L33-59

L33-59
25
Mertens
SS 1908

27

Algebra

Mertens A.
u. and.
25

L 33-59

THEYER & HARDTMUTH
WIEN · I · KÄRNTHNERSTRASSE · 9

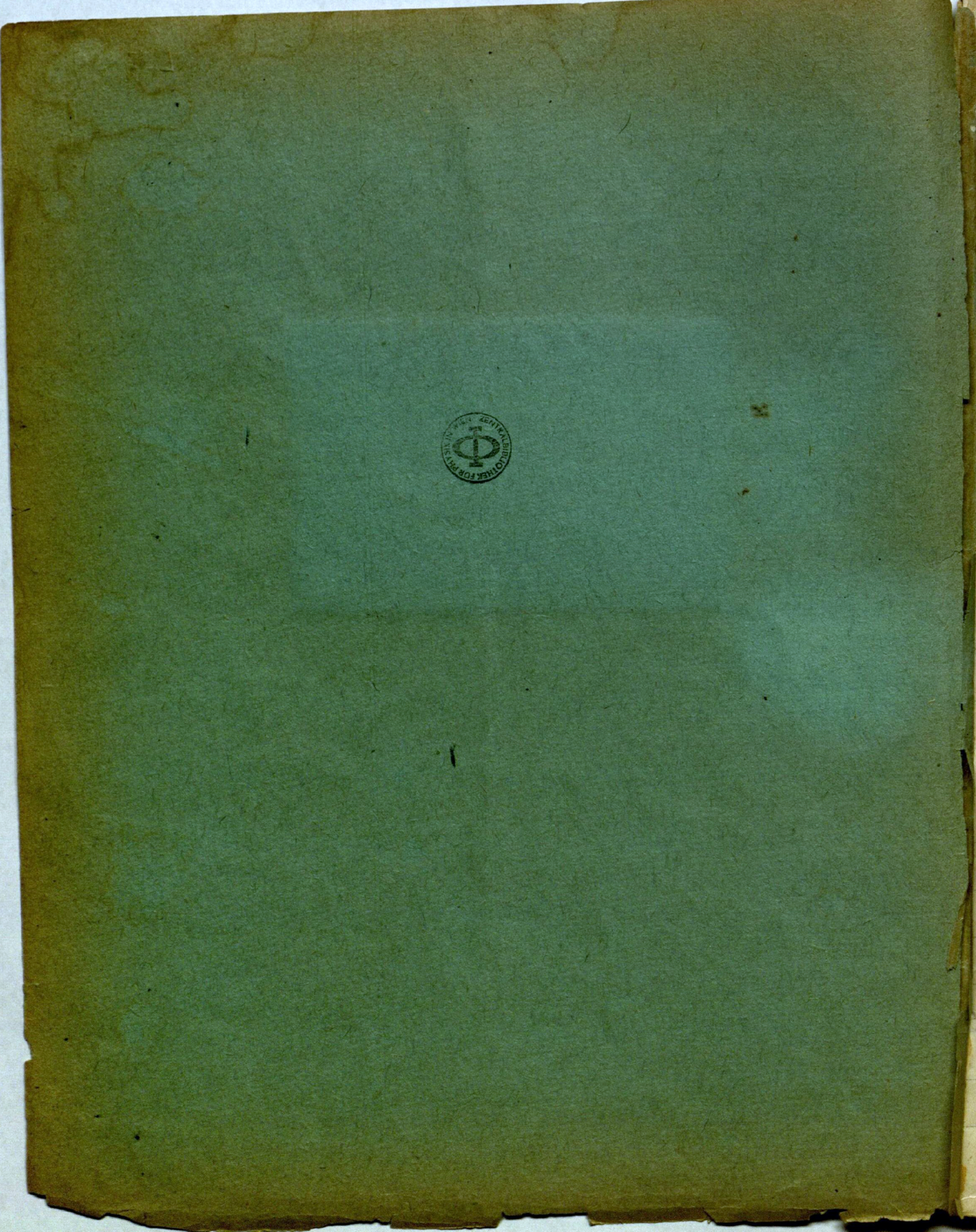
~~Algebra, Übertragungen~~
Übungsheft
Erwin Schrödinger

ZENTRALBIBLIOTHEK FÜR PHYSIK IN WIEN



L33-59

10. Vorlesung.



ÖSTERREICHISCHE NATIONALBIBLIOTHEK WIEN

ÖSTERREICHISCHE NATIONALBIBLIOTHEK FÜR PHYSIK IN WIEN ZENTRALBIBLIOTHEK

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_n$$

$$f(x+t) = a_0 (x+t)^n + a_1 (x+t)^{n-1} + \cdots a_n$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \cdots a_n + \left(n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots a_{n-1} \right) t + \cdots$$

$$= f(x) + f'(x)\, t + \cdots$$

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots a_{n-1}$$

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)\, t + \cdots$$

$$g(x+t) = g(x) + g'(x)\, t + \cdots$$

$$f(x+t) + g(x+t) = f(x) + g(x) + \left[f'(x) + g'(x) \right] t + \cdots$$

$$\left(f(x) + g(x) \right)' = f'(x) + g'(x) .$$

$$\left(c \cdot f(x) \right)' = c\, f'(x) .$$

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)\, t + \cdots$$

$$\underline{g(x+t) = g(x) + g'(x)\, t + \cdots}$$

$$f(x+t) \cdot g(x+t) = f(x)\, g(x) + \left[f(x) g'(x) + g(x) f'(x) \right] t + \cdots$$

$$\left(f(x) + g(x) \right)' = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x) .$$

$$(f(x)^m)' = m f^{m-1} f'(x)$$

$$f(x+t)^m = (f(x) + f'(x)t + \cdots)^m$$
$$= f(x)^m + m f^{m-1}(x) f'(x) t + \cdots$$

Lagrangische Interpolationsformel.

$$x = x_1, x_2 \ldots x_n$$
$$y = w_1, w_2 \ldots w_n$$

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = (x-x_i) f_i(x)$$
$$P = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) = f_i(x_i) P_i$$

$$P - P_1 f_1(x) - P_2 f_2(x) - \cdots - P_n f_n(x)$$

$$(f_1(x_1) - f_1(x))(f_2(x_2) - f_2(x)) \cdots (f_n(x_n) - f_n(x)) =$$
$$= P - P_1 f_1(x) - P_2 f_2(x) - \cdots P_n f_n(x) + Q f(x)$$

$$f_1(x_1) - f_1(x) = Q_1 (x - x_1)$$
$$f_2(x_2) - f_2(x) = Q_2 (x - x_2) \text{ etc.}$$

$$P - P_1 f_1(x) - P_2 f_2(x) - \cdots P_n f_n(x) = R f(x)$$
$$P - P_1 f_1(x) - \cdots P_n f_n(x) \overset{id.}{=} 0 \quad (1.)$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_i) = Q_i (x - x_i)$$
$$f_i(x)\left(\varphi(x) - \varphi(x_i)\right) = Q_i (x - x_i) f_i(x) = Q_i f(x)$$
$$\varphi(x) f_i(x) = \varphi(x_i) f_i(x) + Q_i f(x)$$

$$P\varphi(x) - P_1 f_1(x)\varphi(x) - P_2 f_2(x)\varphi(x) - \cdots P_n f_n(x)\varphi(x) = 0$$

$$P\varphi(x) - P_1\left(\varphi(x_1) f_1(x) + Q_1 f(x)\right) - P_2\left(\varphi(x_2) f_2(x) + Q_2 f(x)\right) - \cdots P_n\left(\varphi(x_n) f_n(x) + Q_n f(x)\right) = 0$$
$$P\varphi(x) - P_1 \varphi(x_1) f_1(x) - P_2 \varphi(x_2) f_2(x) - \cdots P_n \varphi(x_n) f_n(x) = Q f(x)$$

$$P\varphi(x) - P_1 \varphi(x_1) f_1(x) - P_2 \varphi(x_2) f_2(x) - \cdots P_n \varphi(x_n) f_n(x) = 0 \quad (2.)$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1)\frac{P_1}{P} f_1(x) + \frac{P_2}{P}\varphi(x_2) f_2(x) + \cdots \frac{P_n}{P}\varphi(x_n) f_n(x)$$

$x = a_1, a_2 \cdots a_n$

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) = (x-a_i)\,f_i(x)$$

$$P = f_1(x_1)\,f_2(x_2)\cdots f_n(x_n) = f_i(x_i)\,P_i(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{P_1}{P} w_1 f_1(x) + \frac{P_2}{P} w_2 f_2(x) + \cdots \frac{P_n}{P} w_n f_n(x)$$

$$\frac{P_i}{P} = \frac{1}{f_i(x_i)}$$

$$\varphi(x) = \frac{w_1}{f_1(x_1)} f_1(x) + \frac{w_2}{f_2(x_2)} f_2(x) + \cdots \frac{w_n}{f_n(x_n)} f_n(x)$$

$$f(x) = (x-a_i)\,f_i(x)$$

$$f'(x) = f_i(x) + (x-a_i)\,f_i'(x) \qquad \text{für } x = a_i$$

$$f'(a_i) = f_i(a_i)$$

$$\varphi(x) = \frac{w_1}{f'(a_1)} \frac{f(x)}{(x-a_1)} + \frac{w_2}{f'(a_2)} \frac{f(x)}{(x-a_2)} + \cdots \frac{w_n}{f'(a_n)} \frac{f(x)}{x-a_n}$$

$$\Pi(x_1, x_2 \cdots x_n) = \begin{cases} (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \\ \qquad (x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2) \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad (x_n-x_{n-1}) \end{cases}$$

$$f_1(x) = (x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$$

$$f_1(x_1) = (x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n) \quad \text{etc.}$$

$$P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Pi^2$$

$$P_1 f_1(x) = \frac{P}{f_1(x_1)} f_1(x) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Pi^2 \cdot \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Pi \cdot \frac{\Pi f_1(x)}{f_1(x_1)}$$

[illegible] $f_1(x)$

[illegible] $\frac{\Pi f_1(x)}{f_1(x_1)}$ [illegible]

[illegible] x_1, x [illegible]:

$$\frac{\Pi f_1(x)}{f_1(x_1)} = \Pi(x, x_2 \cdots x_n).$$ [illegible]:

$$P_1 f_1(x) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Pi(x_1, \cdots x_n)\, \Pi(x, x_2 \cdots x_n)$$

[illegible] $P_i f_i(x)$. [illegible]

Π [illegible] (2.) [illegible] $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Pi$ [illegible].

$$\Pi\varphi(x) = \Pi(x, x_1 \cdots x_n)\,\varphi(x_1) + \underline{\Pi(x_1, x_2 \cdots x_n)}\,\varphi(x_2) \cdots \Pi(x_1, x_2 \cdots x)\,\varphi(x_n).$$

[illegible] $n-1$

[illegible], n [illegible].

Newtonsche Interpolationsformel.

Wir wissen nun daß immer eine und nur eine g. Funktion existiert, die den Grad n nicht übersteigt und für n gegebene Werte der Unbekannten, n geforderte Werte annimmt. Wir können diese Funktion jetzt noch in anderer Form darstellen.

$x = a_1, a_2 \cdots a_n$

$y = w_1, w_1 \cdots w_n$

Dies sei wieder die Forderung für y. Greifen wir die ersten m a-Größen mit den zugeordneten w Werten heraus. Nennen wir die Funktion, die den Grad m nicht erreicht und für $x = a_1 \cdots a_m$ gleich $w_1 \cdots w_m$ wird, F_m. Es gibt sie und sie ist einzig. Wir nennen ferner den Coeffizienten x^{m-1} in F_m, C_{m-1}, und bilden

$$F_{m+1} - C_m(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m).$$

Diese Funktion ist vom $(m-1)$ten Grade höchstens, ferner nimmt sie für die ersten m a-Werte die ersten m w-Werte an, da F_{m+1} diese Eigenschaft hat und das zweite Glied immer verschwindet. Sie muß also mit F_m, das durch die genannten Eigenschaften eindeutig charakterisiert ist, identisch sein.

$$F_{m+1} - C_m(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m) = F_m$$

$$F_{m+1} - F_m = C_m(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$$

Die Aufgabe, die Funktion F_m zu bestimmen hat auch einen Sinn für $m = 1$, F_m ist dann offenbar $= w_1$. Wir haben also:

$$F_1 = w_1 = C_0$$

$$F_2 - F_1 = C_1(x-a_1)$$

$$F_3 - F_2 = C_2(x-a_1)(x-a_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\underline{F_n - F_{n-1} = C_{n-1}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})}$$

$$F_n = C_0 + C_1(x-a_1) + C_2(x-a_1)(x-a_2) + \cdots C_{n-1}(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})$$

Es handelt sich noch darum die Koeffizienten C_0 bis C_{n-1} zu bestimmen. Wir nennen zu

dem Ende die Funktion höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades die für a_2 bis a_{m+1} die vorgeschriebenen Werte nimmt,

$$\begin{array}{lllll} x = & a_2 & a_3 & \dots & a_{m+1} \\ G_m = & w_2, & w_3 & \dots & w_{m+1} \end{array}$$

und bilden

$$\frac{(x-a_1)\,G_m + (a_{m+1}-x)\,F_m}{a_{m+1}-a_1} \begin{array}{lllll} x = & a_1, & a_2 & \dots & a_m, \; a_{m+1} \\ = & w_1, & w_2 & \dots & w_m, \; w_{m+1} \end{array}.$$

Die Funktion ist ferner höchstens vom $m$ten Grade also identisch gleich F_{m+1} und, wenn wir den Coeffizienten von x^{m-1} aus G_m mit c'_{m-1} bezeichnen, so gewinnen wir

$$\frac{c'_{m-1} - c_{m-1}}{a_{m+1} - a_1} = c_m$$

Dabei ist c'_{m-1} aus den m Größen a_2 bis a_{m+1} genau so aufgebaut wie c_{m-1} aus a_1 bis a_m. Wir können fortfahrend in konsequenter Bezeichnung schreiben:

$$\frac{c''_{m-2} - c'_{m-2}}{a_m - a_2} = c'_{m-1} \quad \text{etc.}$$

Jeder solche Koeffizient c ist der Koeffizient einer ganzen Funktion, die Anzahl aufeinanderfolgender a Werte für welche diese Funktion die vorgeschriebenen Werte annimmt, ist um eins größer als der untere Stellenzeiger; die

16. Vorl.

Zahl der Striche drückt aus, um wieviel Stellen diese a-Reihe gegen den Anfang verschoben ist. Die Bildungsregel sagt: Um ein solches c zu finden, geh' in die Reihe der c mit um eins niedrigerem Index. Nimm hier das um eine Stelle nach rechts verschobene, zieh' davon das voraufgehende ab, also dasjenige daß deinem gewünschten c entspricht und dividier' es durch die Differenz der äußersten a-Werte, die in die Funktion, der dein gewünschtes c angehört noch hineinspielen.

Tabelle:

$$\begin{array}{lllllll} x = & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \\ y = & w_1 & w_2 & w_3 & & w_n & \\ & \| & \| & \| & & \| & \\ & c_0 & c'_0 & c''_0 & \dots & c_0^{(n-1)} & \\ & c_1 & c'_1 & c''_1 & \dots & c_1^{(n-2)} & \text{1. Reihe d. divid. Differenzen.} \\ & c_2 & c'_2 & \dots & & c_2^{(n-3)} & \\ & \dots & & & & & \\ & c_{n-1} & & & & & \end{array}$$

16. Vorlesung.

Über Determinanten.

Es seien n Formen mit n Variabeln gegeben, nach diesen Variabeln linear und homogen.

$$f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n$$
$$f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots \cdots a_{nn}x_n$$

Es ist eine g. Funktion N der n^2 Koeffizienten aufzufinden, die nach allen zusammen den Grad n nicht übersteigt und die Darstellung zuläßt:

$$N x_n \overset{id.}{=} P_1 f_1 + P_2 f_2 + \cdots P_n f_n$$

Dabei mögen die $P_1 \cdots P_n$ Funktionen der x und der a sein.

Ist $n = 1$, also eine Form mit einer Variabeln gegeben, so läßt sich ein solches N konstruieren.

$$f_1 = a_{11}x_1 \qquad (A + Ba_{11})x_1 = Pa_{11}x_1$$
$$N = A + Ba_{11} \qquad A = 0 \quad B = P$$
$$N = Ba_{11} \qquad B \text{ beliebiger Coeffizient.}$$

Wir nehmen zunächst an daß für beliebiges n ein N sich finden lasse und wollen einige Eigenschaften nachweisen, die N dann besitzen muß. Ersetzen wir in ihm die Coeff. einer Spalte je durch einen linearen Ausdruck der anderen Coeff. derselben Zeile, also

$$a_{1i} \quad \text{durch} \quad t_\alpha a_{1\alpha} + t_\beta a_{1\beta} + \cdots t_\varepsilon a_{1\varepsilon}$$
$$a_{2i} \quad \text{"} \quad t_\alpha a_{2\alpha} + t_\beta a_{2\beta} + \cdots t_\varepsilon a_{2\varepsilon}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{ni} \quad \text{"} \quad t_\alpha a_{n\alpha} + t_\beta a_{n\beta} + \cdots t_\varepsilon a_{n\varepsilon}$$

Die Darstellung

$$N x_n = P_1 f_1 + P_2 f_2 + \cdots P_n f_n$$

geht, da

$$f_1 = a_{1i}x_i + a_{1\alpha}x_\alpha + a_{1\beta}x_\beta + \cdots a_{1\varepsilon}x_\varepsilon;$$
$$= (t_\alpha a_{1\alpha} + t_\beta a_{1\beta} + \cdots t_\varepsilon a_{1\varepsilon})x_i + a_{1\alpha}x_\alpha + a_{1\beta}x_\beta \cdots a_{1\varepsilon}x_\varepsilon \quad \text{nach Vertauschung;}$$

$f_2 =$ etc.; $\quad f_1 = (x_\alpha + t_\alpha x_i)a_{1\alpha} + (x_\beta + t_\beta x_i)a_{1\beta} + \cdots (x_\varepsilon + t_\varepsilon x_i)a_{1\varepsilon}$.

über in $N' x_n = P_1'[(x_\alpha + t_\alpha x_i)a_{1\alpha} + (x_\beta + t_\beta x_i)a_{1\beta} + \cdots (x_\varepsilon + t_\varepsilon x_i)a_{1\varepsilon}] +$
$$+ P_2'[(x_\alpha + t_\alpha x_i)a_{2\alpha} + \cdots] + \cdots P_n'[(x_\alpha + t_\alpha x_i)a_{n\alpha} + \cdots].$$

N' bedeutet den Wert von N nach der Vertauschung, ähnlich P_1' etc. Diese Darstellung ist notwendig wieder eine identische, d. h. gilt für ganz beliebige Werte der darin auftretenden x und a Größen. Sie muß auch richtig bleiben, wenn wir setzen für $x_\alpha \mid -t_\alpha x_i$, $x_\beta \mid -t_\beta x_i$, $\cdots$ $x_\varepsilon \mid -t_\varepsilon x_i$.

~~Die~~ x_i selbst ~~[illegible]~~ lassen wir ungeändert. Die rechte Seite verschwindet dann, die linke bleibt entweder ungeändert, wenn nämlich x_i mit x_n zusammenfallen sollte,

mit andern Worten, wenn es die Coefficienten der letzten Zeile waren, die wir durch die andern ersetzt haben. Oder sie geht über in $-N' t_n x_i$, wir haben also

$$N' x_n \text{ vel } -N' t_n x_i \overset{id.}{=} 0 .$$

Da diese Gleichungen identisch für beliebige Werte von x_n, x_i oder t_n gelten, muß N' gleich 0 sein.

Wenn wir also die Glieder einer Zeile in der oben beschriebenen Weise durch lineare Ausdrücke ersetzen, so verschwindet unser N. Natürlich können sich alle t bis auf eins zurück auf 0 reduzieren, dieses eventuell auf 1.

Nennen wir N_0 alle jene Glieder von N die gar keinen Coefficienten aus der i ten Zeile enthalten und setzen dann a_{1i} durch $t\, a_{1\alpha}$, so haben wir:

a_{2i} " $t\, a_{2\alpha}$

$$N = N_0 + N_1 \qquad N_0 \text{ bleibt unberührt. } N_1', \text{ da jedes seiner Glieder}$$
$$0 = N_0 + N_1' \qquad \text{der einen Coefficienten } a_{\alpha i} \text{ enthält, wird}$$
durch t teilbar sein. t ist aber ganz beliebig. N_0 muß also verschwinden.

Das gilt nun für jede Zeile. Jedes Glied von N muß aus jeder der n Zeilen mindestens einen Coeff. enthalten, woraus wieder folgt, daß es nur diesen einen und diesen nur in der ersten Potenz enthält,

fällt, da es den Grad n in keinem Glied überschreiten soll. Es ist also linear und homogen in Bezug auf die Coeff. jeder einzelnen Zeile. Es heißt also so aus:

$$N = \sum C_{\alpha\beta\ldots\nu}\, a_{\alpha 1}\, a_{\beta 2} \cdots a_{\nu n}$$

Das Summenzeichen bezieht sich darauf daß jede der n Größen $\alpha, \beta \ldots \nu$ unabhängig die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchlaufen soll.

Wir können jetzt zeigen daß die Verschwindungseigenschaft, die für x_n gilt für jedes beliebige x ebenso gilt.

$$N = N_1 a_{1i} + N_2 a_{2i} + \cdots N_n a_{ni}$$

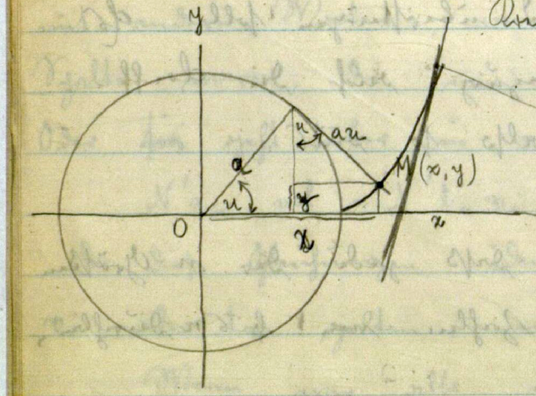
$$a_{1i} \mid x_\alpha a_{1\alpha} + x_\beta a_{1\beta} + \cdots x_\varepsilon a_{1\varepsilon} \quad \text{etc.}$$

$$0 = N_1(x_\alpha a_{1\alpha} + x_\beta a_{1\beta} + \cdots x_\varepsilon a_{1\varepsilon}) + \cdots N_n(x_\alpha a_{n\alpha} + x_\beta a_{n\beta} + \cdots x_\varepsilon a_{n\varepsilon})$$

$$0 = N_1(f_1 - a_{1i} x_i) + N_2(f_2 - a_{2i} x_i) + \cdots N_n(f_n - a_{ni} x_i)$$

$$N_1 f_1 + N_2 f_2 + \cdots N_n f_n = x_i \underbrace{(N_1 a_{1i} + N_2 a_{2i} + \cdots N_n a_{ni})} = N x_i$$

Nun können wir das Verschwinden eines Ausdrucks N durch vollständige Induktion zeigen.



Abrollkurven. (Rieger § 88. 13. 14.)

$x^2 + y^2 = a^2 + a^2u^2$

$x = a\cos u + au\sin u$

$x^2 = a^2(1+u^2) - a^2\cos^2 u - a^2u^2\sin^2 u + 2a^2u\sin u\cos u$

$y^2 = a^2[(1+\cos^2 u) + u^2(1-\sin^2 u) - 2u\sin u\cos u]$

$y^2 = a^2[\sin^2 u + u^2\cos^2 u - 2u\sin u\cos u]$

$$\begin{cases} y = a[\sin u - u\cos u] \\ x = a[\cos u + u\sin u] \end{cases}$$

$y_t = \frac{y}{y'}$ $\quad y_n = yy'$

$T = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}$ $\quad N = y\sqrt{1+y'^2}$

$dx = a[\cos u - \cos u + u\sin u] = au\sin u$

$dy = a[-\sin u + \sin u + u\cos u] = au\cos u$

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} u$ $\quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\cos u}$

$y_t = a\left[\cos u - u\frac{\cos^2 u}{\sin u}\right]$ $\quad y_n = a\left[\frac{\sin^2 u}{\cos u} - u\sin u\right]$

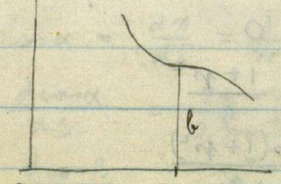
$T = a[1 - u\operatorname{ctg} u]$ $\quad N = a[\operatorname{tg} u - u]$

$= \frac{a}{\operatorname{tg} u}[\operatorname{tg} u - u]$

$y = b + (c-x)^3$ Rundgipfel! § 90. 1.)

$y' = 3(c-x)^2$ $\quad x = c$ $\quad x = c+h$ $\quad x = c-h$

$y'' = 6(c-x)$ $\quad y'' = 0$ $\quad y'' = -6h$ $\quad y'' = 6h$



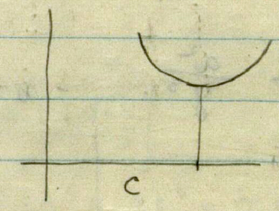
$y = b + (x-c)^4$ Rundgipfel § 90 2.)

$y' = 4(x-c)^3$

$y'' = 12(x-c)^2$

$y''' = 24(x-c)$

$y^{(4)} = 24$



Zu $y = b + (x-c)^4$ gehört $y = \bar{y}$, $x = \bar{x}$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$

$a^2\bar{y} = \bar{x}^3$ (§ 92. 3)

$(x+c)^2 = 2p(y+c')$

$2(x+c) = 2py'$

$1 = py''$

$a^2\bar{y}' = 3\bar{x}^2$; $\bar{y}' = \frac{3\bar{x}^2}{a^2}$

$a^2\bar{y}'' = 6\bar{x}$ $\quad \bar{y}'' = \frac{6\bar{x}}{a^2}$

$(a+c)^2 = 2p(a+c')$.

$(a+c) = 3p$

$1 = p\cdot\frac{6}{a}$

$p = \frac{a}{6}$

$c = -\frac{a}{2}$

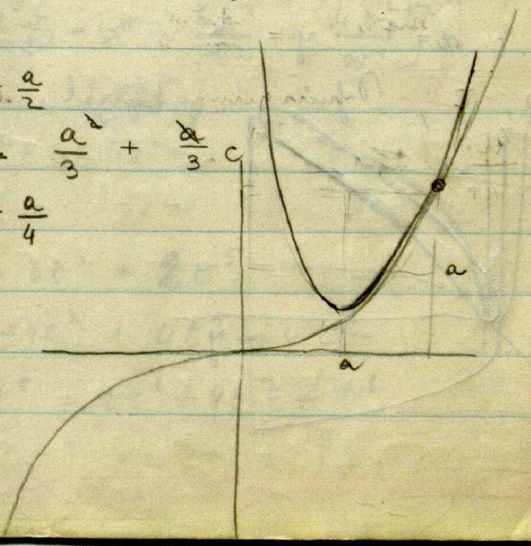
$\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{3} + \frac{a}{3}c$

$c' = -\frac{a}{4}$

$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a}{3}\left(y - \frac{a}{4}\right)$

$3x(x-a) = ay - \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}$

$= a(y-a)$



Krümmungskreis der Parabel: $y^2 = 2ax$ (§ 95, 1).

$$x - \alpha = \frac{p(1+p^2)}{q}$$

$$y - \beta = -\frac{1+p^2}{q}$$

$$r = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

$$y^2 = 2ax$$

$$yp = a, \quad p = \frac{a}{y} = \sqrt{\frac{a}{2x}}$$

$$p^2 + yq = 0$$

$$q = -\frac{p^2}{y} = -\frac{a^2}{y^3}$$

$$1 + p^2 = 1 + \frac{a^2}{y^2}$$

$$\frac{1+p^2}{q} = -\frac{y^3}{a^2} - y$$

$$y - \beta = \frac{y^3}{a^2} + y$$

$$\underline{\beta = -\frac{y^3}{a^2}}$$

$$x - \alpha = -\frac{y^2}{a} - a$$

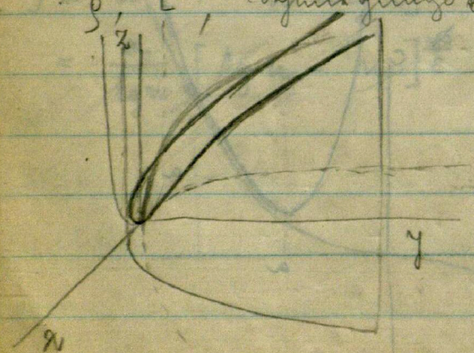
$$\alpha = x + a + \frac{y^2}{a}$$

$$= x + a + 2x$$

$$\underline{\alpha = 3x + a}$$

$x = t \quad y = \frac{t^2}{2} \quad z = \frac{t^3}{3}$

Krümmungskugel, Krümmungsmittelpunktskurve



Projektil:

$z = 0 \quad x^2 = 2y$ Parabel

$y = 0 \quad x^3 = 3z$ Schiefe Parabel

$x = 0 \quad (2y)^{\frac{3}{2}} = 3z$

1

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}$$

$dx = dt \qquad dy = t\,dt \qquad dz = t^2 dt$

$ds = \sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt = w\,dt \qquad \sqrt{1+t^2+t^4} = w$

$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{w} \qquad \cos\beta = \frac{t}{w} \qquad \cos\gamma = \frac{t^2}{w}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\cos\alpha}{ds} &= -\frac{2t+4t^3}{2w^3}\cdot\frac{dt}{ds} = -\frac{t+2t^3}{w^4} \\ \frac{d\cos\beta}{ds} &= \frac{t^2+2t^4}{w^4} + \frac{1}{w^2} \\ \frac{d\cos\gamma}{ds} &= \frac{t^3+2t^4}{w^4} + \frac{2t}{w^2} \end{aligned}\right\} \rho^2 = \left(\frac{t+2t^3}{w^3}\right)^2 \left[1 + \left(t + \frac{1}{w}\right) + \left(t^2 + \frac{2t}{w}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{w^4}\left[1 + t^2 + t^4 + \frac{2t}{w} + \frac{4t^2}{w^2} + \frac{1}{w^2} + \frac{4t^2}{w^2}\right]$$

$$\left[w^2 + \frac{2t(1+4t^2)}{w} + \frac{(1+4+4)}{w^2}\right]$$

$$\rho = \frac{t+2t^3}{w^3}\left[\frac{\sqrt{w^4 + 2tw(1+4t^2) + 1 + 4t^2}}{w^2}\right]$$

$w^4 = (1 + t^2 + t^4)^2 = 1 + t^4 + t^8 + 2t^2 + 2t^6 + 2t^4$

$+ 4t^2$

$$\rho = \frac{t+2t^3}{w^4}\sqrt{2 + 6t^2 + 3t^4 + 2t^6 + t^8 + 2tw(1+4t^2)}$$

$$\rho^2 = \left(\frac{t+2t^3}{w^4}\right)^2\left[1 + \left(t^4 + \frac{1}{w^2}\right)^2 + \left(t^2 + \frac{2t}{w^2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{w^4}\left[1 + t^2 + \frac{2t}{w^2} + \frac{1}{w^4} + t^4 + \frac{4t^3}{w^2} + \frac{4t^2}{w^4}\right]$$

$$= \frac{1}{w^4}\left[w^2 + \frac{2t+4t^3}{w^2} + \frac{1+4t^2}{w^4}\right]$$

$$= \frac{1}{w^4}\left[\frac{w^4 + (2t+4t^3)w^2 + 1 + 4t^2}{w^4}\right]$$

$1 + 2t^2 + 3t^4 + 2t^6 + t^8$

$1 + 4t^2$

$2t + 2t^3 + 2t^5$

$+ 4t^3 + 4t^5 + 4t^7$

$2 + 2t + 6t^2 + 6t^3 + 3t^4 + 6t^5 + 2t^6 + 4t^7 + t^8$

$$\left(t^8+4t^7+2t^6+6t^5+3t^4+6t^3+6t^2+2t+2\right):\left(t^4+t^2+1\right)=t^4+4t^3+t^2+5t$$

$\pm t^8 \quad \pm t^6 \quad \pm t^4$

$4t^7+t^6+6t^5+2t^4$

$\pm 4t^7 \quad \pm t^5 \quad \pm t^3$

$t^6+5t^5+2t^4+5t^3$

$\pm t^6 \quad \pm t^4 \quad \pm t^2$

$5t^5+t^4+5t^3+5t^2$

$\pm 5t^5 \quad \pm 5t^3 \quad \pm 5t$

t^4+5t^2-3t+2

$\cos\alpha=\frac{1}{w} \quad \cos\beta=\frac{t}{w} \quad \cos\gamma=\frac{t^2}{w} \quad ds=w\,dt \quad w=\sqrt{1+t^2+t^4}$

$\frac{d\cos\alpha}{ds}=-\frac{1}{w^2}\frac{2t+4t^3}{2w}\cdot\frac{1}{w}=-\frac{t+2t^3}{w^4}=-A$

$\frac{d\cos\beta}{ds}=-At+\frac{1}{w^2} \quad \frac{d\cos\gamma}{ds}=-At^2+\frac{2t}{w^2}$

$k^2=A^2\left(1+t^2+t^4\right)-\frac{2At}{w^2}-\frac{4At^3}{w^2}+\frac{1}{w^4}+\frac{4t^2}{w^4}$

$=\frac{(t+2t^3)^2}{w^6}-\frac{2t(t+2t^3)}{w^6}-\frac{2t^3(t+2t^3)}{w^6}+\frac{(1+4t^2)(1+t^2+t^4)}{w^6}$

$+t^2 \quad +4t^4 \quad +4t^6$

$-2t^2 \quad -4t^4$

$-2t^4 \quad -4t^6$

$t+2t^3-2t-2t^3$

$-t(t+2t^3)$

$-t^2-2t^4$

$1+t^2+t^4$

$4t^2+4t^4+4t^6$

$1+4t^2+3t^4+4t^6$

$x=t \quad y=\frac{t^2}{2a} \quad z=\frac{t^3}{3b^2}$

$dx=dt \quad dy=\frac{t\,dt}{a} \quad dz=\frac{t^2dt}{b^2} \quad w=\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}+\frac{t^4}{b^4}}$

$ds=w\,dt$

$\cos\alpha=\frac{1}{w} \quad \cos\beta=\frac{t}{aw} \quad \cos\gamma=\frac{t^2}{b^2w}$

$\frac{d\cos\alpha}{ds}=-\frac{\frac{2}{a^2}t+\frac{4}{b^4}t^3}{2w^3}\frac{1}{w}=-\frac{\frac{1}{a^2}t+\frac{2}{b^4}t^3}{w^4}=-A$

$\frac{d\cos\beta}{ds}=-A\frac{t}{a}+\frac{1}{aw^2} \quad \frac{d\cos\gamma}{ds}=-A\frac{t^2}{b^2}+\frac{2t}{b^2w^2}$

$k^2=A^2\left(1+\frac{t^2}{a^2}+\frac{t^4}{b^4}\right)-\frac{2t\cdot A}{a^2w^2}-\frac{2t^3A}{b^4w^2}+\frac{1}{a^2w^4}+\frac{4t^2}{b^4w^4}$

$=\frac{\left(+\frac{1}{a^2}t+\frac{2}{b^4}t^3\right)^2}{w^6}-\frac{\frac{2t}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}t+\frac{2}{b^4}t^3\right)+\frac{2t^3}{b^4}\left(\frac{1}{a^2}t+\frac{2}{b^4}t^3\right)}{w^6}+\frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{4t^2}{b^4}\right)\left(1+\frac{t^2}{a^2}+\frac{t^4}{b^4}\right)}{w^6}$

$\frac{1}{a^4}t^2+\frac{4}{a^2b^4}t^6+\frac{4}{a^2b^4}t^4-\frac{4t^6}{b^8}$

$-\frac{2t^2}{a^4}-\frac{4}{a^2b^4}t^4$

$-\frac{2}{a^2b^4}t^4$

$+\frac{1}{a^2}$

$\frac{+t^2}{a^4}+\frac{t^4}{a^2b^4}+\frac{4t^6}{b^8}$

$\frac{+4t^2}{b^4}+\frac{4t^4}{a^2b^4}$

$x = t \qquad y = \frac{t^2}{2} \qquad z = \frac{t^3}{3}$

$dx = dt \qquad dy = t\,dt \qquad dz = t^2 dt$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + t^2 + t^4)\,dt^2$

$ds = \sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt$

$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{d\cos\alpha}{dt}\,\frac{dt}{ds} = -\frac{2t + 4t^3}{2(1+t^2+t^4)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

$\frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{d\cos\beta}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \left(\frac{t(2t+4t^3)}{2(1+t^2+t^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

$\frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{d\cos\gamma}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \left(\frac{t^2(2t+4t^3)}{2(1+t^2+t^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

$\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2 = \frac{1}{1+t^2+t^4}\left[\frac{(2t+4t^3)^2}{4(1+t^2+t^4)^3}(1+t^2+t^4)\right.$

$\left. - \frac{t(2t+4t^3)}{(1+t^2+t^4)^2} - \frac{2t^3(2t+4t^3)}{(1+t^2+t^4)^2} + \frac{1}{1+t^2+t^4} + \frac{4t^2}{1+t^2+t^4}\right]$

$= \frac{(2t+4t^3)^2}{(1+t^2+t^4)^3} - \frac{2t(t+2t^3) + 4t^3(t+2t^3)}{(1+t^2+t^4)^3} + \frac{(1+4t^2)(1+t^2+t^4)}{(1+t^2+t^4)^3}$

$= \frac{1}{(1+t^2+t^4)^3}\left[(t+2t^3)\left(t+2t^3 - 2t - 4t^3\right) + (1+4t^2)(1+t^2+t^4)\right]$

$= \left[-t^2 - 2t^4 + 1 + t^2 + t^4 + 4t^2 + 4t^4 + 4t^6\right]$

$= \frac{1 + 4t^2 + 3t^4 + 4t^6}{(1+t^2+t^4)^3}$

$\rho = \frac{(1+t^2+t^4)\sqrt{1+t^2+t^4}}{\sqrt{1+4t^2+3t^4+4t^6}}$

$P = \left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)dt^3$

$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \frac{dy}{dt} = t \qquad \frac{dz}{dt} = t^2$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 1 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 2t$

$P = t^2 dt^3 \qquad Q = -2t\,dt^3 \qquad R = dt^3$

$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2 = (1 + 4t^2 + t^4)\,dt^6$

$M = dt^3\sqrt{1+4t^2+t^4}$

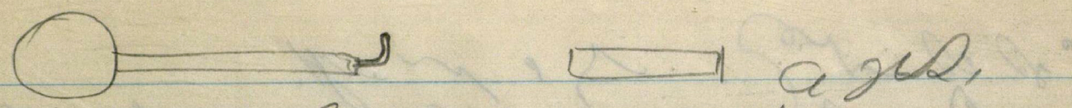
$\rho = \pm\frac{ds^3}{M}$

$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}$

$2t^4 + 4t^6$

$2t^4(1+4t^2)$

$K = \int \frac{e_1 e_2}{r^2}$



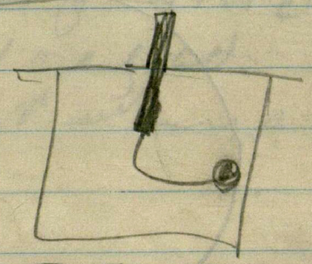
$$V = \frac{e}{a} \quad a V = e$$

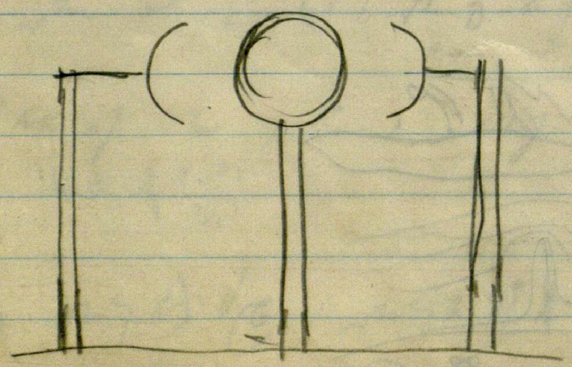
$$\left.\begin{array}{l} 1V = e \\ RV = \mathcal{E} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (c+r)\,V_1 = e \\ (c+R)\,V_2 = \mathcal{E} \end{array}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{e} = \frac{R}{r}$$

$$\frac{(c+r)\,V_1}{(c+R)\,V_2} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(c+R)\,r}{(c+r)\,R}$$



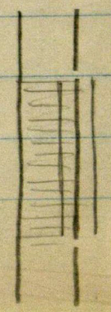


$$C = \frac{2f}{\pi^2 r}$$

$$C = K \frac{f}{2\pi d}$$

Schellak	2·0
S	3·84
Asphalt	1·7
Glas	2·2, 2·8, 3·3, [6·3 (Spiegelgl.)
Quarz	2·2 – 2·8
Wasser	1·7 – 1·9
Petroleum	83
Alkohol	27·8
Amylalk.	15

$K = \frac{1}{n^2} = d$

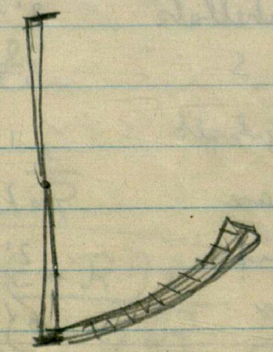


300 V = 1 [E.S.E]

0·01 min	1020	V
0·1	4920	
0·5	17760	
0·8	24780	
1·0	30610	

Zu [illegible] 1cm.

Braunsches Elektrometer



Idiostatische u. heterostatische Elektrometer.

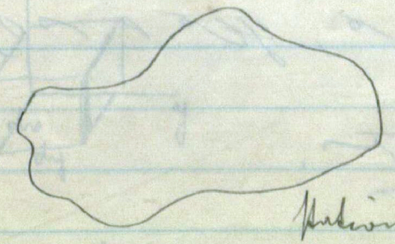
ZENTRALBIBLIOTHEK FÜR PHYSIK IN WIEN

Wärmeleitung.

Q [illegible]

u [illegible]

ρ



$u = F(x, y, z) = \text{const.}$

[illegible]

$u = F(x, y, z, t)$

stationärer Zustand.

$$\Delta Q = m\, \gamma\, \Delta u$$

$$\gamma = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta u}$$

$\gamma = \text{konst.}$

γ [illegible]

Literatur: [illegible] Biot [illegible], Fourier [illegible]

Fourier 1811. 1822 Th. analytique de la chaleur.

[illegible]

Poisson } [illegible] } [illegible]

Th. Kelland }

Lamé 1857 [illegible]

[illegible]

Riemann B. Hattendorf

Heine [illegible]

[illegible]

Maxwell [illegible]

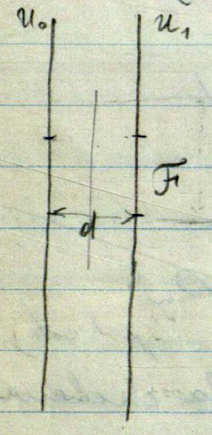
$\Delta^2 u + k^2 u = 0$ [illegible]

G. Kirchhoff.

Leitfähigkeit

Boltzmann

Poincaré Th. a. d. l. ch.



$$Q = \kappa F \frac{u_1 - u_0}{d} t$$

$$\kappa = \varphi(u_1, u_0),$$

κ = const.

$$\kappa = \frac{u_1 + u_0}{2}.$$

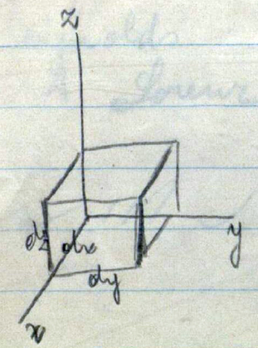
$$dQ = -\kappa\, dF \frac{\partial u}{\partial n} dt$$

$$\frac{dQ}{dF \cdot dt} = -\kappa \frac{\partial u}{\partial n}$$

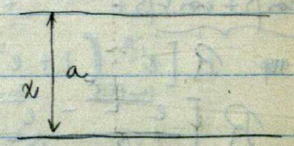
$$q = -\kappa \frac{\partial u}{\partial n}.$$

$q_x, q_y, q_y, \quad -\kappa\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\kappa\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\kappa\frac{\partial u}{\partial z}.$

heraus +



$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa^2 \Delta \vartheta = \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right)$$



$t = 0 \quad \vartheta = f(x).$ $\qquad t = \infty \quad \vartheta = 0$

$\vartheta = 0$ für $x = 0$ und $x = a$.

~~$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$~~

$$\begin{aligned}
\vartheta &= e^{-m^2\kappa^2 t} (A \sin(mx) + B \cos mx) \\
\frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= -m^2\kappa^2 e^{-m^2\kappa^2 t} (A \sin mx + B \cos mx) \\
\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} &= -m^2 e^{-m^2\kappa^2 t} (A \sin mx + B \cos mx).
\end{aligned}$$

$B = 0$

$\sin ma = 0$

$ma = \pm p\pi$

$m = \pm \frac{p}{a}\pi$

$$\vartheta = e^{-\frac{p^2\pi^2\kappa^2}{a^2} t} \cdot A \sin\left(\frac{p\pi}{a} x\right)$$

$$f(x) = A \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right).$$

$$\vartheta = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-\frac{\pi^2\kappa^2 t}{a^2}} + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-\frac{4\pi^2\kappa^2 t^2}{a^2}} + \dots$$

$$f(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + A_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + A_3 \sin\frac{3\pi x}{a} + \dots$$

$\cos\beta$

$$\underbrace{\cos\beta+\cos 2\beta+\cdots+\cos(n-1)\beta}_{\text{rep}} = \mathcal{R}\left[e^{i\beta}+e^{2i\beta}+\cdots+e^{(n-1)i\beta}\right] =$$

$$\mathcal{R}\left[e^{i\beta}\left(1+e^{i\beta}+\cdots e^{(n-2)\beta i}\right)\right] = \mathcal{R}\left[e^{i\beta}\,\frac{e^{(n-1)i\beta}-1}{e^{i\beta}-1}\right] =$$

$$= \mathcal{R}\left[\frac{e^{\frac{(n-1)i\beta}{2}}-e^{-\frac{(n-1)i\beta}{2}}}{e^{\frac{i\beta}{2}}-e^{-\frac{i\beta}{2}}}\; e^{i\beta+\frac{(n-1)i\beta}{2}+\frac{i\beta}{2}}\right] = \mathcal{R}\left[\frac{\sin\frac{(n-1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(\cos\frac{n\beta}{2}-i\sin\frac{n\beta}{2}\right)\right.$$

$$= \frac{\sin\frac{(n-1)\beta}{2}\cos\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 1$$

Reynolds [illegible]
H. A. Lorenz [illegible]

[illegible] 20.

$$\left(by+y^2\right)^{-1} = \frac{1}{by}\left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{by}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{y^{\mu}}{b^{\mu}}$$

$$l\left(1+\frac{x}{by}(d+cx+ay)\sum_{0}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{y^{\mu}}{b^{\mu}}\right) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)\frac{\lambda x^{\lambda}}{b^{\lambda}y^{\lambda}\lambda}(d+cx+ay)^{\lambda}\left(1+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{y^{\mu}}{b^{\mu}}\right)^{\lambda}$$

$$1-\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{y^3}{b^3}+\cdots$$

$$1-\lambda\frac{y}{b}+\lambda\frac{y^2}{b^2}-\lambda\frac{y^3}{b^3}+\cdots$$
$$+\binom{\lambda}{2}\frac{y^2}{b^2}-2\binom{\lambda}{2}\frac{y^3}{b^3}$$
$$-\binom{\lambda}{3}\frac{y^3}{b^3}$$

$$1-\lambda\frac{y}{b}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\frac{y^2}{b^2}-\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2\cdot3}\frac{y^3}{b^3}$$

$$\binom{\lambda}{2} \quad \binom{\lambda}{3}$$

$$-\lambda+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2\cdot2} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

$$-\lambda-\lambda(\lambda-1)-\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{2\cdot3}$$

$$-\frac{6\lambda-6\lambda(\lambda-1)-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{2\cdot3}$$

$$-6\lambda-6\lambda(\lambda-1)-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = -6\lambda^2-\lambda(\lambda^2-3\lambda+2)$$

$$l\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)\frac{\lambda x^{\lambda}}{b^{\lambda}y^{\lambda}}(d+cx+ay)^{\lambda}\left(1-\lambda\frac{y}{b}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\frac{y^2}{b^2}\cdots\right)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)\frac{\lambda x^{\lambda}}{b^{\lambda}y^{\lambda}\lambda}\left(d^{\lambda}+\lambda d^{\lambda-1}(cx+ay)+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}d^{\lambda-2}(c^2x^2+2acxy+a^2y^2)+\cdots\right)\times$$
$$\left(1-\lambda\frac{y}{b}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\frac{y^2}{b^2}-\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2\cdot3}\frac{y^3}{b^3}+\cdots\right)$$

$$\{\ \}_{y^{-1}} = -\frac{x}{b}(d+cx)+\frac{x^2}{2b^2}\left((2da+2acx)-\frac{2}{b}(d^2+2dcx+c^2x^2)\right)$$

$$= -\frac{d}{b}x+\left(\frac{2ad}{b^2}-\frac{2d^2}{b^3}-\frac{c}{b}\right)x^2+\cdots$$

$$= -\left(\frac{d}{b}x+\left(\frac{2d^2}{b^3}-\frac{2ad}{b^2}+\frac{c}{b}\right)x^2\right)$$

$$y^2+(ax+b)y+cx^2+dx = 0$$

$$y = \frac{ax+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(ax+b)^2}{4}-cx^2-dx}$$

$$w = \left(\frac{b^2}{4}+\frac{ab}{2}x-dx+\frac{a^2}{4}x^2-cx^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{b}{2}\left(1+\frac{2(ab-2d)}{b^2}x+\frac{a^2-4c}{b^2}x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{b}{2}\left(1+\frac{ab-2d}{b^2}x+\frac{a^2-4c}{2b^2}x^2\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8}\frac{4(ab-2d)^2}{b^4}x^2+\cdots\right)$$

$$y = \frac{d}{b}x+\frac{b}{2}\left(\frac{(ab-2d)^2}{2b^4}-\frac{a^2-4c}{2b^2}\right)x^2$$
$$\left(\frac{a^2b^2}{2b^4}-\frac{2abd}{b^3}+\frac{2d^2}{b^4}-\frac{a^2}{2b^2}+\frac{4c}{2b^2}\right)$$

$$= \frac{d}{b}x+\left(\frac{d^2}{b^3}-\frac{ad}{b^2}+\frac{c}{b}\right)x^2+\cdots$$

$$\frac{ab-2d}{2} \quad \frac{4}{b^2}$$

$$\frac{a^2-4c}{4} \quad \frac{y}{b^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot2} = -\frac{1}{8}$$

$(ay^2 + 2by + c) : (ay + b) = y + \frac{b}{a}$ $\quad = y \mid \frac{a_1}{a_0}$

$-\underline{ay^2 \pm by}$

$by + c$

$-\underline{by \pm \frac{b^2}{a}}$

$c - \frac{b^2}{a}$

$3a_0y^3 + 3a_1y^2 + 3a_2y + 3a_3 : (3a_0y^2 + 2a_1y + a_2) =$

$-\underline{3a_0y^3 \pm 2a_1y^2 \pm a_2y}$

$3a_1y^2 + 6a_2y + 9a_3$

$-\underline{3a_1y^2 + 2\frac{a_1^2}{a_0}y + \frac{a_1a_2}{a_0}}$

$\left(6a_2 - 2\frac{a_1^2}{a_0}\right)y + \left(9a_3 - \frac{a_1a_2}{a_0}\right)$

$: (6a_0a_2 - 2a_1^2)y + (9a_0a_3 - a_1a_2) =$

$\left[3a_0(6a_0a_2 - 2a_1^2)y^2 + 2a_1(6a_0a_2 - 2a_1^2)y + a_2(6a_0a_2 - 2a_1^2)\right] : \quad =$

$-\underline{3a_0(9a_0a_3 - a_1a_2)y} \qquad 3a_0y$

$12a_0a_1a_2 - 4a_1^3 - 18a_0^2a_3 + 3a_0a_1a_2$

$\underline{(15a_0a_1a_2 - 4a_1^3 - 18a_0^2a_3)y + a_2(6a_0a_2 - 2a_1^2)}$

$-(15a_0a_1a_2 - 4a_1^3 - 18a_0^2a_3)(9a_0a_3 - a_1a_2) + 2a_2(3a_0a_2 - a_1^2)^2 =$

$-135a_0^2a_1a_2a_3 + 36a_0a_1^3a_3 + 162a_0^2a_3^2 + 15a_0a_1^2a_2^2 - 4a_1^4a_2 - 18a_0^2a_1a_2a_3$

-153 $\qquad 3 \qquad 2$

$9a_0^2a_2^3 - 12a_0a_1^2a_2^2 + 2a_1^4a_2$

$-153a_0^2a_1a_2a_3 + 36a_0a_1^3a_3 + 162a_0^2a_3^2 + 3a_0a_1^2a_2^2 - 2a_1^4a_2 + 9a_0^2a_2^3$

$\sigma_1 = \tau_1 + y_n$

$\sigma_2 = \tau_2 + y_n\tau_1$

$\sigma_k = \tau_k + y_n\tau_{k-1}$

$\sigma_n = y_n\tau_{n-1}$

$y_0y_2 - (y_1 + y_2)$ $\qquad (y_1 + y_2 + y_3)(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)$

$y_1y_2 + (y_1 + y_2)^2$

$(3a_0y_1^2 + 2a_1y_1 + a_2)(3a_0y_2^2 + 2a_1y_2 + a_2)(3a_0y_3^2 + 2a_1y_3 + a_2)$

$9a_0^2y_1^2y_2^2 + 6a_0a_1(y_1y_2^2 + y_1^2y_2) + 3a_0a_2(y_1^2 + y_2^2) + 4a_1^2y_1y_2 + 2a_1a_2(y_1 + y_2) + a_2^2$

$a_2 \mid 9a_0^2\tau_2^2 + 6a_0a_1\tau_1\tau_2 + 3a_0a_2(\tau_1^2 - 2\tau_2) + 4a_1^2\tau_2 + 2a_1a_2\tau_1 + a_2^2$

$a_2(\quad " \sigma \quad) - f = f'\sigma_3$

$a_2(18a_0^2\tau_2\tau_1 + 6a_0a_1\tau_2 + 6a_0a_1\tau_1^2 + 3a_0a_2(2\tau_1 - 2\tau_1) + 4a_1^2\tau_1 + 2a_1a_2) -$

$-2a_1(9a_0^2\tau_2^2 + 6a_0a_1\tau_1\tau_2 + 3a_0a_2(\tau_1^2 - 2\tau_2) + 4a_1^2\tau_2 + 2a_1a_2\tau_1 + a_2^2) =$

$= \tau_{2+1}[f']_0$

$\underline{18a_0^2a_2\tau_1\tau_2} + \underline{6a_0a_1a_2\tau_2} + \underline{6a_0a_1a_2\tau_1^2} + \underline{4a_1^2a_2\tau_1} + \underline{2a_1a_2^2}$

$-\underline{18a_0^2a_1\tau_2^2} - \underline{12a_0a_1^2\tau_1\tau_2} - \underline{6a_0a_1a_2(\tau_1^2 - 2\tau_2)} - \underline{8a_1^3\tau_2} - \underline{4a_1^2a_2\tau_1}$

$-2a_1a_2^2 = \tau_2[f'_0]$

$18a_0a_1a_2\tau_2 + 18a_0^2a_2\tau_1\tau_2 - 12a_0a_1^2\tau_1\tau_2 - 18a_0^2a_1\tau_2^2 - 8a_1^3\sigma_2$

$f' = 18a_0a_1a_2 + 18a_0^2a_2\sigma_1 - 12a_0a_1^2\sigma_1 - 18a_0^2a_1\sigma_2 - 8a_1^3$

$f = 9a_0^2a_2\sigma_2^2 + 6a_0a_1a_2\sigma_1\sigma_2 + 3a_0a_2^2\sigma_1^2 - 6a_0a_2^2\sigma_2 + 4a_1^2a_2\sigma_2 + 2a_1a_2^2\sigma_1 + a_2^3$

$-18a_0a_1a_2\sigma_3 - 18a_0^2a_2\sigma_1\sigma_3 + 12a_0a_1^2\sigma_1\sigma_3 + 18a_0^2a_1\sigma_2\sigma_3 + 8a_1^3\sigma_3$

$\underline{9a_0^2a_2^3} - \underline{6a_0a_1^2a_2^2} + \underline{3a_0a_1^2a_2^2} - \underline{6a_0^2a_2^3} + \underline{4a_0a_1^2a_2^2} - \underline{2a_0a_1^2a_2^2}$

$+\underline{a_0^2a_2^3} + \underline{18a_0^2a_1a_2a_3} - \underline{18a_0^2a_1a_2a_3} + \underline{12a_0a_1^3a_3} - \underline{18a_0^2a_1a_2a_3}$

$-8a_0a_1^3a_3$

$4a_0^2a_2^3 - 12a_0a_1^2a_2^2 + 4a_0a_1^3a_3 - 18a_0^2a_1a_2a_3$

4

σ_1	$-\frac{2a_1}{3}$	$-2a_1$
σ_2	$\frac{a_2}{3}$	a_2

$(y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3) \qquad 3y^2 + 2a_1 y + a_2$

$(y_1^3 + a_1 y_1^2 + a_2 y_1 + a_3)(y_2^3 + a_1 y_2^2 + a_2 y_2 + a_3)$

$y_1^3 y_2^3 + a_1(y_1^2 y_2^3 + y_2^2 y_1^3) + a_2(y_1 y_2^3 + y_2 y_1^3) + a_3(y_1^3 + y_2^3) +$

$+ a_1^2 y_1^2 y_2^2 + a_1 a_2 (y_1 y_2^2 + y_2 y_1^2) + a_1 a_3 (y_1^2 + y_2^2) + a_2^2 y_1 y_2 + a_2 a_3 (y_1 + y_2)$

$+ a_3^2$

$\sigma_2^3 + a_1 \sigma_2^2 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + a_3 (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) + a_1^2 \sigma_2^2 +$

$+ a_1 a_2 \sigma_2 \sigma_1 + a_1 a_3 (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + a_2^2 \sigma_2 + a_2 a_3 \sigma_1 + a_3^2$

$\frac{a_2^3}{} - a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_2^2 - 2a_2^3 - a_1^3 a_3 + 3 a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_2^2$

$- a_1^2 a_2^2 + a_1^3 a_3 - 2 a_1 a_2 a_3 + a_2^2 - a_1 a_2 a_3 + a_3^2 =$

$=$

$\frac{a_2^3}{27} - \frac{2a_1^2 a_2^2}{27} + \frac{4 a_1^2 a_2^2}{27} - \frac{2a_2^3}{9} - \frac{8 a_1^3 a_3}{27} + \frac{6 a_1 a_2 a_3}{9} + \frac{a_1^2 a_2^2}{9}$

$- \frac{2a_1^2 a_2^2}{9} + \frac{4 a_1^3 a_3}{9} - \frac{2 a_1 a_2 a_3}{3} + \frac{a_2^3}{3} - \frac{2 a_1 a_2 a_3}{3} + a_3^2$

$\frac{a_1^2 a_2^2}{9} - \frac{2 a_1 a_2 a_3}{3} + \frac{4}{27} a_1^3 a_3 + a_3^2$

$27 a_3^2 + 4 a_1^3 a_3 - 18 a_1 a_2 a_3 + 3 a_1^2 a_2^2$

$- a_1^2 a_2^2$

$a_2^3 - 2a_1^2 a_2^2 + 4 a_1^2 a_2^2 - 6 a_2^3 - 8 a_1^3 a_3 + 3 a_1^2 a_2^2 - 6 a_1^2 a_2^2 + 12 a_1^3 a_3$

$+ 9 a_2^3 - 18 a_1 a_2 a_3 + 27 a_3^2 =$

$= 4 a_2^3 - a_1^2 a_2^2 + 4 a_1^3 a_3 - 18 a_1 a_2 a_3 + 27 a_3^2$

$y_1^3 + y_2^3 = \sigma_1^3 - 3(y_1 y_2^2 + y_2 y_1^2)$

$= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$

$y^3 + a_2 y$

$3y^2 + a_2$