MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Das Delische Problem der Würfelverdopplung"

Eine historisch-algebraisch-didaktische Betrachtung

verfasst von / submitted by

Magdalena Hollerweger, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UT 196 070 057 UA
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Musikerziehung UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Hörmann

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

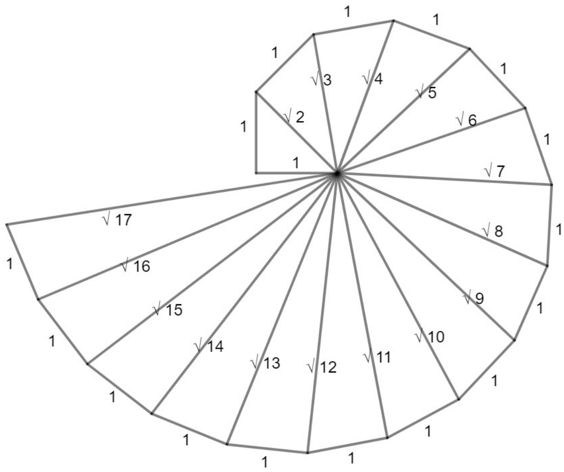
Das Problem der Würfelverdopplung, auch *Delisches Problem* genannt, gehört neben der *Winkeldreiteilung* und der *Quadratur des Kreises* zu den *drei klassischen Konstruktionsproblemen* der Antike. Aufgrund dessen, dass es ein bereits sehr lange behandeltes Problem ist, ist dem *Delischen Problem* neben seiner vermeintlich trivialen Fragestellung auch im mathematisch-historischen Kontext eine große Bedeutung zuzuschreiben. Zwar konnte rund 2000 Jahre kein Beweis dafür gefunden werden, doch die gerade in der Antike (rund 350 Jahre v. Chr.) intensive Beschäftigung mit dem Problem brachte unter anderem neue mathematische Fortschritte, wie beispielsweise die Entdeckung der Kegelschnitte (Menaichmos), hervor. [12, vgl. S. 177, 194]

Die Frage, die sich beim *Delischen Problem* stellt, ist, ob es möglich ist, ausgehend von einem Würfel mit der Seitenlänge 1, nur mit Zirkel und Lineal einen Würfel zu konstruieren, der das doppelte Volumen hat. Diese Fragestellung klingt zunächst wohl trivial, denn das Volumen eines Würfels mit der Seitenlänge 1 ist 1, das eines doppelten Würfels demnach 2. Da bekannt ist, dass alle Seitenlängen eines Würfels gleich lang sind, ist die logische Folgerung, dass die Seitenlänge des doppelten Würfels also eine Länge von $\sqrt[3]{2}$ aufweisen muss. Anders ausgedrückt könnte man das Problem beschreiben, indem man fragt, ob sich aus der Strecke der Länge 1 eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ konstruieren lässt. Worin liegt nun also das Problem? Aus heutiger Sicht wissen wir, dass die Problematik darin liegt, dass sich die Fragestellung der Konstruktion auf die *euklidischen Mittel* beschränkt. [13, vgl. S. 5]

Unter den sogenannten euklidischen Mitteln versteht man die geometrischen Hilfsmittel Zirkel und Lineal, wobei es sich bei der Bezeichnung *Lineal* nicht um ein heute gebräuchliches Lineal mit Markierungen handelt, sondern um eines ohne Markierungen. Die Beschränkung auf die euklidischen Mittel und die damit einhergehenden Konstruktionsvorschriften ermöglichen folgende elementare Konstruktionen: durch zwei Punkte kann eine (Verbindungs-)Gerade gelegt werden, zu zwei nicht parallelen Geraden kann man ihren Schnittpunkt konstruieren, um einen Punkt kann man einen Kreis mit beliebigem oder durch zwei Punkte gegebenen Radius zeichnen und man kann die Schnittpunkte zweier Kreise beziehungsweise eines Kreises mit einer Geraden konstruieren. Die genannten Konstruktionen dürfen dabei nur endlich oft angewendet werden. Diese Konstruktionsvorschriften für elementare Konstruktionen mit euklidischen Mitteln können historisch gesehen auf den griechischen Mathematiker Euklid (3. Jhdt. v. Chr.) zurückgeführt werden, der diese in seinem Werk *Die Elemente* verschriftlichte. Eine genaue Ausführung der Konstruktionsvorschriften wird in Kapitel 3.2 dargelegt. [2, vgl. S. 9], [16, vgl. S. 2f]

Die elementaren Konstruktionsvorschriften und die Beschränkung auf Zirkel und Lineal könnten dazu führen, dass man fälschlicherweise glaubt, dass dadurch nur rationale

Zahlen konstruiert werden können. Doch die *Wurzelschnecke* zeigt beispielsweise, dass sich ebenso Quadratwurzelzahlen mit Zirkel und Lineal exakt konstruieren lassen. [17, vgl. S. 234f]



Um auf die in den vorigen Absätzen ausgeführte Problematik der Konstruierbarkeit der Würfelverdopplung mittels euklidischer Mittel zurückzukommen, sei gesagt, dass das Problem der Würfelverdopplung in der Geschichte sehr lange eine mathematische Fragestellung darstellte. Wie in Kapitel 2 ausführlich dargelegt, besagt die Überlieferung, dass bereits im antiken Griechenland sich zunächst Hippokrates von Chios und später auch weitere bedeutende Mathematiker der damaligen Zeit im Zusammenhang mit *Platons Akademie* in Athen damit beschäftigten. Es wurden zwar zahlreiche Lösungen gefunden, diese waren aber entweder nur theoretisch oder mit mechanischen Mitteln lösbar. Eine elementar-geometrische Lösung konnte nicht gefunden werden. Obwohl die Fragestellung zur Würfelverdopplung relativ einfach klingen mag und die zu ihrer Zeit vermutlich *besten* Mathematiker sich um geometrische Lösungen mit euklidischen Mitteln bemühten, konnte keine Konstruktionsmöglichkeit für die Zahl $\sqrt[3]{2}$ gefunden werden. [12, vgl. S. 207f]

Der eigentliche Grund dafür, dass selbst bis ins 19. Jahrhundert keine geometrischen Lösungen oder Beweise gefunden werden konnten, liegt im Übergang von der rein geometrischen Behandlung geometrischer Probleme zu rechnerischen (algebraischen) Überlegungen dieser Fragestellungen. Betrachtet man die historische Entwicklung der Mathematik, so war die Algebra in der Antike noch zu wenig weit entwickelt um derartige Fragestellungen, wie beispielsweise das *Delische Problem*, algebraisch beweisen zu können. Erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts lieferte der Mathematiker Carl Friedrich Gauß wichtige Grundlagen der Algebra, sodass dann schließlich im Jahr 1837 ein Beweis für die algebraische Widerlegung der Möglichkeit der Würfelverdopplung mittels Zirkel und Lineal vom französischen Mathematiker Pierre Laurent Wantzel gefunden werden konnte. [8, vgl. S. 187]

Um mögliche Irritationen, ob die Würfelverdopplung nun möglich ist oder nicht, vorab aus dem Weg zu räumen, gilt zu sagen, dass obwohl die im Kapitel 2 dargelegten (mechanischen) Lösungsansätze des Problems den Anschein vermitteln das Problem der Würfelverdopplung wäre zu lösen, gilt nochmals zu betonen, dass dies in der Beschränkung auf die euklidischen Mittel Zirkel und Lineal erwiesenermaßen nicht möglich ist. Der ausführliche algebraische Unmöglichkeitsbeweis wird in Kapitel 3 gebracht.

Im 4. Kapitel werden anschließend eine didaktische Auseinandersetzung und Möglichkeiten für die Vermittlung und Behandlung des *Delischen Problems* im Mathematikunterricht in der Schule gezeigt. Da der algebraische Beweis Grundlagen und Wissen der Hochschulmathematik erfordert, kann dieser im Schulunterricht nicht sinnvoll behandelt werden. Einen alternativen Lösungsansatz bietet allerdings, das in Kapitel 4 diskutierte Konzept mittels *Origamics*. Dies ist eine sehr anschauliche und im Unterricht durchführbare Lösungsmöglichkeit des Problems der Würfelverdopplung, allerdings ist auch hier nicht zu vergessen, dass es sich um keine elementar-geometrische Lösung mit Zirkel und Lineal handelt.

Da das Problem der Würfelverdopplung bisher in der Literatur größtenteils entweder historisch oder rein mathematisch (algebraisch) betrachtet wurde, gilt als Ziel dieser Arbeit, die eben genannten vielseitigen Betrachtungsweisen des *Delischen Problems* in *einem* zu behandeln und gegebenenfalls Verbindungen aufzuzeigen. Die Darlegung dieser beiden Wissenschaftsgebiete und die didaktische Behandlung und Interpretation des *Delischen Problems* für die Schule sollen infolgedessen den Hauptgegenstand dieser Arbeit darstellen.

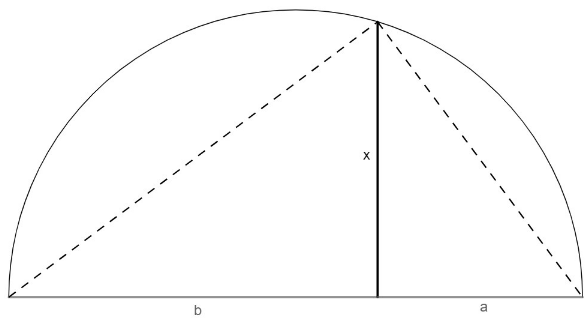
2 Historische Entwicklung von Lösungsansätzen

Wie schon in der Einleitung erläutert, gehört das *Problem der Würfelverdopplung* zu den sogenannten *drei klassischen Konstruktionsproblemen* der Antike. Dabei war Zeugnissen zufolge Hippokrates von Chios rund 400 Jahre v. Chr. einer der ersten, der sich damit beschäftigte. Hippokrates brachte jedoch keine direkte Lösung des Problems hervor, indes führte er das Problem der Verdopplung des Würfels auf das Auffinden von *zwei mittleren Proportionalen* zwischen zwei gegebenen Strecken zurück. Erwähnt wird dies im frühesten direkten Zeugnis zur Würfelverdopplung im fachmathematischen Kontext, einem Brief des Eratosthenes an den König Ptolemaios, welcher sich auf den Zeitraum Mitte beziehungsweise Ende des 2. Jahrhunderts v. Chr. datieren lässt. [12, vgl. S. 179-181]

Darin berichtet Eratosthenes über Hippokrates wie folgt:

> „[...]. *Während alle sich für lange Zeit in einer großen Aporie befanden, bemerkte als erster Hippokrates von Chios, dass wenn man herausfindet, wie man zwischen zwei geraden Linien, von denen die längere das Doppelte der kürzeren ist, zwei mittlere Proportionalen in kontinuierlicher Proportion bestimmt, der Würfel verdoppelt sein wird, so dass sich ihm das Problem in ein anderes, nicht geringeres Problem verwandelte.* [...].“ [12, S. 181]

Diese Aussage von Eratosthenes beschreibt somit vielmehr, dass Hippokrates zwar mit dem Auffinden der *zwei mittleren Proportionalen* ein Äquivalent zum Problem der Würfelverdopplung gefunden hätte, dies aber noch nicht die Lösung des Problems darstelle, da sich dadurch *„das Problem in ein anders, nicht geringeres Problem verwandelte“* [12, S. 181]. Formal mathematisch wird die Bestimmung einer mittleren Proportionalen durch das Auffinden eines Elements x durchgeführt, sodass die Proportion $a : x = x : b$ gilt.



Die Bestimmung einer mittleren Proportionalen führt daher auf die Quadratwurzel

$$x^2 = ab \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}\,.$$

Die Ermittlung von *zwei* mittleren Proportionalen ist somit die Erweiterung des eben dargestellten Zusammenhangs. Das heißt, es sollen demzufolge die beiden Größen x und y so bestimmt werden, dass $a : x = x : y = y : b$ gilt. Dies bedeutet nichts anderes, als dass die drei einfachen Proportionen

$$\text{(I)}\ \ \frac{a}{x} = \frac{x}{y} \qquad \text{(II)}\ \ \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \qquad \text{(III)}\ \ \frac{a}{y} = \frac{y}{b}$$

gelten müssen. Diese lassen sich wiederum in folgende Gestalt umformen:

$$\text{(I')}\ \ ay = x^2 \qquad \text{(II')}\ \ bx = y^2 \qquad \text{(III')}\ \ ab = xy\ .$$

Hippokrates behauptet laut Eratosthenes, dass man die Verdopplung eines Würfels mit der Kante a erhält, wenn man die größere gegebene Strecke b doppelt so groß wie die kleinere Strecke wählt. Daraus folgt, dass laut Hippokrates $b = 2a$ gelten muss. Setzen wir für b nun $2a$ in die obigen Gleichungen ein, so erhalten wir (II") $2ax = y^2$ beziehungsweise (III") $2a^2 = xy$. Lösen wir nun die Gleichungen (I') und (III") nach y auf und setzen die beiden Werte für y gleich, so erhalten wir

$$\frac{x^2}{a} = \frac{2a^2}{x} \quad \text{beziehungsweise} \quad x^3 = 2a^3\ . \ \ \text{[2, vgl. S. 12-14]}$$

Und dieser Zusammenhang beschreibt wieder (im Spezialfall mit $a = 1$) das Problem der Würfelverdopplung, nämlich $x = \sqrt[3]{2}$. Wenn es also gelingt zwischen a und $2a$ zwei mittlere Proportionalen zu konstruieren, dann wäre das Problem der Konstruktion der Würfelverdopplung gelöst. [4, vgl. S. 42f] Wie aber aus dem *Brief des Eratosthenes* herauszulesen ist, hat Hippokrates lediglich einen ersten Schritt der Lösung mithilfe der mittleren Proportionalen getan, einen Beweis für die Konstruktion des Problems der Würfelverdopplung gab es zu diesem Zeitpunkt also noch nicht.

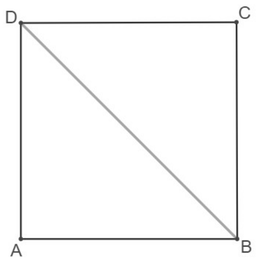
Der Brief des Eratosthenes liefert nicht nur Hinweise auf eine der ersten Auseinandersetzungen und Lösungsansätze durch Hippokrates von Chios, sondern gibt auch Auskunft über die Entstehung des Problems, die Namensgebung des *Delischen Problems* und mechanische Lösungsansätze zur Konstruktion der Würfelverdopplung.

> *„König Ptolemaios von Eratosthenes zum Gruß*
> *Von einem der alten Tragödiendichter sagt man, dass er Minos als jemanden auf die Bühne bracht habe, der beim Bau des Grabes für Glaukos - nachdem er erfahren hatte, dass es überall hundert Fuß lang sei - sagte:*
> *‚Von einem kleinen Bezirk für ein königliches Grab hast du da geredet.*
> *Doppelt so groß sei er! Ohne vom Schönen abzuweichen*
> *verdopple jedes Glied des Grabes in Schnelligkeit!‘*
> *Er schien sich aber gründlich zu irren - denn wenn die Seiten verdoppelt werden, wird die Fläche viermal so groß, der Körper achtmal so groß. Gesucht wurde aber auch bei den Geometern, auf welche Weise man einen gegebenen*

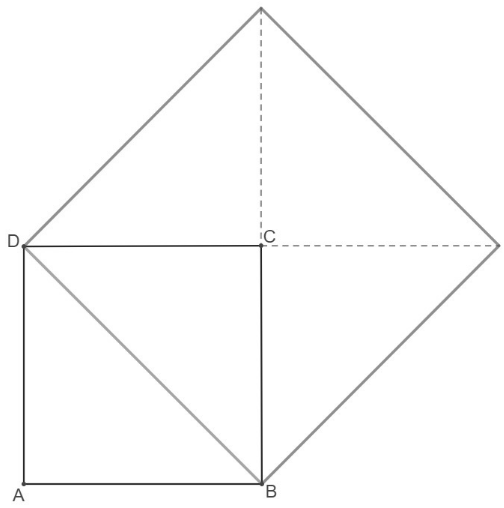
Körper unter Beibehaltung seiner Form verdoppeln könnte, und das derartige Problem wurde ‚Verdoppelung des Würfels' genannt - denn unter Zugrundelegung eines Würfels suchte man diesen zu verdoppeln. Während alle sich für lange Zeit in einer großen Aporie befanden, bemerkte als erster Hippokrates von Chios, dass wenn man [...] *zwei mittlere Proportionalen in kontinuierlicher Proportion bestimmt, der Würfel verdoppelt sein wird* [...].
Nach einiger Zeit, sagt, man, seien einige Delier im Wunsch, einem Orakel gemäß einen ihrer Altäre zu verdoppeln, auf dasselbe Problem gestoßen und hätten Nachrichten zu den Geometern bei Platon in der Akademie gesandt, im Glauben, diese könnten für sie das Gesuchte finden. Von denjenigen, die sich eifrig an die Arbeit machten und danach suchten, zwei mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen geraden Linien zu bestimmen, soll Archytas von Tarent diese mittels Halbzylinder gefunden haben und Eudoxos durch die sogenannten ‚krummen Linien'. [...]. *"* [12, S. 181f]

Dieser Auszug aus dem Brief des Eratosthenes stellt also in mehr oder weniger chronologischer Reihenfolge die Geschehnisse rund um das Problem der Würfelverdopplung dar. Zunächst bildet die Legende um die Verdopplung des königlichen Grabes den Ausgangspunkt für die Überlegungen der Konstruktion des doppelten Volumens eines Würfels. Aus welcher Zeit und von wem dieses Zitat tatsächlich stammt, lässt sich aus heutiger Sicht nicht nachvollziehen. Laut Lattmann spiegelt dieses Zitat aber einerseits wider, dass Eratosthenes darstellen wollte, dass schon früh versucht wurde, für dieses Problem eine Lösung zu finden, Eratosthenes andererseits auch einen ergreifenden, bildhaften Einstieg in das Thema gewährleisten wollte beziehungsweise er das Problem der Würfelverdopplung somit auch in Bezug zur Quadratverdopplung stellen wollte. [12, vgl. S. 182]

Die Verdopplung des Quadrats war zu dieser Zeit ebenfalls eine behandelte Aufgabe, allerdings tauchte diese Fragestellung vermutlich vor der Würfelverdopplung auf und konnte, im Gegensatz zu dieser, (mit Zirkel und Lineal) gelöst werden. Hierfür nimmt man ein Quadrat mit beliebig gewählten Seitenlängen und zeichnet die Diagonale ein.



Als nächsten Schritt bildet man über der Diagonale ein erneutes Quadrat, dessen Seitenlänge nun die Länge der Diagonale ist.



Das somit entstandene zweite Quadrat besteht also aus vier Dreiecken, die gleich den zwei Dreiecken sind, die das erste Quadrat bildeten. Dadurch hat man ein neues Quadrat konstruiert, das den doppelten Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats aufweist. [10, vgl. S. 18f], [14, vgl. S. 41]

Als weiteren Punkt berichtet der Brief über die von Hippokrates dargelegte Äquivalenz zwischen der Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen und der Würfelverdopplung. Daraufhin folgt der Bericht über die Delier, die ebenfalls auf dieses Problem gekommen waren und schließlich noch ein kurzer Überblick über die daraufhin gefundenen Lösungen.

Über die Anekdote der Delier, von daher auch der oft genannte Name des Problems, das *Delische Problem* rührt, schreibt auch der Philosoph und Mathematiker Theon aus Smyrna im frühen 2. Jahrhundert n. Chr., indem er sich auf das ebenfalls von Eratosthenes verfasste Werk *Platonikos* bezieht.

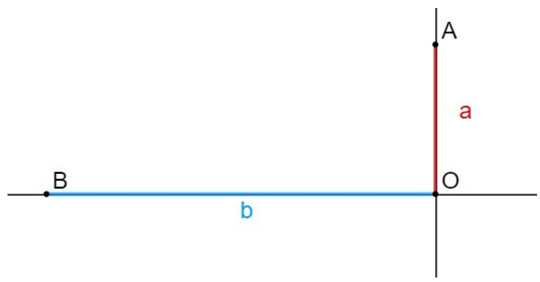
> *„Eratosthenes sagt nämlich in dem mit ‚Platonikos' betitelten Werk, dass - nachdem der Gott den Deliern den Orakelspruch gegeben hatte, dass sie zur Erlösung von der Pest einen im Vergleich mit dem existierenden doppelt so großen Altar verfertigen sollten - eine große Ratlosigkeit die Architekten befallen habe, als sie danach suchten, auf welche Weise ein Körper doppelt so groß wie ein Körper werden müsse. Sie seien zu Platon gegangen, um*

hierüber etwas in Erfahrung zu bringen, und er habe ihnen gesagt, dass der Gott den Deliern den Orakelspruch nicht im Wunsch nach einem doppelten Altar gegeben habe, sondern den Griechen zum Vorwurf und zum Tadel, da sie die Mathematik vernachlässigten und die Geometrie geringschätzen.“ [12, vgl. S. 189]

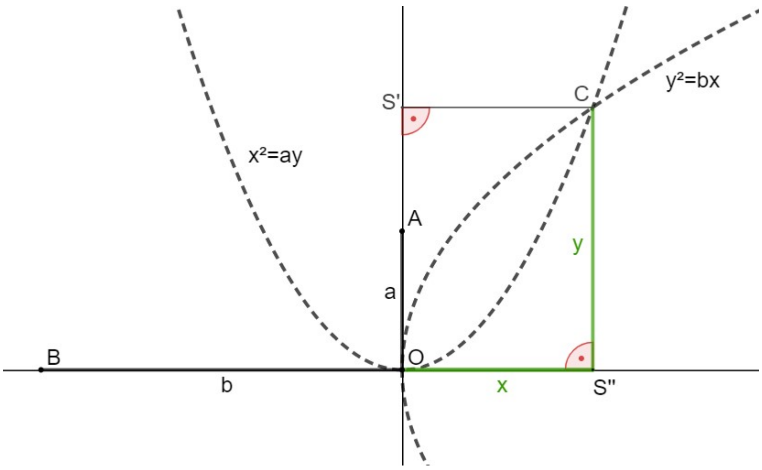
Sowohl in diesem Schriftstück, als auch im Brief des Eratosthenes an den König Ptolemaios wird darüber berichtet, dass sich die Delier mit ihrer Aufgabe der Altarverdopplung an Platon und die sogenannten *Geometer* seiner Akademie in Athen wandten. Dadurch, dass das Problem der Würfelverdopplung im Fokus der mathematischen Forschung, laut Lattmann auf den Zeitraum 361 bis 350 v. Chr. datiert, war, entstanden in dieser Zeit auch die ersten Lösungen des Problems durch Archytas von Taras, Eudoxos und Menaichmos, drei der bedeutendsten Mathematiker dieser Zeit. [12, vgl. S. 193f]

Die Lösung des Archytas beispielsweise ist dabei äußerst komplex, da die beiden mittleren Proportionalen durch Halbzylinder und rotierende Körper gefunden werden können. Diese Lösung des Problems der Würfelverdopplung wurde von Eudemos niedergeschrieben und kann unter anderem in [14, *Abschnitt 3*, *III*] nachgelesen werden.

Wie eben erwähnt, sollen auch Eudoxos und Menaichmos Lösungen zum Problem gefunden haben. Dabei gilt die des Menaichmos als historisch besonders interessant, da dieses Ergebnis mithilfe von Kegelschnitten gefunden wurde und somit auf die Entdeckung der Kegelschnitte führte. [8, vgl. S. 178] Betrachten wir die Lösung des Menaichmos genauer, so gelten zwei Geraden mit dem Schnittpunkt O, die normal aufeinander stehen, als Ausgangspunkt. Von Schnittpunkt O ausgehend, trägt man auf der einen Geraden die Strecke a ab und erhält den Punkt A, ebenso ist auf der anderen Geraden die Strecke b abzutragen und man erhält den Punkt B.



Als nächsten Schritt konstruiert man zwei Parabeln in erster beziehungsweise zweiter Hauptlage, die ihren Scheitel im Punkt O haben und deren Brennpunkt auf der Geraden durch BO beziehungsweise AO liegt. Als Parameter für die beiden Parabeln werden hierbei die Strecken b beziehungsweise a verwendet. Der durch die Konstruktion der beiden Parabeln entstehende Schnittpunkt wird mit C bezeichnet.



Die Strecken x und y ergeben sich dabei durch den Normalabstand der Trägergeraden von BO beziehungsweise AO zum Schnittpunkt C der beiden Parablen, also

$$CS' = x \qquad \text{und} \qquad CS'' = y \; .$$

Betrachtet man nun die beiden Parabeln ergibt sich für die erste Parabel durch das Einsetzen der Parameter in die Definition

$$y^2 = b \cdot x \; , \quad also \quad x : y = y : b \; .$$

Für die zweite Parabel ergibt sich dadurch

$$x^2 = a \cdot y \; , \quad also \quad x : y = a : x \; .$$

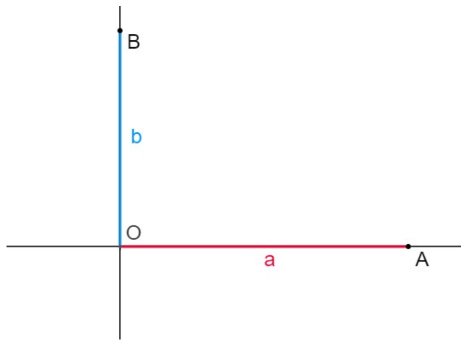
Verknüpft man die beiden Gleichungen, erhält man abermals die Proportion

$$a : x = x : y = y : b \; .$$

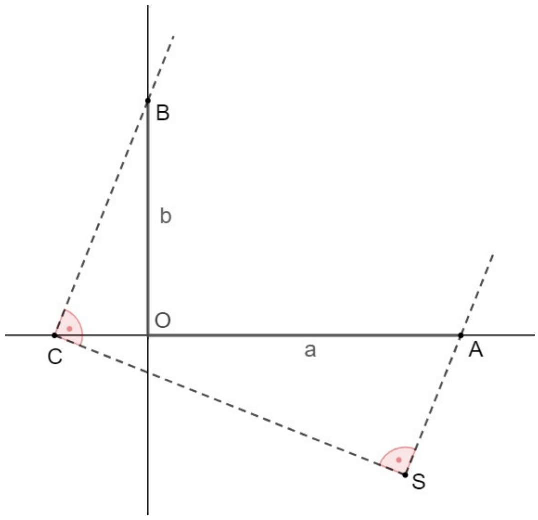
Setzt man nun wiederum in die daraus resultierende Gleichung $x^3 = a^2 b$ für $b = 2a$ ein, so erhält man die Lösung zur Würfelverdopplung. [4, vgl. S. 44f], [10, vgl. S. 30-32]

Man kann also erkennen, dass Menaichmos in seiner Lösung auf das Finden zweier mittlerer Proportionalen baut. Eine weitere anschauliche Lösung, die ebenfalls die Suche der zwei mittleren Proportionalen als Ziel hat, ist folgende:

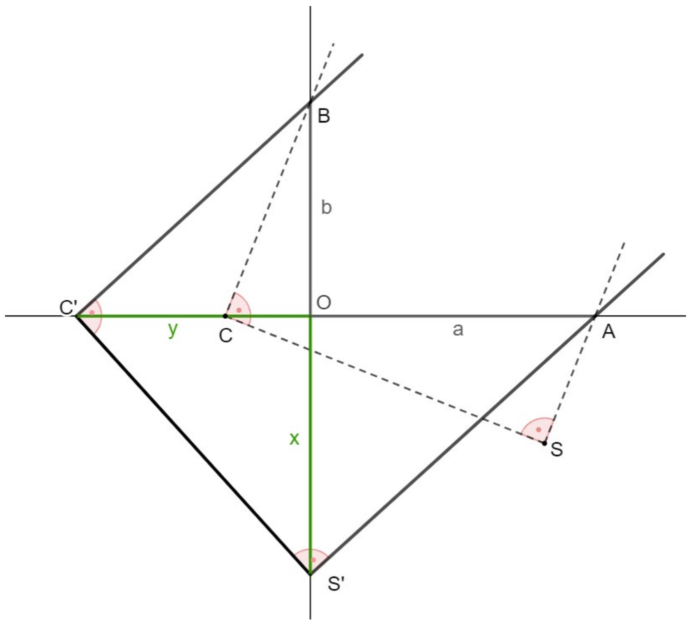
Zwei zueinander senkrechte Geraden, deren Schnittpunkt O ist, werden gezeichnet. Vom Punkt O ausgehend trägt man auf der einen Geraden die Strecke a, auf der anderen Geraden die Strecke b, ab und erhält somit die Punkte A und B.



Anschließend konstruiert man eine durch den Punkt B verlaufende beliebige Gerade, die die Achse, auf der a liegt, schneidet. Dieser Schnittpunkt wird als Punkt C bezeichnet. Im Punkt C wird nun eine Gerade konstruiert, die senkrecht auf BC steht, und die zu BC parallele Gerade durch den Punkt A schneidet. Dieser Schnittpunkt wird mit S bezeichnet.



Die erhaltene Konstruktion soll nun an den Drehpunkten A und B solange gedreht beziehungsweise verschoben werden, bis der Punkt S auf der Geraden BO zu liegen kommt. Gleichzeitig soll der Punkt C aber weiterhin auf der Geraden AO liegen.



Die dadurch erhaltenen *neuen* Punkte auf den Geraden AO und BO werden mit S' beziehungsweise C' bezeichnet. Werden nun die Strecken $OS' := x$ und $OC' := y$ definiert, so erhält man über den Höhensatz, dass

$$OS'^2 = OC' \cdot AO \;\;, \text{ also } \; x^2 = y \cdot a \qquad \text{und}$$

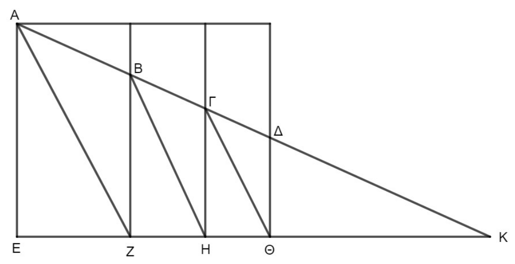
$$OC'^2 = BO \cdot OS' \;\;, \; also \;\; y^2 = b \cdot x$$

gilt. Daraus folgt die Proportionskette $a : x = x : y = y : b$, wobei x und y die zwei mittleren Proportionalen darstellen. [4, vgl. S. 43f], [10, vgl. S. 28-30]

Der eben dargelegte Lösungsweg des *Delischen Problems* mittels einer Konstruktion, die verschoben wird, ist in den Schriften des Eutokios von Askalon, einem späteren Kommentator von Archimedes, zu finden. Dieser schreibt den Ansatz Platon zu. Dies wird in der Literatur jedoch als äußerst fraglich dargestellt, da überliefert wird, dass Platon sich gegen mechanische Mittel, welche die obigen beiden Lösungen enthalten, zur Lösung von mathematischen Problemen ausgesprochen habe. Lattmann verweist allerdings darauf, dass es sich hierbei tatsächlich um einen von Platon überlieferten Vorschlag, wohl eher im Kontext eines heuristischen Mittels „*zum Finden eines möglichen eigentlichen Lösungsweges*“ [12, S. 241], handle. [12, vgl. S. 215f]

Einen dritten gut überlieferten mechanischen Lösungsansatz liefert Eratosthenes selbst. Ein Bronzemodell davon, bestehend aus drei dreieckigen oder viereckigen Plättchen, befand sich im Tempel des Königs Ptolemaios. Die Lösung ließ er darunter in Stein meißeln und lautete wie folgt:

> „*Zu zwei gegebenen Strecken zwei mittlere Proportionale in fortlaufender Proportion zu finden. Gegeben seien die Strecken* AE *und* $\Delta\Theta$*, dann bringe ich die Plättchen des Instruments zueinander, bis die Punkte* $AB\Gamma\Delta$ *auf einer Geraden liegen. Nun verhält sich* KA *zu* KB*, da* AE *und* BZ *parallel sind, wie* KE *zu* KZ *wie* KZ *zu* KH*. Aber so verhalten sich auch* AE *zu* BZ *zueinander und auch* BZ *zu* ΓH*. Genau so beweisen wir, dass* BZ *sich zu* ΓH *verhält wie* ΓH *zu* $\Theta\Delta$*. Also bilden* AE*,* BZ*,* ΓH *und* $\Delta\Theta$ *eine (stetige) Proportion. Man findet also zu zwei gegebenen (Strecken) zwei mittlere Proportionale.*
> *Wenn nun die gegebenen Strecken nicht gleich* AE *und* $\Delta\Theta$ *zu ihnen proportional machen; wir führen sie auf diese zurück, und der Auftrag wird ausgeführt sein.* [...].“ [17, S. 385]



[1]

[17, vgl. S. 384f]

Die Bekanntheit des *Delischen Problems* und, wie in der Einleitung bereits erläutert, ihre vermeintlich einfache Gestalt haben dazu geführt, dass sich ab der Antike zahlreiche Mathematiker*innen damit befasst haben. Zu den oben genannten antiken Mathematikern, kommen unter anderem noch Heron, Philon, Diokles, Pappos, Sporos und Nikomedes. Später, im Jahr 1647, lieferte Gregorius a San Vincentio, ein Jesuitenmathematiker, eine weitere (mechanische) Konstruktion zur Auffindung zweiter mittlerer Proportionalen. [12, vgl. S. 197], [8, vgl. S. 180]

Obwohl über die Jahre zahlreiche geometrische Versuche stattfanden das *Delische Problem* zu lösen und auch einige *mechanische* Lösungswege gefunden werden konnten,

[1]Eine mathematisch *modernere* Ausführung dieses Beweises zur Würfelverdopplung mithilfe des Modells von Eratosthenes findet sich unter anderem in *Das Delische Problem* von Walter Breidenbach und ist dort in [2, Kapitel II, S. 8f] nachzulesen.

erfolgte der mathematische Beweis zur Widerlegung der Möglichkeit der Würfelverdopplung mit Zirkel und Lineal erst im 19. Jahrhundert mittels *moderner* algebraischer Grundlagen. Im Jahre 1837 erbrachte der französische Mathematiker Pierre Laurent Wantzel schließlich den algebraischen Beweis, dass die Würfelverdopplung mit Zirkel und Lineal unmöglich ist. [13, vgl. S. 6]

3 Algebraische Widerlegung der Würfelverdopplung

Die Lösbarkeit des *Delischen Problems der Würfelverdopplung* lässt sich algebraisch widerlegen. Um dies zeigen zu können bedarf es einerseits der Verwendung der Körperstruktur $\mathbb{C}$, andererseits der Idee der Körpererweiterug. Um vom bereits vorhandenen Wissen algebraischer Strukturen dort hin zu gelangen, muss man sehr grundlegend in der Algebra beginnen.

3.1 Algebraische Grundlagen

In den folgenden Kapiteln werden zunächst die grundlegenden algebraischen Strukturen wie Ringe und Körper, inklusive besonderer Eigenschaften und Spezifikationen, erläutert. Dies wird unter anderem benötigt um die Polynomringe einzuführen beziehungsweise um später die Körpererweiterungen für den Widerspruchsbeweis der Würfelverdopplung ausführen zu können.

Die hier anknüpfenden Inhalte beziehen sich sowohl auf die an der *Universität Wien* gehaltene Vorlesung *Algebra für LAK* im Sommersemester 2015 [5], als auch auf die Quellen *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger* [7], *Lehrbuch der Algebra* [6], *Algebra. Gruppen - Ringe - Körper* [9] und die Basisliteratur für das Lehramtsstudium Mathematik *Einführung in das mathematische Arbeiten* [15].

3.1.1 Ringe

Als Grundlage für die Hinführung zum Beweis definieren wir zunächst die algebraische Struktur der Ringe und weitere dazugehörige Elemente und Strukturen.

Definition (Ring)
Wir betrachten eine nichtleere Menge R mit den zwei Operationen $+, \cdot : R \times R \to R$.

$(R, +, \cdot)$ ist ein Ring, falls:

(R1) $(R, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist.

(R2) $(R, \cdot)$ eine Halbgruppe ist. (Dies ist dann der Fall, wenn $\cdot$ assoziativ ist.)

(R3) $(R, +, \cdot)$ die Distributivgesetze von $+$ bezüglich $\cdot$ erfüllt:

$$\forall a, b, c \in R \text{ ist } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ und } (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \ .$$

Definition (Einselement)
Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Existiert zusätzlich ein Element $1 \in R$ mit $1 \neq 0$, so nennt man dies Einselement, falls $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, für alle $a \in R$.

Definition (Unterring)
Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. $S \subseteq R$ heißt Unterring von R, falls gilt:

$$\forall a, b \in S : a + b \in S \;\text{ und }\; a \cdot b \in S \; .$$

S ist mit den von R übernommenen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Ring.

Definition (Ringhomomorphismus)
Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, \oplus, \otimes)$ zwei Ringe. Eine Abbildung $f : R \to S$ heißt Ringhomomorphismus, falls $\forall a, b \in R$ gilt:

$$f(a+b) = f(a) \oplus f(b), \;\; f(a \cdot b) = f(a \otimes b) \; .$$

Definition (Einheit, Einheitengruppe)
Ein Ring R mit $1, a \in R$ heißt Einheit, falls $\exists\ \tilde{a} \in R$ für das gilt $a \cdot \tilde{a} = \tilde{a} \cdot a = 1$.
Die Menge $R^\times := \{a \in R \mid a \text{ ist Einheit}\}$ ist dann eine Gruppe bezüglich der Multiplikation $\cdot$, die sogenannte Einheitengruppe von R, denn:

(i) $a, b \in R^\times \Rightarrow \exists\ \tilde{a}, \tilde{b} \in R : \tilde{a}a = a\tilde{a} = 1 = b\tilde{b} = \tilde{b}b \Rightarrow (ab)(\tilde{b}\tilde{a}) = ab\tilde{b}\tilde{a} = a\tilde{a} = 1 \Rightarrow ab \in R^\times$.
Analoges gilt für $(\tilde{a}\tilde{b})(ab) = 1$.

(ii) $1 \in R^\times$.

(iii) $a^{-1} := \tilde{a}$ stellt das Inverse zu a dar und auch $\tilde{a}$ ist eine Einheit, daher ist a^{-1} in $R^\times$.

Definition (Polynomring)
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Wir betrachten die Menge

$$R[X] := \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \in \underbrace{R^{\mathbb{N}}}_{\text{Folgen in } R} \mid \underbrace{a_j = 0 \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N}}_{\text{d. h. nur für endlich viele } j \text{ ist } a_j \neq 0}\}$$

mit komponentenweiser Addition

$$(a_j)_{j\in\mathbb{N}} + (b_j)_{j\in\mathbb{N}} := (a_j + b_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

und dem sogenannten Cauchy-Produkt

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) := (c_0, c_1, c_2, \dots),$$

wobei $c_k := \sum_{l=0}^{k} a_l \cdot b_{k-l} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$ (Indexsumme $=k$).

Das ergibt einen kommutativen Ring mit Einselement $(1, 0, 0, 0, \dots)$:

$$(1, 0, \dots) \cdot (a_0\ ,\ a_1\ ,\ \dots) = (c_0, c_1, \dots);\ \text{ mit } c_0 = 1 \cdot a_0, c_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_0 = a_1\ ,\ \dots\ ,$$

das heißt $(1, 0, \dots) \cdot (a_0, a_1, \dots) = (a_0, a_1, \dots)$.

Wir schreiben wieder 1 statt $(1, 0, 0, \dots)$.

Mittels $R \to R[X]$, $a \mapsto (a, 0, \dots)$ ist R in $R[X]$ eingebettet, das heißt diese Abbildung ist ein injektiver Ringhomomorphismus, der die Einselemente aufeinander abbildet. Die Injektivität zeigen wir so: Angenommen $(a, 0, 0, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$ ist injektiv. Daraus folgt, dass $a = 0$, woraus folgt, dass der Kern gleich $\{0\}$ ist. Die Gleichung $(a, 0, 0, \dots) \cdot (b, 0, 0, \dots) = (ab, 0, 0, \dots)$ erhält man gemäß Cauchy-Produkt. Daher fassen wir R gleich als Unterring von $R[X]$ auf. Wir können nun auch $X := (0, 1, 0, \dots)$ setzen, dann ist

$$X^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\ ,$$

wobei der Einser hierbei die $(k + 1)$-te Stelle darstellt.

Nach der Definition der Multiplikation als Cauchy-Produkt können wir also schreiben:

$$R[X] \ni (a_0, a_1, a_2, \dots) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots\ .$$

(Dies stellt eine endliche Summe dar, weil fast alle $a_j = 0$ sind.)

$(R[X], +, \cdot)$ heißt dann Polynomring über R.

Bemerkung (Polynome)

(i) Die reellen Polynome $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ bilden einen kommutativen Ring mit Einselement.

(ii) **Grad eines Polynoms**
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Für $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ mit $a_n \neq 0$ nennen wir die höchste auftretende Potenz n von X den *Grad von* f, mit der Schreibweise $\deg(f) = n$.

(iii) **Gradformel**
Für alle $f, g \in R[X]$ gilt:

$$\deg(f \cdot g) \leqslant \deg(f) + \deg(g) \ .$$

(iv) **Gradformel für Körper mit Gleichheit**
Wenn R ein Körper ist (vgl. 3.1.2), dann gilt für alle $f, g \in R[X]$:

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g) \ .$$

Beweis der Gradformel *(iii)+(iv):*
Falls $f = 0$ oder $g = 0$ ist, dann ist $f \cdot g = 0$, also

$$\deg(f \cdot g) = -\infty = \deg(f) + \deg(g) \ ,$$

und die Ungleichung gilt im Sinne von $-\infty \leqslant -\infty$.

Seien also $f \neq 0$ und $g \neq 0$ mit Darstellungen $f = a_m X^m + \cdots + a_0, a_m \neq 0$ und $g = b_n X^n + \cdots + b_0, b_n \neq 0$.
Also haben wir wegen (ii) $\deg(f) = m$ und $\deg(g) = n$. In $f \cdot g$ ist der Koeffizient mit dem größtmöglichen Index $c_{m+n} = a_m \cdot b_n$, daher ist $\deg(f \cdot g) \leqslant m + n$.
Falls a_m oder b_n keine Nullteiler sind, dann ist sicher $c_{m+n} \neq 0$, also $\deg(f \cdot g) = m + n$. $\square$

3.1.2 Körper

Um nun zur Struktur der Körper zu gelangen, gehen wir von der im Kapitel 3.1.1. definierten Einheitengruppe $R^\times$ aus. Im Fall $R^\times = R\backslash\{0\}$, wenn also jedes $a \neq 0$ als Element der Gruppe $R^\times$ ein eindeutiges Inverses $a^{-1} \in R^\times$ hat, führt dies zur Definition der Körper.

Definition (Körper)
Sei K eine Menge mit den Operationen $+, \cdot : K \times K \to K$.

$(K, +, \cdot)$ heißt Körper, falls gilt:

(K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element 0).

(K2) $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element $1[\neq 0]$).

(K3) Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Bemerkung (Körpererweiterung)
Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, so heißt $L \subseteq K$ ein *Unterkörper*, wenn L ein Unterring und mit diesen übernommenen Verknüpfungen selbst ein Körper ist. Konsequenter Weise heißt K *Oberkörper* von L oder häufiger *Körpererweiterung* von L.

Beispiele für Körpererweiterungen
Um die oben definierten Begriffe zu verdeutlichen, werden folgend einige sehr anschauliche Beispiele für Körpererweiterungen in den Zahlenmengen gegeben.

- $\mathbb{Z}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{R}$ ist eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{C}$ ist eine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$.

Um in weiterer Folge dieses Kapitels zu den Strukturen *Hauptidealring* und *euklidischer Ring* zu gelangen, müssen wir zunächst *Integritätsbereiche* sowie *Ideale* definieren.

Definition (Integritätsbereich)
Ein Ring R heißt Integritätsbereich oder Integritätsring, falls gilt:

(i) R hat ein Einselement $1 \neq 0$.

(ii) R ist kommutativ.

(iii) R ist nullteilerfrei, das heißt ein Produkt zweier Elemente des Körpers ist genau dann 0, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist.

Beispiel (Integritätsbereich)
Die ganzen Zahlen mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, also $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, sind ein Integritätsbereich.

Definition (Ideal)
Ist R ein Ring und $I \subseteq R$, dann heißt I Ideal, falls gilt:

(I1) I ist bezüglich der Verknüpfung der Addition $(+)$ eine Untergruppe von R.

(I2) $a \in I,\ x \in R \Rightarrow x \cdot a \in I \wedge a \cdot x \in I$.

Daher ist ein Ideal auch ein Unterring.

Definition (Erzeugtes Hauptideal)
Weiters definieren wir im kommutativen Fall für $a \in R$ das von a erzeugte Hauptideal durch:

$$(a) := R \cdot a := \{x \cdot a \mid x \in R\} \ .$$

Wir verwenden im weiteren Verlauf für das von a erzeugte Hauptideal auch die Schreibweise $R \cdot a$.

Definition (Hauptidealring, euklidischer Ring)
Sei R ein Integritätsbereich.

(i) R heißt Hauptidealring, wenn jedes Ideal I in R ein Hauptideal ist, also $I = (a) = R \cdot a$ für ein $a \in R$ gilt.

(ii) R heißt euklidischer Ring, wenn es eine Abbildung $\delta : R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ gibt, mit folgender Eigenschaft:

Für alle $a, b \in R\backslash\{0\}$ gibt es $q, r \in R$, sodass $a = q{\cdot}b{+}r$ und $\delta(r) < \delta(b)$, falls $r \neq 0$.

Bemerkungen (Euklidischer Ring)

(i) Die obige Eigenschaft (ii) stellt die *Division mit Rest* dar.

(ii) Wie der folgende Satz zeigt, ist ein einfaches Beispiel für einen euklidischen Ring der Zahlenraum $\mathbb{Z}$. Ebenso stellt $K[X]$ einen euklidischen Ring dar, wobei K ein Körper ist. (Nähere Erläuterungen dazu sind in [9, S. 260] zu finden.)

Satz
Ein euklidischer Ring ist ein Hauptidealring.

Beweis:
Sei R ein euklidischer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal.

Im Fall $I = \{0\}$ ist der Beweis fertig, da $I = \{0\}$ das Hauptideal ist und $I = \{0\} = (0) = R \cdot 0$ ist.

Für den Fall $I \neq \{0\}$ betrachten wir die Menge M mit:

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists a \in I \backslash \{0\} : n = \delta(a)\}.$$

Für $I \neq \{0\}$ folgt $M \neq \emptyset$. Also enthält M ein kleinstes Element $k = \min M$ für ein $a \in I \backslash \{0\}$ mit $k = \delta(a)$.

Wir behaupten nun $I = (a)$:
$I \supseteq (a)$ ist klar, da I laut Voraussetzung $a \in I$ eine Obermenge von (a) ist.

Bleibt zu zeigen, dass $I \subseteq (a)$ gilt. Angenommen $b \in I \backslash (a)$, dann erhalten wir durch Division mit Rest:

$$b = q \cdot a + r \text{ mit } \delta(r) < \delta(a) = k, \quad \text{falls } r \neq 0$$

- für $r = 0$ wäre $b = qa \in (a)$. ↯
- für $r \neq 0$ ist $\delta(r) < k$ und $r = \underbrace{b}_{\in I} - \underbrace{qa}_{\in I} \in I \Rightarrow \delta(r) \in M$. ↯

  (Dies stellt einen Widerspruch zur Minimalität von k dar.)

□

Korollar (Hauptidealring)
Ist K ein Körper, dann ist $K[X]$ ein Hauptidealring.

Beweis:
Dieser Beweis folgt daraus, dass es in Polynomringen $K[X]$ mit Koeffizienten aus einem Körper eine Gradabbildung $\delta = \deg$ gibt und die Polynomdivision gilt. Daraus folgt, dass $K[X]$ ein euklidischer Ring ist. □

Die anschließende Bemerkung folgt daraus, dass wir eben in Satz und Korollar gezeigt haben, dass ein *euklidischer Ring* ein *Hauptidealring* beziehungsweise $K[X]$ ebenso ein *Hauptidealring* ist.

Bemerkung (Integritätsbereich)
Für einen Integritätsbereich R ist äquivalent:

(i) R ist ein Körper.

(ii) $R[X]$ ist euklidisch.

(iii) $R[X]$ ist ein Hauptidealring.

Beweis:
Ausführliche Beweise zu obigen Korollar und Bemerkung finden sich in [9, *18.2*, S. 260f].

Des weiteren beschäftigen wir uns mit der sogenannten *Irreduzibilität*, welche eine Eigenschaft in Integritätsbereichen darstellt. Der betrachtete Ring R stellt ab jetzt immer einen Integritätsbereich dar. Das heißt R ist *kommutativ mit 1* und *nullteilerfrei* mit $1 \neq 0$.

Definition (Irreduzible Elemente)
$q \in R$ heißt irreduzibel, wenn:

(i) $q \neq 0$ und $q \notin R^{\times}$.

(ii) falls $q = a \cdot b$ mit $a, b \in R$, dann $a \in R^{\times}$ oder $b \in R^{\times}$.

Andernfalls nennen wir q *reduzibel.*

Quotientenring
Aus einem Ring R lässt sich nach einem Ideal $I \in R$ ein Quotientenring bilden. Dieser ist aus Äquivalenzklassen aufgebaut und wird mit R/I notiert. Um den folgenden Satz beweisen zu können, sei noch erwähnt, dass in einem Quotientenring folgendermaßen gerechnet wird: Die beiden Klassen $x+I$ und $y+I$ sind gleich, genau dann, wenn $x-y \in I$. Wobei $x + I$ die Menge $\{x + c | c \in I\}$ darstellt und für das Nullelement $0 + I = I$ gilt. (Das Nullelement wird dabei durch die Nebenklasse dargestellt.)

Genaueres zum Erhalt von Quotientenringen kann in [5] nachgelesen werden.

Wir wollen nun zeigen, dass der Quotientenring $R/(a)$ ein Körper ist.

Satz
Sei $(R, +, \cdot)$ ein Hauptidealring und $a \in R$ irreduzibel, dann folgt, dass der Quotientenring $R/(a)$ ein Körper ist.

Beweis:
$R/(a)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement ($1 + (a) \neq (a)$, weil $1 \notin (a)$, denn $a \notin R^{\times}$). Dies gilt, weil $R/(a)$ in einem Integritätsbereich ist, was bedeutet, dass $R/(a)$ kommutativ ist mit 1 und nullteilerfrei ($1 \neq 0$).

Um der Definition eines Körpers zu entsprechen, muss $(R/(a), \cdot)$ eine *Abelsche Gruppe* sein, das heißt wir benötigen noch die Invertierbarkeit. Somit müssen wir noch zeigen, dass jedes $b + (a) \neq 0 + (a)$ invertierbar ist.

$$b + (a) \neq (a) \Rightarrow b \notin (a) \Rightarrow I := \{xa + yb \mid x, y \in R\} \quad \underbrace{\supsetneqq}_{\text{echte Obermenge}} \quad (a).$$

(Wir schreiben $I = (a, b)$.)

I ist das von a und b erzeugte Ideal:

- $I \neq \varnothing$; $(x_1a + y_1b) - (x_2a + y_2b) = (x_1 - x_2)a + (y_1 - y_2)b \in I$
- $z \in R$, $xa + yb \in I \Rightarrow z \cdot (xa - yb) = (zx)a + (zy)b \in I$

Da R ein Hauptideal ist, folgt daraus, dass ein c in R existiert, für das gilt: $I = (c)$; $[(c) \supsetneqq (a)]$.

Wegen $a \in I$, existiert ein d in R, für das gilt: $a = d{\cdot}c$. Wäre $d \in R^{\times}$, dann $c = d^{-1}a \in (a)$, also $(c) \subseteq (a)$. ↯

Somit muss gelten $d \notin R^{\times}$. Und aus der Irreduzibilität von a folgt $c \in R^{\times}$. Daher $R = (c) = I \Rightarrow 1 \in I$.
Also ist das Einselement 1 in I. Daraus folgt $\exists\ x, y \in R : 1 = xa + yb$, das heißt,

$yb - 1 \in (a)$. Also ist $(y + (a)) \cdot (b + (a)) = yb + (a) = 1 + (a)$. Das heißt $b + (a)$ ist invertierbar. □

Durch die obige Definition von *irreduziblen Elementen* und den gezeigten Zusammenhängen zwischen Hauptidealringen, Irreduzibilität und Körpern können wir nun auch die Irreduzibilität speziell für Polynome und Körper betrachten.

Irreduzibilität von Polynomen
Die Irreduzibilität für Polynome ist aus der allgemeinen Definition für Ringe ableitbar. Für Polynome gilt $R[X]^\times = R^\times$ im Integritätsbereich R.
(Genauer nachlesen, warum dies gilt, kann man dies in [6, *Kapitel II, 1.6*].)

Also gilt:

$$f \in R[X]^\times \Leftrightarrow f = a_0 \quad \text{mit } a_0 \in R^\times .$$

Irreduzibilitätssatz
Für $f \in \mathbb{Z}[X]$ mit $\deg(f) \geqslant 1$ gilt:

$$f \text{ irreduzibel in } \mathbb{Z}[X] \Rightarrow f \text{ irreduzibel in } \mathbb{Q}[X] \ .$$

Irreduzibilität in $K[X]$ für Körper
Wegen $K^\times = K \backslash \{0\}$ sind alle Polynome vom Grad 0 Einheiten in $K[X]$, und dies sind alle Einheiten, also

$$K[X]^\times = \{f = a_0 \mid a_0 \in K\backslash\{0\}\} = \{f \mid \deg(f) = 0\} \ .$$

Das heißt, Polynome sind nur invertierbar in $K[X]$, wenn sie konstant $\neq 0$ sind.

Ist $f = g \cdot h$ und g oder h eine Einheit in $K[X]$, dann folgt, dass $f = a_0 \cdot q$ mit $a_0 \in K\backslash\{0\}$, $y \in K[X]$. Das heißt, irreduzible Polynome $f \in K[X]$ erfüllen $\deg(f) \geqslant 1$ (sonst $f = 0$ oder $\underbrace{f = a_0}_{f \text{ Einheit}}$ mit $a_0 \neq 0$) und lassen sich nur durch Herausheben eines konstanten Faktors $\neq 0$ als Produkt von Polynomen aus $K[X]$ zerlegen.

Bemerkung (Irreduzibilität und Nullstellen)
In $K[X]$, $a, b \in K$ gilt:

- $aX + b$ teilt $f \Leftrightarrow f$ hat eine Nullstelle bei $-\frac{b}{a}$ $(\in K)$.
- für $\deg(f) \geqslant 2$ gilt: f irreduzibel $\Leftrightarrow f$ hat keine Nullstellen in K.

3.1.3 Körpererweiterungen

Um schlussendlich den Beweis für die Widerlegung der Würfelverdopplung mittels Körpererweiterung durchführen zu können, betrachten wir als Vorbereitung im folgenden Abschnitt unter anderem den Grad einer Körpererweiterung sowie die Gradformel. Hierfür definieren wir zunächst die Struktur der sogenannten *Zwischenkörper*.

Definition (Zwischenkörper)
Sei F ein Unterkörper von K, dann stellt $F \subseteq K$ eine Körpererweiterung dar. Wenn L ein weiterer Unterkörper von K ist mit $F \subseteq L$, dann nennen wir $F \subseteq L \subseteq K$ einen Zwischenkörper.
Zum Beispiel gilt: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Bemerkung (Vektorraum und Körpergrad)
Mit der Idee K als Vektorraum über F anzusehen, können wir folgend den Körpergrad mittels der Vektorraumdimension definieren und bestimmen. Dabei gelten im F-Vektorraum über dem Skalarenkörper F die Vektoraddition in K und die skalare Multiplikation $F \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x \cdot y$ mittels Einschränkung der üblichen Multiplikation in K.

Definition (Körpergrad)
Der Körpergrad von $F \subseteq K$ ist definiert als die Vektorraumdimension von K als F-Vektorraum, also $[K : F] := \dim_F(K)$.

Beispiele (Körpergrad)
Zwei anschauliche Beispiele für den Körpergrad unter der Verwendung dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, sind
$$[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty \text{ und } [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2 .$$

Satz (Gradformel)
Sei $F \subseteq L \subseteq K$ ein Zwischenkörper. Daraus folgt
$$[K : F] = [K : L] \cdot [L : F] .$$

Beweis:
Falls $\dim_L(K) = \infty$ oder $\dim_F(L) = \infty$, dann muss auch $\dim_F(K) = \infty$ sein. Denn wegen $F \subseteq L \subseteq K$ ist jede L-linear unabhängige Menge in K sicher auch F-linear unabhängig beziehungsweise eine F-linear unabhängige Menge in L ist auch F-linear unabhängig in $K \supseteq L$.

Bleibt also der Fall $[L : F] = m$ und $[K : L] = n$, wobei $m, n < \infty$, zu betrachten:
Sei $x_1, \ldots, x_m$ eine Basis des F-Vektorraums L und $y_1, \ldots, y_n$ eine Basis im L-Vektorraum K. Wir zeigen, dass das Produkt der Basen $\{x_i \cdot y_i | i = 1, \ldots m \text{ und } j = 1, \ldots, n\}$ eine Basis im F-Vektorraum K ist. (Dies ergibt $m \cdot n$ Basiselemente.)

Ein beliebig gewähltes $y \in K$ hat die eindeutige Darstellung:
$$y = b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n \text{ mit } b_1, \ldots, b_n \in L .$$
Und für alle j gilt, dass es eine eindeutige Darstellung $b_j = a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_{mj} \cdot x_m$ mit $a_{ij} \in F$ gibt.

Daraus folgt, dass K über F von $(x_i \cdot y_j)$ erzeugt wird, denn
$$y = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_i \text{ ,also gilt } \operatorname{span}\{x_i \cdot y_i\} = K \text{ . (*)}$$
Auch $\{x_i y_i \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ ist linear unabhängig über F, denn aus
$$\sum_{i,j} \underbrace{a_{i,j}}_{\in F} x_i y_j = 0 \text{ folgt } \sum_j \underbrace{\left(\sum_i a_{i,j} x_i\right)}_{\in L} y_j = 0 .$$
Da y_i linear unabhängig über L sind, folgt
$$\forall j : \sum_i a_{ij} x_i = 0 .$$

Da x_i linear unabhängig über F sind, folgt nun

$$a_{ij} = 0 \quad , \text{für alle } i, j \ .$$

Also folgt:

$$[K : F] = \dim_F(K) = |I \times J| = |I| \cdot |J| = (\dim_F L)(\dim_L K) = [K : L] \cdot [L : F] \ .$$

□

(*) Bemerkung: *span* stellt dabei die Menge aller Linearkombinationen aller Elemente des L-Vektorraums dar.

Korollar
Sei $F \subseteq L \subseteq K$ ein Zwischenkörper und $[K : F] < \infty$, dann gilt:

(i) $[K : L] = [K : F] \Rightarrow F = L$.

(ii) Ist $[K : F]$ eine Primzahl, dann folgt daraus $F = L$ oder $L = K$.

Beweis:

(i) Laut der Gradformel gilt: $\underbrace{[K : F] = [K : L]}_{\neq\infty} \cdot [L : F]$. Setzen wir nun für $[K : L]$ (laut (i)) $[K : F]$ ein, so erhalten wir $[K : F] = [K : F] \cdot [L : F]$. Durch Division mit $[K : F]$ auf beiden Seiten erhalten wir $1 = [L : F]$. Wegen $L \supseteq F$ als Vektorraum gilt somit $L = F$.
(Die Division mit $[K : F]$ darf deshalb ohne Bedenken stattfinden, da $[K : F] \neq 0$. Dies muss gelten, weil ein Körper niemals der Nullvektorraum ist, das heißt $K \neq \{0\}$, denn er besitzt immer mindestens das Einselement ($\neq 0$).)

(ii) Wir gehen wieder von der Gradformel $\underbrace{[K : F]}_{\text{prim}} = [K : L] \cdot [L : F]$ aus. Dadurch, dass $[K : F]$ laut Annahme eine Primzahl ist, folgt aus der Definition für Primzahlen, dass somit $[K : L] = 1$ oder $[L : F] = 1$ sein muss.
Also folgt wegen $\dim_L K = 1 \Leftrightarrow K = \{l \cdot 1 | l \in L\} = L$:

$$K = L \ \text{ oder } \ L = F \ .$$

□

Beispiel
$[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ und 2 ist eine Primzahl, daher gibt es keinen echten Zwischenkörper $\mathbb{R} \supsetneq L \supsetneq \mathbb{C}$.

Weitere Eigenschaften von Körpererweiterungen

Definition (kleinster Zwischenkörper, kleinster Unterring)
Ist $F \subseteq K$ eine Körpererweiterung, so gilt:

(i) $F(A)$ ist definiert als der kleinste Zwischenkörper, der eine gegebene Teilmenge $A \subseteq K$ enthält. Somit gilt $F \subseteq F(A) \subseteq K$ mit $A \subseteq F(A)$.
Man nennt $F(A)$ den von A über F erzeugten Unterkörper von K.

(ii) $F[A]$ ist definiert als der kleinste Unterring von K mit $F \cup A \subseteq F(A)$. Man nennt $F[A]$ den von A über F erzeugten Unterring von K.

Bemerkungen

(i) Im Fall $A = \{a\}$ schreiben wir $F[A]$ statt $F[\{a\}]$.

(ii) Ist $F \subseteq K$ eine Körpererweiterung, so gilt: Für jedes $a \in K$ ist $F[a] = \{f(a) \in K : f \in F[X]\}$.

(iii) Ist $F \subseteq K$ eine Körpererweiterung, so gilt: Für jede Teilmenge $A \subset K$ ist $F(A) = Q(F[A])$ der Quotientenkörper.

Beweis:

(ii) S sei definiert $S := \{f(a) \in K : f \in F[X]\}$ als das Bild des Einsetzungshomomorphismus $\sigma_a : F[X] \to K, f \to f(a)$, also ist $S \subset K$ ein Unterring mit $a \in S$, weil $\sigma_a(X) = a$. Somit gilt $F[a] \subseteq S$.
Ist R ein Unterring von K mit $a \in R$ und $F \subseteq R$, dann folgt, dass $f(a) \in R$, für alle $f \in F[X]$.
Weil $f = b_0 + \cdots + b_n X^n$ gilt, ergibt $f(a) = b_0 + \cdots + b_n a^n \in R$, also ist $S \subseteq R$.
Somit ist gezeigt, dass S minimal ist und daraus folgt $F[a] = S$.

$\square$

(iii) Diese Aussage kann mittels den Eigenschaften, dass jeder Körper ein Ring ist und der Quotientenkörper nach dem *Satz über den Quotientenkörper* minimal ist, sowie der Definition von $F(A)$ bewiesen werden. Der ausführliche Beweis dazu ist zu finden in [6, Kapitel *III, 1.3*].

Wir brauchen nun, um in weiterer Folge die *Minimalpolynome* einführen zu können, noch die Definitionen von *algebraischen* und *transzendenten* Elementen sowie des *Einsetzungshomomorphismus.*

Definition (algebraisch)
Sei K Obermenge von F und eine Körpererweiterung. Ein Element $a \in K$ heißt algebraisch über F, falls es ein Polynom $f \in F[X]$ gibt, $f \neq 0$ mit $f(a) = 0$.
Andernfalls heißt a *transzendent* über F.

Bemerkungen (algebraisch, transzendent)

(i) Für alle $a \in K$ ist a algebraisch über K, denn $f = X - a \in K[X]$ hat eine Nullstelle in a.

(ii) Für $K = \underbrace{F(X)}_{\text{Menge der rationalen Funktionen}} \supseteq F$ gilt, dass X transzendent über F ist, denn $\forall f(x) \in F[X]$ mit $f \neq 0$ ist $f = f \neq 0$.

(iii) e und π in $\mathbb{R}$ sind transzendent über $\mathbb{Q}$.

Definition (Einsetzungshomomorphismus)
Der Einsetzungshomomorphismus σ_a ist die Abbildung $F[X] \to K, \quad f \mapsto f(a)$.

Bemerkungen (Einsetzungshomomorphismus)

(i) Einsetzungshomomorphismen σ_a sind Homomorphismen von Algebren, das heißt, sie sind lineare Abbildungen und Homomorphismen von Ringen.

(ii) Betrachte den Einsetzungshomomorphismus $\sigma_a : F[X] \to K,\ f \mapsto f(a)$.
Es gilt:

- a transzendent über $F \Leftrightarrow \ker(\sigma_a) = \{0\} \Leftrightarrow \sigma_a$ ist injektiv.
- a algebraisch über $F \Leftrightarrow \ker(\sigma_a) \neq \{0\}$.

Minimalpolynome

Lemma (Minimalpolynom)
Ist $[K : L]$ eine Körpererweiterung und $a \in L$ algebraisch über F, dann heißt das eindeutig bestimmte normierte Polynom $f_a \in F[X]$ kleinsten Grades ($\deg(f_a) \geqslant 1$) mit $f_a = \ker(\sigma_a)$ das Minimalpolynom von a über F. Unter dem Grad von $a \in K$ versteht man den Grad seines Minimalpolynoms, Grad f_a.

Bemerkung (Minimaler Grad)
Wie wir später nochmal explizit herausstreichen, hat das Minimalpolynom auch minimalen Grad (siehe Lemma *Eigenschaften des Minimalpolynoms*). Denn der Grad von jedem anderen Polynom in $\ker(\sigma_a)$ ist größer oder gleich.

Beweis:
Wir wissen anhand der Bemerkung (ii) zum Einsetzungshomomorphismus, dass $\ker(\sigma_a) \neq \{0\}$ gilt. Laut dem Korollar zu Hauptidealringen (S. 21) ist $F[X]$ ein Hauptidealring, daher gibt es ein $g \in F[X]$ für das gilt $\ker(\sigma_a) = (g)$. Laut dem Beweis des *Satzes zum euklidischen Ring* haben wir $\deg(g) = \min\{\deg(f) | f \in \ker(\sigma_a), f \neq 0\}$.

Wir können g normieren, indem wir geeignet multiplizieren:

$\exists c \in F$ für das gilt: $f_a := c \cdot g \in (g) = \ker(\sigma_a)$ und f_a ist normiert.
Somit gilt $(f_a) = \ker(\sigma_a)$, wobei f_a normiert und von minimalem Grad ist. Gibt es ein $h_a \in F[X]$, das ebenfalls normiert ist, mit $h_a \in \ker(\sigma_a)$ und $\deg(h_a) = \deg(f_a)$, dann folgt $h_a = r \cdot f_a$ mit $f \in F[X]$, $\deg(r) = 0$, also $r \in F$. Da h_a und f_a normiert sind, folgt $r = 1$. $\square$

Lemma (Eigenschaften des Minimalpolynoms)
Sei $F \subseteq K$ eine Körpererweiterung. Für $a \in K$ und $f \in \ker(\sigma_a)$ normiert sind äquivalent:

(i) $f = f_a$, das heißt f ist das Minimalpolynom von a.

(ii) $\forall g \in \ker(\sigma_a)$, $g \neq 0$ gilt: $\deg(g) \geqslant \deg(f)$.

(iii) f ist irreduzibel in $F[X]$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\underbrace{f = f_a}_{(i)}$ und $g \in \underbrace{\ker(\sigma_a) = (f_a)}_{\text{Definition Minimalpolynom (algebraisch)}}$.
Daraus folgt $\exists h \in F[X]$, $h \neq 0$ für das gilt: $g = h \cdot f_a$,

$$\underbrace{\deg(h \cdot f_a) = \deg(h) + \deg(f_a) \geqslant \deg(f_a)}_{\text{Gradformel (für Körper mit Gleichheit, vgl. S. 17)}} .$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $f = g \cdot h$ mit $g, h \in F[X]$. Daraus folgt $0 = f(a) = g(a) \cdot h(a) \Rightarrow g \in \ker(\sigma_a)$ oder $h \in \ker(\sigma_a)$.
Also gilt wegen $\deg(f) = \deg(g) + \deg(h)$ und (ii) nun $\deg(g) \leqslant \deg(f)$ und $\deg(h) \leqslant \deg(f)$. Wegen (ii) und, dass $g \in \ker(\sigma_a)$ oder $h \in \ker(\sigma_a)$, folgt $\deg(g) = \deg(f)$ oder $\deg(h) = \deg(f)$. Somit muss g oder h den Grad 0 haben, also $\deg(g) = 0$ oder $\deg(h) = 0$ gelten, das heißt $g \in F^\times$ oder $h \in F^\times$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Wegen $f \in \ker(\sigma_a) = (f_a)$ existiert ein $h \in F[X]$, $h \neq 0$ für das gilt $f = h \cdot f_a$. Wegen $f_a \notin F^\times$ (Grad $\geqslant 1$) muss nach der Irreduzibilität von f in $F[X]$, $h \in F^\times$ gelten. Da f und f_a normiert sind, folgt $h = 1$, also $f = f_a$.

$\square$

Satz (Minimalpolynom)
Sei $K \supset F$ eine Körpererweiterung, a algebraisch über F und $f_a \in F[X]$ das Minimalpolynom, dann gilt:

(i) $[F(a) : F] = \deg(f_a)$.

(ii) $n = \deg(f_a) \Rightarrow 1, a, a^2, \dots a^{n-1}$ ist eine Basis des F-Vektorraums $F(a)$.

Beweis:
Stellen wir zunächst die Behauptung

$$(*)\ F[a] = \{h(a) \in K \mid h \in F[X], \deg(h) < \deg(f_a)\}$$

auf, wobei $F[a]$ gleich der Menge $\{g(a) | g \in F[X]\}$.

Ist $b \in F[a]$, dann folgt daraus, dass ein $g \in F[X]$ existiert, für das gilt $b = g(a)$. Wir dividieren g mit Rest durch f_a und erhalten $g = q \cdot f_a + h$ mit $\deg(h) < \deg(f_a)$. Insbesondere ist dann $g(a) = q(a) \cdot \underbrace{f_a(a)}_{0} + h(a)$, woraus $g(a) = h(a)$ folgt. Das heißt, b ist ein Element der rechten Seite von $(*)$. Dass $F[a] \supseteq$ rechte Seite von $(*)$ ist klar wegen der oben erwähnten Gestalt von $F[a]$.

Sei also $n = \deg(f_a)$. Nach $(*)$ gilt:

$$F[a] = \{\lambda_0 + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_{n-1} a^{n-1} | \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in F\} = \operatorname{span}\{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$$

im F-Vektorraum $F[a] = F(a)$.

(*Bemerkung*: *span* stellt hierbei den kleinsten Teilvektorraum in $F[a]$ dar, der von $\{1, a, \ldots, a^{n-1}\}$ erzeugt wird.)

Nun ist noch zu zeigen, dass $1, a, \ldots, a^{n-1}$ linear unabhängig sind:

Angenommen $\exists \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in F$ mit $(\lambda_0, \ldots \lambda_{n-1}) \neq (0, \ldots 0)$ in F^n, sodass $\lambda_0 + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_{n-1} a^{n-1} = 0$.
Dann wäre $f := \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-1} X^{n-1} \in F[X]$, $f \neq 0$ mit $f(a) = 0$ und $\deg(f) < \deg(f_a)$. ↯
(Dies stellt einen Widerspruch dar wegen der Minimalität des Grades n von f_a.)

Somit ist $1, a, \ldots, a^{n-1}$ eine Basis von $F(a)$, also gilt (ii). Und $[F(a) : F] = n = \deg(f_a)$, also gilt (i). $\square$

Als letzte Struktur, die wir für den Beweis der *Unmöglichkeit der Würfelverdopplung* in Zusammenhang mit der in Kapitel 3.2 betrachteten *Menge der konstruierbaren Punkte* benötigen, führen wir nun noch den sogenannten *Quotientenkörper* ein.

Quotientenkörper
Ein Integritätsring R kann über $R \backslash \{0\}$ zu einer multiplikativen Gruppe erweitert und folgend zu einem Körper $Q(R)$ werden. Somit lässt sich sagen, dass der Quotientenkörper $Q(R)$ der kleinste Körper ist, in den R als Unterring eingebettet werden kann.

Eine genaue Ausführung dazu sowie die Herleitung kann in der Literatur [6, *Kapitel 1.13*, S. 172f] nachgelesen werden.

Beispiel (Quotientenkörper)
Das wohl anschaulichste Beispiel für einen Quotientenkörper stellt $Q(\mathbb{Z})$ dar.

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} = Q(\mathbb{Z}) = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \ ,$$

mit $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' = nm'$.

Bemerkung (Notation Quotientenkörper)
Im weiteren Verlauf verwenden wir für den Quotientenkörper folgende Notation:

$$\mathbb{Q}(A) := Q(\mathbb{Q} \cup A) \ ,$$

wenn $A \subseteq \mathbb{C}$.

3.2 Beweis der Unmöglichkeit der Würfelverdopplung

Delisches Problem der Würfelverdopplung
Um den Beweis vorzubereiten betrachten wir zunächst die allgemeine Problemstellung. Gegeben ist der Einheitswürfel, das heißt ein Würfel mit Kantenlänge 1, dessen Volumen 1 ist.

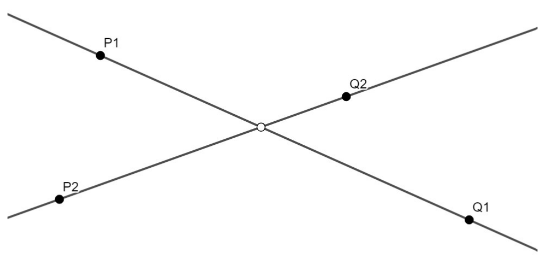
Gesucht wird die Länge l des *doppelten Würfels*, das heißt eines Würfels mit dem Volumen 2. Da bei einem Würfel alle Seiten gleich lang sind, kann man die Seitenlänge rein rechnerisch natürlich mit $l = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ ermitteln.

Ist die Konstruktion eines Einheitswürfels mit Zirkel und Lineal noch eine einfache Aufgabe, stellt sich im zweiten Schritt die Frage, ob man auch einen Einheitswürfel mit dem doppelten Volumen mit den eben genannten Hilfsmitteln zeichnen kann. Deshalb werden wir uns im Folgenden mit den grundlegenden Eigenschaften von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal beschäftigen.

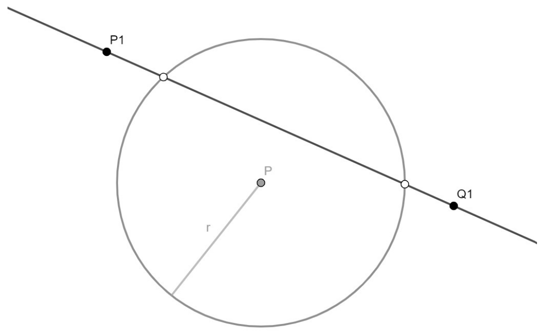
Konstruktion mit Zirkel und Lineal
Sei $\mathbb{R}^2$ unsere Zeichenebene mit der gegebenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir wollen die Menge der mit Zirkel und Lineal aus M exakt konstruierbaren Punkte auf $\mathbb{R}^2$ studieren.

Geometrische Konstruktionsregeln
Im Folgenden werden drei Arten von elementaren Konstruktionsschritten zur Erweiterung von M erklärt. Dabei stellen die ausgefüllten schwarzen Punkte ($\bullet$) die *gegebenen* Punkte dar und die unausgefüllten Punkte ($\circ$), die *konstruierten.*

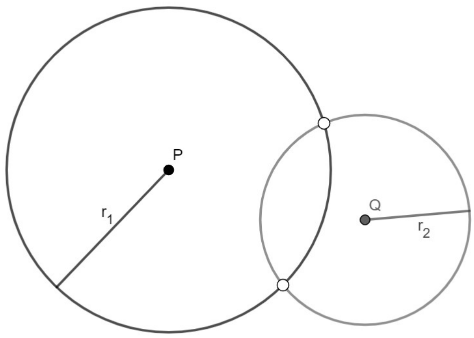
I: Schnittpunkte nicht-paralleler Geraden



II: Schnitt Gerade mit Kreis



III: Schnitt zweier Kreise



Definition (konstruierbar mittels Zirkel und Lineal)
$a \in \mathbb{R}$ heißt konstruierbar mittels Zirkel und Lineal, wenn der Punkt $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$ in endlich vielen Schritten nach den obig genannten Regeln I, II, III konstruiert werden kann. Insbesondere ist $1 \in \mathbb{R}$ konstruierbar.

Definition (Kon(M))
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Die Menge $\mathrm{Kon}(M) \subseteq \mathbb{R}^2$ besteht aus jenen Punkten $p \in \mathbb{R}^2$, für die es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Kette von Teilmengen $M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n$ von $\mathbb{R}^2$ gibt, sodass

jedes M_j aus M_{j-1} durch die oben genannten Konstruktionsregeln I, II, III entsteht und $p \in M_n$ gilt.

$\mathrm{Kon}(M)$ heißt dann die Menge der aus M mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte.

In einem einzelnen (Konstruktions-)Schritt kommen $0, 1$ oder 2 Punkte hinzu.

Körper der konstruierbaren Punkte

Um nun zum Beweis für das *Delische Problem der Würfelverdopplung* zu kommen, müssen wir die Menge der konstruierbaren Punkte $\mathrm{Kon}(M)$ *algebraisieren*. Hierzu identifizieren wir unsere Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, der Menge der komplexen Zahlen, um die Körperstruktur von $\mathbb{C}$ verwenden zu können. Die Menge $\mathrm{Kon}(M)$ wird dabei als Teilmenge des Körpers $\mathbb{C}$ betrachtet.

Satz
Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge mit $0, 1 \in M$ und $\overline{M} := \{\overline{z} \mid z \in M\}$.
Dann gilt:

(i) $\mathrm{Kon}(M)$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, das heißt $\mathbb{C}$ ist eine Körpererweiterung von $\mathrm{Kon}(M)$.

(ii) $\mathbb{Q}(M \cup \overline{M})$ ist ein Unterkörper von $\mathrm{Kon}(M)$ und $\overline{\mathrm{Kon}(M)} = \mathrm{Kon}(M)$.

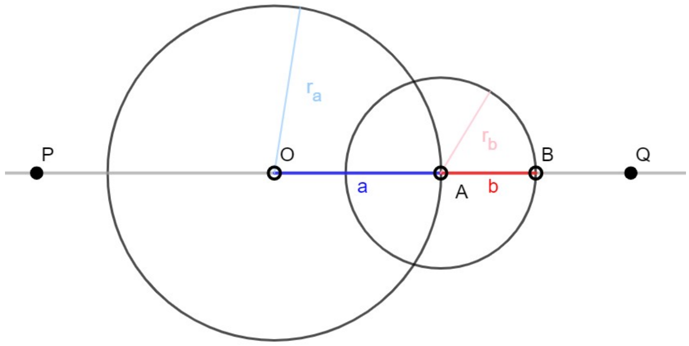
(iii) Ist $b \in \mathbb{C}$ und $b^2 \in \mathrm{Kon}(M)$, so gilt auch $b \in \mathrm{Kon}(M)$.

Das heißt, innerhalb der Menge der konstruierbaren Punkte $\mathrm{Kon}(M)$ können Quadratwurzeln konstruiert werden.

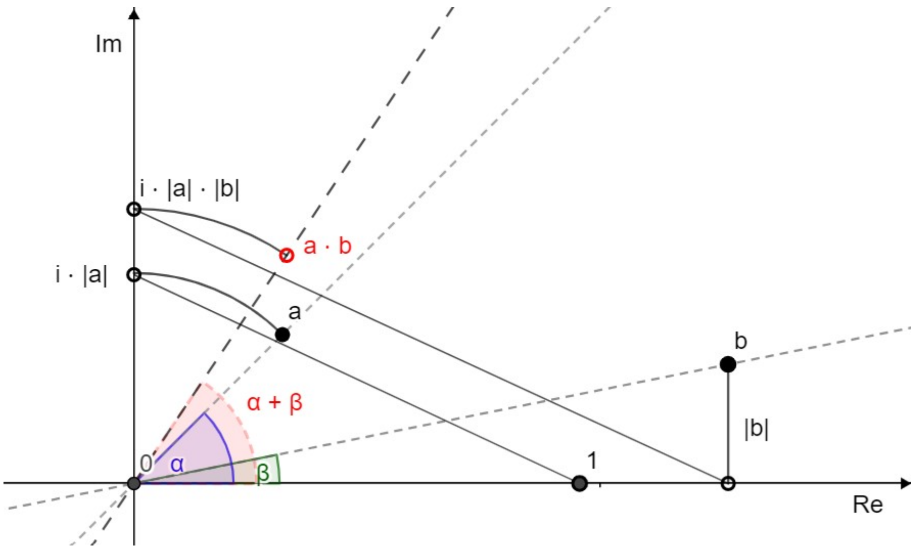
Beweis:

(i) Um (i) nachweisen zu können, sind zunächst geometrische Konstruktionen für die algebraischen Operationen, die in einem Körper erforderlich sind, anzugeben. Nachfolgend werden diese exemplarisch für Summe und Produkt skizziert. Die weiteren algebraischen Operationen des Negativen und des Inversen können in [6, *Kapitel 6.2*] nachgelesen werden.

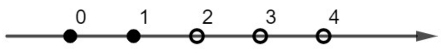
Summe: Zu $a, b \in \mathrm{Kon}(M)$ ist auch $a + b \in \mathrm{Kon}(M)$.



Produkt:

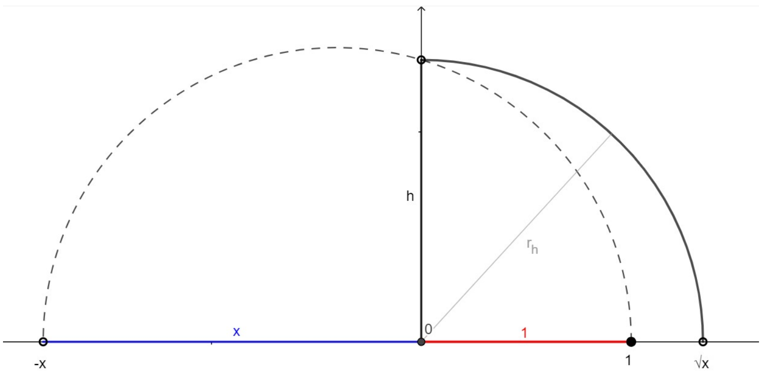


(ii) Da $0, 1 \in M$, folgt, dass auch $\mathbb{Z} \subseteq \operatorname{Kon}(M)$. Weil $\operatorname{Kon}(M)$ ein Körper ist, muss auch $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\mathbb{Z}) \subseteq \operatorname{Kon}(M)$ sein. Wegen der Eigenschaft, dass $\overline{M} \subseteq \operatorname{Kon}(M) = \overline{\operatorname{Kon}(M)}$, muss somit auch $\mathbb{Q}(M \cup \overline{M}) \subseteq \operatorname{Kon}(M)$ gelten.

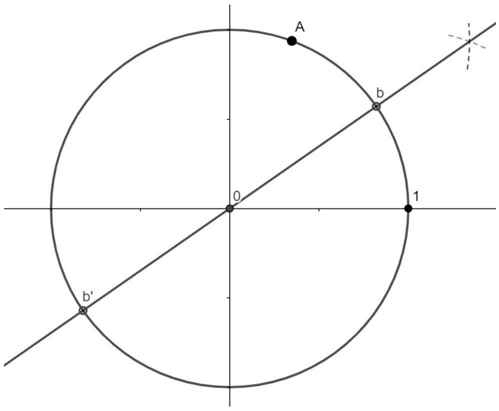


(iii) Um (iii) zu zeigen, müssen zu jedem $a \in \operatorname{Kon}(M)$ die komplexen Quadratwurzeln b, b' konstruiert werden.

- Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ konstruiert man $\sqrt{x}$ nach dem Höhensatz mit Hilfe des Thales-Kreises wie folgt:
  Thaleskreis: $h^2 = x \cdot 1 \Rightarrow \sqrt{x} \mathrel{\hat{=}} h$



- Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ konstruiert man die Quadratwurzeln b, b' mittels der Winkelhalbierung.



Durch Kombination der obigen Konstruktionen erhält man $b \in \mathrm{Kon}(M)$, falls $b^2 \in \mathrm{Kon}(M)$, zusammen: $b^2 \in \mathrm{Kon}(M) \Rightarrow b \in \mathrm{Kon}(M)$, weil wir stets $a = xz$ mit $x \geqslant 0$ und $|z| = 1$ schreiben können.

□

Wir betrachten nun noch die im *Körper der konstruierbaren Punkte* geltenden Eigenschaften.

Eigenschaften des Körpers der konstruierbaren Punkte Kon(M)
Für $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in M$ haben wir den Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{Kon}(\{0,1\}) \subseteq \mathrm{Kon}(M) \subseteq \mathbb{C}$. Für diesen gilt:

(i) Die Körpererweiterung $\mathrm{Kon}(M) \supseteq \mathbb{Q}(\overline{M} \cup M)$ ist algebraisch.

(ii) $[\mathrm{Kon}(\{0,1\}) : \mathbb{Q}] = \infty$.

(iii) Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ liegt genau dann im Unterkörper $\mathrm{Kon}(M) \subset \mathbb{C}$, wenn es eine Kette
$$\mathbb{Q}(M \cup \overline{M}) = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_r \subset \mathbb{C}$$
von Zwischenkörpern gibt, mit $z \in L_r$ und $[L_i : L_{i-1}] \leqslant 2$ für $i = 1, \ldots, r$.

(*Bemerkung:* Dass nirgends in der Kette ein höherer Grad als 2 auftreten kann, ist durch die Regeln für die geometrische Konstruktion bedingt.)

Korollar
Sei $M \subset \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in M$ und z konstruierbar, also $z \in \mathrm{Kon}(M)$. Setzt man $L := \mathbb{Q}(M \cup \overline{M})$, so liegt z in einem Zwischenkörper $L(z)$ und es gilt

$$[L(z) : L] = \underbrace{2^m}_{\text{Potenz von 2}}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$.
Insbesondere ist z algebraisch über L.

Da das eben genannte Korollar entscheidend für die Unlösbarkeit einiger klassischer Konstruktionsprobleme ist, können wir uns nun schlussendlich dem Beweis der Unmöglichkeit der Würfelverdopplung widmen.

Das *Delische Problem der Würfelverdopplung* ist unlösbar

Um die grundlegende Fragestellung der Würfelverdopplung nochmals zu nennen, stellen wir uns also die Frage, ob ein Würfel mit der Kantenlänge l, dessen Volumen das doppelte des Einheitswürfels ist, konstruierbar ist. Um diesen Würfel zu konstruieren, müssten wir also $l = \sqrt[3]{2}$ aus $M = \{0, 1\}$ konstruieren. Die gesuchte Zahl $l \in \mathbb{R}$ ist Nullstelle des Polynoms

$$p = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x] \ ,$$

das normiert und irreduzibel ist.

Folgend können wir also $M = \{0, 1\}$ setzen und wollen somit die Behauptung $\sqrt[2]{3} \notin \operatorname{Kon}(\{0, 1, \})$ zeigen.

Da das Minimalpolynom von $l = \sqrt[2]{3}$ über $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{0, 1\})$ gleich $X^3 - 2$ ist, ist also $\deg(l) = \deg(p) = 3$. Also ist

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[2]{3}) : \mathbb{Q}] = 3 \ ,$$

was keine Potenz von 2 ist.
Das heißt $l \in \mathbb{R}$ ist nicht konstruierbar.

4 Didaktische und schulrelevante Überlegungen

4.1 Hochschulmathematik im Schulunterricht?

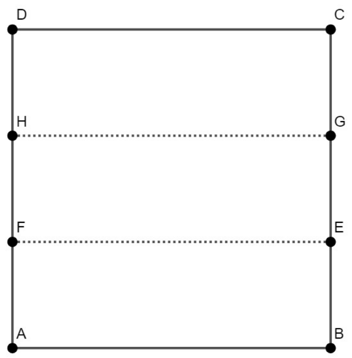
Die vermeintlich einfache Fragestellung, einen Würfel mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, der das doppelte Volumen (des Einheitswürfels) aufweist, kann dazu verleiten, dass man glaubt, die Lösung wäre ähnlich einfach und mit mathematischem Schulwissen zu lösen. Gerade in der Geometrie, der wohl anschaulichsten Disziplin der Mathematik, wird oftmals fälschlicherweise davon ausgegangen, dass dies *ja nicht so schwer sein kann.* Betrachtet man allerdings den in Kapitel 3 dargelegten Beweis der Unmöglichkeit der Würfelverdopplung, so ist dies alles andere als trivial und mit sogenannter Schulmathematik nicht lösbar. Da sowohl die grundlegenden Strukturen der Algebra kaum im Mathematikunterricht behandelt werden, als auch die weiters angeführten Sätze und Beweise mit reinem mathematischen Schulwissen nicht nachvollziehbar sind, stellt sich die Frage, wie man mit solchen *Problemen der Mathematik*, wie zum Beispiel den drei klassischen Konstruktionsproblemen der Antike, in der Schule umgehen könnte. Einerseits könnte man damit argumentieren, dass dies schlichtweg für die Schule irrelevant ist und im Regelunterricht nichts verloren hat. Andererseits aber, wenn man beispielsweise (Oberstufen-)Schüler*innen im Wahlfach Mathematik hat, die an der Mathematik interessiert sind, könnte man diese Probleme und Fragestellungen der Mathematik durchaus thematisieren - gerade aus dem zu Beginn erläuterten Grund der vermeintlichen Einfachheit. Da zum Beispiel selbst die Grundlagen der klassischen Beweisführung der Würfelverdopplung bereits Wissen aus der Hochschulmathematik erfordern, wäre allerdings dieser Beweis für Schüler*innen kaum beziehungsweise schwer nachvollziehbar. [10, vgl. S. 106f]

Es gibt jedoch eine Lösungsmethode für das Problem der Würfelverdopplung mittels sogenannter Origami-Faltung. Die Grundlage für diese Methode stellt *Origamics*, eine Richtung der Mathematik, die ab den späten 1970er Jahren unter anderem von Kazuo Haga, einem der Vorreiter der Origami-Faltung zur Lösung von mathematischen Problemen, entstand, dar. Der eigens dafür kreierte Begriff *Origamics* setzt sich dabei aus dem Wort *Origami* und der Nachsilbe *ics*, die meist im Zusammenhang mit den Naturwissenschaften verwendet wird, zusammen. Die Abgrenzung zwischen *Origami* und *Origamics* ist dabei nicht unwesentlich, da typische Origami-Faltungen nicht das Ziel der Darstellung von mathematischen Zusammenhängen oder Lösungen haben, sondern vielmehr einfach schöne Objekte erzeugen sollen. *Origamics* hingegen bringt meist kein ästhetisches Endprodukt hervor, erfüllt aber den Zweck der Veranschaulichung oder Entwicklung von Lösungen in der Mathematik. [3, vgl. S. xi]

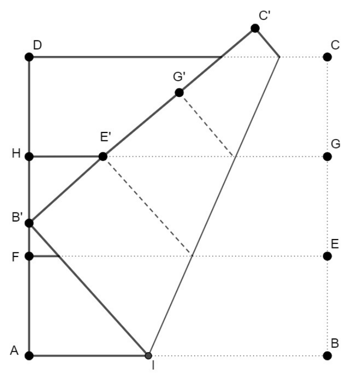
Im folgenden Kapitel (4.2) wird eine Methode dargelegt, wie man zu einer möglichen Lösung des Problems der Würfelverdopplung mittels *Origamics* gelangt. Dazu sei noch erwähnt, dass diese Methode zwar eine Lösung hervorbringt, dies allerdings nicht im Widerspruch zur im Kapitel 3 bewiesenen Unmöglichkeit der Würfelverdopplung steht, da sich die Fragestellung bei den klassischen Konstruktionsproblemen, wie auch bei der Würfelverdopplung, auf die Konstruktion mit Zirkel und Lineal bezieht.

4.2 Das Problem der Würfelverdopplung mittels *Origamics*

Als Ausgangspunkt nehmen wir ein quadratisches Blatt Papier, das so gefaltet wird, dass drei gleich große Teile dabei entstehen. Wie beziehungsweise warum dies ohne weitere Hilfsmittel möglich ist, kann in Kazuo Hagas Veröffentlichung *Origamics* nachgelesen werden. [3, *Kapitel 1*, S. 5-8]



Im nächsten Schritt wird die Kante BC so gefaltet, dass der Eckpunkt B die Kante AD berührt und gleichzeitig der Punkt E auf der Linie GH liegt.



Wir behaupten nun, dass

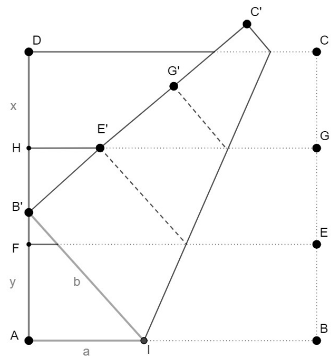
$$\frac{\overline{B'D}}{\overline{AB'}} = \sqrt[3]{2}$$

gilt.

Beweis:

Sei o.B.d.A. die Strecke $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$, dann ist $\overline{BE} = 1$.

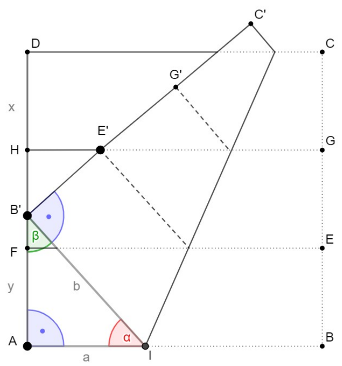
Sei weiters $x := \overline{B'D}$, $y := \overline{AB'}$, $a := \overline{AI}$ und $b := \overline{IB'} = \overline{IB}$,



dann folgt daraus, dass $x + y = 3 = a + b$ ist.

Die Dreiecke $\triangle\ AIB'$ und $\triangle\ B'E'H$ sind ähnlich zueinander. Dies ist dadurch gegeben, da die Winkel $\measuredangle B'AI$ und $\measuredangle B'HE'$ beide rechte Winkel sind.

Bezeichnet man nun den Winkel $\measuredangle AIB' = \alpha$ und $\measuredangle AB'I = \beta$, dann folgt, dass $\alpha + \beta = 90°$ ergeben müssen.



Betrachtet man nun das Dreieck $\triangle\ B'HE'$, sieht man, dass der Winkel $\measuredangle HB'E' = 180° - 90° - \beta$ sein muss und daher gleich α ist. Dadurch ergibt sich auch sofort, dass der Winkel $\sphericalangle B'E'H$ gleich β ist. Somit sind die Winkel in den zwei Dreiecken $\triangle\ AIB'$ und $\triangle\ B'E'H$ ident.

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $\triangle\ AIB'$ und $\triangle\ B'E'H$ folgt nun:

$$\frac{a}{b} = \frac{x-1}{1} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{x-1} \overset{b=3-a}{\Leftrightarrow} \frac{3-a}{a} = \frac{1}{x-1} \overset{+1(=\frac{a}{a})}{\Leftrightarrow} \frac{3}{a} = 1+\frac{1}{x-1} \overset{1=\frac{x-1}{x-1}}{\Leftrightarrow} \frac{3}{a} = \frac{x}{x-1}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3\cdot(x-1)}{x} \overset{a=b-3}{\Rightarrow} b = 3 - \frac{3x-3}{x} = \frac{3}{x}\ .$$

Zusätzlich wissen wir bereits, dass $y = 3 - x$ ist und dass für das Dreieck $\triangle\ AIB'$ gilt: $a^2 + y^2 = b^2$.

Daraus folgt:

$$\underbrace{\left(\frac{3x-3}{x}\right)^2}_{a^2} + \underbrace{(3-x)^2}_{y^2} = \underbrace{\left(\frac{3}{x}\right)^2}_{b^2} \overset{\cdot x^2}{\Leftrightarrow}$$

$$(3x-3)^2 + x^2\cdot(3-x)^2 = 9 \ \Leftrightarrow$$

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 18x = 0 \overset{:x}{\Leftrightarrow}$$
$$x^3 - 6x^2 - 18x - 18 = 0$$

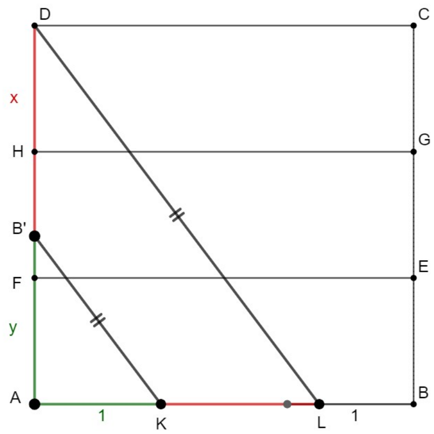
Wendet man nun weitere Umformungsschritte an, indem man die obige Gleichung mit 3 multipliziert und anschließend eines der drei x^3 auf die andere Seite der Gleichung bringt, erhält man folgendes:

$$3x^3 - 18x^2 - 54x - 54 = 0 \qquad / - x^3$$
$$2x^3 - 18x^2 - 54x - 54 = -x^3 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$$
$$x^3 = -2x^3 + 18x^2 + 54x + 54 \ \Leftrightarrow$$
$$x^3 = 2\cdot(3-x)^3 \overset{3-x=y}{\Leftrightarrow}$$
$$x^3 = 2y^3$$

Formt man die oben erhaltene Gleichung $x^3 = 2y^3$ um, so erhält man:

$$\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2} = \frac{\overline{B'D}}{\overline{AB'}}\ .$$

Im letzten Schritt versucht man nun dieses Verhältnis auf eine Länge zu übertragen.



Wir wissen, dass aufgrund des Strahlensatzes gilt:

$$x : y = |\overline{KL}| : 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt[3]{2} = \frac{|\overline{KL}|}{1} = |\overline{KL}|$$

$$\text{Somit ist} \quad |\overline{KL}| = \sqrt[3]{2} \ .$$

□

[10, vgl. S. 32-37]

4.3 Didaktische Umsetzung

Wie schon eingangs in Kapitel 4 erwähnt, würde sich die Konstruktion zur Würfelverdopplung mittels *Origamics* im Schulunterricht anwenden lassen. Obwohl dieser Beweis fast ausschließlich Wissen enthält, das teilweise schon ab der Unterstufe vermittelt wird, gehört an dieser Stelle angemerkt, dass diese Thematik im Regelunterricht der Mathematik im österreichischen Schulsystem aufgrund des momentanen Lehrplans keinen Platz findet. Hat man als Lehrperson aber die Möglichkeit in der Oberstufe (bevorzugt 11. oder 12. Schulstufe) ein Wahlfach Mathematik zu unterrichten, ist die Thematik der *drei klassischen Konstruktionsprobleme der Antike* durchaus interessant.

In der Ausführung des oben genannten Beweises mithilfe von *Origamics* könnte man im Unterricht ähnlich vorgehen wie in Kapitel 4.2 angeführt. Als Einstieg in die Thematik wäre aber eine kurze historische Auseinandersetzung mit einem der klassischen Konstruktionsprobleme, in diesem Fall die Würfelverdopplung, zu empfehlen. Dabei geht es nicht darum, den Schüler*innen irgendwelche Daten aufzuzählen, wann welcher Beweis von wem entwickelt wurde, sondern vielmehr um eine Einführung in die Thematik, warum dieses Problem bereits in der Antike behandelt wurde, beziehungsweise warum die Fragestellung über die Jahrhunderte so *attraktiv* war und wieso es bis ins 19. Jahrhundert gedauert hat, um das Problem schlussendlich exakt mittels algebraischem Beweis zu widerlegen. Widmet man sich im nächsten Schritt dem *Origamics*-Beweis, ist auf jeden Fall klarzustellen, dass die Konstruktion der Würfelverdopplung mittels Zirkel und Lineal definitiv unmöglich ist und der Beweis unter Anwendung von Origami-Faltungen *nur* eine mögliche Lösungsalternative durch Papierfaltung darstellt.

Für die Durchführung des Beweises kann man direkt mit der durch die Lehrperson angeleiteten Faltung des quadratischen Papiers beginnen. Eine Alternative zur (mündlichen) Anleitung durch die Lehrperson, könnte mittels einer schriftlichen Anleitung die Faltung in Gruppen, beispielsweise von 2-3 Personen, erfolgen. Haben alle Schüler*innen die Faltung durchgeführt können im nächsten Schritt die ähnlichen Dreiecke $\triangle\ AIB'$ und $\triangle\ B'E'H$ herausgearbeitet werden. Dies könnte im Lehrer*in-Schüler*innen-Gespräch stattfinden, in Einzelarbeit oder in Kleingruppen von 2-3 Personen. Die dazu benötigten Kompetenzen, wenn man sich auf den österreichischen Lehrplan Mathematik für die AHS bezieht, findet man im Bereich des in der 6. und 7. Schulstufe vermittelten Arbeitens mit Figuren und Körpern, insbesondere der Untersuchung von Dreiecken und der Erkennung beziehungsweise Begründung ihrer wesentlichen Eigenschaften und Ähnlichkeiten. [18, vgl.]

Die im nächsten Schritt des Beweises erforderliche Anwendung der Eigenschaften der ähnlichen Dreiecke sowie deren Umformungen könnten nun unter Anweisung der Lehrperson erfolgen, idealerweise immer im direkten Austausch mit dem Wissen der Schüler*innen im Lehrer*in-Schüler*innen-Gespräch. Die hierfür erforderlichen Kompetenzen sind das in der 9. Schulstufe vermittelte Lösen von (quadratischen) Gleichungen und das durch Rechengesetze begründete Umformen dieser. [18, vgl.]

Der einzige Umformungsschritt, der nicht mit dem Wissen aus dem Regelunterricht begründbar ist, ist das Zusammenfassen der kubischen Gleichung mithilfe des *Satzes von Vieta.* Dadurch, dass kubische Gleichungen in gewisser Weise sehr ähnlich *funktionieren* wie quadratische Gleichungen, könnte dies die Lehrperson in diesem Einzelfall ausführen und begründen. Wurden beispielsweise im Wahlfachunterricht bereits kubische Gleichungen im vorhinein behandelt, dann wären alle Kompetenzen, die dieser Beweis erfordert, abgedeckt.

Falls man die Lösung der Würfelverdopplung mittels *Origamics* also im Schulunterricht durchführen möchte, wäre die Dauer dieses Themas etwa 2-3 Schuleinheiten. Nicht nur, dass dieses Thema für die Schüler*innen aufgrund seiner langen Historie durchaus interessant sein könnte beziehungsweise in der Behandlung dieses Themas auch die Hochschulmathematik erwähnt wird, es werden auch Kompetenzen aus dem Kompetenzkatalog für die österreichische Reifeprüfung gefördert. Unter anderem kommt die Inhaltsdimension I1 *Algebra und Geometrie* vor, sowie aus den Komplexitätsdimensionen K1 *Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten* und K2 *Herstellen von Verbindungen.* Weiters werden aus den Handlungsdimensionen auch H2 *Rechnen, Operieren* und H4 *Argumentieren, Begründen* gefördert. [1, vgl. S. 12-17]

5 Resümee

Betrachtet man das Problem der Würfelverdopplung als *mathematischer Laie*, so könnte man sich fragen, wo denn das Problem liegt beziehungsweise warum eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ nicht (näherungsweise) konstruiert werden kann. Klar ist, in der heutigen Zeit gibt es bereits zahlreiche technische Hilfsmittel, wie beispielsweise digitale *Konstruktionsprogramme*, mit denen man ohne großen Aufwand und Vorwissen einen Würfel mit Seiten der Länge $\sqrt[3]{2}$ (näherungsweise) konstruieren könnte. Auch in der Antike gab es bereits einige, von berühmten Mathematikern dargelegte, mechanische Lösungen für das *Delische Problem*. Der Punkt liegt aber darin, dass es im Problem der Würfelverdopplung, wie es seit der Antike bekannt ist, nicht um eine beliebige Konstruktion eines doppelten Würfels geht, sondern um die Konstruktion mittels euklidischer Mittel, also Zirkel und Lineal.

Im 19. Jahrhundert, als die mathematische Disziplin der Algebra weit genug entwickelt war, um dies zu bewerkstelligen, schaffte man schließlich den Unmöglichkeitsbeweis der Würfelverdopplung. Demnach ist es erwiesenermaßen nicht möglich, den doppelten Würfel des Einheitswürfels mithilfe von Zirkel und Lineal zu konstruieren. Um dies algebraisch zu zeigen, wird von den algebraischen Grundlagen, also Strukturen wie Ringe und Körper, ausgegangen und mittels Körpererweiterungen der Körper der konstruierbaren Zahlen $\mathrm{Kon}(M)$ konstruiert. Da die Zahl $\sqrt[3]{2}$ aber nicht im Körper der konstruierbaren Zahlen liegt, ist es unmöglich einen Würfel mit der Seitenlänge $\sqrt[3]{2}$ zu konstruieren.

Um die Thematik der drei antiken Konstruktionsprobleme *Würfelverdopplung*, *Winkeldreiteilung* und *Quadratur des Kreises* auch in einem schulischen Setting thematisieren beziehungsweise bearbeiten zu können, bedarf es allerdings anderer Herangehensweisen als den algebraischen Unmöglichkeitsbeweis, zumal dieser schlichtweg mit mathematischem Schulwissen nicht nachvollziehbar ist. Eine Möglichkeit wäre dabei der Lösungsansatz mittels Origami-Faltungen, auch genannt *Origamics*. Dieser mit mathematischem Schulwissen nachvollziehbare Beweis ist ab der 10. Schulstufe einzusetzen und hat neben der Verknüpfung geometrischer und algebraischer Wissens- und Handlungsdimensionen auch den Vorteil, dass man ihn haptisch durchführen kann. Dazu benötigt man bloß ein quadratisches Blatt Papier.

Alles in allem birgt das Problem der Würfelverdopplung in vielerlei Hinsicht spannende Aspekte, sei es im Zusammenhang der Hochschulmathematik oder im schulischen, laien-mathematischen Kontext. Aufgrund seines langen Bestehens beschäftigt(e) es bereits eine große Anzahl an Mathematiker*innen, beginnend rund 400 Jahre v. Chr. und ist somit auch historisch gesehen von großer Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik. Angesichts seiner vermeintlich einfachen Fragestellung haben sich zudem nicht nur Mathematiker*innen mit diesem Problem beschäftigt, sondern auch immer wieder *Laien*. Dies hat auch den Vorteil, dass, obwohl das Problem der Würfelverdopplung nur mittels eines komplexen algebraischen Beweis widerlegt werden kann, man aufgrund seiner Anschaulichkeit die Problemstellung schnell versteht und somit die Thematik auch beispielsweise im Schulunterricht Einzug halten kann.

6 Quellenverzeichnis

Literatur

[1] Bildungsministerium für Bildung und Frauen. *Die kompetenzorientierte Reifeprüfung Mathematik an AHS. Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben.* Wien. 2012.

[2] Breidenbach, Walter. *Das Delische Problem (Die Verdoppelung des Würfels).* 3. Auflage. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953.

[3] Haga, Kazuo. *Origamics. Mathematical Explorations through Paper Folding.* Singapore: World Scientific. 2008.

[4] Herrmann, Aloys. *Das Delische Problem (Die Verdoppelung des Würfels).* Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 1927.

[5] Hörmann, Günther. *Vorlesung Algebra für LAK, Sommersemester 2015.* Wien: Universität Wien. 2015.

[6] Fischer, Gerd. *Lehrbuch der Algebra.* 3. Auflage. Berlin: Springer Spektrum. 2013.

[7] Fischer, Gerd und Springborn, Boris. *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger.* 19. Auflage. Berlin: Springer Spektrum. 2020.

[8] Kaiser, Hans und Nöbauer, Wilfried. *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht.* 2. Auflage. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. 1998.

[9] Karpfinger, Christian und Meyberg, Kurt. *Algebra. Gruppen - Ringe - Körper.* 5. Auflage. Berlin: Springer Spektrum. 2021.

[10] Konzett, Matthias Sebastian. *Unmöglich möglich? Die drei klassischen Konstruktionsprobleme und mögliche Lösungen.* Diplomarbeit. Wien: Universität Wien. 2012.

[11] Kowol, Gerhard und Mitsch, Heinz. *Algebra: Skriptum zur Vorlesung 1.* Eisenstadt: Prugg. 1982.

[12] Lattmann, Claas. *Mathematische Modellierung bei Platon zwischen Thales und Euklid.* Berlin: De Gruyter. 2019.

[13] Nieper-Wißkirchen, Marc. *Elementare Galois-Theorie. Ein konstruktiver Zugang.* Berlin: Springer Spektrum. 2020.

[14] Scriba, Christoph J. und Schreiber, Peter. *5000 Jahre Geometrie.* 3. Auflage. Heidelberg und Berlin: Springer. 2010.

[15] Schichl, Hermann und Steinbauer, Roland. *Einführung in das mathematische Arbeiten.* 2., überarbeitete Auflage. Berlin: Springer Spektrum. 2012.

[16] Thaer, Clemens (Hrsg.). *Die Elemente: Bücher I - XIII.* in: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Band 235. 3. Auflage. Schleßlitz: Thun. 1997.

[17] Van der Waerden, Bartel Leendert. *Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*. Bd. 8. Basel: Birkhäuser. 1956.

[18] *Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 16.09.2022.* `https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568`. [16.09.2022].

Glossar

Abkürzung	*Bedeutung*
$Q(R)$	Quotientenkörper
$R\backslash(a)$	Quotientenring
span	lineares Erzeugnis in einem Vektorraum
$F(A)$	kleinster Körper innerhalb von F, der von der Menge A erzeugt wird
$F[A]$	kleinster Ring innerhalb von F, der von der Menge A erzeugt wird
$K^{\times}$	Einheitengruppe
(a)	von a erzeugtes Hauptideal ($(a) := R \cdot a$)
$R[X]$	Ring mit Koeffizienten aus R
$K[X]$	Polynomring mit Koeffizienten aus K

ABSTRACT

Das *Delische Problem der Würfelverdopplung* beschäftigt die Mathematik schon seit sehr langer Zeit. Die zunächst sehr einfach klingende Fragestellung, ob es möglich ist einen Würfel mit euklidischen Mitteln zu konstruieren, der das doppelte Volumen eines gegebenen Würfels aufweist, konnte jedoch bis ins 19. Jahrhundert nicht eindeutig bewiesen beziehungsweise widerlegt werden. Der Ursprung geht dabei ins antike Griechenland zurück, wo sich ab etwa 400 v. Chr. die wohl zu der Zeit wichtigsten Mathematiker aus *Platons Akademie* damit beschäftigten und auch bereits einige mechanische Lösungsansätze zur Lösung des Problems liefern konnten. Im Verlauf der Geschichte bearbeiteten das Problem der Würfelverdopplung sowohl zahlreiche namhafte Mathematiker*innen als auch, aufgrund der vermeintlich einfachen Fragestellung, Laien. Im 19. Jahrhundert schaffte schließlich der französische Mathematiker Pierre Laurent Wantzel als erster eine algebraische Widerlegung der Fragestellung des *Delischen Problems*. Zwar gab und gibt es immer wieder alternative Lösungen (beispielsweise mechanisch) um eine Würfelverdopplung zu erhalten, mathematisch gesehen ist die Lösung des *Delischen Problems* mit euklidischen Mitteln aber nicht möglich.

Betrachtet man den algebraischen Widerspruchsbeweis, dass die Länge der Zahl $\sqrt[3]{2}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, geht man zunächst von den grundlegendsten algebraischen Strukturen aus, nämlich Ringe und Körper. Durch Körpererweiterung wird der Körper der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte gebildet. Dadurch kann man feststellen, dass die Zahl $\sqrt[3]{2}$ nicht im Körper der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte liegt und somit nicht konstruierbar ist. Das heißt, eine Würfelverdopplung mit euklidischen Mitteln, wie sie im *Delischen Problem* dargelegt wird, ist nicht möglich.

Um das *Delische Problem* auch im Kontext des mathematischen Schulunterrichts thematisieren zu können, bietet sich neben der historischen Entwicklung des Problems auch eine didaktische Umsetzung der Lösung des Problems der Würfelverdopplung mittels *Origamics* an. Dabei kann die Zahl $\sqrt[3]{2}$ durch Anwendung von Origami-Faltungen erhalten werden und mit einfachen geometrischen und rechnerischen Zusammenhängen der Beweis dazu gegeben werden.

Somit liefert diese Abhandlung des *Delischen Problems* in Form einer Masterarbeit neben dem detaillierten fachmathematischen algebraischen Widerspruchsbeweis auch einen Überblick über die historische Entstehung und Entwicklung des Problems und Ideen für die Thematisierung des *Problems der Würfelverdopplung* im schulmathematischen Kontext.

ABSTRACT

The doubling of the cube has occupied mathematics for a very long time. The initially very simple-sounding question of whether it is possible to construct a cube that has twice the volume of a given cube by Euclidean means, could not be clearly proven or disproven until the 19th century. The origin of this problem goes back to ancient Greece, where the most important mathematicians of the time from *Plato's Academy* began to work on solving that problem and at around 400 years BC they were already able to provide some mechanical approaches to solve it.

In the course of history the supposedly simple problem of doubling the cube was then also worked on by numerous renowned mathematicians as well as by laymen. In the 19th century the French mathematician Pierre Laurent Wantzel was the first to produce an algebraic refutation of the *Delian problem*. So even if there have always been alternative solutions to obtain the doubling of the cube, as for example mechanical ones, from a mathematical point of view the solution of the *Delian problem* is not possible by Euclidean means.

If one considers the algebraic proof of contradiction which says that the length of the number $\sqrt[3]{2}$ cannot be constructed by compass and ruler only, one should first start with the most basic algebraic structures, namely rings and fields. Through field extension, the field of the constructible points with compass and ruler is formed. By these means one can determine that the number $\sqrt[3]{2}$ does not lie in the field of the points that can be constructed with compass and ruler and thus cannot be constructed. This means that the doubling of a cube with Euclidean means, as presented in the *Delian problem*, is not possible.

In order to be able to address the doubling of the cube in the course of regular mathematical school lessons, a didactic implementation of the solution of the problem of doubling a cube could be reached by means of *Origamics*, however. In this case the number $\sqrt[3]{2}$ can be obtained through origami folds and the proof can be given by simple geometric and mathematical connections.

All in all, this master's thesis provides the detailed mathematical algebraic proof as well as an overview of the historical development of the problem and ideas how to make the doubling of the cube a topic in the context of regular school mathematics.