MASTERARBEIT / MASTER´S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master´s Thesis

„Die Flipped Classroom Methode im Mathematikunterricht -

Eine empirische Studie zum Thema ggT und kgV
und eine theoretische Ausarbeitung zur Kurvendiskussion“

verfasst von / submitted by

Anna Wimmer, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2021 / Vienna 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt/ degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 520 525 02
Studienrichtung lt. Studienblatt/ degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie
Betreut von / Supervisor:	Mag. Dr. Monika Dörfler, Privatdoz.

Abstract

Die Digitalisierung wird auch im Schulbereich immer weiter vorangetrieben, weshalb es notwendig ist, neue Methoden zu erproben, welche sowohl digitale Medien einschließen als auch von einem Lehrerzentrierten zu einem Schülerzentriertem Unterricht übergehen. Das Ziel dieser Arbeit ist herauszufinden, ob Lernende durch die Methode des Flipped Classroom im Mathematikunterricht motivierter sind und ob sie mehr Spaß und Lernfortschritt zeigen. Dazu wird eine Studie in zwei Klassen der Mittelschule Promenade in Steyr durchgeführt und anschließend ein Fragebogen und Kompetenzcheck ausgefüllt. Die Ergebnisse zeigen, dass die Kinder, welche mittels Flipped Classroom unterrichtet wurden mehr Spaß haben als mit anderen Methoden. Weiters zeigen sie, dass die Lernenden der Versuchsklasse im Durchschnitt bessere Leistungen beim Kompetenzcheck erzielen und motivierter sind, die Hausübung zu erledigen, als die Lernenden der Kontrollklasse.

Englisch Digitalisation is also increasingly being promoted in schools, which is why it is necessary to test new methods that include digital media as well as move from teacher-centred to student-centred teaching. The aim of this wmaster´s thesis is to find out if learners are more motivated by the Flipped Classroom method in math classes and if they show more fun and progress. For this purpose, a study is conducted in two classes of the Promenade middle school in Steyr, followed by a questionnaire and a competency check. The results show that the children taught in the Flipped Classroom have more fun than with other methods. Furthermore, the test class performes better on average in the competency check and is more motivated to do the home exercise than the control class.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mich während der Niederschrift dieser Masterarbeit unterstützt und motiviert haben.

Als Erstes möchte ich Mag. Dr. Monika Dörfler recht herzlich danken für die Betreuung und Begutachtung meiner Arbeit, für die vielen hilfreichen Anregungen und der konstruktiven Kritik.

Es gilt meiner Direktorin und meinen Kolleginnen und Kollegen ein großes Dankeschön, dass ich dieses Projekt und die Studie in der Mittelschule Promenade in Steyr durchführen konnte. Natürlich gilt ein besonderer Dank auch den Schülerinnen und Schüler, welche meine Befragung qualitativ beantwortet haben.

Anschließend möchte ich mich noch bei meinen Eltern und meinem Freund bedanken, die mich durch mein ganzes Studium begleitet, bekräftigt und unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Eine Lehrperson hat die Verantwortung, dass die Schülerinnen und Schüler Mathematik lernen. Mathematik zu lehren ist als eine umfassende Aufgabe anzusehen. Dabei sind Lehrende und Lernende aufeinander angewiesen, denn beide müssen sich gegenseitig respektieren und sich bewusst sein, dass jeder mitverantwortlich ist für den ganzen Mathematikunterricht. In der Grundschulzeit sind Kinder am fähigsten etwas Neues zu lernen und wenn diese Zeit nicht genutzt wurde, um die Grundkompetenzen der Mathematik auszubilden, kann ein Kind später im Leben oft Nachteile haben. Beispielsweise können mangelnde Fähigkeiten im Bereich der Bruchrechnung zu dauerhaften erheblichen Schwierigkeiten führen und es wird die rechte Gehirnhälfte weniger ausgebildet, wenn die Geometrie vernachlässigt wird. Das Lehren und Lernen ist eine Entwicklung, also die Mathematik wird immer wieder neu entfaltet. Das Lernen der Schülerinnen und Schüler kann nur stattfinden, wenn sich die Lernenden im Unterricht an den Entwicklungen der Mathematik wirklich aktiv beteiligen. Für Lehrpersonen ist es umso wichtiger, dass der Mathematikunterricht gründlich aufbereitet wird, damit die Mathematik anhand eines Lehrer-Schüler-Gesprächs entwickelt wird. Oftmals wird im Schulalltag leider nur die Einführung im Schulbuch als Vorlage genommen und die Schülerinnen und Schüler werden nicht aktiv am Unterricht beteiligt. Damit ein Unterricht wirklich erfolgreich ist, braucht jedes einzelne Individuum mit der individuellen Begabung und Neigung Zuwendung. Diese Zuwendung in Form von Hilfe und Anregung wird hauptsächlich benötigt, wenn es Schwierigkeiten mit der Mathematik gibt. Natürlich soll auch Zuwendung stattfinden zur Bestätigung von Lösungen, zur Ermutigung und Anerkennung. Der Unterricht soll also immer wechselseitig gestaltet sein, was heißt, dass „Lehren Lernen anregen soll, dass aber auch umgekehrt das Lehren auf das Lernen reagiert “[28]. Eine Schulstunde wiederholt immer wieder gewisse Unterrichtsphasen. Es wird gestartet mit einer anschaulichen Einführung in ein Thema. Dann wird ein Problem aufgeworfen, welches durch das Herausarbeiten von Begriffen, Vermutungen und Regeln gelöst werden soll. Dieses neu erworbene Wissen soll dann mit dem schon vorhandenen Wissen in Beziehung gesetzt werden. Diese Regeln und Verfahren sollen nicht nur im Kurzzeitgedächtnis bleiben, sondern durch Wiederholungen und Übungen gesichert werden. Das Wissen soll dann vor allem von leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern anhand von Begründungen und Beispielen mit höheren Ansprüchen vertieft werden. Außerdem meinen Vollrath und Roth, dass es besonders wichtig ist, die Effektivität des Gelernten zu prüfen und unter Umständen zu korrigieren [28]. Desweiteren behauptet Freudenthal, dass die Beziehungen verschiedener Schlüsselbegriffe am wichtigsten sind, da sie das Behalten, also die „Wirksamkeit und das Fortwirken“ gewähren. Beziehungen können aus unterschiedlichen Aspekten herkommen. Ein Aspekt fokussiert sich auf die anwendende Mathematik, was es aber im pädagogischen Kontext nicht utilitarisch gibt. Der zweite Aspekt fokussiert sich auf die natürlichen innermathematischen Analogien und Verknüpfungen mit der Realität. Außerdem spricht Freudenthal von „Mathematik als Tätigkeit“. Der Mensch soll ein schöpferisches, erfindendes und spielendes Wesen sein. Deshalb soll auch in der Schule für die „Entfaltung schöpferischer Kräfte“ gesorgt werden indem zum Nachdenken, Suchen nach Gründen und Beweisen angeregt wird [9, S.64-65]. Weiters meint Bruder, ein guter Unterricht wird durch seine Ergebnisse, also im Zuge seiner Auswirkungen auf die Entwicklung der Lernenden definiert. Es stehen aber nicht nur Wissen und Fertigkeiten im Vordergrund, sondern auch motivationale Faktoren wie die Einstellung zum Lernen, die Lernmotivation und das Selbstkonzept. Essentiell ist, dass jede Schülerin und jeder Schüler entsprechend ihrer/ seiner Fähigkeiten individuell gefördert wird [9].

All das passt nicht zu einem lehrerzentrierten Frontalunterricht. Deswegen motiviert es mich, über Flipped Classroom zu schreiben, welches eine schülerzentrierte Unterrichtsmethode darstellt, mit der mehr Zeit und Zuneigung für die Vertiefung und Vernetzung aufgewendet werden kann. Der moderne Unterricht wird immer mehr digitalisiert, wodurch in Zukunft andere und neue Unterrichtsmethoden hilfreich und essentiell werden. In meiner Schule werden im nächsten Schuljahr alle 1. und 2. Klassen zu Tabletklassen, das bedeutet, dass jedes Kind ein eigenes Tablet besitzt. Natürlich sollen diese Tablets dann auch in der Schule zum Lernen und für Hausübungen eingesetzt werden. Auch unter diesem Aspekt finde ich die Methode des Flipped Classroom eine sehr interessante und zu erprobende Lehrform. In dieser Arbeit bzw. in der Studie wird geprüft, ob Kinder am Beginn der Sekundarstufe I den Flipped Classroom als gute Methode ansehen, und ob sie dadurch motivierter sind oder mehr Spaß am Lernen haben.

Kapitel 2

Flipped Classroom

Das Lehren und Lernen in Schulen verändert sich durch den digitalen Wandel. Jedoch liegen stark digital geprägte Unterrichtsphasen in den meisten Schulen noch weit in der Zukunft, da oftmals die nötige Technik in den Klassenräumen fehlt, und die erforderlichen pädagogischen Konzepte und Kompetenzen für einen sinnvollen Einsatz digitaler Medien noch nicht (ausreichend) vorliegen. Flipped Classroom ist eine digitale Innovation, ein Konzept, welches in den USA entwickelt wurde, sehr einfach umzusetzen ist, (fast) keine moderne Technik benötigt und daher ein sehr denkbares Konzept für alle Schulen ist. [29].

2.1 Definition

Flipped Classroom wird auch Umgedrehter Unterricht oder Inverted Classroom genannt, da das Wort „flipped“ umgekehrt bedeutet [29]. „Basically the concept of a flipped class is this: that which is traditionally done in class is now done at home, and that which is traditionally done as homework is now completed in class.“[6] Wichtig zu verstehen ist, dass Flipped Classroom nicht eine Form von Online-Lehre ist, sondern ein Präsenzkonzept darstellt. Es ist eine pädagogische Entwicklung, die auf schülerzentrierte Anweisungen fokusiert ist [14]. Die 4 Säulen von F-L-I-P sind „Flexible Environment, Learning Culture, Intentional Content and Professional Educator“. Flipped Classroom wird festgelegt als eine Methode, die für Lernende eine Gelegenheit bietet, sich den zu lernenden Inhalt schon vor der Schule aufzubereiten und sich auf den Unterricht einzuarbeiten, die einen Mechanismus zur Bewertung des Verständnisses der Schülerinnen und Schüler (z.B. durch Quizfragen) bereitstellt und die in der Klasse aktives Lernen, Peer-Learning und Problemlösen zulässt, wodurch die Aktivität der Schülerinnen und Schüler stärker wird und somit effektiver und auf einem höheren Level gelernt werden kann [8]. Dieses Konzept besteht aus 2 Phasen. Die 1. Phase ist geprägt von individueller Inhaltsvermittlung und Inhaltserschließung außerhalb der Präsenzzeit. Diese Phase ist Eigenarbeit, das heißt die Lernenden müssen die von der Lehrperson bereitgestellten Materialien zu Hause durcharbeiten. Die 2. Phase ist die Präsenzzeit in der Schule [17]. Bei den meisten Unterrichtsmethoden wird der Lehrstoff von der Lehrperson im Unterricht vermittelt, das heißt, der Redeanteil von der Lehrperson ist übermäßig hoch und somit wird die wertvolle Unterrichtszeit nicht für Schüleraktivitäten genutzt, sondern für Lehrervorträge. Die Schülerinnen und Schüler werden erst zu Hause aktiv, indem sie den Stoff als Hausübung üben und vertiefen. Beim Konzept des Flipped Classroom wird dieses Prinzip umgekehrt. Der Lehrstoff, also die Einführung in ein Thema und auch die Erklärung wird außerhalb des Unterrichts, also als Hausübung, anhand von Videos oder anderen Materialien übermittelt. Im Unterricht können Fragen dazu gestellt und beantwortet werden und es wird dieser Input dann geübt, vertieft, gefestigt und reflektiert, weil die Schulkinder schon vorbereitet sind. Die Lehrperson hat dann keine aktive Rolle zum Erklären, sondern nur eine Rolle als Coach oder Lernbegleiter bzw. Lernbegleiterin. So können Schülerinnen und Schüler mehr lernen und individuell besser gefördert werden [29]. Im Mittelpunkt des Flipped Classroom steht die Präsenzphase und das Ziel ist es, die gemeinsame Zeit für kommunikative und kollaborative Aktivitäten zu nutzen [17].

Dieses Konzept ist zwar eng verbunden mit dem Einsatz von digitalen Medien, jedoch stellt dies keineswegs eine Voraussetzung dar. Die Kinder können sich die Videos über ihr eigenes Handy anschauen, und benötigen nicht ein extra digitales Endgerät wie einen Laptop oder Tablet. Außerdem ist der Einsatz von digitalen Medien nicht der Kern des Flipped Classroom, sondern die sinnvolle Nutzung der Präsenzzeit. Für die Selbstlernphase eignen sich Videos ganz gut, weil in diesen gewisse Prozesse besser abgebildet, erklärt und demonstriert werden können. Es gibt auch viele andere digitale Medien, wie Online-Quizzes, die den Lernenden die Möglichkeit bieten, ihr Verständnis aus der Vorbereitungsphase zu überprüfen. Außerdem können ferner Online-Kollaborationstools verwendet werden, um schon in der Vorbereitungsphase zusammmen zu arbeiten. Natürlich können im Präsenzunterricht ebenfalls digitale Medien nutzbar gemacht werden werden [29].

Als Lernmaterialien in der Selbstlernphase werden am häufigsten Lehrvideos, in denen Screencasts mit Audiokommentaren gekoppelt werden, eingesetzt. Jedoch gibt es viele andere Möglichkeiten wie Podcasts, Unterrichtsaufnahmen, Texte, Animationen, Simulationen oder Kombinationen. Durch die Inklusion von Übungen und Selbstlerntests können die Schülerinnen und Schüler ihren Wissensstand überprüfen und somit Wissenslücken aufarbeiten [17].

2.2 Entstehung des Flipped Classroom

Durch das Internet wurde es immer populärer, Videos, Präsentationen oder Texte von Vorlesungen für Studierende zur Verfügung zu stellen. Da heutzutage schon fast jeder Haushalt und jede Institution im Bildungsbereich die nötige technische Ausstattung wie PCs oder Handys hat, ist es noch einfacher, die Digitalisierung voranzutreiben [17].

Das Konzept des Flipped Classroom wurde bekannt durch das Buch „Flip your classroom“ von Jonathan Bergmann und Aaron Sams [6]. Diese zwei Lehrer, Bergmann und

Sams, unterrichteten seit 2006 an der Woodland Park High School in Colorado und bemerkten sehr früh, dass sie die gleiche Bildungsphilosophie teilen. So begannen sie, um Zeit zu sparen, gemeinsam ihren Chemieunterricht zu planen. Es war eine sehr ländliche Schule, und auf Grund vieler Sportevents verpassten einige Schülerinnen und Schüler immer wieder den Unterricht. Aaron blätterte eines Tages in einem Magazin und entdeckte einen Artikel über eine Software, die PowerPoint-Präsentationen aufnahm und mit dem Ton gemeinsam in ein Video verwandelte. Bergmann und Sams befanden diese Idee gleich für sinnvoll für ihre Lernenden, da die Fehlenden nicht so viel neuen Stoff verpassen würden. Im Herbst 2007 begannen sie nun wirklich mit der Aufzeichnung von ihrem Unterricht. Die Schülerinnen und Schüler liebten diese Videos, weil sie, wenn sie fehlten, den Inhalt einfach nachschauen und nachlernen konnten, aber auch weil sie das Video nach dem Unterricht noch einmal anschauen konnten, wenn sie etwas nicht verstanden hatten oder für die Tests nochmals einen Input brauchten. Aber nicht nur ihre eigenen Schülerinnen und Schüler waren begeistert von diesem Angebot, sondern Lernende und auch Lehrende von der Nachbarsschule, dann von dem ganzen Land und schon von der ganzen Welt schrieben ihnen E-Mails und bedankten sich für diese wundervollen Lernvideos. Viele Lehrpersonen nutzen seit dem diese Videos in ihrem Unterricht oder empfehlen diese für ihre Jugendlichen zum Lernen. Eines Tages philosophierten Bergmann und Sams über die vielen fehlgeschlagenen Hausübungen, worauf Sams erkannte: „The time when students really need me physically present is when they get stuck and need my induvidual help. They don´t need me there in the room with them to yak at them and give them content; they can recieve content on their own." Und so entwickelten sie die Idee des Flipped Classroom, indem sie daran dachten, alle Inputs aufzunehmen und als Hausübung den Lernenden bereitzustellen. Im Schuljahr 2007/08 schafften sie, ihren ganzen Chemieunterricht in Videos zu verwandeln und probierten das natürlich auch gleich mit ihren eigenen Schülerinnen und Schülern aus. Dabei gaben sie die gleichen Tests zu Kapitelende wie in den Jahren davor (ohne dieser Flipped Classroom Methode) und bemerkten, dass die Lernenden die Inhalte nun noch besser verstanden [6]. Ganz parallel dazu wurde im Hochschulbereich der Begriff „inverted classroom" entwickelt, bei welchem Videos als Vorbereitung auf Vorlesungen zur Verfügung gestellt werden. In der Vorlesung selbst wurde kein Monolog von dem Professor oder der Professorin erstellt, sondern die Inhalte wurden gemeinsam diskutiert und vertieft. Schon hier wird die anders gestaltete Unterrichtszeit als Vorteil dieser Taktik erkannt, wodurch diese Methode auch im Schulkontext immer öfter ausprobiert, erforscht und weiterentwickelt wird [29].

2.2.1 Projekt „Flip your class!" [29]

Die Bertelsmann Stiftung, die Pädagogische Hochschule Heidelberg und die Firma sofatutor führten 2017 gemeinsam ein Projekt namens „Flip your class!" durch. Bei diesem dreijährigen Pilotprojekt nahmen drei unterschiedliche Berliner Schulen teil und in der zweiten Hälfte des Projekts kamen noch zwei Schulen dazu. Ziel war es, zusammen mit den Lehrpersonen unterschiedlichster Schularten, Schulstufen und Fächern das Flipped Classroom Konzept zu erproben, anzupassen, weiterzuentwickeln und gute Praxisbeispiele zu entfalten. Das Projekt sollte an die jeweiligen Lehrpersonen angepasst werden, um möglichst verschiedene Wege der Ausgestaltung im Unterricht zu finden. Ein großes Augenmerk lag dabei auf dem Aspekt der individuellen Förderung von einzelnen Schülerinnen und Schülern und auf der Rolle der digitalen Medien. Der Unterricht sollte also stärker auf individuelle Bedürfnisse, Vorwissen und Lernentwicklung abgerichtet sein. Der erste Schritt in diesem Projekt war, dass Lehrkräfte gemeinsam in Fachgruppen Unterrichtseinheiten mit allen fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Kompetenzen entwickelten. Diese wurden dann im Laufe des Projekts im Rahmen eines Design-Based-Research-Ansatzes ausgeführt und reflektiert.

Ergebnisse des Projekts [29] Die Auswertungen und Reflexionen des Pilotprojekts ergaben, dass diese Flipped Classroom Methode einen wichtigen Beitrag zur Methoden- und Medienvielfalt darstellt. Grundsätzlich ist diese Handhabung zwar in jeder Klasse und in jedem Fach sinnvoll, jedoch nicht bei jedem Thema. Gewisse Unterrichtsmethoden, wie auch der Umgang mit Erklärungsvideos, muss den Schülerinnen und Schülern gezielt vermittelt werden, da sonst vor allem leistungsschwächere Kinder nicht so stark davon profitieren können. Die Unterrichtszeit in der Schule kann bei der Methode des Flipped Classroom sinnvoller für individuelle Förderungen und eigenständiges Arbeiten genutzt werden, da weniger Zeit für Einführungen und das Schreiben eines Merktextes verwendet werden muss. Das bedeutet jedoch nicht automatisch, dass die Präsenzphase mehr schülerorientiert gestaltet wird als zuvor. Manchmal wissen Lehrkräfte nicht, was sie mit der nun gewonnen Zeit im Unterricht anfangen sollen.

Abhängig vom Alter, von den Vorkenntnissen, der Leistungsbereitschaft und der Lernstrategien kann sich der Einsatz von Flipped Classroom sowohl positiv als auch negativ auf die Leistung auswirken. Es war im Pilotprojekt nicht immer nur eine Leistungsverbesserung zu sehen. Ein positiver Effekt im Projekt war, dass sich der Medieneinsatz positiv auf die Motivation der Kinder und Jugendlichen auswirkte. Im Sprachunterricht wurde sogar der Sprechanteil der Kinder erhöht. Manchmal wurden Lernende und Lehrende jedoch frustriert, da es Probleme gab mit (fehlende) Geräte, WLAN, Updates, dem Empfangen und Versenden von E-Mails oder mit dem Einloggen auf Videopattformen, wodurch oftmals das Video nicht angesehen werden konnte. Ein Problem kann auch sein, dass sich die Kinder die Videos nur unaufmerksam anschauen, und somit den Lehrstoff nicht gut verstehen oder lernen. Den leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern hat diese Flipped Classroom Methode sehr gut gefallen, jedoch konnte beobachtet werden, dass es bei leistungsschwächere Kinder eine größere Verständnisschwierigkeit bei der Nutzung von Videos gab, und dadurch wurde auch das Angebot in den Einheiten in der Schule nicht genutzt. Bei diesem Projekt kam es auch oft vor, dass etwas nicht verstanden wurde, aber trotzdem in den Präsenzstunden keine Rückfragen kamen.

2.3 Vorteile

Folgend werden einige Vorteile der Nutzung der Methode des Flipped Classroom vorgestellt und exzerpiert:

- Die Einarbeitung in ein Thema lässt sich leicht zu Hause alleine durchführen, wobei das Lösen von komplexeren Aufgaben oftmals Hilfestellungen benötigt, die in der Schule bereitgestellt werden können.

- Es passiert ein Wechsel von einem Lehrerzentrierten zu einem Schülerzentrierten Unterricht. Der präsente Unterricht wird wirklich dafür genutzt, wofür Zusammenarbeit, gegenseitige Hilfe und Unterstützung notwendig ist.

- Flipped Classroom gibt Lehrpersonen die Möglichkeit ihren Unterricht besser auf die Vielfalt der einzelnen Kinder anzupassen. Da die Schülerinnen und Schüler die Erklärungsphase, die normalerweise lange dauern kann, schon zu Hause gehört haben, bleibt im Unterricht mehr Zeit, um auf individuelle Fragen einzugehen und den Unterricht Schülerorientiert zu gestalten.

- Wenn die Wissensvermittlung nach Hause verlagert wird, hat das den Vorteil, dass sich die Schülerinnnen und Schüler im eigenen Tempo das Wissen aneignen können und sich die Lernmaterialien (wie z.B. Videos) so oft sie wollen anschauen und durchdenken können.

- Anhand von Videos können gewisse Lösungsschritte besser nachvollzogen werden, da auf Stopp gedrückt werden kann, während noch einmal alles durchgedacht wird, und das Video (oder Ausschnitte davon) auch öfter angeschaut werden kann [29].

- Der Aspekt des Wiederholens ist für Kinder, welche nicht in der Muttersprache unterrichtet werden, ganz besonders effektiv. Sie verstehen im Unterricht vielleicht nicht alles beim ersten Mal, möchten aber nicht nachfragen. Ein Video kann so oft wiederholt werden, bis alles begriffen wurde.

- Durch die verschiedenen Medienformen in der Selbstlernphase werden verschiedenste Lerntypen angesprochen und es ergibt sich somit die Möglichkeit für viele Lernende, ihren individuellen Lerntyp zu verfolgen und dadurch besser und leichter zu lernen [17].

- In einem Video können mehrere alternative Lösungswege miteingebaut werden, wofür in der regulären Unterrichtszeit oft die Zeit fehlt.

- Die Lernmotivation von Kindern und Jugendlichen kann durch das Schauen von Videos und die Einbindung von digitalen Medien oder Handys gesteigert werden.
- Ein Vorteil des Flipped Classroom kann sein, dass leistungsschwächere Lernende durch genaue Arbeitsaufträge eine geleitete Unterstützungsmaßnahme erhalten, und somit dem Unterricht besser folgen können [29].
- Diese Methode versichert eine personalisierte Bildung auf individuelle Bedürfnisse [6].
- Der aktive Einsatz der Lernenden steigert sich sowohl im Unterricht als auch bei den Hausübungen. Hausübungen in Verbindung mit Videos sind attraktiver und werden eher gemacht als normale Hausübungen.
- Es bleibt bei der Flipped Classroom Methode insgesamt mehr Zeit für Instruktionen und individuelle Hilfe, was nicht nur dazu führt, dass die Noten besser werden, sondern auch, dass die Schülerinnen und Schüler lernen kritisch zu reflektieren und das Wichtigste herauszufiltern und aufzuschreiben [5].
- Die Aufmerksamkeit von Kindern verringert sich nach den ersten zehn Minuten im Unterricht und kommt erst wieder am Ende der Stunde zurück, weshalb Viele in einem „normalen“, frontalen Unterricht bis zu 20 % der Instruktionen nicht aktiv mitbekommen und verarbeiten. Wird jedoch eine andere Lehrform, z.B. Flipped Classroom, angewandt, verschwindet das passive Lernen, da die Kinder herausgefordert werden zum Mitdenken, Lösen von Problemstellungen, Unterstützen von Anderen und Lernen mithilfe der Lehrperson.
- Durch Flipped Classroom lernen die Schülerinnen und Schüler nicht nur das Grundlevel eines Inhalts, sondern es wird zulässig, sich auch darüber hinaus vertiefend zu beschäftigen [14].
- Mithilfe der Flipped Classroom Methode kann der Unterricht problemorientierter gestaltet werden.

2.4 Nachteile

- Ein Nachteil vom Flipped Classroom ist, dass diese Methode extra Zeit für die Eingewöhnungsphase benötigt. Damit ist zum Beispiel das Erklären der Unterrichtstaktik oder das Lernen des richtigen Videoanschauens gemeint.
- Ganz genau geleitete Arbeitsaufträge könnten für leistungsstärkere Kinder zu einschränkend sein. Allerdings könnte dem mit offen gestellten Zusatzaufgaben entgegengewirkt werden [29].

- Die Schülerinnen und Schüler müssen mehr Eigenverantwortung und Selbstdisziplin mitbringen. Für Viele kann das einen Mehrwert darstellen, jedoch kann es (vor allem in der Sekundarstufe I) für Viele zu Problemen kommen, da sie es noch gewohnt sind, jeden Arbeitsauftrag Schritt für Schritt diktiert zu bekommen.
- Sehr schwierig wird es, wenn Kinder sich nicht in den Selbstlernphasen auf den Präsenzunterricht vorbereiten, denn dann können sie die Aufgaben im Unterricht nicht lösen und bei der Diskussion nicht teilnehmen [17].

2.5 Effektivität der Methode

Leider gibt es in diesem Themenfeld noch kaum umfassende, fächerübergreifende und quantitativ breit aufgestellte Studien. Aber es gibt schon kleinere Untersuchungen, Feedback und Evaluationen von Kursen. Hierbei ist jedoch keine eindeutig positive oder negative Auswirkung auf den Lernfortschritt oder Lernerfolg nachzuweisen. In einer Befragung von Goodwin und Miller gaben 67 % der Lehrpersonen, welche ein Projekt mit Flipped Classroom durchführten, an, dass sich der Durchschnitt der Schülernoten verbesserte. Generell ist sich die Literatur einig, dass der Lernerfolg durch den Wechsel von herkömmlichen Unterricht auf Flipped Classroom nie sinken kann [17].

In der Studie von Belmonte et al. [3] wird gezeigt, dass die Versuchsklasse, welche als Flipped Classroom unterrichtet wurde, alle gefragten allgemeinen Variablen wie Motivation, Selbstständigkeit, Zusammenarbeit, Beteiligung am Unterricht, Ergebnisse und die Zeit in der Klasse, aber auch im mathematischen Kontext, Variablen wie Konzept, Grafiken, Ergebnisse, Entscheidungen und Bewertungen, besser bewerteten als die Kontrollklasse. Die herausragendsten Werte waren die Motivation und die Präsentation von Graphen.

In der Clintondale High School in Michigan lag die Durchfallrate in Mathematik bei 44 % und konnte durch Flipped Classroom auf 13 % gesenkt werden [25]. Die Studie von Subramaniam zeigt, dass sich Studierende, die mit der Flipped Classroom Methode unterrichtet werden, mehr am Unterricht beteiligten. Einerseits konnten sich diese Studierenden besser auf die jeweilige Aufgabe konzentrieren, erbrachten höhere Anstrengungen und längere Ausdauer. Es konnten aber auch Veränderungen in den Emotionen festgestellt werden. Konkret wurden aufgabenerleichternde Emotionen wie Interesse, Neugier und Enthusiasmus präsenter und aufgabenerschwerende Emotionen wie Verzweiflung, Frustration, Angst und Ärger wurden immer weniger. Andererseits wurde das Denken der Studierenden durch personalisierte Lernstrategien, Konzeptlernen statt oberflächliches Lernen und selbstreguliertem Lernen angeregt und verstärkt [27].

Das Ergebnis einer Studie Pettis [8] demonstriert, dass die Leistung und Kapazität der Lernenden durch einen umgekehrten Klassenraum maximal wird. Außerdem wird das problemorientierte Lernen gefördert, wodurch auch der Umgang mit sozialen Problemen in der Klasse verbessert wird. Auch Lehrpersonen berichteten, dass diese Methode passiv

Lernende zu aktiv Lernenden verwandeln kann.

Eine Metaanalyse sagt „Studies focusing on advantages that flipped learning can bring to higher education report that it has a considerable positive impact on students' attendance in class which can improve both learning and engagement“[8]. Weiters betont diese Analyse nochmals, dass Lernende in umgedrehten Klassen mehr als doppelt so gute Ergebnisse erzielen und sie generell den Inhalt besser verstehen. Außerdem besagt diese Studie auch „Students are also more likely to engage in critical thinking and problem-solving activities, and the instructor is more likely to take the students' interests, strengths, and weaknesses into account when designing in-class activities. [...] Researchers indicate that a students' progress through the material faster, understand topics in greater depth, and additional content can be covered without sacrificing the quality of the course as a whole“[8].

Es gibt jedoch auch Studien, welche sehr unterschiedliche Ergebnisse erzielten. Also es gibt sowohl positive als auch negative Kommentare von Lernenden, vor allem weil manche davon aufgrund von fehlenden Technologien einen Nachteil verspürten [8].

Kapitel 3

Unterrichten mit dem Flipped Classroom-Modell

Ganz wichtig ist es zu betonen, dass diese Methode keine Supermethode ist, also dass sie - so wie jede andere Unterrichtsmethode - nicht in jedem Kontext perfekt einsetzbar ist. Natürlich ist die Effektivität immer abhängig von der Schulstufe, dem Fach, dem Inhalt, die zu erlernenden Kompetenzen, die Leistungsfähigkeit und die Lernbereitschaft der Schülerinnen und Schüler, als auch die Methodenpräferenz und die Persönlichkeit der Lehrperson. Beispielsweise ist diese Methode unpassend, wenn am Beginn eines Lernprozesses keine Erklärung, sondern eine selbstentdeckende Erarbeitung stehen sollte. Deshalb muss zuerst immer reflektiert werden, ob diese Methode für das jeweiligen Thema auch wirklich didaktisch passend ist. Bei der Vorbereitung ist es essentiell, sich die Lernziele und die kleinen Schritte bis dahin zu überlegen. Es muss am Anfang schon feststehen, welche Aktivitäten in welcher Reihenfolge zu dem beabsichtigten Ziel führen.
Die Kinder in einer Klasse sind meistens sehr heterogen, wodurch es noch wichtiger erscheint, dass die persönlichen Lernvoraussetzungen, die einzelne Kinder mitbringen, in den Mittelpunkt rücken und stärker auf individualisiertes, eigenmotiviertes Lernen geachtet wird. Der Unterricht muss geplant werden, indem von den Lernenden ausgehend gedacht wird. Außerdem ist das Wichtigste für den Lernerfolg die Lehrperson mit ihrem Professionswissen. Zu diesem Professionswissen zählt dann nicht nur das Fachwissen, fachdidaktisches Wissen, pädagogisches und psychologisches Wissen, Organisations- und Beratungswissen, sondern auch die Kompetenz, digitale Medien zum richtigen Zeitpunkt sinnvoll in den Unterricht einzubinden [29].

Natürlich gibt es auch Kritik zum Flipped Classroom. Einige Kritiker meinen, dass der Hausübung und Selbstlektüre zu viel Bedeutung zukommt, da diese nicht produktiv sind und die Lernerfahrung nicht standardisieren. Das wird dazu führen, dass die Bildung privatisiert wird und einige Lehrpersonen eliminiert werden. Außerdem kritisieren sie auch, dass Flipped Classroom keine Methode ist, die immer angewandt werden kann, und dass es nur durch ein ausgiebiges Literaturstudium klar wird, wann diese Methode sinnvoll eingesetzt werden kann, und wann nicht [8].

3.1 Übergang zum Flipped Classroom

Den Übergang zu einem inversen Klassenraum zu planen kann für eine Lehrperson eine enorm aufwendige und kritische Aufgabe bedeuten. Um den Unterricht auf Flipped Classroom umzustellen müssen zunächst 4 Phasen durchlaufen werden. Zuerst muss die Motivation zum Methodenwechsel auf Seiten der Lernenden und Lehrenden da sein. Dann müssen einige Vorbereitungen getrofffen, pädagogische und curicculare Vorgehensweisen adaptiert und die Kommunikation klargestellt werden [8]. Die Flipped Classroom Unterrichtsmethode ist für Kinder meistens eine ganz neue Art des Lernens. Sie kennen dieses Ausmaß an Selbstverantwortung beim Lernen noch nicht, deshalb ist es wichtig, dass die zu Unterrichtenden vorbereitet werden [29]. Auch Bergmann und Sams wandten zu Beginn ihres Flipped Classrooms eine lange Zeit auf für das Training der Schülerinnen und Schüler [6]. Kinder sehen sich auf diversen Medien viele Videos beiläufig an, jedoch sind sie es nicht gewohnt mit einem Video zu lernen, bzw. diesem 10 Minuten lang die volle Aufmerksamkeit zu schenken und wirklich mitzudenken. Deshalb sollte, bevor die Flipped Classroom Methode gestartet wird, erklärt werden, wie das Arbeiten mit Videos funktioniert, wie die Inhalte aktiv wahrgenommen und verstanden werden können, wie auf Pause gedrückt werden kann, wie man sich ein Video noch einmal ansehen kann und dass man sich auch Notizen machen soll. Ein Beispiel wäre ein Video über Origami-Falttechnik, zu welchem die Kinder parallel die Figur falten sollen. Danach wird reflektiert, welche Schwierigkeiten es gab und welche Ideen es gibt, damit die wichtigsten Informationen herausgefiltert werden [29]. Außerdem ist es notwendig, den Kindern zu sagen, dass während dieser Hausübung iPods, Kopfhörer, Handy und Fernseher unbedingt ausgeschaltet werden sollen [6]. Damit die Schülerinnen und Schüler sich ein Video zu Hause nicht nur beiläufig ansehen und denken, dass sie eh alles verstanden haben, soll der Arbeitsauftrag nicht „Schaue dir das Video an“, sondern „Bearbeite folgende Aufgaben. Das Video hilft dir dabei.“ lauten. Dann steht diese zu bearbeitende Aufgabe im Mittelpunkt, und das Video ist nur ein Informationsmaterial. Diese Aufgabe kann auf einem Zettel gestellt werden, der ein QR-Code beinhaltet. So können die Kinder bzw. Jugendlichen direkt zum Video kommen, und müssen nicht noch externe Nachrichten checken. Für das Erstellen von QR-Codes gibt es im Internet einen QR-Code-Generator, so kann dieser Code ganz einfach in Arbeitsblätter eingearbeitet werden. Diesen Code können Schülerinnen und Schüler ganz einfach mit ihrem Handy oder Tablet einscannen und schon ist das Video offen. Ein QR-Code-Scanner ist bei den meisten Handys schon installiert, ansonsten kann so eine App gratis im Appstore heruntergeladen werden. Das ist einfacher als einen Link abzutippen, da hier Fehler vermieden werden können [29].

Arbeitsaufträge können durchaus sehr verschieden gestaltet werden. Die Lernenden sollen beispielsweise mithilfe des Videos einen Merksatz, also die Kernidee des Themas, ins Heft

schreiben, sollen sich Stichwörter oder Fragen dazu aufschreiben, müssen ein Anwendungsbeispiel lösen, denken sich eine neue Aufgabe aus, begründen warum sie der Position im Video zustimmen oder widersprechen oder sie lösen Quizaufgaben zu diesem Thema.
Das Erledigen der Hausaufgaben ist immer wichtig, aber bei der Methode des Flipped Classroom ist es unerlässlich, da die Lernenden sonst in der Schule bei den Übungs- und Vertiefungsaufgaben nicht folgen können. Deshalb sollte eine vergessene Hausübung in der Schule statt dem Präsenzunterricht nachgeholt werden können. Zu diesem Arbeitsauftrag oder Video stellt die Lehrperson dann im Einzelgespräch Verständnisfragen, damit überprüft wird, ob diejenigen Lernenden den Inhalt auch wirklich nachgeholt haben. Die Vertiefungsphase im Präsenzunterricht haben die Lernenden, welche die Hausübung vergessen haben, versäumt [29].

Im Präsenzunterricht ist es wichtig, dass nicht noch einmal der ganze Inhalt der Videos wiederholt wird, denn dann würde die Hausübung die Sinnhaftigkeit verlieren. Jedoch sollen die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, ihre Fragen zu stellen. Es könnte so gestaltet werden, dass die weniger vorbereiteten Kinder Fragen stellen, welche die gut Vorbereiteten beantworten. So fassen die Kinder den gelernten Inhalt in eigene Worte zusammen und verarbeiten es noch besser. Wenn so viele Fragen kommen, dass der zeitliche Rahmen gesprengt wird, können die Fragen auch am Anfang der Einheit gesammelt werden und dann nach Priorität gemeinsam beantwortet werden. Fragen, die nur einzelne Kinder haben, müssen nicht notwendigerweise im Plenum beantwortet werden, sondern im Einzelgespräch während der Arbeitsphase [29].

Dann kann die Vertiefungsphase beginnen. Diese Phase kann sowohl in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeiten erfolgen. Das Wichtigste ist, dass jede/r aktiv mitarbeiten muss. Einige Schülerinnen und Schüler werden bei diversen Aufgaben und Problemstellungen noch Hilfestellungen, erneuten Zugang zu dem Gelernten oder einen Austausch mit der Lehrperson benötigen. Deshalb soll sich die Lehrerin oder der Lehrer intensiv mit dieser Gruppe von Kindern beschäftigen, die noch einen Unterstützungsbedarf haben. Die restlichen Unterrichtsteilnehmerinnen und Unterrichtsteilnehmer können selbstständig an Vertiefungsaufgaben arbeiten. Damit diese zwei Gruppen auch „räumlich“ voneinander getrennt sind, und sie sich gegenseitig nicht stören, können in der Klasse zwei Tischgruppen oder Sesselkreise gebildet werden [29].

Für einen erfolgreichen Übergang zu einem Flipped Classroom ist es für die Lehrperson notwendig, sich vorher die Ziele des Unterricht zu überlegen. Es ist wichtig, sich bewusst zu machen, dass nicht nur die Lehrperson in einer neuen, herausfordenden Situation ist, sondern auch die Kinder. Jeder ist ein Anfänger, deshalb ist es essentiell, dass Lernende und Lehrende gemeinsam über die Methoden, Stategien und Herausforderungen reflektieren und davon lernen. Konsequente Reflexionen können viele Verwirrungen, Unsicherheiten und Missverständnisse aus dem Weg räumen [8].

3.2 Selbstlernphase

Wie oben genannt bestehen Selbstlernphasen oftmals aus einer Sammlung von Videos, denn laut einer Studie ziehen 78 % der Schülerinnen und Schüler Videos zur Vorbereitung den Texten und anderen Materialien vor [25]. Bei der Gestaltung von Videos gibt es viele Möglichkeiten. Die PowerPoint-Mitschnitte mit einem daneben sichtbaren, sprechenden Kopf ist nicht sehr effektiv, wohingegen Videos mit Handskizzen und Tonspuren in Echtzeit effektiver empfunden werden. Laut einem Lernexperiment ist die „Aufbereitung der Inhalte als knappe, inhaltlich kondensierte, ansprechend statt formal präsentierte Kombination aus gleichzeitigem Schreiben/Zeichnen und Sprechen“ der lerneffektivste Weg. Außerdem lässt die Aufmerksamkeit des Zuhörers nach circa 6 Minuten deutlich nach, das heißt, auch die Länge des Videos ist maßgeblich [17]. Laut einer Studie von Slemmons et al. ist ein kurzes Lernvideo in einer Mittelschule effektiver, um das Lernen zu aktivieren, die Speicherung voranzutreiben und die Motivation zu steigern. In einer Studie erbrachten die Kinder, die kürzere Videos (ca. 10 Minuten) anschauten, danach bei dem Quiz und auch bei den späteren Tests mehr Punkte, als Kinder, welche längere Videos (ca. 20 Minuten) anschauten. Außerdem war das Engagement und die Aufmerksamkeit der Kinder beim Schauen von kürzeren Videos höher. Das Lernen mit Videos führt dazu, dass Kinder eine bessere sprachliche und räumliche Intelligenz entwickeln [25]. Analog dazu bieten sich auch Selbsttests an. Diese Tests können in Videos eingebunden werden, damit einerseits geprüft wird, ob gelernt wurde, aber andererseits der Lerneffekt noch verstärkt wird. Diese Tests müssen nicht zur Bewertung einfließen. Die einfachste Variante solcher Tests ist ein Multiple-Choice-Quiz, welcher über diverse Plattformen einfach zu erstellen ist [17]. Videos können als Vorbereitung für eine Unterrichtsstunde eingesetzt werden, jedoch auch für die Nachbereitung. Oft werden in der Schule Beispiele gerechnet und es bleibt zu wenig Zeit, um alle Lösungen zu kontrollieren und die Lehrperson kann nicht jedem Lernenden ein Feedback dazu geben. Manchmal werden noch die Lösungen an die Tafel geschrieben, aber der Lösungsweg kann trotzdem nicht richtig nachvollzogen werden. Genau dann kann ein Video als Nachbereitung verwendet werden, in dem die Lösungen der Unterrichtsbeispiele noch einmal erklärt werden [29].

3.3 Präsenzphase

Die Präsenzphase soll den zu Unterrichtenden die Möglichkeit bieten, unter Anleitung der Lehrperson den Stoff zu üben, anzuwenden, zu wiederholen und zu vertiefen. Durch Verständnisfragen und Präsenzaufgaben soll das inhaltliche Verständnis der Selbstlernphase unterstützt werden.

3.3.1 Mögliche Unterrichtsmethoden

In diesem Kapitel werden einige Unterrichtsformen vorgestellt, die großartig zur Präsenzphase im Flipped Classroom passen.

Jigsaw classroom [30][S.52f.] Eine sehr bekannte Unterrichtsmethode ist das sogenannte Gruppenpuzzle oder auch Jigsaw classroom.

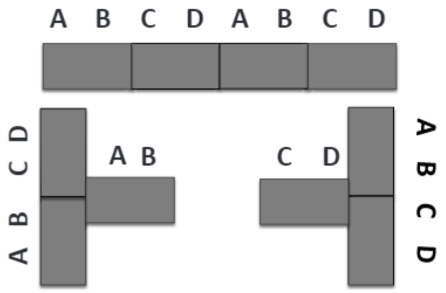


Abbildung 3.1: Phase 1

Bei dieser Methode wird die Klasse (durch Durchzählen) in (beispielsweise 4) ungefähr gleich große Gruppen eingeteilt. In jeder dieser Expertengruppe (siehe Graphik: Phase 2) wird ein anderes Teilgebiet erarbeitet, gelernt und vertieft. Das kann mit Texten, Erklärungen, Beispielen, Videos, Vertiefungsaufgaben und noch viel mehr stattfinden.

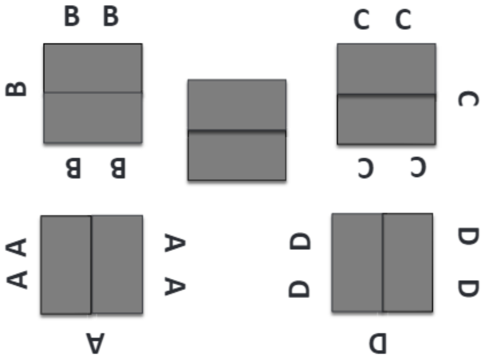


Abbildung 3.2: Phase 2

Danach werden neue Gruppen gemacht, wobei in jeder Gruppe jeweils ein Teilnehmer von jeder Expertengruppe sein muss (siehe Graphik: Phase 3). Die Experten vermitteln dann ihren Gruppenmitgliedern ihre zuvor erlernten Teilthemen. Dabei werden auch die Erarbeitungs- und Vertiefungsaufgaben der Expertengruppe gemeinsam gelöst. Das Ziel des Gruppenpuzzles ist, dass am Ende alle Schülerinnen und Schüler jedes Teilgebiet beherrschen.

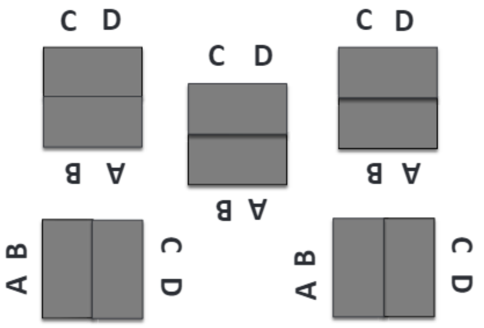


Abbildung 3.3: Phase 3

Concept-Map [18] Beim Entwickeln einer Concept-Map werden die Kinder aufgefordert, die fundamentalen Begriffe und Teilthemen aufzuschreiben und zueinander in Beziehung zu setzen. Dazu notiert sich jeder Lernende zuerst die wichtigsten Begriffe eines Themas. Im Anschluss wird in Partnerarbeit darüber reflektiert, eventuell ergänzt und durch Pfeile und Beschriftungen eine Beziehung zwischen den Schlüsselbegriffen hergestellt.

Peer-Tutoring Wenn die Gruppe der leistungsschwächeren Kinder zu groß ist, um jedem Unterstützung anbieten zu können, eignet sich die Peer-Tutoring-Methode hervorragend [29]. Dieser Ansatz gestaltet sich nach dem Lernen-durch-Lehren-Prinzip, bei welchem die Schülerinnen und Schüler eine aktive Rolle in der Wissensvermittlung einnehmen [17]. Das heißt, es helfen Leistungsstärkere den Leistungsschwächeren bei der Bearbeitung von Aufgaben oder beim Beantworten von Verständnisfragen. Davon profitieren die Leistungsstärkeren, da das Gelernte durch das Erklären und in eigene Worte Fassen noch besser vertieft wird, und die Leistunsgsschwächeren, da sie durch die Klassenkameradinnen und Klassenkameraden einen neuen oder anderen Zugang zum Thema bekommen, und manchmal die Sprache der Kinder verständlicher ist, als die Sprache der Lehrperson[29].

Stationenbetrieb Eine weitere Methode im Präsenzunterricht könnte ein Stationenbetrieb oder Lernzirkel sein. Bei dieser Methode bekommen die zu Unterrichtenden ein Angebot an thematisch und strukturell zusammenhängenden Aufgaben zu einem Thema, aus dem sie entweder in vorgegebener oder in selbstbestimmter Reihenfolge Arbeitsaufträge auswählen und weitgehend selbstständig bearbeiten und kontrollieren können [30]. Es können einzelne Stationen auch mit Erklär- und Lernvideos als Wiederholung bereichert werden und bei anderen Stationen sollen Aufgaben erledigt werden. Wichtig ist, dass Kopfhörer verwendet werden, wenn Kinder im Unterricht Videos schauen dürfen, da sonst andere Kinder gestört werden könnten und der Lärmpegel zu hoch wäre. Sehr ähnlich zu dem Stationenbetrieb ist die Methode des Lernbüros. Hier können Schülerinnen und Schüler selbstständig für sie passende Aufgaben und Materialien aus einem Pool auswählen und erledigen [29].

Think-Pair-Share [17] Die Think-Pair-Share-Methode wird oft auch Ich-Du-Wir-Methode genannt, weil der Unterricht in 3 Phasen aufgeteilt wird. In der 1. Phase machen sich die Lernenden selbstständig in Einzelarbeit Gedanken zu einer Problemstellung, Frage oder einem Beispiel, welches die Lehrperson genannt hat. In der 2. Phase gehen die Kinder in Zweiergruppen zusammen und tauschen sich über ihre Gedanken und Stichpunkte aus. Anschließend teilen die Lernenden ihre Ergebnisse mit dem Plenum, wodurch eine gemeinschaftliche Diskussion entstehen soll. Dadurch werden eher zurückhaltende Kinder ermutigt, sich auch an dem Diskussionsprozess zu beteiligen.

3.3.2 Kooperative Sozialformen

Laut einigen Theoretikern sollen im Unterricht oftmals Gruppenarbeiten stattfinden, da dadurch die Lernleistung, die Kommunikation zwischen den Kindern und die Lernmotivation steigt. Jedoch zeigt die Praxis, dass Gruppenarbeiten aufgrund des hohen Lärmpegels, der Unruhe und der möglicherweise ungerechten Arbeitsaufteilung in der Gruppe selten eingesetzt werden. Kooperatives Lernen hingegen wird als eine sehr spezifisch strukturierte Sozialform angesehen, in der sich Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen gegenseitig unterstützen, miteinander kommunizieren und die Ergebnisse anschließend im Plenum vorstellen. Das heißt, es handelt sich um ein selbstständiges, aktives und soziales Lernen. Es wird davon ausgegangen, dass Kinder durch kooperative Lernformen den Lehrstoff besser verstehen, da sie sich gegenseitig etwas erklären [11].

Kooperative Übungsformen können dazu beitragen, dass Kinder und Jugendliche weniger Unsicherheiten verspüren, da diese Methode im Kontrast zum „Richtig-oder-falsch-Denken“ steht. Diese Übungsformen erlauben Fehler und können somit das mathematische Selbstbewusstsein von Kindern stärken [7] [S. 149-152]. Lernende profitieren von kooperativen Sozialformen am meisten, wenn sie durch die Zusammenarbeit und den Austausch mit Klassenkameradinnen und Klassenkameraden angeregt werden, bestehendes Wissen zu überprüfen und in eigene Worte zu fassen, zu begründen und etwas neu Gelerntes mit schon vorhandenen Wissen zu vernetzen. Da in einer Gruppenarbeit nicht jedes Kind gleichermaßen aktiv teilnimmt, benötigen Kleingruppen Unterstützungen der Lehrperson, um das Potenzial kooperativer Lernsettings auszuschöpfen. Dieses Potenzial ist jedoch abhängig von der Gruppengröße, von der Homogenität in der Gruppe, von den Charakteristika der Gruppenmitglieder und von der Unterstützungsperson. Unterrichtsmethoden, die wirklich Potenzial haben, kennzeichnen sich mit folgenden Eigenschaften:

- Positive Interdependenz: Dem Lernenden soll bewusst sein, dass die zu lösende Aufgabe nur gemeinsam zu bearbeiten ist. Selbstständig soll keine Lösung gefunden werden.

- Individuelle Verantwortung: Jedes Individuum der Gruppe soll Verantwortung für den Arbeitsprozess übernehmen. Das heißt, als Gruppenmitglied darf man sich nicht ausschließlich auf ein anderes Gruppenmitglied verlassen und sich folglich selbst aus dem aktiven Prozess zurückziehen.

- Kommunikation: Zum kooperativen Lernen gehört auch der Austausch von verschiedensten Lösungsansätzen, Diskussion, gegenseitige Unterstützung und wechselseitiges Feedback.
- Soziale Fähigkeit: Damit das kooperative Lernen erfolgreich sein kann, wird ein minimales Ausmaß an sozialer Fähigkeit vorausgesetzt.
- Metakognitive und reflexive Tätigkeit: Lernende müssen fähig sein über Arbeitsschritte kritisch nachzudenken und zu reflektieren[9] .

3.3.3 Offene Lernumgebung

[9] Eine offene Lernumgebung wird durch eine Auswahlmöglichkeit an Aufgaben und individuelle Gestaltung des Lernprozesses definiert. Die Wahlmöglichkeiten können sich auf inhaltliche Aspekte, Auswahl von Aufgaben, Nutzung von Medien und Materialien, Wahl des Arbeitsplatzes, der Lernpartner und der Betreuung beziehen. Solche Gelegenheiten für individuelles, selbstgesteuertes Lernen bewerten Lernende mit einem positiven Erlebnis und es wirkt sich positiv auf deren Wohlbefinden und Motivation aus.

Kapitel 4

Unterrichtsplanung für Sek. II

4.1 Auswahl des Themas

In dieser Arbeit wird das Thema "Kurvendiskussion", also die Untersuchung einer Funktion auf deren geometrische Eigenschaften, wie zum Beispiel Nullpunkte, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte, Sattelpunkte, Asymptoten, Krümmung und noch viel mehr erläutert. Dieses Thema wurde ausgewählt, weil es sich quer durch den Lehrplan der Sekundarstufe 2 zieht und nach dem Spiralprinzip von Jerome Bruner aufbauend gestaltet wird. Im folgenden Kapitel wird das Thema „Kurvendiskussion“ schulmathematisch ausgearbeitet. „Unter Schulmathematik verstehen wir die Auswahl der fachlichen Gegenstände, Betrachtungen und Arbeitsweisen, die für den Mathematikunterricht vorgesehen sind, zusammen mit den Begründungszusammenhängen und Zielsetzungen bei ihrer Auswahl.“[9, S.20]

4.2 Mathematische Erläuterung

Eine der essentiellsten Definitionen im Bereich der Kurvendiskussion ist die Funktion und dessen Graphen. Diese Begriffe werden schon in der Mittelschule kennengelernt, und später im Lehrplan immer wieder aufgegriffen und erweitert.

Definition (Funktion) Wenn zwei Größen so zusammenhängen, dass jedem Wert der ersten Größe genau ein Wert der zweiten Größe zugeordnet wird, dann nennt man diese Zuordnung Funktion. Oder Anders: Seien A und B Mengen. Eine Zuordnung, die jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuordnet, nennt man Funktion. Für jedes $a \in A$, wobei A die Definitionsmenge darstellt, heißt das zugeordnete Element $y \in B$, wobei B die Zielmenge darstellt, der Funktionswert von x [15]. Oder Anders: Seien A und B Mengen. Eine Funktion f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem $a \in A$

genau ein $b \in B$ zuordnet [26]. Wir schreiben:

$$f : A \to B|\ x \mapsto f(x).$$

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion [20].

Definition (Graph) [26] Die Menge von geordneten Paaren

$$G(f) := \{(a, f(a))|a \in A\} \subseteq A \times B$$

heißt Graph von f.

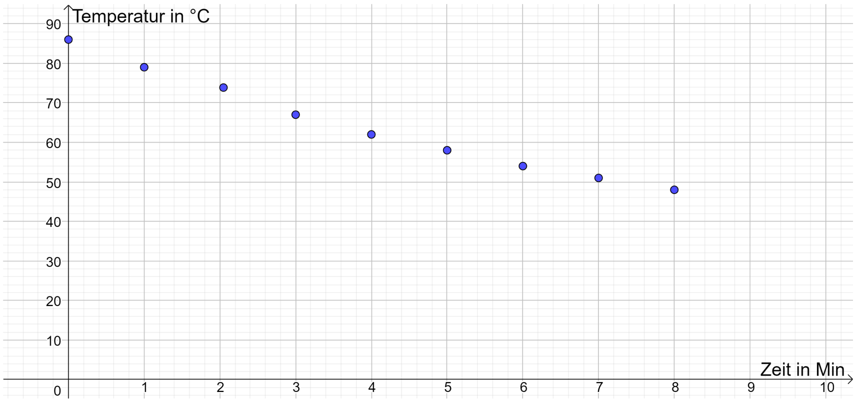
Die Lernenden sollen die Definition nicht nur auswendig lernen, sondern es ist wesentlich, dass sich die Kinder unter einer Funktion bzw. Zuordnung etwas vorstellen können. Mit Bildern im Kopf kann das Gelernte besser gemerkt und verarbeitet werden. Deshalb erläutert Roland Steinbauer in seinem Skript zur Schulmathematik Analysis die 3 Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff.

Grundvorstellungen zu Funktionen [26]

Die 1. Grundvorstellung von Funktionen ist die Zuordnungsvorstellung. Jeder Wert einer Größe ordnet sich einer zweiten Größe zu. Das heißt, Funktionen beschreiben Zusammenhänge von Größen. Eine Vorstellung von Zuordnungen können Schülerinnen und Schüler bekommen, indem sie beispielsweise in einem Experiment die Temperatur von einem heißem Tee der jeweiligen Abkühlungszeit zuordnen.

Zeit in Min.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatur in °C	86	79	73	67	62	58	54	51	48

Diese Wertepaare (t/°C) können auch gleich in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden:



Die zweite Grundvorstellung ist die Kovariationsvorstellung, denn eine Funktion erfasst, wie sich die Änderung einer Größe auf eine zweite Größe auswirkt. Dazu können zum Beispiel des Abkühlvorganges von Tee weiterführende Fragestellungen wie „Wie verändert sich die Temperatur des Tees in gleichen Zeitschritten?“ oder „Ändert sich die Temperatur gleichmäßig?“ gestellt werden. Als Lösung muss für jedes Zeitintervall die Veränderung der Temperatur angegeben werden, um zu sehen, dass die Temperatur am Anfang sehr schnell sinkt (in den ersten zwei Minuten um jeweils 7°C) und nach 6 Minuten nur noch sehr langsam (in Minute 6 und 7 nur jeweils um 3 °C). Das kann auch anhand eines Graphen demonstriert werden, wenn beispielsweise die Steigungsdreiecke eingezeichnet werden. Die Höhe des Dreiecks stellt die Kovariation dar, die Breite die Variation. Wichtig ist beim Kovariationsaspekt, dass es nicht mehr genügt, einzelne Wertepaare anzusehen, denn es müssen immer die benachbarten Paare in Beziehung gesetzt werden.

Als dritte Grundvorstellung zählt die Objektvorstellung, denn eine Funktion beschreibt ein Objekt als Ganzes. Bei dieser Grundvorstellung werden nicht mehr einzelne oder benachbarte Wertepaare betrachtet, sondern die Menge aller Wertepaare. Der Graph wird als Ganzes beobachtet, wodurch auch Aussagen über den gesamten Verlauf der Funktion möglich sind.

Wenn wir schon bei der Vorstellung der Graphen sind, kann auch der Unterschied zwischen geraden und ungeraden Funktionen gelehrt werden. Der Unterschied ist leicht anhand einer Grafik zu erkennen.

Definition (gerade und ungerade Funktion) [16] Gerade Funktionen sind Funktionen, die spiegelsymmetrisch zur y-Achse sind, das bedeutet es muss gelten:

$$f(x) = f(-x).$$

Ungerade Funktionen sind Funktionen, die punktsymmetrisch zum Nullpunkt sind, also gilt:

$$f(-x) = -f(x).$$

Für die Interpretation von Funktionen sind die verschiedenen Änderungsraten, die hier durch Humenberger und Malle definiert werden, sehr bedeutsam.

Definition (Änderungsmaße) Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zwei Stellen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gibt $f(x_2) - f(x_1)$ die absolute Änderung im Intervall $[x_1; x_2]$ an [1].
Die relative Änderung wird durch

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

angegeben [20].
Die mittlere Änderungsrate oder auch der Diffenzenquotient der Funktion f ist im Bereich von x_1 bis x_2 definiert durch

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Änderung des Funktionswerts}}{\text{Änderung des Arguments}}.$$

Anders könnten wir schreiben:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Geometrisch ist der Differenzenquotient die Steigung der Sekante (=Geraden durch zwei Punkte x_1 und x_2) des Graphens. Ist die mittlere Änderungsrate positiv, so ist die Funktion f steigend. Ist die mittlere Änderungsrate negativ, ist f fallend. [16]
Die momentane Änderungsrate, beziehungsweise der Differentialquotient, wird durch $\lim\limits_{x_2 \to 1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ definiert [15]. Die Sekante durch x_1 und x_2 wird durch den Grenzwert zu einer Tangente im Punkt x_1. Den Differentialquotienten kann man sich daher als Tangentensteigung an der Stelle x_1 vorstellen. Die Tangentensteigung ist zugleich die Steigung der Funktion an der Stelle x_1. Diese Steigung ist desgleichen die 1. Ableitung $f'(x)$ [20].

Im Kapitel der Kurvendiskussion ist das Kennen und Interpretieren einer Ableitung unumgänglich, weshalb folgend die Definition und Vorstsellungen zum Ableitungsbegriff durch Quellen von Pampel, Greefrath und Steinbauer konkretisiert werden.

Definition (Ableitungsfunktion) Sei f eine reelle Funktion. Die Funktion f', die jedem x-Wert, bei dem f differenzierbar ist, den Wert $f'(x)$ zuordnet, heißt Ableitungsfunktion von f [15]. Die Ableitung an der Stelle x ist definiert durch

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

falls dieser Grenzwert existiert und eindeutig ist [23].

Zugänge zum Ableitungsbegriff Einen Zugang zum Ableitungsbegriff kann die Tangentensteigung darstellen. Der Graph der Ableitungsfunktion kann durch den Differentialquotienten ermittelt werden, indem in jedem beliebigen Punkt des Graphen einer Funktion die jeweilige Steigung bestimmt wird und diese in ein Koordinatensystem eingetragen wird [15].

Als weiterer Zugang zur Ableitung kann auch die Momentangeschwindigkeit dienen. Die Lernenden können sich die mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall schon berechnen. Wird dieses Intervall immer kleiner, nähert es sich einem bestimmten Zeitpunkt t_0 an. Wird diese Annäherung von beiden Seiten durchgeführt, kann die Momentangeschwindigkeit (=Ableitung) in den Punkt t_0 berechnet werden [26].

Jedoch ist nicht jede Funktion an jeder beliebigen Stelle ableitbar, weshalb die nächste Definition von Roland Steinbauer sehr wichtig ist.

Definition (Differenzierbarkeit) [26] Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in einem Punkt x_0 im Intervall I, falls

$$\lim_{x_0 \neq x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ oder } \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert ist auch die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 und wir bezeichnen sie mit $f'(x_0)$. Ist f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar, so nennen wir f global differenzierbar auf I.

Satz (Ableitungsregeln)

(i) Ableitung einer konstanten Funktion: $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ für $c \in \mathbb{R}$
Beweis: [19]

$$\begin{aligned} f(x) =& c \Rightarrow \\ f'(x) =& \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\ =& \lim_{z \to x} \frac{c - c}{z - x} \\ =& \lim_{z \to x} 0 = 0 \end{aligned}$$

$\square$

(ii) Potenzregel für natürliche Exponenten: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{R}^+$
Beweis: [19]

$$\begin{aligned} & f(x) = x^n \Rightarrow \\ & f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\ =& \lim_{z \to x} \frac{z^n - x^n}{z - x} \\ \underset{\text{Hornersche Regel}}{=}& \lim_{z \to x} \frac{(z - x)(z^{n-1} + z^{n-2} \cdot x + z^{n-3} \cdot x^2 + ... + z \cdot x^{n-2} + x^{n-1})}{z - x} \\ =& \lim_{z \to x} (z^{n-1} + z^{n-2} \cdot x + z^{n-3} \cdot x^2 + ... + z \cdot x^{n-2} + x^{n-1}) \\ =& (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + ... + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1}) \\ =& (x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1} + x^{n-1}) \\ =& n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

$\square$

(iii) Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$ wenn c konstant ist.

Beweis:[19]

$$\begin{aligned}f(x) =&c\cdot g(x) \Rightarrow\\ f'(x) =&\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} =\\ =&\lim_{z\to x}\frac{c\cdot g(z)-c\cdot g(x)}{z-x} =\\ =&\lim_{z\to x} c\cdot\frac{g(z)-g(x)}{z-x} =\\ =&c\cdot g'(x)\end{aligned}$$

□

(iv) Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Beweis: [19]

$$\begin{aligned}f(x) =&g(x)+h(x) \Rightarrow\\ f'(x) =&\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\\ =&\lim_{z\to x}\frac{g(z)+h(z)-[g(x)+h(x)]}{z-x}\\ =&\lim_{z\to x}\Big(\frac{g(z)-g(x)}{z-x}+\frac{h(z)-h(x)}{z-x}\Big)\\ =&g'(x)+h'(x)\end{aligned}$$

□

(v) Produktregel: $f(x) = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$
Beweis: [19]

$$\begin{aligned}f(x) =&u(x)\cdot v(x) \Rightarrow\\ f'(x) =&\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\\ =&\lim_{z\to x}\frac{u(z)\cdot v(z)-u(x)\cdot v(x)}{z-x}\\ =&\lim_{z\to x}\frac{u(z)\cdot v(z)-u(x)\cdot v(z)+u(x)\cdot v(z)-u(x)\cdot v(x)}{z-x}\\ =&\lim_{z\to x}\frac{[u(z)-u(x)]\cdot v(z)+u(x)\cdot[v(z)-v(x)]}{z-x}\\ =&\lim_{z\to x}\Big(\frac{u(z)-u(x)}{z-x}\cdot v(z)+u(x)\cdot\frac{v(z)-v(x)}{z-x}\Big)\\ =&u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\end{aligned}$$

□

(vi) Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Beweis: [19]

$$\begin{aligned}
f(x) =& \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow \\
f'(x) =& \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\
=& \lim_{z \to x} \frac{\frac{u(z)}{v(z)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{z - x} \\
=& \lim_{z \to x} \frac{u(z)v(x) - v(z)u(x)}{(z - x) \cdot v(z) \cdot v(x)} \\
=& \lim_{z \to x} \frac{u(z)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - v(z)u(x)}{(z - x) \cdot v(z) \cdot v(x)} \\
=& \lim_{z \to x} \frac{[u(z)u(x)] \cdot v(x) - u(x) \cdot [v(z)v(x)]}{(z - x) \cdot v(z) \cdot v(x)} \\
=& \lim_{z \to x} \Big(\frac{1}{v(z)v(x)} \cdot [\frac{u(z) - u(x)}{z - x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \frac{v(z) - v(x)}{z - x}] \Big) \\
=& \frac{1}{v(x)v(x)} \cdot [u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)] \\
=& \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}
\end{aligned}$$

□

(vii) Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Beweis: [13]

$$\begin{aligned}
f(x) =& u(v(x)) \Rightarrow \\
f'(x) =& \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\
=& \lim_{h \to 0} \frac{u(v(x + h)) - u(v(x))}{h}
\end{aligned}$$

Ein paar Umformulierungen:

$$\begin{aligned}
v(x + h) - v(x) &= k \\
v(x + h) &= v(x) + k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h}\cdot 1\\
=&\lim_{h\to 0}(\frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h}\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{k})\\
=&\lim_{h\to 0}(\frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{k}\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h})=
\end{aligned}$$

Geht h gegen 0, so geht auch k gegen 0.

$$\begin{aligned}
=&\lim_{k\to 0}\frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{k}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\\
=&u'(v(x))\cdot v'(x)
\end{aligned}$$

□

Zum Begriff der Differenzierbarkeit gehören auch die Begriffe Stetigkeit und Grenzwert. Ob die Stetigkeit in der Schule eingeführt wird oder nicht, ist von Lehrperson zu Lehrperson verschieden und das obwohl der Begriff sehr einfach veranschaulicht werden kann.

Definition (Stetigkeit) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann im Punkt $p \in D$ stetig, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$.
Etwas kürzer und einfacher kann man sagen, dass bei einer in x_0 stetigen Funktion ein „kleines Wackeln“ am Argument in der Nähe von x_0 nur ein „kleines Wackeln “ der Funktionswerte um $f(x_0)$ zur Folge hat [26].

Eine etwas einfachere Definition nennen Malle et al. im Schulbuch Mathematik Verstehen 8 [20]: Eine reelle Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $p \in A$ stetig, wenn $\lim\limits_{z\to p} f(z) = f(p)$. Die Funktion heißt stetig, wenn sie an jeder Stelle $p \in A$ stetig ist.

Definition (Grenzwert) Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert an der Stelle x_0 gegen ein $c \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in D \text{ mit} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon.$$

In diesem Fall heißt c Limes oder Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0 [26]. Einfacher könnten wir formulieren: Eine Zahl c heißt Grenzwert einer Funktion f, wenn bei Vorgabe einer beliebigen, positiven Zahl ϵ fast alle Funktionswerte die Ungleichung

$$|f(x) - c| < \epsilon$$

erfüllen [13].
Für $x_n \to x$ sprechen wir: x_n geht/konvergiert gegen x für n gegen unendlich [26].

Gleichermaßen als beim Funktionsbegriff, ist es beim Grenzwertbegriff ebenfalls vorteilhaft, wenn die Lernenden eine Vorstellung des abstrakten Begriffes bekommen. Wie so eine Vorstellung aussehen kann, und wie es dazu kommt, wird im nächsten Absatz anhand von Steinbauers Skript zur Schulmathematik Analysis erklärt.

Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff [26] Erstens kann der Grenzwert intuitiv als eine Annäherung oder Zustrebung der Werte an einem festen Wert angesehen werden. Dabei kommen unendliche Prozesse einem Grenzobjekt beliebig nahe. Diese Vorstellung lernen Schülerinnen und Schüler schon beim näherungsweisen Berechnen von Quadratwurzeln oder beim Heron-Verfahren kennen. Zweitens wird der Grenzwertbegriff oft als Umgebungsvorstellung gezeigt. Das heißt, ab einem bestimmten Folgenglied liegen alle weiteren Glieder in einer noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert. Für diese Vorstellung brauchen Jugendliche eine grafische und numerische Veranschaulichung. Außerdem zählt zu den drei Grundvorstellungen des Grenzwertbegriffes auch die Objektvorstellung. Der Grenzwert wird als ein mathematisches Objekt angesehen, das durch Folgen konstruiert und definiert wird.
Damit Grundvorstellungen aufgebaut werden können, muss die Bedeutung des Begriffs zuerst erfasst und an bekannten Sachzusammenhängen angeknüpft werden. Mentale Repräsentationen müssen aufgebaut werden, sodass das Gelernte in neuen Situationen angewandt werden kann. Ein gutes Einführungsbeispiel zum Grenzwert wäre beispielsweise sich die Entwicklung eines gesunden Cholesterinspiegels nach der Einnahme von Medikamenten anzuschauen.

Um über verschiedene Funktionen und Graphen Aussagen treffen zu können, ist es notwendig, Begriffe wie Nullstellen, Monotonie, Extrempunkte, Krümmungsverhalten und Wendestellen zu kennen. Deshalb werden diese folgend definiert und anhand eines Beispiels der Kurvendiskussion verdeutlicht.

Definition (Nullstellen) [15] Zur Bestimmung der Nullstellen muss der Schnittpunkt mit der x-Achse berechnet werden. Das bedeutet, wir setzen $f(x) = 0$, dann ist unser berechnetes x die Nullstelle der Funktion f.

Definition (Monotonie) [20] Sei eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $M \subseteq A$. Die Funktion f heißt

- monoton steigend in M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- monoton fallend in M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- streng monoton steigend in M, wenn für alle $a_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- streng monoton fallend in M, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Nachweis der Monotonie [13] Es stehen zwei Kriterien zu Verfügung, die Monotonie nachzuweisen:
Differenzenkriterium:

$$f(x_2) - f(x_1) \begin{cases} > 0 & \text{streng monoton steigend,} \\ < 0 & \text{streng monoton fallend.} \end{cases}$$

Quotientenkriterium (für ausschließlich positive Funktionswerte):

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \begin{cases} > 1 & \text{streng monoton steigend,} \\ < 1 & \text{streng monoton fallend.} \end{cases}$$

Definition (Extrema) [12] Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann hat f in $x \in \,]a, b[$ ein lokales Maximum, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$f(x) \geq f(\zeta)$$

für alle ζ mit $|x - \zeta| < \epsilon$ gilt, und ein lokales Minimum, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$f(x) \leq f(\zeta)$$

für alle ζ mit $|x - \zeta| < \epsilon$ gilt.

Satz [12] Die Funktion $f : \,]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in \,]a, b[$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.
Beweis: f besitze in x ein lokales Maximum. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset \,]a, b[$ und $f(\zeta) \leq f(x)$ für alle $\zeta \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$. Da f in x differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \lim_{\zeta \rightarrow x} \frac{f(\zeta) - f(x)}{\zeta - x} =$$

$$\underbrace{\lim_{\zeta \searrow x} \frac{f(\zeta) - f(x)}{\zeta - x}}_{\leq 0} =$$

$$\underbrace{\lim_{\zeta \nearrow x} \frac{f(\zeta) - f(x)}{\zeta - x}}_{\geq 0}.$$

Daraus folgt $f'(x) = 0$. Für ein lokales Minimum erfolgt der Beweis analog. □

Bemerkung [20] Einfacher könnten wir formulieren:
Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $M \subset A$. Eine Stelle $p \in M$ heißt Maximumstelle von f in M, wenn $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in M$, und Minimumstelle von f in M, wenn $f(x) \geq f(p)$ für alle $x \in M$. Eine Stelle $p \in M$ heißt Extremstelle oder Extrema von $f \in M$, wenn sie eine Maximumstelle oder Minimumstelle von $f \in M$ ist. Eine globale Extremstelle bezieht sich auf die gesamte Definitionsmenge der Funktion, während sich ein lokales Extremum nur auf eine bestimmte Umgebung bezieht.
Sei $f : A \to \mathbb{R}$ ein reellee Funktion und seien $a, p, b \in A$ mit $a < p < b$, dann gilt:

(i) Ist $f \in [a; p]$ monoton steigend und in $[p; b]$ monoton fallend, dann ist p eine lokale Maximumstelle von f.

(ii) Ist $f \in [a; p]$ monoton fallend und in $[p; b]$ monoton steigend, dann ist p eine lokale Minimumstelle von f.

(iii) Ist $f \in [a; p]$ und $f \in [p; b]$ monoton steigend, dann ist p keine lokale Extremstelle von f.

(iv) Ist $f \in [a; p]$ und $f \in [p; b]$ monoton fallend, dann ist p keine lokale Extremstelle von f.

Definition (Krümmungsverhalten) Eine auf einem Intervall $[a, b]$ differenzierbare Funktion ist dort streng konvex (=linksgekrümmt), genau dann, wenn ihre erste Ableitung streng monoton steigend ist. Oder anders formuliert, f ist auf $[a, b]$ streng konvex, wenn für alle $x_1, x_2, x_3 \in [a, b], x_1 < x_2 < x_3$ gilt: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Analog heißt sie konkav, wenn $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ [15].
Einfacher formuliert es Gehrke in seinem Buch Brückenkurs Mathematik [13] : Dass die Funktion f linksgekrümmt ist, wenn $f''(x) > 0$, und f rechtsgekrümmt ist, wenn $f''(x) < 0$ gilt.

Definition (Wendepunkt) [15] Ein Wendepunkt ist ein Punkt $(x_0, f(x_0))$, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert, das bedeutet, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass auf einem der Intervalle $[x_0 - \delta, x_0], [x_0, x_0 + \delta]$ die Funktion konkav und auf dem anderen konvex ist.

Satz (Notwendiges Kriterium für Wendestellen) [15] Wenn die Funktion f auf einem offenen Intervall I zweifach differenzierbar ist und in $x_0 \in I$ eine Wendestelle besitzt, dann gilt $f''(x_0) = 0$.

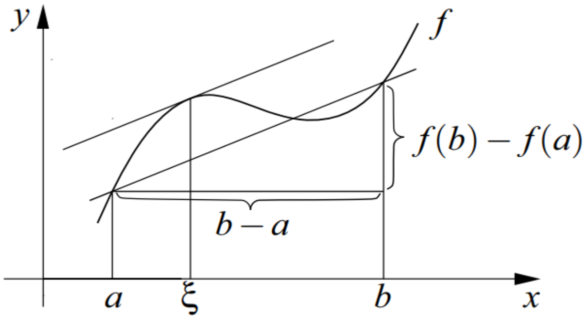
Satz (Hinreichende Kriterien für Wendestellen) [15] Es sei f dreifach differenzierbar auf einem offenen Intervall, in dem die Stelle x_0 liegt, dann lautet das erste hinreichende Kriterium, dass wenn x_0 eine Nullstelle von f'' mit Vorzeichenwechsel ist, eine Wendestelle vorliegt, und das zweite hinreichende Kriterium, dass wenn $f''(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, ebenfalls eine Wendestelle vorliegt.

Vorstellung zur Krümmung [15] Um die Krümmung zu verstehen, kann sich vorgestellt werden, dass der Graph der Funktion eine Straße ist, auf der mit dem Auto gefahren wird. Muss nach rechts gelenkt werden, wird eine Rechtskurve gefahren, das heißt, die Funktion ist rechtsgekrümmt, muss nach links gelenkt werden, um auf dem Graphen zu bleiben, ist die Funktion linksgekrümmt.

Mittelwertsatz [12, S.166] Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $]a, b[$ differnzierbar ist. Dann existiert ein $\zeta \in]a, b[$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta).$$

Das heißt, dass die Steigung der Sekante durch zwei Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gleich der Steigung der Tangente an einer Zwischenstelle $(\zeta, f(\zeta))$ ist.



Beweis: Zuerst definieren wir eine Hilfsfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

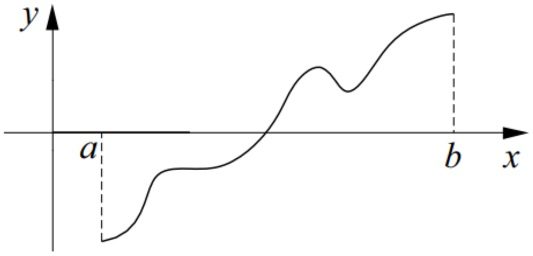
$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

F ist stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$. Da $F(a) = f(a) = F(b)$, existiert nach dem Satz von Rolle ein $\zeta \in]a, b[$ mit $F'(\zeta) = 0$. Da

$$F'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

folgt die Behauptung. ☐

Zwischenwertsatz [12, S.104] Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funkion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ oder umgekehrt. Dann existiert ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$. Diese Aussage ist anschaulich ganz klar:



Satz von Rolle [12] Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Die Funktion f sei in $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\zeta \in]a, b[$ mit $f(\zeta) = 0$.
Das heißt, dass zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion eine Nullstelle der Ableitung, also ein Extremum von f, liegt.
Beweis: Falls f konstant ist, ist der Satz trivial. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$. Dann wird das absolute Maximum oder Minimum der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $\zeta \in]a, b[$ angenommen. Für ein Extremum x der Funktion f gilt $f'(x) = 0$, deshalb ist $f'(\zeta) = 0$. ☐

Satz [12] Jedes Polynom ungeraden Grades $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^n + c_1 x^n - 1 + ... + c_n$$

besitzt mindestens eine reelle Nullstelle, da

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

und

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Man kann also Stellen $a < b$ finden mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Deshalb gibt es ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$.

Zum Abschluss wird alles Gelernte in einem Beispiel verdeutlicht:

Beispiel (Kurvendiskussion von $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$)

(1) Der maximale Definitionsbereich der Funktion ist $\mathbb{R}$, da jede reelle Zahl für x eingesetzt werden darf.

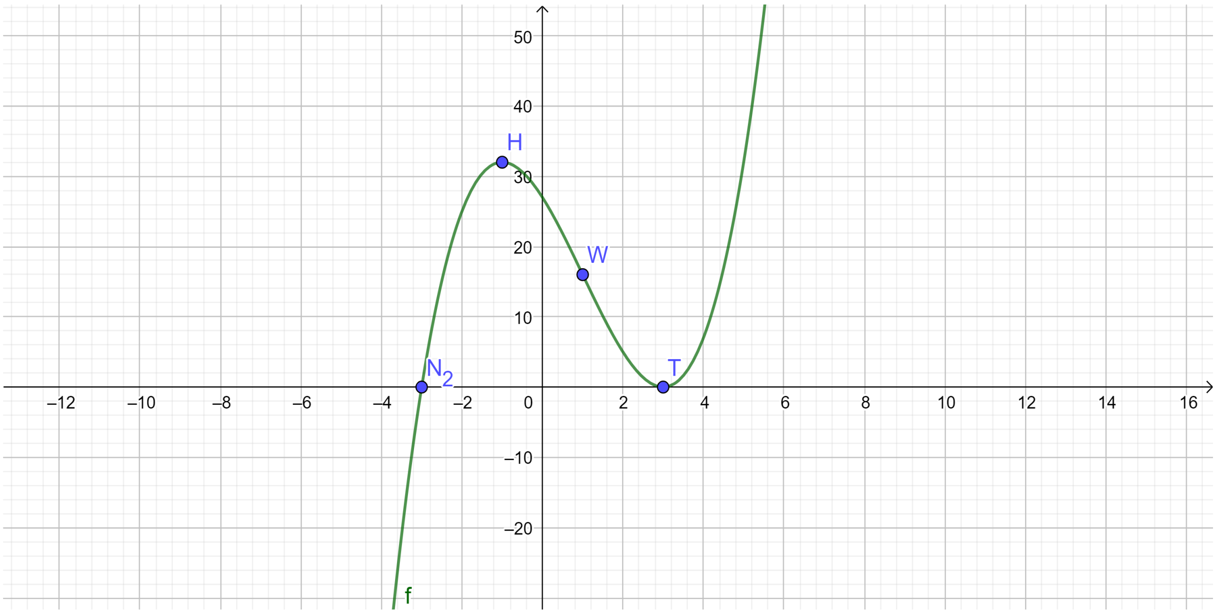
(2) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(3) Für die Nullstellen müssen wir $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$ berechnen. Mithilfe von Geogebra, bekommen wir als Nullstelle $x = -3, x = 3$, das heißt, die Nullpunkte lauten $N_1 = (-3, 0)$ und $N_2 = (3, 0)$.

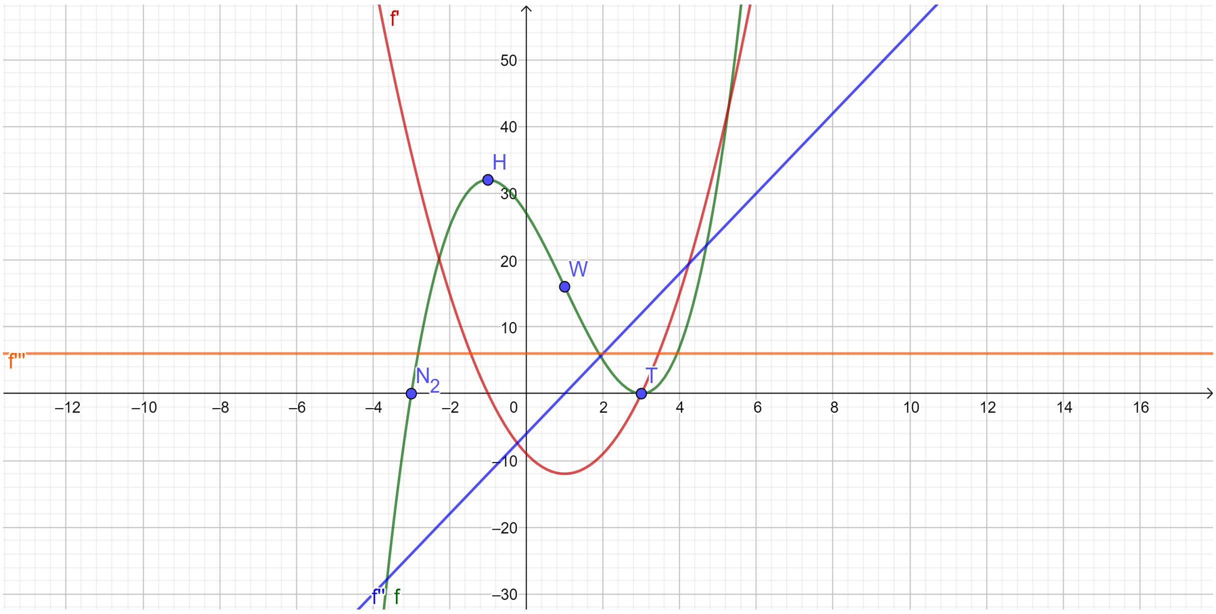
(4) Die Ableitungen von f lauten $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, $f''(x) = 6x - 6$ und $f'''(x) = 6$.

(5) Für die Extrema berechnen wir $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$. Als Lösung gilt $x = -1$ und $x = 3$. Nun überprüfen wir die zweite Ableitung: Bei $x = -1$ liegt auf Grund von $f''(-1) = -12 < 0$ ein Maximum oder auch Hochpunkt H=(-1,32), und bei $x = 3$ auf Grund von $f''(3) = 12 > 0$ ein Minimum oder Tiefpunkt T=(3,0) vor. Der Tiefpunkt ist in diesem Fall gleichzeitig die 2. Nullstelle.

(6) Da $f''(x) = 6x - 6 = 0$ nur eine Lösung $x = 1$ besitzt, und $f'''(1) = 6 \neq 0$ ist, liegt bei $x = 1$ eine Wendestelle vor. Der Wendepunkt lautet W=(1,16).



Wir können auf Geogebra die Ableitungsfunktionen einzeichnen, dann sehen wir genau, dass f' im positiven Bereich liegt, solange f steigt also im Intervall $]-\infty; -1[$, und dass f' im negativen Bereich liegt, wenn f fällt $(]-1; 3[)$ und f' wieder im positiven Bereich liegt, wenn f wieder steigt $(]3; \infty[)$. Wir können beobachten, dass der Höhepunkt von f zu einer Nullstelle von f' wird und die Wendestelle von f ein lokales Minimum von f' darstellt, weshalb an dieser Stelle f'' eine Nullstelle hat. Außerdem kann man gut beobachten, dass der Grad der Funktion mit jeder Ableitung um 1 kleiner wird.



4.3 Planung des Flipped Classroom

Die Schülerinnen und Schüler bereiten sich für den Unterricht vor, indem sie Videos als Hausübung aktiv anschauen. Somit bleibt für die Präsenzphase genug Raum für Anwendungen und schülerorientiertes Lernen. Die Lernenden sollen sich die Videos nicht nur ansehen, sondern anhand einer kleinen Aufgabe aktiv damit auseinandersetzen. So eine Aufgabe kann durch das Erstellen eines Notiz-Arbeitsblattes oder das Aufschreiben von ungeklärten Fragen definiert werden, oder beispielsweise können auch Leitfragen gestellt werden, die von den Lernenden beim Schauen des Videos beantwortet werden müssen. Diese Ausarbeitung der Leitfragen erfüllt einerseits die Funktion der Hausaufgabenkontrolle, andererseits dient es gleichzeitig als Merktext oder Zusammenfassung. In der Präsenzphase sollen hauptsächlich Gruppenarbeiten oder ein aktives Plenum zum Einsatz kommen [29].

Es gibt sehr viele verschiedene gute Kanäle mit Lernvideos zur Kurvendiskussion.

Auf der Videoplattform `https://de.khanacademy.org/` von Salman Khan stehen zahlreiche Videos zu verschiedenen Fächern zur Verfügung. Auf dieser Website gibt es sehr viele englische Videos, womit die Mathematik-Hausübung direkt als fächerübergreifende Übung angesehen werden kann. Es können auch deutschsprachige Videos gefunden werden, wobei diese Videos auf den englischsprachigen Versionen basieren und ins Deutsche übersetzt wurden. Dazu gibt es auf YouTube den Kanal "KhanAcademyDeutsch".

Auf YouTube sind sehr viele Mathematikvideos zu finden, wobei es nicht immer leicht zu bewerten ist, wie qualitativ hochwertig die Videos gestaltet sind. Zum Beispiel veröffentlicht Frank Schumann, ein deutscher Mathematiklehrer, zahlreiche gelungene Erklärvideos unter dem Link `https://www.youtube.com/channel/UCcluSySSKRbxEjmNBtLNNOw`. Ein YouTube-Lehrer, den schon viele Jugendliche kennen, ist Daniel Jung. Er ist der Pionier der Mathematik-Kurzerklärvideos und zählt zu den meist gesehenen Onlinetutoren weltweit. Seine Videos sind unter der Seite `https://www.youtube.com/channel/`

UCPtUzxTfdaxAmr4ie9bXZVA zu finden. Zusätzlich zu seinen Videos hat er auf seiner Homepage (https://danieljung.io) sogar Abitur Lernhefte auf den Markt gebracht.

Beispiel Um einen kurzen Einblick in den Unterricht im Flipped Classroom zu bekommen, wird ein Beispiel in der 8.Klasse erläutert. Die Jugendlichen kennen schon den Begriff der Funktionen, Nullstellen, Monotonie und Extrempunkte. Diese Begrifflichkeiten sollen anhand der 1. Hausübung mit zwei Lernvideos wiederholt werden. Als Erstes gibt es ein Video zur Wiederholung der Definition von Funktionen und dessen Nullstellen (https://www.youtube.com/watch?v=8svRo8UO8dI&list=PLLTAHuUj-zHgUCJdpdg9K4HKOv4-DNA_R&index=6) und als Zweites wird ein Video zur Monotonie und Extrempunkte (https://www.youtube.com/watch?v=EU8SQRA7Qjo&list=PLLTAHuUj-zHgUCJdpdg9K4HKOv4-DNA_R&index=21) angeschaut. Als Hausübungskontrolle sollen die Schülerinnen und Schüler folgende Fragen, die auch gleichzeitig als Merkblatt des bisher Gelernten dienen, beantworten:

- Wie wird eine Funktion definiert? Wie stellst du dir unter einer Funktion vor?
- Wie wird eine Nullstelle berechnet?
- Wie kannst du die Monotonie von einem Graphen ablesen? Beschreibe es kurz in Worten.
- Warum ist ein Extrempunkt eine Nullstelle der 1. Ableitung? Wie kann die 1. Ableitung graphisch interpretiert werden?

In der nächsten Präsenzeinheit in der Schule werden die Begriffe kurz wiederholt, angewandt und mithilfe von Geogebra verinnerlicht. Als weitere Hausübung werden in den folgenden zwei Videos die Begriffe Krümmung und Wendestelle eingeführt: https://www.youtube.com/watch?v=nUlhKWC63sg&list=PLLTAHuUj-zHgUCJdpdg9K4HKOv4-DNA_R&index=28 und https://www.youtube.com/watch?v=A4SdEYCUOoY&list=PLLTAHuUj-zHgUCJdpdg9K4HKOv4-D
R&index=29. Die Schülerinnen und Schüler sollen beim Schauen des Videos die wichtigsten Aussagen ins Schulübungsheft eintragen. In der Schule werden als Vertiefung einige Matura-Typ 1-Aufgaben gerechnet und interpretiert. Zwei Beispiel-Aufgaben vom Bundesministerium werden untenstehend angegeben:

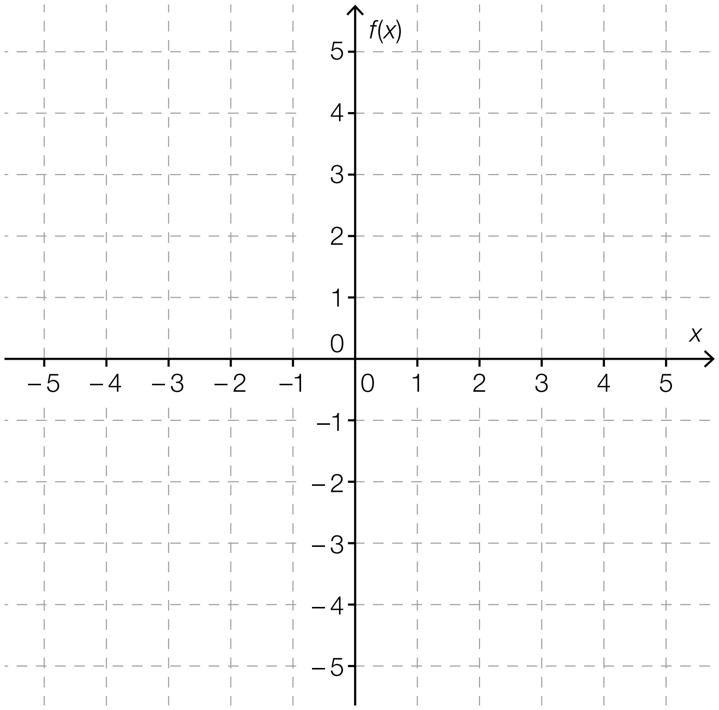
Polynomfunktionen dritten Grades*

Aufgabennummer: 1_671	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 4.4

Eine Polynomfunktion dritten Grades ändert an höchstens zwei Stellen ihr Monotonieverhalten.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades f, die an den Stellen $x = -3$ und $x = 1$ ihr Monotonieverhalten ändert!



---

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Eigenschaften von Polynomfunktionen 3. Grades*

Aufgabennummer: 1_460	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 4.4

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat allgemein die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Eigenschaften treffen für Polynomfunktionen 3. Grades zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine lokale Extremstelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine Nullstelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die mehr als eine Wendestelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine Wendestelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die genau zwei verschiedene reelle Nullstellen haben.	☐

---

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Ganz wichtig ist für Schülerinnen und Schüler auch der Zusammenhang zum Graphen und zu den Ableitungsgraphen. Eine geeignete Aufgabe dazu ist das Zeichnen von Ableitungsfunktionen ohne Angabe der Funktionsgleichung.

Gibt es bei diesem Thema noch Probleme, können als Hausübung immer wieder verschiedene Videos ausgewählt werden, damit Wissenslücken aufgefüllt werden. In der Sekundarstufe II verwenden die Lernenden die Videos wahrscheinlich auch schon selbstständig, also als Wiederholung für eine Leistungsüberprüfung, und nicht mehr nur als Hausübung.

Kapitel 5

Empirische Studie in der Sek. I

5.1 Planung

5.1.1 Versuchsklasse

Diese Studie wird in der Mittelschule Promenade in der 1d durchgeführt. In der 1d sind 25 Kinder, die sich in 8 Mädchen und 17 Buben aufteilen. Zwei Buben werden jedoch aus der Studie ausgenommen, da diese währenddessen die Basics der 5. Schulstufe nachholen.

5.1.2 Kontrollklasse

Die Parallelklasse der 1d, die 1c, ist für diese Studie die Kontrollklasse. In der 1c befinden sich 24 Kinder, die sich in 10 Mädchen und 14 Buben aufteilen. 5 davon sind Kinder mit Sonderpädagogischem Förderbedarf. Da diese in Mathematik mit einem anderen Lehrplan unterrichtet werden, werden diese Kinder von der Studie ausgeschlossen. Das bedeutet, dass den Abschluss-Fragebogen und den Kompetenzcheck in der 1c nur 19 Kinder, die sich in 9 Mädchen und 10 Buben aufteilen, durchführen werden.

5.1.3 Unterrichtsplanung

In der 1. Einheit der Studie wird eine Aufklärungsstunde abgehalten. Das heißt, den Kindern wird erklärt, wie Videos am besten angeschaut werden, es werden QR-Code-Scanner installiert und die Flipped Classroom Methode wird vermittelt. Als Hausübung bekommen die Lernenden das 1. Hausübungsblatt "Teiler und Vielfache". (Die Arbeitsblätter sind gesammelt im Kapitel 5.1.4 zu sehen.)
In der nächsten Mathematik-Einheit wird zuerst anhand der Lückentexte kontrolliert, ob die Hausübung erledigt wurde. Danach werden Teiler und Vielfache geübt und vertieft. Dabei wird die Methode Peer-Tutoring zum Einsatz kommen. Das heißt, die Lernenden, die schon fertig sind mit dem Arbeitsauftrag, helfen den leistungsschwächeren Kindern. Am Ende der Stunde darf mit dem nächsten Hausübungsblatt „Teilbarkeitsregeln-Suche“ begonnen

werden.
In der darauffolgenden Präsenzeinheit werden die Regeln verglichen, geübt und verinnerlicht. Die „Rechenprofis“ können versuchen, Regeln mit Summen und Differenzen zu finden. Am Ende der Stunde wird das nächste Arbeitsblatt „Primzahlen“ ausgeteilt.
In der nächsten Mathematik-Einheit werden die Primzahlen mittels eines gemeinsamen Spiels wiederholt. In Form eines Stationenbetriebs erfahren die Kinder Geschichten zu den Primzahlen und von der derzeit größten Primzahl. Manche Stationen dienen auch der Wiederholung des bisher Gelernten. Beim 4. Hausübungsblatt wird zu Hause die Primfaktorenzerlegung erarbeitet.
In der Präsenzphase wird die Primfaktorenzerlegung selbstständig geübt. Weiters werden Beispiele mit schwierigeren Zahlen gerechnet (in Partnerarbeit). Am Ende der Einheit wird das nächste Hausübungsblatt, bei dem der größte gemeinsame Teiler erklärt wird, ausgeteilt.
In der Schule wird das Berechnen des ggT geübt und auf Beispiele mit 3 Zahlen angewandt. Außerdem sollen die Lernenden anhand der Methode Think-Pair-Share Textbeispiele zum Thema rechnen. Das letzte Hausübungsblatt handelt dann über das kleinste gemeinsame Vielfache.
In der letzten offiziellen Präsenzphase der Studie wird das kgV geübt und es werden Textaufgaben gerechnet. Es gibt an diesem Tag keine Hausübung.
Für die letzte Einheit der Studie ist geplant, dass die Schülerinnen und Schüler der Versuchsklasse, aber auch der Kontrollklasse, den Fragebogen (siehe 5.1.5) ausfüllen und einen kurzen Kompetenzcheck schreiben (siehe 5.1.6).

5.1.4 Arbeitsblätter

Teiler und Vielfache

1) **Siehe dir folgendes Video an**
(https://www.youtube.com/watch?v=22g-YzX8z7k&list=PLZS3dhkNceMKB4YGyWcjJ6Vt6Z5xrthcn&index=1)

2) **Wähle das richtige Lücken-Wort:**

Die **Teilermenge** enthält alle ***Teiler / Vielfache*** einer Zahl. Die Teilermenge von der Zahl 12 schreiben wir an als T_{12}={1,2,3,4,6,12}. Diese Menge ist ***unendlich / endlich***.
Die Zahl 4 ist ***ein Teiler / kein Teiler*** von 12, weil 12 ohne Rest durch 4 teilbar ist.
Deshalb schreiben wir $4 \mid 12$.
Die Zahl 6 ist ***ein Teiler / kein Teiler*** von 10, weil 10 nicht ohne Rest durch 4 teilbar ist. Deshalb schreiben wir $6 \nmid 10$.
Vielfache einer Zahl erhalte ich indem ich diese Zahl **dividiere / multipliziere**.
Beispielsweise ist die Zahl 24 ein ***Teiler / Vielfaches*** von der 6, weil ich 24 geteilt durch 6 ohne Rest berechnen kann. Die Zahl 13 ist ***ein / kein*** Vielfaches von der Zahl 3, weil ich 13 *ohne* / mit Rest durch 3 teilen kann.
Die ***Vielfachenmenge / Teilermenge*** von der Zahl 4 schreiben wir an als V_4={4,8,12,16,20,24,...}. Die 3 Punkte in der Teilermenge brauchen wir, weil diese *Menge* ***endlich / unendlich*** *ist*.

Teilbarkeitsregeln-Suche

Umkreise alle Zahlen, die durch 2 teilbar sind.

4	7	13	16	24	700	28	31	214	333	512	99
5	100	30	66	155	20	27	511	909	72	43	2

Was fällt dir auf? Versuche eine Regel zu formulieren:

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ... ____

____

____

Umkreise alle Zahlen, die durch 5 teilbar sind.

9	20	13	30	24	66	28	35	214	335	515	99
5	100	75	66	155	20	25	511	909	900	43	25

Was fällt dir auf? Versuche eine Regel zu formulieren:

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ... ____

____

____

Umkreise alle Zahlen, die durch 10 teilbar sind.

9	20	13	30	24	66	28	350	214	330	515	90
5	100	75	66	150	20	25	511	909	900	43	25

Was fällt dir auf? Versuche eine Regel zu formulieren:

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn ... ____

____

____

Umkreise alle Zahlen, die durch 100 teilbar sind.

900 20 130 30 24 660 2800 350 214 33 500 99

50 100 75 66 155 20 2500 51 9 090 900 43 000

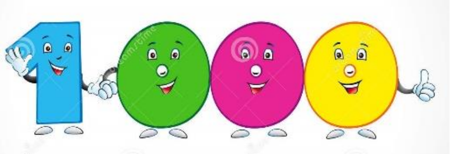
Was fällt dir auf? Versuche eine Regel zu formulieren:
Eine Zahl ist durch 100 teilbar, wenn ... ______________________________
____
____

Umkreise alle Zahlen, die durch 1 000 teilbar sind.

700 2 000 3 100 413 98 000 3 100

8 14 000 17 328 16 900 123 000

Was fällt dir auf? Versuche eine Regel zu formulieren:
Eine Zahl ist durch 1 000 teilbar, wenn ... ___________________________
____
____



HAUSÜBUNG:

Schaue dir nun folgendes Video an und kontrolliere dann, ob du die Teilbarkeitsregeln richtig formuliert hast. Korrigiere sie gegebenenfalls. Ergänze die fehlenden Teilbarkeitsregeln am nächsten Blatt. (https://www.youtube.com/watch?v=O-zD0nHQvVE&list=PLZS3dhkNceMKB4YGyWcjJ6Vt6Z5xrthcn&index=2)

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ...________________________________

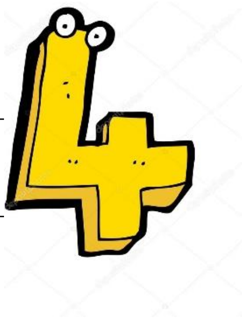
____

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ...________________________________

____

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ...________________________________

____



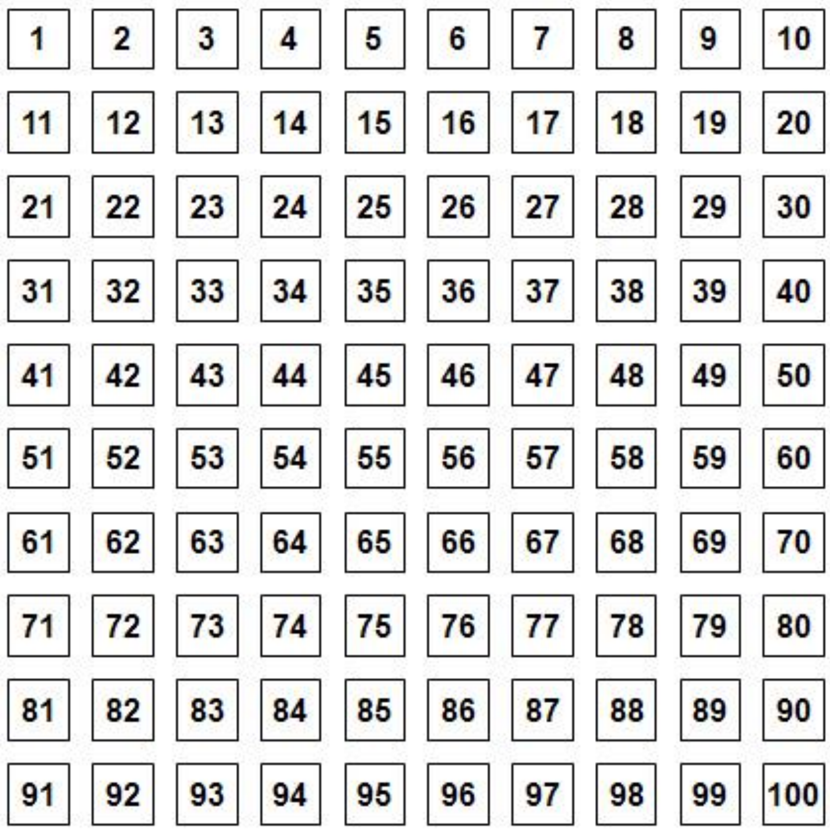
Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn ..._______________________________

____

Primzahlen

Schaue dir folgendes Video zu den Primzahlen an und streiche untenstehend alle Zahlen, die keine Primzahlen sind, durch. Tipp: Du kannst beim Video auf Pause klicken während du das auf deinem Blatt machst.

(https://www.youtube.com/watch?v=uzLpVzHqBNM)



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Schreibe nochmal alle Primzahlen zwischen 1 und 100 auf:

Merktext: Natürliche Zahlen, die genau zwei Teiler haben (nämlich 1 und die Zahl selbst), heißen **Primzahlen**. 1 ist keine Primzahl, 2 ist die kleinste Primzahl. Es gibt **unendlich viele** Primzahlen.

Primfaktorenzerlegung

Schaue dir folgendes Video an und schreibe die Beispiele (ab Minute 4) in dein Schulübungsheft mit. Schreibe vorher die Überschrift: Primfaktorenzerlegung.
(https://www.youtube.com/watch?v=nBUlHBDHoPc&list=PLZS3dhkNceMKB4YGyWcjJ6Vt6Z5xrthcn&index=4)

Noch einmal eine **Schritt-für-Schritt-Anleitung**:

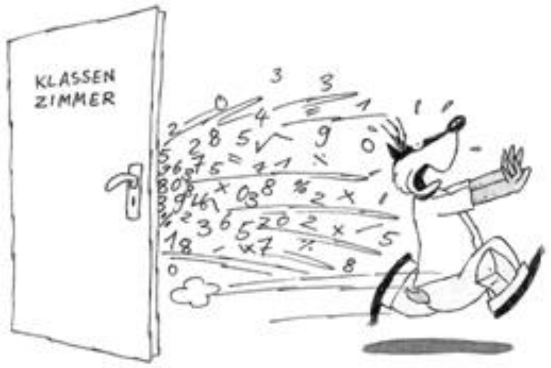
Schritt 1: Schreibe die natürliche Zahl, die zerlegt werden soll ganz oben links und mache daneben einen senkrechten Strich.

Schritt 2: Teile die Zahl durch die kleinste mögliche Primzahl, sodass kein Rest bleibt. Schreibe die verwendete Primzahl rechts neben den Trennstrich.

Schritt 3: Schreibe den Quotienten links neben den Trennstrich.

Schritt 4: Wiederholung der Schritte 2 und 3 bis der Quotient 1 ist.

Schritt 5: Schreibe dann die Primfaktorenzerlegung an (z.B. 20=2.2.5)



größter gemeinsamer Teiler

ggT

Merktext: Der ggT zweier Zahlen ist die größte Zahl, durch welche die beiden gegebenen Zahlen teilbar sind. Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen teilerfremd. Der ggT von zwei Zahlen ist das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren.

1) **Textbeispiel:**
   Zwei Stoffbahnen sind 270 cm und 630 cm lang. Sie sind so zu zerschneiden, dass daraus möglichst große, gleich lange Bahnen entstehen und kein Reststück bleibt. Wie lang wird eine solche Stoffbahn?

2) **Schaue dir folgendes Video an:**
   (https://www.youtube.com/watch?v=XN5E247u_qU&list=PLZS3dhkNceMKB4YGyWcjJ6Vt6Z5xrthcn&index=5)

3) **Versuche nun (mit dem Wissen aus dem Video) das obige Textbeispiel noch einmal zu lösen!**

4) **Wie berechnen wir uns den ggT?**
   Nummeriere die Schritte von 1-3:

☐ Man sucht die gemeinsamen Primfaktoren heraus und umrandet sie.

☐ Man zerlegt die beiden Zahlen im Primfaktoren

☐ Man multipliziert die gemeinsamen Primfaktoren

kleinstes **g**emeinsames **V**ielfaches

kgV

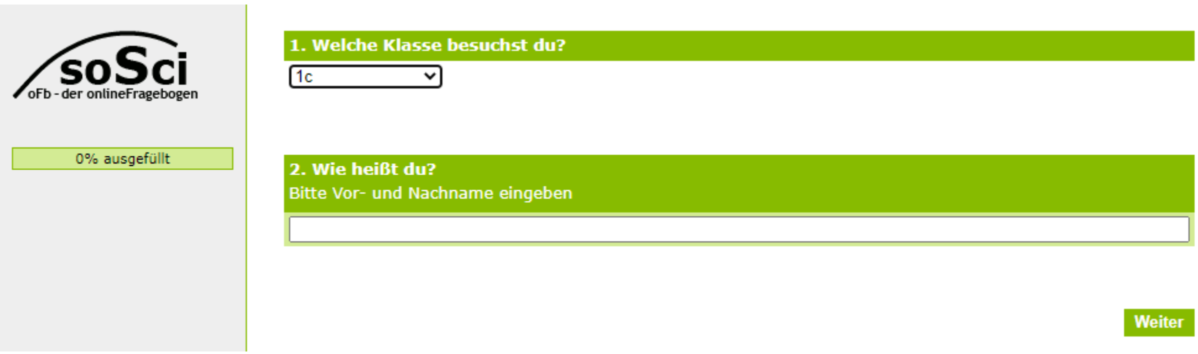
1. Schreibe in dein Schulübungsheft die Überschrift kleinstes gemeinsames Vielfaches (=kgV) und folgenden Merktext:
   Das kleinstes gemeinsames Vielfaches (=kgV) zweier Zahlen ist die kleinste Zahl, in der beide gegebenen Zahlen enthalten sind.

2. Schaue dir folgendes Video an:
   (https://www.youtube.com/watch?v=rJGUDInpvSE&list=PLZS3dhkNceMKB4YGyWcjJ6Vt6Z5xrthcn&index=6)

3. Stoppe bei Minute 2:50 immer wieder um die Schritt-für-Schritt-Anleitung in dein Schulübungsheft abzuschreiben.

4. Versuche dann selbstständig das kgV von den Zahlen 36 und 16 zu berechnen. Schreibe die Rechnung in dein Heft.

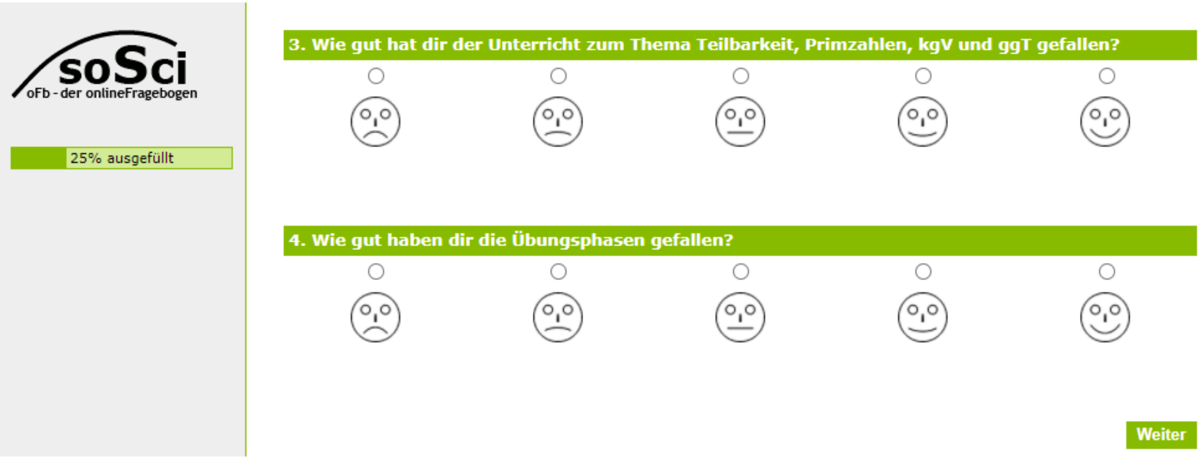
5.1.5 Fragebogen



1. Welche Klasse besuchst du?

1c

2. Wie heißt du?
Bitte Vor- und Nachname eingeben

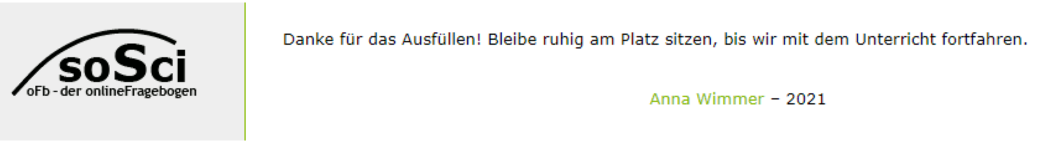


3. Wie gut hat dir der Unterricht zum Thema Teilbarkeit, Primzahlen, kgV und ggT gefallen?

○ ○ ○ ○ ○

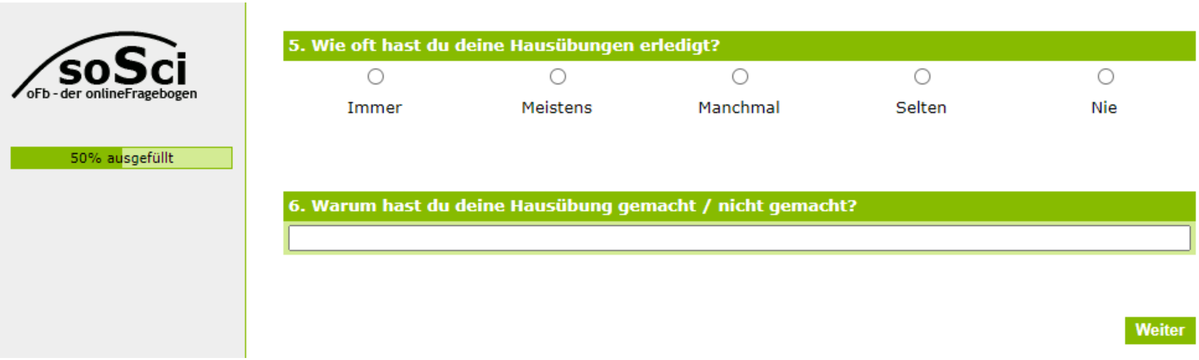
4. Wie gut haben dir die Übungsphasen gefallen?

○ ○ ○ ○ ○



Danke für das Ausfüllen! Bleibe ruhig am Platz sitzen, bis wir mit dem Unterricht fortfahren.

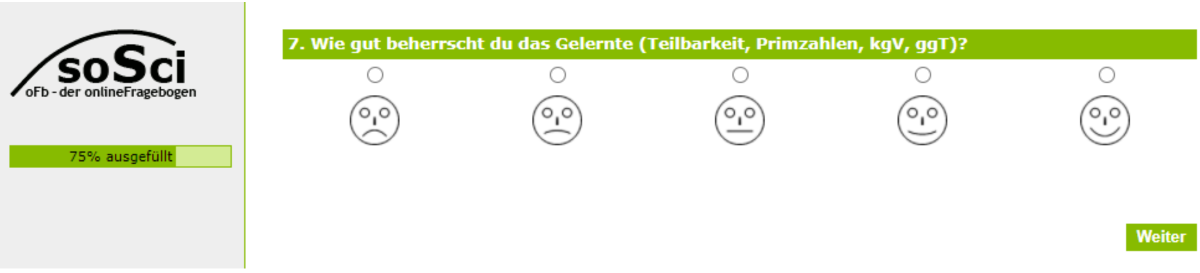
Anna Wimmer – 2021



5. Wie oft hast du deine Hausübungen erledigt?

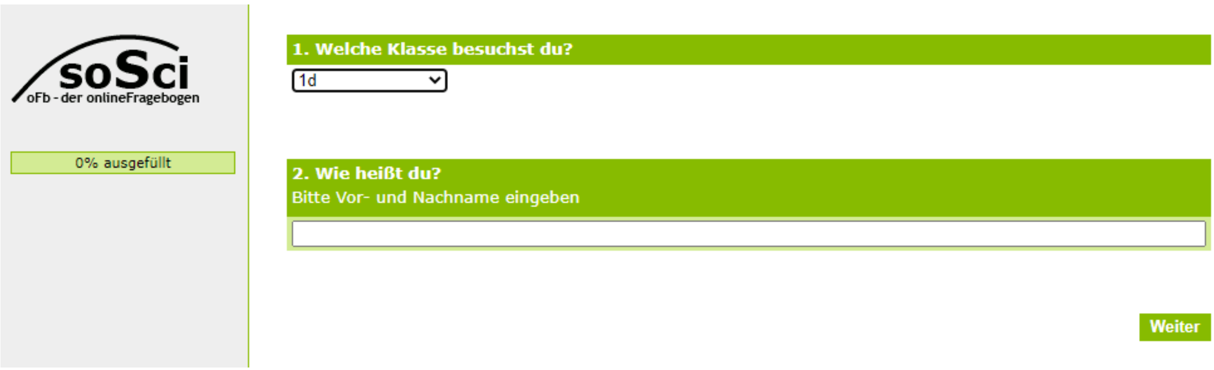
○ Immer ○ Meistens ○ Manchmal ○ Selten ○ Nie

6. Warum hast du deine Hausübung gemacht / nicht gemacht?



7. Wie gut beherrscht du das Gelernte (Teilbarkeit, Primzahlen, kgV, ggT)?

○ ○ ○ ○ ○

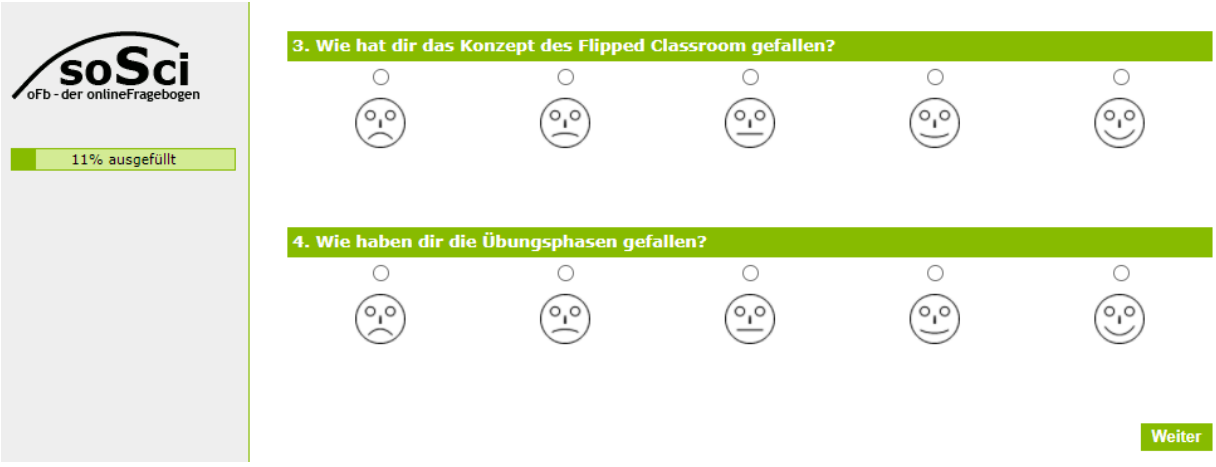


1. Welche Klasse besuchst du?

1d

2. Wie heißt du?

Bitte Vor- und Nachname eingeben

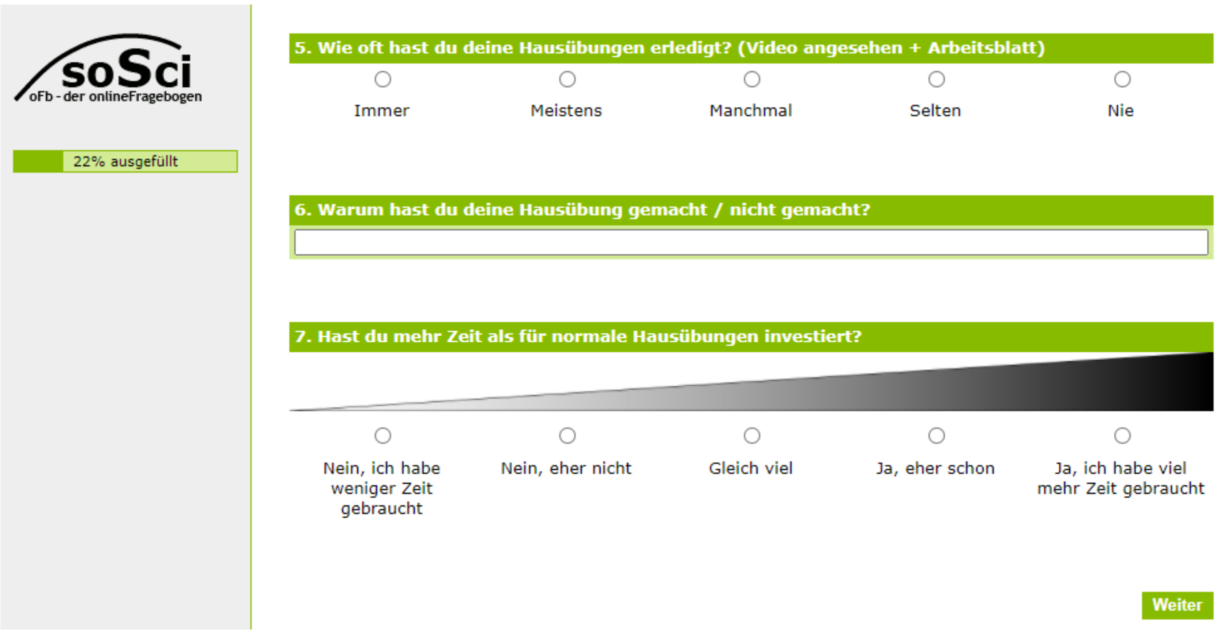


3. Wie hat dir das Konzept des Flipped Classroom gefallen?

○ ○ ○ ○ ○

4. Wie haben dir die Übungsphasen gefallen?

○ ○ ○ ○ ○



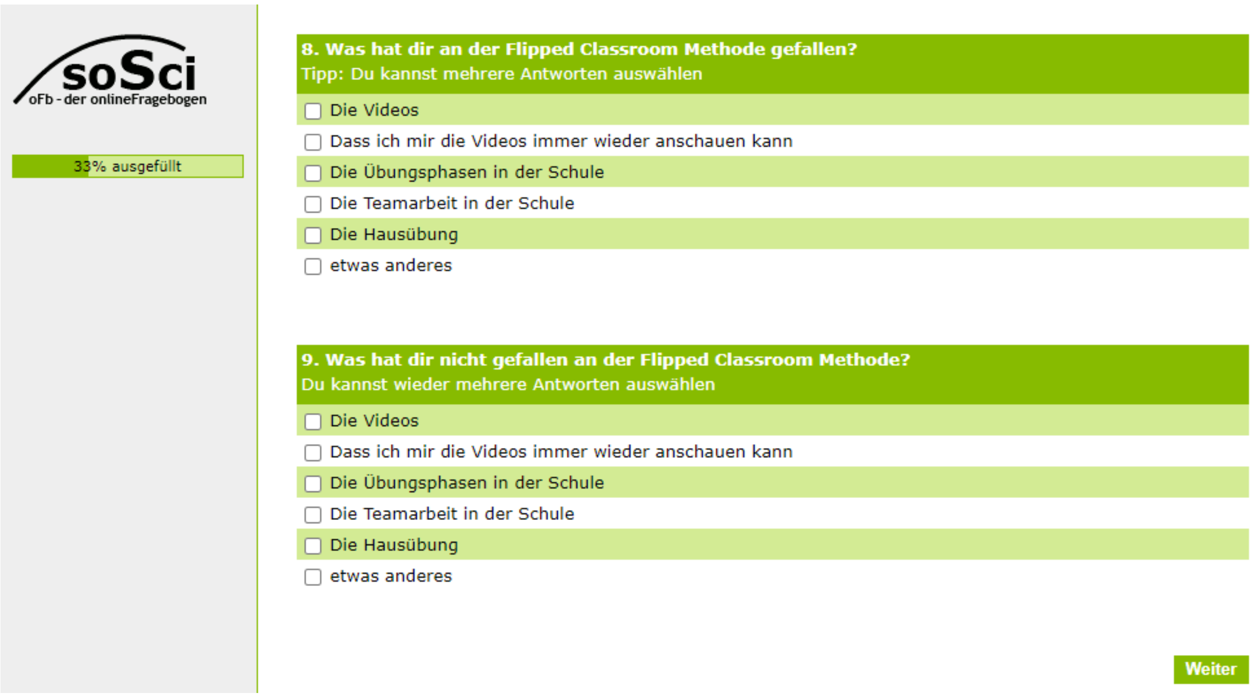
5. Wie oft hast du deine Hausübungen erledigt? (Video angesehen + Arbeitsblatt)

○	○	○	○	○
Immer	Meistens	Manchmal	Selten	Nie

6. Warum hast du deine Hausübung gemacht / nicht gemacht?

7. Hast du mehr Zeit als für normale Hausübungen investiert?

○	○	○	○	○
Nein, ich habe weniger Zeit gebraucht	Nein, eher nicht	Gleich viel	Ja, eher schon	Ja, ich habe viel mehr Zeit gebraucht



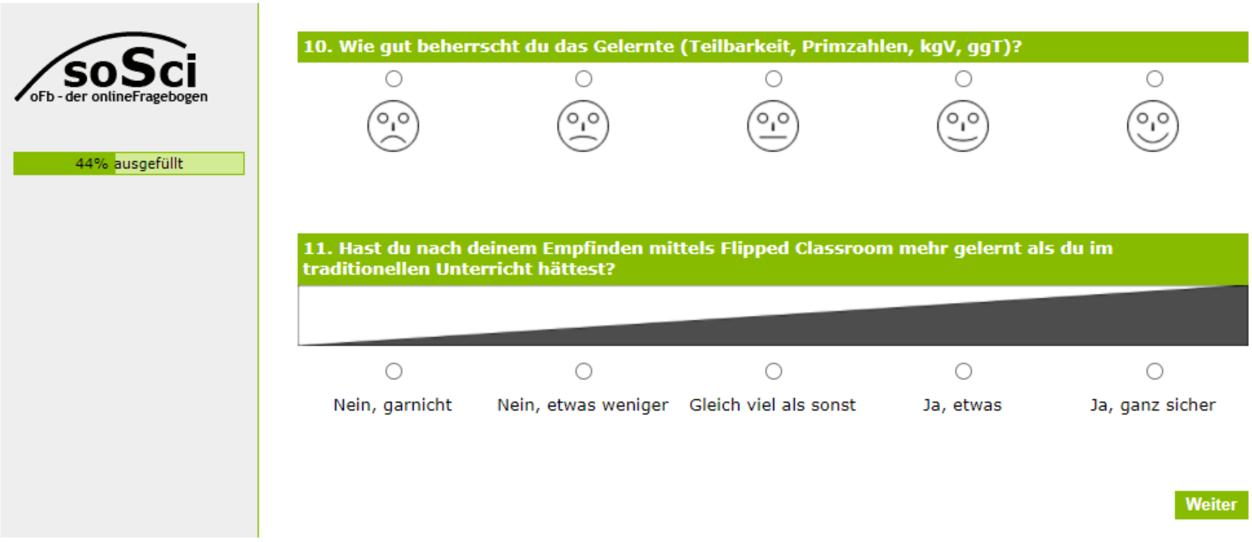
33% ausgefüllt

8. Was hat dir an der Flipped Classroom Methode gefallen?
Tipp: Du kannst mehrere Antworten auswählen

- ☐ Die Videos
- ☐ Dass ich mir die Videos immer wieder anschauen kann
- ☐ Die Übungsphasen in der Schule
- ☐ Die Teamarbeit in der Schule
- ☐ Die Hausübung
- ☐ etwas anderes

9. Was hat dir nicht gefallen an der Flipped Classroom Methode?
Du kannst wieder mehrere Antworten auswählen

- ☐ Die Videos
- ☐ Dass ich mir die Videos immer wieder anschauen kann
- ☐ Die Übungsphasen in der Schule
- ☐ Die Teamarbeit in der Schule
- ☐ Die Hausübung
- ☐ etwas anderes



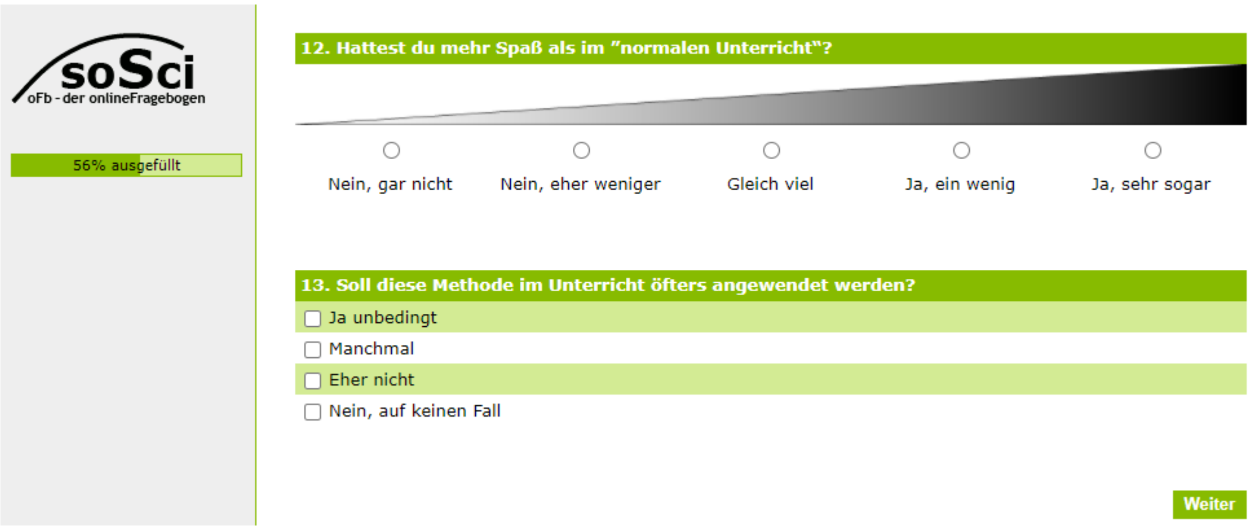
44% ausgefüllt

10. Wie gut beherrscht du das Gelernte (Teilbarkeit, Primzahlen, kgV, ggT)?

○ ○ ○ ○ ○

11. Hast du nach deinem Empfinden mittels Flipped Classroom mehr gelernt als du im traditionellen Unterricht hättest?

○	○	○	○	○
Nein, garnicht	Nein, etwas weniger	Gleich viel als sonst	Ja, etwas	Ja, ganz sicher



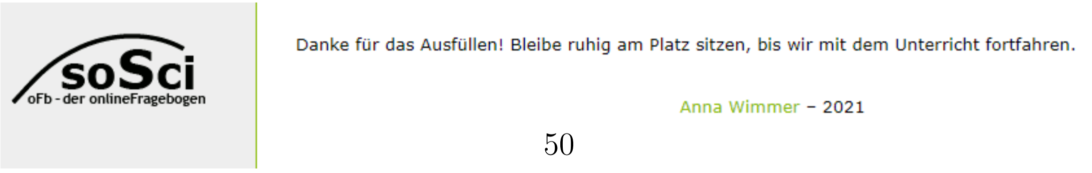
56% ausgefüllt

12. Hattest du mehr Spaß als im "normalen Unterricht"?

○	○	○	○	○
Nein, gar nicht	Nein, eher weniger	Gleich viel	Ja, ein wenig	Ja, sehr sogar

13. Soll diese Methode im Unterricht öfters angewendet werden?

- ☐ Ja unbedingt
- ☐ Manchmal
- ☐ Eher nicht
- ☐ Nein, auf keinen Fall



Danke für das Ausfüllen! Bleibe ruhig am Platz sitzen, bis wir mit dem Unterricht fortfahren.

Anna Wimmer – 2021

5.1.6 Kompetenzcheck

23. Juni 2021	KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT	NAME:	

<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Kompetenzen</th><th></th></tr>
<tr><td>**1.**</td><td>**Kreuze die richtigen Aussagen an**

☐ 12 ist ein Vielfaches von 4
☐ 12 ist ein Teiler von 3
☐ V_{10}={1,2,5,10}
☐ V_7={7,14,21,28,..}
☐ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
☐ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl</td><td></td></tr>
<tr><td>**2.**</td><td>**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ↿ ein:**

<table>
<tr><td>Teiler / Zahl</td><td>34</td><td>105</td><td>90</td><td>2 349</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>**3.**</td><td>**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**</td><td></td></tr>
<tr><td>**4.**</td><td>**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**

a) ggT(45,75)
b) kgV(24, 30)</td><td></td></tr>
</table>

5.2 Mathematische Erläuterung des Themas

Im angehenden Kapitel werden die Teiler und Vielfachen von natürlichen Zahlen besprochen, weshalb davor die natürlichen und ganzen Zahlen definiert werden müssen. Es wurde die Definition von Padberg ausgewählt:

Definition (Natürliche und ganze Zahlen) [22] Wir betrachten folgend die Teilbarkeits- und Vielfachenrelationen in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, da ansonsten eine entsprechende Erweiterung für die 0 notwendig wäre. Die Menge der ganzen Zahlen bezeichnen wir als $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..\}$.

Die wichtigste Definition in diesem Kapitel ist die Definition der Teiler, welche anhand von Remmert, Benölken und Padberg angeführt ist:

Definition (Teiler) Eine Zahl $d \in \mathbb{Z}$ heißt ein $Teiler\ der\ Zahl\ a \in \mathbb{Z}$, oder auch $d \mid a$, wenn es eine Zahl $v \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass gilt: $a = d\,v$. Man sagt dann auch: $d\,teilt\,a$. Ist d kein Teiler von a, so schreibt man: $d \nmid a$. Ist $d \neq 0$ ein Teiler von a, so ist $v \in \mathbb{Z}$ in der Gleichung $a = d\,v$ eindeutig bestimmt [24] und es ist aufgrund des Kommutativgesetzes der Multiplikation auch v ein Teiler von a. Wir nennen d und v *komplementäre* $Teiler$ bezüglich a.
Die Menge aller Teiler einer natürlichen Zahl a bezeichnen wir als $Teilermenge\,T(a) = \{d \in \mathbb{N} : d \mid a\}$.
Beispielsweise ist 3 ein Teiler von 18, weil 18 ohne Rest durch 3 teilbar ist. Außerdem schreiben wir für $T(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ [4, 22]

Korollar [24] Durch die Subtraktion kann man herausfinden, ob d ein Teiler von a ist oder nicht. Wenn die Gleichung $d\,x - a = 0$ eine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat, so ist d ein Teiler von a.

Um Teiler zu verstehen und mit ihnen rechnen zu können, müssen folgend einige Sätze von Bundschuh angeführt werden.

Satz [10]

(i) Für jedes $n \neq 0$ gilt $n \mid 0$ und $n \mid n$
Beweis: $0 = 0 \cdot n$, $n = n \cdot 1$

(ii) Gilt $m \mid n$, so gilt auch $-m \mid n$ und $m \mid -n$
Beweis: $\exists d \in \mathbb{Z} : n = m \cdot d \Rightarrow n = (-m)(-d)$ und $(-n) = m(-d)$

(iii) Für alle n gilt $1 \mid n$
Beweis: $n = n \cdot 1$

(iv) Aus $m \mid n$ und $n \neq 0$ folgt $|m| \leq |n|$
Beweis :$\exists d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$: $n = md \Rightarrow |n| = |m||d| \geq |m|$

(v) Aus $n \mid 1$ folgt entweder $n = 1$ oder $n = -1$

Beweis: Wegen (iv) ist $|n| \leq 1 \Rightarrow n \in \{-1, 0, 1\}$. Da $n = 0$ unmöglich ist, folgt $n \in \{-1, 1\}$

(vi) Aus $m \mid n$ und $n \mid m$ folgt entweder $n = m$ oder $n = -m$.

Beweis: Falls $m = n = 0$ ist die Aussage trivial. Wenn $m \neq 0 \Rightarrow n \neq 0$ und umgekehrt. Auf Grund von (iv) gilt: $|m| \leq |n|$ und $|n| \leq |m| \Rightarrow |n| = |m|$, d.h. $n \in \{m, -m\}$.

(vii) Aus $l \mid m$ und $m \mid n \Rightarrow$l $\mid n$

Beweis: $\exists d_1 : m = d_1 l, \exists d_2 : n = d_2 m \Rightarrow n = d_1 d_2 l \Rightarrow l \mid n$.

(viii) $\forall l \neq 0 : m \mid n \Leftrightarrow lm \mid ln$

Beweis: $\exists d : n = dm \Rightarrow ln = d(lm) \Rightarrow lm \mid ln$, $\exists d : ln = d(lm) \Rightarrow n = dm \Rightarrow m \mid n$

(ix) $m \mid n_i (1 \leq i \leq k) \Rightarrow m \mid (\sum\limits_{i=1}^{k} (l_i n_i))$, $l_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq k$

Beweis: $\forall i \in \{1, ..., k\} \exists d_i \in \mathbb{Z} : n_i = d_i m \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} l_i n_i = \sum\limits_{i=1}^{k} l_i (d_i m) = m(\sum\limits_{i=1}^{k} l_i d_i)$.

(x) $m_i \mid n_i (1 \leq i \leq k) \Rightarrow (\prod\limits_{i=1}^{k} m_i) \mid (\prod\limits_{i=1}^{k} n_i)$

Beweis: $\forall i \in \{1, ..., k\} \exists d_i \in \mathbb{Z} : n_i = d_i m_i \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{k} n_i = \prod\limits_{i=1}^{k} d_i m_i = (\prod\limits_{i=1}^{k} d_i)(\prod\limits_{i=1}^{k} m_i)$.

Für Kinder ist das Verständnis, dass ein Teiler kleiner oder gleich wie die Zahl selbst sein muss, essentiell. Dieser Satz und dessen Beweis wird durch Remmert angegeben:

Satz [24] Sei $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Sei $d \in \mathbb{Z}$ ein Teiler von a. Dann gilt:

$$1 \leq |d| \leq |a|.$$

Eine Zahl $a \neq 0$ hat höchstens endlich viele verschiedene Teiler.
Beweis: Es gilt $a = dn$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Deshalb gilt $|a| = |d||n|$. Wegen $a \neq 0$ gilt $d \neq 0$ und $n \neq 0 \Rightarrow |d| \geq 1, |n| \geq 1$ und $|a| = |d||n| \geq |d|$. D.h. es gilt $1 \leq |d| \leq |a|$. Da es höchstens $2|a|$ verschiedene Zahlen $d \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq |d| \leq |a|$ gibt, hat a höchstens $2|a|$ verschiedene Teiler. □

Eine große Erleichterung bei der Suche nach Teilern ist folgender Satz:

Satz [24] Die Zahlen a und $-a$ haben dieselben Teiler. Wenn d ein Teiler von a ist, ist auch $-d$ ein Teiler von a.
Beweis: Es gilt $a = dn$ genau dann, wenn auch $-a = d(-n)$ gilt. Da $a = dn$ mit $d \in \mathbb{Z}$ auch als $a = (-d)(-n)$ geschrieben werden kann, ist mit d auch stets $-d$ ein Teiler von a, und man kennt bereits alle Teiler der ganzen Zahl a, wenn man alle positiven Teiler der Zahl $|a|$ kennt. □
Deshalb werden in der Schule meist nur die positiven Teiler beachtet.

Bemerkungen

(1) Jedes n besitzt die Teiler $1, -1, n, -n$. Ist $d \mid n$ und $d \notin \{-1, 1, n, -n\}$, so heißt d echter Teiler von n [2]. Die Teiler $1, -1, a, -a$ von a bezeichnet man als *triviale* oder *unechte* Teiler [4].

(2) Ist $n \in \mathbb{N}$ und man hat alle Teiler $m > 0$ von n mit $1 \leq m < \sqrt{n}$ gefunden, so sind die restlichen positiven Teiler von n gerade die Komplementärteiler. Denn: Ist $d \mid n$ und $d > \sqrt{n}$, so ist $m = \frac{n}{d} < \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Beispiel: $n = 60$, Teiler m von 60 mit $m < \sqrt{60} < 8$ sind $1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow$ restliche positive Teiler von 60 sind $60, 30, 25, 15, 12, 10$ [2].

Suche von Teilern [4] Um sich bei der Suche von allen Teilern eine Erleichterung zu schaffen, sollte systematisch vorgegangen werden. Man beginnt mit dem kleinsten Teiler und notiert sich jeweils sofort den Komplementärteiler, dann wird der nächst größere Teiler gesucht und wieder der dazugehörige Komplementärteiler notiert usw. Die Suche ist spätestens bei $\sqrt{a}$ beendet.
Beispiele:

30	
1	30
2	15
3	10
5	6

48	
1	48
2	24
3	16
4	12
6	8

Gemeinsame Teiler, ggT [22] Mithilfe von Teilermengen lässt sich der Begriff des größten gemeinsamen Teilers, ggT, sehr anschaulich einführen. Als Beispiel werden die Teilermengen von 18 und 24 bestimmt:

$$T(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$T(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Nun kann gesehen werden, dass die Zahlen $1, 2, 3$ und 6 Teiler von beiden Zahlen sind - diese werden *gemeinsame* Teiler genannt. Der größte gemeinsame Teiler ist dann offensichtlich die Zahl 6.

Definition (gemeinsame Teiler, ggT) [2] Sind $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{Z}$, dann heißt $m \in \mathbb{Z}$ gemeinsamer Teiler von $n_1, n_2, ..., n_k$, wenn $m \mid n_i$ für $1 \leq i \leq k$.
Die Menge der gemeinsamen Teiler ist stets $\neq \varnothing$, da sie 1 enthält. Sind $n_1, n_2, ..., n_k$ nicht alle 0, so ist sie nach oben beschränkt (z.B. durch $min\{|n_i| : 1 \leq i \leq k, n_i \neq 0\}$).
Daher kann man definieren:
Sind $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{Z}$ nicht alle 0, so ist $ggT(n_1, ..., n_k) := max\{m \in \mathbb{Z} : m \mid n_i\}$ für $1 \leq i \leq k$ der größte gemeinsame Teiler von $n_1, n_2, ..., n_k$.

Bemerkung Zwei Elemente heißen teilerfremd, falls ihr ggT gleich 1 ist.

Um das Verständnis vom größten gemeinsamen Teiler zu erweitern, werden im Folgenden einige Rechenregeln von Müller angeführt:

Rechenregeln [21] Seien a, b und $c \in \mathbb{Z}$, dann gilt:

(i) $ggT(a, b) = ggT(b, a)$

(ii) $ggT(a, 0) = a$ und $ggT(a, 1) = 1$

(iii) $ggT(ca, cb) = c \cdot ggT(a, b)$

(iv) $ggT(a, b) = a \Leftrightarrow a \mid b$

(v) $ggT(a, b) \mid ggT(a, bc)$

(vi) $ggT(a, b + ca) = ggT(a, b)$

(vii) $ggT(a, b, c) = ggT(a, ggT(b, c))$

(viii) $ggT(a, b) = 1 \Rightarrow ggT(a^i, b^j) = 1$ für $i, j \in \mathbb{N}$

(ix) $a \mid bc$ und $ggT(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c$

(x) $ggT(a, b) = 1 \Rightarrow ggT(a, bc) = ggT(a, c)$

Wie oben beschrieben, kann der größte gemeinsame Teiler durch das Aufschreiben der Teilermengen gefunden werden. Diese Methode kann bei hohen Zahlen jedoch sehr mühsam werden. Deshalb gibt es auch eine schnellere Technik:

Satz (euklidischer Algorithmus) Seien $a, b \in \mathbb{N}$, dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$ sodass $a = q \cdot b + r$ mit $0 \leq r < b$ gilt [4].

Führe wiederholt Division mit Rest durch.

$$a = bq_0 + r_1, 0 \leq r_1 < b$$

$$b = r_1q_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$$

$$.$$

$$.$$

$$r_{m-1} = r_mq_m + r_{m+1}, 0 \leq r_{m+1} < r_m$$

Wegen $r_1 > ... > r_{m-1} > r_m > ... \geq 0$ gibt es ein kleinstes n mit $r_{n+1} = 0$. Es gilt dann: $r_n = ggT(a, b)$ [2].

Beweis:[22]
Die Reste in der Gleichungskette $b > r_1 > ... > r_{m-1} > r_m > ... \geq 0$ werden immer kleiner. Das heißt, die Gleichungskette muss nach spätestens b Schritten mit einem Rest 0 abbrechen. Wir wissen, dass

$$ggT(a, b) = ggT(b, r_1)$$

$$ggT(b, r_1) = ggT(r_1, r_2)$$

$$ggT(r_1, r_2) = ggT(r_2, r_3)$$

$$.$$

$$.$$

$$ggT(r_{m-2}, r_{m-1}) = ggT(r_{m-1}, r_m)$$

$$ggT(r_{m-1}, r_m) = ggT(r_m, 0)$$

Wegen $T(0) = \mathbb{N}_0$ gilt für die rechte Seite der letzten Gleichung $ggT(r_m, 0) = r_m$ (weil r_m Teiler von r_m und von 0 ist). Wir erhalten also:

$$ggT(a, b) = ggT(b, r_1) = ggT(r_1, r_2) = ... = ggT(r_{m-1}, r_m) = ggt(r_m, 0) = r_n$$

also

$$ggT(a, b) = r_n.$$

□

Der euklidische Algorithmus ist als allgemeine Erklärung für jüngere Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich noch sehr schwierig zu verstehen. Der Rechenweg ist jedoch eigentlich ganz einfach, deshalb wird nachstehend ein Beispiel geschildert.

Beispiel $ggT(544, 391)$

$$544 = 391 \cdot 1 + 153$$

$$391 = 153 \cdot 2 + 85$$

$$153 = 85 \cdot 1 + 68$$

$$85 = 68 \cdot 1 + 17$$

$$68 = 17 \cdot 4 + 0$$

$\Rightarrow ggT(544, 391) = 17$

Nicht nur Teiler, Teilermengen und (größte) gemeinsame Teiler sind interessante Themen der 6. Schulstufe, sondern auch Vielfache, Vielfachenmengen und (kleinste) gemeinsame Vielfache gehören dazu.

Definition (Vielfaches) Ist d ein Teiler von a, so nennt man a ein Vielfaches von d [24]. Die Menge aller Vielfachen einer natürlichen Zahl a bezeichnen wir als Vielfachenmenge $V(a) = \{d \in \mathbb{N} : a \mid d\}$. So gilt beispielsweise $V(6) = \{6, 12, 18, 24, ..\}$ [22].

Definition (kgV) [2] Sind $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{Z}$, dann heißt $m \in \mathbb{Z}$ gemeinsames Vielfaches von $n_1, n_2, ..., n_k$, wenn $n_i \mid m$ für $1 \leq i \leq k$. Sind $n_1, n_2, ..., n_k \neq 0$ so ist die Menge der positiven gemeinsamen Vielfachen $\neq \varnothing$ (da sie $|n_1 \cdots n_k| = |n_1| \cdots |n_k|$ enthält) und nach unten beschränkt ist. Man kann daher definieren:

$$kgV(n_1, ..., n_k) := min\{m \in \mathbb{N} : n_i \mid m\} für 1 \leq i \leq k.$$

Beispiele $V(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, ..\}$
$V(7) = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, ..\}$
$kgV(4, 7) = 28$

Die Anzahl der Vielfachen ist immer unendlich, wobei die Anzahl der Teiler sehr unterschiedlich sein kann. Eine Zahl, die nur zwei Teiler besitzt, ist eine ganz besondere Zahl - eine Primzahl.

Definition (Primzahl) [10] Eine Zahl $p > 1 \in \mathbb{Z}$ heißt Primzahl, wenn 1 und n ihre einzigen positiven Teiler sind. Die Folge der Primzahlen, der Größe nach geordnet, beginnt mit

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..$$

Lemma [10] Der kleinste positive, von 1 verschiedene Teiler $p(a)$ jeder ganzen Zahl $a \geq 2$ ist eine Primzahl.

Beweis: Eine Zahl $a \geq 2$ hat mindestens den Teiler a. Die Menge der Teiler ist also nie leer und hat daher auch ein kleinstes Element, welches $p(a)$ genannt wird. Es gilt $p(a) \geq 2$. Wäre $p(a)$ nicht prim, hätte es einen von 1 und $p(a)$ verschiedenen positiven Teiler d. Dann gilt jedoch $d < p(a)$ und $d \mid a$. Das widerspricht jedoch der Definition von $p(a)$, da $d \geq 2$ gilt. □

Die Frage, wie viele Primzahlen es gibt, wird angehend durch Padberg und Büchtner beantwortet.

Lemma [22] Zu endlich vielen Primzahlen $p_1, p_2, ..., p_n$ können wir stets eine weitere, neue Primzahl $N := p_1 \cdot p_2 \cdot ...p_n + 1$ erhalten.

Satz von Euklid [22] Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis: Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, ..., p_n$. Betrachte $N := p_1 \cdot p_2 \cdot ...p_n + 1$ dann ist $N \geq 2$ und N hat einen Primteiler p. Diese Primzahl p müsste nach Voraussetzung eine der Zahlen $p_1, p_2, ..., p_n$ sein, also gilt $p \mid N \Rightarrow p \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot ...p_n) \Rightarrow p \mid N - (p_1 \cdot p_2 \cdot ...p_n) \Rightarrow p \mid 1 \Rightarrow p \leq 1$. Das ergibt einen Widerspruch! □

Die Jagd nach immer größeren Primzahlen [22] Zu jeder noch so großen Primzahl wird es stets eine Primzahl geben, die noch größer ist. Deshalb wird die faszinierende Jagd nach immer noch größeren Primzahlen nie enden. 1951 war die größte entdeckte Primzahl eine 39-stellige Zahl

$$170141183460469231731687303715884105727$$

doch durch den Einsatz von Computern wurde die Entdeckung neuer Primzahlen immer einfacher. Wie unvorstellbar groß die derzeitig größte Primzahl ist, können wir folgendermaßen veranschaulichen: Notieren wir in jedes Kästchen einer DIN-A4-Seite karierten Papiers eine Ziffer, so können wir pro Seite rund 2400 Ziffern schreiben. Für die größte Primzahl benötigen wir dann über 7000 Seiten.

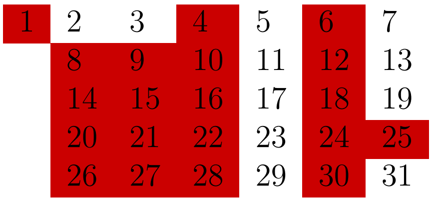
Wenn es so viele Primzahlen gibt, bleibt auch die Frage, wie diese Primzahlen gefunden werden können. Dazu wird die Methode des Siebes des Eratostehenes erläutert:

Das Sieb des Eratosthenes [22] Wir schreiben die natürlichen Zahlen beginnend bei 1 der Größe nach geordnet in sechs Spalten (zuzüglich der 1 in einer extra Spalte) auf:

1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30	31

Folgenderweise eruieren wir nun die Primzahlen der Zahlen 1 bis 31:
1. Schritt: Wir streichen die Zahl 1, da sie keine Primzahl ist.
2. Schritt: Die Zahl 2 ist eine Primzahl, deshalb streichen wir sie nicht. Jedoch können wir alle Vielfachen von der Zahl 2 streichen (da sie zusammengesetzte Zahlen sind).
3. Schritt: Die erste Zahl nach der 2, die von der Streichung nicht betroffen ist, ist die Zahl 3. Deshalb ist die 3 eine Primzahl. Alle Vielfachen von 3 sind sicher keine Primzahlen und werden gestrichen.
4. Schritt: Die erste Zahl nach der 3, die noch nicht gestrichen wurde, ist die 5. Sie ist daher auch eine Primzahl und wird nicht weggestrichen, aber wieder ihre Vielfachen.

5. Schritt: Wir sehen nun schon die nächsten Primzahlen 7,11,13, usw. jedoch sind bis 31 keine Vielfachen von diesen Primzahlen zu finden, welche noch nicht ausgestrichen wurden. Deshalb haben wir schon alle Primzahlen von 1 bis 31 gefunden (alle Zahlen die noch nicht gestrichen wurden).



1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30	31

Ein ganz wichtiges Teilthema in der Sekundarstufe 1 ist die Primfaktorenzerlegung, da sie für das bestimmen des ggT´s und kgV´s hilfreich sein kann.

Definition (Primfaktorenzerlegung) [24] Existenz der Primfaktorenzerlegung: Ist $a > 1$ eine natürliche Zahl, so heißt jede Primzahl p, die a teilt, Primteiler oder auch Primfaktor von a. Jede Darstellung

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$$

von a als Produkt von endlich vielen Primzahlen $p_1, p_2, .., p_n$ heißt Primfaktorenzerlegung von a.

Satz (Existenz einer Primfaktorenzerlegung) [24] Jede natürliche Zahl $a \geq 1$ besitzt eine Primzerlegung

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n.$$

Dabei kann man für p_1 speziell den kleinsten Primteiler t von a wählen.
Beweis: Induktiv: Für $a := 1$ gilt die Behauptung. Sei $a > 1$, und sei vorausgesetzt, dass die Behauptung für alle natürlichen Zahlen a' mit $1 \leq a' < a$ richtig ist. Laut der Definition besitzt a einen kleinsten Primteiler t. Das heißt

$$a = tb$$

mit $1 \leq b < a$ (wegen $1 < t \leq a$). Nach Induktionsvoraussetzung hat b eine Primzerlegung

$$b = p_2 \cdot p_3 \cdot .... \cdot p_n.$$

Setzt man $p_1 := 1$ so ergibt sich für a folgende Primzerlegung

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n.$$

$\square$

Satz (Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung) [24] Die Primfaktorenzerlegung einer jeden natürlichen Zahl $a \geq 1$ ist, bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren, eindeutig. Genauer: Sind $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$ und $a = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_m$ zwei Primfaktorenzerlegungen von a mit Primzahlen $p_1, ...p_n, q_1, ..., q_m$, so gilt $m = n$, und man kann die Primzahlen der zweiten Zerlegung so umnummerieren, dass gilt: $p_1 = q_1, .., p_n = q_m$.
Beweis: Induktion nach n: Für $n = 0$ ist $a = 1$ und damit notwendigerweise auch $m = 0$. Sei die Behauptung nun für alle positiven natürlichen Zahlen bewiesen, die eine Primzerlegung mit $n - 1$ Primfaktoren zulassen, wobei $n \geq 1$. Sind dann $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$ und $a = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_m$ zwei Primfaktorenzerlegungen von a, so besagt die Gleichung $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_m$ speziell $p_1 \mid q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_m$. Daraus folgt $p_1 \mid q_j$ für $1 \leq j \leq m$, wobei man nach der Umnummerierung von $q_1, ...q_m$ ohne Einschränkung $j = 1$ annehmen kann. Da q_1 eine Primzahl ist, ergibt sich nun $p_1 = q_1$ wegen $p_1 > 1$. Die Zahl $a' := p_2 \cdot ... \cdot p_n$ besitzt also die beiden Primzerlegungen $p_2 \cdot ... \cdot p_n$ und $q_2 \cdot ... \cdot q_m$, wobei erstere aus $n - 1$ Primfaktoren besteht. Nach der Induktionsvoraussetzung folgt dann $n - 1 = m - 1$ und $p_2 = q_2, ..., p_n = q_m$. Somit ist die Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung bewiesen. $\square$

Notation Die Folge der Primzahlen beginnt mit $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...$ Wir schreiben daher oft p_n für die n-te Primzahl.
Für die Primfaktorenzerlegung einer natürlichen Zahl schreiben wir

$$n = \prod_p p^{\alpha_p}.$$

Dabei läuft p über alle Primzahlen, $\alpha_p \in \mathbb{Z}, \alpha_p \geq 0 \forall p$ und $\alpha_p = 0$ für alle bis auf endlich viele Primzahlen p.

Beispiel Bestimme die Primfaktorenzerlegung von der Zahl 26928:

26928	2
13464	2
6732	2
3366	2
1683	3
561	3
187	11
17	17
1	

Also lautet die Primfaktorenzerlegung

$$26928 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17.$$

Die 3. Methode einen größten gemeinsamen Teiler zu bestimmen funktioniert über die Primfaktorenzerlegung:

Satz Sind $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorenzerlegung $a_i = \prod_p p^{\alpha_{ip}} (1 \leq i \leq n)$, so besitzt $ggT(a_1, ..., a_n)$ die Primfaktorenzerlegung $ggT(a_1, ..., a_n) = \prod_p p^{min\{\alpha_{1p},..\alpha_{np}\}}$ [4].
Beweis: Sei $d := \prod_p p^{min\{\alpha_{1p},..\alpha_{np}\}}$. Es gilt $min\{\alpha_{1p}, ..., \alpha_{np}\} \leq \alpha_{ip} \forall i \in \{1, .., n\} \Rightarrow d \mid a_i (1 \leq i \leq n)$. Wenn $b \mid a_i (1 \leq i \leq n)$ für ein $b \in \mathbb{N}, b = \prod_p p^{\beta_p}$, dann gilt $\beta_{ip} \leq \alpha_{ip} \forall i \in \{1, 2, .., n\} \forall p \Rightarrow \beta_p = min\{\alpha_{1p}, ..., \alpha_{np} \forall p \Rightarrow b \mid d \Rightarrow d = ggT(a_1, ..., a_n)$[2]. ☐

Bemerkung (Spezialfall) [2] Wenn $a = \prod_p p^{\alpha_p}$ und $b = \prod_p p^{\beta_p}$ dann gilt

$$ggT(a, b) = \prod_p p^{\min\{\alpha_p, \beta_p\}}$$

Beispiel [2] $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $24696 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3$,
$ggT(8100, 24696) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

Sehr ähnlich funktioniert das auch mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen.

Satz [2] Sind $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorenzerlegung $a_i = \prod_p p^{\alpha_{ip}} (1 \leq i \leq k)$, so besitzt $kgV(a_1, ..., a_n)$ die Primfaktorenzerlegung $kgV(a_1, ..., a_n) = \prod_p p^{max\{\alpha_{1p},..\alpha_{np}\}}$. [4]
Beweis: Sei $k := \prod_p p^{max\{\alpha_{1p},..\alpha_{np}\}}$. Es gilt $\alpha_{ip} \leq max\{\alpha_{1p}, ..., \alpha_{np}\} \forall i \in \{1, .., n\} \Rightarrow a_i \mid k (1 \leq i \leq k)$. Wenn $a_i \mid m (1 \leq i \leq k)$ für ein $m \in \mathbb{N}, m = \prod_p p^{\alpha_{\mu_p}}$, dann gilt $\alpha_{ip} \leq \mu_{ip} \forall i \in \{1, 2, .., n\} \forall p \Rightarrow max\{\alpha_{1p}, ..., \alpha_{np} \leq \mu_p \forall p \Rightarrow k \mid m \Rightarrow k = kgV(a_1, ..., a_n)$. ☐

Kongruenzen werden in der Sekundarstufe 1 in der Regeln nicht gelehrt. In der Fachmathematik werden sie beispielsweise für den Beweis der Teilbarkeitsregeln gebraucht, weshalb die Definition trotzdem angeführt wird. Gleich danach folgen die Teilbarkeitsregeln, welche schon auch in der Schulmathematik sehr relevant sind (beispielsweise für das Finden von gemeinsamen Nennern beim Rechnen mit Brüchen).

Definition (Kongruenzen) [22] Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Wir sagen: a ist restgleich (kongruent) zu b bei Division durch m genau dann, wenn a und b bei der Division durch m denselben Rest r mit $0 \leq r < m$ haben. Man schreibt: $a \equiv b (mod\ m)$. Andernfalls sagen wir: a ist nicht kongruent zu b bei der Division durch m ($a \not\equiv b (mod\ m)$). Wir sagen auch a und b seien kongruent modulo m wenn $m \mid (a - b)$. Die Zahl m nennen wir Modul und die ganze Gleichung $a \equiv b (mod\ m)$ ist eine Kongruenz.

Definition (Quersumme) [4] Es sei $n = a_k 10^k + ... + a_1 10 + a_0 = \sum_{k=0\ n} a_k \cdot 10^k$ mit $a_k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq a_k \leq 9 \forall k$. Dann heißt $Q(n) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k$ die Quersumme und $Q'(n) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ...a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ die alternierende Quersumme von n.

Je größer eine Zahl ist, desto mühsamer ist es festzustellen, ob eine andere Zahl Teiler oder Nicht-Teiler ist. Es kann sehr aufwendig sein, immer Divisionen durchzuführen, um zu sehen, ob ein Rest bleibt, oder nicht. Deshalb sind die Teilbarkeitsregeln beim Feststellen der Teilbarkeit eine sehr große Hilfe.

Korollar (Teilbarkeitsregeln) [2, 4] Ein $n \in \mathbb{N}$ hat die Darstellung $n = a_k 10^k + ... + a_1 10 + a_0$ mit $a_k, a_{k-1}, ..., a_1, a_0 \in \{0, ..., 9\}$ im dekadischen System. Dann gelte:

(i) $2 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid a_0 \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Das bedeutet, dass eine Zahl durch 2 teilbar ist, wenn die letzte Ziffer gerade ist.

Beweis: Es lässt sich $n = (n - a_0) + a_0$ schreiben. Es gilt $n \equiv a_0 (mod\ 2)$, da $10 \equiv 0 (mod\ 2) \Rightarrow 10^i \equiv 0^i \equiv 0 (mod\ 2)$ für $1 \leq i \leq k \Rightarrow n = a_0 + 10a_1 + ... + 10^k a_k \equiv a_0 + 0a_1 + ... + 0a_k = a_0 (mod\ 2)$. Deshalb gilt $2 \mid (n - a_0)$ und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

(ii) $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid (\sum_{i=1}^{k} a_i)$

Beweis: $n \equiv a_0 + a_1 + ... + a_k (mod\ 3)$, da $10 \equiv 1 (mod\ 3) \Rightarrow 10^i \equiv 1^i \equiv 1 (mod\ 3)$ für $1 \leq i \leq k \Rightarrow n = a_0 + 10a_1 + ... + 10^k a_k \equiv a_0 + 1a_1 + .. + 1a_k = a_o + ... + a_k (mod\ 3)$. $\square$

(iii) $4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid (a_0 + 10a_1)$

Beweis: $n \equiv a_0 + 10a_1 (mod\ 4)$, weil $10^2 \equiv 0 (mod 4) \Rightarrow 10^i = 10^{i-2} 10^2 \equiv 10^{i-2} 0 = 0 (mod\ 4)$ für $2 \leq i \leq k \Rightarrow n = a_0 + 10a_1 + ... + 0^k a_k = a_0 + 10a_1 (mod\ 4)$. $\square$

(iv) $5 \mid n \Leftrightarrow 5 \mid a_0 \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 5\}$

Beweis: $n \equiv a_0 (mod\ 5)$, da $10 \equiv 0 (mod\ 5)$ und analog wie (i) $\square$

(v) $n \equiv a_0 + 10a_1 + 100a_2 (mod\ 8)$,da $8 \mid n \Leftrightarrow 8 \mid (a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2)$

Beweis: $n \equiv a_o + 10a_1 + 100a_2 (mod\ 8)$, da $10^3 \equiv 0 (mod\ 8) \Rightarrow 10^i \equiv 0 (mod\ 8)$ für $3 \leq i \leq k$ und analog wie (iii) $\square$

(vi) $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid (\sum_{i=1}^{k} (-1)^i a_i)$

Beweis: $n \equiv a_0 + ... + a_k (mod\ 9)$, da $10 \equiv 1 (mod\ 9) \Rightarrow 10^i \equiv 1 (mod\ 9)$ für $1 \leq i \leq k$ und analog wie (ii) $\square$

(vii) $11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid (\sum_{i=1}^{k} (-1)^i a_i$

Beweis: $n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^k a_k (mod\ 11)$, da $10 \equiv -1 (mod\ 11) \Rightarrow 10^i \equiv (-1)^i (mod\ 11)$ für $1 \leq i \leq k \Rightarrow n \equiv a_o - a_1 + ... + (-1)^k a_k (mod\ 11)$ $\square$

(viii) $20 \mid n \Leftrightarrow 20 \mid (a_0 + 10a_1)$

Beweis: analog zu (iii)

(ix) $25 \mid n \Leftrightarrow 25 \mid (a_0 + 10a_1)$

Beweis: analog zu (iii)

(x) $50 \mid n \Leftrightarrow 50 \mid (a_0 + 10a_1)$

Beweis: analog zu (iii)

(xi) $100 \mid n \Leftrightarrow 100 \mid (a_0 + 10a_1)$

Beweis: analog zu (iii)

Bemerkung [2] Die Teilbarkeit bezüglich zusammengesetzter Teiler kann man auf die Teilbarkeit bezüglich Teiler, die paarweise relativ prim sind, zurückführen. Z.B.

$$6 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid n \,\text{und}\, 3 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid a_0 \,\text{und}\, 3 \mid \sum_{i=0}^{k} a_0$$

5.3 Durchführung

5.3.1 Durchführung der Unterrichtseinheiten in der Versuchsklasse

1.Einheit Am Montag, den 17. Mai 2021 wurde in der Mathematikstunde in der 1d der Begriff Flipped Classroom auf die Tafel geschrieben. Die Kinder mussten raten, was das bedeutet. Gleich als 2. Antwort kam von einem Schüler: „Classroom bedeutet Klassenraum und Flipped heißt doch umgekehrt oder am Kopf stehend.“ Daraufhin durften die Kinder raten, was es heißt, dass wir in den nächsten Wochen den Unterricht „umgekehrt“ gestalten. Es wurden gute Ideen wie „die Schüler unterrichten die Lehrer“ genannt, aber der Begriff musste trotzdem von der Lehrperson eingeführt und erklärt werden. Danach wurde gefragt, wer schon öfters ein Youtube-Video angesehen hat. Das haben schon fast alle Kinder der Klasse, jedoch stellte sich heraus, dass diese meistens nur nebenbei ohne direkter Aufmerksamkeit angesehen werden. Deshalb wurden Regeln für das effektive Schauen von Lernvideos gelernt, indem ein Video zum Thema Origami-Schmetterling-falten angeschaut wurde. Es wurde schnell klar, dass das einmalige Schauen des Videos ohne Stoppen nicht genügt. Die Regeln wurden nach dem Falten noch einmal gemeinsam zusammengefasst. Danach wurde der 1. Hausübungszettel ausgeteilt und eingeklebt. Nun wurde nur noch ein QR-Code-Scanner am Smartphone installiert und ausprobiert, ob das Video so geöffnet werden kann. Zur Sicherheit wurde das Video am Nachmittag auch noch mittels Edupage-Nachricht ausgeschickt. Die Hausübungsanweisung lautete: „Schaue dir folgendes Video aufmerksam an und versuche den Lückentext auszufüllen. Wenn du den Lückentext noch nicht verstehst, musst du dir das Video (oder Teile davon) noch einmal anschauen.“

2. Einheit Am Mittwoch, den 19. Mai 2021 wurde am Anfang der Stunde gleich kontrolliert, wer die Hausübung erledigt hat und wer nicht. 21 von 22 beim Projekt mitmachende Schülerinnen und Schüler haben das Video angeschaut und den Lückentext ausgefüllt. 2 Schüler haben sogar eine Fleißaufgabe gemacht, und alles im Video Besprochene aufgeschrieben. Einige sagten, dass das Video schwer war und dass sie noch nicht alles verstanden haben, jedoch wurde das nach dem Vergleichen des Lückentextes klarer. Danach wurde der 1. Übungszettel ausgeteilt und die Kinder durften selbstständig üben. Leider durfte in der Klasse (außer bei Tischpartner) auf Grund der 2-Meter-Regelung die Methode des Peer-Tutorings nicht angewandt werden. Die Übungsphase verlief ganz entspannt und Viele konnten den Zettel fast alleine lösen. Den schwächeren Schülerinnen und Schülern musste jedoch immer wieder geholfen werden. Die Schnelleren konnten am Ende der Einheit schon mit dem Hausübungszettel 2 beginnen.

3. und 4. Einheit Am Donnerstag, den 20. Mai 2021, und Mittwoch, den 26. Mai 2021, wurde zuerst die Hausübung verglichen und etwaige Fragen geklärt. Es haben sich 20 von 22 Kinder das Video angesehen und die Hausübung dazu erledigt. Später wurde der 1. Übungszettel ausgeteilt, woran die Kinder dann in Eigenarbeit arbeiteten. Wenn eine Schülerin oder ein Schüler mit der Übung fertig war, wurde ihr / ihm der nächste Übungszettel ausgeteilt. Nach den 2 Einheiten hatten fast alle die 3 vorgesehenen Arbeitsblätter fertig, manche erledigten sogar das Zusatzblatt. Am Ende der zweiten Einheit wurde die neue Hausübung zum Thema Primzahlen ausgeteilt.

5. Einheit Am Donnerstag, den 27.Mai 2021, hat sich am Anfang der Mathematik-Einheit gezeigt, dass alle Schülerinnen und Schüler das Hausübungsvideo angeschaut und auch verstanden haben. Es konnten alle dem Video folgen und anhand des Sieb des Eratosthenes alle Primzahlen bis 100 herausfiltern. Zum Verinnerlichen der Primzahlen wurden die Primzahlen gemeinsam sehr oft wiederholt, sodass jedes Kind die Primzahlen bis 30 auswendig konnte. Als Sicherung bekam noch jedes Kind einen Zettel, auf welchem sie die Primzahlen verbinden mussten, damit eine Figur entsteht. Am Ende der Einheit wurden noch einmal die Teilbarkeitsregeln wiederholt und das nächste Hausübungsvideo erklärt.

6.Einheit Am Montag, 31. Mai 2021, haben die Schülerinnen und Schüler am Beginn der Einheit rückgemeldet, dass sie das Video sehr gut verstanden haben, und dass es keine Fragen dazu gibt. 2 Kinder haben sich jedoch das Video nicht angeschaut. Es wurden zu Beginn gemeinsam ein paar Beispiele an der Tafel gerechnet, damit auch die schwächeren Kinder einen guten Zugang zum Thema finden. Danach wurde der Übungszettel ausgeteilt, damit die Lernenden ihr Wissen selbst überprüfen können. Viele haben die Primfaktorenzerlegung sehr schnell verstanden und konnten selbstständig sehr zügig Fortschritte machen. Manche jedoch brauchten ständige Hilfe und man merkte, dass der neue Stoff noch nicht gefestigt ist. Wenn die Primfaktorenzerlegung noch nicht ausreichend geübt wurde, macht es jedoch keinen Sinn, zu ggT und kgV weiter zu gehen. Deswegen wurde am Ende der Einheit noch nicht das neue Hausübungsblatt ausgeteilt, sondern sie bekamen vom derzeitigen Übungszettel noch eine Hausübung zum Thema Primfaktorenzerlegung.

7. Einheit Am Mittwoch, 2. Juni 2021, haben leider 6 Personen die Hausübung nicht erledigt. Trotzdem war die Leistung beim weiteren Üben der Primfaktorenzerlegung ganz gut. In den letzten 15 Minuten der Einheit wurde noch mit dem Thema ggT begonnen. Es wurde erklärt, dass es zwei verschiedene Methoden gibt, wobei die erste darin besteht, alle

Teiler aufzuschreiben und dann die gemeinsamen bzw. den größten gemeinsamen Teiler zu finden. Gemeinsam wurden an der Tafel ein paar Beispiele gerechnet. Zum Schluss kam die Erkenntnis, dass diese Methode bei sehr großen Zahlen nicht mehr praktisch ist. Deswegen wurde der nächste Hausübungszettel ausgeteilt, damit die Schülerinnen und Schüler im neuen Video lernen, wie der größten gemeinsamen Teiler anhand der Primfaktorenzerlegung berechnet werden kann.

8. Einheit Am Montag, 7. Juni 2021, beklagten sich die Kinder sofort, dass die Hausübung sehr schwierig war. Es wurde ihnen jedoch im Vorhinein schon gesagt, dass dieses Hausübungs-Textbeispiel ein Profi-Beispiel ist und es nicht tragisch ist, falls sie es nicht ganz schaffen. Sehr erfreulich war, dass sich alle das Video angeschaut haben. Das Textbeispiel und noch zwei weitere ggTs wurden dann an der Tafel gemeinsam gerechnet. Später wurde der Übungszettel ausgeteilt und die Schülerinnen und Schüler rechneten selbstständig. Manche begriffen das Thema sehr schnell und konnten den Zettel ohne Hilfe rasch berechnen. Andere waren auf die Hilfe der Lehrperson angewiesen und schafften nur ein paar wenige Beispiele vom Zettel. Obwohl geplant war, dass am Ende der Einheit schon der letzte Hausübungszettel mit Video-QR-Code ausgeteilt wird, wurde spontan entschlossen, dass noch eine Übestunde zum Thema ggT notwendig ist. Deshalb war die neue Hausübung bis Mittwoch nur, den Übungszettel fertig zu machen.

9. Einheit Am Mittwoch, 9. Juni 2021, machten bis auf 2 Kinder alle den Übungszettel fertig. In der Einheit wurde ein Wettbewerb zum Thema ggT gemacht, wobei die 5 schnellsten Schülerinnen und Schüler ein Mitarbeitsplus sammeln konnten, falls sie alles richtig gerechnet haben. Manche Lernenden waren so schnell, dass sie noch einen weiteren Übungszettel zur Wiederholung der Teilbarkeitsregeln bekamen. Am Ende der Einheit hat das Berechnen des ggTs schon sehr gut funktioniert, weshalb danach der letzte Hausübungszettel erklärt und ausgeteilt wurde.

10. und 11. Einheit Am Donnerstag, den 10. Juni 2021, erzählten die Kinder am Anfang der Doppelstunde, dass das letzte Video das schwierigste von allen war und dass „das mit dem Einkreisen“ noch nicht klar ist. Bis auf eine Person haben sich alle das Video angesehen. Es wurde das Hausübungsbeispiel an der Tafel gerechnet, damit die Frage geklärt werden konnte. Darauffolgend wurden noch 3-4 Beispiele gemeinsam berechnet, um bei der Übungsphase zu viele Unklarheiten zu vermeiden. Die Übungsphase mit dem Übungszettel zu kgV hat sehr gut funktioniert - die Schülerinnen und Schüler konnten sich hervorragend konzentrieren und verstanden das Thema schnell. In der 2. Einheit wurde ihnen noch ein Übungszettel als Wiederholung des ganzen Stoffes und als Übung für den Kompetenzcheck ausgeteilt. Jedes Kind konnte üben, was es will und wo es noch am meisten Unterstützung brauchte.

12.Einheit Am Montag, den 14.Juni 2021, wurde am Beginn der Einheit ein QR-Code ausgeteilt, der zum Online-Fragebogen führt. Die Schülerinnen und Schüler führten dann sofort mit dem Handy die Befragung durch. Zum Abschluss des Projekts schrieben die Kinder den Kompetenzcheck. Die zwei fehlenden Kinder holen den Check in den nächsten Tagen nach.

5.3.2 Durchführung der Unterrichtseinheiten in der Kontrollklasse

1. Einheit Am Mittwoch, den 26. Mai 2021, wurde auch in der 1c mit dem Projekt begonnen. In den letzten 20 Minuten der Einheit konnten die Begriffe Teiler und Vielfache erklärt werden und es wurde auch noch der Merksatz zum Thema Teiler ins Schulübungsheft geschrieben.

2. Einheit Am Donnerstag, den 27.Mai 2021, wurde mit der Wiederholung und Übung von Teilern begonnen. Danach wurde der Merksatz zu den Vielfachen in das Schulübungsheft übertragen. Nach ein paar weiteren gemeinsamen Übungen an der Tafel wurde das 1. Arbeitsblatt ausgeteilt. Für die Kinder war es sehr schwierig, weshalb nach kurzer Zeit wieder ins Plenum zurück gewechselt wurde. Als Hausübung bekamen die Schülerinnen und Schüler ein paar wenige Übungen zu Teiler und Vielfache.

3. Einheit Am Dienstag, 1. Juni 2021, wurde zuerst die Hausübung verglichen und ausgebessert, wobei 4 Kinder die Hausübung nicht erledigt haben. Dann begann die Teilbarkeitsregeln-Suche mit den Arbeitsblättern. An diesem Tag wurden die Regeln für die Teilbarkeit durch 2, 5, 10, 100 und 1000 durchgenommen und geübt. Der neue Stoff wurde sehr schnell verstanden. Für die Hausübung malten wir eine Tabelle, in der die Teilbarkeiten zu Hause eingetragen werden sollen.

4. Einheit Am Dienstag, den 8. Juni 2021, hatten leider nur 8 Lernende die Hausübung gemacht. Als Vertiefung und Sicherung der Teilbarkeitsregeln, Vielfache und Teiler wurde noch das 3. Übungsblatt zum Thema gemeinsam bearbeitet. Danach bekamen die Kinder einen Zettel mit dem Sieb des Eratosthenes und es wurden gemeinsam die Primzahlen bis 100 erarbeitet. Es kamen viele Fragen zur größten Primzahl und allgemein zur Geschichte der Mathematik. Als Hausübung müssen die Schülerinnen und Schüler die Primzahlen bis 30 auswendig lernen.

5. Einheit Am Mittwoch, den 9. Juni 2021, konnten einige Kinder die Primzahlen von 1 bis 30 auswendig. Manche haben diese jedoch noch nicht gelernt. Trotzdem wurde das neue Thema Primfaktorenzerlegung begonnen. Es wurde ins Heft eine Schritt-für-Schritt-Anleitung eingetragen und gemeinsam an der Tafel die ersten Beispiele gerechnet. Als schon erste Fortschritte zu sehen waren, wurde der Übungszettel ausgeteilt und die Kinder übten selbstständig in Einzelarbeit. Als Hausübung sollten die Schülerinnen und Schüler an diesem Zettel weiterarbeiten.

6. Einheit Am Donnerstag, den 10. Juni 2021, hatten leider wieder nur 7 Kinder die Hausübung gemacht. Einige Schülerinnen und Schüler meinten, sie konnten die Hausübung nicht machen, weil sie das Thema noch nicht verstanden haben. Deswegen wurde die Hausübung an der Tafel verglichen und erklärt. Später hatten die Kinder Zeit, selbstständig mithilfe der Lehrpersonen zu üben. Für Manche ist dieses Thema sehr einfach, für Andere sehr kompliziert und schwierig, deshalb wurde noch nicht mit dem neuen Thema angefangen, sondern die Lernenden bekamen noch einmal eine Hausübung zum Thema Primfaktorenzerlegung.

7.Einheit Am Montag, den 14. Juni 2021, wurde am Beginn der Einheit noch kurz die Primfaktorenzerlegung wiederholt. Danach wurde ein Übungszettel zum Thema ggT ausgeteilt. Dabei wurde die 1. Berechnungsmethode erklärt. Gleichzeitig wurde das Thema Teiler wiederholt, weil zum Bestimmen des ggTs von beiden Zahlen die Teiler aufgezeichnet werden müssen, damit dann der größte gemeinsame Teiler gefunden und eingekreist werden kann.

8. Einheit Am Mittwoch, den 16. Juni 2021, hatten die Hausübung wieder nur 10 Schülerinnen und Schüler gemacht. Die ganze Einheit war dazu da, den ggT zu üben und zu vertiefen.

9. Einheit Am Donnerstag, den 17. Juni 2021, wurde in der ersten Hälfte der Einheit ein Wettbewerb zum Sammeln von Mitarbeitsplus und zur Wiederholung des bisher Gelerntem veranstaltet. In der zweiten Hälfte wurde mit dem Thema kgV begonnen. Am Anfang wurde die 1. Berechnungsmethode (mittels der Auflistung der Vielfache beider Zahlen) erklärt und angewandt. Bei größeren Zahlen kamen die Kinder zur Erkenntnis, dass diese Methode sehr mühsam werden kann. Deswegen wurde die Methode mit der Primfaktorenzerlegung erklärt und eine Schritt-für-Schritt-Anleitung ins Schulübungenheft eingetragen. Als Hausübung müssen die Schülerinnen und Schüler einen Übungszettel zur Wiederholung der Teilbarkeitsregeln machen.

10.Einheit Am Montag, den 21. Juni, 2021, hatten 9 Lernende die Hausübung. In dieser Stunde wurde die Definition des kgV wiederholt und die Berechnung geübt. Die Kinder durften nach einer kurzen Phase im Plenum selbstständig üben.

11. Einheit Am Dienstag, den 22. Juni 2021, hatten, bis auf 2 Kinder, alle die Hausübung abgegeben. In dieser Einheit wurde das kgV und ggT mithilfe eines Tafelrechnens wiederholt. So konnten die Schülerinnnen und Schüler zeigen, dass sie das Gelernte schon gut beherrschen und ein Plus verdienen. Grundsätzlich wurde der Stoff ganz gut verstanden, nur bei der Vermischung der Aufgaben zu ggT und kgV waren einige Verwechslungen sichtbar. Als Hausübung müssen die Lernenden einen zusammengestellten Übungszettel für den Kompetenzcheck ausfüllen.

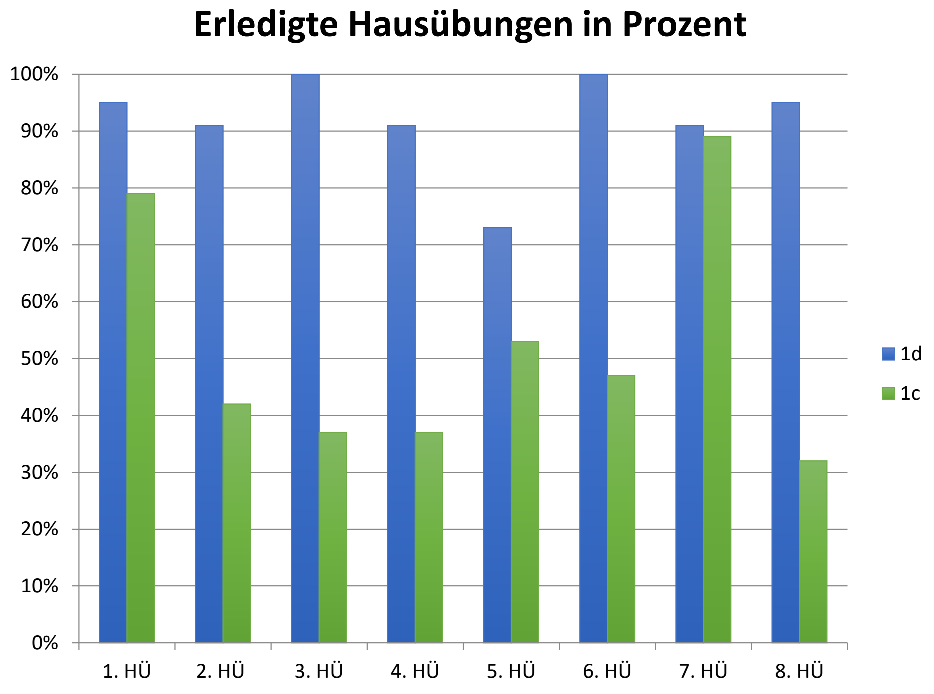
12.Einheit Am Mittwoch, den 23. Juni 2021, wurde in Form eines Stationenbetriebes noch einmal alles geübt, was für den Kompetenzcheck notwendig ist. Die Hausübung haben wieder nur 6 Kinder abgegeben.

13. Einheit Am Donnerstag, den 24. Juni 2021, wurde am Beginn der Einheit der Online-Fragebogen ausgefüllt und gleich danach der Kompetenzcheck absolviert. Somit war das Projekt nun abgeschlossen.

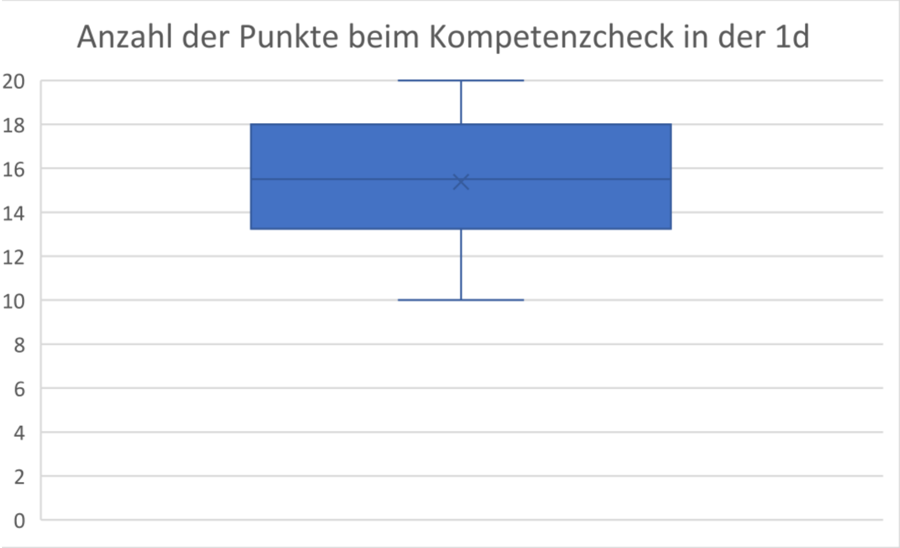
Kapitel 6

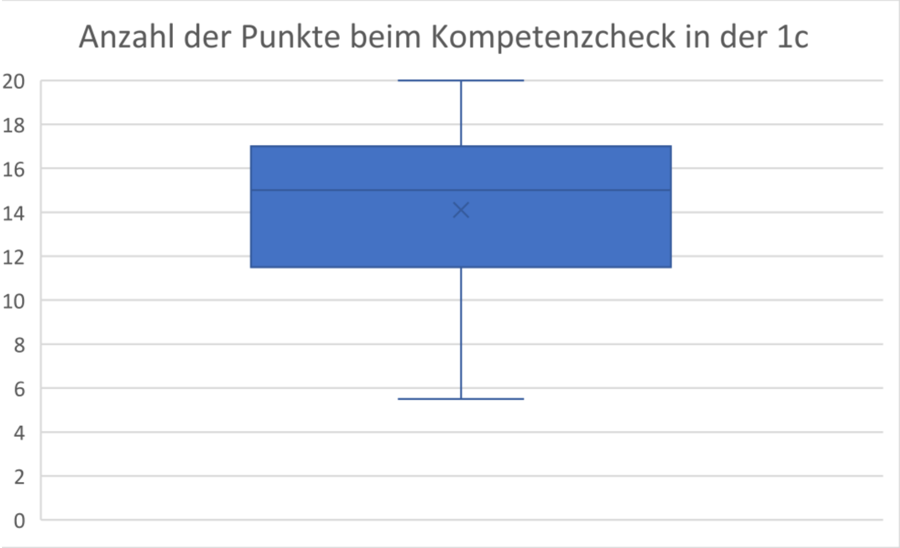
Auswertung der Studie

Analyse der Anzahl der erledigten Hausübungen In der folgenden Graphik kann eindeutig abgelesen werden, dass die Hausübungenmoral in der Versuchsklasse (1d) sehr viel höher ist, als in der Kontrollklasse (1c). Im Durchschnitt wurde eine Hausübung in der 1d von 92 % der Schülerinnen und Schüler erledigt, in der 1c nur von 52 %.



Auswertung des Kompetenzchecks Beim Vergleich der erzielten Punkte beim Kompetenzcheck kann eindeutig erkannt werden, dass die Versuchsklasse besser abschnitt als die Kontrollklasse. Bei den folgenden Boxplots wird angezeigt, dass in der 1d nicht weniger als 10 Punkte erreicht wurden, das heißt, alle Kinder haben positiv abgeschnitten. In der 1c war das schlechteste Ergebnis 5,5 von 20 möglichen Punkten. Im Durchschnitt haben die Lernenden der 1d 15,4 Punkte erreicht, und die aus der 1c nur 14,1 Punkte - also um 1,3 Punkte weniger. Im Boxplot wird auch deutlich, dass die Streuung/Standardabweichung in der Versuchsklasse mit $\sigma = 2,37$ kleiner als in der Kontrollklasse mit $\sigma = 2,95$ ist.





Diskussion der Ergebnisse Es haben 21 Schülerinnen und Schüler der Kontrollklasse den Online-Fragebogen ausgefüllt. 67 % haben angegeben, dass ihnen das Projekt mit dem Flipped Classroom sehr gut gefallen hat, 24 % hat es nicht gefallen. Weitere 62 % fanden die langen eigenständigen Übungsphasen hervorragend, wobei wieder 19 % einen Unterricht im Plenum besser fänden. Grundsätzlich geben in der 1d alle außer ein Schüler an, dass sie die Hausübung regelmäßig gemacht haben. Der Grund dafür ist sehr verschieden - zum Teil weil es ihnen Spaß macht, zum Anderen weil sie es müssen. Die Frage, ob die Kinder für die Hausübungen in diesem Projekt mehr Zeitaufwand hatten, als bei „normalen“ Hausübungen war sehr ausgeglichen, denn 29 % behaupten, dass sie mehr Zeit investierten, 29 % behaupten, dass sie weniger Zeit brauchten und die restlichen 42 % meinen, dass sie gleich viel Zeit als normalerweise investierten. Das zeigt, dass die

Wissensvermittlung zu Hause den Vorteil hat, dass sich jedes Kind das Wissen im eigenen Tempo aneignen kann, was natürlich für langsamere Kinder einen großen Nutzen bringt. Mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler haben die Hausübungsvideos sehr gut gefallen, jedoch wird mit 33 % die Möglichkeit des erneutem Anschauens des Videos nicht sehr geschätzt. Außerdem geben auch 33 % aller Kinder an, dass ihnen die Videos nicht gefallen haben und 14 %, dass ihnen die eigenständigen Übungsphasen nicht imponieren. Im Fragebogen zeigte sich das Ergebnis, dass 71 % der Kinder schätzen, dass sie das Gelernte schon ganz gut beherrschen und 57 % denken auch, dass sie durch den Flipped Classroom mehr gelernt haben, als in vorherigen Unterrichtsmethoden. Nur 3-4 Schülerinnen und Schüler gaben an, dass sie den Stoff noch nicht gut beherrschen bzw. dass sie ohne Flipped Classroom besser lernen könnten.
Der Spaßfaktor ist in der Schule sehr wichtig, weshalb auch mehr als die Hälfte der Kinder angaben, dass sie im Mathematikunterricht durch den Flipped Classroom mehr Spaß hatten als vorher. Deshalb meinen auch 62 % der Lernenden, dass die Methode des Flipped Classroom in der Schule öfters angewandt werden sollte, jedoch sind auch 19 % dagegen.

In der Kontrollklasse haben auch 75 % der Schülerinnen und Schüler angegeben, dass ihnen der Unterricht zum Thema Teiler, Vielfache, ggT und kgV sehr gut gefallen hat. Es gibt keine Kinder, die behaupten, der Unterricht würde ihnen nicht gefallen. In der 1c wurden trotz normalen Unterricht sehr viele eigenständige Übephasen eingebaut, das 88 % der Lernenden sehr ansprechend fanden. Es gaben 81 % der Schülerinnen und Schüler an, die Hausübung oft bzw. immer gemacht zu haben, jedoch ist hier zu erkennen, dass die Selbsteinschätzung nicht immer mit den Aufzeichnungen der Lehrperson übereinstimmt. Ebenfalls gab nur eine Person an, den Stoff noch nicht gut zu beherrschen, und 88 % sind der Meinung, sie können das Gelernte schon ausreichend. Auch hier zeigte sich beim Kompetenzcheck ein abweichendes Ergebnis.

Die Studie zeigt eindeutig, dass die Klasse, in welcher der Flipped Classroom durchgeführt wurde, mehr Hausübungen erledigte und mehr Punkte am Kompetenzcheck erreichte, als die Klasse ohne Flipped Classroom. Das spricht sehr für die Methode des Umgedrehten Klassenraums, wobei ehrlicherweise erwähnt werden muss, dass auch vor dieser Studie die Hausübungenmoral in der Versuchsklasse besser war, als in der Kontrollklasse. Sollte diese Studie signifikante Ergebnisse zeigen, hätte zuvor eine Analyse der Hausübungen erstellt werden müssen, welche verglichen wird, mit den erbrachten Hausübungen während der Zeit im Flipped Classroom. Was sich jedoch sehr Positiv für die Methode des Flipped Classroom zeigt, ist, dass die Schülerinnen und Schüler der Versuchsklasse angaben, mehr Spaß im Unterricht gehabt zu haben, als bei anderen Unterrichtsformen und generell, dass sie gerne öfters im Flipped Classroom unterrichtet werden möchten. Obwohl die Selbsteinschätzung nicht unbedingt zum Thema dieser Studie zählt, ist es äußerst erstaunlich, dass sich die Kinder der Kontrollklasse selber besser einschätzen als die Kinder der Versuchsklasse, obwohl sich dies nicht im Kompetenzcheck spiegelt. Das Ergebnis dieser Studie könnte ein wenig neutralisiert sein, weil in der Versuchsklasse die selbstständige Übezeit in der

Schule auch ohne Flipped Classroom sehr hoch war und für dieses Stoffgebiet zwei Einheiten mehr aufgewandt wurden, als in der Kontrollklasse. Es konnte jedoch nicht anders gestaltet werden, da die Kinder ohne die Erledigung der Hausaufgabe und ohne Übezeit in der Schule den gelernten Stoff nicht ausreichend beherrschen könnten. Es könnte auch argumentiert werden, dass in der 1c eine Stunde mehr nötig war, weil in der Schule die Zeit für das Einschreiben der Merktexte aufgewandt werden musste, und somit weniger Übezeit übrig blieb. Um zu zeigen, dass diese Studie reliabel ist, müsste sie umfassender sein, das heißt, mehrere Klassen und Projekte einschließen oder zu verschiedenen Themenbereichen durchgeführt werden. Interessant ist auch der Fakt, dass die Schülerinnen und Schüler in der Mittelschule diesen Vorteil des Wiederholens des Videos für die Vorbereitung auf eine Prüfung nicht schätzen, denn nur ein Drittel aller Kinder haben diesen Aspekt als Stärke des Flipped Classroom angekreuzt. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Schülerinnen und Schüler beim Lernen mittels Flipped Classroom mehr Spaß haben als ohne. Sie zeigt auch, dass die Lernenden der Versuchsklasse den Stoff besser vertiefen konnte, jedoch ist dieses Teilergebnis (aufgrund oben genannter Gründe) mit Vorsicht zu genießen.

Kapitel 7

Resumee

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Flipped Classroom eine hervorragende Unterrichtsmethode ist, die den Schülerinnen und Schülern Spaß macht, Abwechslung mit sich bringt und die Lernenden aktiv werden lässt. Im Unterricht war mehr Zeit für individuelle Hilfen und für differenzierte Aufgaben. Sämtliche Studien und Literaturangaben der Theorie im ersten Teil der Arbeit beziehen sich auf „higher education“ und nicht auf die Mittelschule, wie in dieser durchgeführten Studie [8]. Außerdem gibt es zum Flipped Classroom generell noch nicht ausreichend breit durchgeführte Studien [17]. Diese Studie der vorliegenden Arbeit kann ebenfalls keine signifikante positive Auswirkung auf den Lernfortschritt und Lernerfolg nachweisen, jedoch zeigt sie auch nichts Gegenteiliges auf. Die Schülerinnen und Schüler nahmen die neue Unterrichtsform ideal an, arbeiteten engagiert mit, eigneten sich Wissen eigenständig durch die Hausübungenvideos an und lernten nicht schlechter als zuvor. Ob die Motivation und der Spaßfaktor aufgrund des Flipped Classroom oder der neuen - und deshalb wieder interessanten - Methode stieg, bleibt auch nach dieser Masterarbeit noch offen. Trotz allem, ist Flipped Classroom zweifelsohne eine Unterrichtsform, die sehr qualitätsvoll gestaltet werden kann, wenn sie richtig eingesetzt wird. Als alleinige Unterrichtsmethode wird Flipped Classroom nicht genügen, aber für zwischendurch beziehungsweise für gewisse Themen ganz gewiss empfehlenswert.

Literaturverzeichnis

[1] Bauer Thomas *Analysis - Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik - sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierter Lösung. Springer, Wiesbaden, 2013.*

[2] Baxa Christoph *Vorlesung Zahlentheorie. Eine Mitschrift von Felix Leditzky, 2008.*

[3] Belmonte Juses Lopez, Cabrera Arturo Fuentes, Nunez Juan Antonio Lopez, Sanchez Santiago Pozo. *Formative Transcendence of Flipped Learning in Mathematics Students ofSecondary Education. Mathematics, 7 (1226), 2019.*

[4] Benölken Ralf, Gorski Hans-Joachim, Müller-Philipp Susanne. *Leitfaden Arithmetik. Für Studierende der Lehrämter, Springer, Wiesbaden, 2018.*

[5] Bergmann Jonathan, Sams Aaron. *Flipped Learning: Gateway to Student Engagement. International Society for Technology in Education, United States of America, 2014.*

[6] Bergmann Jonathan, Sams Aaron. *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day.International Society for Technology in Education, United States of America, 2012.*

[7] Beutelspacher Albrecht, Danckwerts Rainer, Nickel Gregor, Spies Susanne, Wickel Gabriele. *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Univeritäten. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011.*

[8] Brewer Robin, Movahedazarhouligh, S. *Successful stories and conflicts: A literature review on the effectiveness of flipped learning in higher education. Journal of Computer Assistes Learning, 34 (409-416), 2018.*

[9] Bruder Regia, Hefendehl-Hebeder Lisa, Schmidt-Thieme Barbara, Weigand Hans-Georg (Hrsg.). *Handbuch der Mathematikdidaktik. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2015.*

[10] Bundschuh Peter. *Einführung in die Zahlentheorie. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.*

[11] Deliorman Hasret. *Kooperatives Lernen im Schulunterricht. Grundelemente, Ziele, Methoden und Handreichung. GRIN Verlag, Norderstedt, 2009.*

[12] Forster Otto. *Analysis 1. Differntial- und Integralrechnung einer Veränderlichen, Friedr. Vieweg Sohn Verlag, Wiesbaden, 2008.*

[13] Gehrke Jan Peter. *Brückenkurs Mathematik. Fit für Mathematik im Studium. Walter de Gruyter, Berlin/Boston, 2016.*

[14] Gilboy Mary Beth, Heinerichs Scott, Pazzaglia Gina. *Enhancing Student Engagement Using the Flipped Classroom. Journal of Nutrition Education and Behavior, 47(1), 2015.*

[15] Greefreth Gilbert, Oldenburg Reinhard, Siller Hans-Stefan, Ulm Volker, Weigand Hans-Georg. *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2016.*

[16] Humenberger Hans, Schuppar Berthold. *Mit Funktionen Zusammenhänge und Veränderungen beschreiben. Springer-Verlag, Berlin, 2019.*

[17] Kauffeld Simone, Othmer Julius. *Handbuch Innovative Lehre, Springer, Wiesbaden, 2019.*

[18] Klein Kerstin. *Unterrichtsmethoden klipp und klar : Praxishandbuch individuelles, gemeinsames und kooperatives Lernen (5. bis 10. Klasse). AOL-Verlag, Hamburg, 2013.*

[19] Malle Günther, Koth Maria, Woschitz Helge, Malle Sonja, Salzger Bernhard, Ulovec Andreas. *Mathematik Verstehen 7. ÖBV, Wien, 2011.*

[20] Malle Günther, Koth Maria, Woschitz Helge, Malle Sonja, Salzger Bernhard, Ulovec Andreas. *Mathematik Verstehen 8. ÖBV, Wien, 2012.*

[21] Müller-Stach Stefan, Piontkowski Jens. *Elementare und algebraische Zahlentheorie. Ein moderner Zugang zu klassischen Themen. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011.*

[22] Padberg Friedhelm, Büchtner Andreas. *Vertiefung Mathematik Primarstufe - Arithmetik/Zahlentheorie. Springer, Berlin Heidelberg, 2015.*

[23] Pampel Thorsten. *Arbeitsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Springer-Verlag, Berlin, 2017.*

[24] Remmert Reinhold, Ullrich Peter. *Elemtentare Zahlentheorie. Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 1995.*

[25] Slemmons Krista, Anyawu Kele, Hames Josh, Grabski Dave, Mlsna Jeffery, Sikins Eric, Cook Perry. *The Impact of Video Length on Learning in a Middle-Level Flipped Science Setting: Impilcations for Diversity Inclusion. Journal of Science Education and Technology, 27 (469-479), 2018.*

[26] Steinbauer Roland. *Vorlesung: Schulmathematik Analysis, Wintersemester 2018/19.*

[27] Subramaniam Suwarna Rani, Muniandy, Balakrishnan. *The Effect of Flipped Classroom on Sudents´Engagement. Tech Know Learn, 24 (355-372), 2017.*

[28] Vollrath Hans-Joachim, Roth Jürgen. *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg, 2012.*

[29] Werner Julia, Ebel Christian, Spannagel Christian, Bayer Stephan (Hrsg.). *Flipped Classroom - Zeit für deinen Unterricht. Praxisbeispiele, Erfahrungen und Handlungsempfehlungen. Bertelsmann Stiftung, Gütersloh, 2018.*

[30] Wiechmann Jürgen, Wildhirt Susanne. *12 Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis. Beltz Verlag, Weinheim, 2016.*

Kapitel 8

Anhang

Kompetenzcheck Versuchsklasse

14. Juni2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Donart

Nr. | **Kompetenzen**

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

- ☒ ✓12 ist ein Vielfaches von 4
- ☐ ✓12 ist ein Teiler von 3
- ☐ ✓V_{10}={1,2,5,10}
- ☒ ✓V_7={7,14,21,28,..}
- ☐ ✓Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
- ☒ ✓Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

6

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

6

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf: 2, 3, 5, 7 , 11, 13, 17, 19, 23, 29 ✓

2

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75) = 3 · 5 = 15 ✓

45 | 3
15 | 3
5 | 5
1 ✓

75 | 3 ✓
25 | 5 ✓
5 | 5
1 ✓

b) kgV(24, 30) = 2 · 2 · 3 · 2 · 5 = 120 ✓

24 | 2
12 | 2
6 | 3
2 | 2
1 ✓

30 | 2 ✓
15 | 3 ✓
5 | 5
1 ✓

120

6

20/20

14. Juni2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: PAVLE

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Kreuze die richtigen Aussagen an** ☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4 ☐ ✓ 12 ist ein Teiler von 3 ☒ V$_{10}$={1,2,5,10} ☒ ✓ V$_7$={7,14,21,28,..} ☐ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	5
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**	6
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** ✓ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, [illegible], 29 ✓	2
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:** a) ggT(45,75) 3 · 5 = 15 ✓ b) kgV(24, 30) 2 · 2 · 2 · 3 · 5 = 120 ✓	6

Tabelle zu 2.:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

Rechnung zu 4. a):

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

✓ ✓

Rechnung zu 4. b):

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

✓ ✓

19/20

14. Juni 2021 | **Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV** | **NAME:** Isabel

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Kreuze die richtigen Aussagen an** ☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4 ☐ 12 ist ein Teiler von 3 ☐ ✓ V_{10}={1,2,5,10} ☒ ✓ V_7={7,14,21,28,..} ☐ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	5
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**	5
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** ~~1~~,2 3,~~5~~ 7,~~9~~,11, 13,~~17~~,19,23,~~27~~, 29 (5 and 17 written above)	0
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:** a) ggT(45,75) b) kgV(24, 30)	0

Tabelle zu Nr. 2:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓			| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

Nr. 4:

a) ggT(45,75)

~~45 \| 9~~
~~5 \| 3~~
~~1 \| 2~~

~~75 \| 16~~
~~5 \| 8~~
~~1 \| 2~~

~~3.2=6~~

b) kgV(24, 30)

~~24 \| 7 2~~
~~4 \| 2~~
~~2 \| 2~~
~~1~~

~~30 \| 6 2~~
~~5 \| 3~~
~~2 \| 2~~
~~1~~

~~2.7.6.2.2.3=160~~

10/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Gabriel

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Kreuze die richtigen Aussagen an**	2
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**	6
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**	1,5
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**	3,5

1. Kreuze die richtigen Aussagen an

☑ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4
☑ 12 ist ein Teiler von 3
☑ V_{10}={1,2,5,10}
☒ ✓ V_7={7,14,21,28,..}
☑ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
☑ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

2

2. Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

6

3. Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ✓

1,5

4. Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \checkmark \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \checkmark$$

b) kgV(24, 30)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \checkmark$$

3,5

13|20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Merima

Nr.	Kompetenzen	

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

- ☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4
- ~~☒~~ 12 ist ein Teiler von 3
- ☐ ✓ V_{10}={1,2,5,10}
- ☒ ✓ V_7={7,14,21,28,..}
- ☐ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
- ☑ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

5

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

6

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ✓

2

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75) 3 · 5 = 15 ✓

45 | ③
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

75 | ③
25 | ⑤
5 | 5
1 ✓

b) kgV(24, 30) 2 · 2 · 2 · 3 · 5 = 120 ✓

24 | ②
12 | ②
6 | ②
3 | ③
1 ✓

30 | 2 ✓
15 | 3 ✓
5 | ⑤
1 ✓

6

19/20

14. Juni 2021 **Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV** **NAME:** Lejla

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Kreuze die richtigen Aussagen an**	1

☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4
☐ 12 ist ein Teiler von 3
☐ V_{10}={1,2,5,10}
☒ V_7={7,14,21,28,..}
☐ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
☒ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

Nr.	Kompetenzen	
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**	6

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

Nr.	Kompetenzen	
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**	0,5

2, 3, 5, 7, 13, 17, 23, 29, ~~30~~
11 19

Nr.	Kompetenzen	
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**	6

a) ggT(45,75)

45 | 3
15 | 3
5 | 5
1 ✓

75 | 3
25 | 5
5 | 5
1 ✓

ggT(45,75) = 3·5 = 15 ✓

b) kgV(24, 30)

24 | 2 ✓
12 | 2
6 | 2
3 | 3 ✓
1 ✓

30 | 2
15 | 3
5 | 5
1 ✓

kgV = 2·2·2·3·5 = 120 ✓

13,5/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck:
Teiler, Vielfache,
Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Günter C. M

Nr.	Kompetenzen	

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

- ☒ 12 ist ein Vielfaches von 4
- ~~☒~~ 12 ist ein Teiler von 3
- ~~☒~~ V_{10}={1,2,5,10}
- ☒ V_7={7,14,21,28,..}
- ☐ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
- ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

2

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

6

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2,3,5,7,~~9~~,11,13,17,19,23,29,31 ✓

1,5

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:.

a) ggT(45,75)

45 | 3
15 | 3
5 | 5
1 ✓

75 | 3
25 | 5
5 | 5
1 ✓

ggT(45,75)= 3.5=15 ✓

b) kgV(24, 30)

2.2.2.3.~~3~~.5 = 360

24 | ②
12 | ②
6 | ②
3 | ③
1 ✓

30 | 2 ✓
15 | ③ ✓
5 | ⑤
1 ✓

5,5

15/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck:
Teiler, Vielfache,
Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Üllem

Nr. **Kompetenzen**

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4
~~☒~~ 12 ist ein Teiler von 3
~~☒~~ V_{10}={1,2,5,10}
☒ ✓ V_7={7,14,21,28,..}
☐ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

4

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für ∣ oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	∣ ✓	∤ ✓	∣ ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	∣ ✓	∣ ✓	∣ ✓
5	∤ ✓	∣ ✓	∣ ✓	∤ ✓

6

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~27~~, 29, 31

0,5

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)

45 | ③
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

75 | ③
25 | ⑤
5 | 5
1 ✓

$ggT = 5 \cdot 3 = \underline{\underline{15}}$ ✓

b) kgV(24, 30)

24 | ②
12 | ②
6 | ②
3 | ③
1 ✓

30 | 2 ✓
15 | 3 ✓
5 | ⑤
1 ✓

$KgV = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{120}}$ ✓

6

14,5/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck:
Teiler, Vielfache,
Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Adam

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Kreuze die richtigen Aussagen an** ☒ ✓12 ist ein Vielfaches von 4 ☑ ✓12 ist ein Teiler von 3 ☑ ✓V_{10}={1,2,5,10} ☒ ✓V_7={7,14,21,28,..} ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl ☒ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	4
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**	4,5
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** 1, 3, 5, 7, 9, 13, 17, 19, 23, 29 ✓	2
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**	5

Tabelle zu 2.:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	~~∤~~	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	~~∤~~	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	~~∤~~	X ✓

Zu 4.:

a) ggT(45,75) = 3 · 5 = 15 ✓

45 | 3
15 | 3
5 | 5
1 ✓

75 | 3
25 | 5
5 | 5
1 ✓

b) kgV(24, 30) = ~~2 · 3 = 6~~

24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1 ✓

30 | 2
15 | 3
5 | 5
1 ✓

15,5/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Doris

Nr.	**Kompetenzen**	
1.	**Kreuze die richtigen Aussagen an** ☒✓ 12 ist ein Vielfaches von 4 ~~☒~~ ✓✗ 12 ist ein Teiler von 3 ☐ ✓ V_{10}={1,2,5,10} ☒ ✓ V_7={7,14,21,28,..} ☐ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	5
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:** (Tabelle unten)	6
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** 2, 3, 5, 7, 11, ~~13~~, 17, 19, 23, 29, ✓	2
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:** (Rechnung unten)	6

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

~~75~~ : 3 = ~~25~~

75

a) ggT(45,75) = 15 ✓

45 | ③
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

75 | ③
25 | ⑤
5 | 5
1 ✓

b) kgV(24, 30) = 120 ✓

24 | ②
12 | ②
6 | ②
3 | ③
1 ✓

30 | 2
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

19/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Stela

Nr.	Kompetenzen	

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

- ☒ 12 ist ein Vielfaches von 4(~~Falsch~~ richtig
- ☑ 12 ist ein Teiler von 3(Richtig) falsch
- ☒ V_{10}={1,2,5,10}(Falsch)✓
- ☑ V_7={7,14,21,28,..}(Richtig)✓
- ☒ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zah(Falsch)✓
- ☑ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl (Richtig)✓

4

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

5,5

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ✓

2

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)

45 | ③ 75 | ③
15 | 3 25 | ⑤
5 | ⑤ 5 | 5
1 ✓ 1 ✓

ggT(45,75) = 3·5 = 15 ✓

b) kgV(24, 30)

30 | ② 24 | 2 ✓
15 | ③ 12 | ②
5 | ⑤ ✓ 6 | ②
1 3 | 3 ✓
1 ✓

KgV(24,30) = 2·3·5·2·2 = 120 ✓

6

17,5/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Elion

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Kreuze die richtigen Aussagen an** ☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4 ☐ ✓ 12 ist ein Teiler von 3 ~~☒~~ V_{10}={1,2,5,10} ☒ ✓ V_7={7,14,21,28,..} ☐ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	5
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:** (table below)	3,5
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ~~27~~, ~~30~~ 29 ✓	1,5
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:** (below)	2

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	~~∤~~ X	~~∤~~ X	~~∤~~ X
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	~~∤~~ X	~~∤~~ X	∤ ✓

a) ggT(45,75) ∤

45 | 3 ✓
RF. 15 | 3
10 | 2
FF. 5 | 5
1 |

75 | ~~2~~
~~60~~ | 2
30 | 3
10 | 2
5 | 5
1 |

b) kgV(24, 30) ∤

24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1 | ✓

30 | 3
10 | 2
5 | 5
1 | ✓

12/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck:
Teiler, Vielfache,
Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Akraman Nakasteev

Nr. **Kompetenzen**

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

- ☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4
- ☒ 12 ist ein Teiler von 3
- ☐ ✓ V_{10}={1,2,5,10}
- ☒ ✓ V_7={7,14,21,28,..}
- ☒ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
- ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

3

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für ∣ oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	∣ ✓	∤ ✓	∣ ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	∣ ✓	∣ ✓	∣ ✓
5	∤ ✓	∣ ✓	∣ ✓	∤ ✓

6

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29 ✓

2

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)= 3·5= 15 ✓

45 | ③
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

75 | ⑤
15 | ③
5 | 5
1 ✓

b) kgV(24, 30)= 2·2·2·3·5
4 · 6 · 5 =
24 · 5 = 120 ✓
120

24 | ②
12 | ②
6 | ②
3 | ③
1 ✓

30 | 2
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

6

17/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Andrea

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Kreuze die richtigen Aussagen an** ☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4 ☐ ✓ 12 ist ein Teiler von 3 ☒ ✓ V_{10}={1,2,5,10} ☒ ✓ V_7={7,14,21,28,..} ☐ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	4
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:** (see table below)	3,5
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29 ✓	2
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:** a) ggT(45,75) = 15 ✓ b) kgV(24, 30) 2·2·2·3·5 = 120 ✓	6

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤	∤	∤
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	∤	∤	∤ ✓

a)

45 | 5
9 | 3
3 | 3
1
✓

75 | 3
25 | 5
5 | 5
1
✓

b)

24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1
✓

30 | 2 ✓
15 | 3 ✓
5 | 5
1
✓

15,5 / 20

14. Juni 2021 **Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV** **NAME:** Dejan

Nr. **Kompetenzen**

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

- ☒ ✓12 ist ein Vielfaches von 4
- ☐ ✓12 ist ein Teiler von 3
- ☒ V_{10}={1,2,5,10}
- ☒ V_7={7,14,21,28,..}
- ☒ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
- ☒ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl ✓

3

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für ∣ oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	∣ ✓	∤ ✓	∣ ✓	∤
3	∤ ✓	∣ ✓	∣ ✓	∣ ✓
5	∤ ✓	∣ ✓	∣ ✓	∤ ✓

5,5

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ~~30~~, ✓

1,5

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)

45	5
9	3
3	3
1	

✓

75	5
15	5
3	3
1	

✓

ggT(45,75)=2·3=6

b) kgV(24, 30)

kgV=~~360~~

24	3
8	2
4	2
2	2
1	

✓

30	5
6	2
3	3
1	

✓

Beginne mit der kleinsten Primzahl

4

14. Juni 2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Marvin W–

Nr. | **Kompetenzen**

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4
☐ ✓ 12 ist ein Teiler von 3
☒ V_{10}={1,2,5,10}
☒ V_7={7,14,21,28,..}
☒ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

3

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤	∤	| ✓	∤
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

4,5

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ~~22~~, ~~27~~, 29

∤ 23

1

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)

45 | 5
9 | 3
3 | 3
1
✓

~~75 | 5~~
~~13 | 13~~
~~1~~

ggt(45,75) ∤

b) kgV(24, 30)

24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1
✓

30 | 2 ✓
15 | 3 ✓
5 | 5
1

kgV(24,30) 2·2·2·3·5
4·12 /

Ff.

2,5

14. Juni 2021 | **Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV** | **NAME:** Sara

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Kreuze die richtigen Aussagen an** ☒✓ 12 ist ein Vielfaches von 4 ☒ 12 ist ein Teiler von 3 ☒ V_{10}={1,2,5,10} ☒✓ V_7={7,14,21,28,..} ☒ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl ☒ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	2
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für │ oder ∤ ein:**	6
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** P=(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~27~~, 29, ~~30~~	1
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**	2,5

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	│ ✓	∤ ✓	│ ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	│ ✓	│ ✓	│ ✓
5	∤ ✓	│ ✓	│ ✓	∤ ✓

a) ggT(45,75) = ~~5·3·3·5 = 225~~

5·3·3·5 ~~3·5 = 3375~~

45 | 5
9 | 3
3 | 3
1
✓

75 | 5
15 | 3
5 | 5
1
✓

b) kgV(24, 30) = 2·2·2·2·2·5 = 150 ff.

4 8 16 32

24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | ~~2~~
~~2~~ | ~~2~~
~~1~~

30 | 2
~~10~~ | 2
5 | 5
1

11,5 / 20

14. Juni2021	**Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV**	**NAME:**	constantin

Nr.	**Kompetenzen**	

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

☑ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4
☒ 12 ist ein Teiler von 3
☒ ✓ V_{10}={1,2,5,10}
☑ ✓ V_7={7,14,21,28,..}
☒ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
☑ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

4

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

6

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, 17, 19, 23, ~~27~~, 29 ✓

1

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75) 3 . 5 = 15 ✓

45 | ③
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

75 | ③
25 | ⑤
5 | 5
1 ✓

b) kgV(24, 30) 2 . 2 . 5 = ~~20~~

24 | ② ✓
12 | ②
6 | ②
3 | ③ ✓
1 ✓

30 | 2 ✓
15 | 3 ✓
5 | ⑤
1 ✓

5

16/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: EDIN

Nr. **Kompetenzen**

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

- ☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4
- ~~☒~~ 12 ist ein Teiler von 3
- ~~☒~~ V_{10}={1,2,5,10}
- ☒ V_7={7,14,21,28,..}
- ~~☒~~ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
- ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

1

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

6

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, 11, ~~14~~, 17, 23, 29
13 19

0,5

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

NR: 75 : 3 = 25
15

a) ggT(45,75) 15 NR: 45 : 3 = 15 ✓
15

45 | ③
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

75 | ③
25 | ⑤
5 | 5
1 ✓

b) kgV(24, 30) = 120 ✓ NR: 24 · 5
120

24 | ②
12 | ②
6 | ②
3 | ③
1 ✓

30 | 2 ✓
15 | 3 ✓
5 | ⑤
1 ✓

6

13,5/20

14. Juni 2021

Kompetenzcheck: Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT, kgV

NAME: Marcel

Nr.	Kompetenzen	

1.

Kreuze die richtigen Aussagen an

- ☒ ✓ 12 ist ein Vielfaches von 4
- ~~☒~~ 12 ist ein Teiler von 3
- ☐ ✓ V_{10}={1,2,5,10}
- ☒ ✓ V_7={7,14,21,28,..}
- ☐ ✓ Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl
- ☒ ✓ Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl

5

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

6

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ~~21~~, 23, 29, ✓

1,5

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)=3·5=15 ✓

$$\begin{array}{r|l} 45 & \textcircled{3} \\ 15 & 3 \\ 5 & \textcircled{5} \\ 1 & \end{array} \quad \checkmark \qquad \begin{array}{r|l} 75 & \textcircled{3} \\ 25 & 5 \\ 5 & \textcircled{5} \\ 1 & \end{array} \quad \checkmark$$

b) kgV(24, 30) = 2·2·2·3·5=120 ✓

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \checkmark \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & \textcircled{5} \\ 1 & \end{array} \quad \checkmark$$

6

18,5/20

Kompetenzcheck Kontrollklasse

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: [illegible]

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Ist die Aussage richtig oder falsch?**	~~6~~ 4

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	×	~~×~~
12 ist ein Teiler von 3	~~×~~	×
V_{10}={1,2,5,10}		× ✓
V_7={7,14,21,28,..}	× ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		× ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	× ✓	

2. **Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:** ~~6~~ 5,5

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	~~∤~~	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

3. **Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** ~~2~~ 1

[illegible], 3, 5, 7, 11, ~~15~~, 17, 19, 23, ~~27~~, 29

13

4. **Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:** ~~6~~ 5

a) ggT(45,75)

45 | 3
15 | 3
5 | 5
1 ✓

75 | 3
25 | 5
5 | 5
1 ✓

3 · 5 = 15 ✓

b) kgV(24, 30)

24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1 ✓

30 | 2
15 | 3
5 | 5
1 ✓

2 · 2 · 2 · 3 · 5 = ~~[illegible]~~

= 1~~70~~

15,5/20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: Maksym 1C

Nr.	Kompetenzen	

1. **Ist die Aussage richtig oder falsch?**

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X ✓	
12 ist ein Teiler von 3		X✓
V_{10}={1,2,5,10}	X	X
V_7={7,14,21,28,..}	X	X
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl	X	X
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X	X

~~6~~ 2

2. **Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	∤	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

~~6~~ 5,5

3. **Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**

2,3,5,7,11,13,17, 23, 29

~~2~~ 1,5

4. **Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**

a) ggT(45,75)

$$\begin{array}{r|l} 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \checkmark \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \checkmark$$

b) kgV(24, 30)

$$\begin{array}{r|l} 24 & \textcircled{2} \\ 12 & \textcircled{2} \\ 6 & \textcircled{2} \\ 3 & \textcircled{3} \\ 1 & \end{array} \checkmark \qquad \begin{array}{r|l} 30 & \cancel{2} \\ 15 & \cancel{3} \\ 5 & \textcircled{5} \\ 1 & \end{array} \checkmark$$

ggT(45, 75) = 5 · 3 = 15 ✓ kgV(24,30) = 2·2·2·3·5 = 120 ✓

⑥

15/20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK:
TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN,
KGV, GGT

NAME: Hunor Hegyes

Nr.	Kompetenzen	

1.

Ist die Aussage richtig oder falsch?

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X ✓	
12 ist ein Teiler von 3		X ✓
$V_{10}=\{1,2,5,10\}$		X ✓
$V_7=\{7,14,21,28,..\}$	X ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		X ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X ✓	

⑥

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

⑥

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ✓

②

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)

$$\begin{array}{r|l} 45 & \textcircled{3} \\ 15 & 3 \\ 5 & \textcircled{5} \\ 1 & \end{array} \checkmark \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \checkmark$$

$ggT(45,75)=3\cdot5=\underline{\underline{15}}$ ✓

b) kgV(24, 30)

$$\begin{array}{r|l} 24 & \textcircled{2} \\ 12 & \textcircled{2} \\ 6 & \textcircled{2} \\ 3 & \textcircled{3} \\ 1 & \end{array} \checkmark \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & \textcircled{5} \\ 1 & \end{array} \checkmark$$

$kgV(24,30)=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5=\underline{\underline{120}}$ ✓

⑥

20/20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: Mariama

Nr.	Kompetenzen	

1. **Ist die Aussage richtig oder falsch?**

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X ✓	
12 ist ein Teiler von 3		X ✓
V_{10}={1,2,5,10}	X	X
V_7={7,14,21,28,..}	X ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl	X	X
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X ✓	

~~6~~ 4

2. **Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	~~∤~~
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

~~6~~ 5,5

3. **Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**

2, 3, 5, 7, 11, 13 17, 19, 23, 29

~~2~~ 1,5

4. **Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**

a) ggT(45,75) = 15 ✓

45	③
15	3
5	⑤
1	

✓

75	3✓
25	5✓
5	5
1	

✓

b) kgV(24, 30) ~~2·2·5 = 20~~ 2·2·2·3·5

24	②
12	②
6	②
3	③
1	

✓

30	2✓
15	3✓
5	⑤
1	

✓

~~6~~ 5

16/20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: Uomoc

Nr. | **Kompetenzen**

1.

Ist die Aussage richtig oder falsch?

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X	X
12 ist ein Teiler von 3	X	X
V_{10}={1,2,5,10}	X	X
V_7={7,14,21,28,..}	X ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		X ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X ✓	

~~6~~ 3

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤	| ✓	∤	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

~~6~~ 5

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, ~~12~~ 13, ~~15~~, ~~18~~, ~~20~~, 23, ~~26~~, ~~28~~, 29

~~2~~

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75) = 10

$\begin{array}{r|l} 45 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$

b) kgV(24, 30) = 9

$\begin{array}{r|l} 24 & \text{[illegible]} \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 30 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

~~6~~

8/10

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: Gaurad

Nr.	Kompetenzen	

1. **Ist die Aussage richtig oder falsch?**

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X ✓	
12 ist ein Teiler von 3	x	x
V_{10}={1,2,5,10}	x	x
V_7={7,14,21,28,..}	X ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		X ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X ✓	

~~6~~ 4

2. **Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤	∤	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

~~6~~ 5

3. **Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**

~~1~~2, 3, 5, 7, 11, 13, ~~15~~, 17, ~~21~~, ~~25~~, ~~27~~

19, 23, 29

~~2~~

4. **Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**

a) ggT(45,75) =25

45 | 5
9 | 3
3 | 3
1
✓

75 | 5 /3
15 | 5
1

b) kgV(24, 30) = ~~11~~

24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1

30 | 2
15 | 5
3 | 3
1 ✓

~~6~~ 2,5

11,5/20

24. Juni 2021	KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN; KGV, GGT	NAME: Denise

Nr. | **Kompetenzen**

1. **Ist die Aussage richtig oder falsch?**

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	✓ ✓	
12 ist ein Teiler von 3	✓	×
V_{10}={1,2,5,10}	✓	×
V_7={7,14,21,28,..}	✓ ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl	·	× ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	✓ ✓	

~~6~~ 4

2. **Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	∤	∤	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

~~6~~ 5

3. **Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**

2, 3, 5, 7, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, 23, 29

~~2~~ 1,5

4. **Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**

a) ggT(45,75) = ~~10~~ 3·5 = 15

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 75 & 5 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

✓ ✓

b) kgV(24, 30) = 2·2·2·3·5 = 120

120 ✓

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

✓ ✓

~~6~~ 5

15,5/20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: Elina

Nr. | **Kompetenzen**

1.

Ist die Aussage richtig oder falsch?

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	✓ ✓	
12 ist ein Teiler von 3	✓	✗
V_{10}={1,2,5,10}		× ✓
V_7={7,14,21,28,..}	✓ ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		× ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	✓ ✓	

~~6~~ 5

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

⑥

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

~~1~~, 2, 3, 5, 7, 11, ~~15~~, 17, ~~21~~, 23, 29, ~~30~~

✓13

2

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75) = 3·5 = 15 ✓

45 | ③
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

75 | 3 ✓
25 | ~~5~~
5 | 5
1 ✓

b) kgV(24, 30) = 2·2·2·3·5 = 120 ✓

24 | ②
12 | ②
6 | ②
3 | ③
1 ✓

30 | 2 ✓
15 | 3 ✓
5 | ⑤
1 ✓

⑥

17/20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: Rita

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Ist die Aussage richtig oder falsch?**	~~6~~ 2

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	✓ ✓	
12 ist ein Teiler von 3	✓	✗
V_{10}={1,2,5,10}	✓	✗
V_7={7,14,21,28,..}	✗	✓
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl	✓	✗
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	✓ ✓	

2. **Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:** ~~6~~ 4,5

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤	| ✓	∤ ✓
3	∤	| ✓	| ✓	∤
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

3. **Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** ②

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ✓

4. **Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:** ⑥

a) ggT(45,75) 15 ✓

45 | 5
9 | 3
3 | 3
1 ✓

75 | 5
15 | 3
5 | 5
1 ✓

15

b) kgV(24, 30) 120

24 | 3
8 | 2
4 | 2
2 | 2
1 ✓

30 | 2
15 | 3
5 | 5
1 ✓

3·2·2·2·5=120 ✓

14,5/20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: Tobias

Nr.	Kompetenzen	

1. **Ist die Aussage richtig oder falsch?**

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X ✓	
12 ist ein Teiler von 3	~~X~~	X
V_{10}={1,2,5,10}	X	X
V_7={7,14,21,28,..}	X ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		X ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X ✓	X

~~6~~ 3

2. **Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	~~∤~~	~~∤~~	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

~~6~~ 5

3. **Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29

11

~~2~~ 1,5

4. **Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**

a) ggT(45,75) = 3 · 5 = 15 ✓

45 | ③
15 | 3
5 | ⑤
1 |
✓

75 | 3
25 | ⑤
5 | 5
1 |
✓

b) kgV(24, 30) ~~360~~

24 | ②
12 | ②
6 | 2
3 | ③
1 |

30 | 2
15 | ⑤
3 | 3
1 |
✓

~~6~~ 4,5

14|20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: Kübra

Nr.	Kompetenzen	

1.

Ist die Aussage richtig oder falsch?

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X ✓	
12 ist ein Teiler von 3	X	✗
V_{10}={1,2,5,10}		X ✓
V_7={7,14,21,28,..}	X ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		X ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X ✓	

~~6~~ 5

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

⑥

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ✓

②

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75) = 45 F.F.

45 | 3
15 | 3
5 | 5
1 ✓

75 | 3
2 25 | 5
5 | 5
1

F.F.

b) kgV(24, 30) = 2 · 2 · 2 · 3 · 5 = ~~60~~ ✓

24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1 ✓

30 | 2
15 | 3
5 | 5
1 ✓

~~6~~ 4,5

17,5/20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: AMINA 1C

Nr.	Kompetenzen	

1. **Ist die Aussage richtig oder falsch?**

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X ✓	
12 ist ein Teiler von 3	~~X~~	X
V_{10}={1,2,5,10}	~~X~~	X
V_7={7,14,21,28,..}	X ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		X ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X ✓	

~~6~~ 4

2. **Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	| ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	| ✓	∤ ✓

⑥

3. **Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**

2,3,5,7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ✓

②

4. **Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**

a) ggT(45,75)= 15 ✓

45 | ③
15 | 3
5 | ⑤
1 ✓

75 | 3 ✓
25 | 5 ✓
5 | 5
1 ✓

b) kgV(24, 30)= 120 ✓

24 | ②
12 | ②
6 | ②
3 | ③
1 ✓

30 | 2 ✓
15 | 3 ✓
5 | ⑤
1 ✓

⑥

18/20

24. Juni 2021	KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT	NAME:	Amin

Nr.	Kompetenzen	
1.	**Ist die Aussage richtig oder falsch?** (Tabelle 1)	~~6~~ 3
2.	**Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:** (Tabelle 2)	~~6~~ 4,5
3.	**Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:** 2, 3, 5, 7, 11, ~~18~~, 17, ~~20~~, ~~21~~, 23, ~~25~~, ~~30~~ 13	~~2~~
4.	**Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:**	~~6~~ 2

1. Ist die Aussage richtig oder falsch?

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X ✓	
12 ist ein Teiler von 3	X	X
V_{10}={1,2,5,10}	X	X
V_7={7,14,21,28,..}	X	X
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		X ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X ✓	

2. Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤	~~∤~~	∤ ✓
3	∤ ✓	| ✓	| ✓	| ✓
5	∤ ✓	| ✓	~~∤~~	∤ ✓

4. Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)

keine Primzahl

45	3
15	5
4	2
2	2
1	

75	~~2~~
75	5
3	3 ✓
1	

75:2 ↯

~~3 · 4 · 2 · 2 · 2 · 5 · 3 = 576~~

b) kgV(24, 30)

24	2
12	2
6	3
2	2
1 ✓	

30	5
6	2
3	3
1 ✓	

9,5/20

24. Juni 2021

KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT

NAME: Arian

24.06.21

Nr. **Kompetenzen**

1.

Ist die Aussage richtig oder falsch?

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X	X
12 ist ein Teiler von 3	X	X
V_{10}={1,2,5,10}	X	X
V_7={7,14,21,28,..}	X ✓	
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		X ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X ✓	

~~6~~ 3

2.

Trage in der Tabelle die Zeichen für ∣ oder ∤ ein:

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	∣ ✓	∤ ✓	∣ ✓	∤ ✓
3	∤ ✓	∤	∣ ✓	∣ ✓
5	∤ ✓	∣ ✓	∣ ✓	∤ ✓

~~6~~ 5,5

3.

Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:

13
2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 29,

~~2~~ 1,5

4.

Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:

a) ggT(45,75)

b) kgV(24, 30)

45	③
15	3
5	⑤
1	

✓

75	3
25	5
5	5
1	

✓

ggT = 3 · 5 = 15 ✓

45 : 3 = 15 ✓ 75 : 3 = 25

~~6~~ 4

14/20

24. Juni 2021 **KOMPETENZCHECK: TEILBARKEIT, PRIMZAHLEN, KGV, GGT** **NAME:** Orçun

24.6.2021

Nr.	Kompetenzen	

1. **Ist die Aussage richtig oder falsch?**

	RICHTIG	FALSCH
12 ist ein Vielfaches von 4	X	~~X~~
12 ist ein Teiler von 3	~~X~~	X
V_{10}={1,2,5,10}	~~X~~	X
V_7={7,14,21,28,..}	X	X
Es gibt unendlich viele Teiler einer Zahl		~~X~~ ✓
Es gibt unendlich viele Vielfache einer Zahl	X	X

~~6~~ 1

2. **Trage in der Tabelle die Zeichen für | oder ∤ ein:**

Teiler / Zahl	34	105	90	2 349
2	| ✓	∤ ✓	~~∤~~	∤ ✓
3	∤ ✓	~~∤~~	~~∤~~	| ✓
5	∤	~~∤~~	| ✓	∤

~~6~~ 3

3. **Schreibe alle Primzahlen zwischen 1 und 30 auf:**

~~1~~, 3, ~~9~~, ~~12~~, ~~15~~, ~~18~~, ~~21~~, ~~24~~, ~~27~~, ~~30~~

∤
2

~~2~~

4. **Berechne folgende Aufgaben durch die Primfaktorenzerlegung:** 17 · 2
4

a) ggT(45, 75) = ∤

45 | ③ 75 | 3 ✓
15 | 2 25 | 5
7 | ⑦ 7 | 7 ✓
1 1

b) kgV(24, 30) = ∤

24 | 2 30 | 2
12 | 2 15 | 3
8 8 5 | 5
Ff. 1 1 ✓

24 : 30
7.2()

~~6~~ 1,5

5,5/20