Ableitung der Impuls-Energie-Gleichungen.

Lagrange'sche Funktion $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' + \mathfrak{L}''$.

$$\mathfrak{L}' = \Sigma(\alpha)\,(\psi^\alpha + i\varphi_\alpha\psi)(\bar{\psi}^\alpha + i\varphi_\alpha\bar{\psi}) + k^2\psi\bar{\psi}.$$

$$\mathfrak{L}'' = \frac{1}{4}\,\Sigma(\alpha\beta)\, f_{\alpha\beta}\, f_{\beta\alpha}$$

[Ich hänge die Indizes, welche Differentiationen nach den Koordinaten bedeuten, oben an, $\psi^\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}$]

$$f_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^\alpha - \varphi_\alpha^\beta.$$

Die zu variierenden Grössen sind

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \psi,\ \bar{\psi},$$

die auch $\quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6$

heissen mögen, und ihre Differentialquotienten q_γ^α.
Was deren unteren Index bei q betrifft, so ist bei den Summationen anzugeben, welche Werte ~~[illegible]~~ des Index ins Auge gefasst werden müssen. Ist nichts angegeben, so ist an die sechs Werte zu denken. Bei den anderen Indizes handelt es sich immer um vier Werte.

Man hat nun zunächst für jedes q_γ die Lagrange'sche Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_\gamma} - \Sigma(\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_\gamma^\alpha}\right) = 0. \qquad (1)$$

~~Wir multiplizieren~~ Wir verstehen jetzt unter δq_γ beliebige virtuelle unendlich kleine Änderungen (stetige Funktionen der Koordinaten); sie brauchen im Unendlichen nicht zu verschwinden. Indem wir die Differentialgleichung mit δq_γ multiplizieren und über alle γ addieren, erhalten wir nach einfacher Umformung

$$\sum(\gamma)\frac{\partial L}{\partial q_\gamma}\delta q_\gamma + \sum(\gamma\alpha)\frac{\partial L}{\partial q_\gamma^\alpha}\delta q_\gamma^\alpha - \sum(\gamma\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\gamma^\alpha}\delta q_\gamma\right) = 0. \qquad (2)$$

Die ersten beiden Glieder zusammen sind δL. Also

$$\delta L - \sum(\gamma\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\gamma^\alpha}\delta q_\gamma\right) = 0. \qquad (3)$$

Wir wenden diese Gleichung auf einen speziellen Fall an. Die Änderung δ bestehe nämlich in einer unendlich kleinen Verschiebung s des ganzen Zustandes in der Richtung einer Koordinate x_β, wobei s unabhängig von den Koordinaten sein soll. Für jede Grösse ω, die in jedem Punkt einen bestimmten Wert hat, gilt dann

$$\delta\omega = -s\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}$$

und man hat also

$$\frac{\partial L}{\partial x_\beta} - \sum(\gamma\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\gamma^\alpha} q_\gamma^\beta\right) = 0. \qquad (4)$$

Diese Gleichungen ($\beta = 1, 2, 3, 4$) drücken die Erhaltung von Impuls und Energie aus.

Um indes für die Komponenten des Spannungs-Energie-Tensors befriedigende Werte zu finden, F sind noch einige Umformungen nötig.

F namentlich um zu erreichen, dass, was das ~~Elektron~~ elektromagnetische Feld anbetrifft, diese Komponenten nur von $f_{\alpha\beta}$ und nicht etwa von φ_α^β oder das entsprechende φ_β^α abhängen.

Es ist zu beachten, dass die Differentialquotienten von $q_1, \dots q_4$ nur in L'' und die von q_5, q_6 nur in L' vorkommen. Das letzte Glied in (4) zerfällt also in

$$-\sum(\alpha, \gamma = 1, \dots 4)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L''}{\partial q_\gamma^\alpha} q_\gamma^\beta\right) \qquad (5)$$

und

$$-\sum(\alpha,\gamma=5;6)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial q^\alpha_\gamma}\, q^\beta_\gamma\right) \qquad (6)$$

Den vorletzten Ausdruck ersetzen wir durch die Summe von

$$-\sum(\alpha,\gamma=1,\dots 4)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial q^\alpha_\gamma}(q^\beta_\gamma - q^\gamma_\beta)\right] \qquad (7)$$

und

$$-\sum(\alpha,\gamma=1,\dots 4)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial q^\alpha_\gamma}\, q^\gamma_\beta\right] =$$

$$= -\sum(\alpha,\gamma=1\dots 4)\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial q^\alpha_\gamma}\, q^{\gamma\alpha}_\beta - \sum(\alpha,\gamma=1,\dots 4)\, q^\gamma_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial q^\alpha_\gamma}\right) \qquad (8)$$

Für (7) kann man schreiben

$$\sum(\alpha)\frac{\partial \mathfrak{U}_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha},$$

wo

$$\mathfrak{U}_{\alpha\beta} = -\sum(\gamma=1\dots 4)\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial q^\alpha_\gamma}(q^\beta_\gamma - q^\gamma_\beta)$$

ist. Diese Grösse ist die gewöhnliche quadratische Funktion von $f_{\alpha\beta}$. Ferner ist das erste Glied in (8) Null. Da nämlich sowohl nach α wie auch nach γ über die Werte von 1 bis 4 summiert werden muss, so können wir auch die Indizes α und γ miteinander verwechseln. Es ist aber

$$\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial q^\gamma_\alpha} = -\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial q^\alpha_\gamma} \quad \text{und} \quad q^{\gamma\alpha}_\beta = q^{\alpha\gamma}_\beta.$$

Für das letzte Glied in (8) schreiben wir

$$-\sum(\alpha,\gamma=1\ldots 4)\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left[q_\beta\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}''}{\partial q_\gamma^\alpha}\right)\right]+q_\beta\sum(\alpha,\gamma=1\ldots 4)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}''}{\partial q_\gamma^\alpha}\right). \quad (9)$$

Die letzte Grösse ist Null, wie man sieht wenn man α und γ vertauscht.

Um das erste Glied zu berechnen wollen wir die Bewegungsgleichung (1) heranziehen und zwar nur für die Werte 1.–4 von γ. Für diese lautet die Gleichung

$$-\sum(\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}''}{\partial q_\gamma^\alpha}\right)=-\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_\gamma};$$

sie liefert für das erste Glied in (9) den Wert

$$-\sum'(\gamma=1..4)\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(q_\beta\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_\gamma}\right); \quad \ldots\ldots\ldots$$

wofür wir auch schreiben dürfen

$$-\sum'(\alpha=1..4)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(q_\beta\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_\alpha}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Schliesslich findet man die Erhaltungssätze in der Form

$$\sum(\alpha)\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}=0 \quad (\beta=1,2,3,4)$$

mit folgenden Werten der ~~Sp~~ Komponenten des Spannungs-Energietensors

$$T_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\mathcal{L}+U_{\alpha\beta}-\sum'(\gamma=5,6)\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_\gamma^\alpha}q_\gamma^\beta-q_\beta\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_\alpha},$$

oder, wenn man die Bedeutung von q berücksichtigt

$$T_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\mathcal{L}+U_{\alpha\beta}-\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi^\alpha}\psi^\beta+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\overline{\psi}^\alpha}\overline{\psi}^\beta\right)-\psi_\beta\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi_\alpha}$$

Der Grundgedanke der angewandten Methode ist, dass man die Impuls-Energie-Gleichungen erhält, wenn man für den „virtuelle Verrückung" eine Verschiebung des Systems in der Richtung einer Koordinate wählt.
