angenommen, bei einer Frau ist das Mammogramm positiv.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich Brustkrebs hat? ca. 8 %

Erklärung mittels natürlicher Häufigkeiten:
1 % der Frauen haben Brustkrebs. Das bedeutet, dass von 1000 Frauen 10 Brustkrebs haben. 90 % der Frauen, die Brustkrebs haben, bekommen ein positives Mammogramm. Das bedeutet, dass 9 von diesen 10 Frauen ein positives Testergebnis erhalten. Nun bekommen 10 % der "gesunden" Frauen ebenfalls ein positives Testergebnis. Das bedeutet von den 990 (=1000-10) "gesunden" Frauen bekommen 99 Frauen ebenfalls ein positives Testergebnis. Insgesamt erhalten damit 108 (9+99) Frauen ein positives Testergebnis. Von diesen 108 Frauen haben jedoch lediglich 9 tatsächlich Brustkrebs. Also 9/108 = 3/36 = 1/12 = ca. 0,08 - also rund 8 %.

Vielen Dank für Ihre Teilnahme!

Ich möchte mich ganz herzlich für Ihre Mithilfe bedanken.

Ihre Antworten wurden gespeichert, Sie können das Browser-Fenster nun schließen.

Falls Sie Fragen oder ähnliches zur Untersuchung haben, können Sie mich gerne per Mail (a01446442@unet.univie.ac.at) kontaktieren.