



# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

**„Stochastische Grundlagen im Risikomanagement“**

verfasst von / submitted by

**Funda Öztürk**

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

**Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. Nat.)**

Wien, 2021 / Vienna, 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on the  
student record sheet:

A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on the student record sheet:

Lehramtsstudium UniStG:  
UF Mathematik UniStG,  
UF Psychologie und  
Philosophie UniStG

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith



## **Danksagung**

Mein besonderer Dank geht an meine Familie... an meine Eltern, die mir die Absolvierung meines Studiums ermöglicht und mich stets unterstützt haben ... an meine Geschwister, die mich im Laufe meines Studiums motiviert und angespornt haben.

Ebenfalls möchte ich an dieser Stelle meinen Freundinnen und Freunden danken, die mir eine Stütze waren und mich in dieser Phase begleitet und ermutigt haben.

Außerdem bedanke ich mich bei meinen ehemaligen Studienkolleginnen und Studienkollegen, mit denen ich viele interessante Erfahrungen teilen und gleichzeitig gemeinsam neues Wissen aufbauen durfte, viele Stunden verbracht habe, aus denen wertvolle Freundschaften entstanden sind.

Schließlich möchte ich mich an dieser Stelle besonders bei meinem Betreuer, ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, bedanken. In meiner Studienzeit habe ich in vielen Vorlesungen, Seminaren, Prüfungen und in Summe in vielen Stunden von ihm lernen, mein Wissen in unterschiedlichen mathematischen Teilbereichen erweitern und diese miteinander in Verbindung bringen können. Für sein stets aufgebrachtes Verständnis und seine Flexibilität und Unterstützung möchte ich mich besonders bedanken.



## **Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich versichere hiermit,

1. dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Inhalte, die direkt oder indirekt aus fremden Quellen entnommen sind, sind durch entsprechende Quellenangaben gekennzeichnet.
2. dass ich diese Diplomarbeit bisher weder im Inland noch im Ausland in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit zur Beurteilung vorgelegt oder veröffentlicht habe.
3. dass die vorliegende Fassung der Arbeit mit der eingereichten elektronischen Version in allen Teilen übereinstimmt.

Wien, April 2021

Funda Öztürk



## **Kurzzusammenfassung:**

### Stochastische Grundlagen im Risikomanagement

Das Risikomanagement ist in der heutigen Zeit von besonderer Bedeutung und nicht länger wegzudenken. Im Hinblick auf das Finanzwesen ist sie sogar im Banken- und Versicherungswesen aufsichtsrechtlich gefordert und hat einen besonderen Stellenwert als Schlüsselfunktion.

Die Essenz des Risikomanagement besteht dabei in der Analyse und Bewertung der identifizierten Risiken, um für diese entsprechende Steuerungsmaßnahmen setzen zu können. Die Risikoanalyse basiert nun auf unterschiedlichen stochastischen Methoden und Verfahren.

In der vorliegenden Arbeit wurden ausgehend von den historischen Entwicklungen, auf die Prozessbestandteile des Risikomanagement eingegangen und im Speziellen ausgewählte stochastische Verfahren in der Risikoanalyse behandelt. Im Hinblick auf die vielfältigen Anwendungsbereiche in der Finanzwelt wurde nochmals die Bedeutung des Fachgebietes der Mathematik, ihre Wechselbeziehung mit dem Risikomanagement und ihre praktische Anwendung in der Realwirtschaft unterstrichen.

## **Schlagwörter:**

Risikomanagement – Risikoanalyse – Stochastik – Wahrscheinlichkeitsrechnung – Verteilungen

**Abstract:**

stochastic basics in risk management

Risk management is of particular importance today and indispensable. With regard to finance, it is even required by regulatory law in banking and insurance and has a special role to play as a key function.

The essence of risk management is the analysis and assessment of the identified risks in order to be able to set appropriate control measures for them. Risk analysis is now based on different stochastic methods and procedures.

In the present study, beginning from historical developments, the process components of risk management were discussed and selected stochastic methods in the risk analysis were dealt with in particular.

In view of the wide range of applications in the financial world, the importance of mathematics, its interrelationship with risk management and its practical application in the real economy was once again underlined.

**Keywords:**

Risk management – risk analysis – stochastics – theory of probability – probability calculation – distribution

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. EINLEITUNG</b>	<b>- 2 -</b>
<b>2. URSPRUNG DES RISIKOMANAGEMENT</b>	<b>- 3 -</b>
2.1 Die Geschichte des Risikomanagements als Geschichte der Stochastik	- 3 -
2.2 Entwicklungen im Finanz- und Versicherungswesen	- 6 -
2.3 Entwicklungen der Finanzmarktregulierung	- 10 -
2.4 Bankenaufsicht	- 11 -
2.5 Versicherungsaufsicht	- 13 -
<b>3. GRUNDLEGENDE ÜBERLEGUNGEN ZUM RISIKO</b>	<b>- 14 -</b>
3.1 Der Risikobegriff	- 14 -
3.2 Risikoarten	- 17 -
3.2.1 Systematisches und unsystematisches Risiko	- 17 -
3.2.1 Leistungswirtschaftliches und finanzwirtschaftliches Risiko	- 18 -
<b>4. GRUNDLAGEN DES RISIKOMANAGEMENT</b>	<b>- 19 -</b>
4.1 Begriffsdefinition	- 19 -
4.2 Risikopolitik	- 20 -
4.3 Ziele	- 22 -
4.4 Phasen des Risikomanagement Prozesses	- 24 -
4.4.1 Risikoerhebung und Risikoidentifikation	- 24 -
4.4.2 Risikoanalyse und Risikobewertung	- 26 -
4.4.3 Risikosteuerung	- 27 -
4.4.4 Risikocontrolling	- 29 -

<b>5.</b>	<b>MATHEMATISCHE MODELLIERUNG VON RISIKEN</b>	<b>- 30 -</b>
5.1	Gleichverteilung	- 31 -
5.2	Exponentialverteilung, Erlang- und Gamma-Verteilung	- 32 -
5.3	Weibull-Verteilung	- 34 -
5.4	Normalverteilung	- 35 -
5.5	t-Verteilung	- 37 -
5.6	Logarithmische Normalverteilung	- 38 -
5.7	Log-Gamma-Verteilung	- 39 -
5.8	Pareto-Verteilung	- 40 -
5.9	Verallgemeinerte Pareto-Verteilung	- 41 -
5.10	Inverse Gauß-Verteilung	- 42 -
5.11	Beta-Verteilung	- 43 -
<b>6.</b>	<b>VERTEILUNGSMODELLE FÜR DIE SCHADENANZAHL</b>	<b>- 45 -</b>
6.1	Poissonverteilung	- 45 -
6.2	Negative Binomialverteilung	- 46 -
6.3	Binomialverteilung	- 47 -
6.4	Logarithmische Verteilung	- 48 -
<b>7.</b>	<b>RISIKOKENNZAHLEN</b>	<b>- 49 -</b>
7.1	Anforderungen an Risikomaße	- 49 -
7.2	Stochastische Risikokennzahlen	- 52 -
7.2.1	Mittelwerte und Risiko	- 52 -
7.2.2	Streuungsmaße	- 53 -

7.2.3	Value at Risk und Conditional Value at Risk	- 55 -
7.2.4	Stochastische Risikokennzahlen zur Bemessung von Risikoreserven	- 59 -
7.2.5	Bemessung von Versicherungsprämien	- 61 -
7.3	Analytische Risikokennzahlen	- 63 -
7.3.1	Zinssensitivität	- 63 -
7.3.2	Absolute Duration	- 64 -
7.3.3	Modifizierte Duration	- 66 -
7.3.4	Zinselastizität	- 67 -
7.3.5	Macaulay-Duration	- 67 -
7.3.6	Konvexität	- 68 -
<b>8.</b>	<b>ABHÄNGIGKEITSMODELLIERUNG</b>	<b>- 69 -</b>
8.1	Lineare Korrelation	- 69 -
8.2	Lineare Regression	- 72 -
8.3	Copulas	- 75 -
8.4	Rangkorrelation	- 80 -
8.4.1	Spearman'sche Rangkorrelation	- 80 -
8.4.2	Kendallsche Rangkorrelation	- 82 -
8.5	Tail-Abhängigkeit	- 84 -
<b>9.</b>	<b>SIMULATIONSVERFAHREN</b>	<b>- 87 -</b>
9.1	Sensitivitätsanalyse	- 87 -
9.1.1	Absolut-absolut Sensitivität	- 88 -
9.1.2	Absolut-relativ Sensitivität	- 89 -
9.1.3	Relativ-relativ Sensitivität	- 90 -
9.1.4	Relativ-absolut Sensitivität	- 91 -

9.2	Szenarioanalyse	- 91 -
9.3	Monte- Carlo- Simulation	- 95 -
9.3.1	Monte-Carlo-Integration	- 97 -
9.3.2	Monte-Carlo-Simulation des VaR	- 98 -
9.3.3	Monte-Carlo-Simulation der Ruinwahrscheinlichkeit bei Risikoreserveprozessen	- 98 -
9.4	Historische Simulation	- 100 -
<b>10.</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG</b>	<b>- 103 -</b>
	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b>	<b>- 104 -</b>
	<b>ABBILDUNGSVERZEICHNIS</b>	<b>- 108 -</b>
	<b>TABELLENVERZEICHNIS</b>	<b>- 110 -</b>



*„Es bleibt nämlich noch zu untersuchen, ob durch Vermehrung der Beobachtungen  
beständig auch die Wahrscheinlichkeit dafür wächst, daß die Zahl der  
günstigen zu der Zahl der ungünstigen Beobachtungen das wahre Verhältnis  
erreicht, und zwar in dem Maße, daß diese Wahrscheinlichkeit schließlich  
jeden beliebigen Grad der Gewißheit übertrifft, ...“*

Jakob Bernoulli

## **1. Einleitung**

Die vorliegende Diplomarbeit untersucht die stochastischen Grundlagen im Risikomanagement. Ziel ist es, die Anwendung stochastischer Modelle in der Realwirtschaft bzw. im Speziellen im Risikomanagement zu untersuchen sowie die bedeutendsten Verfahren und Methoden herauszuarbeiten und diese darzulegen. Da auf eine Fokussierung auf spezielle Branchen verzichtet wurde, sollen ebenfalls praktische Anwendungsgebiete für das Banken- oder Versicherungswesen oder im Allgemeinen für das Rechnungswesen sowie andere Teilbereiche vorgestellt werden.

Hierfür wird zunächst in einem einführenden Kapitel eine Einleitung zur Geschichte des Risikomanagement und ihrer Entwicklung aus der Stochastik heraus gegeben. Dabei wird ebenfalls auf die Rahmenbedingungen sowie die Entwicklungen im Finanzwesen und dem Aufsichtsrecht eingegangen. Im anschließenden Kapitel werden grundlegende Überlegungen zum Risikobegriff angestellt und eine Unterscheidung von Risikoarten vorgenommen. Diese sollen als Basis dienen, um im Kapitel 3 auf die Grundlagen des Risikomanagements einzugehen. Um einen guten Überblick zum Kreislauf des Risikomanagement zu erhalten, werden hier einige Definitionen, die Ziele sowie der Prozessverlauf des Risikomanagement vorgestellt.

Mit den grundlegenden Informationen zum Risikomanagement werden im Kapitel 5 und Kapitel 6 die Modellierung von Risiken dargelegt. Dabei werden die für das Risikomanagement wichtigsten Verteilungsmodelle für die Beschreibung der Schadenhöhe und der Schadenanzahl präsentiert. Nach den erlangten Informationen zu den zugrundeliegenden Verteilungsmodellen, werden im Kapitel 6 die wesentlichsten Risikokennzahlen im Risikomanagement vorgestellt und praktische Anwendungsgebiete dargelegt. Darauffolgend werden im Kapitel 7 Abhängigkeitsmodellierungen behandelt.

Abschließend werden ausgewählte Simulationsverfahren für Risikomodelle beschrieben, und deren Anwendungsgebiete geschildert sowie eine Zusammenfassung für eine abschließende Übersicht gegeben.

## **2. Ursprung des Risikomanagement**

Als Einführung in die Thematik wird im Folgenden auf die Entwicklung des Risikomanagement eingegangen. Dabei sind insbesondere neben der geschichtlichen Entwicklung der Stochastik beginnend mit dem „Glücksspiel“, ebenfalls die Entwicklungen im Finanzwesen im Allgemeinen sowie die im Laufe der Zeit zunehmende Finanzmarktregulierung von großer Bedeutung. Die wesentlichsten Entwicklungen werden nun in den folgenden Unterkapiteln dargestellt.

### **2.1 Die Geschichte des Risikomanagements als Geschichte der Stochastik**

Menschen standen bereits von Anbeginn im Hinblick auf die mit der Zukunft einhergehenden Ungewissheiten vor der Herausforderung, Entscheidungen zu treffen. Oft wurden diese Fragestellungen in eine religiöse Sphäre übertragen, eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit der Themenstellung fand anfangs nicht statt. Die systematische Beschäftigung mit dem Zufall war im Mittelalter sogar verpönt oder galt als Gotteslästerung.

Manche Methoden des Risikomanagement erscheinen jedoch nicht sehr neu. Bereits im 17. Jahrhundert gab es an der Amsterdamer Börse geeignete Finanzinstrumente für das Hedgen von Risiken, welche in der heutigen Zeit als Derivate bezeichnet werden würden. Ähnliches gilt für Risikoentlastungsstrategien der Risikoteilung.

Auch wenn die grundsätzliche Funktionsweise derartiger Risikoentlastungsstrategien zum Teil auf einer intuitiven Ebene und ohne höhere Mathematik erfassbar ist, ist deren Beschreibung und Bewertung ohne die Verwendung höherer Mathematik nicht möglich. Dahingehend ist die Geschichte des Risikomanagements bzw. die Geschichte der Risikoanalyse ebenfalls eine Geschichte der Stochastik, dem Teilgebiet in der Mathematik zur Beschreibung und Analyse von Zufallsprozessen. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 6 ff.)

Weitgehend wird dabei als Ursprung des Risikomanagements in der Literatur das Glückspiel im Zeitalter des Altertums genannt. Glücksspiele gibt es seit Menschengedenken. Es werden unterschiedliche Arten, wie Würfelspiele, deren Ausgang vom Zufall abhängt, oder Kartenspiele, die teilweise auch in Zusammenhang mit dem Geschick der Spieler steht, unterschieden. Bis zum 12. Jahrhundert wurde für den Ausgang von Glücksspielen die Unvorhersehbarkeit und das Schicksal angenommen. (vgl. Wolke, 2016, S. 8 ff.).

Die Stochastik hat sich jedoch mit vielen weiteren für das heutige Leben grundlegenden Erkenntnissen im technischen und wirtschaftlichen Bereich, aus der Epoche der Renaissance entwickelt. Dennoch war ein wichtiger Antrieb das Interesse am Glücksspiel. Die Stochastik ist dabei den miteinander zusammenhängenden Bereichen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik unterzuordnen.

Eine wichtige Grundlage für die systematische Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde durch zwei Werke geschaffen. Diese waren das im Jahr 1494 erschienene Buch „Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita“ von Luca Pacioli und die um 1550 entstandene Abhandlung „Liber de Ludo Aleae“ – „Buch des Würfelspiels“ von Gerolamo Cardano.

Das Buch „Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita“ gilt als erstes gedrucktes Werk für die Mathematik. Aus diesem wurden ebenfalls Kaufleute unterrichtet. In diesem wurde unter anderem der Grundsatz der doppelten Buchführung sowie das wahrscheinlichkeitstheoretische Problem „Gioco di Balla“ dargestellt. Hier erfolgt die Auseinandersetzung zur angemessenen Bewertung des Verlustrisikos. Das Problem wird folgendermaßen dargestellt:

*„A und B spielen mehrere Runden eines als Balla bezeichneten fairen Spiels. Sie vereinbaren, dass den Spieleinsatz derjenige erhalten soll, der als erster sechs Runden gewonnen hat. Das Spiel muss jedoch abgebrochen werden, als A fünf Runden und B*

*drei Runden gewonnen hat. Wie sollte nun der Spieleinsatz gerecht zwischen beiden aufgeteilt werden?“ (Cottin/Döhler, 2013, S. 6.)*

Die Antwort von Pacioli basierte auf der „Proportionalitätstheorie“ und besagte 5:3. Die korrekte Antwort wurde durch Pierre de Fermat und Blaise Pascal rund 160 Jahre später mittels unterschiedlicher Lösungsansätze geliefert und lautet 7:1. Der diesbezügliche Briefwechsel beider Wissenschaftler wird von manch einem als die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet.

Weitere bedeutende Wissenschaftler, die einen Beitrag an die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und damit der Risikoanalyse geleistet haben, waren ebenfalls Christian Huygens, welcher im Jahr 1657 ein Lehrbuch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Grundideen zum Hedging verfasste, sowie verschiedene Mitglieder der Baseler Gelehrten- und Mathematiker Dynastie Bernoulli. Diese brachten die Entwicklung der Stochastik insbesondere von Mitte des 17. bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts voran. Eine axiomatische Grundlage für die Wahrscheinlichkeitstheorie gelang jedoch erst im Jahr 1933 A. N. Kolmogorov. Auf Basis von diesem erfolgte in den darauffolgenden zwei Jahrzehnten die Entwicklung der Theorie zu den stochastischen Prozessen. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 6 f.)

Jakob Bernoulli war die erste Person, die sich auf einer theoretisch fundierten Basis mit der Schätzproblematik befasst hat und eine Brücke von der Statistik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung schlug. Das heute als Gesetz der großen Zahlen definierte Ereignis wurde durch ihn beschrieben. Dieses Gesetz dient unter anderem als theoretische Grundlage zur Anwendung der Monte-Carlo-Simulation im Risikomanagement. Das Werk von Jakob Bernoulli „Ars Conjectandi“- „Kunst des Vermutens“ war zu dessen Todeszeitpunkt im Jahr 1705 jedoch noch nicht vollendet. Die Fertigstellung des Werkes erfolgte durch seinen Neffen Nikolaus Bernoulli. Nikolaus Bernoulli und wiederum sein Cousin Daniel Bernoulli befassten sich des Weiteren mit einem weiteren berühmten Problem in der Wissenschaft, dem Petersburger Paradoxon. Hierbei geht es um ein

Glücksspiel, bei welchem zum einen ein unendlich großer erwarteter Gewinn vorliegt, zum anderen ein hoher Gewinn dennoch sehr unwahrscheinlich ist. Diese Beobachtungen können dazu dienen, sich zusätzlich zum Erwartungswert mit weiteren verschiedenen Risikokennzahlen in der Wahrscheinlichkeitsverteilung zu befassen.

Einen weiteren Meilenstein in der Stochastik stellt der Zentrale Grenzwertsatz dar. Dieser wurde von Abraham de Moivre im Jahr 1733 formuliert und in den darauffolgenden Jahrzehnten durch Laplace und Gauß weiterentwickelt. Mit diesem Satz wird die Wichtigkeit der Normalverteilung in der Statistik unterstrichen, das im Risikomanagement unter anderem für die Value at Risk Berechnungen eine große Bedeutung trägt. Weitere grundlegende Recherchen zur Abhängigkeit von Risiken wurden durch die Untersuchungen von Francis Galton betrieben, welcher die Regressionsanalyse entwickelte und in weiterer Folge in Zusammenarbeit mit Karl Pearson den Korrelationskoeffizienten generierte. (vgl. Holzmann/Meyer/Schumpich, 2009, S. 7)

## **2.2 Entwicklungen im Finanz- und Versicherungswesen**

Mit der Intensivierung des regionsübergreifenden Handels, mit vor allem Überseegebieten gegen Ende des Mittelalters und zu Beginn der Neuzeit, entstanden Anforderungen an eine Risikoanalyse und das Risikomanagement, die über die Anforderungen an das Glücksspiel hinausgingen. In Ländern, wie den Niederlanden, Frankreich, Deutschland und England wurden erste Börsen bereits im 15. und 16. Jahrhundert gegründet. Hierbei handelte es sich bereits um organisierte Märkte mit standardisierten Finanzregeln. Eine bedeutende Rolle spielte dabei der Handel mit Wechseln, sogenannte Schuldscheine, die der Finanzierung und der Überbrückung von kurzfristigen Zahlungsschwierigkeiten dienen. Im darauffolgenden Jahrhundert wurden bereits Anteilsscheine von Unternehmen, die Vorläufer der heutigen Wertpapiere, gehandelt, die nun unter dem Begriff Aktien einzuordnen sind. Dabei gelten als erste an der Börse gehandelte Papiere die Anteile der Niederländischen Ostindien-Kompanie.

Ebenfalls wurden Anteilscheine von anderen Handels- und Bergbaugesellschaften verbrieft. Auch wenn damals bereits Strategien zur Risikoentlastung überlegt wurden, waren die systematische und mathematische Analyse bzw. Bewertung noch nicht ausgereift, da die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in dieser Zeit noch nicht sehr vorangeschritten war. (vgl. Holzmann/Meyer/Schumpich, 2009, S. 7)

Die moderne Geschichte der Finanzwirtschaft ist jedoch auch eine Geschichte mit wiederkehrenden Spekulationsblasen. Der erste moderne Börsencrash war der wirtschaftliche Zusammenbruch im 17. Jahrhundert in den Niederlanden. Dieser trat nach dem sogenannten Tulpenwahn ein, wo ein großer Teil der Bevölkerung sich an dem Geschäft der Tulpen bzw. Tulpenzwiebeln beteiligen wollte und dadurch die Preise rasant anstiegen, sodass am Ende eine Hand voll Tulpenzwiebel genauso viel kostete wie ein Haus. Das System brach mit der Nichterfüllung von vielen vereinbarten Kaufverträgen im Jahr 1637 zusammen und hatte weitreichende wirtschaftliche Folgen. Ähnliche Spekulationsblasen traten im Jahr 1883 in Nordamerika mit der Eisenbahnspekulation, im Jahr 1929 mit der weltweiten Aktienspekulationsblase, im Jahr 1974 mit der Devisenspekulationsblase, die zum Niedergang der Herstatt-Bank führte, im Jahr 2001 mit der Dot-Com-Blase und zuletzt im Jahr 2007 mit der Immobilienblase, die zur Weltwirtschaftskrise geführt hat, auf.

Im 20. Jahrhundert hat sich die moderne Finanzmathematik mit dem Ziel entwickelt, eine Beschreibung und Bewertung derartiger risikobehafteter Finanzprodukte und Finanzmärkte vorzunehmen. Für diese Erhebungen sind weitaus mehr mathematische Erkenntnisse erforderlich als die der Betrachtung des Erwartungswertes und der Barwertberechnung. Als eine bahnbrechende Untersuchung wird dabei die im Jahr 1900 entstandene Schrift „Théorie de la Spéculation“ von Louis Bachelier gesehen, welcher ein ursprünglich aus der Biologie stammendes Modell auf den Börsenhandel übertrug und Kursbewegungen als Brownsche Bewegungen modellierte. Die Weiterentwicklung erfolgte 1923 durch Norbert Wiener, welcher ein strenges Modell der Brownschen Bewegung beschrieb. Weitere Beiträge für den Ausbau der Theorie zur Brownschen

Bewegung und anderer für die Modellierung der Finanzwelt wichtiger Prozesse wurden ebenfalls von Kiyoso Ito geliefert. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 7 f.)

Bedeutsame Beiträge für die Entwicklung der modernen Finanzmathematik und Risikotheorie wurden in den vergangenen Jahrzehnten ebenfalls durch Nobelpreise für die Wirtschaftswissenschaften geehrt. Darunter fallen unter anderem:

- Die Portfoliotheorie von Markowitz (Preisverleihung 1990)
- Die Modellbildung zur Bewertung derivativer Finanzinstrumente, darunter ebenfalls die Black-Scholes- Formel (Preisverleihung 1997)

Die mit der Black-Scholes-Formel weiterentwickelten derivativen Finanz- und Hedgeinstrumente lieferten einen großen Beitrag zum Risikomanagement, wobei sie jedoch ebenfalls neue Risiken erschufen. Denn der Markt für derivative Finanzinstrumente ist in den 1980er und 1990er Jahren stark angewachsen und die Finanzinstrumente wurden nicht nur zum Zwecke der Absicherung verwendet, sondern ebenfalls für Spekulationen genutzt. Dadurch kann anstelle einer Risikominimierung eine Vervielfachung der Risiken eintreten.

Eine Vielzahl von Unternehmenszusammenbrüchen und finanziellen Turbulenzen in den vergangenen Jahrzehnten kann auf die zweckentfremdete Nutzung von Derivaten und auf Risikofehleinschätzungen zurückgeführt werden. Dazu zählt unter anderem die im Jahr 2007 eingetretene Finanzkrise, die neben der Immobilienspekulation ebenfalls auf den falschen bzw. spekulativen Einsatz von sogenannten Kreditderivaten zurückzuführen ist, deren Wert von der Ausfallswahrscheinlichkeit des Schuldners abhängt.

Aus diesen historischen Ereignissen ergibt sich die Frage danach, wie derartige Finanzausammenbrüche durch eine bessere Risikoanalyse und durch einen bedachteren Umgang mit mathematischen Risikomodellen vermieden werden können.

Das Risikomanagement stellte von Beginn an die Hauptidee des Versicherungswesens dar. Zum Zweck der gemeinschaftlichen Risikoteilung schlossen sich bereits sehr früh

Kaufleute und Menschen zusammen. Die systematische Organisation von Versicherungsunternehmen wurde zum Großteil durch den wissenschaftlichen Fortschritt in der Stochastik möglich. Die Entwicklungen in den Methoden der Versicherungsmathematik und Risikotheorie gingen mit entsprechenden allgemeinen Entwicklungen in der Mathematik und dabei vor allem im Bereich der Stochastik einher. Aber auch Teilbereiche wie die Numerik und Informationstechnologie waren hier von besonderer Bedeutung. Einen wichtigen Schritt stellte dabei die Entwicklung der kollektiven Risikotheorie von Filip Lundberg im Jahr 1903 dar. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 9 ff.)

Das Risikomanagement bezog sich dabei in seinen Anfängen in den USA zunächst nur auf versicherbare Risiken und umfasste die Optimierung der zu zahlenden Versicherungsprämien. In weiterer Folge entwickelte sich die Aufgabenstellung, durch die Etablierung von Sicherheitsvorkehrungen im Unternehmen, eine Verminderung der zu zahlenden Prämien zu bewirken. Später wurden ebenfalls nicht versicherbare Risiken Teil der zu steuernden Größen im Risikomanagement. (vgl. Niggemann, 2013, S. 12)

Die Finanz- und Versicherungswirtschaft bzw. Finanz- und Versicherungsmathematik war jedoch durch unterschiedliche Paradigmen geprägt. Während die Finanzmathematik in erster Linie kurzfristig und preisorientiert war, benutzte die Versicherungsmathematik überwiegend langfristige sowie risikoorientierte und globale Modelle. Doch diese beiden Bereiche sind über die Jahre in der modernen Finanzwelt mehr und mehr zusammengewachsen. Viele Produkte in der Versicherung enthalten finanzmathematische Bewertungen in den Optionen und finanzmathematische Anlagestrategien, wie das Asset-Liability-Management, die ausschlaggebend für den Erfolg der Versicherungsunternehmen sind. Dem gegenüber profitieren Banken von traditionellen Ansätzen in der Versicherungsmathematik, wie beispielsweise bei der Modellierung von operationalen Risiken. Ebenfalls gewinnt das finanzielle bzw. quantitative Risikomanagement außerhalb der Finanz- und Versicherungswelt an

Bedeutung, wobei die finanz- und versicherungsmathematischen Elemente nach wie vor eine große Bedeutung haben. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 11.)

Das Risikomanagement im heutigen Sinne ist nicht länger ein spezifisches Managementkonzept, sondern ein integraler Bestandteil der strategischen Unternehmensführung, welches für den bewussten Umgang mit Risiken verantwortlich ist. Als Subfunktion zur Unternehmensführung, die die allgemeine Optimierung von Unternehmenszielen verfolgt, widmet sich das Risikomanagement umfassend und systematisch der weitgehenden Eliminierung von existenzbedrohenden Abweichungen zu den angestrebten Zielsetzungen. Dadurch erhält das Risikomanagement eine Existenz-, Erfolgspotenzial- und Ertragssicherungsfunktion, wobei die Existenzsicherung allen Funktionen übergeordnet ist. (vgl. Niggemann, 2013, S. 12)

### **2.3 Entwicklungen der Finanzmarktregulierung**

Die gesetzlichen und institutionellen Rahmenbedingungen spielten eine wesentliche Rolle in der Entwicklung des Finanzwesens und damit des Risikomanagements. Dabei kann bereits die Etablierung von Börsen als eine Erscheinungsform der Finanzmarktregulierung angesehen werden, da hier klare Regeln für die Abwicklung von Finanzgeschäften aufgestellt wurden. Lange war hier die Ansichtswiese, dass die beste Entwicklung der Finanzmärkte im „freien Spiel der Kräfte“ erfolgen würde. Doch nach der im Jahr 1929 eingetretenen Weltwirtschaftskrise, wurden in den USA unterschiedliche Ansätze der Finanzmarktregulierung entwickelt. Auch wenn diese anfänglich nicht sehr ausgereift waren, wurde die intensive Weiterentwicklung der Denkansätze mit der Verbreitung von derivativen Finanzinstrumenten und anderer neuer Finanzinstrumente notwendig. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 11.)

## 2.4 Bankenaufsicht

Im Jahr 1974 erfolgte durch die Zentralbanken und Bankaufsichtsbehörden der G-10 Staaten die Gründung des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht. Anlassfall war der Zusammenbruch der Herstatt-Bank und das Bestreben derartige Fälle in Zukunft zu vermeiden. Seither werden durch den Ausschuss Richtlinien und Empfehlungen formuliert, die keine Rechtsbindung haben, jedoch von den am Basler Ausschuss beteiligten Staaten umzusetzen sind. Das 1988 entwickelte Basel I bzw. der erste Basler Akkord bezeichnet dabei die Vereinbarung zur Mindesteigenkapitalausstattung und der damit abzusichernden Zahlungsfähigkeiten von Banken. Der Schwerpunkt lag dabei auf dem Kreditausfallrisiko. Risiken aus derivativen Finanzinstrumenten waren hier noch unzureichend berücksichtigt. In den darauffolgenden Jahren wurde durch die Bank J.P. Morgan das System des RiskMetrics zur Marktpreisrisikobewertung entwickelt. Die Berechnung des Gesamtrisikos erfolgte dabei auf Basis von verschiedenen Risikofaktoren, wie dem Aktienkurs- und Zinsniveau, der Rohstoffpreise und der Wechselkurse unter der Berücksichtigung von Korrelationsbeziehungen. Dabei setzte sich vor allem das Risikomaß Value at Risk als Standard durch.

Im Jahr 2001 wurde ein zweiter Konsultationsprozess unter dem Namen Basel II durch den Basler Ausschuss in Gang gesetzt. Die Zielsetzung war dabei die Weiterentwicklung und Modernisierung der bestehenden Ansätze von Basel I. Eine bedeutende Weiterentwicklung war dabei die Einbeziehung des operationellen Risikos und die Aufstellung des sogenannten Drei Säulen Modells. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 12.)

Mit der globalen Finanzkrise im Jahr 2007 wurden jedoch auch hier Schwachstellen in der Bankenregulierung identifiziert. Für eine frühzeitige Identifikation von systemischen Problemen und die Abwehr von Krisen waren die bestehenden Regelwerke noch nicht ausreichend. Daraufhin erfolgten weitere Konsultationen und ein Treffen der nun G-20 Staaten fand statt, um das umfangreiche Rahmenwerk zu Basel III zu beschließen und damit einen erneuten Kriseneintritt zu vermeiden. (vgl. Piechocki, 2017, S.28)

Im Jahr 2010 wurden die neuen Basel III Vorgaben veröffentlicht, die die Verbesserung von Eigenkapital und der Liquiditätsausstattung zum Ziel hatten. Dabei waren nun Banken nicht nur zu einer höheren Eigenkapitalausstattung, sondern zum Vorhalten von qualitativ höherwertigerem Eigenkapital verpflichtet. Das entwickelte Drei Säulen Modell (siehe Abb. 1) wurde weiterhin beibehalten. (vgl. Döhring & Hromadka, 2015, S. 101).

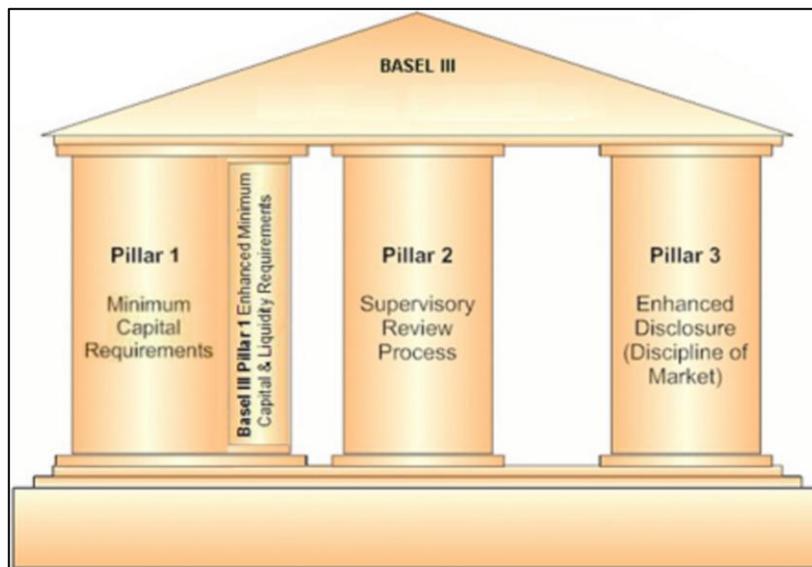


Abbildung 1: Drei Säulen Modell von Basel III (IBM Knowledge Center, 2018, online.)

Seit 2014 arbeitet der Basler Ausschuss nun an einer weiteren Ausgestaltung des bestehenden Rahmenwerks von Basel III. Die Überarbeitungen zur Finalisierung von Basel III werden dabei oft auch als „Basel IV“ bezeichnet. Die Weiterentwicklungen bzw. Überarbeitungen betreffen hier insbesondere die Verfahren zur Risikomessung innerhalb der Säule I. Im Fokus stehen dabei die risikogewichteten Kredit- und Marktrisikopositionen und die operationellen Risiken der Banken. Die Neuerungen richten sich dabei insbesondere an Banken, die für die Ermittlung ihrer regulatorischen Eigenmittelanforderungen ein internes Modell verwenden. Die Umsetzung des Reformpaketes soll bis zum 1.1.2022 erfolgen. (vgl. Andrae et al., 2018, S. 39f).

## 2.5 Versicherungsaufsicht

Auch im Bereich der Versicherungen gab es bereits seit langem regulatorische Ansätze für das Risikomanagement. Sowohl im Versicherungsaufsichtsgesetz als auch in den Rundschreiben und Verordnungen der nationalen Aufsichtsbehörde ist festgelegt, dass die Kalkulation von Prämien und die Berechnung von versicherungstechnischen Rückstellungen nach anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik zu erfolgen hat. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 12.)

Ähnlich wie in der Bankenwelt, wurden in der EU für das Versicherungswesen ebenfalls in den 1970er Jahren Solvenzanforderungen für die Versicherungsaufsicht festgelegt. (vgl. Wengert/Schnittenhelm, 2013, S. 103.) Da das Projekt auf EU-Ebene abgewickelt wurde und die Versicherungsmärkte der Mitgliedsstaaten sehr unterschiedlich waren, wurde das Projekt in zwei Abschnitten, der Solvency I und Solvency II, umgesetzt. (vgl. Schreiber, 2016, S. 17.)

Dabei erfolgte vor allem mit der Einführung von Solvency II im Jahr 2016 eine grundlegende Reformierung des Versicherungsaufsichtsrechts. Die neue Reform betraf im Speziellen die Eigenmittelanforderungen bzw. die Solvabilitätsvorschriften. Das unter Solvency I noch statische Berechnungssystem wurde durch eine risikobasierte Berechnung ersetzt. Und auch qualitative Aspekte, wie das Governance System und das Risikomanagement finden unter Solvency II eine stärkere Berücksichtigung. Ebenfalls sollte eine Kompatibilität mit dem ehemaligen Basel II erreicht werden. (vgl. FMA, 2019, online.)

Dahingehend wurde ebenfalls unter Solvency II ein Drei Säulen Modell, das sich bereits in der Bankenaufsicht etabliert hatte, eingeführt. Während in der Säule I auf die quantitativen Anforderungen an die Kapitalausstattung von Versicherungsunternehmen eingegangen wird, umfassen die Säulen II und III qualitative Vorgaben. Die Säule II umfasst dabei die Geschäftsorganisation und Grundsätze sowie Methoden der Aufsicht und die Säule III regelt die unterschiedlichen Informations- und Berichtspflichten.

### **3. Grundlegende Überlegungen zum Risiko**

Zukunftsorientierte Entscheidungen, die für oder in einem Unternehmen getroffen werden, bergen Risiken in sich, da diese unter Unsicherheit getroffen werden. In den Wirtschaftswissenschaften ist der Risikobegriff mit unterschiedlichen Bedeutungen behaftet. Eine Einigung wurde unter dessen darin erzielt, als dass die Entscheidungsträger in der Realität die Entscheidungen über ihre Handlungen unter dem Faktor der Unsicherheit hinsichtlich der Ergebnisse ihrer Handlungen treffen. Zum einen wird die Unsicherheit aufgrund der unvorhersehbaren Umwelteinflüsse, welche sich auf die kausale und finale Beziehung von Handlung und Ereignis auswirken, bewirkt. Zum anderen ist keine vollkommene Information über den Zusammenhang von Handlung und Ergebnis vorliegend (vgl. Paetzmann, 2008, S. 53).

Um zu einem besseren Verständnis über den Begriff des Risikos zu gelangen, wird im Folgenden auf die unterschiedlichen Begriffsdefinitionen sowie die Unterscheidung von Risikoarten eingegangen.

#### **3.1 Der Risikobegriff**

Definitionen des Risikobegriffs finden sich in unterschiedlichen Bereichen bzw. in unterschiedlichen Formen wieder. Abhängig vom Kontext kann unter Risiko eine Situation mit ungewissem bzw. negativem Ausgang, die Wahrscheinlichkeit für einen ungewissen bzw. negativen Ausgang oder die Ungewissheit des bzw. der negative Ausgang in einer zufälligen Situation umschrieben werden. (vgl. Stier, 2017, S. 12)

Im Hinblick auf die Untersuchung der Verbundenheit von Stochastik und Risikomanagement, wird im Folgenden auf den betriebswirtschaftlichen und statistischen Risikobegriff eingegangen.

## Betriebswirtschaftlicher Risikobegriff

Vorab ist anzumerken, dass in der Literatur keine einheitliche Definition oder Verwendung der Risikobegriffs vorliegen. Gemeinsam ist allen Definitionen jedoch das Verständnis, dass unter Risiko eine zukünftige Abweichung von geplanten Unternehmenszielen zu verstehen ist. Uneinigkeit liegt hingegen dahingehend vor, ob positive Abweichung von Unternehmenszielen im Sinne von Chancen ebenso in den Risikobegriff einzubeziehen sind und, ob Risiken auf finanzielle Ziele einzugrenzen sind. Hierzu werden Risiken im engeren Sinn sowie Risiken im weiteren Sinn unterschieden (siehe Abb. 2). Damit umfasst der Risikobegriff im engeren Sinn die Möglichkeit von Verlusten und damit negativen Abweichungen von Unternehmenszielen. Das Risiko im weiteren Sinn schließt dagegen negative und positive Abweichungen von Unternehmenszielen in die Definition mit ein, wobei hier eine negative Abweichung als Risiko und eine positive Abweichung als Chance bezeichnet wird (vgl. Vanini, 2012, S. 7 f.).

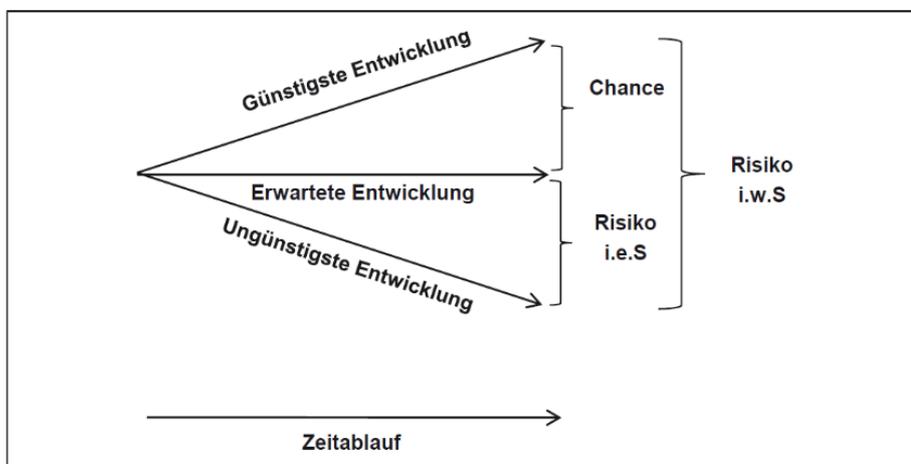


Abbildung 2: Risikobegriff (Niggemann, 2013, S. 10.)

Ein ausschließlich auf die Reduktion von Verlusten ausgerichtetes Risikomanagementsystem würde zwangsläufig das Einstellen der unternehmerischen Tätigkeiten einfordern, welches im Regelfall mit Verlustmöglichkeiten verbunden ist.

Eine Unternehmenswertsteigerung ist erst durch die gleichzeitige Optimierung der Risiken im engeren Sinn und der Chancen als Risiken im weiteren Sinn möglich. Dennoch ist der Großteil der implementierten Risikomanagementsysteme überwiegend auf die Reduzierung von potenziellen Schäden und Verlusten zur Sicherung der Existenz und des Ertrages ausgerichtet, da im Allgemeinen Investoren und Manager eine risikoaverse Einstellung haben und einen sicheren Ertrag vorziehen. (vgl. Niggemann, 2013, S. 10 f.)

Die betriebswirtschaftliche Definition des Risikos besagt also, dass unter Risiko die Kennzeichnung einer Eventualität erfolgt, dass mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit der Eintritt eines Schadens bei einer ökonomischen Entscheidung resultiert oder ein erwarteter Vorteil ausbleibt (vgl. Weber, 2008, online).

#### Statistischer Risikobegriff

Gemäß den Ausführungen von Cottin und Döhler wird der Risikobegriff unter dem statistischen Risikoaspekt folgendermaßen definiert:

*„Ein Risiko ist ein (Wert-) Objekt, das einer potenziellen zukünftigen Wertveränderung unterliegt (bezogen auf einen vorgegebenen Zeitraum oder eine vorgegebene Entscheidungssituation). Die Wertveränderung (und damit auch das Risiko selbst) wird beschrieben durch eine Zufallsvariable bzw. deren Wahrscheinlichkeitsverteilung und ggf. zusätzlich als Funktion verschiedener wertbeeinflussender Variablen und Parameter.“ (Cottin/Döhler, 2013, S.5)*

## **3.2 Risikoarten**

Es liegt eine Vielzahl von Möglichkeiten für die Systematisierung von Risikoarten vor. Der Ansatz für die Systematisierung ist dabei von der entsprechenden Fragestellung und Betrachtung abhängig. Im Folgenden werden Risikoarten anhand von zwei dichotomen Begriffspaaren unterschieden: die Unterteilung von Risiken in systematische und unsystematische Risiken und die Unterteilung der Risiken in leistungswirtschaftliche und finanzwirtschaftliche Risiken.

### **3.2.1 Systematisches und unsystematisches Risiko**

Die Unterscheidung zwischen systematischem und unsystematischem Risiko resultiert aus einer kapitalmarktbezogenen Betrachtung. Aus jeder Investition in Wertpapiere resultiert ein Risiko hinsichtlich der Renditesteuerung. Ein Teil des Risikos kann durch eine effiziente Streuung der Investition in unterschiedliche Wertpapiere, somit durch Diversifikation, vermieden werden. Ein weiterer Teil des Risikos verbleibt und kann auch mit einer effizienten Mischung der Gesamtinvestition nicht vermieden werden. Dabei stellt das diversifizierbare Risiko das unsystematische Risiko dar und das nicht diversifizierbare Risiko das systematische Risiko dar, die in Summe das Gesamtrisiko abbilden.

Das systematische Risiko bildet das Marktrisiko ab. Dieses wirkt sich in der Kapitalmarkt Betrachtung auf sämtliche Wertpapiere gleichermaßen aus. Die Ursachen für etwaige Auswirkungen können dabei unter anderem in der allgemeinen Inflation, in politischen Entwicklungen oder dem Eintritt von Naturkatastrophen liegen.

Das unsystematische Risiko wird ebenfalls als investmentspezifisches oder unternehmensindividuelles Risiko bezeichnet. Dieses Risiko tritt bei bestimmten Einzelwerten, und nicht gleichzeitig bei allen Wertpapieren auf. Die Risikoreduktion wird durch die Bildung eines Portfolios mit unterschiedlichen Investitionen in nicht vollständig positiv miteinander korrelierenden Anlagen bzw. Wertpapieren vorgenommen. Als

typisches Beispiel für ein unsystematisches Risiko kann dabei das Bonitätsrisiko genannt werden, welches jedenfalls nicht durchgängig ident für unterschiedliche Anlagemöglichkeiten sein kann. (vgl. Wirtschaftslexikon24.com, online.)

### **3.2.1 Leistungswirtschaftliches und finanzwirtschaftliches Risiko**

Ebenso wie die Aktivitäten in einem Unternehmen in leistungswirtschaftliche und finanzwirtschaftliche Bereiche unterteilt werden können, ist auch die Kategorisierung der Risiken, welchen das Unternehmen ausgesetzt ist, in diese zwei Teilbereiche möglich. In der Regel werden hier Risiken im engeren Sinne angesprochen, somit Risiken mit der Gefahr einer negativen Zielabweichung.

Die leistungswirtschaftlichen Risiken sind dabei mit der Güter- und Dienstleistungserstellung in einem Unternehmen und dem Absatz der erstellten Güter und Dienstleistungen im Markt verbunden. Dahingehend können die leistungswirtschaftlichen Risiken in Betriebsrisiken für den Leistungserstellungsprozess, Absatzrisiken für die Umsatzerzielung und Beschaffungsrisiken für den Bezug von Gütern unterschieden werden.

Die finanzwirtschaftlichen Risiken adressieren die Finanzierung und Liquiditätssituation des Unternehmens. Eine Untergliederung wird hier vorgenommen in Marktpreisrisiko, Kreditrisiko und Liquiditätsrisiko.

Zu beachten ist dabei, dass eine vollständige Abgrenzung beider Risiken nicht möglich ist, da hier ebenfalls eine Wechselwirkung besteht, indem der Eintritt von einem Risiko, wie des Absatzrisikos, automatisch zur Erhöhung des Liquiditätsrisikos führen kann. (vgl. Stier, 2017, S. 22)

## **4. Grundlagen des Risikomanagement**

Die Übernahme bzw. das Eingehen von Risiken ist ein grundlegender Bestandteil der Unternehmenstätigkeit. Doch insbesondere mit dem Einhergehen der Finanzkrisen in der jüngsten Vergangenheit rückt das Risikomanagement als eigenständiger Funktionsbereich noch stärker in den Fokus der Unternehmensführung. Die Auseinandersetzung mit der Risikoposition eines Unternehmens und die Absicherung der Risiken im Umfeld des Unternehmens haben sich dahingehend zu einem festen Bestandteil der Führungssysteme von Unternehmen entwickelt (vgl. Stier, 2017, S. 11).

### **4.1 Begriffsdefinition**

Als Risikomanagement werden alle Aktivitäten bezeichnet, die den Umgang mit Risiken und Chancen eines Unternehmens umfassen. (vgl. Gleißner, 2019, online)

Unternehmerisches Handeln ist stets mit Risiken verbunden, da die Folgen von Entscheidungen des Managements mit Unsicherheit behaftet sind und nicht alle Entwicklungen in der Umwelt des Unternehmens vollständig prognostiziert werden können. Bei Schlagendwerden von Risiken wird die Erfolgssituation eines Unternehmens negativ beeinflusst sowie ein potenzielles Insolvenzrisiko erhöht.

Beim Auftreten von gewissen Risiken haben Unternehmen stets mit Managementaktivitäten reagiert. Das Risikomanagement hat sich indessen ursprünglich aus dem betrieblichen Schadens- und Versicherungswesen zur Absicherung gegen Naturkatastrophenschäden entwickelt. In weiterer Folge gewann das Risikomanagement mit der Globalisierung und der zunehmenden internationalen geschäftlichen Aktivitäten der Unternehmen an Bedeutung, da Absicherungen gegen Preis-, Zins- und Währungskursschwankungen erforderlich wurden. Die mittlerweile Vielzahl an möglichen Risikoquellen und ihrer Wechselwirkungen und Verflochtenheit erfordern ein integriertes Risikomanagement als Bestandteil der Unternehmensführung. (vgl. Vanini, 2012, S. 1 ff.).

## 4.2 Risikopolitik

Ein wesentlicher Bestandteil der Unternehmensstrategie ist die Risikopolitik. In Abhängigkeit der Risikopräferenz und von festgelegten Unternehmensleitlinien über den Umgang und die einzugehenden Risiken, wird die Risikopolitik kodifiziert. Diese umfasst sowohl aufbau- als auch ablauforganisatorische Vorgaben mit einer Schwerpunktsetzung auf Verantwortlichkeiten sowie Methoden und Instrumente. Damit setzt die Risikopolitik ein Rahmenwerk für die Ausgestaltung des Risikomanagements.

Ein wesentlicher Bestandteil der Risikopolitik ist die Festsetzung einer Verlustobergrenze, somit des risikodeckenden Kapitals. Die unternehmensweite Risikopolitik kann durch u.a. Limitsysteme auf einzelne Geschäftsfelder heruntergebrochen werden. Dadurch legt das Management implizit eine Risikopräferenz und ein Rendite-Risiko-Verhältnis fest. Dabei sollte die Risikopolitik jährlich, im Hinblick auf die sich verändernde Risikogesamtsituation und der sich ergebenden unternehmerischen Chancen, überprüft und gegebenenfalls angepasst werden.

Die Risikomanagementstile können dabei grundsätzlich in vier Kategorien unterteilt werden, welche der folgenden Abbildung zu entnehmen sind (vgl. Niggemann, 2013, S.21 ff):



Abbildung 3: Risikomanagementstile (Niggemann, 2013, S. 22.)

Ausgangspunkt ist dabei eine Entscheidung zwischen zwei sich gegenseitig ausschließenden Alternativen zu treffen. Diese haben hinsichtlich ihres Ergebnisses denselben Erwartungswert, in ihrem Risiko sind sie jedoch unterschiedlich. Fällt die Entscheidung dabei für die Alternative mit dem höheren Risiko, so spricht man von Risikoaffinität. Ist die Entscheidung für eine Person gleichgültig, im Sinne von beide Alternativen sind der Person gleichbedeutend, so liegt Risikoneutralität vor. Fällt die Entscheidung hingegen für die Alternative mit dem geringeren Risiko, so handelt es sich um Risikoaversion. (vgl. Finke, 2017, S. 24 f.)

Jedenfalls sind jedoch folgende allgemeine risikopolitische Grundsätze unabhängig von der gewählten Risikopräferenz stets zu beachten (vgl. Niggemann, 2013, S. 22 f.):

- Das unternehmerische Handeln ist notwendigerweise mit Risiken verbunden.
- Es sind existenzbedrohende Risiken zu vermeiden.
- Die Risiken sind durch die erwirtschafteten Renditen angemessen zu prämiieren.
- Die Risiken sind weitgehend mittels des Instrumentariums des Risikomanagements zu steuern.

### 4.3 Ziele

Die Entstehung von Risiken erfolgt vor dem Niederschlag ihrer Auswirkungen auf das Erfolgsziel. Nach der Ansoffschen Idee der schwachen Signale, ist die Erkennung von Risiken vor dem Eintritt ihrer Auswirkungen möglich. Je früher die Erkennung stattfindet, desto größer ist eine präventive Beeinflussung möglich. Daraus resultiert das Erfordernis eines Risikofrüherkennungssystems und einer Risikosteuerung.

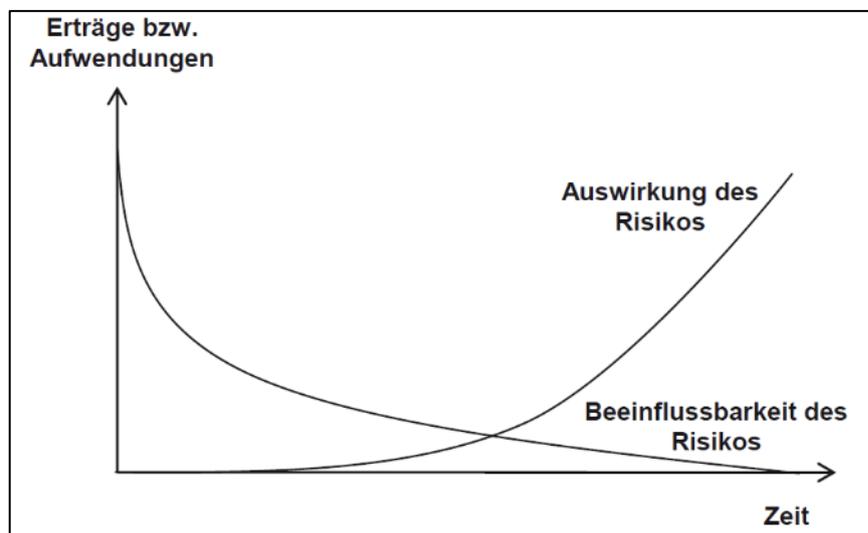


Abbildung 4: Risikoentstehung und Ertragsauswirkung (Niggemann, 2013, S. 15.)

Die drei Hauptziele eines Risikomanagementsystems, in welchem sich weitere Einzelziele wiederfinden, sind:

- Die Existenzsicherung eines Unternehmens.
- Die Erfüllung von gesetzlichen bzw. regulatorischen Anforderungen.
- Die Erhöhung des Unternehmenswertes.

Zwischen der Aufgabe zur Existenzsicherung und der Aufgabe zur Wertsteigerung entsteht jedoch ein Spannungsfeld, wenn ein gewinnoptimaler Sicherheitsgrad

überschritten wird. Geringe Risikokosten haben einen positiven Beitrag zum Unternehmenswert. Bei großer Unsicherheit können zunächst günstigere Sicherheitsmaßnahmen eingesetzt werden, um die Erträge zu steigern oder hohe Aufwendungen zu vermeiden. Mit dem zunehmenden Grad an Sicherheit steigen jedoch ebenfalls die Grenzkosten für die ergriffenen Sicherheitsmaßnahmen an. Ab einem bestimmten Punkt übersteigen sodann die zusätzlichen Kosten für Sicherheit die zusätzlichen Erträge bzw. abgewendeten Aufwendungen. Somit gibt es einen gewinnoptimalen Sicherheitsgrad:

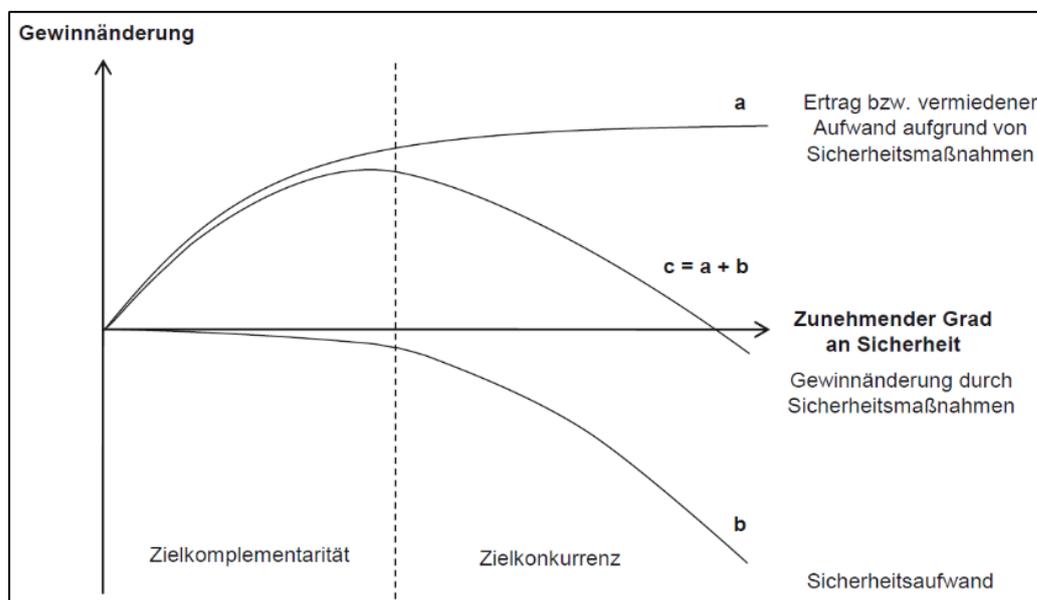


Abbildung 5: Beziehung Sicherheits- und Gewinnziel (Niggemann, 2013, S. 20)

Zwei der drei Risikomanagementziele, die Reduktion der Insolvenzwahrscheinlichkeit und die Einhaltung der gesetzlichen Vorschriften, zielen auf den Risikobegriff im engeren Sinn ab. Das dritte Ziel zur Wertsteigerung des Unternehmens erfordert jedoch ebenfalls die Einbeziehung von potenziellen Chancen, um durch eine Optimierung des Risiko-Chancen-Verhältnisses, den Unternehmenswert zu erhöhen. (vgl. Niggemann, 2013, S. 14 ff.)

## 4.4 Phasen des Risikomanagement Prozesses

Das Risikomanagement ist als ein dynamischer Prozess und nicht als eine statische bzw. einmalige Handlung zu verstehen. In der gängigen Literatur und unter verschiedenen Modifikationen findet sich der Prozess als folgende Darstellung wieder:

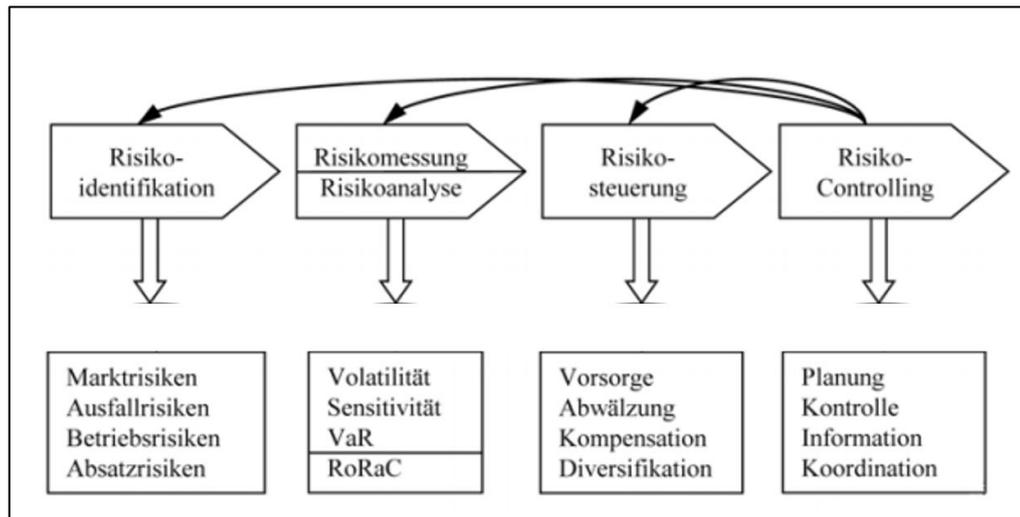
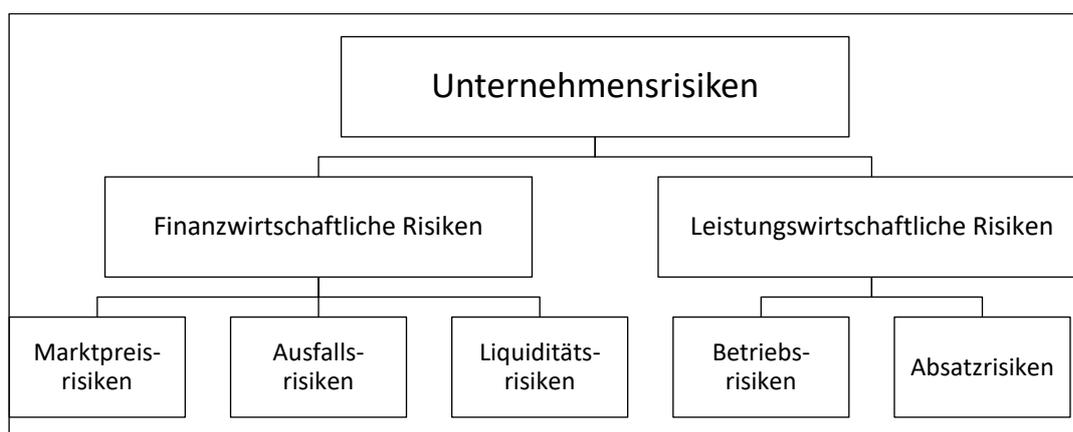


Abbildung 6: Phasen des Risikomanagementprozesses (In Anlehnung an Wolke, 2016, S. 5)

### 4.4.1 Risikoerhebung und Risikoidentifikation

In einem ersten Schritt müssen alle betriebswirtschaftlichen Risiken erhoben und erfasst werden. Hierfür sind unterschiedliche Herangehensweisen möglich, wobei diese von Besonderheiten des Unternehmens und den Unternehmensstrukturen abhängen können. Zur Erhebung können unterschiedliche Instrumente zum Einsatz kommen und eine allgemeingültige Verallgemeinerung ist kaum möglich. Es ist jedenfalls darauf zu achten, dass die Bedeutung von Risikoarten stark von Faktoren, wie Branchenspezifika, Regionalität, oder Produkttypen abhängen kann. Als allgemeine Grundprinzipien und Basisinstrumente zur Risikoidentifikation können beispielsweise Analyseraster, Risikotabellen, Interviews und Ablauf- bzw. Prozessanalysen dienen. Wesentlich ist hierbei die Systematisierung der unterschiedlichen Risikoarten.

Eine erste Unterscheidung ist zwischen naturwissenschaftlichen Risiken, wie Erdbeben, und wirtschaftswissenschaftlichen Risiken, die dazugehörigen Risiken in der Rückversicherung, vorzunehmen. Diese Unterscheidung kann auf den ersten Blick obsolet wirken, ist jedoch aufgrund von Wechselwirkungen zwischen beispielsweise Naturkatastrophen und der Wirtschaft von Bedeutung. In weiterer Folge ist zwischen betriebswirtschaftlichen und volkswirtschaftlichen Risiken zu unterscheiden. Hier kann eine klare Trennung teilweise im Hinblick auf die aufeinander wirkenden Einflüsse schwierig sein, da beispielsweise Konjunkturrisiken in der Volkswirtschaft sich auf das Absatzrisiko der Unternehmen auswirken können. Auf der betriebswirtschaftlichen bzw. unternehmerischen Ebene können letztlich Risiken betreffend der Finanzwirtschaft und betreffend der Leistungswirtschaft unterschieden werden. Innerhalb der finanzwirtschaftlichen Risiken wird in weiterer Folge eine Unterscheidung zwischen Markt-, Kredit- und Liquiditätsrisiko vorgenommen. Die leistungswirtschaftlichen Risiken werden hingegen in Betriebsrisiken und Absatz- bzw. Beschaffungsrisiken kategorisiert. Auch hier ist auf die Abhängigkeiten zwischen den unterschiedlichen Risiken hinzuweisen. Beispielsweise ist bei einem hohen Kreditrisiko und einem eintretenden Ausfall, ein potenzielles Liquiditätsrisiko genauso möglich, wie das Eintreten von Insolvenzen, das dem Kreditrisiko entspricht, aufgrund von gefallenem Aktienkursen einer Gesellschaft innerhalb des Marktrisikos. (vgl. Wolke, 2016, S. 6 ff.)



**Abbildung 7: Überblick zur Gliederung der betriebswirtschaftlichen Risiken**  
(In Anlehnung an Wolke, 2016, S. 6 ff.)

## 4.4.2 Risikoanalyse und Risikobewertung

Auf die Risikoidentifikation folgt die Risikomessung. Durch die Messung der Risiken sind deren Analyse und anschließende Bewertung möglich. Zunächst ist bei der Risikomessung zwischen quantitativen und qualitativen Verfahren zu unterscheiden. Die quantitativen Verfahren umfassen die Kennzahlenberechnung mittels beobachtbarer Preise, Kurse, oder anderer Marktdaten. Wenn Marktdaten aus unterschiedlichen Gründen nicht vorliegen und quantitativ erfasst werden können, ist ein Rückgriff auf qualitative Messfahren erforderlich. In der vorgenommenen Risikoanalyse werden die Messergebnisse anschließend ausgewertet und hinsichtlich relevanter Risiken überprüft. Das Ziel hierbei ist es herauszufinden, ob die Messergebnisse relevante Risiken aufzeigen, die einen Handlungsbedarf erfordern. Die Risikomessung kann als Kern des Risikomanagements bezeichnet werden, da nur Risiken, die erfasst und auch gemessen werden, anschließend geplant und gesteuert werden können. Einen Überblick zu den unterschiedlichen Risikomaßen gibt folgende Darstellung (vgl. Wolke, 2016, S. 13 ff.):

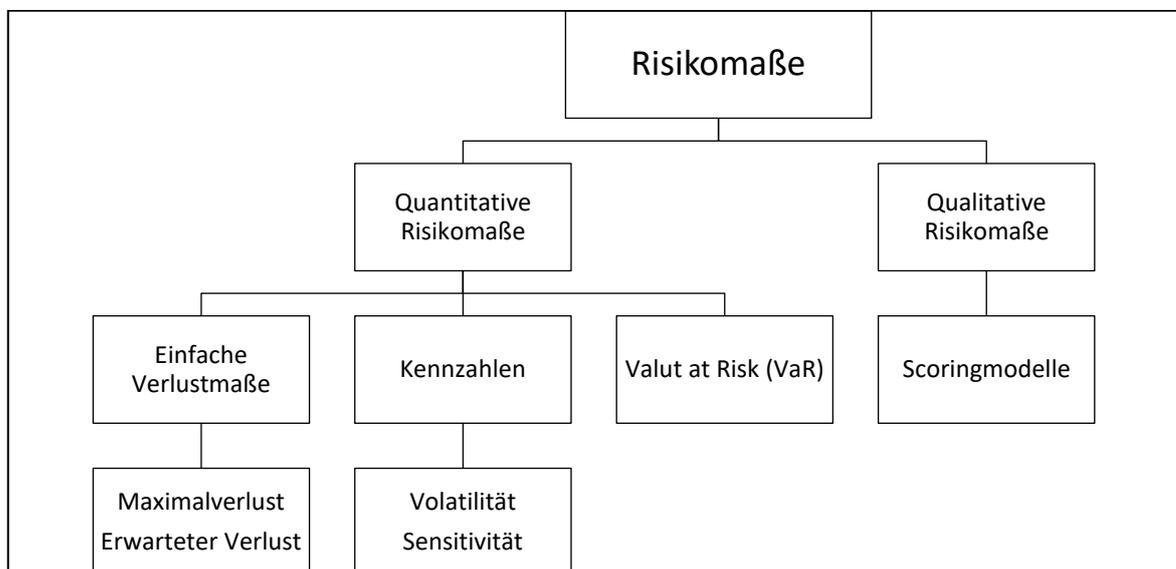


Abbildung 8: Übersicht der Risikomaße (In Anlehnung an Wolke, 2016, S.13.)

### 4.4.3 Risikosteuerung

Das Ergebnis der Risikoanalyse dient als Grundlage für die Risikosteuerung. Es führt zu der Fragestellung, welche Maßnahmen der Unternehmenssteuerung durchzuführen sind, um die Risikosteuerung vorzunehmen. Steuerungsinstrumente, die in nahezu jedem Unternehmen angewendet werden können, sind in vier Kategorien zu gliedern:

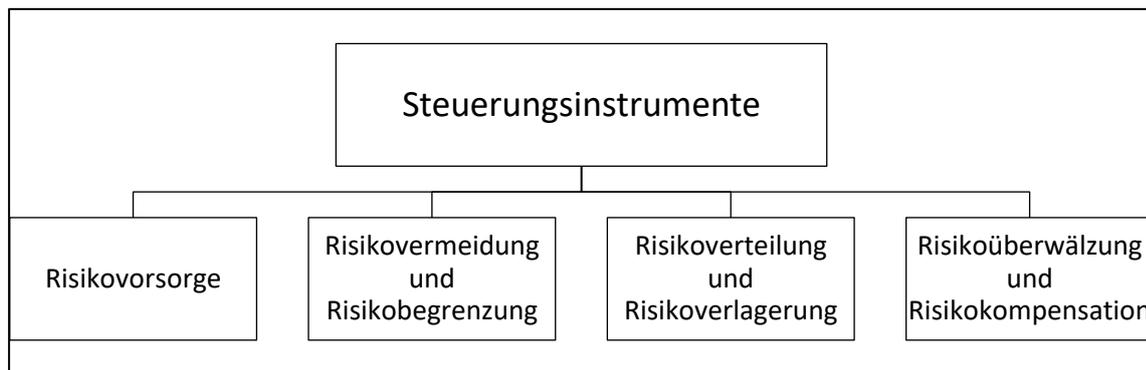


Abbildung 9: Instrumente der Risikosteuerung (In Anlehnung an Wolke, 2016, S. 93.)

Hierbei wird jedoch keine Risikostrategie im Sinne von „das gesamte Risiko eingehen“ angeführt, da in diesem Fall keine Risikosteuerung vorliegt bzw. erfolgen kann. Das Unternehmen entscheidet sich für das volle Risiko, um dadurch die Option für die damit verbundenen Gewinnchancen offen zu halten.

Die Risikovorsorge stellt dabei die Planung von in der Zukunft liegenden Risiken im Hinblick auf die heutige und zukünftige erforderliche Risikotragefähigkeit dar. Die Risikotragfähigkeit eines Unternehmens kann als das Eigenkapital gesehen werden, d.h. den Mitteln, die dem Unternehmen zur Deckung der bewusst eingegangenen Risiken zur Verfügung stehen. Eine weitere Möglichkeit stellt die Bestellung von Sicherheiten dar. Sicherheiten spielen vor allem in Kreditinstituten eine große Rolle. Jedoch kann diese Art der Risikovorsorge, durch Sicherungsübereignungen, Eigentumsvorbehalten und Bürgschaften auch für Nichtbanken relevant sein.

Die Risikovermeidung und Risikobegrenzung zielen auf das Steuerungsziel der Risikobegrenzung mittels festgelegter Limits ab. Limits für Risikobegrenzungen gibt es in unterschiedlichsten Ausprägungen. Als Beispiele hierfür können Limits von Finanzpositionen genannt werden, wie Nominallimits, Stop-Loss-Limits, Sensitivitäts-Limits oder Szenario-Limits.

Die Risikoverteilung nutzt Diversifikationseffekte zur Begrenzung von Risiken, womit das zusammengefasste Risiko mindestens zweier Vermögenspositionen geringer ist als die Summe der einzelnen Risiken. Das Diversifikationsprinzip kann hierbei auf Geschäftsfelder, Dienstleistungen und Produkte angewandt werden. Die Risikoverlagerung hingegen sieht vor, dass bestimmte Risiken aus dem Unternehmen herausgenommen und in unternehmensfremde Bereiche und Organisationen hineingebracht werden. Hierbei werden jedoch auch die mit dem Risiko verbundenen Gewinnmöglichkeiten herausgenommen.

Die Risikoüberwälzung sieht vor, dass die risikoverursachenden Vermögensgegenstände im Unternehmen verbleiben und durch einen Vertragsabschluss ein potenzieller zukünftiger Vermögensverlust, im Gegenzug zu einer Gegenleistung in Form einer Prämie, überwältigt wird. Versicherungsabschlüsse sind hierbei die bedeutsamsten und häufigsten angewendeten Steuerungsinstrumente für die Risikoüberwälzung, wobei sich auch Factoring, Leasing und Franchising ebenfalls, abhängig von der Vertragsvariante, dafür eignen können. Bei der Risikokompensation hingegen wird zum risikoverursachenden Vermögensgegenstand ein zusätzlicher Finanztitel gekauft, die mögliche Verluste aus dem ursprünglichen Vermögensgegenstand durch zeitgleiche Gewinne kompensiert. Bei diesen Finanztiteln handelt es sich um Derivate, also von den Basistiteln abgeleitete Finanzinstrumente, wie Optionen, Futures oder Swaps. (vgl. Wolke, 2016, S. 93 ff.).

#### **4.4.4 Risikocontrolling**

Der organisatorische Aspekt des Risikomanagements wird schließlich im Risikocontrolling behandelt. Hier wird u.a. die Aufbau- und Ablauforganisation in einem Unternehmen im Hinblick auf die risikoverursachenden und risikokontrollierenden Organisationseinheiten betrachtet. Hauptaufgaben des Risikocontrollings stellen die Überwachung, das Risiko-Reporting sowie die Unterstützung der Unternehmensführung dar. Die Kontrollfunktion des Risikocontrollings sieht die Durchführung von Abweichungsanalysen zwischen Ist-Zustand und dem Soll-Zustand der ursprünglich geplanten Risiken vor, um etwaige Erhöhungen von Kennzahlen festzustellen. Als typische Kontrolltätigkeit dient das Backtesting, im Zuge dessen die Zuverlässigkeit der verwendeten Rechenmethoden überprüft wird, indem man die Vorhersagewerte mit den tatsächlich eingetretenen Verlusten abgleicht. Die Informationsfunktion des Risikocontrollings wird durch die Berichterstattung an Unternehmensführung, Geschäftsfelder- und Organisationseinheiten wahrgenommen. Für die Berichterstattung an die Unternehmensführung steht dabei die Risikoaggregation im Vordergrund. Durch die Unterstützungsfunktion wird die eigentliche risikobasierte Unternehmenssteuerung gemeinsam mit der Unternehmensführung vorgenommen. Es werden die klassischen Unternehmensziele, wie z.B. Eigenkapitalrentabilität oder Absatz und Kosten, um die mit diesen Zielen verbundenen Risiken ergänzt. Dadurch wird die Unternehmensplanung unter Berücksichtigung möglicher künftiger Risiken qualitativ verbessert. Basis einer risikoorientierten Unternehmenssteuerung stellt hierbei das Konzept des Return on Risk adjusted Capital dar (RoRaC). (vgl. Wolke, 2016, S. 5 f. u. 300 ff.).

Die unterschiedlichen Phasen des Risikomanagements stellen einen Kreislauf dar und können Wechselwirkungen aufweisen. Ergebnisse unterschiedlicher Phasen und die Entscheidungen im Zuge der Risikopolitik können Auswirkungen auf die Risikosteuerung bzw. die Maßnahmen der Risikosteuerung haben. Ebenfalls könnten die Ergebnisse zur Berücksichtigung bislang unbeachteter Risikoarten führen oder Änderungen für die Vorgaben der Risikoanalyse abverlangen. (vgl. Wolke, 2016, S. 6.)

## 5. Mathematische Modellierung von Risiken

Aus den Annahmen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung werden für ein einzelnes Risiko oder für Gesamtrisiken, bestehend aus mehreren Einzelrisiken, Modelle gebildet. Dabei ist jedenfalls eine Gesamtrisikobetrachtung erstrebenswert, auch wenn diese trotz Vereinfachungen eine sehr komplexe Ausgestaltung aufweisen. Die Definition für Einzelrisiken ist dabei vom Kontext und Detaillierungsgrad der Modellierung abhängig.

Hinsichtlich des zeitlichen Aspekts ist bei der Risikomodellierung zwischen der Betrachtung eines festen Zeitpunktes und der Betrachtung von Verläufen zu unterscheiden. Damit handelt es sich um eine Menge der Zufallsvariablen  $\{X_t \mid t \in T\}$ . Dabei bildet  $T$  die Menge der Zeitpunkte ab. Wenn  $T = \mathbb{N}_0$  ist, handelt es sich um einen zeitdiskreten Prozess, wenn  $T = \mathbb{R}_0^+$  oder ein Intervall ist, dann handelt es sich um einen zeitstetigen Prozess. Bei Prozessen, die zeitdiskret sind, erfolgt die Erfassung der Zufallsgröße nur zu bestimmten Zeitpunkten. Dabei kann die zugrunde liegende Zeiteinheit beliebig klein oder groß festgelegt werden. Die Darstellung der Zufallsgröße in zeitstetigen Prozessen erfolgt dagegen zu jedem Zeitpunkt eines Zeitintervalls.

In der Praxis der Risikomodellierung spielen stochastische Prozesse eine große Rolle. Die Beschreibung von Finanzmarktphänomenen, wie die einer Schadenanzahlentwicklung, Wertentwicklung eines Vermögenswertes, wie beispielsweise einer Aktie, oder die Entwicklung von Marktzinsen, erfolgt oftmals durch stochastische Prozesse. Bei Simulationen wird häufig auch von stochastischen Szenarien für spezifische Schadenanzahl-, Kurs- oder Zinsentwicklungen gesprochen.

Da zur Bildung entsprechender Risikoreserven die Orientierung am Erwartungswert nicht ausreicht, wird der Blick auf Risikokennzahlen gerichtet, die aus der gesamten Schadenhöhenverteilung für unterschiedliche charakteristische Verteilungsparameter resultieren. Dahingehend werden im Folgenden unterschiedliche Verteilungsmodelle zur Modellierung von Einzelschäden betrachtet und potenzielle Einsatzgebiete dargestellt (vgl. Cottin/Döhler, 2013 S. 25 ff):

## 5.1 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist ein sehr vereinfachtes Modell. Eine auf dem Intervall  $[a; b]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $X$  hat die Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es wird für die Schadenmodellierung  $a \geq 0$  (oft  $a = 0$ ) definiert. Dabei gilt für den Erwartungswert bzw. die Varianz folgendes:

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$
$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Die Verteilungsfunktion von  $X$  sieht hierbei wie folgt aus:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a < x < b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$$

Die Dichte- und Verteilungsfunktion sind in folgender Darstellung abgebildet:

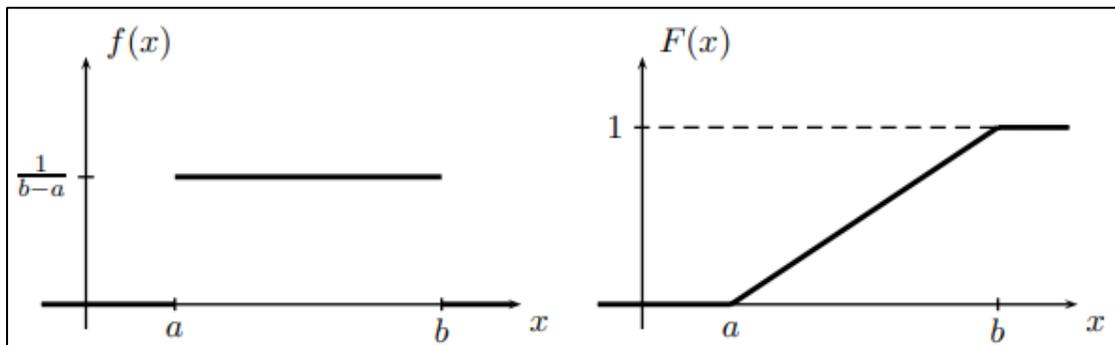


Abbildung 10: Dichte- und Verteilungsfunktion der Gleichverteilung (Henze, 2008, S. 265)

Die Anwendung der Gleichverteilung erfolgt bei Kleinschäden, die eine vorgegebene Obergrenze  $b$  haben, wie beispielsweise bei KFZ Kasko-Versicherungen, oder zur Modellierung von Schadenquoten. Ebenfalls dient sie als Ausgangspunkt zur Simulation anderer Verteilung und zur Generierung von Pseudozufallszahlen.

## 5.2 Exponentialverteilung, Erlang- und Gamma-Verteilung

Die Exponentialverteilung und Erlang-Verteilung sind spezielle Verteilungen der Gamma-Verteilung. Die Gamma-Funktion ist dabei definiert als:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} * e^{-t} dt$$

Die Dichtefunktion der Gamma-verteilten Zufallsvariable  $X \sim \Gamma(k; \lambda)$  mit den reellen Parametern  $k > 0$  und  $\lambda > 0$  hat für  $x > 0$  die Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} * x^{k-1} * e^{-\lambda x}$$

Dabei hängt die Gestalt der Dichtefunktion vom Parameter  $k$  (Formparameter) und die Stauchung oder Streckung um die x-Achse vom Parameter  $\lambda$  (Skalenparameter) ab, wie in folgender Abbildung zu sehen ist:

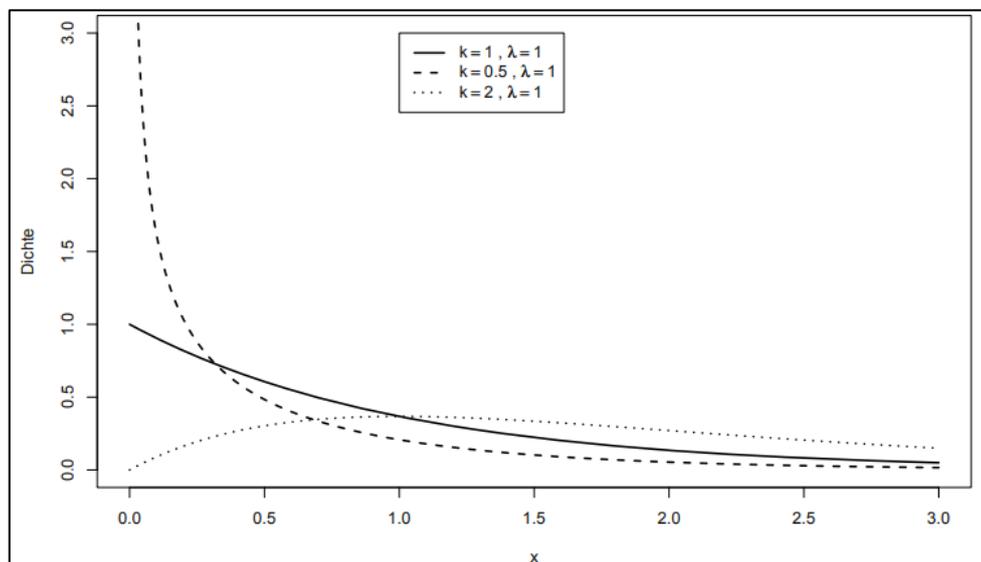


Abbildung 11: Dichte der Gamma-Verteilung (Cottin/Döhler, 2013 S. 32)

Der Erwartungswert, die Varianz und die Schiefe für  $X$  werden über folgende Formeln ausgedrückt:

$$E(X) = \frac{k}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{k}{\lambda^2}$$

$$\gamma(X) = \frac{2}{\sqrt{k}}$$

Die Erlang- Verteilung resultiert nun, wenn für die  $\Gamma$ -Verteilung ganzzahliges  $k$  gilt. Der Spezialfall der Exponentialverteilung  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  resultiert dabei im Falle das  $k = 1$  ist. Daraus ergeben sich für  $x \geq 0$  folgende Dichte- und Verteilungsfunktion für eine exponentialverteilte Zufallsvariable:

$$f(x) = \lambda * e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Der Einsatz der Gamma-Verteilung erfolgt häufig in der Modellierung von kleinen bis mittleren Schäden, wie beispielsweise in der Haushalts-, Gewerbe-, KFZ Kasko- und KFZ Haftpflichtversicherung.

### 5.3 Weibull- Verteilung

Die Weibull-Verteilung wird ebenfalls über zwei Parameter definiert. Die Dichtefunktion für die Weibull-verteilte Zufallsvariable  $X \sim W(k; \lambda)$  und den reellen Parametern  $k > 0$  und  $\lambda > 0$  sowie für  $x > 0$  ist folgendermaßen definiert:

$$f(x) = k * \lambda * x^{k-1} * e^{-\lambda x^k}$$

Die Dichtefunktion der Weibull- Verteilung hat folgende Form für unterschiedliche Parameter  $k$  und  $\lambda$ :

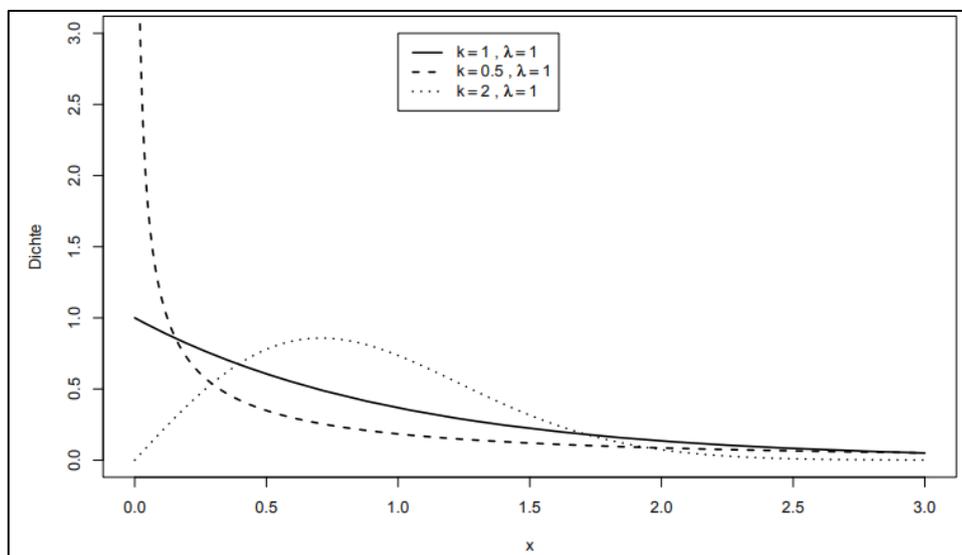


Abbildung 12: Dichtefunktion der Weibull-Verteilung (Cottin/Döhler, 2013, S. 34)

Dabei bestimmt der Parameter  $k$  wiederum die Form der Verteilung und der Parameter  $\lambda$  die Skalierung. Auch hier ergibt sich für den Spezialfall  $k = 1$  die Exponentialverteilung. Die Transformation zwischen der Weibull-verteilten und exponentialverteilten Zufallszahlen ergibt sich über die Beziehung

$$Y \sim \text{Exp}(\lambda) \leftrightarrow X = Y^{\frac{1}{k}} \sim W(k; \lambda)$$

Der Erwartungswert und die Varianz der Weibull-Verteilung errechnen sich folgendermaßen:

$$E(X) = \lambda^{\frac{1}{k}} * \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$Var(X) = \lambda^{\frac{2}{k}} * \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2\right)$$

Die Weibull-Verteilung wird für  $k < 1$  in der Schadenmodellierung für die Abbildung von Großschäden, wie etwa im Industriebereich oder der Rückversicherung, herangezogen. Für  $k > 1$  eignet sich die Weibull-Verteilung ebenfalls für die Kleinschäden- Modellierung.

## 5.4 Normalverteilung

Eine besondere Bedeutung in der Stochastik hat die Normalverteilung. Diese findet ebenfalls in vielen risikotheorietischen Fragestellungen Anwendung. Die normalverteilte Zufallsvariable  $X \sim N(\mu; \sigma^2)$  mit dem Erwartungswert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma > 0$ , somit der Varianz  $\sigma^2$  hat für  $x \in \mathbb{R}$  die Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Dichtefunktion für jedes  $x \in \mathbb{R}$  positiv ist, eignet sich die Normalverteilung nicht ausgesprochen für die Modellierung von Schadenhöhen. Die Verteilung der Schadenssummen vieler unabhängiger identischer Risiken ist jedoch, nach dem zentralen Grenzwertsatz, annähernd normalverteilt. Dadurch kann die Normalverteilung zur Annäherung der Verteilung von Schadenhöhen eines größeren Risikobestandes herangezogen werden. Ebenfalls ist die Normalverteilung die

Ausgangsbasis für die logarithmische Normalverteilung. Für ausgewählte Verteilungsparameter ergeben sich folgende Dichtefunktionen:

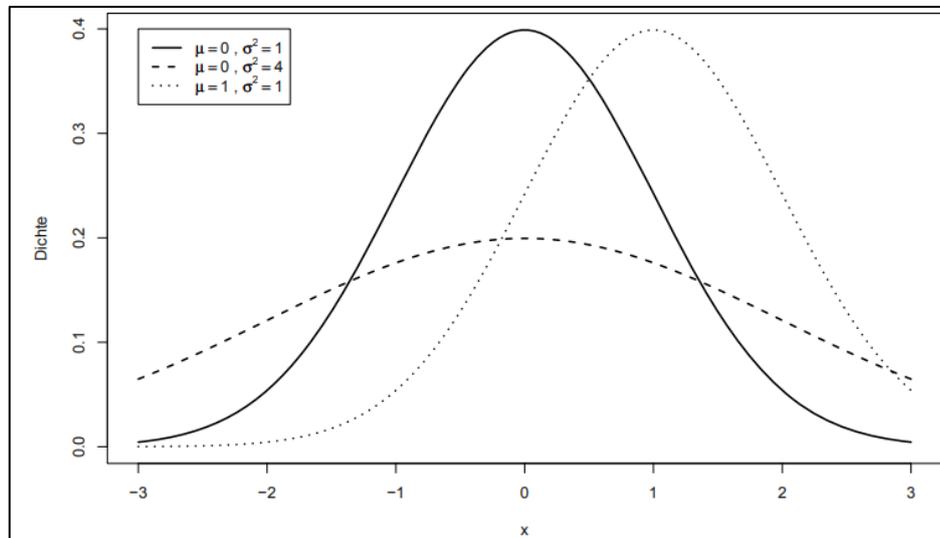


Abbildung 13: Ausgewählte Dichten der Normalverteilung (Cottin/Döhler, 2013 S. 35)

Bei einem Erwartungswert von Null und einer Varianz von Eins ergibt sich die Standardnormalverteilung. Die dazugehörige Dichte- bzw. Verteilungsfunktion wird angegeben mit  $\varphi$  bzw.  $\Phi$ .

## 5.5 t-Verteilung

Die t-Verteilung spielt eine bedeutende Rolle in der Statistik von normalverteilten Zufallsvariablen und in der Risikomodellierung. Dabei gilt, dass eine Zufallsvariablen t-verteilt ist mit  $\nu > 0$  Freiheitsgraden, wenn die Dichtefunktion für  $x \in \mathbb{R}$  folgendermaßen definiert ist, wobei  $\Gamma$  die Gamma-Funktion ist:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi * \nu} * \Gamma(\frac{\nu}{2})} * (1 + \frac{x^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Die t-Verteilung ergibt sich dabei als Quotient einer normalverteilten und der Wurzel einer normierten  $\chi^2$ -verteilten Größe. Sei  $Y \sim N(0; 1)$  und  $Z \sim \chi^2_\nu$ , dann besitzt der Quotient  $T = \frac{Y}{\sqrt{Z/\nu}}$  die Verteilung  $t_\nu$ . Die Abbildung der Dichtefunktion für unterschiedliche Freiheitsgrade ist im Folgenden dargestellt:

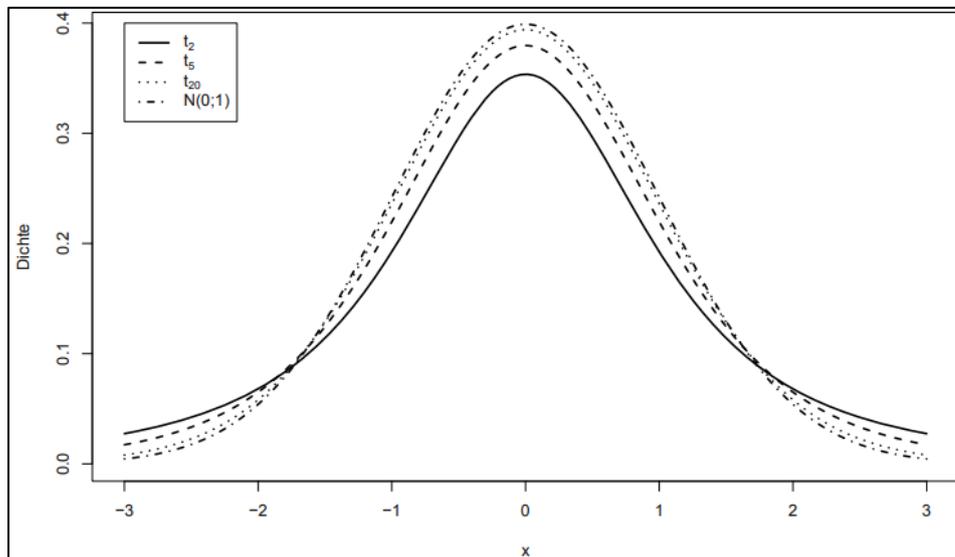


Abbildung 14: t-Verteilung (Cottin/Döhler, 2013, S. 38)

Der Abbildung der t-Verteilung ist zu entnehmen, dass dieser langsamer gegen 0 abfällt als die Standardnormalverteilung. Somit ist über die t-Verteilung eine bessere Modellierung von Risiken möglich, bei denen sehr große Gewinne oder Verluste öfter eintreten als unter den Annahmen der Normalverteilung. Je geringer die Anzahl der Freiheitsgrade  $\nu$  ist, desto stärker ist dieser Effekt. Für wachsendes  $\nu$  nähert sich die t-Verteilung der Standardnormalverteilung an.

## 5.6 Logarithmische Normalverteilung

Die Logarithmische Normalverteilung oder auch Log-normalverteilung eignet sich im Gegensatz zur Normalverteilung als Schadenhöhenverteilung, da die Dichtefunktion nur für  $x > 0$  positiv ist. Die Dichtefunktion einer log-normalverteilten Zufallsverteilung  $X \sim LN(\mu; \sigma^2)$  hat für  $x > 0$  folgende Form:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} * \frac{1}{x} * e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Die durch das Logarithmieren hervorgehende Zufallsvariable  $Y = \ln(X)$  hat eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$ . Somit gilt:

$$Y \sim N(\mu; \sigma^2) \leftrightarrow \exp(Y) = X \sim LN(\mu; \sigma^2)$$

$\mu$  und  $\sigma^2$  sind Erwartungswert und Varianz von  $Y$  jedoch nicht von  $X$ . Für  $X$  gilt:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$Var(X) = e^{2\mu + \sigma^2} * (e^{\sigma^2} - 1)$$

Für die Schiefe gilt des Weiteren:  $\gamma(X) = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} * (e^{\sigma^2} + 2)$

Die Log-normalverteilung ist vor allem in der Finanzmarktmodellierung wichtig. Ebenfalls wird sie für die Modellierung von Großschäden herangezogen.

## 5.7 Log-Gamma- Verteilung

So, wie sich die Log-normalverteilung aus der Normalverteilung ergibt, resultiert die Log-Gamma-Verteilung aus der Gamma-Verteilung. Die Erzeugung der Log-Gamma-Verteilung erfolgt durch  $X = \exp(Y)$  mit  $Y \sim \Gamma(k; \lambda)$ . Eine Log-Gamma-verteilte Zufallsvariable  $X \sim LNT(k; \lambda)$  mit den reellen Parametern  $k > 0$  und  $\lambda > 0$  hat für  $x > 1$  die Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} * (\ln(x))^{k-1} * x^{-\lambda-1}$$

Für Erwartungswert und Varianz gilt:

$$E(X) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-k}$$

$$Var(X) = \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^{-k} - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-2k}$$

Mit der Log-Gamma-Verteilung wird die Modellierung von Großschäden oberhalb eines vorgegebenen Schwellenwerts vorgenommen.

## 5.8 Pareto- Verteilung

Bei der Pareto-Verteilung werden ebenfalls oberhalb eines Schwellenwertes  $x_0$  positive Wahrscheinlichkeiten generiert. Die Dichte- und Verteilungsfunktion einer Pareto-verteilten Zufallsvariable  $X \sim \text{Pareto}(x_0; a)$  mit den reellen Parametern  $x_0 > 0$  und  $a > 0$  lauten:

$$f(x) = a * x_0^a * x^{-a-1}$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-a}$$

Als Erwartungswert, Varianz und Schiefe der Dichtefunktion gelten:

$$E(X) = x_0 * \frac{a}{a-1} \quad (\text{falls } a > 1)$$

$$\text{Var}(X) = x_0^2 * \frac{a}{(a-1)^2(a-2)} \quad (\text{falls } a > 2)$$

$$\gamma(X) = \frac{2\sqrt{a-2}(a+1)}{\sqrt{a}(a-3)} \quad (\text{falls } a > 3)$$

Dichtefunktionen von Pareto-Verteilung sind in folgender Abbildung dargestellt:

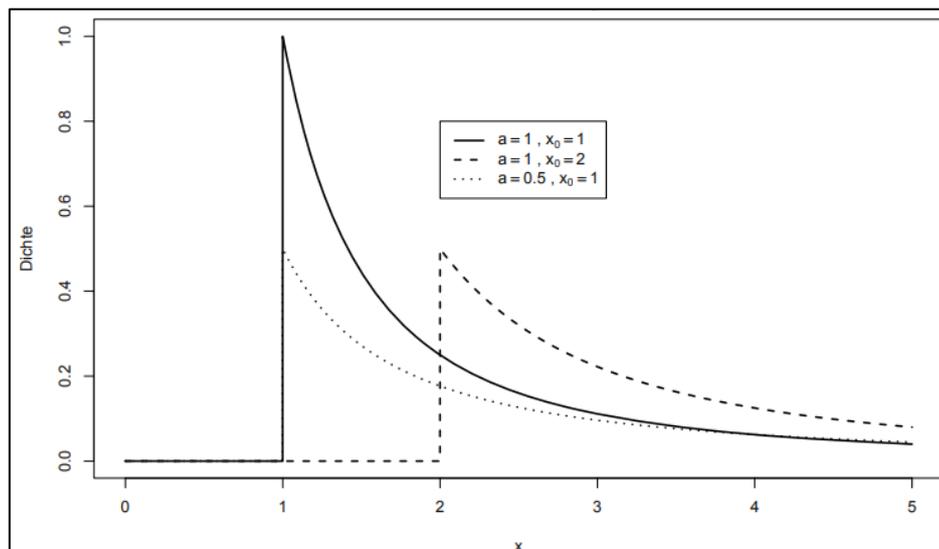


Abbildung 15: Dichtefunktion Pareto-Verteilung (Cottin/Döhler, 2013 S. 41)

Für  $x_0 = 1$  resultiert der Spezialfall der Log-Gamma-Verteilung. Es gilt  $X \sim \text{Parteo}(1; a) \leftrightarrow X \sim \text{LNT}(1; a)$ . Verschiebt man die gewöhnliche Pareto-Verteilung, die nur für  $x > x_0$  positive Werte annimmt, um  $x_0$ , so ergibt sich die Nullpunkt-Pareto-Verteilung  $X \sim \text{Null-Pareto}(x_0; a)$ , die für  $x \geq 0$  definiert ist als:

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{-a}$$

$$f(x) = \frac{a}{x_0} * \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^{-a-1}$$

Der entsprechende Erwartungswert von  $X$  ist sodann definiert als:

$$E(X) = \frac{x_0}{a-1} \text{ falls } (a > 1)$$

Die Varianz und Schiefe der Null-Pareto-Verteilung stimmen mit denen der gewöhnlichen Pareto-Verteilung überein. Die Verwendung der Pareto-Verteilung erfolgt für die Modellierung von Großschäden, die vor allem hinsichtlich Feuerschäden im Bereich der Industrie und Rückversicherungen relevant sind.

## 5.9 Verallgemeinerte Pareto-Verteilung

Die verallgemeinerte Pareto-Verteilung (GPD-Generalized Pareto Distribution) bietet eine noch flexiblere Schadenmodellierung als die Pareto-Verteilung an, da hier drei Parameter zum Einsatz kommen. Die Dichte- und Verteilungsfunktion der GDP-verteilten Zufallsvariable  $X \sim \text{GPD}(\xi, \mu, \sigma)$  mit den reellen Parametern  $\xi \neq 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  sind für  $x \geq \mu$ , falls  $\xi > 0$ , und  $\mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\xi}$ , falls  $\xi < 0$  definiert als:

$$f_{(\xi, \mu, \sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma} * \left(1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma}\right)^{\left(\frac{1}{\xi} - 1\right)}$$

$$F_{(\xi, \mu, \sigma)}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma}\right)^{\left(-\frac{1}{\xi}\right)}$$

Dabei ist  $\mu$  der Lagerparameter,  $\sigma$  der Skalenparameter und  $\xi$  der Formparameter. Der Zusammenhang zur Nullpunkt-Pareto-Verteilung ergibt sich durch  $a = \frac{1}{\xi}$ ,  $x_0 = \frac{\sigma}{\xi}$ .

Das Modell eignet sich dabei für die Beschreibung der Überschreitung von sehr hohen festgelegten Schwellenwerten (Extremwerten) bei Versicherungsschäden oder Kursverlusten.

## 5.10 Inverse Gauß- Verteilung

Die inverse Gauß-Verteilung ist ebenfalls ein Modell mit zwei Parametern. Die Dichtefunktion der invers Gauß-verteilten Zufallsvariable  $X \sim IG(\lambda; \mu)$  mit den reellen Parametern  $\lambda, \mu > 0$  hat für  $x > 0$  die Form:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi * x^3}} * \exp\left(-\frac{\lambda}{2\mu^2 x} * (x - \mu)^2\right)$$

Für den Erwartungswert und die Varianz gelten:

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}$$

Der Einsatz der inversen Gauß-Verteilung erfolgt in Verbindung mit generalisierten linearen Modellen als Alternative zur Exponentialverteilung bzw. Gamma-Verteilung.

## 5.11 Beta-Verteilung

Die Definition der Standardvariante der Beta-Verteilung erfolgt auf dem Intervall  $(0;1)$ . Die Dichtefunktion der Beta-verteilten Zufallsvariable  $X \sim \text{Beta}(p; q)$  mit den reellen Parametern  $p, q > 0$  für  $x \in (0; 1)$  ist festgelegt als:

$$f(x) = \frac{x^{p-1} * (1-x)^{q-1}}{B(p, q)}$$

Die Betafunktion  $B(p, q)$  ist hierbei definiert als:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} * (1-t)^{q-1} dt.$$

Für  $p, q > 0$  gilt in Verbindung mit der Gamma-Funktion:

$$B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q).$$

Der Erwartungswert und die Varianz der für  $\text{Beta}(p; q)$ -verteilten Zufallsvariable ist definiert als:

$$E(X) = \frac{p}{p+q}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{pq}{(p+q)^2 * (p+q+1)}$$

Dabei ist die Beta-Verteilung für  $p < q$  rechtsschief, für  $p = q$  symmetrisch und für  $p > q$  linksschief. Es liegt für  $p, q < 1$  eine U-Form, für  $p = 2$  und  $q = 1$  bzw.  $p = 1$  und  $q = 2$  eine Dreiecksverteilung und für  $p = q = 1$  eine Gleichverteilung vor. Zur allgemeinen Beta-Verteilung auf einem Intervall  $(a; b)$  gelangt man durch die Verschiebung und Reskalierung der Standardvariante auf  $(0; 1)$ .  $Y := a + (b - a) * X$  ist allgemein Beta-verteilt auf dem Intervall  $(a; b)$ , wenn gilt  $X \sim \text{Beta}(p; q)$  auf  $(0; 1)$ , wobei man ebenfalls  $Y \sim \text{Beta}(a; b; p; q)$  schreibt.

Für  $x \in (a; b)$  ist die Dichtefunktion der allgemein Beta-verteilten Zufallsvariable:

$$f(x) = \frac{(x - a)^{p-1} * (b - x)^{q-1}}{B(a, b, p, q)} \quad \text{mit} \quad B(a, b, p, q) = B(p, q) * (b - a)^{p+q-1}$$

Der Erwartungswert und die Varianz für die allgemeine Beta-Verteilung sind folglich definiert als:

$$E(Y) = a + (b - a) * \frac{p}{p + q}$$

$$Var(Y) = \frac{(b - a)^2 * pq}{(p + q)^2 * (p + q + 1)}$$

Die Beta-Verteilung kommt dabei vor allem für die Modellierung von Kleinschäden zum Einsatz. Beispielsweise wird sie zur Annäherung der Schadenhöhenverteilung von neuen Risiken, für welche bislang geringe Schadenerfahrungen vorliegen, eingesetzt. Ebenfalls wird sie zur Darstellung der Wirkung von Selbstbeteiligungen genutzt. Weiteres Anwendungsgebiet ist auch die Verlustverteilung bei umfangreichen, mit Ausfallrisiko behafteten, Kreditportfolien.

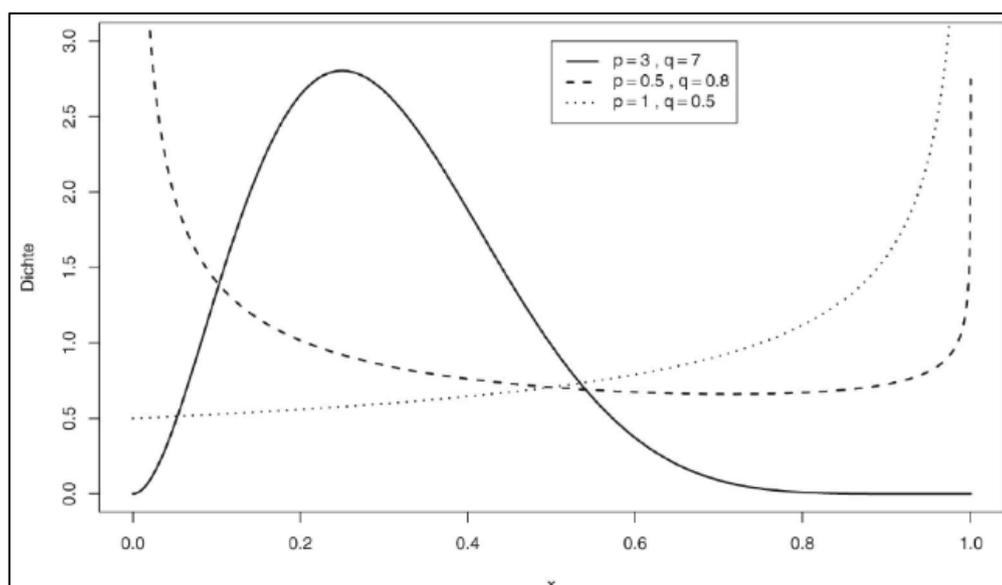


Abbildung 16: Dichtefunktionen der Beta-Verteilung (Cottin/Döhler, 2013, S. 44)

## 6. Verteilungsmodelle für die Schadenanzahl

Neben der Ermittlung der Schadeneintrittswahrscheinlichkeiten von einzelnen Risiken ist ebenfalls die Verteilung der Anzahl aller Schäden in einem Portfolio von besonderer Bedeutung. Im Folgenden werden dahingehend die wichtigsten Verteilungen der Schadenanzahl dargestellt und beschrieben (vgl. Wolfsdorf, 1988, S. 70 ff.).

### 6.1 Poissonverteilung

Die Poissonverteilung wird oftmals als die der Schadenanzahl zugrunde liegende Verteilung angenommen. Unter der Erfüllung folgender drei Bedingungen wird die gesetzte Annahme für berechtigt befunden:

- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Schaden in einem kurzen Intervall mit der Länge  $\Delta$  eintritt, liegt bei etwa  $\lambda\Delta$ . Somit ist:

$$P(\text{Anzahl der Schäden im Zeitintervall der Länge } \Delta = 1) = \lambda\Delta + o(\Delta)$$

- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als ein Schaden in einem kurzen Intervall mit der Länge  $\Delta$  eintritt, ist kleiner als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Schaden eintritt. Und es gilt:

$$P(\text{Anzahl der Schäden im Zeitintervall der Länge } \Delta > 1) = o(\Delta)$$

- Für die Anzahl der Schäden in disjunkten Zeitintervallen liegt Unabhängigkeit vor.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so liegt für die Schadenanzahl in einem Intervall der Länge  $t$ , Poissonverteilung mit dem Parameter  $\nu = \lambda t$  vor. Für die Anzahl der Schäden  $N_t$  im Intervall  $[0, t]$  gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Häufig wird die Poissonverteilung für die erste Näherung jedoch als ungeeignet gesehen. Als einparametrische Verteilung eignet sie sich schlechter für die Anpassung an

beobachtete Daten als vergleichsweise Verteilung, die zwei Abhängigkeitsparameter aufweisen. Ebenfalls wird kritisiert, dass aufgrund der Tatsache, dass  $E(N) = Var(N) = \lambda_t$  gilt, bereits viele Schadenszahlen aus diesem Grund nicht poissonverteilt sein können. (vgl. Wolfsdorf, 1988, S. 70 ff.)

## 6.2 Negative Binomialverteilung

Ist die erwartete Schadenszahl kleiner als die Varianz der Schadenanzahl, so ist die Verwendung einer negativen Binomialverteilung zur Beschreibung der Schadenanzahl zu empfehlen, da sie ebenfalls als weiteren Vorteil zwei Parameter besitzt, von welchen sie abhängt. (vgl. Wolfsdorf, 1988, S. 73.)

Die negative Binomialverteilung wird ebenfalls als Pascal-Verteilung bezeichnet. Im Allgemeinen beschreibt sie die Anzahl der erforderlichen Versuche in einem Bernoulli Prozess, um eine vorgegebene Anzahl von Erfolgen zu erzielen, wobei die Erfolgswahrscheinlichkeit von Versuch zu Versuch gleich bleibt. Typisches Anwendungsgebiet der Verteilung ist die hier beschriebene Schadenszahlverteilung. (vgl. Romeike/Hager, 2020, S. 168.)

Sie wird dabei als Verteilungsmodell zur Beschreibung der Schadenanzahl bis zu einem festgelegten Zeitpunkt  $t$  bzw. auf einem festgelegten Zeitintervall verwendet. Für  $0 < p < 1; r > 0$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$P(N = n) =: p_n = \binom{r + n - 1}{n} * p^r * (1 - p)^n$$

Dabei ist im Allgemeinen der Binomialkoeffizient definiert als:

$$\binom{x}{n} = \frac{x * (x - 1) * \dots * (x - n + 1)}{n!}$$

Der Erwartungswert und die Varianz der negativen Binomialverteilung sind definiert als:

$$E(N) = \frac{r * (1 - p)}{p}$$

$$Var(N) = \frac{r * (1 - p)}{p^2}$$

Bei einem festen Zeitpunkt  $t$  besitzt die negative Binomialverteilung zwei freie Parameter als Schadenanzahlmodell, wohingegen die Binomialverteilung nur den Parameter  $p$  für die Schadenwahrscheinlichkeit besitzt. Dahingehend liegt bei der Verwendung der negativen Binomialverteilung mehr Flexibilität vor. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 54.)

### 6.3 Binomialverteilung

Ebenfalls ist die Verwendung der Binomialverteilung für die Schadenanzahlverteilung möglich. Besondere Eignung findet sie, wenn gilt, dass der erwartete Schaden größer als die Varianz ist. (vgl. Wolfsdorf, 1988, S. 73.)

Beim Bernoulli Prozess ist die Ausgangsbasis die Annahme darüber, dass in einem kleinen Zeitraum der Einheit 1, wie beispielsweise einem Tag, maximal ein Schaden auftreten kann. Die konstante Wahrscheinlichkeit dafür ist  $p$ . Somit hängt die Schadenverteilung nicht von vergangenen Ereignissen ab. Demnach gilt für die Schadenanzahl  $N_t$  nach  $t$  Zeitperioden die Binomialverteilung. Die Wahrscheinlichkeit von  $n$  Schäden in einem Zeitintervall mit der Länge  $t$  wird beschrieben durch:

$$P(N_t = n) =: p_n(t) = \binom{t}{n} * p^n * (1 - p)^{t-n}$$

Der Erwartungswert und die Varianz der Schadenanzahl werden ermittelt durch:

$$E(N_t) = t * p$$

$$Var(N_t) = t * p(1 - p)$$

Die Verwendung dieser Verteilung eignet sich für kleinere und homogenere Risikobestände. Sie wird in der Regel in der Lebensversicherung eingesetzt. Für größere Bestände greift man auf die Poissonverteilung zurück, die sich aus der Binomialverteilung unter Einhaltung der Voraussetzung  $\lambda = t * p = const.$  für  $t \rightarrow \infty$  ableiten lässt. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 48 f.)

Doch da auch hier der Parameter  $t$  die maximale Anzahl an Schäden angibt, kann nur der Parameter  $n$  für die Anpassung an beobachtete Daten herangezogen werden. Deshalb ist die Binomialverteilung ebenfalls nicht sehr flexibel für die Anpassung an beobachtete Daten, wie Verteilungen mit zwei Parametern. (vgl. Wolfsdorf, 1988, S. 73.)

## 6.4 Logarithmische Verteilung

Die Logarithmische Verteilung wird für die Schadenverteilung nicht sehr häufig verwendet. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für  $0 < p < 1$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  hat folgende Form:

$$P(N = n) =: p_n = \frac{p^n}{n} * \frac{1}{-\ln(1 - p)}$$

Für den Erwartungswert und die Varianz gelten des Weiteren:

$$E(N) = \frac{p}{-(1 - p) * \ln(1 - p)}$$

$$Var(N) = \frac{p * (-\ln(1 - p) - p)}{(1 - p)^2 * \ln^2(1 - p)}$$

Auch wenn keine häufige ausschließliche Verwendung der Logarithmischen Verteilung für die Schadenanzahl erfolgt, wird sie in der Regel als Komponente für komplexere Schadenverteilungen herangezogen, wie etwa bei der Klumpenverteilung beim Klumpen-Poisson-Prozess. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 56.)

## 7. Risikokennzahlen

Kern des Risikomanagement ist der Zufall oder die Unsicherheit. Die Beschreibung und die Analysierung von diesen beiden ist auf intuitiver Ebene für den überwiegenden Teil der Menschen nicht möglich. Deshalb ist eine Vorstellung des Risikomanagements ohne mathematisch-statistische Verfahren und Methoden ebenfalls nicht denkbar. Dahingehend wird im Folgenden auf quantitative Methoden zur Risikosteuerung eingegangen. (vgl. Finke, 2017, S. 24 f.)

### 7.1 Anforderungen an Risikomaße

Die Bezeichnung Risikomaß wird oftmals als Synonym für stochastische Risikokennzahlen verwendet. Ein Risikomaß ist im Grunde eine Abbildung, welches für ein Risiko  $V$  mit der dazugehörigen Verteilungsfunktion  $F_V$  eine Zuordnung von einer reellen Zahl vornimmt:

$$V \rightarrow \rho(V) = \rho(F_V)$$

Zur Beschreibung komplexer Risiken werden in der Regel mehrere Kennzahlen benötigt, da ein einzelnes Risikomaß in der Regel nicht geeigneter als sämtliche andere Risikomaße ist. Dahingehend ist eine Untersuchung der Eigenschaften unterschiedlicher Risikokennzahlen erforderlich, sodass die Auswahl einzelner besonders aussagekräftiger Kennzahlen möglich ist.

Eine Auswahl solcher Eigenschaften wird im Folgenden beschrieben (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 111 ff.):

### **Monotonie**

Ein Risikomaß ist monoton, wenn gilt:

$$\rho(V_1) \leq \rho(V_2), \text{ wenn } V_1 \leq V_2$$

Wenn bei  $V_1$  im Vergleich zu  $V_2$  grundsätzlich immer kleinere oder gleich hohe Verluste auftreten, dann ist  $V_1$  im Vergleich zu  $V_2$  als weniger oder gleich riskant einzustufen.

### **Homogenität**

Ein Risikomaß ist homogen, wenn gilt:

$$\rho(\lambda * V) = \lambda * \rho(V) \text{ für } \lambda > 0$$

Somit ist ein Schaden oder Gewinn bzw. Verlust, welches sich als  $\lambda$ -Faches eines anderen Schadens oder Gewinns bzw. Verlusts abbildet, als  $\lambda$ -Mal so riskant anzusehen. Auch wenn dieses Kriterium als selbstverständlich wirkt, ist jedoch bei einigen Anwendungsfällen, wie beispielsweise der privaten Kreditvergabe, diese Homogenität nicht anwendbar, da hier sehr individuelle Nutzenbewertungen zur Anwendung kommen.

### **Translationsinvarianz**

Ein Risikomaß ist translationsinvariant, wenn gilt:

$$\rho(V + c) = \rho(V) + c \text{ für } c \in \mathbb{R}$$

Ist  $c$  positiv, so führt die Erhöhung des Verlustes bzw. die Reduktion des Gewinns um den Betrag  $c$  zu einer Steigerung des Risikowertes um genau den gleichen Betrag. Ist  $c$  negativ, so führt die Reduktion des Verlustes oder die Erhöhung des Gewinns um den Betrag  $c$  zu einer Reduzierung des Risikowertes um genau den gleichen Betrag.

### **Subadditivität**

Ein Risikomaß ist subadditiv, wenn für zwei Risiken gilt:

$$\rho(V_1 + V_2) \leq \rho(V_1) + \rho(V_2)$$

Somit wird durch das Zusammenfassen von zwei Risiken das Gesamtrisiko vermindert oder bleibt maximal gleich hoch. Es kann kein zusätzliches Risiko durch die Risikozusammenfassung generiert werden. Dies entspricht dem Prinzip der Risikodiversifikation.

### **Komonotone Additivität**

Ein Risikomaß besitzt die Eigenschaft der komonotonen Additivität, wenn für zwei komonotone Risiken gilt:

$$\rho(V_1 + V_2) = \rho(V_1) + \rho(V_2)$$

Somit entspricht für zwei Risiken der Risikowert des Gesamtrisikos genau der Summe der Risikowerte der einzelnen Risiken.

### **Positivität**

Ein Risikomaß ist positiv, wenn gilt:

$$\rho(V) \geq 0 \text{ für } V \geq 0$$

Positivität bedeutet, dass der Risikowert eines Risikos, das niemals zu Gewinnen führt, immer nichtnegativ ist.

## 7.2 Stochastische Risikokennzahlen

Unter stochastischen Kennzahlen werden Risikokennzahlen verstanden, die sich auf die unter Kapitel 5 beschriebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung beziehen. Daneben ist ebenfalls die Betrachtung von Kennzahlen wichtig, welche die Sensitivität von funktionalen Abhängigkeiten messen. Diese werden als analytische Risikokennzahlen bezeichnet.

### 7.2.1 Mittelwerte und Risiko

Der mittlere Verlust bzw. Gewinn ist eine einfache Risikokennzahl der Schaden- bzw. Wertverteilungen. Dabei kommen für eine Zufallsvariable  $X$  potenziell unterschiedliche Kenngrößen als Mittelwert in Frage. Diese sind der Erwartungswert  $E(X)$ , der Median  $M(X)$  und der Modus  $Mod(X)$ . Viele Risikokennzahlen sind dabei so aufgestellt, dass die Abweichung vom Mittelwert berechnet wird.

Der Erwartungswert ist das gewichtete arithmetische Mittel. Die Gewichtung entspricht der Mehrfachaufzählung im Hinblick auf die Auftrittshäufigkeit. Beim Erwartungswert erfolgt bei der Risikobewertung eine Orientierung an der Häufigkeit der zeitparallelen Ereignisse, wie im Zuge der Prämienberechnung in Versicherungsunternehmen für häufig auftretende Schäden. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 113)

Die Definition für den wichtigsten Lageparameter lautet (vgl. Brandtner, 2012, S. 30):

$$E(X) = \mu_x = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{i=1}^n p_i * x_i & \text{falls } X \text{ diskret} \end{cases}$$

Der Median stellt das 50%-Quantil einer Verteilung dar. Die Höhe der kleinsten oder größten Verteilungswerte spielt in der Berechnung keine Rolle, da keine Durchschnittsbildung wie beim Erwartungswert vorgenommen wird.

Der Modus einer Verteilung entspricht dessen häufigstem Wert und dem Maximum der Dichtefunktion einer stetigen Verteilung. Hinzuweisen ist, dass dieser Wert nicht immer eindeutig ist, da mehrere Modi für eine Verteilung existieren können.

Schaden- und Kursverteilungen und die Verteilung der entsprechenden Periodenrenditen sind häufig rechtsschief. Somit gilt  $M(X) < E(X)$ . Daraus folgt, dass der Erwartungswert bei einer rechtsschiefen Verteilung in mehr als der Hälfte aller Fälle nicht erzielt wird. Bei Kurs- bzw. Renditeverteilungen sollte sich daher ein vorsichtiger Kapitalanleger für die Wahrscheinlichkeit des Anlageerfolges am Median oder am Modus orientieren. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 113)

### **7.2.2 Streuungsmaße**

Während der Schwerpunkt einer Verteilung und deren grobe Lage durch den Erwartungswert beschrieben wird, sind hier noch keine Informationen zur Messung der Streuung der Verteilung um deren Erwartungswert vorhanden. (vgl. Henze, 2008, S.155)

Die traditionellsten Risikomaße sind die Volatilitätsmaße Varianz und Standardabweichung. Diese quantifizieren das Schwankungsausmaß einer risikobehafteten Größe um ihren Erwartungswert. Dabei werden sowohl positive als auch negative Abweichung vom erwarteten Wert berücksichtigt. Investoren sind dabei in der Regel an den negativen Abweichungen interessiert, den sogenannten Downside-Risikomaßen, wo nur die mögliche negative Abweichung vom erwarteten Wert betrachtet wird. Hierzu gehören beispielsweise der Value at Risk bzw. der Conditional Value at Risk. (vgl. Klein, 2011, S.194 f.)

Die Varianz misst nun die quadratische Abweichung einer Verteilung um dessen Erwartungswert. Zieht man die Quadratwurzel aus der Varianz so ergibt sich die

Standardabweichung. Die Formeln der Varianz und Standardabweichungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sigma_x^2 = E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 * f(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{i=1}^n p_i * (x_i - E(X))^2 & \text{falls } X \text{ diskret} \end{cases} \\ \text{SD}(X) &= \sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} \end{aligned}$$

Die Varianz und Standardabweichung sind ebenfalls insofern bedeutend, da unsicheren Größen in der Entscheidungs- und Finanzierungstheorie oft die Normalverteilung unterstellt wird, die durch den Erwartungswert und die Varianz charakterisiert ist.

Hinsichtlich der Kritik zur Umfassung von ebenfalls positiven Abweichungen vom Erwartungswert, wurde von Markowitz in seinen portfoliotheoretischen Überlegungen die alternative Anwendung der unteren Semivarianz vorgeschlagen, die ausschließlich die negativen Abweichungen vom Erwartungswert erfasst. (vgl. Brandtner, 2012, S. 31 ff.)

$$\text{Var}_u(X) = \sigma_{u_x}^2 = \int_{-\infty}^{E(X)} (x - E(X))^2 * f(x) dx$$

Dabei ist aber auch die positive Abweichung beispielsweise bei Schadenhöhen interessant. Im Qualitätsmanagement wären beide Richtungen der Abweichungen relevant. Bei der Betrachtung von Renditen ist vor allem die Abweichung nach unten bedeutend.

Im Qualitäts- bzw. Risikomanagement kommt dabei häufig die Six-Sigma Methodik zum Einsatz. Hier geht es darum, die Fehlerwahrscheinlichkeit bzw. die Wahrscheinlichkeit

von über der Toleranzgrenze liegenden Abweichungen in Produktionsprozessen unter einem Level von sechs Standardabweichungen zu halten.

Im Hinblick auf die Normalverteilungsannahme für Verteilungsmodelle aus der Praxis zur Beschreibung von Gewinnen und Verlusten, ist zu erwähnen, dass diese in der Regel nur für logarithmierte Werte, wie etwa bei stetigen Renditen, plausibel ist. Der Parameter  $\sigma$  ist für die Lognormalverteilung dann nicht mehr als Streuungsmaß, sondern mehr als Schiefemaß zu interpretieren. Für andere Verteilungen ist natürlich der Einsatz anderer Schiefemaße ebenfalls möglich. Sie sind in der Regel so konzipiert, dass Abweichungen zwischen Mittelwerten betrachtet und auf eine spezielle Weise normiert werden. Unterschiedliche Varianten werden im Folgenden dargestellt (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 122):

$$\text{Nach Pearson} \frac{E(X) - \text{Mod}(X)}{SD(X)}$$

$$\text{Nach Yule - Person} \frac{3 * (E(X) - M(X))}{SD(X)}$$

$$\text{Gemäß drittem Moment} \frac{E(X - E(X))^3}{SD(X)^3}$$

### 7.2.3 Value at Risk und Conditional Value at Risk

Mit dem Konzept des Value at Risk erfolgt die Darstellung der möglichen Veränderung von Vermögenspositionen. Es handelt sich um ein verlustorientiertes Risikomaß. Risikomaße, die den Verlustbereich von möglichen Abweichungen darstellen, werden ebenfalls als Shortfall- oder Downside Risk Maße bezeichnet. (vgl. Wolke, 2016, S. 30)

Insbesondere im Banken- und Versicherungswesen wird der Value at Risk häufig verwendet. Hier wird er als eine Form eines wahrscheinlichen Höchstschadens betrachtet,

da er die relevanten Folgen einer besonders ungünstigen Entwicklung für das Unternehmen berücksichtigt. Dabei ist der Value at Risk  $VaR(X)$  definiert als eine Schadenhöhe, die in einem festgelegten Zeitraum („Halteperiode“) und mit einer festgelegten Wahrscheinlichkeit  $p$  („Konfidenzniveau“) nicht überschritten wird. Bei Überschreitung dieses Wertes, hätte das Unternehmen einen technischen Ruin erreicht. (vgl. Möbius/Pallenberg, S. 2016, S. 13)

Formal gesehen bildet der Value at Risk die Differenz zwischen dem Erwartungswert einer Verteilung und dessen Quantil. Das  $\alpha\%$ -Quantil einer Verteilung gibt an, bis zu welchem Wert alle  $\alpha\%$  möglichen Werte liegen. Wenn beispielsweise der 5%-Quantil bei -100 liegt, bedeutet das, dass 5% aller möglichen Werte kleiner oder gleich dem Wert -100 sind. (vgl. Romeike/Hager, 2020, S. 112 f.)

Bei einer vorgegebenen Shortfall Wahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  bzw. einem festgelegten Konfidenzniveau, dem Sicherheitsniveau,  $\alpha = 1 - \varepsilon$  kann das dazugehörige  $\alpha$ -Quantil als Risikomaß der Verlustverteilung verwendet werden. Dieses Quantil stellt das Value at Risk dar und ist definiert als:

$$VaR(V; \alpha; T) := F_v^{-1}(\alpha), \text{ wobei gilt}$$

$$F_v^{-1}(\alpha) = \min\{x \mid F_v(x) \geq \alpha\}$$

$F_v^{-1}$  ist dabei die Quantilfunktion zur Verteilungsfunktion  $F_v$ .  $T$  stellt dabei den Betrachtungszeitraum dar. Zur Visualisierung der Shortfall Wahrscheinlichkeit bzw. des Value at Risk dient folgende Abbildung:

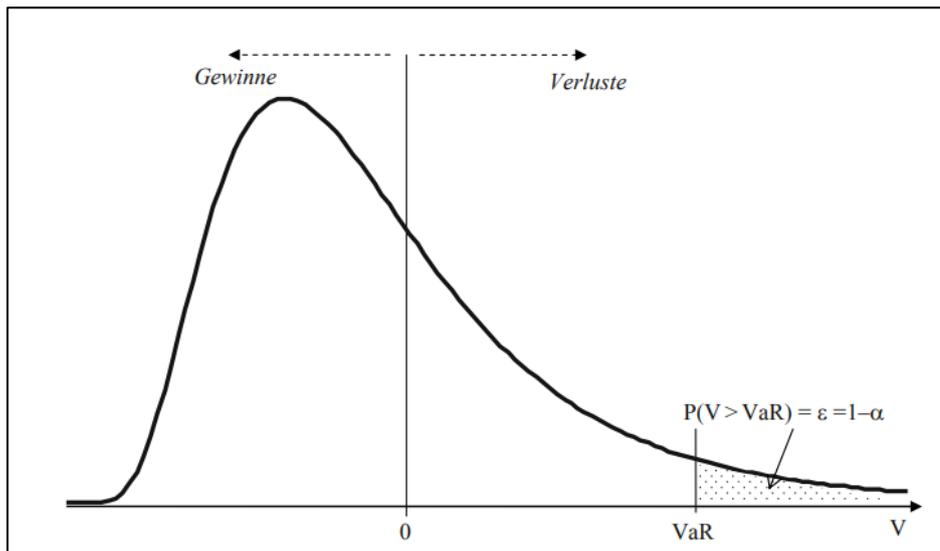


Abbildung 17: Shortfall Wahrscheinlichkeit und Value at Risk (Cottin/Döhler, 2013, S. 124)

Die Shortfallwahrscheinlichkeit und der Value at Risk bilden duale Größen. Dabei stellt die Größe  $x_\alpha = VaR_\alpha$  denjenigen Wert dar, für welches die Verlustverteilungsfunktion  $F_V$  und damit die kumulierten Wahrscheinlichkeiten aller Werte  $\leq x_\alpha$ , größer oder gleich  $\alpha$  ist. Es gilt somit:

$$P(V \leq x_\alpha) \geq \alpha \text{ und } P(V > x_\alpha) = 1 - F(x_\alpha) \leq 1 - \alpha = \varepsilon$$

Damit liegt die Wahrscheinlichkeit für Verluste größer als der  $VaR_\alpha = x_\alpha$  bei  $\varepsilon = 1 - \alpha$ . In der Regel werden für die Berechnung des Value at Risk im Rahmen der Unternehmenssteuerung oder der Finanzberichterstattung Werte für  $\alpha$  von 95%, 99% oder 99,5% angenommen. Oft wird in der Praxis der Value at Risk als die vorzuhaltende Risikoreserve interpretiert. Ebenfalls wird er für Bilanzgrößen wie Gewinn oder Cashflow errechnet. In diesem Zusammenhang spricht man ebenfalls von Earnings at Risk bzw. Cashflow at Risk. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 124)

Im Hinblick auf die Eigenschaften ist jedenfalls zu erwähnen, dass der Value at Risk positiv homogen, monoton und translationsinvariant ist. Die Eigenschaft der

Subadditivität trifft jedoch nicht zu, weshalb der Value at Risk aus kombinierten Finanzpositionen höher ist als die Summe der Value at Risks für die Einzelpositionen.

Als Alternative zum Value at Risk findet zunehmend der Conditional Value at Risk Betrachtung. Dieses wird in der Literatur ebenfalls als Expected Shortfall bzw. Expected Tail Loss bezeichnet. Es handelt sich dabei mathematisch um einen bedingten Erwartungswert. Es erfolgt dabei die Berechnung des erwarteten Verlustes, wenn der kritische Wert des Value at Risk bereits überschritten wurde. Damit handelt es sich um den Erwartungswert der Realisation einer risikobehafteten Größe, das unter dem Quantil zum Niveau  $\alpha$  liegt. Es gibt an, welche Abweichung beim eingetretenen Extremfall und damit der Überschreitung des Value at Risk zu erwarten ist. Somit berücksichtigt der Conditional Value at Risk nicht nur die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung, sondern auch die darüberhinausgehende Abweichung. Für den Conditional Value at Risk gilt:

$$CVaR_\alpha = E(X|X > VaR_\alpha(X))$$

Man kann den Conditional Value at Risk auch als eine Quantil-Reserve, dem Value at Risk, zuzüglich einer Exzess-Reserve interpretieren. Speziell unter der Annahme einer Normalverteilung ist der Conditional Value at Risk leicht abbildbar. Die Berechnung des bedingten Erwartungswerts mit dem Normalverteilungsquantil erfolgt wie folgt (vgl. Möbius/Pallenberg, 2016, S. 13 ff.):

$$CVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + E(X - VaR_\alpha(X)|X > VaR_\alpha(X))$$

Im Gegensatz zum Value at Risk ist der Conditional Value at Risk zusätzlich zu den Eigenschaften der Homogenität, Monotonie und Translationsinvarianz, ebenfalls subadditiv und damit kohärent.

Die Betrachtung des Quantils einer Verteilung an sich kann für das Risikomanagement ebenfalls von Interesse sein. Dabei bildet der Grundgedanke, dass das Eigenkapital eines Unternehmens grundsätzlich zur Risikoabsicherung dient, den Ausgangspunkt. Demnach hat ein Unternehmen so viel Eigenkapital vorzuhalten, wie es für die Risikodeckung

erforderlich ist. Das risikobedingte Eigenkapital, Risk Adjusted Capital, gibt dabei als Risikomaß an, wie viel Eigenkapital zur Deckung der Risiken vorliegen muss. Hierzu wird zu einem festgelegten Konfidenzniveau  $\varepsilon$  das  $1 - \alpha$ -Quantil betrachtet. Liegt dieses Quantil im negativen Bereich, bedeutet das, dass ein negatives Ergebnis erreicht werden kann und entsprechend viel Eigenkapital zur Risikodeckung vorzuhalten ist. (vgl. Romeike/Hager, 2020, S. 113)

#### **7.2.4 Stochastische Risikokennzahlen zur Bemessung von Risikoreserven**

Nimmt man an, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  ein Unternehmen eine bestimmte Risikoreserve, das Sicherheitskapital, zur Abdeckung von unerwarteten künftigen Verlusten hält, so entwickelt sich das Sicherheitskapital im weiteren Zeitverlauf in einem zeitdiskreten Modell nach der Beziehung

$$R_t = R_{t-1} + E_t - A_t, \text{ wobei}$$

- $R_t$  die Risikoreserve am Ende des Zeithorizonts  $t$  darstellt
- $E_t$  die Einnahmen innerhalb der Periode  $t$  abbildet und
- $A_t$  die Ausgaben innerhalb der Periode  $t$  umfasst.

In der dargestellten Gleichung sind  $E_t$  und  $A_t$  Zufallsvariablen. Der stochastische Prozess, der sogenannte Risikoreserveprozess, wird durch  $R_t$  abgebildet. Auch wenn die Gleichung eine sehr einfache Darstellung ist, sind Unternehmenseinnahmen und Unternehmensausgaben im Regelfall nicht durch einfache Modelle hochzurechnen. Für eine grobe Schätzung der Risikoreserveentwicklung sind jedoch einfachere Ansätze und vereinfachte Annahmen für die stochastische Einnahmen- und Ausgabenentwicklung möglich. Im Speziellen bestehen die Einnahmen in einem Versicherungsunternehmen aus Beitragseinnahmen  $B_t$  und Zinseinnahmen  $Z_t$ , und die Ausgaben aus den gezahlten Versicherungsleistungen der eingetretenen Leistungs- und Schadenfälle  $L_t$ . Im Spezialfall der Versicherungsbranche erhält der Risikoreserveprozess die Form:

$$R_t = R_{t-1} + B_t - L_t + Z_t$$

Als Vereinfachungsform wird hier zum Teil  $Z_t = 0$  und  $B_t = c$  verwendet. Durch das Heranziehen des Gesamtschadenprozesses  $S_t$  anstelle der Schadenfälle  $L_t$  pro Periode kann der Prozess ebenfalls in zeitstetiger Form abgebildet werden als:

$$R_t = u_0 + c * t - S_t$$

Dabei bildet  $u_0$  das Startkapital und entspricht somit  $R_0$ , die Prämieinnahmen pro Periode werden durch  $c$  abgebildet und der Gesamtschadenprozess wird mit  $S_t$  ausgedrückt.

Nach der Bestimmung der Verteilung der Risikoreserve  $R_t$  durch stochastische Simulationen oder durch analytische Berechnungen, kann dieser durch entsprechende Kennzahlen analysiert werden. In diesem Kontext ist vor allem die Ruinwahrscheinlichkeit bzw. die Insolvenzwahrscheinlichkeit interessant. Dies ist beim Verlust des gesamten Sicherheitskapitals der Fall. Somit tritt der Ruin ein, sobald  $V > R_0$  (Kapital zum Zeitpunkt  $t = 0$ ) eintritt. In der praktischen Wirtschaft ist das Ergebnis dieser Wahrscheinlichkeit jedoch nicht zu jedem Zeitpunkt, sondern nur bezogen auf das Ende eines bestimmten Bilanzierungszeitraumes interessant. Somit ist nur die Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt  $t$  von Interesse und nicht der Risikoreserveprozess an sich. Dadurch ergibt sich im Grunde ein Einperiodenmodell, wobei die Ruinwahrscheinlichkeit eine Shortfall Wahrscheinlichkeit  $SW(V)$  im Hinblick auf den Schwellenwert  $R_0$  darstellt. Es gilt:

$$P(R_t < 0) = P(V > R_0) = SW_{R_0}(V)$$

Wird die ermittelte Shortfall Wahrscheinlichkeit als zu hoch angesehen, so kann aus dem Modell abgeleitet werden, dass im Unternehmen entsprechende Maßnahmen getroffen werden müssen, um die Reduktion dieser Wahrscheinlichkeit herbeizuführen. Neben der Einflussnahme auf die Einnahmen und Ausgaben sind andere finanzielle

Risikobewältigungsstrategien ebenfalls möglich. Eine weitere Alternative ist ebenfalls die Erhöhung der Risikoreserve  $R_0$  durch die Entscheidung für eine Eigenkapitalerhöhung. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 133 ff.)

### **7.2.5 Bemessung von Versicherungsprämien**

Ein weiterer wichtiger Anwendungsbereich von Risikokennzahlen ist die Berechnung einer ausreichenden Versicherungsprämie. Im Rahmen der Risikosteuerung spielt die Versicherungsprämie eine wichtige Rolle. Zum einen mindert sie den Gewinn, zum anderen wird durch den Versicherungsabschluss das zugehörige Risiko verringert bzw. übertragen. Für das Gewinn-Risiko-Verhältnis spielt also die Höhe der Risikoprämie in Relation zum reduzierten Risiko den ausschlaggebenden Faktor, um zu entscheiden, ob eine Versicherung zur Risikosteuerung abgeschlossen werden sollte. (vgl. Wolke, 2016, S. 103)

In der Schadenversicherung wird im Gegensatz zur Personenversicherung kein individuelles Deckungskapital auf Basis einzelner Versicherungsverträge auf- oder abgebaut. Hier erfolgt die Beitragsabrechnung in der Regel nur jeweils für eine Versicherungsperiode. Für die Ermittlung einer angemessenen Versicherungsprämie erfolgt durch das Versicherungsunternehmen die Entwicklung von Verteilungsmodellen für das Einperioden-Risiko  $S$  aus einer einzelnen Versicherungspolize. Anschließend werden zu fordernde angemessene Beitragshöhen festgelegt. Für die meisten Versicherungsarten ist es nicht ausreichend den erwarteten Schaden  $E(S)$  als Prämie einzufordern, da bei unerwartet hohen Schäden das Versicherungsunternehmen, ohne die Berücksichtigung der Risikoreserve, sofort zahlungsunfähig wäre. Dabei ist auch die Risikoreserve vorrangig über die Beitragseinnahmen zu bilden, um das Grundprinzip des Versicherungsgeschäfts, dem Risikoausgleich im Kollektiv und über die Zeit, einzuhalten. Dahingehend ist im Hinblick auf die Höhe angemessener Versicherungsbeiträge vor allem die Fragestellung nach der Bemessung von Sicherheitszuschlägen bedeutsam, die in „guten“ Jahren zum Aufbau der Risikoreserve genutzt wird und in „schlechten“ Jahren wiederum abgebaut werden kann.

Zur Bemessung der Versicherungsprämien unter Berücksichtigung von angemessenen versicherungsmathematischen Sicherheitszuschlägen werden sogenannte Prämienkalkulationen untersucht. Die Prämienkalkulation stellt ebenfalls eine Form eines Risikomaßes dar. Es ist die Abbildung, bei dem eine Zuordnung einer positiven reellen Zahl zu einem Versicherungsrisiko  $S$  mit der zugehörigen Verteilungsfunktion  $F_S$  erfolgt.

$$S \mapsto \Pi(S) = \Pi(F_S)$$

Dieser zugeordnete Wert kann als Versicherungsprämie für das zu versichernde Risiko  $S$  interpretiert werden. Das  $\Pi(F_S)$  kann entweder für Einzelrisiken  $S$ , hinsichtlich einzelner Versicherungsverträge, oder auch für mehrere Risiken, für alle Versicherungen bzgl. einer bestimmten Schadenart, berechnet werden. In folgender Tabelle werden einige in der Praxis des Versicherungswesens gebräuchliche und der Theorie vorgeschlagene Prämienkalkulationsprinzipien dargestellt, wobei  $E(S)$  dem Erwartungswert („Nettoprämie“),  $SD(S)$  der Standardabweichung und  $\gamma(S)$  der Schiefe von  $S$  entspricht. Die weiteren Koeffizienten seien geeignete positive und reelle Zahlen (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 125 ff.):

Nettoprämienprinzip	$\Pi(S) = E(S)$
Erwartungswertprinzip	$\Pi(S) = (1 + a) * E(S)$
Standardabweichungsprinzip	$\Pi(S) = E(S) + b * SD(S)$
Varianzprinzip	$\Pi(S) = E(S) + c * Var(S)$
Schiefepinzip 1	$\Pi(S) = E(S) + b * SD(S) + d * \gamma(S)$
Schiefepinzip 2	$\Pi(S) = E(S) + c * Var(S) + d * \gamma(S)$
Quantileprinzip 1	$\Pi(S) = F_S^{-1}(q)$
Quantileprinzip 2	$\Pi(S) = \max(E(S); F_S^{-1}(q))$
Quantileprinzip 3	$\Pi(S) = E(S) * e * F_S^{-1}(q)$

Tabelle 1: Prämienkalkulationsprinzipien (In Anlehnung an Cottin/Döhler, 2013, S.139)

## **7.3 Analytische Risikokennzahlen**

Die funktionale Abhängigkeit von risikobehafteten Werten, wie Kapitalanlagen oder Rohstoffpreise, von unterschiedlichen wertbeeinflussenden Variablen und Parametern werden durch analytische Risikokennzahlen dargestellt. Es wird die Sensitivität der Wertfunktionen bei Parameteränderungen beschrieben. Die Sensitivität beschreibt dabei, wie empfindlich das Vermögen auf Veränderungen von einer oder mehrerer Einflussgrößen reagiert. Für die Ermittlung von Sensitivitäten ist es grundlegend, den Zusammenhang zwischen den Einflussgrößen der Vermögensänderung durch ein Modell beschreiben zu können. Ist der funktionale Zusammenhang bekannt, so kann die Sensitivität in der Regel durch die erste Ableitung der Funktion nach der beeinflussenden Größe ermittelt werden. (vgl. Wolke, 2016, S. 29)

Im Folgenden wird auf die Sensitivitätskennzahlen im ausgewählten Anwendungsbereich der Zinssensitivität eingegangen und die unterschiedlichen Kennzahlen näher beschrieben.

### **7.3.1 Zinssensitivität**

Ein wichtiger Anwendungsbereich von Sensitivitäten im Risikomanagement ist das Zinsänderungsrisiko. Als Zinsänderungsrisiko wird dabei das marktzinsbedingte Vermögensrisiko verstanden, dass entweder als Zinsüberschuss oder als Barwertrisiko auftritt. Es liegt ein klar definierter Zusammenhang zwischen dem Zinssatz als Einflussgröße und dem Barwert der Zinsposition als Vermögensgröße vor. Die Sensitivität liefert die Antwort auf die Frage, wie stark die Veränderung des Barwertes ist, wenn der zugrundeliegende Zinssatz um einen definierten Prozentpunkt steigt oder sinkt. Die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs erfolgt über die Barwertfunktion. Die Sensitivität als Ergebnis der ersten Ableitung der Barwertfunktion ist die Duration, welches im Zinsänderungsrisiko eine zentrale Rolle spielt. (vgl. Wolke, 2016, S. 29 u. S. 124)

Zur Beschreibung der Barwertfunktionen nehme man an, es sei eine Kapitalanlage gegeben, welches positive Rückflüsse in der Höhe  $Z_k$  zu den Zeitpunkten  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  erwartet. Somit ergibt sich die als sicher bekannt vorausgesetzte bzw. auf Basis von Erwartungswerten errechnete Zahlenreihe  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ . Ebenfalls sei angenommen, man könne die Investitionsrückflüsse zu einem konstanten Zinssatz  $r \geq 0$  anlegen. Dann resultiert der aktuelle Wert der Zahlenreihe mit  $r$  als Bewertungszins bzw. Diskontierungszinssatz aus folgendem Barwert:

$$BW(r) = \sum_{k=1}^n Z_k (1+r)^{-k}$$

In der Unternehmenspraxis werden derartige Barwerte häufig, wie beispielsweise zur Beurteilung der Vorteilhaftigkeit von unterschiedlichen Investitionsprojekten, der Bewertung von Kapitalanlagen oder für die Bewertung von Versicherungsbeständen, eingesetzt. Dahingehend ist die Untersuchung der Zinssensitivitäten von Barwerten im Risikomanagement sehr wichtig. Eine einfaches Risikomaß bildet dabei die absolute Duration, der absolute Betrag der Ableitung der Barwertfunktion nach dem Diskontierungszinssatz  $r$ . (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 150 f.)

### 7.3.2 Absolute Duration

Die absolute Duration oder in der amerikanischen Terminologie als Dollar Duration bezeichnete Kennzahl ist der Betrag der infinitesimalen absoluten Änderung des Barwertes bei infinitesimaler absoluter Änderung des Zinsniveaus. Sie ist damit der Betrag aus der Ableitung der Barwertfunktion nach dem Diskontierungszinssatz:

$$D^a(r) := -BW'(r) = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{BW(r+\lambda) - BW(r)}{\lambda} = \frac{1}{1+r} \sum_{k=1}^n k * Z_k * (1+r)^{-k}$$

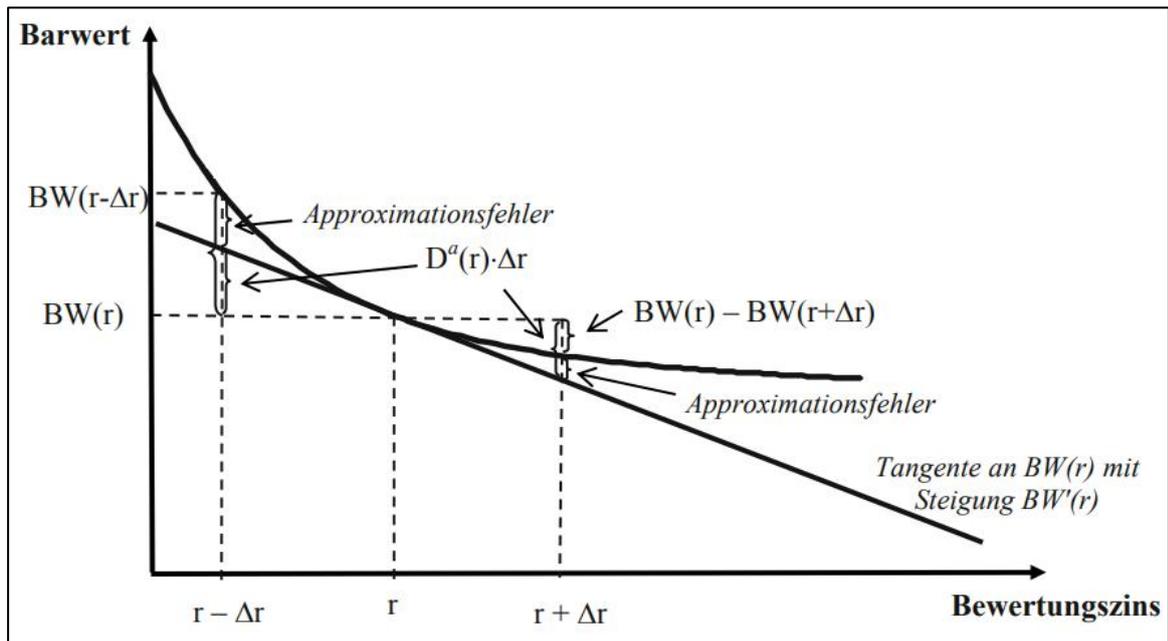


Abbildung 18: Absolute Zinssensitivität einer Barwertfunktion (Cottin/Döhler, 2013, S. 152)

Je größer die absolute Duration  $D^a(r)$  zum betrachteten gegenwärtigen Zinsniveau  $r$  ist, desto höher ist die Zinssensitivität des Barwertes. Der Wert der absoluten Duration entspricht näherungsweise dem Differenzenquotienten der Barwertfunktion, weshalb die Auswirkung der Zinssatzänderung von  $r$  auf  $r + \lambda$  auf die Barwertfunktion durch folgende Beziehung umschrieben werden kann:

$$BW(r) - BW(r + \lambda) \approx D^a(r) * \lambda$$

Dabei handelt es sich um eine lineare Annäherung erster Ordnung durch die Tangente im Punkt  $(r, BW(r))$ , also einer Taylor-Approximation erster Ordnung. Die Barwertfunktion  $BW(r)$  ist monoton fallend und konvex. Durch die Näherungsformel wird dahingehend der Einfluss von fallenden Zinsen auf den Barwert unterschätzt, für den Einfluss steigender Zinsen resultiert eine Überschätzung. Über die Näherungsformel erfolgt dennoch eine schnelle und überschlagsweise Neukalkulation des Barwertes, ohne die Barwertfunktion komplett neu berechnen zu müssen. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 151 f.)

### 7.3.3 Modifizierte Duration

Die Berechnung der ersten Ableitung der Barwertfunktion ergibt jedoch eine Sensitivität, die abhängig von der absoluten Barwerthöhe ist. Dadurch ergeben sich nur begrenzte Vergleichsmöglichkeiten mit Zinspositionen, dem Volumen auf das sich die Verzinsung bezieht, des gleichen Barwertes. Die Behebung dieses Nachteils kann durch die Division der Sensitivität bzw. der Duration durch den Barwert erzielt werden. Dadurch erfolgt die Normierung der Duration, die beliebige Vergleiche mit unterschiedlichen Zinspositionen ermöglicht. Die normierte Duration wird als so genannte modifizierte Duration  $D^{mod}$  bezeichnet. (vgl. Wolke, 2016, S. 129 ff.)

Die modifizierte Duration lässt sich dabei wie folgt darstellen:

$$D^{mod}(r) := -\frac{BW'(r)}{BW(r)} = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{BW(r + \lambda) - BW(r)}{\lambda}}{BW(r)}$$

Damit ist sie das Maß für die relative Änderung des Barwertes bei absoluter Änderung des Zinsniveaus. Mittels der modifizierten Duration ist ebenfalls eine Näherung der absoluten Barwertänderung anhand folgender Formel möglich (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 153 f.):

$$BW(r) - BW(r + \lambda) \approx D^{mod}(r) * BW(r) * \lambda$$

bzw.

$$BW(r + \lambda) - BW(r) \approx -1 * D^{mod}(r) * BW(r) * \lambda$$

Die Multiplikation mit dem Faktor  $-1$  bildet den ökonomischen Sachverhalt der umgekehrten Wechselwirkung von Zinssenkung und Barwerterhöhung ab. Die relative Barwertänderung wird wiederum durch die Division der absoluten Barwertänderung durch den Barwert erzielt. (vgl. Wolke, 2016, S. 129 ff.)

### 7.3.4 Zinselastizität

Die Kennzahl zur Bemessung der relativen Änderung des Barwertes bei relativer Änderung des Zinsniveaus wird als Zinselastizität bezeichnet. Sie ist definiert als:

$$\eta(r) := -BW'(r) * \frac{r}{BW(r)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{BW(r + \lambda) - BW(r)}{\lambda}}{-\frac{BW(r)}{r}} = r * D^{mod}(r)$$

Es resultiert wiederum die folgende Näherungsformel:

$$BW(r) - BW(r + \lambda) \approx \eta(r) + BW(r) * \lambda/r$$

Die Zinselastizität ist eine ähnliche Variante zur absoluten und modifizierten Duration. Im Hinblick auf die Analyse des Zinsrisikos kommt in der Regel der Macaulay-Duration jedoch eine größere Bedeutung zu. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 153)

### 7.3.5 Macaulay-Duration

Die Macaulay-Duration ist das Maß für die relative Änderung des Barwertes bei relativer Änderung des Aufzinsungsfaktors  $q = 1 + r$ . Sie ist definiert als:

$$D^M(r) := -(1 + r) * \frac{BW'(r)}{BW(r)} = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{BW(r + \lambda) - BW(r)}{(1 + r + \lambda) - (1 + r)}}{\frac{BW(r)}{1 + r}}$$

Es ergibt sich näherungsweise die Formel:

$$BW(r) - BW(r + \lambda) \approx D(r) * \frac{BW(r)}{1 + r} * \lambda$$

Die Macaulay-Duration lässt sich als Zeitpunkt bzw. Zeitdauer interpretieren. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 153 f.) Sie stellt die „durchschnittliche Bindungsdauer“ des eingesetzten Kapitals bis zum vollständigen Rückfluss des investierten Kapitals und damit die „durchschnittliche gewichtete Fälligkeit“ dar. (vgl. Tietze, 2015, S. 325)

### 7.3.6 Konvexität

Bisher wurden bei den präsentierten Zinssensitivitätskennzahlen die Auswirkung der Zinsänderung auf den Barwert durch die erste Ableitung bzw. modifizierte erste Ableitung hergeleitet. Für eine genauere Approximation wird die Taylor-Entwicklung der Barwertfunktion bis zum 2. Glied betrachtet:

$$BW(r + \lambda) \approx BW(r) + BW'(r) * \lambda + \frac{1}{2} * BW''(r) * \lambda^2$$

Die absolute Konvexität der Barwertfunktion bezeichnet die Kennzahl:

$$C^a(r) = BW''(r) \geq 0$$

Die absolute Konvexität beschreibt die absolute Änderung des Barwertes bei absoluter Änderung des Zinssatzes auf Basis der Stärke der Krümmung bzw. Konvexität der Barwertkurve. Die Näherungsformel lautet (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 153 ff.):

$$BW(r) - BW(r + \lambda) \approx D^a(r) * \lambda - \frac{1}{2} * C^a(r) * \lambda^2$$

Während die modifizierte Duration eine näherungsweise Beschreibung der Reaktion des Barwertes auf die Zinsänderung vornimmt, gibt die Konvexität Informationen darüber, wie der damit einhergehende Schätzfehler auf Zinsänderungen reagiert. Das heißt, wie stark die Krümmung der Barwertfunktion ist. Mit Hilfe der Konvexität lässt sich somit die Barwertänderung genauer abschätzen. (vgl. Wolke, 2016, S. 133 f.)

Es ist zu beachten, dass eine Risikobeurteilung durch die Sensitivitätsanalyse allein nicht sinnvoll ist, da die angenommene Änderung zu den Einflussgrößen eine willkürliche und subjektive Annahme ohne Risikobeurteilung darstellt. Für den Eintritt der unterstellten Änderungen in der Einflussgröße werden keine Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt. Die Sensitivität stellt ferner ein geeignetes Hilfsmittel für die Analyse von Risikofaktoren bzw. Einflussgrößen und deren Relevanzbeurteilung dar. (vgl. Wolke, 2016, S. 29)

## **8. Abhängigkeitsmodellierung**

In der Abhängigkeitsmodellierung werden Methoden zur Modellierung von Abhängigkeiten von Finanzrisiken, Versicherungsrisiken und bzw. oder anderen Risiken vorgestellt. Die Abhängigkeitsmodellierung ist sehr wichtig, da beispielsweise in einem Versicherungsunternehmen in der Regel unterschiedliche Geschäftsfelder betrieben werden, wie etwa Sachversicherung, Lebensversicherung oder Rückversicherung und diese nicht unabhängig voneinander sind. Zur Erfassung des Gesamtrisikos ist dahingehend die Berücksichtigung von Abhängigkeiten erforderlich. Jedoch können Abhängigkeiten ebenfalls unternehmensübergreifend auftreten. Als Beispiel wäre zu nennen, dass Aktienkurse von unterschiedlichen Unternehmen voneinander abhängen und es in der Praxis beobachtbar ist, dass sich besonders hohe bzw. niedrigere Renditen tendenziell bei Aktien mehrerer Unternehmen niederschlagen. Dahingehend werden im Folgenden Maßzahlen zur Berücksichtigung von Abhängigkeiten vorgestellt. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 269 f.)

### **8.1 Lineare Korrelation**

Ähnlich zur Messung der Lage und Streuung von Zufallsvariablen über Mittelwerte und Varianzen, werden zur Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen unterschiedlichen Risiken Maßzahlen herangezogen.

Ein Maß für die Berücksichtigung der Zusammenhänge zwischen zwei Größen ist die statistische Kovarianz. Die Kovarianz bildet den Mittelwert über die für alle Datenpunktpaare gebildeten Produkte von Abweichungen. Während durch die Varianz die Messung der quadrierten Streuung von beispielsweise der Rendite einer einzelnen Aktie um ihre eigene durchschnittliche Kursrendite erfolgt, wird durch die Kovarianz die Schwankung zwischen den Aktienrenditen gemessen. Für die Berechnung der Kovarianz erfolgt dabei die Berechnung der Differenz zwischen der beobachteten Einzelrendite der ersten Aktie und dessen durchschnittliche Rendite und die anschließende Multiplikation mit der entsprechenden Differenz der zweiten Aktie. Somit ergibt sich ein Produkt von

Abweichungen. Die Berechnung des Mittelwertes erfolgt weiters durch die Addition dieser Produkte über alle Zeitpunkte und die anschließende Division durch die Anzahl der Zeitpunkte. Durch die Normierung der Kovarianz gelangt man in der Folge zum Korrelationskoeffizienten. Die Normierung erfolgt dabei, indem die Kovarianz zwischen zwei Größen durch das Produkt ihrer einzelnen Standardabweichungen geteilt wird. (vgl. Wolke, 2016, S. 42 f.)

Der lineare Korrelationskoeffizient ist die bekannteste Maßzahl in der Abhängigkeitsmodellierung. Der mathematische Ausdruck hat auf Basis der obigen Schilderungen folgende Form:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) * \text{Var}(Y)}}$$

Dabei gilt für die Kovarianz von X und Y:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) * (Y - E(Y))] = E(X * Y) - E(X) * E(Y)$$

Es gilt stets, dass  $\text{Corr}(X, Y) \in [-1; 1]$  ist. Der Korrelationskoeffizient eignet sich dabei insbesondere für die Quantifizierung des Grads und der Richtung einer linearen Abhängigkeit. Wenn zwei Risiken vollständig linear abhängig sind, d.h. es gilt  $Y = a * X + b$ , dann lässt sich folgende Aussage für die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten ableiten:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X)) * (aX + b - E(aX + b))] \\ &= E[(X - E(X)) * a * (X - E(X))] = a * \text{Var}(X) \end{aligned}$$

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{a}{|a|}$$

Die Richtung des linearen Zusammenhangs wird dabei durch das Vorzeichen ausgedrückt. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 270 f.)

Folgende Eigenschaften können im Hinblick auf das Vorzeichen bzw. der Ausprägung des Korrelationskoeffizienten definiert werden (vgl. Wolke, 2016, S. 44):

- +1 Es liegt ein vollständig positiver Zusammenhang zwischen beiden Größen vor. X und Y steigen gleich stark an.
- 0 Es ist weder ein positiver noch ein negativer Zusammenhang messbar. Es handelt sich um unkorrelierte Risiken.
- -1 Es liegt ein vollständig negativer Zusammenhang vor. X und Y entwickeln sich gleich stark in entgegengesetzte Richtungen.

Zur Veranschaulichung werden im Folgenden unterschiedliche Streudiagramme mit zugehörigen Korrelationswerten dargestellt.

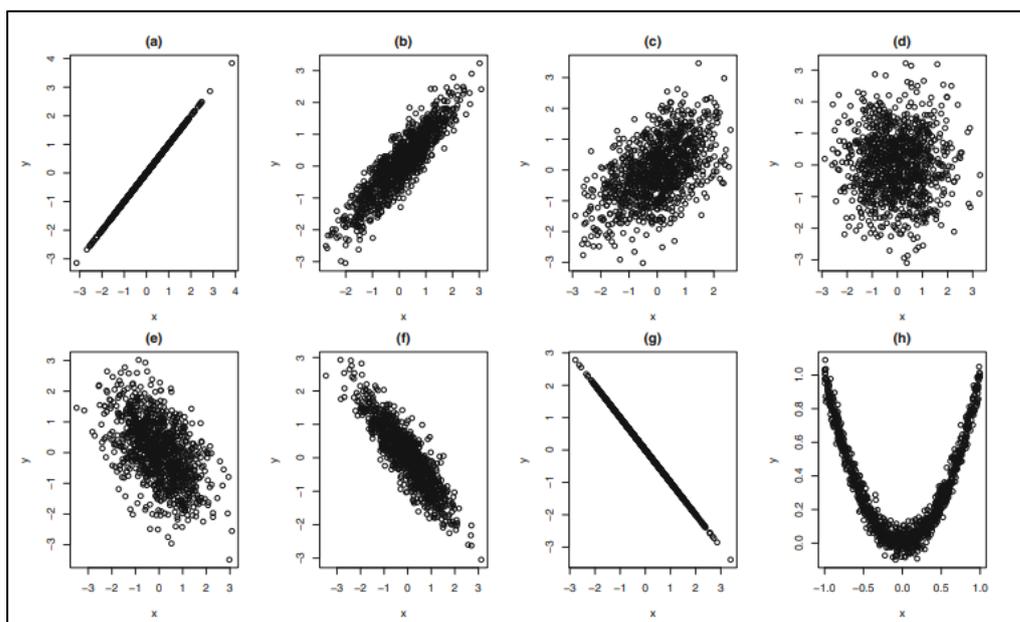


Abbildung 19: Streudiagramme mit Korrelationskoeffizienten 1; 0,9; 0,5; 0; -0,5; -0,9; -1; 0 (Cottin/Döhler, 2013, S. 271)

Anhand der unterschiedlichen Grafiken ist erkennbar, dass der vollständige Zusammenhang entweder in einer linear aufsteigenden oder linear absteigenden Gerade mündet ((a) und (g)). Je mehr der Korrelationskoeffizient abnimmt, desto mehr streuen

sich die Datenmengen in eine Punktwolke. Dabei ist im Streudiagramm (h) ersichtlich, dass keine Korrelation vorliegt, es handelt sich um unkorrelierte Risiken oder Renditen, jedoch ist ersichtlich, dass ein nicht linearer Zusammenhang zwischen beiden Risiken oder Renditen augenscheinlich besteht.

## 8.2 Lineare Regression

Eng mit der Korrelation verbunden ist die Lineare Regression. In den unter Abb. 19 abgebildeten Streudiagrammen ist erkennbar, dass ein funktionaler Zusammenhang zwischen beiden Risiken oder Renditen besteht, die unter Umständen durch zufällige Schwankungen überlagert wurde. Es wird nun versucht eine Funktion zu finden, die den Werten der einen Größe bzw. des einen Risikos X, bestimmte Werte der anderen Größe bzw. des anderen Risikos Y zuordnen kann. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 279.)

Diese Funktion soll gestatten, aus vorgegebenen bzw. zu beliebigen Werten der unabhängigen Einflussgröße X die entsprechende abhängige Zielgröße Y zu schätzen, somit eine Regression von Y auf X vorzunehmen. (vgl. Hedderich/Sachs, 2020, S. 135)

Zur Abschätzung der abhängigen y-Variablen mittels bekannter Werte für x-Variablen eignet sich die Bestimmung einer Trendgerade, die „möglichst gut“ durch die Punktwolke verläuft. Auch wenn man im Einzelfall nicht den „wahren“ y-Wert erhält, so ist das Ergebnis unter Berücksichtigung der vorliegenden Datenmenge, am ehesten plausibel. Unter der Annahme der linearen Abhängigkeit von y von x und der Berücksichtigung von zufälligen Fehlern, die die lineare Funktion überlagern, wird die Trendgerade für  $a, b \in \mathbb{R}$  und jede Beobachtung  $i$  definiert als:

$$y_i = a + bx_i + u_i$$

Bei  $u_i$  handelt es sich um die Fehlervariablen, die alle unsystematischen und zufälligen Fehler umfassen. Für die Fehlervariable  $u_i, i = 1, 2, \dots, n$  werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:

- $E(u_i) = 0$ , d.h. die Wirkung der Fehlervariablen heben sich im Mittel auf
- $Cov(u_i, u_j) = 0$  für  $i \neq j$ , die Fehlervariablen korrelieren nicht miteinander
- $Var(u_i) = \sigma^2 < \infty$ , die Varianz der Fehlervariablen ist konstant
- Für die statistische Inferenz wird die Normalverteilung von  $u_i$  mit  $E(u_i) = 0$  und  $Var(u_i) = \sigma^2$  verlangt

Entsprechend dieser Annahmen gilt für ein festes  $x$ :

$$E(y) = a + bx \text{ und } Var(y) = \sigma^2$$

Mit der Geraden  $a + bx$  erfolgt die Modellierung des Erwartungswertes der Zielvariablen  $y$ . Deshalb stellt die Modellierung die Mittelgerade für  $y$  dar. (vgl. Frost, 2018, S. 5 f.)

Eine mathematisch sich gut eignende Methode für die Präzisierung der Aufgabenstellung ist die nach Gauß und Legendre zurückgehende Methode der kleinsten Quadrate. Ziel ist die Bestimmung einer Geraden  $y = \bar{a} + \bar{b}x$ , die folgende Eigenschaft aufweist:

$$\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{a} - \bar{b}x_j)^2 = \min_{a,b} \left( \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2 \right)$$

Anhand folgender Darstellung ist erkennbar, dass folglich die Gerade gesucht wird, die die kleinsten quadratischen Abweichungen von den jeweiligen Einzelwerten hat:

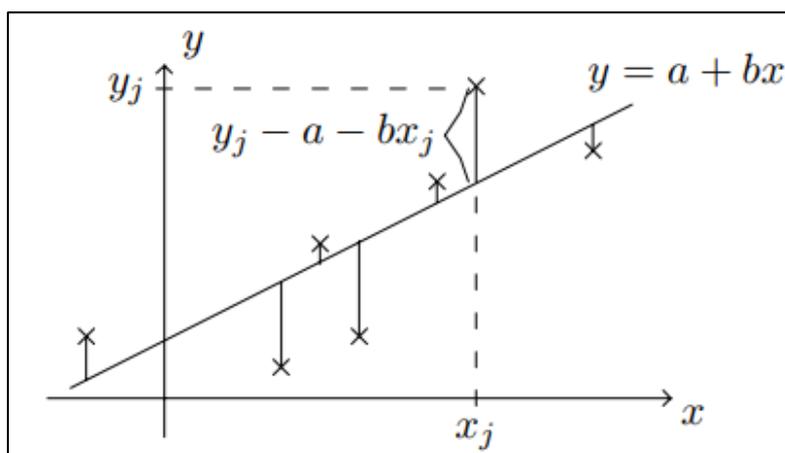


Abbildung 20: Methode der kleinsten Quadrate (Henze, 2008, S. 167)

Wird das Merkmalspaar  $(X, Y)$  als zweidimensionaler Zufallsvektor aufgefasst, der die Wertepaare  $(x_j, y_j)$  für  $j = 1, 2, \dots, n$  mit der gleichen Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{n}$  annimmt, d.h. tritt ein Wertepaar mehrfach auf, so wird sie auch mehrfach gezählt, dann gilt:

$$E(Y - a - b * X)^2 = \frac{1}{n} * \sum_{j=1}^n (y_j - a - b * x_j)^2$$

Für die Bestimmung des Minimums setzen wir nun ein:

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j ; \quad \bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j ; \quad \sigma_x^2 := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 ;$$

$$\sigma_y^2 := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 ; \quad \sigma_{xy} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

Daraus ergibt sich  $E(X) = \bar{x}, E(Y) = \bar{y}, Corr(X, Y) = \sigma_{xy}, Var(X) = \sigma_x^2, Var(Y) = \sigma_y^2$ . Dem zufolge besitzt die Lösung  $(\bar{a}, \bar{b})$  für die Gerade  $y = \bar{a} + \bar{b}x$  die Form:

$$\bar{b} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad \text{und} \quad \bar{a} = \bar{y} - \bar{b} * \bar{x}$$

Die mittels der Methode der kleinsten Quadrate erhaltene optimale Gerade  $y = \bar{a} + \bar{b}x$  wird Regressionsgerade von Y auf X genannt und geht durch den Schwerpunkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  der Punktwolke. Für  $\sigma_x^2 > 0, \sigma_y^2 > 0$  gilt (vgl. Henze, 2008, S.166 ff.):

$$Corr(X, Y) = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 * \sigma_y^2}} = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 * \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}}$$

Ein wichtiges Anwendungsgebiet des linearen Regressionsmodells liegt in der empirischen Ermittlung des Beta-Faktors im Capital Asset Pricing Modell. Hier wird die Wertpapierlinie des CAPM bestimmt, die den linearen Zusammenhang zwischen der Rendite eines Wertpapierportfolios und der Marktrendite (im Praxisfall ATX) beschreibt,

wobei die Marktrendite die unabhängige bzw. erklärende Variable darstellt. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 283)

### 8.3 Copulas

Bei der Regressionsanalyse wurde das Verhalten einer Größe durch das Verhalten einer anderen Größe erklärt. Dieses Modell ist aus wirtschaftlicher Sicht vor allem dann geeignet, wenn ein Risiko durch eine Ursache- bzw. Wirkungsbeziehung durch ein anderes Risiko bzw. durch andere Risiken erklärbar ist. Möchte man sich hingegen das gemeinsame Verhalten von mehreren Risiken modellieren, so ist die Methode Copulas dafür geeignet. (vgl. Cottin/Döhler, 2009, S. 261)

Gegeben seien zwei Risiken  $X_1$  und  $X_2$  mit den Verteilungsfunktionen  $F_1$  und  $F_2$ . Hat ein Unternehmen beide Risiken in seinem Portfolio, so sind für ihn nicht nur die Einzelverteilungen von  $F_1$  und  $F_2$  von Bedeutung, sondern ebenfalls die gemeinsame Verteilung, die durch  $F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$  definiert ist. Diese Verteilung beschreibt, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass sowohl beim Risiko  $X_1$  ein maximaler Verlust von  $x_1$  als auch beim Risiko  $X_2$  ein maximaler Verlust von  $x_2$  eintritt. Die Verteilungsfunktion für das gemeinsame Risiko wird durch die Funktion  $F$  abgebildet. Sie enthält ebenfalls Informationen zur Abhängigkeitsart zwischen beiden Risiken insofern, als dass man an  $F$  die Wahrscheinlichkeit dafür ablesen kann, dass beide Risiken gleichzeitig zu hohen oder niedrigen Verlusten führen.

Die einfachste Art der Abhängigkeit zwischen beiden Risiken lässt sich bei deren Unabhängigkeit voneinander darstellen. Dann gilt für die gemeinsame Funktion:

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) * F_2(x_2)$$

Die gemeinsame Verteilung entspricht dem Produkt der Randverteilungen. Sei  $C(u, v) := u * v$ , dann entspricht die obige Darstellung gleichzeitig:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Die Funktion  $C$  führt beide eindimensionalen Verteilungsfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  zu einer zweidimensionalen Verteilungsfunktion  $F$  zusammen.

Aus mathematischer Sicht handelt es sich bei der Copula  $C$  um eine gemeinsame Verteilungsfunktion für einen Zufallsvektor  $U = (U_1, \dots, U_d)$ . Dabei gilt für dessen Randverteilungen die Gleichverteilung. Eine  $d$ -dimensionale Copula  $C$  ist somit eine Verteilungsfunktion auf dem Bereich  $[0; 1]^d$  mit den Randverteilungen  $U [0; 1]$ . Die Beschreibung einer zentralen Copulas-Eigenschaft erfolgt im Satz von Sklar.

#### Satz von Sklar

- (i) Sei  $F$  eine multivariate Verteilungsfunktion mit den Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$ . Dann existiert eine Copula  $C: [0; 1]^d \rightarrow [0; 1]$ , sodass für alle  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  folgendes gilt:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Sind  $F_1, \dots, F_d$  stetig, so ist  $C$  eindeutig bestimmt.

- (ii) Umgekehrt gilt ebenfalls, dass wenn  $C$  eine Copula ist und wenn  $F_1, \dots, F_d$  eindimensionale Verteilungsfunktionen sind, dann handelt es sich bei folgender Verteilung

$$F(x_1, \dots, x_d) := C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

um eine multivariate Verteilung mit den vorgegebenen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$ .

Sind die Verteilungsfunktion  $F$  und die Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$  gegeben, so erhält man die Copula durch das Einsetzen der inversen Verteilungsfunktionen der Verteilungen der einzelnen Risiken in die gemeinsame Verteilungsfunktion. Somit gilt:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))$$

Aus Risikomanagementsicht ist (ii) ausschlaggebend für den Copula Einsatz, da die Modellierung von gemeinsamen Risiken auf zwei Schritte aufgliedert wird:

- Modellierung von Einzelrisiken und somit der Verteilungen  $F_1, \dots, F_d$
- Auswahl eines geeigneten Copula Modells, welches alle Informationen über die Abhängigkeiten der Einzelrisiken beinhaltet

Ist  $C$  eine Copula, so ist sie nach der Definition eine Verteilungsfunktion. Die zugehörige Dichtefunktion  $c$  für stetige Zufallsvariablen wird im zweidimensionalen Fall für  $(u_1, u_2) \in [0; 1]^2$  ausgedrückt durch:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

Für die gemeinsame Verteilungsfunktion  $F$  wird die Dichtefunktion  $f$  ausgedrückt durch:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) * f_2(x_2) * c(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

Der Term  $f_1(x_1) * f_2(x_2)$  stellt die gemeinsame Dichte bei Vorliegen von Unabhängigkeit dar. Dieser Term wird mit dem Faktor  $c(F_1(x_1), F_2(x_2))$  gewichtet. Sind beide Risiken unabhängig, so resultiert für  $c(u_1, u_2) = 1$ .

Eine weitere Copulas-Eigenschaft, die zur dessen Eignung für die Risikomodellierung beiträgt, ist die Invarianz unter monotonen Transformationen. Wenn beispielsweise ein Unternehmen die Abhängigkeitsmodellierung zwischen den Verlusten zweier Einzelrisiken über eine Copula unter der Verwendung von EUR-Beträgen vornimmt, so bleibt die Copula unverändert, wenn nun die verwendete Währung in USD geändert wird. Einzig die Verteilungen der Einzelrisiken benötigen die Anpassung an die neuen Skalen. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 287 ff.)

In folgender Tabelle werden einige spezielle Copulas mit ihren Verteilungsfunktionen dargestellt. Dabei wird eine Einschränkung auf zwei Dimensionen vorgenommen. Eine Übertragung auf beliebige Dimensionen ist jedoch möglich. Es gilt für  $(u_1, u_2) \in [0; 1]^2$ :

<b><u>Fundamentale Copulas</u></b>		
<u>Unabhängigkeits-Copula</u>	$C_{ind}(u_1, u_2) := u_1 * u_2$	Beschreibung der stochastischen Unabhängigkeit.
<u>Komonotonie-Copula</u>	$M(u_1, u_2) := \min(u_1, u_2)$	Beschreibung der perfekten positiven Abhängigkeit.
<u>Kontramotonie-Copula</u>	$W(u_1, u_2) := \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$	Beschreibung der perfekten negativen Abhängigkeit.
<b><u>Gauß Copula</u></b>	$C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2) := \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$ $= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) ds_1 ds_2$	Definition einer Copula anhand bekannter multivariater Verteilungen mit stetigen Randverteilungen unter der Annahme der Normalverteilung.
<b><u>t-Copula</u></b>	$C_{\rho, v}^t(u_1, u_2) =$ $\int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dx_1 dx_2$	Analog Gauß-Copula, Definition einer Copula unter der Annahme der t-Verteilung mit $v$ Freiheitsgraden.

<u>Archimedische Copulas</u>		
<u>Gumbel-Copula</u>	$C_{\theta}^{Gu}(u_1, u_2) := \exp \left[ - \left( (-\ln u_1)^{\theta} + (-\ln u_2)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \text{ für } \theta \in [1; \infty)$	<p>Gumbel-Copula stimmt für <math>\theta = 1</math> mit Unabhängigkeits-Copula überein und konvergiert für <math>\theta \rightarrow \infty</math> gegen Komonotonie-Copula. Interpoliert somit zwischen Unabhängigkeit und vollständiger Abhängigkeit.</p>
<u>Clayton-Copula</u>	$C_{\theta}^{Cl}(u_1, u_2) := \left[ \left( \frac{1}{u_1} \right)^{\theta} + \left( \frac{1}{u_2} \right)^{\theta} - 1 \right]^{-\frac{1}{\theta}} \text{ für } \theta \in (0; \infty)$	<p>Analog Gumbel-Copula konvergiert Clayton-Copula für <math>\theta \rightarrow 0</math> gegen Unabhängigkeits-Copula und für <math>\theta \rightarrow \infty</math> gegen die Komonotonie-Copula. Es liegt ebenfalls eine Interpolation zwischen Unabhängigkeit und vollständiger Abhängigkeit vor.</p>

Tabelle 2: Spezielle Copulas (in Anlehnung an Cottin/Döhler, 2013, S. 290 ff.)

## 8.4 Rangkorrelation

Rangkorrelationen stellen Abhängigkeitsmaße dar, deren Berechnung aus den Rangzahlen von Daten erfolgen. Für die Berechnung ist die Reihenfolge und nicht die numerischen Werte relevant. Sie beschreiben das gemeinsame Monotonieverhalten von zwei Einzelrisiken und hängen von der Copula ab. Deshalb eignen sie sich besonders für die Schätzung von Copulas auf Basis des vorliegenden Datenbestandes. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 298) Im Folgenden werden nun die Rangkorrelationen nach Spearman und Kendall näher dargestellt.

### 8.4.1 Spearmansche Rangkorrelation

Gegeben sei eine Stichprobe  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  des Merkmal-Paares  $(X, Y)$ . Zur Vereinfachung wird vorausgesetzt, dass alle Werte  $x_1, \dots, x_n$  und  $y_1, \dots, y_n$  verschieden sind, dann gilt für die geordnete  $x$ - bzw.  $y$ -Stichprobe:

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)} \text{ bzw. } y_{(1)} < y_{(2)} < \dots < y_{(n)}$$

Wenn  $x_j$  unter den Werten  $x_1, \dots, x_n$  der  $q_j$ -kleinste Wert ist und es gilt  $x_j = x_{(q_j)}$  dann besitzt  $x_j$  den Rang  $q_j$ . Analog hat  $y_j$  bei Gültigkeit von  $y_j = y_{(r_j)}$  den Rang  $r_j$  in der  $y$ -Stichprobe.

Für die Messung des statistischen Zusammenhangs zwischen den Datenpaaren  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  wird durch den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten  $\rho$  eine Beziehung zwischen den beiden Rängen  $q_j$  und  $r_j$  hergestellt. Für  $\rho$  gilt:

$$\rho := \frac{\sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q}) * (r_j - \bar{r})}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2 * \sum_{j=1}^n (r_j - \bar{r})^2}}$$

Dabei gilt für  $\bar{q} := n^{-1} \sum_{j=1}^n q_j$  und  $\bar{r} := n^{-1} \sum_{j=1}^n r_j$ . Aufgrund der Tatsache, dass es sich bei  $q_1, \dots, q_n$  und  $r_1, \dots, r_n$  um Permutationen der Zahlen  $1, \dots, n$  handelt, gelten weiters:

$$\bar{q} = n^{-1} \sum_{j=1}^n j = \frac{n+1}{2} = \bar{r}$$

$$\sum_{j=1}^n q_j^2 = \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{j=1}^n r_j^2$$

Mittels der Umrechnung über die Alternativdarstellungen für die Parameter des Rangkorrelationskoeffizienten ergibt sich die neue Formel:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} * \sum_{j=1}^n (q_j - r_j)^2$$

Folgende Eigenschaften gelten für den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten:

- Der Rangkorrelationskoeffizient von  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  entspricht dem Pearsonschen Korrelationskoeffizienten der Rang-Paare  $(q_1, r_1), \dots, (q_n, r_n)$ . Es gilt  $-1 \leq \rho \leq 1$ .
- Der Extremfall  $\rho = 1$  bedeutet, dass für jedes  $j = 1, \dots, n$  eine Ranggleichheit von  $q_j = r_j$  vorliegt (Komonotonie). Das bedeutet zu jedem Wert  $j$  ist der zugehörige  $x$ -Wert und  $y$ -Wert der  $j$ -kleinste Wert.
- Der Extremfall  $\rho = -1$  liegt vor, wenn für jedes  $j = 1, \dots, n$  die Summe von  $q_j$  und  $r_j$  gleich  $n+1$  ergibt. Das heißt zum kleinsten  $x$ -Wert korrespondiert der größte  $y$ -Wert, zum zweitkleinsten  $x$ -Wert korrespondiert der zweit größte  $y$ -Wert usw. (Kontramotonie).

Die Extremfälle treten dann ein, wenn durch die Punktwolke eine streng monoton wachsende oder streng monoton steigende Kurve gelegt werden kann. Es kann sich dabei um eine Gerade handeln, muss es aber nicht. (vgl. Henze, 2008, S. 170 f.)

## 8.4.2 Kendallsche Rangkorrelation

Ein weiteres über Rangzahlen berechnetes Risikomaß ist der Kendallsche Rangkorrelationskoeffizient. Für eine gegebene Stichprobe  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  erfolgt die Ermittlung wie folgt. Analog zum Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten werden die Rangzahlen für die  $x$ -Werte und  $y$ -Werte bestimmt. Die  $x$ -Werte werden der Größe nach geordnet. Zu jedem der geordneten  $x$ -Werte liegt ein bestimmtes  $y_i$  mit der Rangzahl  $y_{(r_i)}$  vor. Das heißt über die Ordnung der  $x$ -Werte gelangen wir zur Ordnung der Rangzahlen der  $y$ -Werte. (vgl. Cottin/Döhler, 2009, S. 300 f.)

Der Rangkorrelationskoeffizient von Kendall basiert nun auf den Informationen der Rangreihen durch die Erfassung sogenannter Fehlordnungen. Diese werden durch die relative Lage der Werte zueinander bestimmt. Man unterscheidet dabei Proversionen und Inversionen. Im Folgenden wird beispielhaft eine derartige Ordnung dargestellt:

Rangzahl $x_i$	$x_{(q_i)}$	1	2	3	4
Rangzahl $y_i$	$y_{(r_i)}$	2	3	1	4

Auf Basis der von  $x$  abhängigen Rangordnung, ergeben sich folgende Rangpaare:

Rangzahl $y_i$	$y_{(r_i)}$	2→3	2←1	2→4	3←1	3→4	1→4
		+	-	+	-	+	+

Man erhält nun vier gleichgesinnte (Proversionen) und zwei gegengesinnte (Inversionen) Rangpaare, für die gilt:

- 4 Proversionen ( ${}^nPro = 4$ )       $y_{(r_i)} < y_{(r_j)}$  für  $x_{(q_i)} < x_{(q_j)}$
- 2 Inversionen ( ${}^nInv = 2$ )       $y_{(r_i)} > y_{(r_j)}$  für  $x_{(q_i)} < x_{(q_j)}$

Der Kendallsche Rangkorrelationskoeffizient  $r_\tau$  wird nun auf Basis der Inversionen mittels folgender Darstellung berechnet:

$$r_\tau = 1 - \frac{4 * {}^nInv}{n(n-1)}$$

Im Hinblick auf die idealen Zusammenhänge mit  $r_\tau = 1$  bzw.  $r_\tau = -1$  wird folgende Abbildung herangezogen:

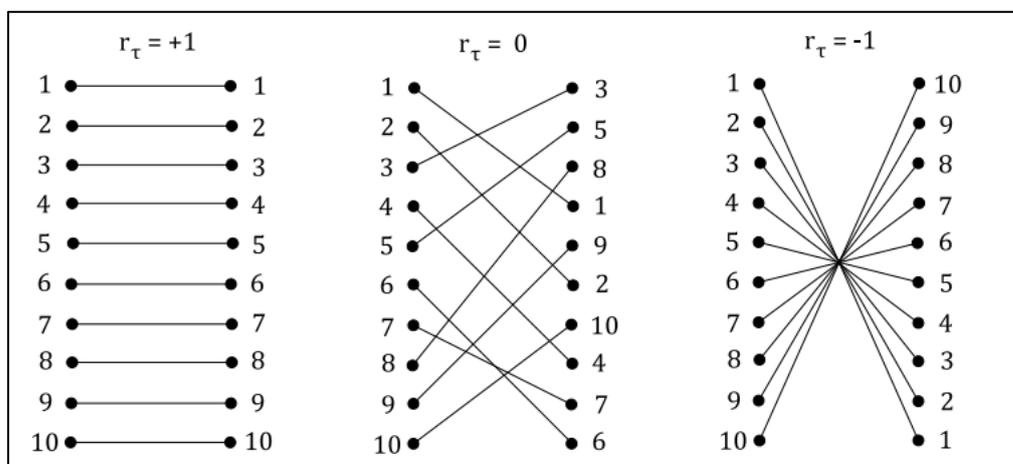


Abbildung 21: Inversionen in gepaarten Rangfolgen (Hedderich/Sachs, 2020, S. 87)

Wenn  $r_\tau = 1$  vorliegt, so wie in der Aufstellung links, dann liegen ausschließlich Proversionen vor, sodass die Rangordnung der  $x$ -Werte und  $y$ -Werte beide aufsteigend bzw. ident sind.

Wenn  $r_\tau = -1$  vorliegt, so wie in der Aufstellung rechts, dann liegen ausschließlich Inversionen vor. Das heißt, folgt man der Rangordnung der  $x$  – Werte, so ist die daraus resultierende Rangordnung der  $y$ -Werte absteigend.

Die Rangkorrelationskoeffizienten nach Spearman und Kendall sind einander ähnlich. Beide liegen im Bereich zwischen -1 und 1 und ergeben bei größeren Stichprobenumfängen nahezu identische Ergebnisse. Die Verwendung des

Rangkorrelationskoeffizienten nach Kendall ist dabei für kleinere Stichproben geeignet, da hier die Berechnung ebenfalls aufwendiger ist. (vgl. Hedderich/Sachs, 2020, S. 87 ff.)

## 8.5 Tail-Abhängigkeit

Informationen zu Wahrscheinlichkeiten für besonders extreme Ereignisse, die bei mehreren Risiken gleichzeitig auftreten können, sind für das Risikomanagement von größter Bedeutung. Wenn die Copula von zwei Risiken  $X_1$  und  $X_2$  und ihre entsprechenden Randverteilungen bekannt sind, ist es möglich diese gemeinsame Wahrscheinlichkeit zu ermitteln. Analog zum Vorliegen von Maßzahlen für die Beschreibung der Gesamtverteilung zur Abhängigkeit zwischen zwei Risiken  $X$  und  $Y$ , wie den Rangkorrelationskoeffizienten, ist es ebenfalls möglich Maßzahlen für die Abhängigkeit von extrem hohen oder niedrigen Verlusten zu definieren. Diese Maßzahlen werden als Tail-Abhängigkeitskoeffizienten bezeichnet.

Dafür wird die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq a | Y \leq b)$  betrachtet. Hinsichtlich der Schadenverteilungen geht es um die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeit dafür, im Risiko  $X$  einen maximalen Verlust von  $a$  zu erleiden, wenn im Risiko  $Y$  bereits ein Verlust von höchstens  $b$  eingetreten ist. Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist dabei definiert als:

$$P(X \leq a | Y \leq b) = \frac{P(X \leq a, Y \leq b)}{P(Y \leq b)}$$

Gemäß dem Satz von Sklar gilt sodann:

$$P(X \leq a | Y \leq b) = \frac{C(F_1(a), F_2(b))}{F_2(b)}$$

$F_1$  und  $F_2$  sind dabei die Verteilungsfunktionen von  $X$  und  $Y$ ;  $C$  ist die Copula von  $X$  und  $Y$ . Werden  $a$  und  $b$  so gewählt, dass für den Eintritt der Ereignisse  $X \leq a$  und  $Y \leq b$  die gleiche Wahrscheinlichkeit  $q$  vorliegt, dann gilt:

$$q = P(X \leq a) = F_1(a) = P(Y \leq b) = F_2(b) \quad \text{bzw.}$$

$$a = F_1^{-1}(q) \text{ und } b = F_2^{-1}(q), \quad \text{woraus folgt}$$

$$P(X \leq a | Y \leq b) = \frac{C(q, q)}{q}$$

Existiert der Grenzwert für  $q \rightarrow 0$  für jeweils den linken Rand beider Verteilungsfunktionen, dann handelt es sich bei diesem Grenzwert um den unteren Tail-Abhängigkeitskoeffizienten. Die Definition des oberen Tail-Abhängigkeitskoeffizient erfolgt nach derselben Vorgehensweise.

Die Definitionen des unteren Tail-Abhängigkeitskoeffizienten  $\lambda_L$  (L für „lower“) und des oberen Tail-Abhängigkeitskoeffizienten  $\lambda_U$  (U für „upper“) für zwei stetige Zufallsvariablen X und Y lauten:

$$\lambda_L := \lim_{q \rightarrow 0} \frac{C(q, q)}{q}$$

$$\lambda_U := \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q}$$

Ergibt sich für  $\lambda_L$  oder  $\lambda_U$  der Wert 0, so spricht man von asymptotischer Unabhängigkeit im untern oder oberen Tail, darüber hinaus handelt es sich um Abhängigkeiten in den Tails.

Jedenfalls beschreibt der obere Tail-Abhängigkeitskoeffizient die Wahrscheinlichkeit für das Erleiden eines extremen Verlustes in einem Risiko, unter der Bedingung, dass das Unternehmen ebenfalls in dem anderen Risiko einen extremen Verlust erlitten hat. Der untere Tail-Abhängigkeitskoeffizient beschreibt analog die Risiken für einen niedrigen Verlust und ist dahingehend für das Risikomanagement von nachgeordneter Bedeutung.(vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 302 f.) Im Folgenden werden die Tail-Abhängigkeitskoeffizienten für ausgewählte spezielle Copulas angeführt:

<u>Unabhängigkeits-Copula</u>	$\frac{C(q, q)}{q} = q$ und $\frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q} = 1 - q$	$\lambda_L = \lambda_U = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Asymptotische Unabhängigkeit</li> </ul>
<u>Komonotonie-Copula</u>	$\frac{C(q, q)}{q} = 1$ und $\frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q} = 1$	$\lambda_L = \lambda_U = 1$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Asymptotische totale Abhängigkeit</li> </ul>
<u>Kontramotonie-Copula</u>	$C(q, q) = 0$ für $q \rightarrow 0 +$ und $1 - 2q + C(q, q) = 1 - 2q + 2q - 1 = 0$ für $q \rightarrow 1 -$	$\lambda_L = \lambda_U = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Asymptotische Unabhängigkeit</li> </ul>
<u>Gauß Copula</u>	Für $\rho \neq +1$ und $\rho \neq -1$ gilt $\lambda_L = \lambda_U = 0$	Trotz starker Korrelation $\rho \neq \pm 1$ , liegt für extreme Verluste nahezu Unabhängigkeit vor. Daher ist die Gauß-Copula zur Risikomodellierung mit Tail-Abhängigkeit ungeeignet.
<u>t-Copula</u>	Für $v$ Freiheitsgrade und $\rho > -1$ gilt $\lambda = \lambda_L = \lambda_U = 2_{t_{v+1}} \left( -\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$	Die Dichte der $t$ -Verteilung mit $v + 1$ Freiheitsgraden ist $t_{v+1}$ . Mit $\rho > -1$ wird erreicht, dass stets $\lambda > 0$ gilt (asymptotische Abhängigkeit). Bei Risiken mit einer Koppelung über die $t$ -Copula treten Extremereignisse tendenziell gleichzeitig auf.
<u>Gumbel-Copula</u>	$\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$ und $\lambda_L = 0$	Für $\theta > 1$ liegt eine obere Tail-Abhängigkeit, die für $\theta \rightarrow \infty$ gegen 1 strebt, vor (Näherung an Komonotie Copula).
<u>Clayton-Copula</u>	$\lambda_L = 2^{-1/\theta}$ und $\lambda_U = 0$	Im unteren Tail ist die Copula für $\theta > 0$ tailabhängig.

Tabelle 3: Diverse Tail- Abhängigkeitskoeffizienten (In Anlehnung an Cottin/Döhler, 2013, S. 305 f.)

## 9. Simulationsverfahren

Ein wichtiger Bereich in der Risikobewertung ist die Simulation von in der Zukunft erwarteten Entwicklungen. Die Zielsetzung ist dabei die Variation der vorliegenden Daten und Informationen auf Basis von definierten Regeln, um eine möglichst gute Übersicht über die zu erwartenden künftigen Entwicklungen zu erhalten. Über die Verdichtung der Einflussgrößen möchte man zu aussagekräftigen Kennzahlen gelangen. Grundsätzlich wird hier eine Unterscheidung zwischen zwei Verfahren vorgenommen, die eine simulationsgestützte Risikoanalyse ermöglichen. Das sind die Sensitivitätsanalyse und die Szenarioanalyse. Beide Verfahren bieten auf Basis des aufgestellten Modells und der vorab ermittelten Ausgangsdaten die Eingangsinformationen für die Simulationsberechnung. (vgl. König, 2008, S. 40)

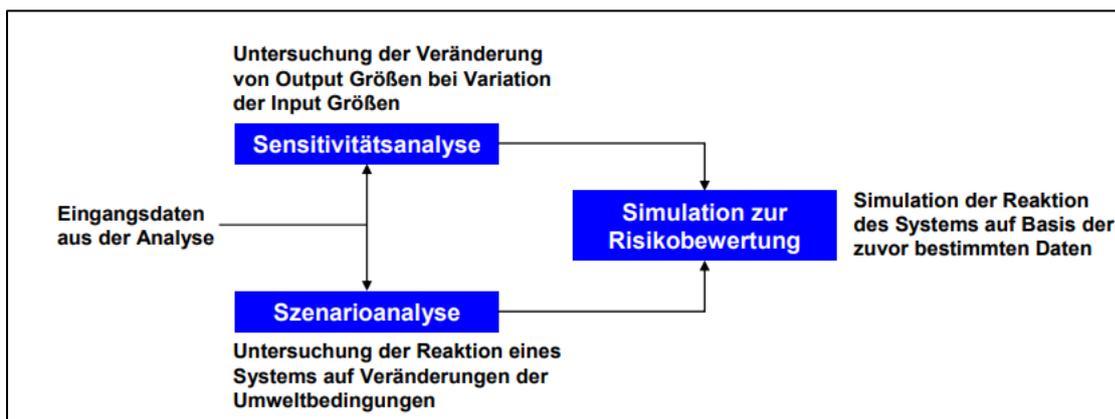


Abbildung 22: Simulationsablauf (König, 2008, S. 40)

### 9.1 Sensitivitätsanalyse

Im Rahmen der Sensitivitätsanalyse wird berechnet, wie groß der Einfluss eines einzelnen Risikos auf das Unternehmen ist. Beispielsweise wird untersucht, wie groß der Einfluss einer Preisschwankung (Inputgröße) von einem Prozent auf das operative Betriebsergebnis (Outputgröße) eines Unternehmens ist. Durch diese Ergebnisse erhalten das Risikomanagement und die Geschäftsleitung Hinweise zur Priorisierung und

Fokussierung auf entsprechende Bewältigungsmechanismen und für die Optimierung des Risikoportfolios. (vgl. Romeike/Hager, 2020, S. 190 u. 639)

Somit erfolgt bei der Sensitivitätsanalyse eine isolierte Untersuchung des Einflusses eines jeden Risikofaktors auf die Zielgröße. Dabei wird eine Quantifizierung des Beitrags eines jeden Risikofaktors zum Risiko der Zielgröße vorgenommen. Aufgrund der isolierten Analyseform wird jeder durchgeführter Sensitivitätsanalyse die Annahme zugrunde gelegt, dass bei den verbleibenden Risikofaktoren keine Abweichungen zu den Planwerten auftreten werden. Die Annahme ist zwar realitätsfern, dennoch eignet sich das Verfahren zur Abgrenzung zwischen relevanten und irrelevanten Risiken (vgl. Finke, 2017, S. 144)

### 9.1.1 Absolut-absolut Sensitivität

Für eine Zielgröße  $E$  liegen Abhängigkeiten von mehreren Risikovariablen  $x, y, z \dots$  vor. Die Sensitivität  $S_{E,x}$  der Zielgröße  $E$  bezogen auf die Risikovariable  $x$  gibt das Verhältnis der Abweichung des Ergebnisses von dessen Planwert  $\Delta E$  aufgrund der Abweichung der Risikovariable  $\Delta x$  an. Die mathematische Beschreibung erfolgt durch die partielle Ableitung.

$$S_{E,x} = \frac{\partial E(x, y, z \dots)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\Delta E}{\Delta x} \Big|_{y=y_{plan}, z=z_{plan}, \dots}$$

Als Beispiel nehme man an, ein Unternehmen plant die Herstellung von 100 Einheiten (m) eines Produktes zum Verkaufspreis 5 (p). Die variablen Herstellungskosten liegen bei 3 pro hergestellte Einheit ( $k_{var}$ ), die produktionsmengenunabhängigen Fixkosten liegen bei 150 ( $K_{fix}$ ). Für dieses Vorhaben wird ein EBIT (Ergebnis vor Zinsen und Steuern) von 50 errechnet.

$$EBIT(m, p, k_{var}, K_{fix}) = m(p - k_{var}) - K_{fix} = 100(5 - 3) - 150 = 50$$

Die Sensitivität für das EBIT bezogen auf die Absatzmenge wird durch den Einsatz der Planzahlen in folgende Gleichung errechnet:

$$S_{EBIT,m} = \frac{\partial EBIT}{\partial m} = p - k_{var} = 5 - 3 = 2$$

Somit beträgt die Sensitivität 2. Aus der Sensitivität kann nun abgeleitet werden, dass für jede Einheit, die gegenüber dem Planwert mehr oder weniger abgesetzt wird, das EBIT entsprechend um 2 steigt oder fällt. (vgl. Finke, 2017, S. 145 f.)

### 9.1.2 Absolut-relativ Sensitivität

In der dargestellten Formel für die absolut-absolut Sensitivität werden die absoluten Abweichungen vom Ergebnis und der Risikovariablen ins Verhältnis gesetzt. In der Regel ist die Angabe zu Schwankungen von Variablen in relativen Einheiten einfacher. Dahingehend wird bei der absolut-relativ Sensitivität die Sensitivität der Zielgröße  $E$  bezogen auf die Risikovariablen  $x$  durch das ins Verhältnis setzen von der absoluten Ergebnisabweichung  $\Delta E$  zur relativen Risikovariablenabweichung  $\frac{\Delta x}{x}$  ausgedrückt.

$$S_{E, \frac{\Delta x}{x}} = x \frac{\partial E(x, y, z \dots)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\Delta E}{\frac{\Delta x}{x}} \Bigg|_{y=y_{plan}, z=z_{plan}, \dots}$$

Um das angeführte Beispiel fortzuführen, werden nun die Sensitivitäten für die Risikofaktoren Absatzmenge  $m$  und Preis  $p$  ermittelt:

$$S_{EBIT, \frac{\Delta m}{m}} = m \frac{\partial EBIT}{\partial m} = m(p - k_{var}) = 100 * (5 - 3) = 200$$

$$S_{EBIT, \frac{\Delta p}{p}} = p \frac{\partial EBIT}{\partial p} = pm = 5 * 100 = 500$$

Die Ergebnisse beziehen sich auf relative Änderungen von 100%. Das heißt, steigt oder fällt die Absatzmenge gegenüber der Planung um 100%, so steigt oder fällt das EBIT um

200 EURO. Analog gilt für eine 100%-ige Abweichung vom Preis, ein entsprechender Effekt im EBIT von 500 EURO. Wird das Ergebnis auf 1% Veränderungen heruntergerechnet, so ergeben sich Auswirkungen auf das EBIT von 2 bzw. 5 EURO. (vgl. Finke, 2017, S. 146 ff.)

### 9.1.3 Relativ-relativ Sensitivität

Die Antwort auf die Fragestellung, um wie viel sich das Ergebnis ändert, wenn ein Risikofaktor um ein Prozent vom Plan abweicht, wird durch die relativ-relativ Sensitivität mit folgender Darstellung gegeben:

$$S_{\frac{\Delta E}{E}, \frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{E} \frac{\partial E(x, y, z \dots)}{\partial x}$$

Die Preis-Mengen-Nachfrageelastizität  $\varepsilon$  in der Mikroökonomie geht auf diese Sensitivität zurück.

$$\varepsilon = \frac{p}{m} \frac{\partial m}{\partial p}$$

$m$  stellt die Nachfrage nach einem Produkt dar, welches sowohl vom Preis  $p$  als auch von anderen Einflussgrößen wie Nutzenerwartung, Einkommen und Vermögen der Käufer oder Preise von Substitutions- und Komplementärgütern, abhängt.

Die Elastizität gibt an, um wie viel Prozent sich die Nachfrage nach einem Produkt ändert, wenn dessen Preis sich um einen Prozent ändert. Das heißt, es werden in beiden Fällen relative Abweichungen betrachtet.

Ein weiteres Anwendungsgebiet der Sensitivität ist der sogenannte „Hebel“ (Leverage) einer Kaufoption  $L$ . Hier gibt die Sensitivität an, um wie viel Prozent sich der Wert einer Kaufoption  $C$  ändert, wenn der Wert der sich auf die Kaufoption beziehenden Aktie  $S$  um ein Prozent verändert wird.

$$L = \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S}$$

Die Bestimmung des Hebels kann für die Risikokompensation von Bedeutung sein, wenn die Optionen zur Absicherung eines Aktienportfolios gegenüber Kursschwankungsrisiken genutzt wird. (vgl. Finke, 2017, S. 147 ff.)

#### **9.1.4 Relativ-absolut Sensitivität**

Zur Vollständigkeit wird im Folgenden ebenfalls der Ausdruck für die Sensitivität zur Beschreibung der relativen Veränderung einer Ergebnisgröße bei einer Abweichung des Risikofaktors um eine absolute Einheit von der Planung angegeben:

$$\frac{S_{\Delta E}}{E, x} = \frac{1}{E} \frac{\partial E(x, y, z \dots)}{\partial x}$$

Diese Form der Sensitivität findet in der Volkswirtschaftslehre Anwendung. Es beschreibt den Einfluss von volkswirtschaftlichen Risikofaktoren, wie dem Kapitalmarktzins oder Ölpreis, auf das Wirtschaftswachstum, somit dem Bruttoinlandsprodukt (BIP). Nehmen wir an, die Sensitivität für den Einfluss des Ölpreises auf das BIP beträgt -0,008 (-0,8%), dann bedeutet das, dass der Anstieg des Ölpreises um 1 EURO zum Rückgang des BIP um 0,8% führt. (vgl. Finke, 2017, S. 148 f.)

## **9.2 Szenarioanalyse**

In der Szenarioanalyse wird die gleichzeitige Abweichung mehrerer Risikofaktoren von ihren Planwerten zugelassen. Es werden plausible Szenarien als alternative Pläne entworfen und durch konsistente Sätze der Risikofaktoren beschrieben. Für jedes Szenario wird die Zielgröße ermittelt. Die Szenarien dienen der Risikobewertung und für die Auswahl von Risikomanagementmethoden. (vgl. Finke, 2017, S. 144 f.)

Mittels eines deterministischen Modells wird über die Szenarioanalyse beispielsweise der Marktwert eines Anlageportfolios für die Änderung des Zinsniveaus um x Basispunkte und die Änderung des Aktienkursniveaus um y Prozent ermittelt. Die Annahmen zur Parameteränderung werden dabei in der Regel von Experten vorgenommen. (vgl. Romeike/Hager, 2020, S. 631)

In der Szenariotechnik kann eine Unterscheidung zwischen drei Methoden vorgenommen werden, die für die Risikobewertung relevant sind:

- Standardszenarien oder Marktszenarien
- Worst Case Szenarien
- Stresstest

Standard- und Marktszenarien bauen in der Regel auf Erfahrungswerten und Entwicklungen aus der jüngeren Vergangenheit auf. Es werden dabei durchschnittliche Parameterschwankungen betrachtet und durch diese Schwankungen unterschiedliche neue Kombinationen festgelegt.

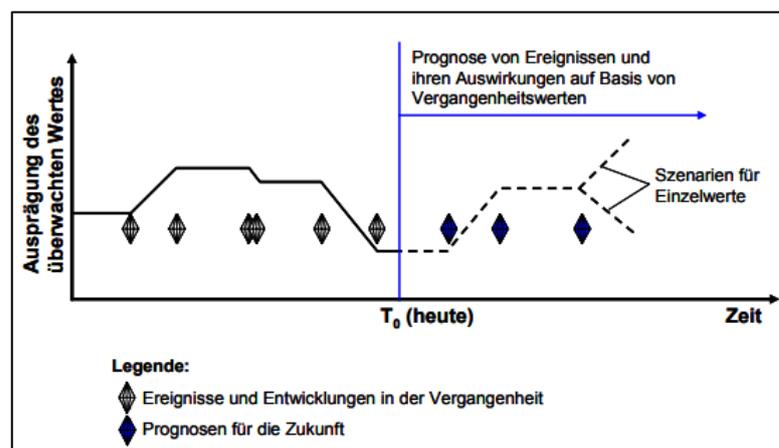


Abbildung 23: Standard- und Marktszenarien (König, 2008, S. 44)

Worst Case Szenarien spiegeln hingegen schwerwiegende Systemeinflüsse wider und entsprechen oft Ereignissen aus der Vergangenheit mit schwerwiegenden Konsequenzen bzw. Auswirkungen, die in die Zukunft projiziert werden. Dahingehend sind die modellierten Parameterschwankungen wesentlich stärker als bei Standardszenarien.

In der Erstellung von Standard- und Worst Case Szenarien ist somit eine genaue Kenntnis über die Ereignisse aus der Vergangenheit erforderlich. Diese Daten aus der Historie dienen als Basis für die Erstellung der Szenarien. Es ist jedoch darauf zu achten, dass die Daten ebenfalls nicht veraltet sind und zwischenzeitlich das betrachtete System signifikant geändert wurde. Denn in diesem Fall hätten die Daten nur eine begrenzte Aussagekraft und somit wären sie für die Szenarioanalyse ungeeignet. (vgl. König, 2008, S. 43 ff.)

Stresstests stellen eine ganz spezielle Form der Szenarioanalyse dar. Hier werden für extreme Szenarien die Auswirkungen auf eine Zielgrößen untersucht, die die Überlebensfähigkeit von Unternehmen beschreiben. Häufige Anwendung der Szenarioanalyse finden sich im Banken- und Versicherungswesen wieder. Durch die Aufsichtsbehörde werden extreme Szenarien vorgegeben, für welche Berechnungen hinsichtlich der Auswirkung auf das Kernkapital und/oder die Liquidität vorgenommen werden. Durch die Stresstests sollen existenzgefährdende Risiken aufgedeckt werden, die zur Destabilisierung des Banken- bzw. Finanzsystems führen können. Halten die aufsichtsrechtlich auferlegten Vorgaben für das Kapital und die Liquidität dem Stresstest nicht Stand, so müssen Maßnahmen zur Risikoreduktion getroffen werden oder eine Erhöhung der Risikotragfähigkeit (Eigenkapitalerhöhung) erfolgen.

Für den Ablauf der Szenarioanalyse werden folgende Stufen vorgeschlagen:

- *Sensitivitätsanalyse*

Es empfiehlt sich vor dem Beginn der Szenarioanalyse eine Sensitivitätsanalyse vorzunehmen. Dabei ist vor allem die Ermittlung eines Risikorankings und der

extremen und durchschnittlichen Abweichungen der einzelnen Risikofaktoren wichtig.

- *Identifikation der Abhängigkeiten zwischen den Risikofaktoren*

Die Abhängigkeiten der untersuchten Risiken sind festzustellen und in einer Skala einzuordnen.

- *Konstruktion von Szenarien*

Ausgehend vom ursprünglichen Plan, dem Basisszenario, sind günstigere und ungünstigere Szenarien bzw. entsprechend von Vorgaben Stressszenarien zu erstellen oder zu berücksichtigen. Stark korrelierende Risiken sollten gleichgesinnt sein und negativ korrelierende Risiken sollten sich in die entgegengesetzte Richtung entwickeln.

- *Planung der Risikofaktoren pro Szenario*

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus der Sensitivitätsanalyse und von gegenseitigen Abhängigkeiten, sind die Werte der Risikofaktoren zu beschreiben.

- *Berechnung der Zielgröße pro Szenario*

Für die Berechnung der Zielgröße pro Szenario werden die Werte der Risikofaktoren in die entsprechende mathematische Funktion, die diese Zielgröße in Abhängigkeit von den Risikofaktoren beschreibt, eingesetzt. (siehe beispielsweise die Funktion für das EBIT, dargestellt im Unterkapitel zur Sensitivitätsanalyse)

- *Methodenauswahl durch Risikomanagement*

Abschließend sind durch das Risikomanagement die Ergebnisse zu bewerten und wünschenswerte Risikomanagementmaßnahmen zur Entschärfung der Szenarien auszuwählen und einzusetzen. (vgl. Finke, 2017, S. 144 ff.)

### 9.3 Monte-Carlo-Simulation

Die Monte-Carlo-Simulation erhielt ihren Namen durch die Ziehung von Zufallszahlen, das mit den in Monte Carlo stattfindenden Glücksspielen vergleichbar ist. Das Verfahren ist bereits länger bekannt, die Anwendung der Simulation konnte jedoch erst mit dem Aufkommen von leistungsfähigen Computern problemlos erfolgen. In der Monte-Carlo-Simulation, auch genannt stochastische Simulation, wird die Erzeugung von stochastischen Stichproben anhand von Zufallszahlen vorgenommen. Unbekannte Parameter für die Risikobeschreibung werden durch Zufallsgrößen bestimmt. Durch die Form eines Stichprobenverfahrens, wird anhand einer großen, repräsentativen Stichprobe auf die Grundgesamtheit geschlossen. (vgl. Romeike/Hager, 2020, S. 623)

Der wesentliche Unterschied zwischen der Monte-Carlo-Simulation und der Historischen Simulation ist die Generierung von Zufallszahlen. Die zukünftige Entwicklung von Risikofaktoren ist mit Unsicherheit verbunden. Anstelle von historischen Wertänderungen wird das zukünftige Verhalten der Risikofaktoren über Zufallszahlen beschrieben. Dabei wird eine große Anzahl von Marktszenarien simuliert. Für jedes Szenario wird die Auswirkung auf den Erfolg berechnet und abgespeichert. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für zukünftige Gewinne und Verluste resultiert aus den Realisationen aller Marktszenarien. Die Anzahl der Marktszenarien kann beliebig groß festgelegt werden.

Die Einsatzgebiete der Monte-Carlo-Simulationen sind vielfältig. Ihr Einsatz kann für die Lösung von Integralen, im Operations-Research, für die Bewertung komplexer Derivate, wie gewisse pfadabhängige Optionen, und im Allgemeinen für umfangreiche Risikoberechnungen erfolgen.

Oft wird dabei den generierten Zufallszahlen die Normalverteilung unterstellt. Die Normalverteilung ist jedoch keine Voraussetzung. Die stochastische Simulation kann für Zahlen beliebiger Verteilungen erzeugt werden, sofern sie auf einem Intervall  $[0; 1]$  gleichverteilt sind. Für die gleichverteilten Zufallszahlen kann dabei durch Spiegelung an

der Verteilungsfunktion mit den gewünschten Eigenschaften eine Überführung in eine neue Verteilung vorgenommen werden. (vgl. Romeike/Hager, 2020, S.448 ff.)

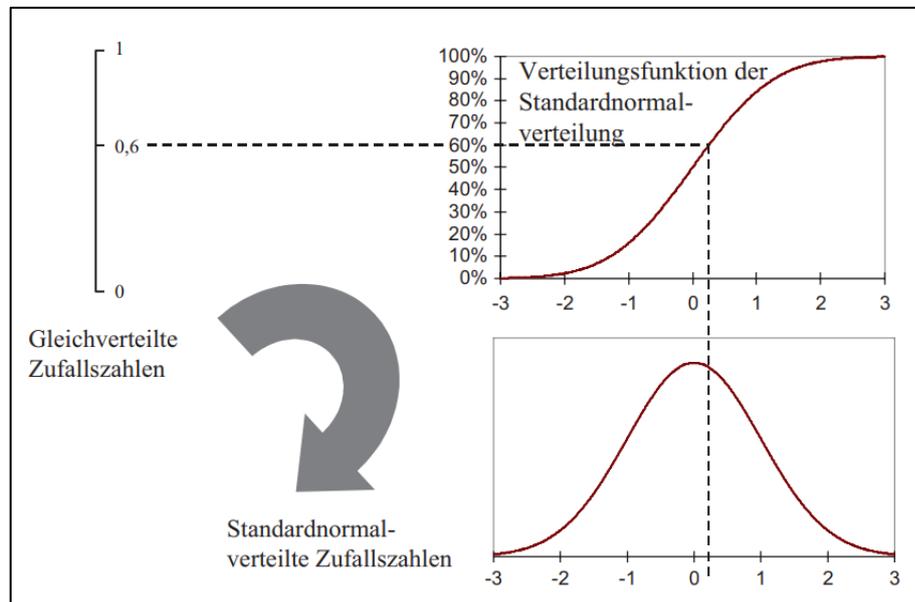


Abbildung 24: Generierung normalverteilter Zufallszahlen (Romeike/Hager, 2020, S.449)

Aus mathematischer Sicht baut die Monte-Carlo-Simulation auf dem Gesetz der Großen Zahlen oder verwandte Ergebnisse aus der Stochastik auf. Die allgemeine Vorgehensweise kann zu folgenden Schritten zusammengefasst werden (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 405):

- Erzeugung von  $n$  Simulationen  $U_1, \dots, U_n$  für das zugrunde liegende Zufallsexperiment
- Berechnung der Simulationen für die interessierende Größe  $X_1 = g(U_1), \dots, X_n = g(U_n)$
- Auswertung der Simulationen  $X_1, \dots, X_n$  durch Berechnung von Mittelwerten oder Stichprobenquantilen

### 9.3.1 Monte-Carlo-Integration

Ein klassisches Anwendungsgebiet der Monte-Carlo-Simulation ist die Berechnungen von komplizierten mehrdimensionalen Integralen. Zur Illustration der Idee wird jedoch ein eindimensionaler Fall auf einem einfachen Integrationsgebiet veranschaulicht. Gesucht wird folgendes Integral

$$I = \int_0^1 g(x) dx$$

der Funktion  $g: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Es wird nun der Trick angewandt,  $I$  als Erwartungswert einer Zufallsvariable  $X$  darzustellen. Sei  $X \sim U(0; 1)$ , dann hat die Verteilung von  $X$  die Dichtefunktion  $1_{(0;1)}(x)$ . Es gilt für den Erwartungswert der Zufallsvariablen  $g(X)$ :

$$E[g(x)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) * f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) * 1_{(0;1)}(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$$

Somit ist  $E[g(x)] = \int_0^1 g(x) dx = I$  mit  $X \sim U(0; 1)$ .

Mittels des Gesetzes der großen Zahlen lässt sich  $I$  durch die Simulierung von  $U_1, \dots, U_n \sim U(0; 1)$  approximieren. Dann erhält man für  $g(U_1), \dots, g(U_n)$  dieselbe Verteilung, wie für  $g(x)$ . Für die Näherung von  $I$  wird

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i)$$

verwendet und aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) \rightarrow E[g(X)] = I$$

Somit gilt bei hinreichend großem  $n$ :  $\hat{I}_n \approx I$ . (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 405 f.)

### 9.3.2 Monte-Carlo-Simulation des VaR

Im Folgenden wird das Gesamtrisiko eines Unternehmens mit der Monte-Carlo-Simulation beschrieben. Dabei ist die Annahme, dass das Gesamtrisiko aus  $d$  Teilrisiken  $X^1, \dots, X^d$  besteht. Die Teilrisiken können abhängig sein und ihre gemeinsame Verteilungsfunktion  $F$  kann mittels des Copula-Ansatzes simuliert werden.

Das Gesamtrisiko resultiert dann aus der Summe der Einzelrisiken  $S = X^1 + \dots + X^d$ . Es wird nun die Verteilungsfunktion  $F_S$  des Gesamtrisikos oder bestimmter Kennzahlen, wie Quantile interpretiert als VaR, dieser Verteilung gesucht. Da es in der Praxis im Allgemeinen nicht möglich ist, die Gesamtrisikoverteilung als geschlossene Form zu ermitteln, bietet sich die Monte-Carlo-Simulation als bedeutendes Anwendungstool an.

Das der Modellierung zugrunde liegende Zufallsexperiment mündet in einem gemeinsamen Verlust  $U = (X^1, \dots, X^d) \sim F_{(X^1, \dots, X^d)}$  in  $d$  Teil- bzw. Einzelrisiken. In einem ersten Schritt erfolgt nun die Erzeugung von  $n$  gemeinsamen Realisierungen ( $d$ - dimensionale Vektoren)  $U_1, \dots, U_n$  der Teilrisiken. Anschließend wird für jedes der  $n$  Simulationen von  $U = (X^1, \dots, X^d)$  der Gesamtverlust  $S = X^1 + \dots + X^d$  errechnet, sodass am Ende  $n$  simulierte Gesamtverluste  $S_1 = g(U_1), \dots, S_n = g(U_n)$  mit  $g(x_1, \dots, x_d) = x_1 + \dots + x_d$  vorliegen. Wenn  $n$  hinreichend groß ist, dann erfolgt durch die Stichprobenquantile eine gute Approximation der tatsächlichen Quantile. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 408.)

### 9.3.3 Monte-Carlo-Simulation der Ruinwahrscheinlichkeit bei Risikoreserveprozessen

Die zeitliche Entwicklung des Sicherheitskapitals  $R_t$  eines Versicherungsunternehmens wird modelliert durch  $R_t = u_0 + c * t - S_t$ . Dabei sind:

- $R_0 = u_0$  das Startkapital zum Zeitpunkt  $t = 0$ ,
- $c$  die Einnahmen aus den Prämien pro Zeiteinheit und

- $S_t$  ein Gesamtschadenprozess (hier liegt die Annahme vor, dass es sich um einen zusammengesetzten Poisson-Prozess handelt).

Nun kann für die Pfade des Risikoreserveprozesses eine Simulation vorgenommen werden, indem die Werte des Gesamtschadenprozesses vom deterministischen Teilprozess  $u_0 + c * t$  abgezogen werden. Damit wird der Wert von  $R_t$  zum Zeitpunkt  $t$  ermittelt, indem vom Startkapital zuzüglich der eingenommenen Prämien die Summe der bis dahin aufgetretenen Schäden abgezogen wird.

$$R_t = \begin{cases} u_0 + c * t & \text{für } t \in [0; T_1) \\ u_0 + c * t - X_1 & \text{für } t \in [T_1; T_2) \\ u_0 + c * t - (X_1 + X_2) & \text{für } t \in [T_2; T_3) \\ \vdots & \vdots \\ u_0 + c * t - (X_1 + \dots + X_N) & \text{für } t \in [T_N; T] \end{cases}$$

Nimmt  $R$  entlang der Pfade einen negativen Wert an, so spricht man vom Eintritt des technischen Ruins des Unternehmens. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses auf dem Intervall  $[0; T]$  kann ebenfalls durch die Monte-Carlo-Simulation geschätzt werden. Im ersten Schritt werden  $n$  Realisierungen des Risikoreserveprozesses simuliert. Bei den Simulationen wird folgende Unterscheidung getroffen:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls im Intervall } [0; T] \text{ bei der Realisierung von } i \text{ der Ruin eingetreten ist.} \\ 0, & \text{falls im Intervall } [0; T] \text{ bei der Realisierung von } i \text{ kein Ruin eingetreten ist.} \end{cases}$$

Schließlich wird die Ruinwahrscheinlichkeit geschätzt durch

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Da es sich um einen abschnittsweise steigenden Prozess handelt, kann der Ruin nur zu den Schadeneintrittszeitpunkten eintreten. Deshalb ist es ausreichend im zweiten Schritt zu überprüfen, ob  $R_t$  an einem der Schadenzeitpunkte negativ war. Die Ruinwahrscheinlichkeit kann schließlich durch Auszählen geschätzt werden. (vgl. Cottin/Döhler, 2013, S. 411 f.)

## 9.4 Historische Simulation

Bei der Historischen Simulation wird auf eine Analyse und Untersuchung der Risikofaktoren verzichtet und stattdessen mit Vergangenheitsdaten gearbeitet. Damit geht ein großer Aufwand für die Pflege des Datenbestandes einher, da alle Tageswerte des betrachteten Zeitraumes aus der Vergangenheit archiviert werden müssen.

Eine Schwierigkeit bei der Historischen Simulation ist die Festlegung des optimalen Zeitfensters. Wenn die herangezogenen Werte zu sehr in die Vergangenheit gehen, ist zu hinterfragen, inwiefern diese für die aktuelle Risikomessung noch relevant sind. Ist das Zeitfenster zu kurz gewählt ergibt sich die Problematik hinsichtlich der Repräsentativität der Anzahl der betrachteten Werte. Ebenfalls nimmt der Schätzfehler bei rückläufigem Stichprobenumfang zu. Eine wichtige Eigenschaft von repräsentativen Stichproben ist ihre Zusammensetzung als zufällige Ziehung aus einer Grundgesamtheit. Statistisch heißt das, dass jedes Element der Grundgesamtheit zur Aufnahme in die Stichprobe die gleiche Wahrscheinlichkeit haben muss. (vgl. Romeike/Hager, 2020, S. 439)

Zur Betrachtung der historischen Wertentwicklung über den definierten Zeitraum und der Generierung der als Berechnungsgrundlage dienenden Daten wird entweder die Differenzenregel oder die Quotientenregel angewandt. (vgl. König, 2008, S. 51 f.)

Als Beispiel nehme man den Verlauf des EUR/USD Wechselkurses mit der Betrachtung von 250 historischen Wechselkursdifferenzen an. Es soll der Value at Risk für die Haltedauer von einem Tag und einer Wahrscheinlichkeit von 95% errechnet werden.

Nach der Differenzenregel werden für die letzten 250 Handelstage, die täglichen Wechselkursdifferenzen ermittelt und anschließend mit dem aktuellen Wechselkurs addiert. Dadurch ergeben sich 250 Wechselkursszenarien. Im weiteren Schritt wird das Fremdwährungsvermögen anhand dieser Szenarien bewertet, wodurch sich wiederum 250 Fremdwährungsvermögen in EUR ergeben. Die Anordnung des bewerteten

Fremdwährungsvermögen in EUR kann im Anschluss als Häufigkeitsverteilung dargestellt werden:

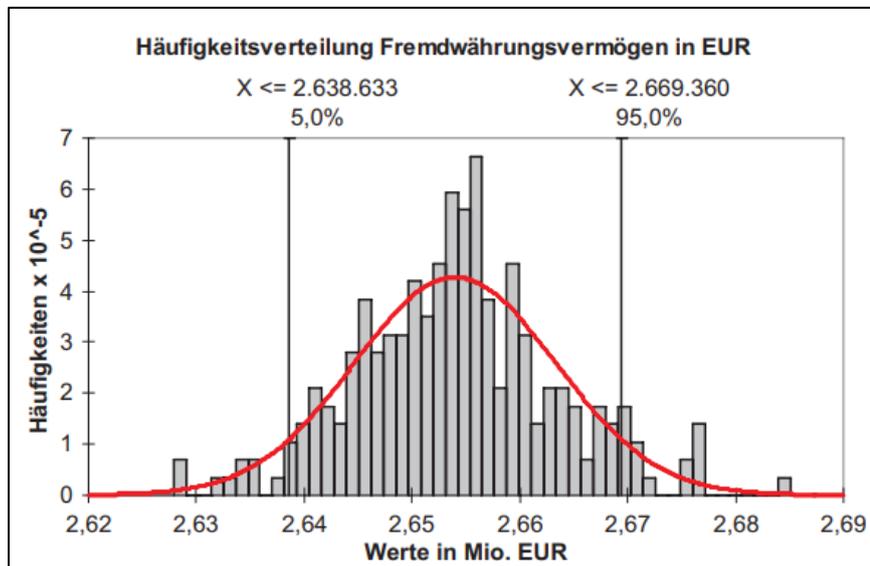


Abbildung 25: Anordnung Ergebnisse der Differenzenmethode (Romeike/Hager, 2020, S. 440)

Aus dieser Häufigkeitsverteilung kann man entnehmen, welcher Verlust aufgrund von Wechselkursschwankungen im Fremdwährungsvermögen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit innerhalb eines Tages nicht überschritten wird.

In der Quotientenmethode werden die logarithmierenden Veränderungen gemessen. Diese Methode erfüllt das Kriterium der Unabhängigkeit und das Kriterium der Stationarität vom absoluten Niveau. Im vorliegenden Beispiel würden somit die Wechselkursänderungen aus der Anwendung des natürlichen Logarithmus auf den Quotienten  $\ln \frac{\text{Wechselkurs}_{t_{n+1}}}{\text{Wechselkurs}_{t_n}}$  berechnet werden.

Für die Berücksichtigung von mehreren Risikofaktoren und der Ermittlung des Risikos eines Portfolios werden innerhalb der Historischen Simulation zwei Ansätze, der Faktoransatz und der Portfolioansatz, unterschieden.

Beim Faktoransatz wird der Value at Risk zunächst für die einzelnen Risikofaktoren isoliert ermittelt. Der Value at Risk des Portfolios resultiert aus der Addition der einzelnen Value at Risk Ergebnisse, unter Anpassung mit einem aus historischen Daten gewonnenen Korrelationsfaktor.

Der zweite Ansatz für die Berücksichtigung mehrerer Risikofaktoren ist der Portfolioansatz. Hier wird unterstellt, dass die Kombinationen der Veränderungen mehrerer Risikofaktoren aus der Vergangenheit, ebenfalls in der Zukunft beobachtet werden. Das heißt beim Portfolioansatz werden die generierten Werte aus bereits in der Vergangenheit existierenden Kombinationen abgeleitet und die Berücksichtigung einer weiteren Korrelation ist nicht erforderlich.

Vorteile der Historischen Simulation sind, dass hier keine Verteilungsannahmen erforderlich sind und keine Korrelationsmatrizen errechnet werden. Es ergeben sich jedoch auch sehr große Nachteile. Da eine Transformation der Vergangenheitsdaten für zukünftige Szenarien von Risikofaktoren erfolgen, werden keine zukunftsorientierten Marktdaten berücksichtigt. Die zugrunde liegende Prämisse des Modells besagt im Wesentlichen, dass das was in der Vergangenheit nicht existiert hat, ebenfalls in der Zukunft nicht eintreten wird. Die permanente Datenpflege ist ebenfalls sehr aufwendig. Und schließlich sind für bestimmte Risikofaktoren auch teilweise keine Historie vorhanden, wie beispielsweise für die Bewertung von komplexen Portfolien mit Derivaten. In diesem Fall wäre die Historische Simulation mangels eingeschränkter Datenbasis ebenfalls kein geeignetes Verfahren für die Bewertung. (vgl. Romeike/Hager, 2020, S. 442 ff. und König, 2008, S. 51 f.)

## 10. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die mathematischen Grundlagen für das Risikomanagement erörtert. Dabei wurden neben der geschichtlichen Entwicklung, dem finanzwirtschaftlichen Rahmen und der aufsichtsrechtlichen Regulierung, die einzelnen Verteilungsmodelle dargestellt und ausgewählte Risikokennzahlen anhand ihrer Anwendungsgebiete präsentiert. Abschließend wurde auf ausgewählte Abhängigkeitsmodellierungen und Simulationsmethoden, welche im Risikomanagement verwendet werden, näher eingegangen.

Aus den Ausführungen geht die grundlegende Verwobenheit beider Fachgebiete und die Bedeutung der Mathematik als Basis für das Risikomanagement hervor. Dabei ist das Teilgebiet Stochastik der Mathematik von besonderer Bedeutung. Denn die Stochastik beschäftigt sich mit der Auswirkung des Zufalls auf Vorgänge und Ereignisse und bildet die Zufallseinflüsse in mathematischen Modellen ab. Dadurch ist sie ein wichtiges Instrument zur Beurteilung von Risikosituationen, welches einen wesentlichen Bestandteil des Risikomanagement Prozesses darstellt.

Die Bedeutung der Mathematik schlägt sich im Risikomanagement Prozess im Kernschritt zur Risikoanalyse und Risikobewertung nieder. Selbst wenn die vorliegenden Risiken identifiziert werden, ist deren Analyse und Beurteilung unter Zuhilfenahme von mathematischen Instrumenten essenziell, um weitergehende Maßnahmen zur Risikosteuerung ergreifen zu können und dadurch das Risiko entweder zu mitigieren, zu überwälzen oder ihm durch das Vorhalten von mehr Risikokapital entgegenzustehen.

Da es sich bei der vorliegenden Arbeit um eine grundlegende Auseinandersetzung zu den Anwendungsgebieten der Mathematik im Risikomanagement handelt, soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass natürlich weitere Untersuchungen der mathematischen Anwendungen in speziellen Risikomodellen oder in speziellen Branchen möglichen sind, auf die hier nicht näher bzw. ausschließlich eingegangen wurde.

## Literaturverzeichnis

- Andrae, S., & Hellmich, M., & Schmaltz, Ch. (2018): Bankenaufsichtliches Risikomanagement: Grundlagen und Anwendung regulatorischer Anforderungen, Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag
- Brandtner, M. (2012): Risikomessung mit kohärenten, spektralen und konvexen Risikomaßen. Konzeption, entscheidungstheoretische Implikationen und finanzwirtschaftliche Anwendungen, Wiesbaden: Springer Gabler
- Cottin, C. / Döhler, S. (2013): Risikoanalyse. Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen, 2. Auflage, Wiesbaden: Springer Spektrum
- Döhring, J., & Hromadka, J. (2015): Interner Ratingansatz aus Sicht einer Geschäftsbank, in Hofmann, G. (Hrsg.): Basel III, Risikomanagement und neue Bankenaufsicht, Frankfurt am Main: Frankfurt School Verlag
- FMA (2019). Solvency II, abgerufen am 05.12.2020, <https://www.fma.gv.at/versicherungen/solvency-ii/>
- Finke, R. (2017): Grundlagen des Risikomanagements. Quantitative Risikomanagement-Methoden für Einsteiger und Praktiker (E-Book), 2. Auflagen, Weinheim: WILEY-VCH Verlag
- Frost, I. (2018): Einfache lineare Regression. Die Grundlage für komplexe Regressionsmodelle verstehen, Wiesbaden: Springer VS

- Gleißner, W. (2019): Risikomanagement, abgerufen am 06.012.2020, <https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/risikomanagement-42454/version-371674>
- Hedderich, J / Sachs, L. (2020): Angewandte Statistik. Methodensammlung mit R, 17. Auflage, Berlin: Springer Spektrum
- Henze, N. (2008): Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls, 7. Auflagen, Wiesbaden: GWV Fachverlage GmbH
- Holzmann, G. / Meyer, H. / Schumpich, G. (2009): Technische Mechanik Statik, Wiesbaden: GWV Fachverlage GmbH
- IBM Knowledge Center (2018): Basel III summary, abgerufen am 08.01.2021, [https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/en/SSN364\\_8.9.0/com.ibm.ima.tut/tut/bas\\_imp/bas3\\_sum.html](https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/en/SSN364_8.9.0/com.ibm.ima.tut/tut/bas_imp/bas3_sum.html)
- König, R (2008): Management betrieblicher Risiken bei produzierenden Unternehmen, Dissertation, Aachen: Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule
- Möbius, Ch. / Pallenberg, C. (2016): Risikomanagement in Versicherungsunternehmen, 2. Auflage, Berlin: Springer Gable
- Niggemann, M. (2013): Steuerung von Gaspreisrisiken. Konzeption eines Preisrisikomanagements für Gasversorger, Wiesbaden: Springer

- Paetzmann, K. (2008): Corporate Governance. Strategische Marktrisiken, Controlling, Überwachung, Berlin: Springer Gabler
- Piechocki, M. (2017): Europäische Bankenunion, die Entwicklung zu einer supranationalen Bankenaufsicht und der österreichische Input Approach als Blueprint für das Meldewesen in Europa, in Cech, Ch. & Helmreich, S. (Hrsg.): Meldewesen für Finanzinstitute: Was bringt die neue europäische Aufsicht?, Wiesbaden: Springer Gabler
- Romeike, F. / Hager, P. (2020): Erfolgsfaktor Risiko-Management 4.0. Methoden, Beispiele, Checkliste. Praxishandbuch für Industrie und Handel, 4. Auflage, Wiesbaden: Springer Gable
- Schreiber, G. (2016): Grundlagen und Praxis. Solvency II. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft GmbH
- Stier, C. (2017): Risikomanagement und wertorientierte Unternehmensführung. Effizienz- und Monopoleffekte, Wiesbaden: Springer Gabler
- Tietze, J. (2015): Einführung in die Finanzmathematik. Klassische Verfahren und neuere Entwicklungen: Effektivzins- und Renditeberechnung, Investitionsrechnung, Derivative Finanzinstrumente, 12.Auflage, Wiesbaden: Springer Spektrum
- Vanini, U. (2012): Risikomanagement : Grundlagen, Instrumente, Unternehmenspraxis, Stuttgart : Schäffer-Poeschel
- Weber, J. (2008): Risiko, online, zuletzt abrufen 02.11.2019 unter <https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/risiko-44896/version-268200>

Wengert, H. / Schnittenhelm, F.A. (2013): Corporate Risk Management. Berlin: SpringerGabler

Wolke, T. (2008): Risikomanagement, 2. Auflage, München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag

Wirtschaftslexikon24.com (2021): Systematisches Risiko, zuletzt abgerufen am 27.01.2021 unter <http://www.wirtschaftslexikon24.com/d/systematisches-risiko/systematisches-risiko.htm>

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Drei Säulen Modell von Basel III.....	- 12 -
Abbildung 2: Risikobegriff.....	- 15 -
Abbildung 3: Risikomanagementstile.....	- 20 -
Abbildung 4: Risikoentstehung und Ertragsauswirkung .....	- 22 -
Abbildung 5: Beziehung Sicherheits- und Gewinnziel.....	- 23 -
Abbildung 6:Phasen des Risikomanagementprozesses .....	- 24 -
Abbildung 7: Überblick zur Gliederung der betriebswirtschaftlichen Risiken .....	- 25 -
Abbildung 8: Übersicht der Risikomaße .....	- 26 -
Abbildung 9: Instrumente der Risikosteuerung.....	- 27 -
Abbildung 10: Dichte- und Verteilungsfunktion der Gleichverteilung .....	- 31 -
Abbildung 11: Dichte der Gamma-Verteilung .....	- 32 -
Abbildung 12: Dichtefunktion der Weibull-Verteilung.....	- 34 -
Abbildung 13: Ausgewählte Dichten der Normalverteilung .....	- 36 -
Abbildung 14: t-Verteilung .....	- 37 -
Abbildung 15: Dichtefunktion Pareto-Verteilung .....	- 40 -
Abbildung 16: Dichtefunktionen der Beta-Verteilung .....	- 44 -
Abbildung 17: Shortfall Wahrscheinlichkeit und Value at Risk .....	- 57 -
Abbildung 19: Absolute Zinssensitivität einer Barwertfunktion).....	- 65 -

Abbildung 20: Streudiagramme mit Korrelationskoeffizienten.....	- 71 -
Abbildung 21: Methode der kleinsten Quadrate .....	- 73 -
Abbildung 23: Inversionen in gepaarten Rangfolgen .....	- 83 -
Abbildung 25: Simulationsablauf.....	- 87 -
Abbildung 26: Standard- und Marktszenarien .....	- 92 -
Abbildung 27: Generierung normalverteilter Zufallszahlen .....	- 96 -
Abbildung 28: Anordnung Ergebnisse der Differenzenmethode .....	- 101 -

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit einzuholen. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

## **Tabellenverzeichnis**

Tabelle 1: Prämienkalkulationsprinzipien .....	- 62 -
Tabelle 2: Spezielle Copulas.....	- 79 -
Tabelle 3: Diverse Tail- Abhängigkeitskoeffizienten .....	- 86 -