Hasenöhrl F.

Über das Gleichgewicht eines elastischen Kreiscylinders

von

Dr. Fritz Hasenöhrl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1901.)

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe; Bd. CX. Abth. II. a. October 1901.

WIEN, 1901.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKERE

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Druckschriften

der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe).

Periodische Publicationen.

[Physik.]

Aus den Denkschriften 67. Bd. (1898).

Eder, J. M., und Valenta, E., Die Spectren des Schwefels. (Mit 3 Tafeln und 2 Textfiguren.) 5 K 40 h

— — Über das Funkenspectrum des Calciums und des Lithiums und seine Verbreiterungs- und Umkehrungserscheinungen. (Mit 1 Tafel.) . . . . 1 K 30 h

— — Spectralanalyse der Leuchtgasflamme. (Mit 1 Textfigur.) . . . . 1 K — h

Aus den Sitzungsberichten 107. Bd. (1898).

Eder, J. M. und Valenta, E., Das Linienspectrum des Siliciums.

Exner, F. und Haschek, E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XI. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) . . . . 1 K 10 h

— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XII. Mittheilung.) (Mit 4 Tafeln.) . . . . 1 K 50 h

— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XIII. Mittheilung.) (Mit 4 Tafeln.) . . . . 1 K 50 h

— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XIV. Mittheilung.) — K 80 h

Geitler, J. v., Über elektrische und magnetische Zerlegung der Kathodenstrahlung. (Mit 5 Textfiguren.) . . . . — K 40 h

— Über die Verschiedenheit der physikalischen Natur der Kathodenstrahlen und der Röntgenstrahlen. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — K 20 h

Hann, J., Weitere Beiträge zu den Grundlagen für eine Theorie der täglichen Oscillation des Barometers. . . . . 1 K 70 h

— Über die Temperatur von Graz Stadt und Graz Land. . . . . — K 40 h

— Über die Temperatur des Obirgipfels (2140 *m*) und des Sonnblickgipfels (3106 *m*). — K 60 h

Hasenöhrl, F., Zur Theorie der Transversalschwingungen eines von Wirbeln durchzogenen Körpers. (I. Mittheilung.) (Mit 2 Textfiguren.) . . . . — K 40 h

Jaumann, G., Interferenz der Kathodenstrahlen, (I. Mittheilung.) (Mit 26 Textfiguren.) 2 K 20 h

Lang, V. v., Über transversale Töne von Kautschukfäden. (Mit 1 Textfigur.) . . — K 30 h

Mach, L., Über einige Verbesserungen an Interferenzapparaten. (Mit 3 Textfiguren.) — K 30 h

Aus den Sitzungsberichten 108. Bd. (1899).

Benndorf, H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. II. Messungen des Potentialgefälles in Sibirien. (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.) . . . . — K 70 h

Eder, J. M., System der Sensitometrie photographischer Platten. (Mit 16 Tafeln und 5 Textfiguren.) . . . . 4 K — h

Eichberg, F., und Kallir, L., Über Lichterscheinungen in elektrolytischen Zellen mit Aluminium- und Magnesiumelektroden. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . — K 20 h

Exner F., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. I. Messungen des Potentialgefälles in Oberägypten. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . 1 K — h

— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XV. Mittheilung.) . . . . — K 70 h

— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XVI. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) . . . . 1 K 50 h

— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XVII. Mittheilung.) . . . . — K 60 h

— F. M., Über die Absorptionsspectren der seltenen Erden im sichtbaren und ultravioletten Theile des Spectrums. — K 30 h

Harting, H., Über die Lage der astigmatischen Bildflächen bei optischen Systemen. — K 10 h

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. CX. Abth. II. a. October 1901.

Über das Gleichgewicht eines elastischen Kreiscylinders

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1901.)

Die Differentialgleichungen des elastischen Gleichgewichts sind für den Fall, dass die Grenzbedingungen auf der Oberfläche eines Kreiscylinders vorgeschrieben sind, in vollkommener Allgemeinheit von Herrn Jaerisch[1] integriert worden. Herr Jaerisch zerlegt die elastische Verschiebung in Componenten nach den Richtungen der Cylindercoordinaten und gewinnt aus den entsprechend transformierten Differentialgleichungen eine Lösung des Problemes, welche in gewissen Punkten eine Analogie mit den von Lamé[2] angegebenen Integralen für die elastische Kugelschale hat.[3]

In vorliegender Arbeit habe ich versucht, eine Lösung des Problems anzugeben, welche sich in gewissem Sinne zu der von Herrn Jaerisch ebenso verhält, wie bei der Kugel die Lösung von Lord Kelvin[4] zu der Lamé'schen.

Wir werden uns hier auf die Behandlung des unendlichen Cylinders beschränken, d. h. die Grenzbedingungen nur auf dem Mantel erfüllen. Bei einem endlichen Cylinder hätte man unter Benützung der von Boussinesq[5] und Ceruti[6] für den

---

1 Jaerisch, Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg, I, S. 167, 1886.

2 Lamé, Liouville J. XIX, 1854; Leçons sur les coordonnées curvilignes.

3 Über die Unterschiede beider Methoden siehe Jaerisch, ebenda S. 155.

4 Treatise on natural philosophy von Lord Kelvin and Tait, II, S. 286.

5 Boussinesq, Applications des Potentiels directes, inverses, logarithmiques. Paris 1885.

6 Ceruti, Reale Accademia dei Lincei, 1882.

von einer unendlichen Ebene begrenzten Körper angegebenen Integrale analog zu verfahren, wie man es bei dem entsprechenden Problem der Potentialtheorie thut.

Die Differentialgleichungen des elastischen Gleichgewichtes lauten, wenn man die Volumskräfte eliminiert hat:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda+\mu) \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 \\ \mu \nabla^2 v + (\lambda+\mu) \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= 0 \\ \mu \nabla^2 w + (\lambda+\mu) \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Hierin sind u, v, w die Componenten der Verschiebung parallel den Axen des rechtwinkeligen Coordinatensystems, λ und μ die Lamé'schen Elasticitätsconstanten und

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2}$$

die räumliche Dilatation.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Theile. Im ersten integrieren wir die Gleichungen (1) unter der Voraussetzung, dass u, v, w an der Oberfläche des Cylinders gegeben sind. Im zweiten Theile wollen wir annehmen, dass die Spannungscomponenten:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{x}{a}\left(\lambda\sigma + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{y}{a}\cdot\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ T_y &= \frac{y}{a}\left(\lambda\sigma + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{x}{a}\cdot\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ T_z &= \frac{x}{a}\cdot\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{y}{a}\cdot\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

an der Oberfläche, also für $r = \sqrt{x^2+y^2} = a$ gegeben sind, wo a der Radius des Cylinders ist. (Die Cylinderachse soll mit der Z-Achse identisch sein.)

I.

Es sollen die Verschiebungen an der Oberfläche des Cylinders vorgeschriebene Werte u_0, v_0, w_0 annehmen.

Wir bezeichnen mit F, G, H drei im Inneren des Cylinders harmonische Functionen, die also in diesem Raume mit ihren Ableitungen endlich und stetig sind und der Laplace'schen Differentialgleichung genügen.

Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} u &= F + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}(U - \sigma x) \\ v &= G + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}(V - \sigma y) \\ w &= H + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}(W - \sigma z), \end{aligned} \tag{4}$$

wobei σ wieder die räumliche Dilatation bedeutet und U, V, W drei innerhalb des Cylinders harmonische Functionen sind, die an der Oberfläche respective dieselben Werte annehmen, wie σx, σy und σz.

Dann sind die Gleichungen (1) offenbar identisch erfüllt. Damit auch Gleichung (2) erfüllt sei, muss

$$\begin{aligned} \sigma\left(1 + \frac{3(\lambda+\mu)}{2\mu}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \\ + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - l\frac{\partial \sigma}{\partial l}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

sein, wobei wir zur Kürze setzten:

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} = l\frac{\partial}{\partial l}\,.$$

Können wir σ aus der Gleichung (5) bestimmen, so ist unser Problem gelöst, d. h. auf das betreffende lösbare Problem der Potentialtheorie zurückgeführt.[1] Denn bestimmen wir nach den Regeln der Potentialtheorie F, G, H so, dass sie an der Oberfläche dieselben Werte wie u_0, v_0, w_0 annehmen, so sind die Grenzbedingungen erfüllt, da ja dort $(U - \sigma x)$, $(V - \sigma y)$,

[1] Natürlich gilt dies nicht nur für den Cylinder, sondern auch für jeden beliebigen Körper. Für die Kugel z. B. ist die Bestimmung von σ aus Gleichung (5) äußerst einfach, und es werden dann die Gleichungen (4) mit dem von Lord Kelvin angegebenen Resultate identisch.

$(W - \sigma z)$ verschwinden. Wir können also F, G, H als bekannt voraussetzen; desgleichen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \Theta,$$

wie wir der Kürze wegen setzen wollen. Θ ist natürlich, ebenso wie alle anderen in (5) auftretenden Functionen, harmonisch. Wir können daher Θ durch eine Summe (eventuell ein Integral) über Glieder von der Form

$$A_{\nu n} \frac{\sin}{\cos} \nu z \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r) \tag{6}$$ [1]

darstellen, worin r, φ, z die Cylindercoordinaten eines Punktes sind; J_n die Cylinderfunction n^{ter} Ordnung (erster Art) ist, wobei wir n als ganze, positive Zahl voraussetzen können; endlich ν und $A_{\nu n}$ beliebige Constanten sind und $\sqrt{-1} = i$ gesetzt ist.

Ist $f(x, y, z)$ eine beliebige Function, so wollen wir unter $\overline{f(x, y, z)}$ die harmonische Function verstehen, die an der Oberfläche des Cylinders dieselben Werte annimmt, wie $f(xyz)$. (Es wäre also in dieser Bezeichnungsweise $U = \overline{\sigma x}$; $V = \overline{\sigma y}$; $W = \overline{\sigma z}$.)

Da auch σ eine harmonische Function ist, so können wir es ebenfalls durch eine Anzahl Glieder von der Form (6) darstellen (die man nach Analogie mit den Kugelfunctionen räumliche Cylinderfunctionen nennen könnte). Den Repräsentanten derselben bezeichnen wir mit C, setzen also

$$C = \frac{\sin}{\cos} \nu z \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r).$$

Ferner führen wir die Function

$$C_1 = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{-\cos}{\sin} \nu z \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r)$$

ein. Es ist

$$C = \frac{\partial C_1}{\partial z}.$$

---

[1] Siehe etwa: Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, II, S. 185.

Dann ist, wenn wir für den Augenblick $\sigma = C$ setzen:

$$W = \overline{z.C} = z\overline{\frac{\partial C_1}{\partial z}} = l\frac{\partial C_1}{\partial l} - \overline{\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) C_1}$$

$$= l\frac{\partial C_1}{\partial l} - \overline{r\frac{\partial C_1}{\partial r}}$$

($l\frac{\partial C_1}{\partial l}$ ist ja ohnehin harmonisch, wenn C_1 diese Eigenschaft besitzt). Ferner ist:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial C_1}{\partial z} + l\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial C_1}{\partial z} - \overline{r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial C_1}{\partial z}}$$

$$= C + l\frac{\partial C}{\partial l} - \overline{r\frac{\partial C}{\partial r}}.$$

Somit wird der von C zu

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - l\frac{\partial \sigma}{\partial l} \tag{7}$$

in (5) gelieferte Beitrag gleich

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{xC} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{yC} + C - \overline{r\frac{\partial C}{\partial r}}. \tag{8}$$

Nun ergibt sich leicht, wenn a wieder den Cylinderradius bedeutet:

$$\overline{xC} = \frac{a}{2} J_n(\nu i a) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, \nu z \left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,(n-1)\varphi \frac{J_{n-1}(\nu i r)}{J_{n-1}(\nu i a)} + \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,(n+1)\varphi\frac{J_{n+1}(\nu i r)}{J_{n+1}(\nu i a)}\right\}$$

$$\overline{yC} = \frac{a}{2} J_n(\nu i a) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, \nu z \left\{\begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix}\,(n-1)\varphi \frac{J_{n-1}(\nu i r)}{J_{n-1}(\nu i a)} - \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix}\,(n+1)\varphi\frac{J_{n+1}(\nu i r)}{J_{n+1}(\nu i a)}\right\}$$

und daraus

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{xC} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{yC} = \frac{i\nu a}{2} J_n(\nu i a)\left(\frac{1}{J_{n+1}(\nu i a)} - \frac{1}{J_{n-1}(\nu i a)}\right)\cdot C,$$

wobei die bekannten Relationen

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)$$ [1]

benützt sind.

Desgleichen ergibt sich:

$$r\overline{\frac{\partial C}{\partial r}} = \frac{\nu i a}{2} \cdot \frac{J_{n-1}(\nu i a) - J_{n+1}(\nu i a)}{J_n(\nu i a)} \cdot C,$$

wobei die Relation

$$2\frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

benützt ist.

Also hat der Ausdruck (8) den Wert:

$$C.\left\{1 + \frac{i\nu a}{2} J_n(i\nu a)\left(\frac{1}{J_{n+1}(i\nu a)} - \frac{1}{J_{n-1}(i\nu a)}\right) - \frac{i\nu a}{2} \cdot \frac{J_{n-1}(i\nu a) - J_{n+1}(i\nu a)}{J_n(i\nu a)}\right\} = C.B_{\nu n},$$

wie wir zur Kürze setzen wollen.

Jedem Summanden von der Form (6) im Ausdrucke für Θ entspricht also für σ ebenfalls ein Summand

$$C.D_{\nu n},$$

wobei sich die Constante $D^{\nu n}$ durch Einsetzen in Gleichung (5) ergibt:

$$D_{\nu n}\left(1 + \frac{3(\lambda+\mu)}{2\mu}\right) = A_{\nu n} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \cdot D_{\nu n}\ B_{\nu n},$$

also

$$D_{\nu n} = \frac{A_{\nu n}}{1 + \frac{3(\lambda+\mu)}{2\mu} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} B_{\nu n}}.$$

Wir können also σ bilden; setzen wir seinen Wert in (4) ein, so erhalten wir die vollständige Lösung des Problemes.

---

[1] Heine, l. c. I, S. 243.

II.

Wenn an der Oberfläche des Cylinders statt der Verschiebungen die Werte der von außen wirkenden Spannungen gegeben sind, so könnten wir wieder von den Integralen (4) ausgehen, die Werte für die Spannungen bilden und dann durch Gleichsetzen derselben mit den vorgeschriebenen Spannungswerten die Functionen F, G, H zu bestimmen trachten. Für diesen Zweck sind jedoch die folgenden Integrale der Differentialgleichungen (1) geeigneter:

$$\begin{aligned} u &= F - \frac{\varkappa}{\nu^2} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ v &= G - \frac{\varkappa}{\nu^2} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \\ w &= H - \frac{\varkappa}{\nu^2} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \end{aligned} \tag{10}$$

worin wieder F, G, H drei harmonische Functionen sind und

$$\Theta = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

ist. Zur Kürze ist

$$\varkappa = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}$$

gesetzt. ν^2 ist wieder eine beliebige Constante. Es muss aber vorausgesetzt werden, dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\nu^2 . F$$

und ferner dieselbe Relation für G und H, daher auch für Θ gilt. Es hat dies die Bedeutung, dass alle hier auftretenden Functionen z blos in einem Factor von der Form

$$\begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} \nu z$$

enthalten. Die Verification von (10) ist leicht durchgeführt. Es ist ja nach der früheren Bezeichnungzweise:

$$r\frac{\partial}{\partial r}=l\frac{\partial}{\partial l}-z\frac{\partial}{\partial z},$$

also

$$\nabla^2\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)=-\nabla^2\left(z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)=-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$
$$=2\nu^2\frac{\partial\Theta}{\partial x},$$

also wird

$$\nabla^2 u=-2\varkappa\frac{\partial\Theta}{\partial x}.$$

Setzen wir also

$$\sigma=(1-\varkappa)\Theta=\frac{2\mu}{\lambda+3\mu}\Theta,$$

so sind die Gleichungen (1) und, wie man sich leicht überzeugt, auch die Gleichung (2) identisch erfüllt.

Setzen wir diese Werte (10) von u, v, w in die Gleichungen (3) ein, so erhalten wir nach einigen Transformationen für die Spannungscomponenten:

$$\frac{a}{\mu}T_x=\frac{2\lambda}{\lambda+3\mu}\cdot x\Theta+r\frac{\partial F}{\partial r}+x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial G}{\partial x}$$
$$-\frac{2\varkappa}{\nu^2}\left(a^2\nu^2\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)$$

$$\frac{a}{\mu}T_y=\frac{2\lambda}{\lambda+3\mu}\cdot y\Theta+r\frac{\partial G}{\partial r}+x\frac{\partial F}{\partial y}+y\frac{\partial G}{\partial y}$$
$$-\frac{2\varkappa}{\nu^2}\left(a^2\nu^2\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)$$

$$\frac{a}{\mu}T_z=r\frac{\partial H}{\partial r}+x\frac{\partial F}{\partial z}+y\frac{\partial G}{\partial z}$$
$$-\frac{\varkappa}{\nu^2}\left(2a^2\nu^2\frac{\partial\Theta}{\partial z}-2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}-r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right).$$

Es ist jedoch bequemer, anstatt T_x und T_y die Größen:

$$R=\frac{x}{a}T_x+\frac{y}{a}T_y$$

$$\Phi=\frac{x}{a}T_y-\frac{y}{a}T_x$$

einzuführen; wir erhalten dann:

$$\frac{a^2}{\mu}\cdot R = a^2(3\varkappa+1)\Theta - 2a^2\frac{\partial H}{\partial z} + 2\left(y\frac{\partial F}{\partial \varphi} - x\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)$$
$$-2\varkappa\left(a^2+\frac{1}{\nu^2}\right) r\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{2\varkappa}{\nu^2} r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial^2\Theta}{\partial \varphi^2} - \frac{4\varkappa}{\nu^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{a^2}{\mu}\cdot \Phi = a^2\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) + 2\left(x\frac{\partial F}{\partial \varphi} + y\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right) - 2\varkappa\left(a^2+\frac{1}{\nu^2}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$$
$$+\frac{2\varkappa}{\nu^2}\frac{\partial^3\Theta}{\partial \varphi^3} + \frac{4\varkappa}{\nu^2} r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}.$$

Natürlich können wir uns die Grenzbedingungen auch so gegeben denken, dass R, Φ, T_z an der Oberfläche vorgeschriebene Werte haben.

Für r ist nach vollzogener Differentiation der Wert a einzusetzen.

Wir setzen nun:

$$F = \mathfrak{A}_n \cdot \frac{\sin}{\cos}\nu z \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r)$$

$$G = \mathfrak{B}_n \cdot \frac{\sin}{\cos}\nu z \frac{\cos}{-\sin} n\varphi J_n(\nu i r)$$

$$H = -\frac{1}{\nu}\mathfrak{C}_{n-1}\frac{\cos}{-\sin}\nu z \frac{\sin}{\cos}(n-1)\varphi J_{n-1}(\nu i r)$$
$$-\frac{1}{\nu}\mathfrak{C}_{n+1}\frac{\cos}{-\sin}\nu z \frac{\sin}{\cos}(n+1)\varphi J_{n+1}(\nu i r),$$

worin $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_{n-1}$, $\mathfrak{C}_{n+1}$ Constante sind.

Setzen wir diese Werte in die vorigen Gleichungen ein, so erhalten wir nach einer etwas mühsamen Rechnung:

$$\frac{a^2}{\mu} R = \mathfrak{D}_{n-1}\frac{\sin}{\cos}\nu z\frac{\sin}{\cos}(n-1)\varphi + \mathfrak{D}_{n+1}\frac{\sin}{\cos}\nu z\frac{\sin}{\cos}(n+1)\varphi$$

$$\frac{a^2}{\mu}\Phi = \mathfrak{E}_{n-1}\frac{\sin}{\cos}\nu z\frac{\cos}{-\sin}(n-1)\varphi + \mathfrak{E}_{n+1}\frac{\sin}{\cos}\nu z\frac{\cos}{-\sin}(n+1)\varphi$$

$$\frac{a}{\mu} T_z = \mathfrak{F}_{n-1}\frac{\cos}{-\sin}\nu z\frac{\sin}{\cos}(n-1)\varphi + \mathfrak{F}_{n+1}\frac{\cos}{-\sin}\nu z\frac{\sin}{\cos}(n+1)\varphi.$$

Hierin haben die Constanten $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{n-1} &= (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{B}_n)\alpha_n + \mathfrak{C}_{n-1}\,.\,\delta_{n-1}\\
\mathfrak{D}_{n+1} &= (\mathfrak{A}_n + \mathfrak{B}_n)\alpha'_n + \mathfrak{C}_{n+1}\,.\,\delta_{n+1}\\
\mathfrak{E}_{n-1} &= (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{B}_n)\beta_n + \mathfrak{C}_{n-1}\,.\,\varepsilon_{n-1}\\
\mathfrak{E}_{n+1} &= (\mathfrak{A}_n + \mathfrak{B}_n)\beta'_n + \mathfrak{C}_{n+1}\,.\,\varepsilon_{n+1}\\
\mathfrak{F}_{n-1} &= (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{B}_n)\gamma_n + \mathfrak{C}_{n-1}\,.\,\zeta_{n-1}\\
\mathfrak{F}_{n+1} &= (\mathfrak{A}_n + \mathfrak{B}_n)\gamma'_n + \mathfrak{C}_{n+1}\,.\,\zeta_{n+1},
\end{aligned}$$

wobei die Constanten $\alpha, \alpha' \ldots \zeta'$ zur Kürze für die folgenden Ausdrücke eingesetzt sind:

$$\alpha_n = \frac{\nu i}{2}\left[a^2(3\varkappa+1) + \frac{4\varkappa(n-1)^2}{\nu^2}\right] J_{n-1} - n a J_n$$
$$-\varkappa\nu i\left[a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{(n-1)^2}{\nu^2}\right].\, a\,\frac{\partial J_{n-1}}{\partial a}$$

$$\alpha'_n = -\frac{\nu i}{2}\left[a^2(3\varkappa+1) + \frac{4\varkappa(n+1)^2}{\nu^2}\right] J_{n+1} + n a J_n$$
$$+\varkappa\nu i\left[a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{(n+1)^2}{\nu^2}\right].\, a\,\frac{\partial J_{n+1}}{\partial a}$$

$$\beta_n = -\left[\frac{a^2\nu i}{2} + (n-1)\varkappa\nu i\left(a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{(n-1)^2}{\nu^2}\right)\right] J_{n-1} + n a J_n$$
$$+\frac{2\varkappa i}{\nu}(n-1)\, a\,\frac{\partial J_{n-1}}{\partial a}$$

$$\beta'_n = -\left[\frac{a^2\nu i}{2} - (n+1)\varkappa\nu i\left(a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{(n+1)^2}{\nu^2}\right)\right] J_{n+1} + n a J_n$$
$$-\frac{2\varkappa i}{\nu}(n+1)\, a\,\frac{\partial J_{n+1}}{\partial a}$$

$$\gamma_n = -\varkappa\nu^2 i\left[a^2 + \frac{(n-1)^2}{\nu^2}\right] J_{n-1} + \frac{\nu a}{2} J_n + \frac{\varkappa i}{2}\, a\,\frac{\partial J_{n-1}}{\partial a}$$

$$\gamma'_n = \varkappa\nu^2 i\left[a^2 + \frac{(n+1)^2}{\nu^2}\right] J_{n+1} + \frac{\nu a}{2} J_n - \frac{\varkappa i}{2}\, a\,\frac{\partial J_{n+1}}{\partial a}$$

$$\delta_n = \left[a^2(3\varkappa-1) + \frac{4\varkappa n^2}{\nu^2}\right] J_n - 2\varkappa\left[a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{n^2}{\nu^2}\right] a\,\frac{\partial J_n}{\partial a}$$

$$\varepsilon_n = -2\varkappa\left[a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{n^2}{\nu^2}\right] n J_n + \frac{4\varkappa n}{\nu^2} a \frac{\partial J_n}{\partial a}$$

$$\zeta_n = -2\varkappa\nu\left[a^2 + \frac{n^2}{\nu^2}\right] J_n - \frac{1-\varkappa}{\nu} a \frac{\partial J_n}{\partial a}.$$

Das Argument aller aller hier auftretenden Cylinderfunctionen ist $\nu i a$, was zur Kürze in den vorigen Ausdrücken weggelassen wurde.

Es seien nun die Componenten der Spannung an der Oberfläche durch folgende Reihen gegeben:[1]

$$\frac{a^2}{\mu} R = \frac{\sin}{\cos} \nu z \sum_n \mathfrak{L}_n \frac{\sin}{\cos} n\varphi$$

$$\frac{a^2}{\mu} \Phi = \frac{\sin}{\cos} \nu z \sum_n \mathfrak{M}_n \frac{\cos}{-\sin} n\varphi$$

$$\frac{a}{\mu} Z_z = \frac{\cos}{-\sin} \nu z \sum_n \mathfrak{N}_n \frac{\sin}{\cos} n\varphi.$$

Setzen wir dann:

$$F = \frac{\sin}{\cos} \nu z \sum_n \mathfrak{A}_n \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r)$$

$$G = \frac{\sin}{\cos} \nu z \sum_n \mathfrak{B}_n \frac{\cos}{-\sin} n\varphi J_n(\nu i r)$$

$$H = \frac{\cos}{-\sin} \nu z \sum_n \mathfrak{C}_n \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r),$$

so bestimmen sich die Constanten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ aus den gegebenen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ nach dem Vorhergehenden durch die Gleichungen:

[1] Im allgemeinen ist über diese Ausdrücke noch bezüglich ν zu summieren. Da aber dann offenbar in genau derselben Weise über die obigen Ausdrücke für F, G, H bezüglich ν zu summieren ist, können wir dies zur Kürze weglassen.

$$\mathfrak{L}_n = (\mathfrak{A}_{n+1} - \mathfrak{B}_{n+1})\alpha_{n+1} + (\mathfrak{A}_{n-1} + \mathfrak{B}_{n-1})\alpha'_{n-1} + \mathfrak{C}_n \delta_n$$
$$\mathfrak{M}_n = (\mathfrak{A}_{n+1} - \mathfrak{B}_{n+1})\beta_{n+1} + (\mathfrak{A}_{n-1} + \mathfrak{B}_{n-1})\beta'_{n-1} + \mathfrak{C}_n \varepsilon_n$$
$$\mathfrak{N}_n = (\mathfrak{A}_{n+1} - \mathfrak{B}_{n+1})\gamma_{n+1} + (\mathfrak{A}_{n-1} + \mathfrak{B}_{n-1})\gamma'_{n-1} + \mathfrak{C}_n \zeta_n$$
$$(n = 0, 1, 2 \ldots),$$

aus denen successive die Größen $\mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_n \mathfrak{C}_n$ $(n = 0, 1, 2)$ berechnet werden können. Dadurch sind dann die Functionen F, G, H bestimmt, und die Gleichungen (10) geben uns die vollständige Lösung des Problems.

Die Determinante der Coefficienten der letzten Gleichungen kann nicht verschwinden. Man kann sich davon durch eine etwas langwierige Rechnung überzeugen, die ich hier nicht mittheilen zu müssen glaube. Der Fall $\nu = o$ ist ausgenommen; derselbe bedeutet aber offenbar ein einfacheres Problem, das sich analog der Methode, welche Lord Keloin bei der Kugel anwendet, behandeln lässt.

Zu beachten ist, dass hier die Argumente aller Cylinderfunctionen imaginär sind. Wollte man den Fall behandeln, dass die Spannungen an der Oberfläche verschwinden, dass also $L_n = M_n = N_n = o$ ist, so hätte man für F, G, H-Functionen von der Form

$$e^{\nu z} \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu r)$$

einzusetzen. Denn bei reellem Argumente der Cylinderfunctionen lässt sich die erwähnte Determinante zum Verschwinden bringen.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Hasenöhrl, F., Über ein Problem der Potentialtheorie. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — K 55 h

Hock, J., Über die Abhängigkeit der Capillaritäts-Constanten homologer Reihen von der Temperatur und der chemischen Zusammensetzung und über die Oberflächenspannungen unterkühlter Flüssigkeiten. (Mit 1 Tafel.) . . . . — K 60 h

Jäger, G., Zur Größe der Molekel. . . . . — K 10 h

— und **Meyer St.,** Die magnetische Susceptibilität des Wassers. (Mit 1 Textfigur.) — K 20 h

— Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase — K 20 h

— Über das Verhalten der Flüssigkeiten im magnetischen Felde. (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h

Jahoda, R., Über eine Methode zur Bestimmung der Gasdichte mittelst angeblasener Pfeifen. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — K 20 h

Jaumann, G., Rotierendes Magnetfähnchen. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — K 20 h

Kerner, F. v., Die theoretische Temperaturvertheilung auf Prof. Frech's Weltkarten der altpaläozoischen Zeit. . . . . — K 10 h

Klemenčič, I., Untersuchungen über permanente Magnete. I. Über die Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten vom Dimensionsverhältnis. (Mit 2 Textfiguren.) — K 40 h

— Über die Wärmeentwicklung durch Foucault'sche Ströme bei sehr schnellen Schwingungen. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — K 20 h

— Untersuchungen über permanente Magnete. II. Über die Abhängigkeit des Inductionscoëfficienten vom Dimensionsverhältnis. . . . . — K 30 h

Lampa, A., Über einen Beugungsversuch mit elektrischen Wellen. (Mit 3 Textfiguren.) — K 50 h

Lang, V. v., Magnetische Orientierung einer Anzahl einaxiger Krystalle . . . . — K 30 h

— Über longitudinale Töne von Kautschukfäden. . . . . — K 10 h

Lecher, E., Einige Versuche mit dem Wehnelt-Interruptor. (Mit 5 Textfiguren.) . — K 30 h

— Über einen theoretischen und experimentellen Trugschluss in der Elektricitätslehre. (Mit 11 Textfiguren.) . . . . — K 60 h

Lenard, P., Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht. (Mit 2 Textfiguren). . . . . — K 40 h

Ludwig, R., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. IV. Über eine während der totalen Sonnenfinsternis vom 22. Jänner 1898 ausgeführte Messung der atmosphärischen Elektricität. (Mit 1 Tafel.) . . . . — K 40 h

Mach, L. und **Schumann, V.,** Über ein neues Spiegelmetall und dessen optische Untersuchung. (Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.) . . . . — K 90 h

Mache, H., Über die Temperaturverhältnisse in der Flamme. (Mit 1 Textfigur.) . — K 20 h

Mazelle, E., Zur täglichen Periode und Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit. — K 70 h

Meyer, St., Über die magnetischen Eigenschaften der Elemente. . . . . — K 30 h

— Über Krystallisation im magnetischen Felde. (I. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) — K 40 h

— Volumenometrische Bestimmung des specifischen Gewichtes von Yttrium, Zirkonium und Erbium. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — K 10 h

— Magnetisierungszahlen anorganischer Verbindungen. (Mit 1 Tafel.) . . — K 70 h

Nabl, J., Über den Widerstand strömender Elektrolyte. (Mit 2 Textfiguren.) . . — K 50 h

Oekinghaus, E., Das ballistische Problem auf Grundlage der Versuche der Integrabilität (äussere Ballistik. (Mit 1 Tafel.) . . . . 1 K 70 h

Pfaundler, L., Über den Begriff und die Bedingungen der Convergenz und Divergenz bei den Linsen. (Mit 2 Tafeln.) . . . . — K 50 h

Przibram, K., Beiträge zur Kenntnis des verschiedenen Verhaltens der Anode und Kathode bei der elektrischen Entladung. (Mit 1 Doppeltafel.) . . . . — K 80 h

Radaković, M., Über die Bewegung einer Saite unter der Einwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkte. (Mit 7 Textfiguren.) . . . . — K 80 h

Scheimpflug, Th. und **Holler, M.,** Temperaturmessungen im Quecksilberbergwerk von Idria. (Mit 1 Karte.) . . . . 1 K 20 h

Schicht, F., Das äussere elektrische Feld einer Entladungsröhre. (Mit 16 Textfiguren.) — K 70 h

Schweidler, E., R. v., Über die lichtelektrischen Erscheinungen. (II. Mittheilung.) (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.) . . . . — K 40 h

— Zur Theorie unipolarer Gasentladungen. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . . . — K 20 h

Smoluchowski, Ritter v. Smolan, M., Weitere Studien über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . — K 40 h

Sterneck, R. v., Untersuchungen über den Zusammenhang der Schwere unter der Erdoberfläche mit der Temperatur. . . . . 1 K 20 h

Tuma, J., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. III. Luftelektricitätsmessungen im Luftballon. (Mit 9 Textfiguren.) . . . . — K 60 h

Tumlirz, O., Mechanische Erklärung der Verdünnungswärme von Lösungen. . — K 30 h

— Die Zustandsgleichung des Wasserdampfes. . . . . — K 30 h

— Die beiden specifischen Wärmen des Wasserdampfes. . . . . — K 30 h

Wallaschek, R., Die Entstehung der Scala. (Mit 4 Tafeln, 1 Textfigur und einer Tabelle.) 1 K 50 h

Wegscheider, R., Über die Dissociation der Gase bei constantem Drucke und bei Überschuss eines der Dissociationsproducte. . . . . — K 30 h

— Über die Dissociation des Chlorwasserstoffmethyläthers. (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h

Aus den Denkschriften 68. Bd. (1899).

Eder, J. M. und Valenta, E., Das Spectrum des Chlors. (Mit 1 Doppeltafel, 2 Tafeln und 3 Textfiguren.) . . . . 3 K — h

— Das Spectrum des Brom. (Mit 1 Doppeltafel, 2 Tafeln und 2 Textfiguren.) 2 K 20 h

— Normalspectren einiger Elemente zur Wellenlängebestimmung im äußersten Ultraviolett. (Mit 1 Doppeltafel und 3 Tafeln.) . . . . 3 K 90 h

Aus den Sitzungsberichten 109. Bd. (1900).

Benndorf, H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. VI. Über die Störungen des normalen atmosphärischen Potentialgefälles durch Bodenerhebungen. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — K 40 h

— Notiz über die photoelektrische Empfindlichkeit des Eises. . . . . — K 10 h

Czermak, P., Eine neue Beobachtungsmethode für Luftwirbelringe. (Mit 5 Textfiguren.) — K 50 h

— Zur Structur und Form der Hagelkörner. (Mit 3 Textfiguren.) . . . . — K 30 h

Emich, F., Über explosive Gasgemenge. III. Mittheilung über die Entzündlichkeit von dünnen Schichten explosiver Gasgemenge.) (Mit 1 Textfigur.) . . . . . . — K 40 h

— Zur Empfindlichkeit der Spectralreactionen. . . . . — K 10 h

Exner, F. und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XVIII. Mittheilung.) . . . . 1 K 20 h

Exner, F. M., Messungen der täglichen Temperaturschwankungen in verschiedenen Tiefen des Wolfgangsees. (Mit 3 Textfiguren.) . . . . — K 50 h

Exner, K., Zur Beziehung zwischen den atmosphärischen Strömungen und der Scintillation. . . . . — K 30 h

Jäger, G., Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase. (II. Mittheilung.) (Mit 2 Textfiguren.) . . . . — K 20 h

— Über Longitudinalschwingungen in Stäben. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . — K 30 h

Jaumann, G., Zur Theorie der Lösungen. (Mit 3 Textfiguren) . . . . — K 90 h

Haschek, E., Druck und Temperatur im elektrischen Funken. (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h

Klemenčic, I., Untersuchungen über permanente Magnete. III. Studien über die Constanz permanenter Magnete. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . — K 70 h

— Untersuchungen über permanente Magnete. IV. Bemerkungen über die Abnahme des Momentes. . . . . — K 20 h

Krüse, K., Über die Änderung des Momentes eines Magnetes durch Erschütterung, sowie durch Abreißen und Abziehen von weichem Eisen. . . . . — K 40 h

Lampa, A., Eine Studie über den Wehnelt'schen Unterbrecher. (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h

Mache, H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. V. (Beobachtungen in Indien und Oberägypten. (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.) . . . . . . — K 90 h

— Über die Regenbildung. . . . . — K 10 h

Meyer, St., Bestimmung einiger Magnetisierungszahlen. (Mit 1 Textfigur.) . . . — K 20 h

— Über die Additivität der Atomwärmen. . . . . — K 10 h

— Über Atommagnetismus und Molecularmagnetismus. . . . . — K 10 h

— und Schweidler, E., R. v., Über Radium- und Poloniumstrahlung. (Mit 2 Tafeln und 3 Textfiguren.) . . . . — K 80 h

Müller-Erzbach, W., Versuche über die Wirkungsart und die Wirkungsweite einer Molecularkraft. . . . . — K 40 h

Przibram, K., Vorläufige Mittheilung über die photographische Aufnahme der elektrischen Entladung auf rotierenden Films. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . — K 10 h

Prodinger, M., Über die Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten eines Magnetes vom Momente. . . . . — K 40 h

Radaković, M., Über eine neue Methode zur Bestimmung von Geschossgeschwindigkeiten. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — K 20 h

— Über den Verlauf der Geschwindigkeit eines Projectils in der Nähe der Gewehrmündung. (Mit 1 Textfigur.) . . . . — K 40 h

Streintz, F., Über die elektrische Leitfähigkeit von gepressten Pulvern. (I. Mittheilung.) Die Leitfähigkeit von Platinmohr, amorphem Kohlenstoff und Graphit. (Mit 2 Textfiguren) . . . . — K 50 h

Tumlirz, O., Das Compressibilitätsgesetz der Flüssigkeiten. . . . . — K 30 h

Wegscheider, R. Über die allgemeinste Form der Gesetze der chemischen Kinetik homogener Systeme. (Mit 1 Tafel.) . . . . 1 K 80 h