

Hasenöhrl F.

Überreicht vom Verfasser.

Über die Grundgleichungen der elektro-
magnetischen Lichttheorie für bewegte
Körper

von

Dr. Fritz Hasenöhrl.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. November 1902.)

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. CXI. Abth. IIa. November 1902.

WIEN, 1902.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Druckschriften

der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe).

Periodische Publicationen.

[Physik.]

Aus den Sitzungsberichten 107. Bd. (1898).

- Exner, F. und Haschek, E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XI. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) 1 K 10 h
— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XII. Mittheilung.) (Mit 4 Tafeln.) 1 K 50 h
— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XIII. Mittheilung.) (Mit 4 Tafeln.) 1 K 50 h
— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XIV. Mittheilung.) — K 80 h

Aus den Sitzungsberichten 108. Bd. (1899).

- Benndorf, H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. II. Messungen des Potentialgefälles in Sibirien. (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.) — K 70 h
Eder, J. M., System der Sensitometrie photographischer Platten. (Mit 16 Tafeln und 5 Textfiguren.) 4 K — h
Eichberg, F., und Kallir, L., Über Lichterscheinungen in elektrolytischen Zellen mit Aluminium- und Magnesiumelektroden. (Mit 2 Textfiguren.) — K 20 h
Exner F., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. I. Messungen des Potentialgefälles in Oberägypten. (Mit 2 Textfiguren.) 1 K — h
— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XV. Mittheilung.) — K 70 h
— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XVI. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) 1 K 50 h
— und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XVII. Mittheilung.) — K 60 h
— F. M., Über die Absorptionsspectren der seltenen Erden im sichtbaren und ultravioletten Theile des Spectrums. — K 30 h
Harting, H., Über die Lage der astigmatischen Bildflächen bei optischen Systemen. — K 10 h
Hasenöhr, F., Über ein Problem der Potentialtheorie. (Mit 1 Textfigur.) — K 55 h
Hock, J., Über die Abhängigkeit der Capillaritäts-Constanten homologer Reihen von der Temperatur und der chemischen Zusammensetzung und über die Oberflächenspannungen unterkühlter Flüssigkeiten. (Mit 1 Tafel.) — K 60 h
Jäger, G., Zur Größe der Molekel. — K 10 h
— und Meyer St., Die magnetische Susceptibilität des Wassers. (Mit 1 Textfigur.) — K 20 h
— Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase — K 20 h
— Über das Verhalten der Flüssigkeiten im magnetischen Felde. (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h
Jahoda, R., Über eine Methode zur Bestimmung der Gasdichte mittelst angeblasener Pfeifen. (Mit 1 Textfigur.) — K 20 h
Jaumann, G., Rotierendes Magnetfädchen. (Mit 1 Textfigur.) — K 20 h
Kerner, F. v., Die theoretische Temperaturvertheilung auf Prof. Frech's Weltkarten der altpaläozoischen Zeit. — K 10 h
Klemencič, I., Untersuchungen über permanente Magnete. I. Über die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten vom Dimensionsverhältnis. (Mit 2 Textfiguren.) — K 40 h
— Über die Wärmeentwicklung durch Foucault'sche Ströme bei sehr schnellen Schwingungen. (Mit 1 Textfigur.) — K 20 h
— Untersuchungen über permanente Magnete. II. Über die Abhängigkeit des Inductionscoefficienten vom Dimensionsverhältnis. — K 30 h

Über die Grundgleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie für bewegte Körper

von

Dr. Fritz Hasenöhl.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. November 1902.)

Bei der Ableitung der Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes in bewegten Körpern kann man bekanntlich von zwei verschiedenen Annahmen ausgehen. Die erste, nach welcher der Äther die Bewegung der ponderablen Materie mitmacht, liegt der Hertz'schen Theorie zugrunde; sie führt auf entschiedenen Widerspruch mit der Erfahrung. Von der entgegengesetzten Annahme, eines ruhenden Äthers, ausgehend, hat H. A. Lorentz¹ Gleichungen abgeleitet, welche fast in allen Punkten der Erfahrung genügen.²

Eine weitere Annahme der Theorie von Lorentz ist, dass alle wahre Elektrizität an »Ionen« gebunden ist, welche ihrerseits die Bewegung der Materie mitmachen. Im Ion ist $\text{div } \mathfrak{d} \geq 0$, wenn \mathfrak{d} die dielektrische Verschiebung im Äther ist. Denkt man sich unter \mathfrak{d} eine Verschiebung im gewöhnlichen,

¹ Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895.

² Das Ergebnis des Versuches von Michelson und Morley lässt sich wohl (ohne weitere Hilfshypothese) kaum aus der Annahme eines ruhenden Äthers erklären. Die Gleichungen von Cohn (Livre Jubilaire dédié à H. A. Lorentz; Göttinger Nachrichten 1901) sind ja als der Ausdruck aller bisher gemachten Erfahrungen hingestellt, nicht aber aus irgendwelchen Annahmen abgeleitet.

geometrischen Sinne, so ist also im Ion ein (positiver oder negativer) Überschuss von Äther über die Umgebung enthalten. Dieser Überschuss nimmt also an der Bewegung der Materie theil. Der ganze Äther ruht also auch nach der Lorentz'schen Theorie nicht, sondern nur der einem vollständigen Gleichgewichtszustande entsprechende Theil desselben.

In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die Grundgleichungen des Elektromagnetismus in bewegten Körpern ohne Annahme von Ionen abzuleiten; das Resultat ist im wesentlichen mit den Lorentz'schen Gleichungen identisch. Der Gedankengang ist ganz analog dem, welchen Boltzmann (Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes, II. Theil) bei seiner Ableitung der Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Körper eingeschlagen hat. Die Modification, welche dabei in Anbetracht der Bewegung der Materie eingeführt werden musste, beruht auf der Annahme, dass der Äther des freien Weltraumes die Materie durchdringt und an ihrer Bewegung nicht theilnimmt, dass aber die Veränderung des Äthers, welche den Unterschied der elektrischen Erscheinungen in Äther und Materie bedingt, mit der Materie fortschreitet. Die folgenden Ausführungen werden den Sinn dieser Unterscheidung klarer hervortreten lassen.

Eine ähnliche Grundauffassung, aber ganz andere Durchführung zeigt eine Arbeit von Reiff.¹ Dieselbe fußt auf der Helmholtz'schen Theorie und führt zum richtigen Ausdruck des sogenannten Fresnel'schen Fortführungscoefficienten. Weitere Consequenzen sind jedoch im Widerspruch mit der Erfahrung.²

Bevor ich zum eigentlichen Thema dieser Arbeit übergehe, möchte ich mir erlauben, ein rein mechanisches Modell zu beschreiben, dessen mathematische Behandlung den später vorzutragenden Betrachtungen sehr ähnlich ist. Speciell erläutert das Modell den Fresnel'schen Fortführungscoefficienten, dessen richtige Darstellung wohl eines der wichtigsten Postulate jeglicher Theorie der Optik in bewegten Körpern ist.

¹ Wied. Ann., 50, S. 361; 1893.

² Poincaré, *Electricité et Optique*, 2^{de} édition, 1901, p. 597 ff.

1. Mechanisches Modell.

Wir denken uns einen Kautschukschlauch, der zwischen zwei fixen Punkten gespannt, rein transversale Schwingungen ausführt. Ist σ_1 seine Masse per Längeneinheit, v eine Constante; fällt ferner seine Ruhelage mit der X -Axe zusammen, während y die dazu senkrechte Elongation ist, so besitzt die Längeneinheit des Schlauches die potentielle Energie $\frac{v}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$ und die lebendige Kraft $\frac{\sigma_1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$.¹ Ist der Schlauch mit Flüssigkeit gefüllt, so bleibt die potentielle Energie ungeändert. Die kinetische wird jedoch $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$, wenn σ_2 die Flüssigkeitsmasse ist, welche sich in der Längeneinheit des Schlauches befindet. Hieraus lässt sich etwa mit Hilfe des Hamilton'schen Princips leicht die Bewegungsgleichung, die »Differentialgleichung der schwingenden Saite« ableiten. Physikalisch entspricht derselben bekanntlich eine Wellenbewegung, welche mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{v}{\sigma_1}} \quad (1)$$

im ersten Falle, im zweiten Falle mit der Geschwindigkeit

$$c' = \sqrt{\frac{v}{\sigma_1 + \sigma_2}} \quad (2)$$

nach jeder Richtung der X -Axe fortschreitet.

Nun wollen wir annehmen, dass die Flüssigkeit mit der constanten Geschwindigkeit ξ in der Richtung der X -Axe strömt (wobei sie natürlich außerdem noch die Bewegung des Schlauches mitzumachen gezwungen ist). Von jeglicher Reibung sehen wir ab. Die potentielle Energie bleibt auch jetzt ungeändert, ebenso der Theil der kinetischen Energie, welcher von der Masse des Schlauches herrührt, nämlich $\frac{\sigma_1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$; die

¹ Siehe etwa Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen, I, S. 184.

lebendige Kraft der Flüssigkeit ist aber jetzt, wie eine leichte Überlegung zeigt, $\frac{\sigma_2}{2} \left[\xi^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]$, wenn wir zur Kürze das schon aus der Hydrodynamik bekannte Symbol:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} \quad (3)$$

verwenden. Das Hamilton'sche Princip liefert jetzt:

$$\begin{aligned} 0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \delta t (T - V) = \delta \int_{t_0}^{t_1} \delta t \int_0^l dx & \left[\frac{\sigma_1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_2}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{\sigma_2}{2} \xi^2 - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Hierin ist l die Länge des Schlauches. Offenbar ist es consequenter, hier das Zeitdifferential mit δt zu bezeichnen. ξ soll unvariirt bleiben, das Glied $\frac{\sigma_2}{2} \xi^2$ kann also weggelassen werden. Setzen wir für $\frac{d}{dt}$ seinen Wert aus (3) ein, führen die Variation nach y durch und vertauschen gleich die Reihenfolge von Variation und Differentiation, so erhalten wir

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta t \int_0^l dx \left[\sigma_1 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} + \sigma_2 \frac{dy}{dt} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial t} + \xi \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) - \nu \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right].$$

Integriert man partiell nach der Zeit, respective nach x , so erhält man nach dem gewöhnlichen Gedankengang, unter der Voraussetzung, dass δy an den Grenzen verschwindet, die Bewegungsgleichung:

$$\sigma_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \sigma_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = \nu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

oder

$$(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \sigma_2 \xi \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (\sigma_2 \xi^2 - \nu) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist:

$$y = f(x + \gamma_1 t) + g(x + \gamma_2 t),$$

worin f und g zwei willkürliche Functionen sind und γ_1 und γ_2 sich als Wurzeln einer quadratischen Gleichung ergeben; und zwar ist:

$$\gamma_1 = -\frac{\sigma_2 \xi}{\sigma_1 + \sigma_2} \pm \sqrt{\frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_1 \sigma_2 \xi^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}}.$$

Wir nehmen nun an, dass ξ gegen die durch Gleichung (1) und (2) eingeführten Größen c und c' klein sei, so dass wir die höheren Potenzen von $\frac{\xi}{c}$ und $\frac{\xi}{c'}$ vernachlässigen können.

Dann ist auch

$$\xi^2 \text{ gegen } \nu \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2}$$

zu vernachlässigen und wir erhalten annähernd:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{\frac{\nu}{\sigma_1 + \sigma_2}} - \xi \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = c' - \xi \left(1 - \left(\frac{c'}{c} \right)^2 \right) \\ &= c' - \xi \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \\ \gamma_2 &= -\sqrt{\frac{\nu}{\sigma_1 + \sigma_2}} - \xi \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = -c' - \xi \left(1 - \left(\frac{c'}{c} \right)^2 \right) \\ &= -c' - \xi \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \end{aligned}$$

wenn wir noch der Analogie mit den optischen Erscheinungen zu Liebe das Verhältnis $\frac{c'}{c} = \frac{1}{n}$ setzen.

Die Geschwindigkeit, mit der sich jetzt die Wellen längs des Schlauches fortpflanzen, ist also eine solche, als ob die strömende Flüssigkeit dem Schlauche den Bruchtheil $1 - \frac{1}{n^2}$ ihrer eigenen Geschwindigkeit mittheilen würde.

Die Analogie mit der Optik ist also eine ziemlich befriedigende, wenn man den (als Ganzes) ruhenden Schlauch mit dem Äther, die strömende Flüssigkeit mit der bewegten Materie vergleicht. Es ist ja nach den Versuchen von Fizeau und Michelson und Morley, die Geschwindigkeit des Lichtes im

Wasser, das mit der Geschwindigkeit ξ strömt, in der Strömungsrichtung durch $-\gamma_2$, respective γ_1 gegeben, wenn man unter c' die Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Wasser, unter n den Brechungsexponenten des Wassers versteht.¹

2. Ableitung der Grundgleichungen.

Nach der in der Einleitung erwähnten Theorie von Boltzmann haben wir uns den jeweiligen Zustand des Äthers durch den Wert des »tonischen« Vectors (Momentenvector) \mathfrak{A} gegeben zu denken; seine Componenten seien F, G, H . Ist $\frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2}$ die Dichte des Äthers, so ist seine kinetische Energie per Volumseinheit:

$$\frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right)^2. \quad (4)$$

Die potentielle Energie hat den Wert:

$$\frac{1}{8\pi} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2,$$

worin

$$a = -\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \quad \text{u. s. w.}$$

oder

$$\mathfrak{B} = -\text{curl } \mathfrak{A} \quad 1)$$

ist, wenn wir den Vector, dessen Componenten a, b, c sind, mit \mathfrak{B} bezeichnen. An Stellen, wo ruhende ponderable Materie vorhanden ist, erscheint die lebendige Kraft noch um den Addenden:

$$\frac{\varepsilon}{8\pi\mathfrak{B}^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right)^2$$

vermehrt. Wir können uns dies entweder so deuten, dass die Dichte des Äthers in der Materie eine größere ist, oder man könnte sich auch denken, dass ein Theil der Materie, von der Masse $\frac{\varepsilon}{8\pi\mathfrak{B}^2}$ per Volumseinheit gezwungen ist, die tonische

¹ Siehe etwa Dru de, Optik, S. 426 ff.

Bewegung des Äthers mitzumachen. Ferner ist noch der früher angegebene Wert der potentiellen Energie in der Materie mit dem Factor $\frac{1}{\mu}$ zu multiplicieren. Die gesammte elektromagnetische Energie ist also jetzt per Volumseinheit:

$$\frac{1 + \varepsilon}{8\pi\mathfrak{B}^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{8\pi\mu} \mathfrak{B}^2.$$

Offenbar ist $1 + \varepsilon$ gleich der (elektrostatisch gemessenen) Dielektricitätsconstante oder, wenn $\mu = 1$ ist, gleich dem Quadrat des Brechungsindex.

Wie haben wir nun diese Ausdrücke zu modificieren, wenn die Materie nicht ruht, sondern sich mit der Geschwindigkeit \mathfrak{p} , deren Componenten ξ, η, ζ seien, bewegt? Wenn wir an der Analogie mit dem mechanischen Modell festhalten, erkennen wir einmal, dass der Wert der potentiellen Energie ungeändert bleiben muss. Dieselbe ist ja nur durch den momentanen Wert des Vectors \mathfrak{A} bestimmt, nicht aber durch seine Differentialquotienten nach der Zeit. Ebenso wenig kann der Bestandtheil (4) der lebendigen Kraft geändert werden, denn derselbe rührt von der Bewegung des reinen Äthers her, der an der Bewegung der Materie gar nicht theilnimmt.

Zu ändern ist bloß der Ausdruck (5). Die Masse — sei es des Äthers oder der Materie —, welcher dieser Bestandtheil der lebendigen Kraft entspricht, hat jetzt erstens die sichtbare Bewegung der Materie mitzumachen, zweitens aber eine solche tonische Bewegung auszuführen, dass ihre Verschiebung stets durch den am jeweiligen Ort momentan herrschenden Wert des Vectors \mathfrak{A} gegeben ist. Die tonische Bewegung geht also für diese Masse mit der Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \xi \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} \quad (6)$$

vor sich. $\frac{d}{dt}$ bedeutet offenbar eine Differentiation bei constanten »relativen« Coordinaten, wenn wir unter einem relativen Coordinatensystem ein System verstehen, das mit der Materie fortschreitet; es entspricht dies der Geschwindigkeit, welche ein

mit der Materie fortschreitender Beobachter wahrnimmt. Wir haben also jetzt an Stelle von (5) den Ausdruck

$$\frac{\varepsilon}{8\pi\mathfrak{B}^2} \left[\left(\frac{d\mathfrak{W}}{dt} \right)^2 + p^2 \right]$$

zu setzen. Die gesammte Energie der tonischen Bewegung hat also jetzt die Dichte:

$$\frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2} \left[\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{d\mathfrak{W}}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{8\pi\mu} \mathfrak{B}^2. \quad (7)$$

Daraus leiten wir wieder mit Hilfe des Hamilton'schen Princips die Bewegungsgleichungen ab. μ lassen wir unverändert; dann können wir von der lebendigen Kraft der sichtbaren Bewegung absehen. Wir erhalten also:

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \delta t \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2} \left[\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{d\mathfrak{W}}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{8\pi\mu} \mathfrak{B}^2 \right\}$$

Dabei bedeutet $\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau$ eine Integration über den ganzen Raum. Hierin setzen wir für $\frac{d}{dt}$ und \mathfrak{B} ihren Wert aus (6) und (I) ein, führen die Variation durch und vertauschen gleich die Reihenfolge von Variation und Differentiation. So erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta t \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau & \left\{ \frac{1}{4\pi\mathfrak{B}^2} \left[\frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \delta F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} \frac{\partial \delta G}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial \delta H}{\partial t} \right. \right. \\ & + \varepsilon \frac{dF}{dt} \left(\frac{\partial \delta F}{\partial t} + \xi \frac{\partial \delta F}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \delta F}{\partial z} \right) \\ & + \varepsilon \frac{dG}{dt} \left(\frac{\partial \delta G}{\partial t} + \xi \frac{\partial \delta G}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta G}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \delta G}{\partial z} \right) \\ & \left. + \varepsilon \frac{dH}{dt} \left(\frac{\partial \delta H}{\partial t} + \xi \frac{\partial \delta H}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta H}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \delta H}{\partial z} \right) \right] \\ & - \frac{1}{4\pi\mu} \left[a \left(\frac{\partial \delta G}{\partial z} - \frac{\partial \delta H}{\partial y} \right) + b \left(\frac{\partial \delta H}{\partial x} - \frac{\partial \delta F}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. + c \left(\frac{\partial \delta F}{\partial y} - \frac{\partial \delta G}{\partial x} \right) \right] \}. \end{aligned}$$

Hierin ist wieder partiell zu integrieren. Setzen wir noch voraus, dass die Variationen an den Grenzen verschwinden, so haben wir die Factoren von δF , δG , δH einzeln gleich Null zu setzen und erhalten so, wenn wir wieder die abgekürzte Bezeichnungsweise (6) benützen und noch den Vector

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B} \quad (8)$$

mit den Componenten α , β , γ einführen:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{d^2 F}{dt^2} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \quad \text{u. s. w.,}$$

oder in einer Gleichung:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{d^2 \mathfrak{A}}{dt^2} \right) = \text{curl } \mathfrak{S}. \quad (II)$$

Die Gleichungen (I) und (II) sind die Grundlagen der hier vorzutragenden Theorie. Bei ihrer Ableitung wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass \mathfrak{p} von den Coordinaten unabhängig sei. (Die Abhängigkeit von der Zeit macht keinen Unterschied.) Hängt \mathfrak{p} von den Coordinaten ab, so erhalten wir statt (II):

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{d^2 \mathfrak{A}}{dt^2} + \varepsilon \frac{d \mathfrak{A}}{dt} \text{div } \mathfrak{p} \right) = \text{curl } \mathfrak{S}.^1 \quad (II')$$

Den Fällen, wo $\text{div } \mathfrak{p}$ von Null verschieden ist, kommt vorläufig keine Bedeutung zu; wir werden uns daher stets an (II) halten.

Eine weitere Voraussetzung, die der Ableitung der Gleichungen (II) und (II') zugrunde lag, ist das Princip der

¹ Außer diesen Symbolen div und curl werden wir noch die folgenden benützen: Vectorproduct aus zwei Vektoren $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ oder $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$; scalares Product $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, eventuell $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$; Operator ∇^2 ; Operator ∇ , welcher, vor einen Scalar g gesetzt, einen Vector mit den Componenten $\frac{dg}{dx}$, $\frac{dg}{dy}$, $\frac{dg}{dz}$ gibt (Gradient).

Über all' diese Bezeichnungsweisen siehe etwa Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Electricität, Leipzig 1894; erster Abschnitt.

Continuität der Übergänge. Die Größen ε und μ als stetig veränderlich anzusehen, ist man gewöhnt. Doch auch von der Geschwindigkeit p kann dasselbe vorausgesetzt werden. Bewegen sich zwei feste Körper mit verschiedener Geschwindigkeit aneinander vorbei, so kann man immer voraussetzen, dass etwa eine Luftschicht an der Berührungsfläche den stetigen Übergang der Geschwindigkeit vermittelt. Grenz jedoch ein bewegter Körper an den freien Äther, so ist die Sache noch einfacher; denn im Äther können wir formell ξ, η, ζ ganz beliebige Werte ertheilen, hier ist ja die Dichte der Materie Null und es ist daher ganz gleichgiltig, mit welcher Geschwindigkeit bewegt wir sie supponieren.

3. Der Fresnel'sche Fortführungscoefficient.

Da sich die Geschwindigkeit, mit welcher eine elektromagnetische Störung in einem bewegten Körper fortschreitet, sofort aus den Gleichungen (I) und (II) ergibt, wollen wir ihren Wert gleich jetzt berechnen. Ist μ constant, so liefert die Combination von (I) und (II):

$$\frac{\mu}{\mathfrak{B}^2} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{d^2 \mathfrak{A}}{dt^2} \right) = \nabla^2 \mathfrak{A} - \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A}. \quad (9)$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist, wenn wir (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $\eta = \zeta = 0$ setzen und ξ constant annehmen:

$$F = H = 0; \quad G = f(x + ct);$$

setzt man dies in die drei Gleichungen ein, welche (9) repräsentiert, so erhält man außer zwei Identitäten:

$$\frac{\mu}{\mathfrak{B}^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} (1 + \varepsilon) + 2\varepsilon \xi \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} + \varepsilon \xi^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2};$$

setzt man noch für G seinen Wert ein, so erhält man für c die quadratische Gleichung:

$$\frac{\mu(1 + \varepsilon)}{\mathfrak{B}^2} c^2 + 2c\varepsilon \frac{\mu \xi}{\mathfrak{B}^2} = 1 - \varepsilon \mu \frac{\xi^2}{\mathfrak{B}^2}.$$

Setzen wir hierin (entsprechend durchsichtigen Körpern) $\mu = 1$ und vernachlässigen die zweite Potenz von $\frac{\xi}{\mathfrak{B}}$, so erhalten wir

$$c = \pm \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{1+\varepsilon}} - \frac{\xi\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

oder wenn wir $1 + \varepsilon = n^2$ und $\frac{\mathfrak{B}}{n} = \mathfrak{B}'$ setzen:

$$c = \pm \mathfrak{B}' - \xi \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

in Übereinstimmung mit den früher erwähnten Versuchen und der Annahme von Fresnel.

4. Folgerungen aus den Grundgleichungen.

Im folgenden werden wir voraussetzen, dass μ überall constant sei; es ist dann zweckmäßig, den weiteren Betrachtungen ein Coordinatensystem zugrunde zu legen, das mit der Materie fortschreitet. Dazu haben wir aus (II) das Symbol $\frac{\partial}{\partial t}$ mittels (6) zu eliminieren. Gleichung (II) lautet dann:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left\{ (1 + \varepsilon) \frac{d^2 \mathfrak{A}}{dt^2} - 2 \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{d \mathfrak{A}}{dt} + \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \mathfrak{A} \right\} = \text{curl } \mathfrak{D}. \quad (10)$$

Wir können jetzt ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $\eta = \zeta = 0$ setzen; ferner nehmen wir an Gleichung (10) die Operation div vor. Wir erhalten, wenn wir zur Kürze

$$\text{div } \mathfrak{A} = \sigma$$

setzen:

$$0 = (1 + \varepsilon) \frac{d^2 \sigma}{dt^2} - 2\xi \frac{d^2 \sigma}{dx dt} + \xi^2 \frac{d^2 \sigma}{dx^2} + \frac{\partial(1 + \varepsilon)}{\partial x} \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{\partial(1 + \varepsilon)}{\partial y} \frac{d^2 G}{dt^2} + \frac{\partial(1 + \varepsilon)}{\partial z} \frac{d^2 H}{dt^2}. \quad (11)$$

Betrachten wir erst einen homogenen Körper, wo also ε constant ist, so fallen die drei letzten Glieder weg, und es ist leicht, das allgemeine Integral von (11) aufzustellen. Dasselbe setzt sich additiv aus Gliedern von der Form

$$e^{\pm \lambda \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} z} \cdot \frac{\sin \lambda \left(\frac{\xi}{1+\varepsilon} t + x \right)}{\cos \lambda \left(\frac{\xi}{1+\varepsilon} t + x \right)}$$

zusammen, wo λ ganz beliebig ist; und zwar sind leicht Anfangsbedingungen denkbar, welche auch das Vorkommen positiver ε -Potenzen im obigen Ausdrucke nöthig machen. Solche Glieder würden aber auf unendlich große Werte von σ führen. Der einzige Wert von σ , welcher physikalisch denkbar ist, ergibt sich also für $\lambda = 0$, ist also eine reine Constante, die wir gleich Null annehmen. Es ist also in einem homogenen Körper (dessen Theile sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen) stets

$$\sigma = 0 \quad (12)$$

(In einer homogenen Flüssigkeit, deren Theile verschiedene Geschwindigkeiten haben, würde dies nicht gelten.)

Wenn ε variabel ist, lässt sich (11) nicht so leicht integrieren. Eine andere Betrachtung führt uns jedoch auch zu einem wichtigen Resultat. Wir betrachten einen Raum, wo ε (stetig) variabel ist, nehmen aber an, dass derselbe von einem homogenen Körper umgeben sei, dass sich also um ihn eine geschlossene Fläche legen lässt, auf welcher Gleichung (12) gilt. Diese Fläche kann im übrigen beliebig nahe an dem betrachteten Raume liegen.

Nun integrieren wir Gleichung (11) über den von dieser Fläche begrenzten Raum. Wir bilden also:

$$0 = \int d\tau \left\{ (1+\varepsilon) \frac{d^2\sigma}{dt^2} - 2\xi \frac{d^2\sigma}{dx dt} + \xi^2 \frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial x} \frac{d^2F}{dt^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial y} \frac{d^2G}{dt^2} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial z} \frac{d^2H}{dt^2} \right\}$$

Das zweite und dritte Glied innerhalb des Integralzeichens kann sofort nach x integriert werden; da σ an den Grenzen

verschwindet, liefert jedes Null. Die drei letzten Glieder integrieren wir partiell nach x , y , respective z ; das hiebei übrigbleibende Raumintegral hebt sich gegen das erste Glied; es bleibt also bloß das Oberflächenintegral stehen und wir erhalten:

$$0 = \int dS(1 + \varepsilon) \left[\cos(nx) \frac{d^2 F}{dt^2} + \cos(ny) \frac{d^2 G}{dt^2} + \cos(nz) \frac{d^2 H}{dt^2} \right]$$

oder

$$0 = \int dS(1 + \varepsilon) \frac{d^2 \mathfrak{A}}{dt^2} \cos(\mathfrak{A}n)$$

oder weiters durch Integration nach der Zeit:

$$\int dS(1 + \varepsilon) \frac{d\mathfrak{A}_n}{dt} = \text{const.} \quad (13)$$

Dabei bedeutet \mathfrak{A}_n die Componente von \mathfrak{A} nach der Normalen n des Flächenelementes dS .

5. Umformung der Grundgleichungen. Physikalische Interpretation der Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} .

Den Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} kam bisher eine rein mechanische Bedeutung zu. Sie charakterisieren eine verborgene Bewegung, von der man sich nach Maxwell und Boltzmann auch ein Bild machen kann. Um den Übergang zu den Gleichungen der Elektrizitätslehre durchzuführen, müssen wir \mathfrak{A} und \mathfrak{B} mit bestimmten Vektoren des elektromagnetischen Feldes identifizieren. Darin liegt dann die Hypothese der Theorie. Wir müssen hier jedenfalls so vorgehen, dass wir für $\mathfrak{p} = 0$ die Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Körper erhalten, während die Gleichungen, welche sich für bewegte Körper ergeben werden, den hier gemachten Erfahrungen genügen müssen. Die letztere Aufgabe ist natürlich ungemein dadurch erleichtert, dass wir in den Lorentz'schen Gleichungen eine vollständige und überaus einfache Beschreibung fast aller hier experimentell erhaltenen Resultate haben. Auf diese Gleichungen wollen wir also lossteuern.

Die Gleichung (II) schreiben wir wieder in der Form (10):

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left[(1 + \varepsilon) \frac{d^2 \mathfrak{A}}{dt^2} - 2 \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \mathfrak{A} \right] = \text{curl } \mathfrak{H}.$$

berücksichtigen wir (I), so sehen wir, dass auf der rechten Seite dieser Gleichung zweite Differentialquotienten von \mathfrak{A} nach den Coordinaten stehen. Gegen diese wollen wir die auf der linken Seite befindlichen gleichgebauten Glieder vernachlässigen, welche mit $\frac{\xi^2}{\mathfrak{B}^2}$ oder $\frac{\xi\eta}{\mathfrak{B}^2}$ oder dergleichen multipliciert sind. Wir vernachlässigen also die Glieder »höherer Ordnung«. Dadurch wird die obige Gleichung:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d}{dt} \left[(1 + \varepsilon) \frac{d\mathfrak{A}}{dt} - 2 \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathfrak{A} \right] = \text{curl } \mathfrak{H}. \quad (14)$$

(Natürlich gilt dies nur solange, als nicht etwa die rechte Seite für sich verschwindet. Man dürfte z. B. nicht ohneweiters an dieser Gleichung die Operation div vornehmen.) Statt (14) können wir auch schreiben:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) = \text{curl } \mathfrak{H} + \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{d\mathfrak{A}}{dt}. \quad (15)$$

Benützen wir nun die bekannte Identität:

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathfrak{A} = -\text{curl } [p\mathfrak{A}] + p \text{ div } \mathfrak{A}, \quad (16)$$

so wird die obige Gleichung für einen homogenen Körper, wonach (12) stets $\text{div } \mathfrak{A} = \sigma = 0$ ist,

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) = \text{curl} \left(\mathfrak{H} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left[p \frac{d\mathfrak{A}}{dt} \right] \right) \quad (17)$$

Wir setzen nun

$$\varepsilon \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = 4\pi \mathfrak{B}^2 \mathfrak{D} \quad (18)$$

und

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left[\mathfrak{p} \cdot \frac{d\mathfrak{A}}{dt} \right] \quad (19)$$

Ferner führen wir noch einen Vector \mathfrak{G} durch die Gleichung:

$$\mathfrak{G} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \nabla \left(\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{A}}{1 + \varepsilon} \right) \quad (20)$$

ein. Da die Operation $\text{curl } \nabla$ stets Null ergibt, ist:

$$\text{curl } \mathfrak{G} = \text{curl } \frac{d\mathfrak{A}}{dt}. \quad (21)$$

Benützen wir die Identität:

$$\nabla (\mathfrak{p}\mathfrak{A}) = \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathfrak{A} + [\mathfrak{p} \cdot \text{curl } \mathfrak{A}],^1 \quad (22)$$

so können wir an Stelle von (20) (im homogenen Körper) schreiben:

$$(1 + \varepsilon)\mathfrak{G} = \varepsilon \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - [\mathfrak{p} \cdot \text{curl } \mathfrak{A}].$$

Berücksichtigen wir (I) und (18), so wird

$$(1 + \varepsilon)\mathfrak{G} = 4\pi\mathfrak{B}^2\mathfrak{D} + \mu[\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{H}].$$

Endlich bemerken wir noch, dass wir in (19) mit Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung statt $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ auch \mathfrak{G} setzen können.

Schreiben wir nun zur besseren Übersicht alle Gleichungen zusammen auf, so haben wir also:

$$\text{div } \mathfrak{D} = 0 \quad (23)$$

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0 \quad (24)$$

¹ Diese, sowie die Identität (16) finden sich etwa bei Föppl, l. c. S. 64, Gleichung (83) und (85); dort steht an Stelle von $\left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right)$ das Symbol $(\mathfrak{p} \nabla)$.

$$+ \pi \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \text{curl } \mathfrak{H}' \quad (25)$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -\text{curl } \mathfrak{E} \quad (26)$$

$$(1 + \varepsilon) \mathfrak{E} = 4\pi \mathfrak{B}^2 \mathfrak{D} + \mu [\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{H}] \quad (27)$$

$$\mu \mathfrak{H}' = \mathfrak{B} - \frac{\mu}{\mathfrak{B}^2} [\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{E}]. \quad (28)$$

Von diesen Gleichungen ergibt sich (23) sofort aus (12), (24) aus (I); (25) folgt aus (17), (18) und (19); (26) aus Differentiation von (I) nach der Zeit und (21); (28) aus Multiplication von (19) mit μ und (8).

Wesentlich ist, dass diese Gleichungen nur in homogenen Körpern gelten (in denen \mathfrak{p} constant ist). Bei Ableitung der Grenzbedingungen sind sie nicht ohne weiteres zu benützen. (Wir fassen die Grenzschichte wieder als eine dünne Schichte raschen, aber continüierlichen Überganges auf.)

Innerhalb der Grenzschichte darf in (16) nicht mehr $\text{div } \mathfrak{A} = 0$ gesetzt werden; wir erhalten also statt (17):

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \mathfrak{p} \text{ div } \mathfrak{A} \right) = \text{curl } \mathfrak{H}'; \quad (17^*)$$

setzen wir also

$$\varepsilon \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \mathfrak{p} \text{ div } \mathfrak{A} = 4\pi \mathfrak{B}^2 \mathfrak{D}^*, \quad (18^*)$$

so gelten in der Grenzschichte die Gleichungen (24) und (26) — dieselben sind ja ohne Voraussetzung der Homogenität abgeleitet — und statt (25)

$$4\pi \frac{d\mathfrak{D}^*}{dt} = \text{curl } \mathfrak{H}. \quad (25^*)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Größen \mathfrak{D}_n^* und \mathfrak{B}_n in der Grenzschichte endlich bleiben, erhält man daraus die Grenzbedingung, dass beim Übergange von einem Medium ins andere

$$\mathfrak{E}_n, \mathfrak{H}'_n, \mathfrak{B}_n, \frac{d\mathfrak{D}_n^*}{dt} \quad (29)$$

continuerlich bleiben. (Die Indices h und n bezeichnen die Componenten des betreffenden Vectors parallel und senkrecht zur Grenzfläche.)

Die letzte dieser Grenzbedingungen haben wir hier durch (25*), auf die zur Grenzfläche senkrechte Componente angewendet und durch Berücksichtigung der Continuität von δ'_h erhalten.

Es verlohnt sich jedoch zu zeigen, dass wir auch mittels der Methode des §. 4 zum selben Resultate gelangen können.

Wir schreiben (18*) in der Form:

$$4\pi\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^* = (1+\varepsilon)\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{A} - \rho \operatorname{div} \mathfrak{A}$$

und nehmen an dieser Gleichung die Operation div vor; so erhalten wir:

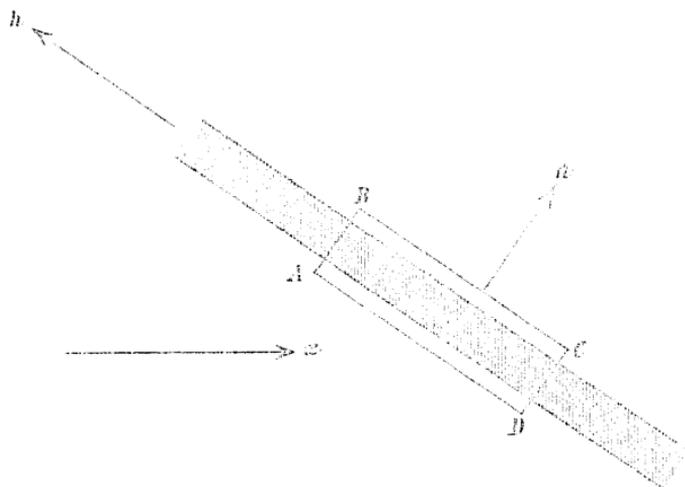
$$\begin{aligned} 4\pi\mathfrak{B}^2 \operatorname{div} \mathfrak{D}^* &= (1+\varepsilon)\frac{d\sigma}{dt} - 2\left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\sigma \\ &\quad + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial x}\frac{dF}{dt} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial y}\frac{dG}{dt} + \frac{\partial(1+\varepsilon)}{\partial z}\frac{dH}{dt}. \end{aligned}$$

(Hierin ist wieder $\operatorname{div} \mathfrak{A} = \sigma$ gesetzt.) Wir können wieder ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $\eta = \zeta = 0$ setzen und erhalten mit Rücksicht auf die streng giltige Gleichung (11):

$$4\pi\mathfrak{B}^2 \frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathfrak{D}^* = -\xi^2 \frac{d^2\sigma}{dx^2}. \quad (30)$$

Wir betrachten nun einen unendlich kleinen Cylinder $ABCD$, welcher in der durch Fig. 1 gekennzeichneten Lage zur schraffiert gezeichneten Grenzschichte liegt.¹ Dabei muss die Möglichkeit vorausgesetzt werden, diesen Cylinder so zu construieren, dass seine Mantelfläche von höherer Ordnung unendlich klein sei als die Basisflächen. Über diesen Cylinder integrieren wir nun Gleichung (30) und erhalten:

¹ Vergl. etwa Boltzmann, Vorlesungen, II, §. 5, oder H. A. Lorentz, I. c. S. 59.



$$\begin{aligned}
 4\pi R^2 \frac{d}{dt} \int \operatorname{div} \mathfrak{D}^* d\tau &= -\xi^2 \int \frac{d^2 \sigma}{dx^2} d\tau \\
 &= -\xi^2 \int \cos(\nu x) \frac{d\sigma}{dx} dS,
 \end{aligned}$$

worin die Normale zum Flächenelemente der Cylinderoberfläche dS jetzt zur Unterscheidung mit ν bezeichnet ist. An den Basisflächen ist σ und $\frac{d\sigma}{dx}$ gleich Null; das Oberflächenintegral ist also bloß über die Mantelfläche zu erstrecken. (Dasselbe darf aber nicht ohneweiters vernachlässigt werden, weil $\frac{d\sigma}{dx}$ dortselbst sehr groß sein kann.) An Stelle von $\int dS$ können wir setzen:

$$\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h d\lambda,$$

wenn ρ der Radius, λ die Höhe des Cylinders ist und ϑ irgend einen Azimuthalwinkel bedeutet. Dann wird das Oberflächenintegral:

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \cos(\nu x) \int_0^h d\lambda \frac{d\sigma}{dx}.$$

Wir können nun

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{d\sigma}{d\lambda} \cos(x\lambda) + \frac{d\sigma}{dh} \cos(xh)$$

setzen, wenn h eine Richtung in der Trennungsfläche (also senkrecht zu λ) ist. Wir haben allen Grund anzunehmen, dass $\frac{d\sigma}{dh}$ endlich bleibt, also gibt das Integral von $\frac{d\sigma}{dh} \cos(xh) \cos(\nu x)$ über die von höherer Ordnung unendlich kleine Mantelfläche des Cylinders erstreckt unendlich Kleines höherer Ordnung, was wir vernachlässigen. Es wird also das Oberflächenintegral:

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \cos(\nu x) \cos(\lambda x) \int_0^{\sigma} d\lambda \frac{d\sigma}{d\lambda}.$$

Da nun σ an den Grenzen des zweiten Integrales verschwindet (dieselben liegen ja schon außerhalb der Übergangsschichte), so ist das Integral gleich Null. Wir erhalten also

$$\frac{d}{dt} \int \operatorname{div} \mathfrak{D}^* d\tau = 0, \quad (31)$$

woraus sich sofort unter Voraussetzung, dass $\mathfrak{D}_n^{\#}$ überall endlich bleibt, die Grenzbedingung ableiten lässt, dass $\frac{d}{dt} \mathfrak{D}_n^{\#}$ continuierlich ist.

(Der Unterschied mit der gewöhnlichen Ableitung dieser Grenzbedingung, wie sie etwa in der Elektrodynamik ruhender Körper angewendet wird, ist also der, dass wir nicht überall in der Grenzschichte $\frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathfrak{D}^* = 0$ haben müssen, wohl aber das Integral dieser Größe über den betrachteten Cylinder verschwindet. Aus der Gleichung (12) dürfte man nicht, so wie hier, eine Grenzbedingung ableiten wollen, da die dazu nöthige Voraussetzung, dass σ und $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ in der Grenzschichte endlich bleiben, nicht erfüllt sein muss.)

Ist der Raum, wo ε variabel ist (ebenso wie in §. 4) ganz von einem homogenen Körper umgeben, so liefert dieselbe Betrachtung sofort auch hier

$$\frac{d}{dt} \int d\tau \operatorname{div} \mathfrak{D}^* = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt} \int dS \mathfrak{D}_n^* = 0 \quad (32)$$

(Diese Gleichung kann auch aus (13) gewonnen werden.) Die Gleichungen sind unter der Voraussetzung eines constanten p abgeleitet; wir können sie aber auch auf einen materiellen Körper anwenden, der sich durch den reinen Äther bewegt, da wir ja nach §. 2 im Äther den Wert von p beliebig annehmen, ihm also auch den Wert beilegen können, den es im bewegten Körper hat. Dadurch kommen wir auf ein Princip der Lorentz'schen Theorie, dass ein Ion bei der Bewegung durch den Äther seine Ladung nicht ändert. (Auf die Bewegung eines solchen Körpers durch eine Flüssigkeit könnte man den Satz nicht anwenden. Dieser Fall ist aber auch erfahrungsgemäß infolge des Auftretens der elektromotorischen Kräfte der Reibung nicht so einfach zu behandeln.)

Beschränken wir die Inhomogeneitäten auf die Grenzflächen homogener Körper, so ist* (mit Ausnahme der Grenzschichten, deren Inneres sich ohnehin der Beobachtung entzieht) überall:

$$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}.$$

Es gelten also dann stets die Gleichungen (23) bis (28), wozu die Grenzbedingungen kommen, dass

$$\mathfrak{E}_n, \mathfrak{H}_n, \mathfrak{B}_n, \frac{d\mathfrak{D}_n}{dt} \quad (33)$$

an der Grenze continuierlich bleiben. Die letzte von ihnen liefert, nach der Zeit integriert:

$$|\mathfrak{D}_n|_1 - |\mathfrak{D}_n|_2 = \text{const.},$$

wobei sich die Indices 1 und 2 auf die beiden Seiten der Grenzfläche beziehen. (Die Constante haben wir später mit der Flächendichte der wahren Elektrizität, dividiert durch \mathfrak{B}^2 , zu identificieren.)

Die Gleichungen (23) bis (28) und (33) werden mit den Gleichungen von Lorentz¹ vollständig identisch, wenn man darin $\mu = 1$ setzt. Wir haben also den Größen \mathfrak{E} , \mathfrak{H} , \mathfrak{D} dieselbe Bedeutung beizulegen, welche sie dort haben. (Auf die hier und dort vernachlässigten Glieder höherer Ordnung erstreckt sich die Übereinstimmung durchaus nicht.)

Die von Cohn (l. c.) aufgestellten Gleichungen, welche auch den Fall $\mu \geq 1$ berücksichtigen, unterscheiden sich äußerlich von unseren dadurch, dass im zweiten Gliede der rechten Seiten von (27) und (28) der Factor μ fehlt. Dieser Factor bringt auch für uns Unzukömmlichkeiten mit sich. Einmal ist die Lorentz'sche Transformation mit Hilfe der Ortszeit jetzt (in den Grenzbedingungen) nicht durchführbar und, was damit zusammenhängt, würde auch die Fassung der Elektrostatik, die wir gleich behandeln wollen, auf Schwierigkeiten stoßen, da jetzt der Wert von μ in die Grenzbedingungen eingehen würde, was aller Erfahrung widerspricht. Wir haben von Anfang an die Größe μ in den Gleichungen mitgeführt, da dies ganz mühelos geschehen konnte. Jetzt sehen wir aber, dass wir stets $\mu = 1$ setzen müssen. Bei Erklärung gewisser magnetischer Erscheinungen müsste man sich also mit Ampère'schen Molecularströmen oder dergleichen helfen, worauf auch die Lorentz'sche Theorie angewiesen ist.² Diese Übereinstimmung der zwei Theorien verdient vielleicht hervorgehoben zu werden. Wir wollen uns also in den Gleichungen (23) bis (28) und (33) stets $\mu = 1$, also auch $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ gesetzt denken, die Gleichungen jedoch nicht noch einmal hinschreiben.

6. Neuer Ausdruck für die elektromagnetische Energie. — Elektrostatik.

Die Dichte der elektromagnetischen Energie ist im bewegten Körper durch (7) gegeben; da wir jetzt überall $\mu = 1$ setzen, hat sie den Wert:

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 + \frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} \right)^2 \right] \quad (34)$$

¹ L. c. S. 76; Gleichung (Ic) bis (VIc) und (VIIIc).

² Vergl. Poincaré, l. c. S. 422.

Andererseits ist nach (18):

$$2\pi\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2 = \frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{d\mathfrak{M}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{d\mathfrak{M}}{dt} \cdot \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} \right]$$

Wenn wir Größen höherer Ordnung vernachlässigen, so ist:

$$\left(\frac{d\mathfrak{M}}{dt} - \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} \right)^2 = 0$$

oder

$$\left(\frac{d\mathfrak{M}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} \right)^2 = 2 \frac{d\mathfrak{M}}{dt} \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t},$$

also wird

$$2\pi\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2 = \frac{1}{8\pi\mathfrak{B}^2} (\varepsilon + 1) \left[\varepsilon \left(\frac{d\mathfrak{M}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Diesen Näherungswert können wir in (34) einsetzen, da \mathfrak{D}^2 Glieder enthält, welche bis auf den Factor $\left(\frac{p}{\mathfrak{B}}\right)^2$ den vernachlässigten gleichwertig sind. Also wird die Dichte der Energie annähernd:

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{D}^2 + 2\pi\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2.$$

Die elektrostatischen Erscheinungen ergeben sich sofort aus den Gleichungen (23) bis (28) und (33), wenn wir nach dem Früheren stets $\mu = 1$ setzen. Dieselben sind dadurch charakterisiert, dass

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = 0$$

ist. Entsprechend (26) lässt sich dann \mathfrak{E} als Potentialgradient darstellen. Wir setzen also:

$$\mathfrak{E} = -\nabla\omega.$$

Aus (27) folgt dann:

$$(1 + \varepsilon) \operatorname{div} \mathfrak{E} = -(1 + \varepsilon) \nabla^2 \omega = 4\pi\mathfrak{B}^2 \operatorname{div} \mathfrak{D} - p \operatorname{curl} \mathfrak{S}.$$

Im letzten Gliede ist es mit Vernachlässigung der Größen von der Ordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ gestattet, an Stelle von $\mathfrak{H} \mathfrak{H}'$ zu setzen, $\text{curl } \mathfrak{H}'$ ist aber wegen (25) im statischen Felde gleich Null. Berücksichtigt man noch (23), so erkennt man, dass im homogenen Körper:

$$\nabla^2 \omega = 0$$

ist. An der Grenzfläche zweier Medien ist wegen der Continuität der tangentiellen Kraftcomponenten

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} \text{ continuierlich.}$$

Aus (27) endlich erkennt man, dass die zur Trennungsfläche normale Componente von $(1 + \varepsilon)\mathfrak{E}$ also $-(1 + \varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial n}$ ebenso variieren muss wie \mathfrak{D}_n ; die senkrechte Componente von $[\mathfrak{p} \mathfrak{H}] = [\mathfrak{p} \mathfrak{H}']$ ist continuierlich, da \mathfrak{H}'_h es ist.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \left| (1 + \varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_1 - \left| (1 + \varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_2 &= -4\pi \mathfrak{B}^2 [\mathfrak{D}_{n,1} - \mathfrak{D}_{n,2}] \\ &= \text{Const} = -4\pi \eta_\omega, \end{aligned}$$

wenn wir unter η_ω die Flächendichte der wahren Elektrizität verstehen.

Die Gesetze der Elektrostatik werden also durch die Bewegung der Materie nicht geändert, wenn man Größen höherer Ordnung vernachlässigt. Zu demselben Satze führt auch die Lorentz'sche Theorie;¹ auf die vernachlässigten Glieder erstreckt sich die Übereinstimmung natürlich auch hier nicht. Dieselben entziehen sich jedoch jeglicher experimentellen Prüfung.

Eine wesentliche Abweichung von den üblichen Anschauungen ist, dass wir gezwungen waren, die Dichte der wahren Elektrizität in einem homogenen Körper gleich Null zu setzen. Da wir aber bisher nur die absoluten Nichtleiter behandelt haben, glaube ich nicht, dass man dadurch mit der Erfahrung

¹ L. c. S. 38.

in Widerspruch geräth, wenn man das Vorkommen wahrer Elektrizität auf die Grenzflächen beschränkt. Sonst müsste man sich mit der atomistischen Inhomogenität der Materie helfen, d. h. man müsste sich die wahre Elektrizität an die Oberfläche der Molecüle gebunden denken, wodurch man allerdings wieder auf die Ionenhypothese käme, mit welcher die hier vorgetragene Theorie ja durchaus nicht in Widerspruch steht.

Die ponderomotorischen Kräfte, welche z. B. elektrisch geladene Körper aufeinander ausüben, liefert die Theorie der Elektrizität im ruhenden Körper gewissermaßen auf einem Umwege, durch Betrachtung der Abhängigkeit der Energie von der gegenseitigen Lage der Körper. Dieselben Betrachtungen müssen auch hier zum Ziele führen. Das Hamilton'sche Princip muss aber, sowie wir es hier angewendet haben, diese Kräfte (durch eine allgemeinere Variation) direct ergeben. Desgleichen muss es auch die Kräfte liefern, mit denen die Materie auf den Äther wirkt. Diese Fragen hoffe ich in einer späteren Abhandlung behandeln zu können.

Lampa, A., Über einen Beugungsversuch mit elektrischen Wellen. (Mit 3 Textfiguren.)	— K 80 h
Lang, V. v., Magnetische Orientierung einer Anzahl einaxiger Krystalle	— K 30 h
— Über longitudinale Töne von Kautschukfäden.	— K 10 h
Lecher, E., Einige Versuche mit dem Wehnelt-Interruptor. (Mit 5 Textfiguren.)	— K 30 h
— Über einen theoretischen und experimentellen Trugschluss in der Electricitätslehre. (Mit 11 Textfiguren.)	— K 80 h
Lenard, P., Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht. (Mit 2 Textfiguren.)	— K 40 h
Ludwig, R., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Electricität. IV. Über eine während der totalen Sonnenfinsternis vom 22. Jänner 1898 ausgeführte Messung der atmosphärischen Electricität. (Mit 1 Tafel.)	— K 40 h
Mach, L. und Schumann, V., Über ein neues Spiegelmetall und dessen optische Untersuchung. (Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.)	— K 90 h
Mache, H., Über die Temperaturverhältnisse in der Flamme. (Mit 1 Textfigur.)	— K 20 h
Mazelle, E., Zur täglichen Periode und Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit.	— K 70 h
Meyer, St., Über die magnetischen Eigenschaften der Elemente.	— K 80 h
— Über Krystallisation im magnetischen Felde. (I. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.)	— K 40 h
— Volumenometrische Bestimmung des specifischen Gewichtes von Yttrium, Zirkonium und Erbium. (Mit 1 Textfigur.)	— K 10 h
— Magnetisierungszahlen anorganischer Verbindungen. (Mit 1 Tafel.)	— K 70 h
Nabl, J., Über den Widerstand strömender Elektrolyte. (Mit 2 Textfiguren.)	— K 50 h
Oekinghaus, E., Das ballistische Problem auf Grundlage der Versuche der Integrabilität (äussere Ballistik.) (Mit 1 Tafel.)	— K 70 h
Pfaundler, L., Über den Begriff und die Bedingungen der Convergenz und Divergenz bei den Linsen. (Mit 2 Tafeln.)	— K 50 h
Przibram, K., Beiträge zur Kenntnis des verschiedenen Verhaltens der Anode und Kathode bei der elektrischen Entladung. (Mit 1 Doppeltafel.)	— K 80 h
Radaković, M., Über die Bewegung einer Saite unter der Einwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkte. (Mit 7 Textfiguren.)	— K 80 h
Scheimpflug, Th. und Holler, M., Temperaturmessungen im Quecksilberbergwerk von Idria. (Mit 1 Karte.)	— K 20 h
Schicht, F., Das äussere elektrische Feld einer Entladungsröhre. (Mit 16 Textfiguren.)	— K 70 h
Schweidler, E., R. v., Über die lichtelektrischen Erscheinungen. (II. Mittheilung.) (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)	— K 40 h
— Zur Theorie unipolarer Gasentladungen. (Mit 2 Textfiguren.)	— K 20 h
Smoluchowski, Ritter v. Smolan, M., Weitere Studien über den Temperaturprung bei Wärmeleitung in Gasen. (Mit 2 Textfiguren.)	— K 40 h
Sterneck, R. v., Untersuchungen über den Zusammenhang der Schwere unter der Erdoberfläche mit der Temperatur.	— K 20 h
Tuma, J., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Electricität. III. Luftelectricitätsmessungen im Luftballon. (Mit 9 Textfiguren.)	— K 60 h
Tumlirz, O., Mechanische Erklärung der Verdünnungswärme von Lösungen.	— K 30 h
— Die Zustandsgleichung des Wasserdampfes.	— K 80 h
— Die beiden specifischen Wärmen des Wasserdampfes.	— K 50 h
Walfaschek, R., Die Entstehung der Scala. (Mit 4 Tafeln, 1 Textfigur und einer Tabelle.)	— K 50 h
Wegscheider, R., Über die Dissociation der Gase bei constantem Drucke und bei Übersättigung. (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)	— K 30 h
— Über die Dissociation des Calciumcarbonats in einem Kohlensäuregemisch. (Mit 1 Textfigur.)	— K 80 h

Aus den Denkschriften 68. Bd. (1899).

Edler, J. M. und Valenta, E., Das Spectrum des Chlors. (Mit 1 Doppeltafel, 2 Tafeln und 3 Textfiguren.)	— 3 K — h
— Das Spectrum des Broms. (Mit 1 Doppeltafel, 2 Tafeln und 2 Textfiguren.)	— 2 K 20 h
— Normalspectren einiger Elemente zur Wellenlängebestimmung im äussersten Ultraviolett. (Mit 1 Doppeltafel und 3 Tafeln.)	— 3 K 90 h

Aus den Sitzungsberichten 109. Bd. (1900).

Abegg, R. und Immerwahr, Cl., Über den Einfluss des Bindemittels auf den photochemischen Effect in Bromsilberemulsionen und die photochemische Induction.—	— K 20 h
Beardorf, H., Notiz über die photoelektrische Empfindlichkeit des Eisens.	— K 10 h
— Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Electricität. VI. Über die Störungen des normalen atmosphärischen Potentialgefälles durch Bodenerhebungen. (Mit 1 Textfigur.)	— K 40 h

Czermak, P., Zur Structur und Form der Hagelkörner. (Mit 3 Textfiguren.) . . .	K 30 h
— Eine neue Beobachtungsmethode für Luftwirbelringe. (Mit 5 Textfiguren.)—	K 50 h
Eder, J. M., System der Sensitometrie photographischer Platten. (II. Abhandlung.) (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.) . . .	K 30 h
Emich, F., Zur Empfindlichkeit der Spectralreactionen.	K 10 h
— Über explosive Gasgemenge. (III. Mittheilung über die Entzündlichkeit von dünnen Schichten explosiver Gasgemenge.) (Mit 1 Textfigur.) . . .	K 40 h
Exner, F. und Haschek, E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XVIII. Mittheilung.)	1 K 20 h
Exner, F. M., Messungen der täglichen Temperaturschwankungen in verschiedenen Tiefen des Wolfgangsees. (Mit 3 Textfiguren.)	K 50 h
Exner, K., Zur Beziehung zwischen den atmosphärischen Strömungen und der Scintillation.	K 30 h
Haschek, E., Druck und Temperatur im elektrischen Funken. (Mit 1 Textfigur.)—	K 30 h
Jäger, G., Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase. (II. Mittheilung.) (Mit 2 Textfiguren.)	K 20 h
— Über Longitudinalschwingungen in Stäben. (Mit 2 Textfiguren.)	K 30 h
Jaumann, G., Zur Theorie der Lösungen. (Mit 3 Textfiguren)	K 90 h
Klemenčić, I., Untersuchungen über permanente Magnete. III. Studien über die Constanz permanenter Magnete. (Mit 2 Textfiguren.)	K 70 h
— Untersuchungen über permanente Magnete. IV. Bemerkungen über die Abnahme des Momentes.	K 20 h
Krüse, K., Über die Änderung des Momentes eines Magnetes durch Erschütterung, sowie durch Abreißen und Abziehen von weichem Eisen.	K 40 h
Lampa, A., Eine Studie über den Wehnelt'schen Unterbrecher. (Mit 1 Textfigur.)—	K 30 h
Mache, H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. V. (Beobachtungen in Indien und Oberägypten.) (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.)	K 90 h
— Über die Regenbildung.	K 10 h
Meyer, St., Über Atommagnetismus und Molecularmagnetismus.	K 10 h
— Bestimmung einiger Magnetisierungszahlen. (Mit 1 Textfigur.)	K 20 h
— Über die Additivität der Atomwärmen.	K 10 h
— und Schweidler, E., R. v., Über Radium- und Poloniumstrahlung. (Mit 2 Tafeln und 3 Textfiguren.)	K 80 h
Müller-Erbach, W., Versuche über die Wirkungsart und die Wirkungsweise einer Molecularkraft.	K 40 h
Oekinghaus, E., Das ballistische Problem auf Grundlage der Versuche und der Integrabilität (innere Ballistik). (Mit 1 Tafel.)	2 K 80 h
Prodinger, M., Über die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten eines Magnetes vom Momente.	K 40 h
Przibram, K., Vorläufige Mittheilung über die photographische Aufnahme der elektrischen Entladung auf rotierenden Films. (Mit 2 Textfiguren.)	K 10 h
Puschl, K., Über die spezifische Wärme von Lösungen.	K 30 h
Radaković, M., Über eine neue Methode zur Bestimmung von Geschossgeschwindigkeiten. (Mit 1 Textfigur.)	K 20 h
— Über den Verlauf der Geschwindigkeit eines Projectils in der Nähe der Gewehrmündung. (Mit 1 Textfigur.)	K 40 h
Schwarzschild, K., Über die photographische Vergleichung der Helligkeit verschiedenfarbiger Sterne.	K 20 h
Schweidler, E., v., Über das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgange eines elektrischen Stromes. (Mit 1 Textfigur.)	K 20 h
Streintz, F., Über die elektrische Leitfähigkeit von gepressten Pulvern. (I. Mittheilung.) Die Leitfähigkeit von Platinmohr, amorphem Kohlenstoff und Graphit. (Mit 2 Textfiguren.)	K 50 h
Tumlirz, O., Das Compressibilitätsgesetz der Flüssigkeiten.	K 30 h
Wegscheider, R., Über die allgemeinste Form der Gesetze der chemischen Kinetik homogener Systeme. (Mit 1 Tafel.)	1 K 80 h