

Hasenöhrl F.

*Herrn D. E. Haschek
freundschaftlich*

Überreicht vom Verfasser.

Über die Veränderung der Dimensionen der
Materie infolge ihrer Bewegung durch den
Äther

von

Dr. Fritz Hasenöhrl.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Februar 1904.)

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CXIII. Abt. II a. März 1904.

WIEN, 1904.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI

IN KOMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Druckschriften

der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe).

Periodische Publicationen.

[Physik.]

Aus den Denkschriften 68. Bd. (1899).

- Eder, J. M. und Valenta, E., Das Spectrum des Chlors. (Mit 1 Doppeltafel, 2 Tafeln und 3 Textfiguren.) 3 K — h
— Das Spectrum des Brom. (Mit 1 Doppeltafel, 2 Tafeln und 2 Textfiguren.) 2 K 20 h
— Normalspectren einiger Elemente zur Wellenlängebestimmung im äussersten Ultraviolett. (Mit 1 Doppeltafel und 3 Tafeln.) 3 K 90 h

Aus den Denkschriften, 70. Bd. (1901).

- Koss K. und Thun-Hohenstein E., Graf, Kimmtiefen-Beobachtungen zu Verudella. (Mit 13 Tafeln und 6 Textfiguren.) 7 K 90 h

Aus den Sitzungsberichten, 110. Bd. (1901).

- Bromer A., Bestimmung einiger Refractionsäquivalente — K 40 h
Eder J. M., System der Sensiometrie photographischer Platten. (III. Abhandlung.) (Mit 3 Textfiguren.) — K 60 h
Exner F., Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Electricität. VII. Über die tägliche Periode der Luftelectricität. (Mit 3 Textfiguren.) — K 40 h
Exner F. und Haschek E., Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente (XIX. Mittheilung, enthaltend das Spectrum von Ho.) — K 60 h
— Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XX. Mittheilung.) (Mit 1 Textfigur.) — K 50 h
Geitler J., v., Über die durch Kathodenstrahlen bewirkte Ablenkung der Magnetnadel. (Mit 3 Textfiguren.) — K 20 h
Haschek E., Spectralanalytische Studien. (I. Mittheilung.) (Mit 1 Textfigur.) — K 50 h
Hasenöhrl F., Über das Gleichgewicht eines elastischen Kreiscylinders. — K 30 h
Hasslinger R., v., Über Potentialdifferenzen in Flammgasen und einigen festen Elektrolyten. (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h
Hlawati F., Eine experimentelle Prüfung der Clausius-Mosottischen Formel. (Mit 3 Textfiguren.) — K 70 h
Indra A., Studien über die Wirbelbewegungen. (Mit 16 Textfiguren.) — K 90 h
Jäger G., Die Energie der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeitsmolekeln. — K 20 h
— Über das elektrische Feld eines ellipsoidischen Leiters. — K 20 h
Klemencic I., Über den Einfluss der Härtungsnachwirkungen auf die Abnahme des magnetischen Momentes. — K 20 h
— Über die Beziehung zwischen Permeabilität und magnetischer Nachwirkung. — K 30 h
Lampa A., Über Stromunterbrechung, mit besonderer Berücksichtigung des Wehnelt'schen Unterbrechers. (Mit 2 Textfiguren.) — K 40 h
Lerch Fr., v., Über die Abhängigkeit der Polarisation von Stromdichte und Temperatur. (Mit 4 Textfiguren.) — K 70 h
Mache H., Eine Beziehung zwischen der specifischen Wärme einer Flüssigkeit und der ihres Dampfes. — K 10 h
— Über die Zerstreung der Electricität in abgeschlossener Luft. — K 20 h
Meyer St., Magnetisierungszahlen seltener Erden. — K 40 h
Müller-Erzbach W., Das Messen des Dampfdruckes durch Verdunstung. — K 40 h
Obermayer A., v., Die Veränderlichkeit der täglichen Barometer-Oscillation auf dem Hohen Sonnblick im Laufe des Jahres. (Mit 3 Tafeln und 3 Textfiguren.) 2 K — h
— Ein Satz über den schiefen Wurf im luftleeren Raume. (Mit 1 Textfigur.) — K 20 h
Przibram K., Photographische Studien über die elektrische Entladung. — K 10 h
Radakowic M., Bemerkungen zur Theorie des ballistischen Pendels. — K 20 h
Stanzel K., Über die Diffusion in sich selbst. (Mit 2 Textfiguren.) — K 40 h
Tumlirz O., Compressibilität und Cohäsion der Flüssigkeiten. — K 30 h
Wassmuth A., Das Restglied bei der Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten. — K 60 h

Über die Veränderung der Dimensionen der Materie infolge ihrer Bewegung durch den Äther

von

Dr. Fritz Hasenöhrl.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Februar 1904.)

Das negative Resultat des bekannten Versuches von Michelson und Morley scheint von vornherein mit der Annahme eines absolut¹ ruhenden Äthers in Widerspruch zu stehen. Man weiß, daß es zur Lösung desselben einer neuen Hypothese bedurfte, die von Lorentz und Fitzgerald aufgestellt wurde, daß nämlich die Dimensionen der ponderablen Materie infolge ihrer Bewegung durch den Äther verändert werden. Und zwar kann diese Annahme am einfachsten folgendermaßen formuliert werden: Die Dimensionen der Materie senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung sind von der Bewegung unabhängig, während die in die Bewegungsrichtung fallende Dimension mit dem Faktor

$$1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (1)$$

zu multiplizieren ist, worin σ der Quotient aus der Geschwindigkeit der Materie durch die des Lichtes, also für den Fall der Erdbewegung nahe 10^{-4} ist.

Im folgenden habe ich nun versucht, dieser Annahme von Lorentz und Fitzgerald vom Standpunkte der Thermodynamik näher zu treten. Es läßt sich nämlich ein Kreisprozeß

¹ Unter »absolut« soll natürlich nur »in Bezug auf die Fixsterne« gemeint sein.

mit bewegter Materie angeben, dessen Resultat nicht ohne weiteres mit dem zweiten Hauptsatze in Übereinstimmung gebracht werden kann; zu dessen Erklärung also eine neue Hypothese nötig ist. Eine solche Hypothese, welche auch den Widerspruch vollkommen löst, ist die eben erwähnte Annahme von Lorentz und Fitzgerald. Es ist natürlich unmöglich, zu beweisen, daß diese Annahme die einzige ist, welche die Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatze wiederherzustellen im stande ist; da sie aber auch das Resultat des Versuches von Michelson und Morley vollständig zu erklären vermag, verdient sie wohl vor allen anderen etwa möglichen beachtet zu werden.

Wir stellen uns also im folgenden auf den Standpunkt der Hypothese eines absolut ruhenden Äthers. Da wir nur mit Reflexion an einem bewegten Spiegel (nicht etwa auch mit Brechungen) zu tun haben werden, brauchen wir keine weitere Annahme zu machen. Die Gesetze der Reflexion lassen sich ja in diesem Falle rein geometrisch ableiten. Wir unterscheiden nach dem Vorgange von Lorentz¹ zwischen absoluter und relativer Strahlenrichtung oder zwischen absoluten und relativen Strahlen schlechtweg und verstehen unter letzteren die Strömungsrichtung der Energie, wie sie ein Beobachter wahrnimmt, der mit der Materie fortschreitet. Es ist nun von verschiedenen Autoren² gezeigt worden, daß die Relativstrahlen dem gewöhnlichen Reflexionsgesetze gehorchen, wenn man die Genauigkeit auf die erste Potenz der Größe σ beschränkt. Es läßt sich jedoch leicht beweisen, daß in den Fällen, die im folgenden vorkommen, dieses Reflexionsgesetz der Relativstrahlen vollkommen streng richtig ist. Und zwar sind dies die Fälle, daß sich der Spiegel entweder senkrecht zu seiner Ebene oder in seiner Ebene bewegt. Um den Gang der vorliegenden Abhandlung nicht aufzuhalten, werde ich den Beweis dieses Satzes erst in einem Anhange führen.

¹ H. A. Lorentz, De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux. Arch. Néerl., T. XXI, p. 106 (1886) (siehe etwa auch Drude, Lehrbuch der Optik, p. 433).

² Siehe etwa H. A. Lorentz, l. c., p. 109.

1.

Wir betrachten einen zylindrischen, durch nach innen vollkommen spiegelnde Flächen abgeschlossenen Raum. Die eine Basisfläche desselben sei von einem gleichfalls zylindrischen, vollkommen schwarzen Körper K besetzt. Der übrigbleibende Teil R des erwähnten Raumes habe die Höhe D und sei ganz frei von ponderabler Materie. Wir nehmen vorerst an, daß sich das ganze System in absoluter Ruhe befinde und fragen uns nach der Dichte der strahlenden Energie im leeren Raume R .¹

Das Element df der Oberfläche von K strahlt in einer Richtung, die mit der Normalen Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ einschließt, in der Zeiteinheit die Energiemenge

$$dE = df \cdot i \cos \varphi \cdot 2\pi \sin \varphi d\varphi$$

aus. Hierin ist i eine Konstante, die mit dem Emissionsvermögen e des schwarzen Körpers in dem Zusammenhange

$$e = 2\pi i \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi i$$

steht. Die Energiemenge dE muß nun den Weg $2D/\cos \varphi$ zurücklegen, ehe sie wieder von K absorbiert wird. Während der Zeit

$$\tau = \frac{1}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{2D}{\cos \varphi}$$

befindet sie sich also in R . Der gesamte Energieinhalt von R ist also

$$\begin{aligned} \int df \int dE \cdot \tau &= \int df \int_0^{\pi/2} 2\pi i \sin \varphi \cos \varphi \tau d\varphi \\ &= \frac{4\pi i D}{\mathfrak{B}} \cdot \int df. \end{aligned}$$

¹ Siehe Boltzmann, Wied. Ann., 22, p. 31; W. Wien, Wied. Ann., 52, p. 140.

Die Energiedichte in R erhalten wir, wenn wir diese Größe durch das Volumen von R , also durch $D \int df$ dividieren; sie ist also gleich:¹

$$\varepsilon = \frac{4\pi i}{\mathfrak{B}} = \frac{4e}{\mathfrak{B}}.$$

(Der Weg der Strahlen, welche erst nach mehrmaliger Reflexion wieder an die Oberfläche von K gelangen, hängt in gleicher Weise vom Winkel φ ab; diese Strahlen ändern also nichts am Resultate.)

Wir nehmen nun an, daß sich das betrachtete materielle System mit der Geschwindigkeit p in der Richtung der Zylinderachse bewege und wollen nun für diesen Fall die Dichte der Energie in R berechnen. Würde der in R enthaltene Äther die Bewegung mitmachen, so würde sich nichts ändern. Da derselbe jedoch, wie wir annehmen, in absoluter Ruhe ist, nimmt die oben mit τ bezeichnete Zeit einen anderen Wert an.

Es ist jetzt zweckmäßig, unseren Betrachtungen die relativen Strahlen zu Grunde zu legen. Die absolute Geschwindigkeit der Strahlen ist nach allen Richtungen gleich \mathfrak{B} . Die relative Geschwindigkeit, bezogen auf das sich mit der Geschwindigkeit $+p$ bewegendes System ist daher:

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - p,$$

wobei die Subtraktion natürlich in geometrischem Sinne zu verstehen ist. Den algebraischen Betrag von \mathfrak{B}' berechnen wir leicht, wenn wir die neben-

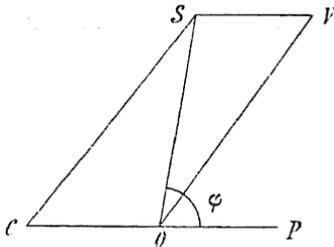


Fig. 1.

stehende Fig. 1 zu Hilfe nehmen. Sei O ein Erregungszentrum; OP sei die Richtung der absoluten Bewegung der Materie. Dann ist die (relative) Geschwindigkeit \mathfrak{B}' eines Relativstrahles gegeben als die Resultierende der Geschwindigkeiten $OC = -p$ und $OV = \mathfrak{B}$.

¹ Siehe W. Wien, 1. c.

Es bestimmt sich also $OS = \mathfrak{B}'$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}'^2 + p^2 + 2\mathfrak{B}'p \cos \varphi.$$

Also wird

$$\mathfrak{B}' = -p \cos \varphi \pm \sqrt{\mathfrak{B}^2 - p^2 \sin^2 \varphi},$$

worin das obere Zeichen zu wählen ist. Setzen wir wieder

$\frac{p}{\mathfrak{B}} = \sigma$, so wird

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} [\sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 \varphi} - \sigma \cos \varphi].$$

Da die Bewegungsrichtung unseres Systems mit der Normalen zur Oberfläche von K zusammenfällt, ist diese Größe \mathfrak{B}' auch die relative Geschwindigkeit eines Strahles, der, von einem Flächenelement ausgesendet, mit der Normalen den Winkel φ einschließt. Ein solcher Strahl braucht also die Zeit $\frac{1}{\mathfrak{B}' \cos \varphi} \frac{D}{\cos \varphi}$, um an die gegenüberliegende Seite von R zu gelangen. Dort fällt er unter dem (gleichen) Einfallswinkel φ auf und wird, da das Reflexionsgesetz für Relativstrahlen unverändert gilt, unter demselben Winkel φ reflektiert. Der reflektierte Strahl hat den Weg $\frac{D}{\cos \varphi}$ zurückzulegen, um wieder an die Oberfläche von K zu kommen. Da er aber mit der Richtung von p den Winkel $180^\circ - \varphi$ einschließt, ist seine Geschwindigkeit

$$\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B} [\sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 \varphi} + \sigma \cos \varphi].$$

Es ist also die Zeit, welche ein solcher Strahl braucht, um von der Oberfläche von K ausgehend, nach ein- (oder mehr-) maliger Reflektion wieder nach K zu gelangen, jetzt:

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{D}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{\mathfrak{B}'} + \frac{1}{\mathfrak{B}''} \right) \\ &= \frac{D}{\mathfrak{B} \cos \varphi} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 \varphi} - \sigma \cos \varphi} + \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 \varphi} + \sigma \cos \varphi} \right] \\ &= \frac{2D}{\mathfrak{B} \cos \varphi} \frac{\sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \sigma^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

(Wie man leicht einsieht, ist es auch hier für die Größe dieser Zeit ohne Einfluß, ob der Strahl ein- oder mehrmals zur Reflexion kommt.)

Der Energieinhalt des Raumes R ist also jetzt

$$= 2\pi i \int df \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin \varphi \cos \varphi \tau'. \quad (3)$$

Man könnte allerdings vorerst zweifeln, ob es auch hier gestattet ist, die Größe i als konstant anzusehen, mit anderen Worten, ob das Lambert'sche Cosinusgesetz bei einem bewegten Körper für den relativen Strahlengang richtig ist. Es wird aber die gegenseitige Zustrahlung zweier Flächenelemente, welche dieselbe absolute Bewegung haben, also relativ gegeneinander ruhen, durch den relativen Strahlengang gegeben. Sind die beiden Elemente schwarz und von gleicher Temperatur, so fordert der zweite Hauptsatz, daß sich die beiden Elemente gleich viel Energie zustrahlen — und dies ist für jede mögliche Orientierung der beiden Flächenelemente gegen ihre Verbindungslinie nur möglich, wenn das Lambertsche Gesetz für den relativen Strahlengang gilt. Um diesen Beweis präziser zu führen, könnte man sich etwa derselben Überlegungen bedienen, die Drude¹ verwendet, um das genannte Gesetz für ruhende Körper zu beweisen. Man kann sich das dort durch Fig. 108 gegebene System in gleichmäßiger Translation begriffen denken. Dieselbe wird an der Schlußweise nichts ändern, wenn man jetzt unter »Strahlen« die relativen Strahlen versteht.²

¹ Lehrbuch der Optik, p. 455.

² Es kann demnach auch die Erdbewegung keinen Einfluß auf die gegenseitige Zustrahlung zweier Flächenelemente haben, was übrigens auch von den elektrischen Theorien, allerdings nur bis auf Größen erster Ordnung gefordert wird. (Siehe H. A. Lorentz, Versl. k. Akad. van Wet., X, p. 80+ [1902]; A. H. Bucherer, Drude Ann. XI, p. 270 [1903]). — Gl. (3) gibt die Energiemenge an, welche vom schwarzen Körper geliefert wird; außer derselben kann es noch in R Strahlungsenergie geben, die aus mechanischer Arbeit gewonnen ist und sich wieder in solche verwandelt. Dieselbe kommt für das folgende nicht in Betracht. Ich hoffe übrigens demnächst eine Studie darüber veröffentlichen zu können. (Anm. b. d. Korrektur.)

Setzen wir nun in (3) für τ' seinen Wert aus (2) ein, dividieren durch das Volumen des Raumes R , also durch $D \int df$, so erhalten wir die Dichte der Energie dortselbst:

$$\frac{4\pi i}{\mathfrak{B}} \frac{1}{1-\sigma^2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin \varphi \sqrt{1-\sigma^2 \sin^2 \varphi}.$$

Wir setzen diesen Ausdruck gleich $\frac{4\pi i}{\mathfrak{B}} \cdot \kappa = \frac{4e}{\mathfrak{B}} \kappa = \varepsilon \kappa$; dann ist also

$$\kappa = \frac{1}{1-\sigma^2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin \varphi \sqrt{1-\sigma^2 \sin^2 \varphi}$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$\kappa = \frac{1}{2(1-\sigma^2)} + \frac{1}{4\sigma} \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma}. \quad (4)$$

Wenn σ sehr klein gegen 1 ist und wir uns auf die Glieder von der Ordnung σ^2 beschränken, so wird

$$\kappa = 1 + \frac{2}{3} \sigma^2. \quad (5)$$

Die Größe (4) hat nur dann eine reelle Bedeutung, wenn $\sigma < 1$ ist und läßt sich dann stets in eine Reihe entwickeln, die nach geraden Potenzen von σ fortschreitet. Um diesen Faktor wird also die Dichte der Energie in R infolge der Bewegung geändert.

(Man kann sich diesen Wert von κ auch durch die folgende, allerdings nicht strenge Betrachtung plausibel machen. Denken wir uns die gesamte Strahlung in R nach drei zueinander senkrechten Richtungen zerlegt, von denen die eine mit der Richtung der Bewegung zusammenfallen möge. Die Strahlung in der letztgenannten Richtung, also ein Drittel der gesamten, braucht zum Hin- und Hergang über die Strecke D die Zeit

$$\frac{D}{\mathfrak{B}-p} + \frac{D}{\mathfrak{B}+p} = \frac{2D}{\mathfrak{B}} (1+\sigma^2);$$

ihre Dichte wird also um den Faktor $(1+\sigma^2)$ vermehrt. Die Strahlung senkrecht zur Bewegungsrichtung, also zwei Drittel

der gesamten, braucht zum Hin- und Hergange durch den Raum R die Zeit

$$\frac{2l}{\mathfrak{g}} \left(1 + \frac{1}{2} \sigma^2 \right),$$

wo l die betreffende Querdimension von R ist. Und zwar führt zu diesem Werte eine Überlegung, welche auch bei der Theorie des Versuches von Michelson und Morley anzustellen ist.¹

Die Dichte dieser Energie wird also um den Faktor $1 + \frac{1}{2} \sigma^2$ vermehrt. Die Dichte der gesamten Energie ist also jetzt:

$$\frac{1}{3} \varepsilon (1 + \sigma^2) + \frac{2}{3} \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) = \varepsilon \left(1 + \frac{2}{3} \sigma^2 \right),$$

in Übereinstimmung mit (5.).

Die nächste Frage, die wir uns stellen wollen, ist die nach dem Drucke der Strahlung in dem bewegten Raume R . Um den Wert desselben abzuleiten, können wir denselben Weg einschlagen, den Boltzmann,² die Methode Bartolis³ präzisierend, angegeben hat, um den Druck der Strahlung in einem ruhenden Raume zu berechnen. Wir denken uns also einen zylindrischen Raum, dessen Basisflächen durch zwei schwarze Körper verschiedener Temperatur gebildet werden und der nach außen durch vollkommene Spiegel abgeschlossen sei; das Innere dieses Raumes sei durch zwei aufklappbare und relativ zu den Basisflächen des Zylinders verschiebbare Spiegel in drei Zwischenräume geteilt. Denken wir uns jetzt dieses ganze System in der Richtung der Zylinderachse mit konstanter Geschwindigkeit bewegt; denken wir uns ferner einen auf dem bewegten System befindlichen Beobachter, der ohne Kenntnis von der Bewegung den Bartoli-Boltzmannschen Kreisprozeß abspielen läßt, so wird derselbe genau zu demselben Resultate gelangen müssen, wie wenn das ganze System in absoluter Ruhe wäre, d. h. der Strahlungsdruck muß auch hier gleich sein dem Drittel der Strahlungsdichte, ganz unabhängig davon,

¹ H. A. Lorentz, De l'influence du mouvement de la terre... Arch. Néerl., XXI, 1886, p. 174; oder auch Drude, Optik, p. 439.

² Wied. Ann., 22, p. 294.

³ Exners Repertorium der Physik, 21, p. 198.

wie die gedrückte Fläche in Bezug auf die Richtung der absoluten Bewegung liegt; der Druck hat also dann den Wert

$$\frac{1}{3} \kappa \varepsilon.$$

Gegen diese Schlußweise könnte allerdings vielleicht das Bedenken erhoben werden, daß bei Veränderung des Volumens eines in absoluter Bewegung begriffenen, von Strahlung erfüllten Hohlraumes auch die Arbeit anderweitiger (reaktionsloser) Kräfte ins Spiel kommen kann. Jedenfalls kann sich aber der Druck nur um Glieder von der Ordnung σ^2 von seinem Werte in einem ruhenden Raume und daher auch von $\frac{1}{3} \kappa \varepsilon$ unterscheiden. (Das Vorzeichen von σ kann keine Rolle spielen.) Da wir nun im folgenden (§ 3) nur mit Volumsveränderungen von der Ordnung σ^2 zu tun haben werden, ist das Resultat gewiß bis auf Größen von der Ordnung σ^2 einschließlich richtig. Und darauf kommt es wohl hauptsächlich an.

Es ist zu erwähnen, daß der eben deduzierte Wert $\frac{1}{3} \kappa \varepsilon$ nichts mit dem zu tun hat, was man gewöhnlich unter dem Drucke auf einen bewegten Spiegel versteht und welcher von Thiesen¹ untersucht worden ist. Bei der Berechnung des letzteren hat man von der Annahme auszugehen, daß die Strahlung nach allen Richtungen im absoluten Sinne gleichmäßig verteilt ist, während ja wir im Gegenteile zum Resultate kamen, daß innerhalb des Raumes R die Strahlung bezüglich der relativen Richtung gleichmäßig verteilt ist.

2.

Wir denken uns nun ein System, wie es durch Fig. 2 charakterisiert ist und das dem System ganz ähnlich ist, das wir eben nach Bartoli und Boltzmann betrachtet haben. Ein zylindrischer, nach außen durch vollkommene Spiegel abgeschlossener Raum, an dessen Basisflächen zwei schwarze Körper K und L befindlich sind. Ferner zwei vollkommene Spiegel s_1 und s_2 , die wir ohne Arbeitsleistung entfernen oder mit einem Loch versehen können. Der Kürze wegen werden

¹ M. Thiesen, Verh. der Deutschen physik. Gesellsch., 1901, p. 177.

wir nur sagen, der Spiegel s_1 oder s_2 werde geöffnet oder geschlossen.

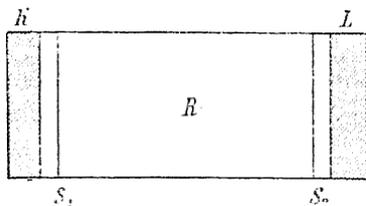


Fig. 2.

Der Querschnitt des Zylinders habe den Flächeninhalt 1; der Abstand der Spiegel s_1 und s_2 sei D . Den Zwischenraum zwischen K und s_1 sowie den zwischen L und s_2 habe ich nur eingeführt, um den Druck der Strahlung auf beide Seiten der Spiegel genau definieren zu

können; die Größe desselben ist belanglos. Am einfachsten ist es, wenn wir annehmen, daß das Volumen dieser Räume so klein sei, daß es gegen das Volumen des Raumes R zwischen s_1 und s_2 vernachlässigt werden könne.

Ferner sei das Emissionsvermögen von K gleich e_1 , das von L gleich e_2 , und zwar sei $e_2 > e_1$, also auch die Temperatur von L größer als die von K .

Der ganze Raum zwischen K und L sei ganz frei von ponderabler Materie. Wenn daher das ganze System ruht, so herrscht in dem Raume, der mit K in Verbindung steht, die Energiedichte $\frac{4e_1}{\mathfrak{B}} = \varepsilon_1$, in dem Raume, der mit L in Verbindung steht, die Energiedichte $\frac{4e_2}{\mathfrak{B}} = \varepsilon_2$.

Dieses System wollen wir jetzt einem Kreisprozeß unterziehen. Die einzelnen Stadien desselben sollen sich nur durch die Geschwindigkeit unterscheiden, die wir dem gesamten System erteilen. Die relative Lage der einzelnen Teile des Systems soll immer dieselbe bleiben.

Ist der Wert der Geschwindigkeit des Systems p, p_1, \dots , so sei $\sigma = \frac{p}{\mathfrak{B}}, \sigma_1 = \frac{p_1}{\mathfrak{B}}, \dots$; ebenso soll $\varkappa, \varkappa_1, \dots$ die durch Gleichung (4), respektive (5) gegebene Bedeutung haben; wenn wir Größen von der Ordnung σ^4 vernachlässigen, soll also $\varkappa = 1 + \frac{2}{3}\sigma^2, \varkappa_1 = 1 + \frac{2}{3}\sigma_1^2, \dots$ sein.

Wir wollen also unser System den folgenden Kreisprozeß durchlaufen lassen; behufs leichter Übersicht füge ich die beifolgende Tabelle bei:

	p	s_1	s_2	Energiedichte in R	K	L
					gibt die Wärmemenge ab	
Anfang	0	o.	z.	ε_1	—	—
I.	p_1	o.	z.	$\varepsilon_1 \kappa_1$	$D\varepsilon_1(\kappa_1 - 1)$	—
II.	p_2	z.	z.	$\varepsilon_1 \kappa_1 = \varepsilon_2 \kappa_2$	—	—
III.	p_3	z.	o.	$\varepsilon_2 \kappa_2$	—	$D\varepsilon_2(\kappa_3 - \kappa_2)$
IV.	p_4	z.	z.	$\varepsilon_2 \kappa_2 = \varepsilon_1 \kappa_4$	—	—
V.	0	o.	z.	ε_1	$D\varepsilon_1(1 - \kappa_4)$	—

$$0 < p_1 > p_2 > 0 \quad 0 < p_3 < p_4 > 0$$

Zu Anfang sei das System in absoluter Ruhe; s_1 sei offen, s_2 geschlossen; dann herrscht in R die Energiedichte ε_1 .

I. Wir steigern die Geschwindigkeit des Systems auf den Wert p_1 ; dann herrscht in R die Energiedichte $\varepsilon_1 \kappa_1$; es mußte also K die Wärmemenge $D\varepsilon_1 \kappa_1 - D\varepsilon_1 = D\varepsilon_1(\kappa_1 - 1)$ abgeben.

II. Nun werde auch der Spiegel s_1 geschlossen und die Geschwindigkeit von p_1 auf p_2 vermindert. Die Dichte in R bleibt beständig gleich $\kappa_1 \varepsilon_1$, da ja diesem Raume weder Arbeit noch Wärme zugeführt wird; und zwar werde p_2 so gewählt, daß

$$\kappa_1 \varepsilon_1 = \kappa_2 \varepsilon_2 \quad (6)$$

ist. Während dieses Vorganges wird Wärme weder von K noch von L abgegeben oder empfangen.

III. Da nun in R dieselbe Energiedichte herrscht, wie sie der Emission von L bei der gegebenen Geschwindigkeit entspricht, kann nun s_2 geöffnet werden, ohne daß deswegen irgendwelche Veränderung eintritt. Wir tun dies und verändern hierauf den Wert von p von p_2 auf p_3 . Dabei gibt L die Wärmemenge $D\varepsilon_2(\kappa_3 - \kappa_2)$ ab.

IV. Wir schließen wieder s_2 und lassen die Geschwindigkeit auf den Wert p_4 anwachsen. Ebenso wie bei II bleibt die Energiedichte in R unverändert $\varepsilon_2\kappa_3$; wir wählen p_4 so, daß

$$\varepsilon_2\kappa_3 = \varepsilon_1\kappa_4 \quad (7)$$

ist.

V. Wir können nun wieder s_1 öffnen (ebenso wie s_2 bei Beginn von III) und lassen die Geschwindigkeit wieder auf Null sinken. Ist dies erreicht, so herrscht in R wieder die Energiedichte ε_1 und K muß dazu die (negative) Wärmemenge

$$D\varepsilon_1(1-\kappa_4)$$

abgeben.

Nun ist der Anfangszustand wieder erreicht, der Kreisprozeß geschlossen.

Das Resultat des Kreisprozesses ist, daß K die Wärmemenge

$$Q_1 = D\varepsilon_1(\kappa_1 - 1) + D\varepsilon_1(1 - \kappa_4) = D\varepsilon_1(\kappa_1 - \kappa_4)$$

abgegeben hat und L die Wärmemenge

$$Q_2 = -D\varepsilon_2(\kappa_3 - \kappa_2) = D\varepsilon_2(\kappa_2 - \kappa_3)$$

aufgenommen hat.

Infolge der Gleichungen (6) und (7) sind diese Wärmemengen einander gleich. Da wir über das Verhältnis von p_2 zu p_3 keine Voraussetzung machen mußten, können wir $p_2 > p_3$, also auch $\kappa_2 > \kappa_3$ wählen; dann ist Q_1 (und Q_2) positiv und es ist also eine Wärmemenge vom kälteren Körper K auf den wärmeren L übergegangen, ohne daß sonst irgendeine Veränderung stattgehabt hätte.

Denn unser System befindet sich, wie zu Anfang, in absoluter Ruhe; die auf Erzeugung der notwendigen Geschwindigkeit, respektive lebendigen Kraft verbrauchte Arbeit ist wieder gewonnen worden, also in Summe gleich Null. Es wäre allerdings vielleicht denkbar, daß auf das bewegte System Kräfte gewirkt haben (natürlich im Gegensatze zum Reaktionsprinzip), welche von der Geschwindigkeit abhängen und auf welche die obige Überlegung nicht anwendbar wäre. Da jedoch $Q_1 = Q_2$ ist, hat sich die Gesamtenergie des Systems nicht geändert, es müßte also die Arbeit auch solcher Kräfte in Summe gleich Null sein.

Unser Kreisprozeß führt also auf einen Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatze und wir müssen daher nach einer neuen Annahme zur Lösung desselben suchen.

Eine solche Annahme wäre, daß das Emissionsvermögen e eines schwarzen Körpers caeteris paribus infolge der Bewegung auf den Betrag $\frac{1}{\kappa} e$ sinkt. In der Tat würde dann die Dichte der Energie in einem leeren Raume, der mit dem schwarzen Körper in Verbindung ist, nach außen aber durch vollkommene Spiegel abgeschlossen ist, unabhängig von der Bewegung den Wert $\frac{4e}{\mathfrak{B}} = \varepsilon$ haben und der früher beschriebene Kreisprozeß würde resultatlos verlaufen. Natürlich haben wir festzuhalten, daß diese Änderung das eigentliche Emissionsvermögen trifft und nicht etwa damit etwas zu tun hat, wieviel ein bewegter Körper einem ruhenden Flächenelement zustrahlt oder dergleichen, in welchen Fällen die Abhängigkeit von der Bewegung ja auf der Hand liegt. Eine solche Änderung des Emissionsvermögens ist wohl kaum ohne Änderung des Energieinhaltes des schwarzen Körpers denkbar; und wenn dies der Fall ist, so muß die verlorene Energie doch wo anders auftreten; wenn etwa in Form der Arbeit einer Kraft, die auf den bewegten Körper wirkt, so würde diese Kraft gewiß keine Reaktion erfahren. Und in diesem Falle das Reaktionsprinzip zu leugnen, würde gewiß allen bisher ausgesprochenen Ansichten widersprechen. Diese Gründe scheinen mir die erwähnte Annahme unwahrscheinlich zu machen; zwingend sind sie wohl nicht. Und als unmöglich können wir die obige Hypothese nicht zurückweisen.

3.

Die Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatze läßt sich jedoch, wie in der Einleitung erwähnt, auch durch eine andere Hypothese wieder herstellen; nämlich durch die Hypothese, daß die Dimensionen der Materie von der Bewegung derselben abhängig sind. Am einfachsten ist die Annahme, daß die senkrecht zur Bewegung orientierten Dimensionen unverändert bleiben, die in die Bewegungsrichtung fallenden Dimen-

sionen sich um den Faktor λ ändern, wo λ eine Funktion der Geschwindigkeit ist.

In unserem Falle wird die Länge D sich mit der Geschwindigkeit ändern und in den verschiedenen Stadien unseres Kreisprozesses den Wert $D\lambda, D\lambda_1 \dots$ annehmen, wo $\lambda, \lambda_1 \dots$ immer dieselbe Funktion von $p, p_1 \dots$ ist. In demselben Verhältnisse ändert sich dann natürlich auch das Volumen des Raumes R . Wenn sich also jetzt die Geschwindigkeit ändert, wird die Strahlung auf Veränderung des Volumens eine gewisse Arbeit leisten, die wir mit in Rechnung ziehen müssen. Der Druck der Strahlung ist natürlich nach wie vor gleich einem Drittel der Energiedichte, also gleich $\frac{1}{3} \kappa \varepsilon$. (Die Überlegungen, die wir oben p. 476 anwandten, um diesen Wert abzuleiten, sind auch jetzt, wo λ einen von 1 verschiedenen Wert hat, genau in derselben Weise durchzuführen, da wir ja dort nur mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit zu tun hatten und daher der Wert von λ konstant bleibt.)

Nun wollen wir unser System denselben Kreisprozeß durchlaufen lassen wie früher und das Resultat desselben unter der veränderten Annahme berechnen. Und zwar wollen wir den Prozeß umkehrbar verlaufen lassen, was wir dadurch erreichen können, daß wir die Geschwindigkeit des Systems ganz allmählich ändern. (Allerdings werden wir später sehen, daß diese Maßregel unnötig ist.) Die nachfolgende Tabelle dürfte wieder zur Erleichterung der Übersicht beitragen.

	p	s_1	s_2	Energie- dichte in R	K gibt ab		L gibt ab	
					Wärme	Arbeit	Wärme	Arbeit
A.	0	o.	z.	ε_1	—	—	—	—
I.	p_1	o.	z.	$\kappa_1 \varepsilon_1$	$\varepsilon_1 D (\kappa_1 \lambda_1 - 1)$	$\frac{1}{3} \varepsilon_1 D \int_1^{\lambda_1} \kappa d\lambda$	—	—
II.	p_2	z.	z.	$\kappa_2 \varepsilon_2$	—	—	—	—
III.	p_3	z.	o.	$\kappa_3 \varepsilon_2$	—	—	$\varepsilon_2 D (\kappa_3 \lambda_3 - \kappa_2 \lambda_2)$	$\frac{1}{3} \varepsilon_2 D \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \kappa d\lambda$
IV.	p_4	z.	z.	$\kappa_4 \varepsilon_1$	—	—	—	—
V.	0	o.	z.	ε_1	$\varepsilon_1 D (1 - \kappa_4 \lambda_4)$	$\frac{1}{3} \varepsilon_1 D \int_{\lambda_4}^1 \kappa d\lambda$	—	—

Das Anfangsstadium ist dasselbe wie beim früher betrachteten Prozesse. Das System ruht; s_1 ist offen, s_2 zugegeschlossen.

I. Es werde die Geschwindigkeit allmählich auf den Wert p_1 gebracht. Dann ist die Energiedichte in R ebenso wie früher $\alpha_1 \varepsilon_1$; ferner hat sich das Volumen von R vom Anfangswerte D auf den Betrag $D\lambda_1$ verändert. Der Energieinhalt von R ist also jetzt $\alpha_1 \varepsilon_1 D\lambda_1$; früher war er $\varepsilon_1 D$. Also muß K die Wärmemenge

$$\varepsilon_1 D (\alpha_1 \lambda_1 - 1)$$

abgegeben haben. Da sich ferner das Volumen geändert hat, ist von der Strahlung Arbeit geleistet worden, und zwar im Betrage

$$\int_1^{\lambda_1} D d\lambda \cdot \frac{1}{3} \alpha \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1 D}{3} \int_1^{\lambda_1} \alpha d\lambda,$$

da die Volumsvergrößerung $D d\lambda$, der jeweilige Druck $\frac{1}{3} \alpha \varepsilon_1$ ist. Beide Größen, λ und α , sind Funktionen von p ; wir können aber natürlich auch α als Funktion von λ ansehen und umgekehrt. Das Integral ist von 1 bis λ_1 zu erstrecken, da dies den Werten 0 und p_1 der Geschwindigkeit entspricht. Auch diese Energiemenge muß von K geliefert werden.

II. Wir schließen auch s_1 und verändern die Geschwindigkeit allmählich auf den Wert p_2 . Dann ändert sich auch die Energiedichte in R , da sich einmal das Volumen dieses Raumes ändert und dann bei dieser Änderung auch Arbeit geleistet wird. In einem beliebigen Augenblicke ist das Volumen durch $D\lambda$ gegeben und die Energiedichte kann mit $\alpha \varepsilon$ bezeichnet werden, wo α dem jeweiligen Werte der Geschwindigkeit entspricht, ε dagegen vorläufig unbekannt ist. Also ist der Energieinhalt von R in einem bestimmten Augenblicke gleich $D\lambda \alpha \varepsilon$; die Abnahme desselben ist gleich der geleisteten Arbeit $\frac{1}{3} \alpha \varepsilon D d\lambda$;

also ist

$$d(\lambda \alpha \varepsilon) = -\frac{1}{3} \alpha \varepsilon d\lambda$$

oder

$$\frac{d(\alpha \varepsilon)}{\alpha \varepsilon} = -\frac{4}{3} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Zu Anfang des Vorganges (II) hatten die hier vorkommenden Größen die Werte $\varepsilon_1, \kappa_1, \lambda_1$. Als Endwerte wollen wir $\varepsilon_2, \kappa_2, \lambda_2$ wählen; d. h. wir bestimmen p_2 (und damit κ_2 und λ_2) so, daß ε der Wert ε_2 entspricht. Dann muß also nach obiger Differentialgleichung

$$\log \frac{\kappa_1 \varepsilon_1}{\kappa_2 \varepsilon_2} = -\frac{4}{3} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (8)$$

sein. Es ist also jetzt die Dichte der Energie in R gleich $\kappa_2 \varepsilon_2$.

Weder von K noch von L wurde während dieses Teilprozesses Energie abgegeben.

III. Wir können nun den Spiegel s_2 öffnen, ohne daß dadurch ein Energieaustausch veranlaßt würde. Hierauf verändern wir die Geschwindigkeit auf den Wert p_3 . Jetzt gibt L Energie in Form von Wärme und Arbeit ab, die genau so zu berechnen ist wie die beim Teilprozesse I von K abgegebene Energie. Es ist die abgegebene Wärme:

$$\varepsilon_2 D(\kappa_3 \lambda_3 - \kappa_2 \lambda_2),$$

die geleistete Arbeit:

$$\frac{1}{3} \varepsilon_2 D \cdot \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \kappa d\lambda.$$

IV. Wir schließen den Spiegel s_2 und lassen die Geschwindigkeit allmählich den Wert p_4 annehmen, und zwar werde dieser Wert so bestimmt, daß die Energiedichte in R den Wert $\kappa_4 \varepsilon_1$ erreicht. Da dieser Teilprozeß dem unter II beschriebenen ganz analog ist, schließen wir, daß die Gleichung

$$\log \frac{\kappa_3 \varepsilon_2}{\kappa_4 \varepsilon_1} = -\frac{4}{3} \log \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \quad (9)$$

erfüllt sein muß.

V. Wir können nun ohne weiteres den Spiegel s_1 öffnen; dann lassen wir die Geschwindigkeit wieder auf Null sinken. Dabei gibt K wieder Energie ab, und zwar

$$\varepsilon_1 D(1 - \kappa_4 \lambda_4)$$

an Wärme und

$$\frac{1}{3} \varepsilon_1 D \int_{\lambda_4}^1 \kappa d\lambda$$

an Arbeit.

Das System hat jetzt wieder sein Anfangsstadium erreicht. Der Kreisprozeß ist also geschlossen; und da wir die Geschwindigkeitsänderungen unendlich langsam vor sich gehen lassen, ist der Prozeß auch umkehrbar. Das Resultat ist, daß K die Wärmemenge

$$Q_1 = \varepsilon_1 D (\kappa_1 \lambda_1 - 1) + \frac{1}{3} \varepsilon_1 D \int_1^{\lambda_1} \kappa d\lambda \\ + \varepsilon_1 D (1 - \kappa_4 \lambda_4) + \frac{1}{3} \varepsilon_1 D \int_{\lambda_4}^1 \kappa d\lambda$$

abgegeben hat und L die Wärmemenge

$$-Q_2 = \varepsilon_2 D (\kappa_3 \lambda_3 - \kappa_2 \lambda_2) + \frac{1}{3} \varepsilon_2 D \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \kappa d\lambda$$

gleichfalls abgegeben hat. Wir können auch sagen, K hat die Wärmemenge

$$Q_1 = \varepsilon_1 D (\kappa_1 \lambda_1 - \kappa_4 \lambda_4) + \frac{1}{3} \varepsilon_1 D \int_{\lambda_4}^{\lambda_1} \kappa d\lambda$$

abgegeben und L hat die Wärmemenge

$$Q_2 = \varepsilon_2 D (\kappa_2 \lambda_2 - \kappa_3 \lambda_3) + \frac{1}{3} \varepsilon_2 D \int_{\lambda_3}^{\lambda_2} \kappa d\lambda$$

aufgenommen. Und zwar sind hier auch noch die Gleichungen (8) und (9) zu berücksichtigen, deren Erfüllung für die Umkehrbarkeit unseres Prozesses nötig ist. Lassen wir in ihnen den log weg, so lauten sie:

$$\frac{\kappa_1 \varepsilon_1}{\kappa_2 \varepsilon_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{4/3}, \quad \frac{\kappa_3 \varepsilon_2}{\kappa_4 \varepsilon_1} = \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3} \right)^{4/3}. \quad (10)$$

Wir setzen nun nach dem zweiten Hauptsatze

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

oder wenn wir nach dem Stefan'schen Gesetze e und damit ε der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional annehmen:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{1/4}.$$

Setzen wir hierin die Werte von Q_1 und Q_2 ein, so erhalten wir nach einer einfachen Reduktion:

$$\frac{\kappa_1 \lambda_1 - \kappa_4 \lambda_4 + \frac{1}{3} \int_{\lambda_4}^{\lambda_1} \kappa d\lambda}{\kappa_2 \lambda_2 - \kappa_3 \lambda_3 + \frac{1}{3} \int_{\lambda_3}^{\lambda_2} \kappa d\lambda} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{3/4}$$

oder mit Benützung der Gleichungen (10):

$$= \frac{\kappa_1^{3/4} \lambda_1}{\kappa_2^{3/4} \lambda_2} = \frac{\kappa_4^{3/4} \lambda_4}{\kappa_3^{3/4} \lambda_3}$$

oder ferner

$$= \frac{\kappa_1^{3/4} \lambda_1 - \kappa_4^{3/4} \lambda_4}{\kappa_2^{3/4} \lambda_2 - \kappa_3^{3/4} \lambda_3}.$$

Hieraus können wir weiter schließen, daß das unbestimmte Integral

$$\int \kappa d\lambda = 3\lambda(\kappa^{3/4} - \kappa) + \text{const}$$

sein muß, woraus folgt

$$\kappa = \lambda^{-\frac{4}{3}}; \quad \lambda = \kappa^{-\frac{3}{4}}. \quad (11)$$

(Die auftretende Integrationskonstante braucht nicht beachtet zu werden, da jedenfalls für $\kappa = 1$ auch $\lambda = 1$ sein muß, da diese Werte der Geschwindigkeit Null entsprechen.)

Setzen wir dieses Resultat in die Gleichungen (10) ein, so folgt

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

im Widerspruche mit unserer ersten Voraussetzung, nach der ja den Körpern K und L verschiedene Temperatur und damit verschiedenes Emissionsvermögen zukommen sollte. Mit anderen Worten: Die beiden Teilprozesse II und IV sind nicht imstande,

die Größe ε im Raume R zu verändern. Daraus folgt, daß der betrachtete Kreisprozeß nicht durchführbar ist oder vielmehr zu keinem Resultate führen kann. In Übereinstimmung damit ist, daß für die angegebene Beziehung zwischen κ und λ auch Q_1 und Q_2 verschwinden.

Daraus, daß $Q_1 = Q_2 (= 0)$ ist, folgt auch, daß die Summe der aufgewendeten Arbeit gleich Null sein muß. Von der Arbeit der Kräfte, welche die lebendige Kraft unseres Systems erzeugt und wieder vernichtet haben, war dies von vornherein klar. Wir sehen aber jetzt auch, daß die Arbeit der Molekularkräfte (die bei der Veränderung der Dimensionen der Materie geleistet wurde) und die Arbeit eventueller (reaktionsloser) Kräfte, welche der Äther auf die Materie ausübt, in Summa gleich Null sein muß. Dieser Feststellung zu Liebe habe ich auch die obigen Deduktionen in der vorliegenden umständlichen Weise geführt; wir hätten ja gleich von Anfang an die Bedingung aufsuchen können, daß Q und Q' verschwindet. (Wir hätten dann auch nicht das Stefan'sche Gesetz benützen müssen.)

Durch unsere Annahme von der Veränderung der Dimensionen der Materie sind also alle Widersprüche beseitigt.

Ist die Geschwindigkeit der Materie klein gegen die des Lichtes und vernachlässigen wir die höheren Potenzen von σ einschließlich der vierten, so ist nach Gleichung (11) und (5):

$$\begin{aligned}\lambda &= \left(1 + \frac{2}{3} \sigma^2\right)^{-\frac{3}{4}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sigma^2,\end{aligned}$$

worin wir Ausdruck (1) wiedererkennen.

Die Übereinstimmung mit der Annahme von Lorentz und Fitzgerald ist also eine vollständige.

Anhang.

Über die Reflexion an einem bewegten Spiegel.

Wir konstruieren zuerst nach dem Huyghens'schen Prinzip den reflektierten Strahl im absoluten Strahlengange. Eine Bewegung des Spiegels in seiner Ebene hat hierauf gar keinen Einfluß. Wir haben also hier nur die zur spiegelnden Ebene senkrechte Komponente der Geschwindigkeit p zu berücksichtigen. Dieselbe sei $\xi = \sigma_1 \mathfrak{B}$.

Sei nun (Fig. 3) AD ein Stück der Wellenebene des in der (absoluten) Richtung IA einfallenden Strahles. Der Punkt A

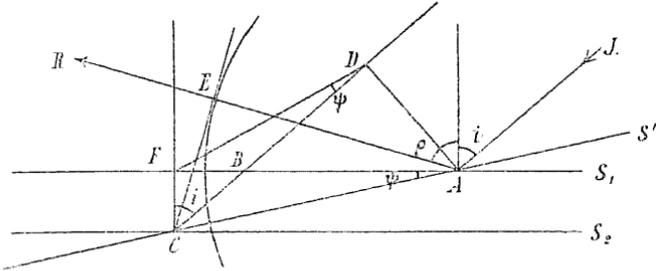


Fig. 3.

der Wellenebene trifft den Spiegel in der Lage S_1 ; der Punkt D trifft ihn erst in der Lage S_2 , etwa in C . Und zwar ist offenbar

$$DC : CF = \mathfrak{B} : \xi = 1 : \sigma_1. \quad (a)$$

Die Huyghens'sche Konstruktion liefert uns nun die Wellenebene CE des reflektierten Strahles als Tangente vom Punkte C an den mit dem Radius

$$AE = DC$$

um A gelegten Kreis. (Wir sprechen hier natürlich nur vom Durchschnitte dieser Ebene mit der Zeichenebene). Die Richtung des reflektierten Strahles ist durch AR , der Reflexionswinkel durch ρ gegeben. Der Effekt ist also derselbe, wie wenn die Reflexion an einem ruhenden Spiegel S' geschehen wäre, dessen Ebene mit der des bewegten Spiegels den Winkel ϕ einschließt. Es ist also

$$\begin{aligned}i + \psi &= \rho - \psi \\ \rho &= i + 2\psi\end{aligned}$$

Um den Winkel ψ zu bestimmen, ziehen wir die Hilfslinie DF . Beachten wir, daß

$$\triangle FBC \sim \triangle DBA$$

und daher auch

$$\triangle FBD \sim \triangle CBA,$$

so erkennen wir, daß

$$\sphericalangle FDC = \psi$$

ist. Dann ist

$$\frac{\sin \psi}{\sin i} = \frac{FC}{FD} = \frac{FC}{\sqrt{FC^2 + CD^2 - 2FC \cdot CD \cdot \cos i}}$$

oder nach (a)

$$\sin \psi = \frac{\sigma_1 \sin i}{\sqrt{1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_1 \cos i}}.$$

Es lautet daher das Reflexionsgesetz für die absolute Strahlenrichtung:

$$\rho = i + 2 \arcsin \frac{\sigma_1 \sin i}{\sqrt{1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_1 \cos i}}$$

oder daraus:

$$\sin \rho = \frac{\sin i(1 - \sigma_1^2)}{1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_1 \cos i}; \quad \cos \rho = \frac{(1 + \sigma_1^2) \cos i - 2\sigma_1}{1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_1 \cos i}. \quad (12)$$

Ferner erkennt man sofort, daß der reflektierte Strahl in der Einfallsebene liegt.

Um aus der Richtung des Absolutstrahles die des zugehörigen Relativstrahles zu finden, können wir wieder Fig. 1 zu Hilfe nehmen. Der Winkel, den Absolut- und Relativstrahl miteinander einschließen, ist dort $\sphericalangle SOV = \alpha$, und zwar ist:

$$\sin \alpha : \sin \varphi = p : \mathfrak{B}; \quad \alpha = \arcsin (\sigma \sin \varphi). \quad (13)$$

Ferner sieht man leicht, daß diese beiden Strahlen in einer Ebene liegen, der auch die Richtung der Geschwindigkeit p

angehört (φ ist der Winkel, den der Relativstrahl mit der Geschwindigkeit p einschließt).

Wir betrachten nun die zwei in der Einleitung erwähnten Spezialfälle:

I. Die Geschwindigkeit sei senkrecht zur Ebene des Spiegels. Dann liegen der einfallende und reflektierte Relativstrahl in derselben Ebene wie die zwei absoluten Strahlen, der auch das Lot angehört. Bezeichnen wir den Einfallswinkel im relativen Strahlengange mit i' und ρ' , so ist nach (13)

$$\begin{aligned} i' &= i + \arcsin(\sigma \sin i) \\ \rho' &= \rho - \arcsin(\sigma \sin \rho). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\sin i' = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - 2\sigma \cos i + \sigma^2}}; \quad \sin \rho' = \frac{\sin \rho}{\sqrt{1 + 2\sigma \cos \rho + \sigma^2}}.$$

Setzen wir nun in der letzten Gleichung für $\sin \rho$ und $\cos \rho$ seinen Wert aus (12) ein, so sieht man leicht ein (hier ist natürlich $\sigma_1 = \sigma$ zu setzen), daß

$$\sin i' = \sin \rho',$$

daß also in diesem Falle das gewöhnliche Reflexionsgesetz streng gültig ist.

II. Die Geschwindigkeit des Spiegels liege in der Ebene desselben. Dann sind nach Obigem für die Absolutstrahlen die gewöhnlichen Reflexionsgesetze gültig, also $i = \rho$. In diesem Falle liegen also die beiden Absolutstrahlen symmetrisch in Bezug auf das Lot; dasselbe muß, wie man leicht durchblickt, dann auch von den Relativstrahlen gelten, welche also auch in diesem Falle den gewöhnlichen Reflexionsgesetzen genau gehorchen.

Es ist wohl wahrscheinlich, daß diese Sätze schon bekannt sind; da ich sie aber in der Literatur nicht finden konnte, habe ich es für nötig gehalten, dieselben hier zu beweisen.

- Wegscheider R., Über die Grenzen zwischen Polymorphie und Isomerie. (Mit 2 Textfiguren.) — K 50 h
 — Über simultane Gleichgewichte und die Beziehungen zwischen Thermodynamik und Reaktionskinetik homogener Systeme. 1 K 10 h

Aus den Denkschriften 72. Bd. (1902).

- Eder J. M., Spektralanalytische Studien über photographischen Dreifarbenruck. (Mit 2 Tafeln und 5 Textfiguren.) 3 K 20 h
 Hillebrand F., Theorie der scheinbaren Größe bei binokularem Sehen. (Mit 17 Textfiguren.) 4 K — h

Aus den Denkschriften, 73. Bd. (1901).

(Jubiläumsband der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.)

- Conrad V., Über den Wassergehalt der Wolken. 1 K 60 h
 Czermak P., Experimente zum Föhn. (Mit 3 Textfiguren.) — K 40 h
 Hann J., Die Meteorologie von Wien nach den Beobachtungen an der k. k. meteorologischen Centralanstalt 1850—1900. 3 K 80 h
 Klein R., Über den täglichen Gang der meteorologischen Elemente bei Nordföhn. (Mit 2 Tafeln.) 2 K — h
 Kostlivy St., Der tägliche Temperaturgang von Wien (Hohe Warte) für die Gesamtheit aller Tage, sowie an heiteren und trüben Tagen. 2 K 30 h
 Margules M., Über den Arbeitswert einer Luftdruckverteilung und über die Erhaltung der Druckunterschiede 1 K 40 h
 Mazelle E., Einfluss der Bora auf die tägliche Periode einiger meteorologischer Elemente. 2 K 20 h
 Pernter J. M., Untersuchungen über die Polarisation des Lichtes in trüben Medien und des Himmelslichtes mit Rücksicht auf die Erklärung der blauen Farbe des Himmels. 1 K 90 h
 Pircher J., Über die Haarhygrometer. (Mit 4 Textfiguren.) 2 K 40 h
 Trabert W., Isothermen von Österreich. (Mit 6 Kartenbeilagen.) 9 K 50 h
 Valentin J., Der tägliche Gang der Lufttemperatur in Österreich. 5 K 80 h

Aus den Sitzungsberichten 111. Bd. (1902).

- Benndorf H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. X. Über ein mechanisch registrierendes Elektrometer für luftelektrische Messungen. (Mit 8 Textfiguren.) — K 70 h
 Billitzer J., Eine einfache Methode zur direkten Bestimmung von Dielektrizitätskonstanten. (Mit 5 Textfiguren.) — K 40 h
 — Versuch einer Theorie der mechanischen und kolloidalen Suspensionen — K 80 h
 — und Coehn A., Elektrochemische Studien am Azetylen. II. Mitteilung: Anodische Depolarisation. (Mit 7 Textfiguren.) — K 40 h
 Boltzmann L., Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nichtholonome, generalisierte Koordinaten. — K 30 h
 Brell H., Über die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwanges auf die Schwingungen einer Saite. — K 20 h
 Conrad V., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. VIII. Über die entladende Wirkung verschiedener Elektroden. (Mit 3 Textfiguren.) — K 30 h
 — Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. IX. Einige Bemerkungen zur Wolkenelektrizität. — K 10 h
 Dechant O., Über die Änderung der Diathermansie von Flüssigkeiten mit der Temperatur. — K 30 h
 Dolezal E., Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkte bei Verwendung der Reflexe. (Mit 1 Tafel und 5 Textfiguren.) 1 K — h
 Eder J. M., System der Sensiometrie photographischer Platten. (IV. Abhandlung.) (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h
 Ehrenhaft F., Prüfung der Mischungsregeln für die Dielektrizitätskonstante der Gemische von Hexan-Azeton. (Mit 3 Textfiguren.) — K 30 h
 Elster J. und Geitel H., Messungen der Elektrizitätszerstreuung in der freien Luft. (Mit 1 Textfigur.) — K 70 h
 Ernst W. E., Über das Wärmeleitvermögen des Kesselsteines und anderer die Kesselflächen verunreinigenden Materialien. — K 20 h
 Exner F., Über die Grundempfindungen im Young-Helmholtz'schen Farbensystem. (Mit 3 Textfiguren.) — K 60 h
 — Zur Charakteristik der schönen und hässlichen Farben. (Mit 5 Textfiguren.) — K 60 h
 — und Haschek E., Das Funken- und Bogenspektrum des Europiums. — K 40 h
 Exner F. M., Versuch einer Berechnung der Luftdruckänderungen von einem Tage zum nächsten. (Mit 5 Textfiguren.) — K 50 h
 Exner K., und Villiger W., Über das Newton'sche Phänomen der Szintillation. (Erste Mitteilung.) — K 90 h

- Fischer R., Über die Elektrizitätserregung bei dem Hindurchgange von Luftblasen durch Wasser. — K 50 h
- Grünwald J., Über die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen in einaxig-kristallinen Medien. 1 K 80 h
- Hann J., Die Schwankungen der Niederschlagsmengen in größeren Zeiträumen. 2 K 10 h
 — Über die tägliche Drehung der mittleren Windrichtung und über eine Oszillation der Luftmassen von halbtägiger Periode auf Berggipfeln von 2 bis 4 km Seehöhe. (Mit 3 Textfiguren.) 1 K 83 h
 — Zur Meteorologie des Äquators. Nach den Beobachtungen am Museum Goeldi in Pará. (Mit 7 Textfiguren.) 1 K 40 h
- Haschek E., Spektralanalytische Studien. (II. Mitteilung.) — K 30 h
- Hasenöhrl F., Über die Absorption elektrischer Wellen in einem Gas. (Mit 2 Textfiguren.) — K 70 h
 — Über die Grundgleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie für bewegte Körper. (Mit 1 Textfigur.) — K 50 h
- Jäger G., Das Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln. — K 30 h
 — Der innere Druck, die innere Reibung, die Größe der Molekeln und deren mittlere Weglänge bei Flüssigkeiten. — K 30 h
 — Zur Theorie des photographischen Prozesses. — K 40 h
- Jaumann G., Über die Wärmeproduktion in zähen Flüssigkeiten. — K 40 h
- Kaufer F., Über die Verschiebung des osmotischen Gleichgewichtes durch Oberflächenkräfte. (Mit 2 Textfiguren.) — K 30 h
- Lampa A., Der Gefrierpunkt von Wasser und einigen wässerigen Lösungen unter Druck. (Mit 1 Textfigur.) — K 40 h
 — Elektrostatik einer Kugel, welche von einer konzentrischen, aus einem isotropen Dielektrikum bestehenden Kugelschale umgeben ist. (Mit 1 Textfigur.) — K 50 h
 — Zur Molekulartheorie anisotroper Dielektrika. Mit einer experimentellen Bestimmung der Dielektrizitätskonstante einer gespannten Kautschukplatte senkrecht zur Spannungsrichtung. — K 40 h
- Lang V., v., Kristallographisch-optische Bestimmungen. (5. Reihe.) (Mit 59 Textfiguren.) 1 K 90 h
- Lecher E., Beeinflussung des elektrischen Funkens durch Elektrisierung. (Mit 2 Textfiguren.) — K 30 h
- Mache H., Über die Schutzwirkung von Gittern gegen Gasexplosionen. (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h
 — Über die Verdampfungswärme und die Größe der Flüssigkeitsmolekel. — K 20 h
- Meyer St., Notiz über das magnetische Verhalten von Europium, Samarium und Gadolinium. — K 10 h
 — Über die durch den Verlauf der Zweiphasenkurve bedingte maximale Arbeit. (Mit 2 Textfiguren.) — K 20 h
- Müller-Erbach W., Über das Wesen und über Unterschiede der Absorption. — K 40 h
- Nabl J., Über die elektrostatischen Ladungen der Gase, die an der aktiven Elektrode des Wehnelt-Unterbrechers auftreten. (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h
 — Über die Longitudinalschwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitte. (Mit 2 Textfiguren.) — K 30 h
- Puschl C., Über den Wärmezustand der Gase. — K 60 h
 — Über Fortpflanzung des Lichtes durch Körpersubstanz. — K 30 h
- Ritter P., Über die Gleichung der Sättigungskurve und die durch dieselbe bestimmte maximale Arbeit. — K 20 h
- Schweidler E., R. v., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XI. Luftelektrische Beobachtungen zu Mattsee im Sommer 1902. (Mit 1 Tafel.) — K 70 h
 — Einige Fälle der Energieumwandlung bei der Ladung von Kondensatoren — K 20 h
 — Einige Versuche über Leitung und Rückstandsbildung in Dielektrics. (Mit 1 Textfigur.) — K 40 h
- Stankewitsch B. W., Magnetische Messungen, ausgeführt im Pamir im Sommer 1900. — K 40 h
- Steindler O., Über die Temperaturkoeffizienten einiger Jodelemente. — K 20 h
- Streitz F., Über die elektrische Leitfähigkeit von gepreßten Pulvern. II. Mitteilung: Die Leitfähigkeit von Metalloxyden und -Sulfiden. (Mit 6 Textfiguren.) — K 80 h
- Suschnig G., Neue Experimente mit Wirbelringen. (Mit 13 Textfiguren.) — K 90 h
- Szarvassi A., Über die magnetischen Wirkungen einer rotierenden elektrisierten Kugel. (Mit 1 Textfigur.) — K 40 h
- Tuma J., Eine Methode zur Vergleichung von Schallstärken und zur Bestimmung der Reflexionsfähigkeit verschiedener Materialien. — K 30 h
- Tumlirz O., Eine Ergänzung der van der Waals'schen Theorie des Kohäsionsdruckes. (Mit 1 Textfigur.) — K 60 h
- Valentin J., Der Staubfall vom 9. bis 12. März 1901. (Mit 3 Tafeln.) 1 K 50 h
- Waldstein O., Über longitudinale Schwingungen von Stäben, welche aus parallel zur Längsaxe zusammengesetzten Stücken bestehen. (Mit 1 Textfigur.) — K 30 h
- Wassmuth A., Apparate zum Bestimmen der Temperaturänderungen beim Dehnen oder Tordieren von Drähten. (Mit 2 Textfiguren.) — K 50 h
 — Über eine Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers. — K 30 h