

Hasenöhrl F.

*Herrn A. E. Hascher*  
*freiwillig*  
*J. V.*

# Über ein Problem der Potentialtheorie

von

Dr. Fritz Hasenöhrl.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. November 1899.)

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.  
Mathem.-naturw. Classe; Bd. CVIII. Abth. II a. December 1899.

WIEN, 1899.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,  
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

# Druckschriften

der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe).

## Periodische Publicationen.

[Physik.]

Aus den Denkschriften 62. Bd. (1895).

- Liznar, J., Die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft in Österreich-Ungarn zur Epoche 1890-0 nach den in den Jahren 1889 bis 1894 ausgeführten Messungen. I. Theil: Erdmagnetische Messungen in Österreich . . . . . 12 K — h  
Mazelle, Ed., Beziehungen zwischen den mittleren und wahrscheinlichen Werthen der Lufttemperatur . . . . . 3 K — h

Aus den Denkschriften 63. Bd. (1896).

- Eder, J. M. und Valenta, E., Über die Spectren von Kupfer, Silber und Gold. (Mit 4 Textfiguren.) . . . . . 3 K 20 h

Aus den Denkschriften 64. Bd. (1897).

- Eder, J. M. und Valenta, E., Spectralanalytische Untersuchung des Argons. (Mit 3 Tafeln.) . . . . . 3 K 40 h  
Braun, C., Die Gravitations-Constante, die Masse und mittlere Dichte der Erde. Nach einer neuen experimentellen Bestimmung. (Mit 3 Tafeln und 8 Textfiguren.) . . . . . 5 K 60 h  
Hillebrand, C., Über den Einfluss der Elasticität auf die Schwankungen der Polhöhe . . . . . 1 K 60 h

Aus den Sitzungsberichten für 1897.

- Benndorf, H., Über das Verhalten rotirender Isolatoren im Magnetfeld und eine darauf bezügliche Arbeit A. Campetti's. . . . . — K 20 h  
Boltzmann, L., Über einen mechanischen Satz Poincaré's. . . . . — K 30 h  
— Über die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur. . . . . — K 60 h  
Dimmer, G., Über die Absorptionsspectren von Dibymssulfat und Neodymmonnitrat. (Mit 1 Tafel.) . . . . . — K 30 h  
Exner F. und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (VI. Mittheilung.) . . . . . — K 40 h  
— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (VII. Mittheilung.) (Mit 6 Tafeln.) . . . . . 1 K 90 h  
— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (VIII. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) . . . . . 1 K — h  
— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (IX. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) . . . . . 1 K 10 h  
— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (X. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) . . . . . 1 K — h  
Finger J., Über das innere Virial eines elastischen Körpers. . . . . — K 40 h  
Haschek, Ed., Über galvanische Polarisation in alkoholischen Lösungen. (Mit 1 Textfigur.) . . . . . — K 30 h  
Hasenochrl, F., Über den Temperaturcoefficienten der Dielektricitätsconstante in festen Isolatoren. (Mit 4 Textfiguren.) . . . . . — K 40 h  
Jäger, G., Zur Frage des Widerstandes, welchen bewegte Körper in Flüssigkeiten und Gasen erfahren. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . . — K 20 h  
— und Meyer St., Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten und deren Änderung mit der Temperatur. (I. Mittheilung.) (Mit 7 Textfiguren.) . . . . . — K 80 h  
— und Meyer St., Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten und deren Änderung mit der Temperatur. (II. Mittheilung.) (Mit 30 Textfiguren.) . . . . . — K 80 h

# Über ein Problem der Potentialtheorie

von

Dr. Fritz Hasenöhl.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. November 1899.)

Das Problem, das Potential im ganzen Raume zu bestimmen, wenn sich dasselbe auf der Oberfläche von zwei, sich ausschliessenden Kugeln auf eine gegebene Function der Oberflächenkoordinaten dieser Kugeln reducirt, ist von William Thomson (Lord Kelvin) mit Hilfe seiner Theorie der elektrischen Bilder oder der reciproken Radii vectores gelöst worden. Und zwar ergibt sich das Resultat in sehr eleganter Form nach Kugelfunctionen dipolarer Coordinaten geordnet.<sup>1</sup>

In dem Folgenden habe ich versucht, dasselbe Problem nach einer anderen Methode zu behandeln, deren Grundgedanke auch in der bekannten Methode von Murphy liegt und die gewissermassen als Durchführung der letzteren betrachtet werden kann. Das Resultat meiner Arbeit ist die Darstellung des Potentials durch eine unendliche Doppelreihe von Functionen rechtwinkliger Coordinaten, ist also complicirter als das Thomson'sche, welche das Potential in Gestalt einer einfachen unendlichen Reihe gibt.

Dagegen ist es vielleicht ein Vortheil der hier angegebenen Formel, dass sie sich leicht auf specielle Fälle (auf den Fall zweier leitenden Kugeln zum Beispiel) anwenden lässt, was beim Thomson'schen Resultate nicht der Fall ist, da die Entwicklung auch der einfachsten Functionen nach Kugelfunctionen dipolarer Coordinaten sehr mühsam ist.

---

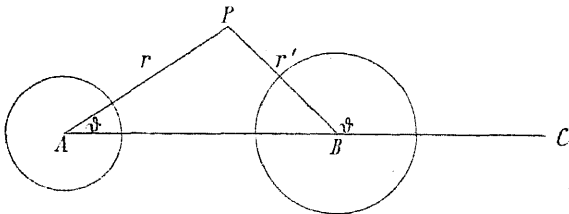
<sup>1</sup> Siehe Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl., II, S. 268.

Endlich gestattet die hier angewandte Methode, wie es ja bei einer Durchführung der Murphy'schen nicht anders zu erwarten ist, die Verallgemeinerung auf den Fall, dass statt einer, beliebig viele Kugeln vorhanden sind, auf deren Oberfläche das Potential vorgeschriebene Werthe annehmen muss.

Ich habe zum Schlusse dieser Arbeit auch die Lösung dieses Problems angegeben oder wenigstens die ersten Glieder der betreffenden Reihenentwicklung berechnet, aus denen die weiteren in gegebener Weise folgen, mich jedoch dabei auf den Fall beschränkt, dass das Potential auf allen Kugeln constant ist. Der allgemeine Fall ist in derselben Weise zu behandeln, doch würde das Resultat so complicirt, dass es nicht mehr als formellen Werth besässe.

## 1.

Wir nennen die beiden Kugeln, deren Centrum in  $A$  und  $B$  liegt (siehe die Figur), kurz die Kugel ( $A$ ), respective die Kugel ( $B$ ).



Der Radius der ersteren sei  $a$ , der der letzteren  $b$ . Die Distanz  $AB$  sei gleich  $d$ .

Die Lage eines beliebigen Punktes  $P$  fixiren wir durch Polarcoordinaten, als deren Scheitel wir nach Bequemlichkeit  $A$  oder  $B$  wählen werden. Die entsprechenden Radien-Vektoren seien  $r$  und  $r'$ ; als Axe wählen wir  $AC$ , von der ab wir die Polwinkel  $\vartheta$  und  $\vartheta'$  zählen; endlich werde die Ebene  $ABP$  durch den Winkel  $\varphi$  bestimmt, den sie mit einer anderen fixen Ebene durch  $AC$  einschliesst.

Die Coordinaten von  $P$  sind also  $r, \vartheta, \varphi$  oder  $r', \vartheta', \varphi'$ . (Zwischen diesen sechs Grössen bestehen natürlich drei unabhängige Relationen; speciell ist  $\varphi = \varphi'$ .)

Das Potential soll also auf der Oberfläche dieser beiden Kugeln eine gegebene Function von  $\vartheta, \varphi$ , respective von  $\vartheta', \varphi'$  sein.

Es sei also etwa:

$$V_{r=a} = \psi(\vartheta, \varphi) \quad \text{und} \quad V_{r'=b} = \chi(\vartheta', \varphi').$$

Diese beiden Functionen entwickeln wir nach Kugelflächenfunctionen; wir setzen also

$$\psi(\vartheta, \varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} S_{\mu}(\vartheta, \varphi); \quad \chi(\vartheta', \varphi') = \sum_{\mu=0}^{\infty} s_{\mu}(\vartheta', \varphi'), \quad (1)$$

wo also  $S_{\mu}$  eine Kugelflächenfunction  $\mu$ ter Ordnung von  $\vartheta$  und  $\varphi$ ;  $s_{\mu}$  eine solche Function von  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  bedeutet.

Nun setzen wir das Potential an einer beliebigen Stelle des äusseren Raumes:

$$V = \sum_{\mu=0}^{\infty} S_{\mu} \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{\infty} s_{\mu} \left( \frac{b}{r'} \right)^{\mu+1} + Q_1.$$

Dabei hat die Function  $Q_1$  folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Sie muss der Laplace'schen Gleichung genügen.

2. Sie muss an der Oberfläche der Kugel (A) den entgegengesetzt gleichen Werth annehmen, den die Function

$\sum_{\mu=0}^{\infty} S_{\mu} \left( \frac{b}{r'} \right)^{\mu+1}$  an dieser Oberfläche annimmt; es muss also

$$|Q_1|_{r=a} = - \left| \sum_{\mu=0}^{\infty} s_{\mu} \left( \frac{b}{r'} \right)^{\mu+1} \right|_{r=a} \quad (2)$$

sein.

3. Sie muss an der Oberfläche der Kugel (B) den entgegengesetzt gleichen Werth annehmen, den die Function

$\sum_{\mu=0}^{\infty} S_{\mu} \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1}$  an dieser Oberfläche annimmt, es muss also

$$|Q_1|_{r'=b} = - \left| \sum_{\mu=0}^{\infty} S_{\mu} \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1} \right|_{r'=b} \quad (3)$$

sein.

Gelingt es, eine solche Function  $Q_1$  aufzufinden, so ist unser Problem gelöst; denn das Potential genügt dann der Laplace'schen Gleichung, und es reducirt sich offenbar auf der Oberfläche der Kugeln ( $A$ ) und ( $B$ ) auf  $\Sigma S_\mu$ , respective  $\Sigma s_\mu$ .

Diese Function  $Q_1$  hat also auf der Oberfläche der beiden Kugeln vorgeschriebene Werthe und soll im ganzen Raume der Laplace'schen Gleichung genügen. Wir sind also scheinbar um keinen Schritt weiter gekommen, da das Problem, die Function  $Q_1$  zu finden, dasselbe ist, wie das ursprüngliche, das Potential  $V$  zu bestimmen.

Der einzige Unterschied ist, dass die Werthe, welche die Function  $Q_1$  an der Oberfläche der beiden Kugeln annehmen muss, im Allgemeinen kleiner sein werden als die, welche der Function  $V$  an diesen Stellen vorgeschrieben sind, so dass der Gedanke nahe liegt, durch Fortsetzung dieses Verfahrens das Potential in eine Reihe zu entwickeln, über deren Convergenz dann natürlich nachträglich entschieden werden muss.<sup>1</sup>

Wir wollen also mit  $Q_1$  ebenso vorgehen wie früher mit  $V$ . Wir entwickeln die Werthe, welche  $Q_1$  an der Oberfläche von ( $A$ ) und ( $B$ ) annehmen muss nach Kugelfunctionen. [Diese Werthe sind durch (2) und (3) gegeben.] Wir setzen also:

$$|Q_1|_{r=a} = \sum_{\mu=0}^{\infty} S'_\mu(\vartheta, \varphi); \quad |Q_1|_{r'=b} = \sum_{\mu=0}^{\infty} s'_\mu(\vartheta', \varphi'),$$

dann wird:

$$Q_1 = \sum_{\mu=0}^{\infty} S'_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{\infty} s'_\mu \left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1} + Q_2. \quad (4)$$

$Q_2$  muss dann wieder der Laplace'schen Gleichung genügen, und ferner muss

$$|Q_2|_{r=a} = - \left| \sum_{\mu=0}^{\infty} s'_\mu \left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1} \right|_{r=a}$$

<sup>1</sup> Dieser Convergenzbeweis kann auch allgemein geführt werden; siehe Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, S. 357. In unserem Fall ergibt sich, wie folgt, die Convergenz des Resultates direct.

und

$$|Q_2|_{r'=b} = - \left[ \sum_{\mu=0}^{\infty} S_{\mu}' \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1} \right]_{r'=b}$$

sein.

Wir entwickeln nun wieder diese Werthe nach Kugelfunctionen:

$$|Q_2|_{r=a} = \sum_{\mu=0}^{\infty} S_{\mu}''(\vartheta, \varphi); \quad |Q_2|_{r'=b} = \sum_{\mu=0}^{\infty} s_{\mu}''(\vartheta', \varphi')$$

und setzen ebenso wie früher:

$$Q_2 = \sum_{\mu=0}^{\infty} S_{\mu}'' \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{\infty} s_{\mu}'' \left( \frac{b}{r'} \right)^{2\mu+1} + Q_3.$$

Wenden wir nun auf  $Q_3$  dasselbe Verfahren an und fahren so fort, so erhalten wir endlich:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1} (S_{\mu} + S_{\mu}' + S_{\mu}'' + \dots) \\ &+ \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( \frac{b}{r'} \right)^{\mu+1} (s_{\mu} + s_{\mu}' + s_{\mu}'' + \dots). \end{aligned} \tag{5}$$

Damit ist das Problem formell gelöst — die Convergenz der Reihen natürlich vorausgesetzt.

(Besonders einfach gestaltet sich das Verfahren für den Fall, dass die beiden Kugeln concentrisch liegen; man gelangt so sehr rasch zu dem bekannten Resultate.)

## 2.

Wir wollen nun versuchen, die im letzten Abschnitte definirten Functionen  $Q$  zu bestimmen. Und zwar wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass sich die Kugelfunctionenreihen in Gleichung (1) auf je eine einzige solche Function reduciren. Es sei also das Potential auf der Oberfläche von  $(A)$  gleich  $S_{\mu}(\vartheta, \varphi)$ , auf der von  $(B)$  gleich  $s_{\mu}(\vartheta', \varphi')$ .

Das Resultat für diesen Fall haben wir dann in Bezug auf  $\mu$  von 0 bis unendlich zu summiren, wodurch wir dann die Lösung des allgemeinen Problems erhalten.

Wir setzen also:

$$V = S_\mu \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1} + s_\mu \left( \frac{b}{r'} \right)^{\mu+1} + Q_1.$$

Die Function  $Q_1$  muss dann auf der Oberfläche von  $(B)$  den entgegengesetzten Werth annehmen wie die Function  $S_\mu \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1}$  auf  $A$  den entgegengesetzten Werth wie  $s_\mu \left( \frac{b}{r'} \right)^{\mu+1}$ .

Wir führen nun zwei rechtwinklige Coordinatensysteme ein; das eine  $(xyz)$  habe seinen Ursprung in  $A$ , das zweite  $(x', y', z')$  in  $B$ . Die gemeinsame  $X$ -Axe falle mit  $AC$  zusammen, derart dass

$$\begin{aligned} x' &= x - d \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} S_\mu \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1} &= \frac{f(x, y, z)}{r^{2\mu+1}} = F(x, y, z) \\ s_\mu \left( \frac{b}{r'} \right)^{\mu+1} &= \frac{e(x', y', z')}{r'^{2\mu+1}} = E(x', y', z'), \end{aligned}$$

wobei  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  ist.

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} Q_1 &= - \left( \frac{b}{d} \right)^{2\mu+1} \frac{f \left( - \left[ x' + \frac{b^2}{d} \right] + PR^2, y', z' \right)}{\left[ \left( x' + \frac{b^2}{d} \right)^2 + y'^2 + z'^2 \right]^{\frac{2\mu+1}{2}}} - \\ &\quad - \left( \frac{a}{d} \right)^{2\mu+1} \frac{e \left( - \left[ x - \frac{a^2}{d} \right] - \Pi \rho^2, y, z \right)}{\left[ \left( x - \frac{a^2}{d} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{2\mu+1}{2}}} + Q_2, \end{aligned} \quad (6)$$



worin  $R$  und  $\rho$  dieselben Ausdrücke bezeichnen, welche auch im Nenner des betreffenden Bruches vorkommen, also

$$R^2 = \left(x' + \frac{b^2}{d}\right)^2 + y'^2 + z'^2$$

$$\rho^2 = \left(x - \frac{a^2}{d}\right)^2 + y^2 + z^2$$

und  $P$  und  $\Pi$  Constante sind.

Wir können uns leicht überzeugen, dass  $Q_1$  den im vorigen Abschnitt aufgestellten Bedingungen genügt. Vor Allem erfüllen die beiden Brüche die Laplace'sche Gleichung. Man kann dies durch Ausführung der betreffenden Differentiationen einsehen — oder einfacher dadurch, dass man die Zähler nach Potenzen von  $PR^2$ , respective von  $\Pi\rho^2$  entwickelt. Dadurch erhält man eine Anzahl von Ausdrücken der Form:

$$\frac{\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} f\left(-\left(x' + \frac{b^2}{d}\right), y', z'\right)}{\left[\left(x' + \frac{b^2}{d}\right)^2 + y'^2 + z'^2\right]^{\frac{2(\mu-\lambda)+1}{2}}},$$

welche einzeln der Laplace'schen Gleichung genügen. Denn wenn  $f(xyz)$  eine räumliche Kugelfunction  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung ist, so ist ja  $\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} f(xyz)$  \* und ebenso  $\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} f(-x, y, z)$  eine räumliche Kugelfunction von der Ordnung  $\mu - \lambda$ ; daher

$$\frac{\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} f(-x, y, z)}{\left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{2(\mu-\lambda)+1}{2}}}$$

eine räumliche Kugelfunction von der Ordnung  $-(\mu - \lambda) - 1$ , die der Laplace'schen Gleichung gehorchen muss.

Ferner sieht man auch leicht, dass der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (6) auf der Kugel ( $B$ ) denselben Werth

---

\* Siehe etwa Thomson und Tait, Treatise on natural philosophy, II. Auflage, S. 180, Gleichung (15).

annimmt wie  $\frac{f(x, y, z)}{r^{2\mu+1}}$ ; der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von (6) auf der Kugel (A) denselben Werth annimmt wie  $\frac{e(x', y', z')}{r'^{2\mu+1}}$ , wenn man den Constanten  $P$  und  $\Pi$  die Werthe:

$$P = \frac{d}{b^2}; \quad \Pi = \frac{d}{a^2}$$

beilegt. Denn es ist

$$\text{für } r' = b: \quad x = -\left(x' + \frac{b^2}{d}\right) + \frac{d}{b^2} R^2$$

$$\text{für } r = a: \quad x' = -\left(x - \frac{a^2}{d}\right) - \frac{d}{a^2} \rho^2.$$

Die Zähler werden also einander gleich; und ferner heben sich auch die Nenner und die Factoren  $\left(\frac{b}{d}\right)^{2\mu+1}$ , respective  $\left(\frac{a}{d}\right)^{2\mu+1}$  weg. Denn es ist ja:

$$\text{für } r' = b: \quad r^2 = \frac{d^2}{b^2} \left[ \left(x' + \frac{b^2}{d}\right)^2 + y'^2 + z'^2 \right]$$

$$\text{für } r = a: \quad r'^2 = \frac{d^2}{a^2} \left[ \left(x - \frac{a^2}{d}\right)^2 + y^2 + z^2 \right].$$

(Es ist dies zugleich der Grundsatz der Theorie der reciproken Radii vectores. Es liesse sich auch Gleichung (6) mit Hilfe dieser Theorie ableiten; da dies aber etwas umständlich ist, habe ich vorgezogen, diese Gleichung hinzuschreiben und nachträglich ihre Richtigkeit zu zeigen, umsomehr als dies auch der Weg ist, auf dem ich den Satz gefunden habe, der durch Gleichung (6) ausgedrückt ist.)

Wir schreiben nun der Kürze halber Gleichung (6) in der folgenden Form:

$$Q_1 = -\left(\frac{b}{d}\right)^{2\mu+1} F \left\{ -\left(x' + \frac{b^2}{d}\right), y', z', P \right\} - \\ -\left(\frac{a}{d}\right)^{2\mu+1} E \left\{ -\left(x - \frac{a^2}{d}\right), y, z, -\Pi \right\} + Q_2, \quad (6')$$

wobei also allgemein

$$\frac{f(\pm(x+a) \pm P[(x+a)^2 + y^2 + z^2], y, z)}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{2\mu+1}{2}}} = F\{\pm(x+a), y, z, \pm P\} \quad (7)$$

gesetzt ist.

Wir können nun leicht auch den Ausdruck  $Q_2$  bilden. Dazu entwickeln wir, wie bereits oben gezeigt wurde,  $F\left(-\left(x' + \frac{b^2}{d}\right), y', z', P\right)$  nach Kugelfunctionen von  $-\left(x' + \frac{b^2}{d}\right)$ ,  $y', z'$  und können dann auf jede einzelne den Satz (6) anwenden. Analog verfahren wir mit  $E\left(-\left(x - \frac{a^2}{d}\right), y, z, -\Pi\right)$  und erhalten so:

$$Q_2 = \left(\frac{ba}{d\Delta_1}\right)^{2\mu+1} \frac{f\left(x - \frac{a^2}{\Delta_1} + P_1 R_1^2, y, z\right)}{\left[\left(x - \frac{a^2}{\Delta_1}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{2\mu+1}{2}}} +$$

$$+ \left(\frac{ab}{d\delta_1}\right)^{2\mu+1} \frac{e\left(x' + \frac{b^2}{\delta_1} - \Pi_1 \rho_1^2, y', z'\right)}{\left[\left(x' + \frac{b^2}{\delta_1}\right)^2 + y'^2 + z'^2\right]^{\frac{2\mu+1}{2}}} + Q_3,$$

worin

$$\Delta_1 = d - \frac{b^2}{d}; \quad \delta_1 = d - \frac{a^2}{d},$$

ferner analog dem früheren:

$$R_1^2 = \left(x - \frac{a^2}{\Delta_1}\right)^2 + y^2 + z^2; \quad \rho_1^2 = \left(x' + \frac{b^2}{\delta_1}\right)^2 + y'^2 + z'^2$$

gesetzt ist und

$$P_1 = \frac{\Delta_1 d^2}{a^2 b^2}; \quad \Pi_1 = \frac{\delta_1 d^2}{a^2 b^2}$$

ist. Der durch Gleichung (7) angegebenen symbolischen Bezeichnungsweise nach setzen wir

$$Q_2 = \left(\frac{ba}{d\Delta_1}\right)^{2\mu+1} F\left(x - \frac{a^2}{\Delta_1}, y, z, P_1\right) + \\ + \left(\frac{ab}{d\delta_1}\right)^{2\mu+1} E\left(x' + \frac{b^2}{\delta_1}, y', z', -\Pi_1\right) + Q_3.$$

So fortfahrend können wir alle  $Q$  nacheinander bestimmen; wir erhalten etwa noch als allgemeine Glieder:

$$Q_{2i-2} = \left(\frac{ba\dots a}{d\Delta_1\dots\Delta_{2i-1}}\right)^{2\mu+1} \frac{f\left(x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}} + P_{2i-1}R_{2i-1}^2, y, z\right)}{R_{2i-1}^{2\mu+1}} + \\ + \left(\frac{ab\dots b}{d\delta_1\dots\delta_{2i-1}}\right)^{2\mu+1} \frac{e\left(x' + \frac{b^2}{\delta_{2i-1}} - \Pi_{2i-1}\rho_{2i-1}^2, y', z'\right)}{\rho_{2i-1}^{2\mu+1}} + \\ + Q_{2i-1} \\ = \left(\frac{ba\dots a}{d\Delta_1\dots\Delta_{2i-1}}\right)^{2\mu+1} F\left(x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}}, y, z, P_{2i-1}\right) + \\ + \left(\frac{ab\dots b}{d\delta_1\dots\delta_{2i-1}}\right)^{2\mu+1} E\left(x' + \frac{b^2}{\delta_{2i-1}}, y', z', -\Pi_{2i-1}\right) + Q_{2i-1}$$

und

$$Q_{2i-1} = \\ = - \left(\frac{ba\dots ab}{d\Delta_1\dots\Delta_{2i-1}\Delta_{2i}}\right)^{2\mu+1} \frac{f\left(-\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right) + P_{2i}R_{2i}^2, y', z'\right)}{R_{2i}^{2\mu+1}} - \\ - \left(\frac{ab\dots ba}{d\delta_1\dots\delta_{2i-1}, \delta_{2i}}\right)^{2\mu+1} \frac{e\left(-\left(x - \frac{a^2}{\delta_{2i}}\right) - \Pi_{2i}\rho_{2i}^2, y, z\right)}{\rho_{2i}^{2\mu+1}} + Q_{2i} \\ = - \left(\frac{ba\dots ab}{d\Delta_1\dots\Delta_{2i-1}\Delta_{2i}}\right)^{2\mu+1} F\left(-\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right), y', z', P_{2i}\right) - \\ - \left(\frac{ab\dots ba}{d\delta_1\dots\delta_{2i-1}\delta_{2i}}\right)^{2\mu+1} E\left(-\left(x - \frac{a^2}{\delta_{2i}}\right), y, z, -\Pi_{2i}\right) + Q_{2i}.$$

Hierin ist:

$$R_{2i-1}^3 = \left( \left( x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}} \right)^2 + y^2 + z^2 \right); \quad \rho_{2i-1}^3 = \left( x' + \frac{b^2}{\delta_{2i-1}} \right)^2 + y'^2 + z'^2$$

$$R_{2i}^3 = \left( \left( x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}} \right)^2 + y'^2 + z'^2 \right) \quad \rho_{2i}^3 = \left( x - \frac{a^2}{\delta_{2i}} \right)^2 + y^2 + z^2.$$

Die Grössen  $\Delta$  und  $\delta$  bestimmen sich aus der folgenden Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= d - \frac{b^2}{d} & \delta_1 &= d - \frac{a^2}{d} \\ \Delta_2 &= d - \frac{a^2}{\Delta_1} & \delta_2 &= d - \frac{b^2}{\delta_1} \\ \dots & & & \\ \Delta_{2i-1} &= d - \frac{b^2}{\Delta_{2i-2}} & \delta_{2i-1} &= d - \frac{a^2}{\delta_{2i-2}} \\ \Delta_{2i} &= d - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}} & \delta_{2i} &= d - \frac{b^2}{\delta_{2i}} \end{aligned} \tag{8}$$

Die Grössen  $P$  und  $\Pi$  hingegen ergeben sich aus den vorhergehenden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} P_{2i-1} &= \frac{\Delta_{2i-1}}{a^2} + \frac{\Delta_{2i-1}^3}{a^2} P_{2i-2} \\ P_{2i} &= \frac{\Delta_{2i}}{b^2} + \frac{\Delta_{2i}^3}{b^2} P_{2i-1} \\ \Pi_{2i-1} &= \frac{\delta_{2i-1}}{b^2} + \frac{\delta_{2i-1}^3}{b^2} \Pi_{2i-2} \\ \Pi_{2i} &= \frac{\delta_{2i}}{a^2} + \frac{\delta_{2i}^3}{a^2} \Pi_{2i-1} \end{aligned} \tag{9}$$

Von der Richtigkeit dieser allgemeinen Glieder der Reihenentwicklung kann man sich noch nachträglich überzeugen, da sie aus denselben Gründen wie  $Q_1$  der Laplace'schen Gleichung genügen und ferner

auf (B)

$$F\left\{x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}}, y', z, P_{2i-1}\right\} = \\ = \left(\frac{b}{\Delta_{2i}}\right)^{2\mu+1} F\left(-\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right), y', z', P_{2i}\right)$$

$$E\left\{-\left(x - \frac{a^2}{\delta_{2i}}\right), y', z, -\Pi_{2i}\right\} = \\ = \left(\frac{b}{\delta_{2i+1}}\right)^{2\mu+1} E\left\{x' + \frac{b^2}{\delta_{2i+1}}, y', z', -\Pi_{2i+1}\right\}$$

auf (A)

(9a)

$$F\left\{-\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right), y', z', P_{2i}\right\} = \\ = \left(\frac{a}{\Delta_{2i+1}}\right)^{2\mu+1} F\left(\left(x - \frac{a^2}{\Delta_{2i+1}}\right), y', z, P_{2i+1}\right)$$

$$E\left\{x' + \frac{b^2}{\delta_{2i+1}}, y', z', -\Pi_{2i+1}\right\} = \\ = \left(\frac{a}{\delta_{2i+2}}\right)^{2\mu+1} E\left\{-\left(x - \frac{a^2}{\delta_{2i+2}}\right), y, z, -\Pi_{2i+2}\right\}$$

wird.

Da ja für  $r' = b$ :

$$x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}} + P_{2i-1} \left[ \left(x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}}\right)^2 + y^2 + z^2 \right] = \\ = -\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right) + P_{2i} \left[ \left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right)^2 + y'^2 + z'^2 \right]$$

und

$$\left[ \left(x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}}\right)^2 + y^2 + z^2 \right] = \left(\frac{\Delta_{2i}}{b}\right)^2 \left[ \left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right)^2 + y'^2 + z'^2 \right]$$

ist, wenn für die Grössen  $P$  die durch Gleichung (9) gegebene Recursionsformel gilt. Die Richtigkeit der drei übrigen Gleichungen (9a) lässt sich ganz analog nachweisen.



Damit die successiven Operationen, durch welche Gleichung (10) erlangt wird, stets so wie die erste durchführbar seien, ist nothwendig, dass:

$$\begin{aligned} \Delta_{2i} > b; \quad \Delta_{2i+1} > a \\ \delta_{2i} > a; \quad \delta_{2i+1} > b \end{aligned} \tag{10a}$$

sei. Die Richtigkeit dieser Ungleichungen folgt aus einer einfachen geometrischen Betrachtung und auch aus der folgenden Darstellung der  $\Delta$  und  $\delta$  durch  $p$  und  $q$  (siehe S. 13).

Wir können Gleichung (10) auf folgende Weise eine elegantere Gestalt geben. Wir betrachten das folgende System von Gleichungen:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} p_0 &= 1; & q_0 &= 0 \\ bp_1 &= kp_0 - aq_0; & bq_1 &= dp_0 - aq_0 \\ bp_2 &= kp_1 - dq_1; & bq_2 &= dp_1 - aq_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bp_{n+1} &= kp_n - dq_n; & bq_{n+1} &= dp_n - aq_n, \end{aligned} \tag{11}$$

worin

$$k = \frac{d^2 - b^2}{a}$$

gesetzt ist.

Man sieht sofort, dass:

$$\begin{aligned} \frac{d}{b} &= \frac{q_1}{p_0} \\ \frac{\Delta_1}{a} &= \frac{p_1}{q_1} \\ \frac{\Delta_2}{b} &= \frac{q_2}{p_1}, \end{aligned}$$

und wenn man die Recursionsformeln (9) und (11) vergleicht, dass allgemein:

---

<sup>1</sup> Betreffs dieser Gleichungen vergleiche: Vorlesungen über die im umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte von P. G. Lejeune-Dirichlet, herausgegeben von Dr. F. Grube. 2. Auflage, S. 120, Gleichung (1). Siehe auch Anmerkung 1 auf S. 20 dieser Arbeit.



$$\frac{\Delta_{2z-1}}{a} = \frac{p_z}{q_z}$$

$$\frac{\Delta_{2z}}{b} = \frac{q_{z+1}}{p_z}.$$
(12)

Wählt man aber in den Gleichungen (11) statt 1 und 0 als Anfangsglieder  $d$  und  $a$ , bildet die folgenden Grössen genau wie früher und bezeichnet sie zum Unterschiede mit  $p'_n$  und  $q'_n$  (also  $p'_0 = d$ ;  $q'_0 = a$ ), so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$\frac{d}{a} = \frac{p'_0}{q'_0}$$

$$\frac{\delta_1}{b} = \frac{q'_1}{p'_0}$$

$$\frac{\delta_2}{a} = \frac{p'_1}{q'_1}$$

und allgemein:

$$\frac{\delta_{2z}}{a} = \frac{p'_z}{q'_z}$$

$$\frac{\delta_{2z+1}}{b} = \frac{q'_{z+1}}{p'_z}.$$
(13)

Benützen wir dies, so ergibt sich Folgendes:

$$\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{\Delta_1} \cdot \frac{b}{\Delta_2} \cdots \frac{b}{\Delta_{2z}} \cdot \frac{a}{\Delta_{2z+1}} = \frac{p_0}{q_1} \cdot \frac{q_1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_z}{q_{z+1}} \cdot \frac{q_{z+1}}{p_{z+1}} =$$

$$= \frac{p_0}{p_{z+1}} = \frac{1}{p_{z+1}},$$

ferner:

$$\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{\Delta_1} \cdot \frac{b}{\Delta_2} \cdots \frac{a}{\Delta_{2z-1}} \cdot \frac{b}{\Delta_{2z+2}} = \frac{p_0}{q_1} \cdot \frac{q_1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{q_{z+1}}{p_{z+1}} \cdot \frac{p_{z+1}}{q_{z+2}} =$$

$$= \frac{p_0}{q_{z+2}} = \frac{1}{q_{z+2}},$$

desgleichen:

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{\delta_1} \cdot \frac{a}{\delta_2} \cdots \frac{a}{\delta_{2z}} \cdot \frac{b}{\delta_{2z+1}} = \frac{q'_0}{p'_0} \cdot \frac{p'_1}{q'_1} \cdot \frac{q'_1}{p'_1} \cdots \frac{q'_z}{p'_z} \cdot \frac{p'_z}{q'_{z+1}} =$$

$$= \frac{q'_0}{q'_{z+1}} = \frac{a}{q'_{z+1}}$$

und

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{\delta_1} \cdot \frac{a}{\delta_2} \cdots \frac{b}{\delta_{2z+1}} \cdot \frac{a}{\delta_{2z+2}} = \frac{q'_0}{p'_0} \cdot \frac{p'_1}{q'_1} \cdot \frac{q'_1}{p'_1} \cdots \frac{p'_z}{q'_{z+1}} \cdot \frac{q'_{z+1}}{p'_{z+1}} =$$

$$= \frac{q'_0}{p'_{z+1}} = \frac{a}{p'_{z+1}}.$$

Setzen wir dies in Gleichung (10) ein, so erhalten wir endlich:

$$V = \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_z}\right)^{2\mu+1} F\left(x-a \frac{q_z}{p_z}, y, z, P_{2z-1}\right)$$

$$- \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q_{z+1}}\right)^{2\mu+1} F\left(-\left(x'+b \frac{p_z}{q_{z+1}}\right), y', z', P_{2z}\right)$$

$$+ \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{a}{q'_z}\right)^{2\mu+1} E\left(x'+b \frac{p'_{z-1}}{q'_z}, y', z', -\Pi_{2z-1}\right)$$

$$- \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{a}{p'_z}\right)^{2\mu+1} E\left(-\left(x-a \frac{q'_z}{p'_z}\right), y, z, -\Pi_{2z}\right), \quad (14)$$

wobei aber noch festgesetzt werden muss, dass  $p'_{-1} = P_{-1} = \Pi_{-1} = 0$  sei.

Die Grössen  $p_z$  und  $q_z$  lassen sich<sup>1</sup> als Summe der allgemeinen Glieder zweier geometrischer Progressionen darstellen. Und zwar ist

$$p_z = \rho \omega^z + \rho' \omega^{-z}$$

$$q_z = \rho \frac{k-b\omega}{d} \omega^z + \rho' \frac{k-b\omega^{-1}}{d} \omega^{-z}. \quad (15)$$

<sup>1</sup> Siehe Dirichlet-Grube l. c.

Dabei bestimmen sich  $\rho$  und  $\rho'$  durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho + \rho' \\ q_0 &= \rho \frac{k - b\omega}{d} + \rho' \frac{k - b\omega^{-1}}{d}. \end{aligned} \quad (15a)$$

$\omega$  ist die Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$b\omega^2 + (a - k)\omega + b = 0,$$

welche zwischen 0 und 1 liegt.

( $p'_z$  und  $q'_z$  bestimmen sich auf dieselbe Weise, wobei bloss  $\rho$  und  $\rho'$  einen anderen Werth haben, der sich aus den Gleichungen (15a) bestimmt, wenn man in ihnen  $p_0$  und  $q_0$  mit  $p'_0$  und  $q'_0$  vertauscht.)

Wir können uns nun leicht von der Convergenz der Reihen, welche in Gleichung (14) auftreten, überzeugen. (Eigentlich ist dies nach der in Anmerkung 1, S. 4 gemachten Bemerkung nicht mehr nöthig.) Betrachten wir zuerst die erste von ihnen und entwickeln ihr  $\kappa$ tes Glied nach Potenzen von  $P_{2\kappa-1}$ ; dadurch erhalten wir eine Anzahl Glieder von der Form:

$$\left(\frac{1}{p_\kappa}\right)^{2\mu+1} P_{2\kappa-1}^\lambda \varphi\left(x - \frac{\rho_\kappa}{p_\kappa}, y, z\right) = M_{\kappa,\lambda},$$

wobei  $\lambda$  die Werthe 0, 1, 2... $\mu$  annehmen kann. (Der Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und  $F$  ist sehr einfach, es kommt hier jedoch nicht darauf an.) Der entsprechende Bestandtheil des  $(\kappa + 1)$ ten Gliedes der ersten Reihe (14) ist:

$$\left(\frac{1}{p_{\kappa+1}}\right)^{2\mu+1} P_{2\kappa+1}^\lambda \varphi\left(x - \frac{q_{\kappa+1}}{p_{\kappa+1}}, y, z\right) = M_{\kappa+1,\lambda}.$$

Die Convergenz der Reihe ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, dass

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{M_{\kappa,\lambda}}{M_{\kappa+1,\lambda}} > 1$$

ist. Nun ist nach Gleichung (15):

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{p_{\kappa+1}}{p_\kappa} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\rho \omega^{\kappa+1} + \rho' \omega^{-\kappa-1}}{\rho \omega^\kappa + \rho' \omega^{-\kappa}} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\rho' \omega^{-\kappa-1}}{\rho' \omega^{-\kappa}} = \frac{1}{\omega} > 1,$$

und

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{q_z}{p_z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\rho \frac{k-b\omega}{d} \omega^z + \rho' \frac{k-b\omega^{-1}}{d} \omega^{-z}}{\rho \omega^z + \rho' \omega^{-z}} = \frac{k-b\omega^{-1}}{d},$$

hat also einen bestimmten Werth. Demnach ist:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi \left( x - \frac{q_z}{p_z}, y, z \right)}{\varphi \left( x - \frac{q_{z+1}}{p_{z+1}}, y, z \right)} = 1,$$

da ja die Stetigkeit von  $\varphi$  ausser Frage steht. Ferner ist nach Gleichung (9)

$$P_{2z+1} = \frac{1}{a} \frac{p_{z+1}}{q_{z+1}} + \frac{1}{b} \frac{p_{z+1}^2}{q_{z+1} p_z} + \left( \frac{p_{z+1}}{p_z} \right)^2 P_{2z-1}.$$

Da nun  $P$  mit  $z$  unendlich gross wird, fallen die endlichen Grössen fort und man hat:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P_{2z-1}}{P_{2z+1}} = \left( \frac{p_z}{p_{z+1}} \right)^2.$$

Somit wird:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{M_{z,\lambda}}{M_{z+1,\lambda}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{p_{z+1}}{p_z} \right)^{2(\mu-\lambda)+1} = \left( \frac{1}{\omega} \right)^{2(\mu-\lambda)+1} > 1,$$

und damit ist die unbedingte Convergenz der ersten Reihe (14) nachgewiesen.

In ähnlicher Weise findet man noch:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P_{2z+2}}{P_{2z}} = \left( \frac{q_{z+2}}{\varphi_{z+1}} \right)^2,$$

ferner:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{q_{z+1}}{q_z} > 1$$

und dass:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{p_z}{q_{z+1}} = \frac{\omega d}{k-b\omega^{-1}},$$

also auch einen bestimmten, endlichen Werth hat; da nun dasselbe auch von  $p'_x$  und  $q'_x$  gilt, so ist die Convergenz sämmtlicher Reihen, die in (14) auftreten, bewiesen.

Ferner folgt aus den Gleichungen (11) leicht, dass stets

$$p_n > q_n; \quad q_{n+1} > p_n$$

$$p'_n > q'_n; \quad q'_{n+1} > p'_n.$$

Betrachtet man nun die Gleichungen (12) und (13), so folgt daraus unmittelbar die Richtigkeit der Ungleichungen (10a).

Das Resultat, das durch die Gleichung (14) ausgesprochen wird, genügt offenbar allen Bedingungen des Problems; denn alle darin auftretenden Functionen  $F$  und  $E$  genügen der Laplace'schen Gleichung, wie auch den anderen Bedingungen des Potentials. Ferner reducirt sich die rechte Seite der Gleichung (10) oder (14) für  $r = a$

$$|F(x, y, z)|_{r=a} = S_\mu(\vartheta, \varphi)$$

und für  $r' = b$  auf

$$|E(x', y', z')|_{r'=b} = s_\mu(\vartheta', \varphi'),$$

da ja die anderen Glieder sich in diesen Fällen paarweise aufheben, wie ja bereits früher gezeigt wurde. Im allgemeineren Falle, dass das Potential auf der Oberfläche der Kugel ( $A$ ) durch die Reihe

$$S_0 + S_1 + \dots + S_\mu + \dots$$

auf der Kugel ( $B$ ) durch die Reihe

$$s_0 + s_1 + \dots + s_\mu + \dots$$

gegeben ist, setzen wir

$$S_\mu \left( \frac{a}{r} \right)^{\mu+1} = F_\mu(xy z)$$

$$s_\mu \left( \frac{b}{r} \right)^{\mu+1} = E_\mu(x' y' z')$$

und erhalten als Resultat:

$$V = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{p_z} \right)^{2\mu+1} F \left( x - a \frac{q_z}{p_z}, y, z, P_{2z-1} \right) \right. \\ - \left( \frac{1}{q_{z+1}} \right)^{2\mu+1} F \left( - \left( x' + \frac{p_z}{q_{z+1}} \right), y', z', P_{2z} \right) \\ + \left( \frac{a}{q'_z} \right)^{2\mu+1} E \left( x' + b \frac{p'_{z-1}}{q'_z}, y', z', -\Pi_{2z-1} \right) \\ \left. - \left( \frac{a}{p'_z} \right)^{2\mu+1} E \left( - \left( x - a \frac{q'_z}{p'_z} \right), y, z, -\Pi_{2z} \right) \right\}.$$

Es ist mir bisher nicht gelungen, die Identität dieses Resultates mit dem von Thomson nachzuweisen; doch war es wohl von vorneherein unwahrscheinlich, dass dies leicht durchzuführen sei, da ja die zwei Ausdrücke ganz verschiedene Grössen enthalten.

### 3.

Wir wollen nun Gleichung (14) auf einen speciellen Fall anwenden. Es soll nämlich das Potential auf den zwei Kugeln constant sein, sich also zwei leitende Kugeln gegenüberstehen, und wir wollen die Dichte der elektrischen Ladung an ihrer Oberfläche bestimmen. Hier ist also  $\mu = 0$  und der Zähler aller Brüche eine Constante.

Wir wollen in allen Ausdrücken von (14) die Coordinaten  $xyz$  einführen. Es ist nun, wenn wir die Gleichungen (12) und (13) berücksichtigen:

$$x' + b \frac{p_z}{q_{z+1}} = x - \left( d - \frac{b^2}{\Delta_{2z}} \right) = x - \Delta_{2z+1} = x - a \frac{p_{z+1}}{q_{z+1}}$$

$$x' + b \frac{p'_{z-1}}{q'_z} = x - \left( d - \frac{b^2}{\delta_{2z-1}} \right) = x - \delta_{2z} = x - a \frac{p'_z}{q'_z}.$$

Führen wir dies nun in (14) ein, so erhalten wir:

$$V = \sum_{z=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{p_z} \right) F \left( x - a \frac{q_z}{p_z}, y, z \right) - \left( \frac{1}{q_{z+1}} \right) F \left( x - a \frac{p_{z+1}}{q_{z+1}}, y, z \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{a}{q'_z} \right) E \left( x - a \frac{p'_z}{q'_z}, y, z \right) - \left( \frac{a}{p'_z} \right) E \left( x - a \frac{q'_z}{p'_z}, y, z \right) \right\}.$$

Das Potential soll also auf der Kugel (*A*) den constanten Werth  $4\pi P$ , auf der Kugel (*B*) den constanten Werth  $4\pi Q$  haben.

Dann wird also:

$$F(x, y, z) = \frac{4\pi Pa}{r}; \quad E(x', y', z') = \frac{4\pi Qb}{r'}$$

Ferner wird allgemein:

$$F(x-g, y, z) = \frac{4\pi Pa}{\sqrt{r^2 - 2gx + g^2}} = \frac{4\pi Pa}{\sqrt{r^2 - 2gr \cos \vartheta + g^2}}$$

Da nun die Dichte der elektrischen Belegung auf (*A*)

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a}$$

ist, so haben wir zu bilden

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial F(x-g, y, z)}{\partial r} \right|_{r=a} &= P \left| \frac{(r-rg \cos \vartheta)a}{(r^2 - 2gr \cos \vartheta + g^2)^{\frac{3}{2}}} \right|_{r=a} = \\ &= P \frac{a^2(1-g \cos \vartheta)}{(a^2 - 2ga \cos \vartheta + g^2)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}$$

analoges gilt bei  $E(x', y', z')$ .

Und so erhalten wir nach einigen einfachen Transformationen:

$$\sigma = \frac{1}{a} \sum_{z=0}^{\infty} \left\{ P \frac{p_z^2 - q_z^2}{(p_z^2 - 2p_z q_z \cos \vartheta + q_z^2)^{\frac{3}{2}}} - Qb \frac{p_z'^2 - q_z'^2}{(p_z'^2 - 2p_z' q_z' \cos \vartheta + q_z'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

und dieses Resultat stimmt mit dem von Poisson, der ja dieses Problem zuerst behandelt hat, vollständig überein.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Siehe Dirichlet-Grube I. c., S. 126; ich habe hier dieselben Buchstaben gewählt, die sich auch dort finden. Auf die Darstellung der  $\Delta$  und  $\delta$  durch die Grössen  $p_n$  und  $q_n$  wurde ich eben durch Anwendung der Formel (10) auf diesen Specialfall und Vergleich mit der citirten Gleichung geführt.

## 4.

Wir wollen uns jetzt dem allgemeinen Problem zuwenden, das Potential im ganzen Raume zu bestimmen, wenn es auf der Oberfläche beliebig vieler, beliebig im Raume vertheilter Kugeln gegeben ist.

Im zweiten Abschnitt hatten wir folgenden Satz abgeleitet: Entwickelt man die Werthe, welche die räumliche Kugelfunction  $-(\mu+1)$ ter Ordnung  $F(xyz)$  auf einer Kugel ( $B$ ) annimmt, welche mit dem Radius  $b$  um den Punkt  $x=d; y=z=0$  geschlagen ist, nach Kugelflächenfunctionen der Polarcoordinaten der letzteren Kugel, und bezeichnet diese Entwicklung

mit  $\sum_{\lambda=0}^{\infty} s'_{\lambda}(\vartheta', \varphi')$ , so ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} s'_{\lambda} \left(\frac{b}{r'}\right)^{\lambda+1} = \left(\frac{b}{d}\right)^{2\mu+1} F\left(-\left(x' + \frac{b^2}{d}\right), y', z', P\right)$$

Wenn wir uns jedoch, wie bereits in der Einleitung erwähnt, auf den Fall beschränken, dass das Potential auf den Kugeln constant sein soll, so wird der Zähler des letzten Ausdruckes eine Constante, so dass wir dafür bloss

$$\frac{b}{d} F\left(x' + \frac{b^2}{d}, y', z'\right)$$

setzen können.

Wir wollen nun den Werth derselben Summe für den Fall bestimmen, dass das Centrum der Kugel ( $B$ ) sich nicht auf der  $X$ -Axe, sondern in einem beliebigen Punkte, dessen Coordinaten etwa  $\xi, \eta, \zeta$  sind, befinde.

Wir führen ein neues Coordinatensystem ein, dessen Ursprung mit dem der  $xyz$  zusammenfällt, dessen  $X$ -Axe jedoch durch den Punkt  $\xi\eta\zeta$  geht; die neue  $Y$  und  $Z$ -Axe sollen senkrecht dazu, im Übrigen aber beliebig gerichtet sein. (Die beiden Coordinatensysteme sollen gleichstimmig sein, also durch Drehung zur Deckung gebracht werden können.) Die neuen Coordinaten sollen etwa mit  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  bezeichnet werden und mit den  $xyz$  durch das folgende Schema verbunden sein:



	$x$	$y$	$z$
$\bar{x}$	$a_{11}$	$a_{21}$	$a_{31}$
$\bar{y}$	$a_{12}$	$a_{22}$	$a_{32}$
$\bar{z}$	$a_{13}$	$a_{23}$	$a_{33}$

Nun transformiren wir  $F(xyz)$  in die neuen Coordinaten. Es sei also

$$F(xyz) = \Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = F(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z}; a_{21}\bar{x} + \dots);$$

offenbar ist auch  $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  ebenso wie  $F(xyz)$  eine räumliche Kugelfunction.

Jetzt liegt aber die Kugel ( $B$ ) auf der  $\bar{X}$ -Axe, und wir können unseren früheren Satz ohne weiteres anwenden und erhalten für unsere frühere Summe den Werth

$$\left(\frac{b}{d}\right) \Psi\left(\bar{x}' + \frac{b^2}{d}; \bar{y}', \bar{z}'\right),$$

wobei

$$\bar{x}' = \bar{x} - d; \bar{y}' = \bar{y}; \bar{z}' = \bar{z} \text{ und endlich } d^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

ist; wir können dafür auch setzen:

$$\left(\frac{b}{d}\right) F\left(a_{11}\left(\bar{x}' + \frac{b^2}{d}\right) + a_{12}\bar{y}' + a_{13}\bar{z}';\right. \\ \left.a_{21}\left(\bar{x}' + \frac{b^2}{d}\right) + a_{22}\bar{y}' + a_{23}\bar{z}'; a_{31}\left(\bar{x}' + \frac{b^2}{d}\right) + a_{32}\bar{y}' + a_{33}\bar{z}'\right).$$

Führen wir nun abermals ein neues Coordinatensystem ( $x', y', z'$ ) ein, das, dem ursprünglichen ( $xyz$ ) parallel, seinen Ursprung in  $(\xi\eta\zeta)$  hat, also mit den Coordinaten  $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}$  durch dasselbe Schema zusammenhängt, wie  $x, y, z$  mit  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ; so erhalten wir endlich für unsere Summe

$$\left(\frac{b}{d}\right) F\left(x' + a_{11} \frac{b^2}{d}, y' + a_{21} \frac{b^2}{d}, z' + a_{31} \frac{b^2}{d}\right)$$

oder in leicht verständlicher anderer Bezeichnungsweise:

$$\left(\frac{b}{d}\right) F\left(x' + \cos(xd) \frac{b^2}{d}, y' + \cos(yd) \frac{b^2}{d}, z' + \cos(zd) \frac{b^2}{d}\right).$$

und dabei ist also

$$\begin{aligned}x' &= x - \xi \\y' &= y - \eta \\z' &= z - \zeta.\end{aligned}$$

Wir haben nun noch den Fall zu erledigen, dass man — bei Beibehaltung derselben Bezeichnungsweise — mit  $F(x + \varepsilon_1, y + \varepsilon_2, z + \varepsilon_3)$  in derselben Weise zu verfahren hat. Man führt dann das Coordinatensystem  $x_1, y_1, z_1$  ein, derart, dass

$$\begin{aligned}x_1 &= x + \varepsilon_1 \\y_1 &= y + \varepsilon_2 \\z_1 &= z + \varepsilon_3\end{aligned}$$

wird. Setzt man dann noch

$$\begin{aligned}D^2 &= (\xi + \varepsilon_1)^2 + (\eta + \varepsilon_2)^2 + (\zeta + \varepsilon_3)^2 \\ \cos(Dx) &= \frac{\xi + \varepsilon_1}{D}; \text{ u. s. w.,}\end{aligned}$$

so wird unsere Function

$$= \left(\frac{b}{D}\right) F\left(x' + \cos(Dx) \frac{b^2}{D}, y' + \cos(Dy) \frac{b^2}{D}, z' + \cos(Dz) \frac{b^2}{D}\right),$$

wobei wieder

$$\begin{aligned}x' &= x_1 - (\xi + \varepsilon_1) = x - \xi \\y' &= y_1 - (\eta + \varepsilon_2) = y - \eta \\z' &= z_1 - (\zeta + \varepsilon_3) = z - \zeta\end{aligned}$$

ist.

Wir sind nun im Stande, die Lösung des Problems, das am Anfange dieses Paragraphen erwähnt wurde, hinzuschreiben.

Wir nehmen also an, wir hätten  $n$  Kugeln, deren Repräsentanten wir kurz mit  $K_i$  bezeichnen. Die Kugel  $K_i$  habe den Radius  $a_i$ , die Centrumscoordinaten  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ ; auf ihrer Oberfläche habe das Potential den constanten Werth  $C_i$ . Die Distanz zwischen den Centren der Kugeln  $K_i$  und  $K_\lambda$  bezeichnen wir mit  $d_{i\lambda}$ . Ferner verlegen wir in das Centrum jeder Kugel den Ursprung eines Coordinatensystems  $(x_i, y_i, z_i)$ , das dem ursprünglichen  $(xyz)$  parallel sein soll. Endlich setzen wir

$$C_i \frac{a_i}{r_i} = F_i(x_i, y_i, z_i),$$

wobei  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ .

Dann ist das Potential

$$V = \sum_{i=1}^n F_i(x_i, y_i, z_i) + Q_1.$$

$Q_1$  muss auf der Oberfläche jeder Kugel  $K_\lambda$  den entgegengesetzten Werth annehmen, wie

$${}^{(\lambda)} \sum_{i=1}^n F_i(x_i, y_i, z_i),$$

wobei das Symbol  ${}^{(\lambda)}\Sigma$  bedeutet, dass die Summe über alle Kugeln mit Ausnahme der  $\lambda$ ten zu nehmen ist.

Daher wird nach dem Früheren:

$$Q_1 = - \sum_{\lambda=1}^n {}^{(\lambda)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_\lambda}{d_{i\lambda}} \right) F_i \left( x_i + \cos(x d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}, \right. \\ \left. y_i + \cos(y d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}, z_i + \cos(z d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}} \right) + Q_2.$$

$Q_2$  muss an der  $\nu$ ten Kugel denselben Werth annehmen, wie

$${}^{(\nu)} \sum_{\lambda=1}^n {}^{(\lambda)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_\lambda}{d_{i\lambda}} \right) F_i \left( x_\lambda + \cos(x d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}, y_\lambda + \cos(y d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}, \right. \\ \left. z_\lambda + \cos(z d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}} \right),$$

daher wird also:

$$Q_2 = \sum_{\nu=1}^n {}^{(\nu)} \sum_{\lambda=1}^n {}^{(\lambda)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_\lambda a_\nu}{d_{i\lambda} D_{\nu\lambda}} \right) F_i \left( x_\nu + \cos(x D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}}, \right. \\ \left. y_\nu + \cos(y D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}}, z_\nu + \cos(z D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}} \right) + Q_3,$$

wobei

$$D_{\nu\lambda}^2 = \left( \xi_\nu - \xi_\lambda + \cos(xd_{i\nu}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\nu}} \right)^2 + \left( \eta_\nu - \eta_\lambda + \cos(yd_{i\nu}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\nu}} \right)^2 + \left( \xi_\nu - \xi_\lambda + \cos(zd_{i\nu}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\nu}} \right)^2$$

und

$$\cos(D_{\nu\lambda}x) = \frac{\xi_\nu - \xi_\lambda + \cos(xd_{i\nu}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\nu}}}{D_{\nu\lambda}}; \dots$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir etwa noch:

$$Q_3 = - \sum_{\pi=1}^n \textcircled{\pi} \sum_{\nu=1}^n \textcircled{\nu} \sum_{\lambda=1}^n \textcircled{\lambda} \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_\lambda a_\nu a_\pi}{d_{i\lambda} D_{\nu\lambda} D'_{\pi\nu}} \right) \cdot F_i \left( x_\pi + \cos(xD'_{\pi\nu}) \frac{a_\pi^2}{D'_{\pi\nu}}, y_\pi + \cos(yD'_{\pi\nu}) \frac{a_\pi^2}{D'_{\pi\nu}}, z_\pi + \cos(zD'_{\pi\nu}) \frac{a_\pi^2}{D'_{\pi\nu}} \right) + Q_3,$$

wobei

$$D'_{\pi\nu}{}^2 = \left( \xi_\pi - \xi_\nu + \cos(xD'_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D'_{\nu\lambda}} \right)^2 + \left( \eta_\pi - \eta_\nu + \cos(yD'_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D'_{\nu\lambda}} \right)^2 + \left( \xi_\pi - \xi_\nu + \cos(zD'_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D'_{\nu\lambda}} \right)^2$$

und

$$\cos(D'_{\pi\nu}x) = \frac{\xi_\pi - \xi_\nu + \cos(xD'_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D'_{\nu\lambda}}}{D'_{\pi\nu}}; \dots$$

bedeutet. (Der vor dem Summenzeichen eingeklammerte Buchstabe zeigt also, wie schon bemerkt, stets an, dass die durch denselben bezeichnete Kugel bei der Summation auszulassen ist.)

So fortfahrend, könnte man alle  $Q$  nacheinander bestimmen, und das Resultat würde durch Summation der Ausdrücke  $Q_1 - Q_2; Q_2 - Q_3; \dots$  erhalten werden.

Die Convergenz der so entstehenden Reihe lässt sich nicht so unmittelbar erkennen, wie es beim Problem der zwei Kugeln der Fall war. Doch ergibt sie sich aus den allgemeinen Betrachtungen, die sich über die Methode von Murphy anstellen lassen. (Siehe die Anmerkung auf Seite 4 dieser Arbeit.)

### Nachtrag.

Als die vorliegende Arbeit bereits im Drucke war, wurde mir eine Arbeit von Wirtinger<sup>1</sup> bekannt, in welcher die Green'sche Function eines von getrennten sphärischen Mannigfaltigkeiten begrenzten Gebietes angegeben ist, in welcher das Problem jedoch in anderer Form behandelt ist.

Ausserdem hatte Herr Prof. Wirtinger die Freundlichkeit, mich auf den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Lösungen des Problems aufmerksam zu machen; ich hoffe demnächst darauf zurückkommen zu können.

---

<sup>1</sup> W. Wirtinger, Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Classe, 1897, Heft 3.

Jaumann, G., Über die Interferenz und die elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen. (Mit 8 Textfiguren.) . . . . .	— K 50 h
Kann, L., Über die innere Reibung des Broms und deren Änderung mit der Temperatur. (Mit 4 Textfiguren.) . . . . .	— K 30 h
Klemencic, I., Über magnetische Nachwirkung. (Mit 1 Textfigur.) . . . . .	— K 40 h
— Über die magnetische Nachwirkung bei verschiedenen Feldstärken. . . . .	— K 20 h
Lang, V. v., Bestimmung der Capacität mit der Wage. . . . .	— K 30 h
Mach, L., Optische Untersuchung der Luftstrahlen. (Mit 4 Tafeln und 26 Textfiguren.) . . . . .	2 K 20 h
Mache, H., Bestimmung der specifischen Wärme einiger schwer schmelzbarer Metalle. . . . .	— K 10 h
Mazelle, E., Tägliche Periode des Niederschlages in Triest. . . . .	— K 70 h
Obermayer, A. v., Schiessversuche gegen plastischen Thon. (Mit 6 Textfiguren.) . . . . .	— K 50 h
Pallich, J. v., Über Verdunstung aus einem offenen kreisförmigen Becken. (Mit 3 Textfiguren.) . . . . .	— K 60 h
Pernter J. M., Die Farben des Regenbogens und der weisse Regenbogen. (Mit 3 Tafeln.) . . . . .	2 K — h
Pfaundler, L., Über einen Erdbeben-Registrator mit elektrisch-photographischer Aufzeichnung des Zeitmomentes des Stosses. (Mit 3 Textfiguren.) . . . . .	— K 50 h
Schweidler, E., R. v., Über Rotationen im homogenen elektrischen Felde. . . . .	— K 20 h
Tuma, J., Ein Phasemessinstrument für Wechselströme. (Mit 3 Textfiguren.) . . . . .	— K 30 h
— Eine Quecksilberluftpumpe. (Mit 4 Textfiguren.) . . . . .	— K 40 h
— Ein Phasemessapparat für Wechselströme. (Fortsetzung.) (Mit 3 Textfiguren.) . . . . .	— K 30 h
Tumlirz, O., Die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . .	— K 40 h
Volkmann P., Über die Frage nach dem Verhältniss von Denken und Sein und ihre Beantwortung durch die von der Naturwissenschaft nahegelegte Erkenntnistheorie. . . . .	— K 30 h
Wind, C. H., Über den dem Liouville'schen Satze entsprechenden Satz der Gastheorie. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . .	— K 40 h
Wulf, Th., Beobachtungen an geschlossenen Clark'schen Normalelementen. (Mit 6 Textfiguren.) . . . . .	— K 50 h

Aus den Denkschriften 67. Bd. (1898).

Eder, J. M., und Valenta, E., Die Spectren des Schwefels. (Mit 3 Tafeln und 2 Textfiguren.) . . . . .	5 K 40 h
— — Über das Funkenspectrum des Calciums und des Lithiums und seine Verbreiterungs- und Umkehrungserscheinungen. (Mit 1 Tafel) . . . . .	1 K 30 h
— — Spectralanalyse der Leuchtgasflamme. (Mit 1 Textfigur.) . . . . .	1 K — h
Liznar, J., Die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft in Oesterreich-Ungarn zur Epoche 1890-0 nach den in den Jahren 1889 bis 1894 ausgeführten Messungen. (Mit 8 Karten.) . . . . .	7 K 80 h

Aus den Sitzungsberichten für 1898.

Cantor, M., Über die Entladungsform der Electricität in verdünnter Luft. . . . .	— K 10 h
Eichberg, F., und Kallir, L., Beobachtungen über scheinbare Gleichströme im Wechselstromlichtbogen zwischen verschiedenartigen Elektroden. (Mit 8 Textfiguren.) . . . . .	— K 90 h
Eder, J. M. und Valenta, E., Das Linienspectrum des Siliciums. . . . .	
Exner, F. und Haschek, E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XI. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) . . . . .	1 K 10 h
— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XII. Mittheilung.) (Mit 4 Tafeln.) . . . . .	1 K 50 h
— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XIII. Mittheilung.) (Mit 4 Tafeln.) . . . . .	1 K 50 h
— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XIV. Mittheilung.) . . . . .	— K 80 h
Geitler, J. v., Über elektrische und magnetische Zerlegung der Kathodenstrahlung. (Mit 5 Textfiguren.) . . . . .	— K 40 h
— Über die Verschiedenheit der physikalischen Natur der Kathodenstrahlen und der Röntgenstrahlen. (Mit 1 Textfigur.) . . . . .	— K 20 h
— Notiz über complicirte Erreger Hertz'scher Schwingungen. (Mit 5 Textfiguren.) . . . . .	— K 30 h
Glan, P., Theoretische Untersuchungen über elastische Körper. Ebene Wellen mit Querschwingungen. . . . .	— K 20 h

- Grau, A., Über Wirbelströme und Hysteresis. (Mit 2 Tafeln und 1 Textfigur.) . . . — K 40 h
- Hann, J., Weitere Beiträge zu den Grundlagen für eine Theorie der täglichen Oscillation des Barometers. . . . . 1 K 70 h
- Über die Temperatur von Graz Stadt und Graz Land. . . . . — K 40 h
- Über die Temperatur des Obirgipfels (2140 m) und des Sonnbliggipfels (3106 m). . . . . — K 60 h
- Harting, A., Über algebraische und numerische Berechnung der Mikroskopobjecte geringer Apertur. (Mit 10 Textfiguren.) . . . . . — K 80 h
- Haschek, E. und Mache, H., Über den Druck im Funken. (Mit 1 Textfigur.) . . . — K 30 h
- Hasenöhrli, F., Zur Theorie der Transversalschwingungen eines von Wirbeln durchzogenen Körpers. (I. Mittheilung.) (Mit 2 Textfiguren.) . . . . . — K 40 h
- Über den Rückstand und Leitfähigkeit von Paraffin und Schwefel. . . . . — K 20 h
- Jäger, G. und Meyer, St., Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten und deren Änderung mit der Temperatur. (III. Mittheilung.) (Mit 9 Textfiguren.) . . . . . — K 30 h
- Jaumann, G., Interferenz der Kathodenstrahlen, (I. Mittheilung.) (Mit 26 Textfiguren.) . . . . . 2 K 20 h
- Kann, L., Die Rotationspolarisation der Äpfelsäure. (Mit 5 Textfiguren.) . . . . . — K 60 h
- Klementič, I., Weitere Untersuchungen über den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen. . . . . — K 60 h
- Lang, V. v., Über transversale Töne von Kautschukfäden. (Mit 1 Textfigur.) . . . — K 30 h
- Lecher, E., Einige Bemerkungen über Aluminiumanoden in Alaunlösung. . . . . — K 30 h
- Liznar, J., Über die Änderung der erdmagnetischen Kraft mit der Höhe. . . . . — K 50 h
- Mach, L., Über einige Verbesserungen an Interferenzapparaten. (Mit 3 Textfiguren.) . . . . . — K 30 h
- Mache, H., Über Volumenänderungen von Gasen unter dem Einflusse starker elektromotorischer Kräfte. (Mit 3 Textfiguren.) . . . . . — K 60 h
- Mazelle, Ed., Verdunstung des Meerwassers und des Süßwassers. . . . . — K 40 h
- Mie, G., Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung. (Mit 7 Textfiguren.) . . . . . 1 K 30 h
- Müller-Erbach, W., Über eine genaue Messung des Dampfdruckes bei der Dissociation wasserhaltige Salze. . . . . — K 20 h
- Schweidler, E. v., Messungen an Flamme- und Tropfelektroden. (Mit 1 Textfigur.) . . . . . — K 20 h
- Über die lichtelektrischen Erscheinungen. (I. Mittheilung.) (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.) . . . . . — K 80 h
- Singer, O., Über galvanische Polarisation fester und geschmolzener Salze. (Mit 6 Textfiguren.) . . . . . — K 60 h
- Smoluchowski, M. v. Über den Temperatursprung bei Wärmeleitungen in Gasen. (Mit 5 Textfiguren.) . . . . . — K 60 h
- Wippermann, E., Über Wechselstromcurven bei Anwendung von Aluminiumelektroden. (Mit 12 Textfiguren.) . . . . . — K 40 h