

Hasenöhl F.

Herrn Prof. E. Lecher
in anfertiger Kopie

Überreicht vom Verfasser.

Über ein Theorem der statistischen Mechanik

von

F. Hasenöhl,
k. M. k. A.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1911.)

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CXX. Abt. IIa. Juni 1911.

WIEN, 1911.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Druckschriften

der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse).

Periodische Publikationen.

[Physik.]

Aus den Sitzungsberichten 117. Bd. (1908).

- Forchheimer Ph., Über einige Grundwasserspiegel. (Mit 10 Textfiguren.)
K 0.95 — M 0.95
- Haitinger L. und Ulrich K., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. I. Bericht über die Verarbeitung von Uranpecherzrückständen. K 0.40 — M 0.40
- Hann J., Die tägliche Variation der Windstärke auf den Berggipfeln in Südtirol in ihrer Beziehung zu der täglichen Luftdruckschwankung. K 1.70 — M 1.70
- Zur Meteorologie der Adria. K 1.— — M 1.—
- Hauser F., XIV. Bericht der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Eine Methode zur Aufzeichnung phonographischer Wellen. (Mit 3 Textfiguren.) K 0.35 — M 0.35
- Jaumann G., Elektromagnetische Theorie. K 3.80 — M 3.80
- Lecher E., Bestimmung spezifischer Wärmen von Leitern bei verschiedenen Temperaturen. (Mit 9 Textfiguren.) K 1.25 — M 1.25
- Konstanz der Thermoelemente bei langem Gebrauch. K 0.20 — M 0.20
- Obermayer A., v., Die Häufigkeitszahlen der Bewölkung. K 0.45 — M 0.45
- Ramsay W., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. IV. Beobachtungen über die Unbeständigkeit des Radiumbromids. K 0.20 — M 0.20
- Rutherford E., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. III. Untersuchungen über die Radiumemanation. I. Volumen der Emanation. (Mit 1 Tafel.) K 0.65 — M 0.65
- Schweidler E., v., und Hess V. F., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. II. Über die Wärmeentwicklung des Radiums. (Mit 1 Tafel.) K 0.55 — M 0.55
- Tumlirz O., Ein neuer physikalischer Beweis für die Achsendrehung der Erde. (Mit 10 Textfiguren.) K 0.90 — M 0.90
- Waßmuth A., Über die Wahl der »kanonischen Verteilung« von Systemen in der statistischen Mechanik. K 0.30 — M 0.30

Aus den Denkschriften 84. Bd. (1909).

- Hanzlik St., Die räumliche Verteilung der meteorologischen Elemente in den Antizyklen. (Mit 4 Tafeln und 8 Textfiguren.) K 8.40 — M 8.40
- Kerner v. Marilaun F., Untersuchungen über die Veränderlichkeit der jährlichen Niederschlagsperiode im Gebiete zwischen der Donau und nördlichen Adria. K 4.30 — M 4.30

Aus den Sitzungsberichten, 118. Bd. (1909).

- Benndorf H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXIII. Zur Theorie luftelektrischer Registrierungen I. K 0.95 — M 0.95
- Brommer A., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXII. Das atmosphärische Potentialgefälle in Triest nach den Beobachtungen von November 1902 bis März 1905. (Mit 4 Textfiguren.) K 2.15 — M 2.15
- Eder J. M. und Valenta E., Wellenlängenmessungen im roten Bezirke der Funkenspektren. K 0.50 — M 0.50
- Wellenlängenmessungen im sichtbaren Bezirke der Funkenspektren. (Zweiter Teil.) K 0.70 — M 0.70
- Ehrenhaft F., Eine Methode zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums. (I. Mitteilung.) K 0.35 — M 0.35
- Frank Ph., Die Stellung des Relativitätsprinzips im System der Mechanik und der Elektrodynamik. K 1.95 — M 1.95
- Geitler J., v., Über die Erzeugung von Gleichstrom durch rein periodische elektromotorische Kräfte. (Mit 11 Textfiguren.) K 0.90 — M 0.90
- Hann J., Zur Meteorologie von Peru. K 2.45 — M 2.45
- Jäger G., Über eine elektrische Spannungsreihe im Lichtbogen. K 0.30 — M 0.30
- Kohlrusch K. W. F., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXX. Luftelektrische Messungen auf hoher See und in subtropischem Klima. (Mit 5 Textfiguren.) K 1.50 — M 1.50
- Lampa A., Über Absorption und Brechung des Lichtes in kolloidalen Metallösungen, speziell in kolloidalen Goldlösungen. K 0.55 — M 0.55
- Lechner A., Über Schallgeschwindigkeit in Gasen und Dämpfen. K 0.40 — M 0.40

Über ein Theorem der statistischen Mechanik

von

F. Hasenöhl,
k. M. k. A.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1911.)

Nach J. W. Gibbs besitzt eine beliebige Gesamtheit mechanischer Systeme die Tendenz, in den Zustand des statistischen Gleichgewichtes zu übergehen. Dieser Satz wurde von Gibbs durch Heranziehung der Analogie mit der Mischung zweier Flüssigkeiten sehr plausibel gemacht.¹ Einen einwandfreien Beweis für das Theorem hat Gibbs nicht gegeben.²

Einen allgemein gültigen Beweis des Satzes (für alle Fälle, in denen er gilt) zu erbringen, dürfte auf große Schwierigkeiten stoßen. Doch ist das Theorem so wichtig und interessant, daß es sich wohl lohnt, dasselbe wenigstens für eine, wenn auch sehr beschränkte Klasse mechanischer Systeme zu studieren.

Für eine Gesamtheit von Systemen, welche eine periodische Bewegung ausführen, läßt sich nämlich das erwähnte Theorem leicht nachweisen. Allerdings werden gerade mechanische Systeme, die mit einem warmen Körper Ähnlichkeit haben können, kaum eine periodische Bewegung vollführen. Im Gegenteil wird man meist annehmen, daß die Bahnkurve (im $2n$ dimensionalen Raume) nicht geschlossen ist, daß sie mehrfache Mannigfaltigkeiten des polydimensionalen Raumes

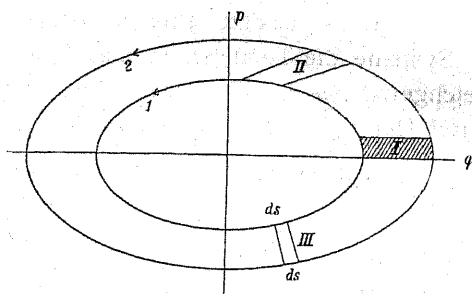
¹ J. W. Gibbs, Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik (deutsch von Zermelo), 12. Kapitel; vgl. auch H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik, I, p. 289.

² Vgl. insbesondere P. und T. Ehrenfest, diese Sitzungsber., 115, 1906.

bedeckt.¹ Andererseits erscheint mir auch die Zulässigkeit der extrem entgegengesetzten Annahme, daß die Bahnkurve die ganze Energiefläche bedeckt,² wodurch die mikrokanonische Gesamtheit zu einer Zeitgesamtheit wird, einer eingehenden Prüfung zu bedürfen.

§ 1.

Betrachten wir zuerst eine Gesamtheit von Systemen mit einem Freiheitsgrad, deren Bewegung periodisch verläuft³ (z. B. eine Gesamtheit von Pendeln, welche endliche Schwingungen ausführen). Dann ist der Phasenraum eine Fläche, etwa die Zeichenebene. Die Bahnkurven sind geschlossene ebene



Kurven. Die nebenstehende Figur gibt uns zwei solche Bahnkurven 1 und 2, welchen eine kleine (aber nicht unendlich kleine) Energiedifferenz entsprechen soll (q und p sind die generalisierte Koordinate, respektive der generalisierte Impuls). Alle Systeme, deren repräsentativer Punkt im Flächenstreifen zwischen den Bahnkurven 1 und 2 liegt, beschreiben Bahnen, welche ganz in dem betrachteten Flächenstreifen liegen. Jedes

¹ Darauf hat wohl zuerst Boltzmann aufmerksam gemacht: »Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht« II. Diese Sitzungsber., 63, 679, 1871. Wissenschaftl. Abhandlungen, I, p. 269.

² Siehe vor allem P. Hertz, Ann. d. Phys., 33, p. 236, 1910. — Im allgemeinen bedeckt die Bahnkurve eine $(2n-i)$ dimensionale Mannigfaltigkeit, wobei $i=1$ und $i=2n-1$ die extremen Fälle sind.

³ Vgl. dazu Gibbs, l. c., p. 150.

System durchläuft seine Bahnkurve in der Periode τ , wobei τ von der Energie abhängig ist.¹ Nehmen wir, um die Begriffe zu fixieren, an, daß $\tau_2 > \tau_1$ sei.

Betrachten wir nun eine Gesamtheit von Systemen, die zu Beginn der Zeit sämtliche in dem schraffierten Flächenstück (I) der Figur liegen,² welche also nicht im statistischen Gleichgewicht ist. Nach einer gewissen Zeit (welche, wenn ϵ_2 und ϵ_1 nur wenig verschieden sind und $d\tau/d\epsilon$ nicht allzugroß ist, groß gegen τ_1 ist) werden die Systeme etwa in dem Flächenstück (II) liegen; die Systeme auf der Kurve 2 bleiben immer mehr zurück. Das Flächenstück, das alle Systeme enthält, wird, ohne seinen Flächeninhalt zu ändern, stets schmaler und länger; nach genügend langer Zeit wird es sich beliebig oft um die Kurve 1 schlingen.

Man erkennt so leicht, daß sich die Verteilung der Systeme einem Zustande statistischen Gleichgewichtes nähert. Teilt man nämlich den Streifen zwischen (1) und (2) in einfach unendlich viele Zellen, welche etwa (so wie III) von einem Bogenelement ds der Kurve 1, den von den Endpunkten des Elements an 1 errichteten orthogonalen Trajektorien der Bahnkurve³ und dem durch die letzteren aus 2 herausgeschnittenen Bogenelement ds' begrenzt werden, so wird sich die Verteilung der Systeme auf die verschiedenen Zellen immer mehr einer gleichmäßigen Verteilung nähern.

Das Bogenelement ds kann natürlich mathematisch unendlich klein angenommen werden, dagegen muß $\epsilon_2 - \epsilon_1$ und damit im allgemeinen die Distanz der Kurven 1 und 2 endlich, wenn auch beliebig klein bleiben.

Diese Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf eine Gesamtheit von Systemen mit n Freiheitsgraden übertragen. Da wir wieder Periodizität der Bewegung voraussetzen, sind

¹ Falls τ von der Energie unabhängig ist (kleine Schwingungen), besteht keine Tendenz der Gesamtheit, in eine mikrokanonische Gesamtheit überzugehen.

² Diese abgekürzte Ausdrucksweise soll natürlich besagen, daß sich der repräsentative Punkt aller Systeme in dem betrachteten Flächenstück befindet.

³ Wir werden später statt dieser die Kurve $K = \text{const.}$ einführen.

die Bahnkurven eine $(2n-1)$ parametrische Schar von eindimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten im $2n$ dimensionalen Raume. Aus diesen können wir eine einparametrische Schar herausgreifen (indem wir etwa $2n-2$ Konstanten des Systems unverändert und die Energie von ε_1 bis ε_2 variieren lassen, oder auch, indem wir $2n-1$ Konstanten in einer durch einen Parameter gegebenen Weise variieren lassen). Die Umlaufszeit oder die Periode τ soll für alle Bahnkurven der hervorgehobenen Schar verschieden sein. Dieselben setzen ferner eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im polydimensionalen Raume zusammen, welche unserem früher betrachteten Flächenstreifen ganz analog ist. Da sich dieselben Überlegungen genau so durchführen lassen wie im Falle eines einzigen Freiheitsgrades, gilt unsere Überlegung auch für Systeme von beliebig vielen Freiheitsgraden, wenn nur die Bewegung periodisch ist und die Größe der Periode von den Anfangsbedingungen abhängig ist (diese Betrachtung ließe sich natürlich auch auf eine dünne »Röhre« von Bahnkurven anwenden).

§ 2.

Es hat ein gewisses Interesse, diese Tatsache auch analytisch zu formulieren.

Die Integrale der kanonischen Differentialgleichungen

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1)$$

$$H = H(q_i, p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

seien in der Hamilton-Jacobi'schen Form gegeben, d. h. es soll die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung »vollständig« integriert sein. Dann ergeben sich die Integralgleichungen der Gleichungen (1) durch Differentiation des gefundenen vollständigen Integrals der partiellen Differentialgleichung nach den n Konstanten und nach den n Größen q_i . Löst man diese Integralgleichungen nach den Konstanten auf, so ergeben sich die Integrale der Gleichungen (1) in der Form

$$\begin{aligned}
 H(q_i, p_i) &= \alpha, & K(q_i, p_i) &= \beta + t, \\
 H_1(q_i, p_i) &= \alpha_1, & K_1(q_i, p_i) &= \beta_1, \\
 &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\
 H_{n-1}(q_i, p_i) &= \alpha_{n-1}, & K_{n-1}(q_i, p_i) &= \beta_{n-1}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Die Bezeichnungsweise ist zum Teil die von Jacobi verwendete; nur sind die bei Jacobi mit h und h' bezeichneten Konstanten hier mit α und β , die bei Jacobi mit H' bezeichneten Funktionen hier mit K bezeichnet.¹

$H = \alpha$ soll der Energiesatz sein.

Die Benützung der Integrale in der Hamilton-Jacobi'schen Form erweist sich für unsere Zwecke als besonders zweckmäßig, denn es ist hier die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{\partial(H, H_1, \dots, H_{n-1}, K, K_1, \dots, K_{n-1})}{\partial(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)} = 1.$$

Um dies zu beweisen, benützen wir einen gleichfalls von Jacobi herrührenden Satz, der namentlich in der Störungstheorie von Wichtigkeit ist. Setzt man

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right),$$

so ist²

$$(H_i, H_k) = 0; \quad (K_i, K_k) = 0,$$

$$(H_i, K_k) = -(K_k, H_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \geq k, \\ 1 & i = k. \end{cases} \quad (i, k = 0, 1 \dots n-1).$$

(Der Index 0 bleibt in unserer Bezeichnungsweise weg).

Nun wollen wir die obige Funktionaldeterminante explizit hinschreiben und sie mit einer Determinante multiplizieren, die ihr gleich ist. Wir erhalten so:

¹ Jacobi, Vorlesungen über Dynamik; ed. Clebsch, Berlin 1884, 35. Vorlesung; oder Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik, II, § 72.

² Jacobi, l. c., p. 279; Boltzmann, l. c., § 72.

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} & \frac{\partial H}{\partial q_n} & \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_n} & \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_n} & \frac{\partial H}{\partial q_1} & \frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \frac{\partial H_1}{\partial q_1} & \frac{\partial H_1}{\partial q_n} & \frac{\partial H_1}{\partial p_1} & \frac{\partial H_1}{\partial p_n} & \frac{\partial H_1}{\partial p_1} & \frac{\partial H_1}{\partial p_n} & \frac{\partial H_1}{\partial q_1} & \frac{\partial H_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial H_{n-1}}{\partial q_1} & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial q_n} & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_1} & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_n} & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_1} & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_n} & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial q_1} & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial K}{\partial q_1} & \frac{\partial K}{\partial q_n} & \frac{\partial K}{\partial p_1} & \frac{\partial K}{\partial p_n} & \frac{\partial K}{\partial p_1} & \frac{\partial K}{\partial p_n} & \frac{\partial K}{\partial q_1} & \frac{\partial K}{\partial q_n} \\ \frac{\partial K_1}{\partial q_1} & \frac{\partial K_1}{\partial q_n} & \frac{\partial K_1}{\partial p_1} & \frac{\partial K_1}{\partial p_n} & \frac{\partial K_1}{\partial p_1} & \frac{\partial K_1}{\partial p_n} & \frac{\partial K_1}{\partial q_1} & \frac{\partial K_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial K_{n-1}}{\partial q_1} & \frac{\partial K_{n-1}}{\partial q_n} & \frac{\partial K_{n-1}}{\partial p_1} & \frac{\partial K_{n-1}}{\partial p_n} & \frac{\partial K_{n-1}}{\partial p_1} & \frac{\partial K_{n-1}}{\partial p_n} & \frac{\partial K_{n-1}}{\partial q_1} & \frac{\partial K_{n-1}}{\partial q_n} \end{vmatrix}$$

Führen wir nun die Multiplikation aus, indem wir die Zeilen der zweiten Determinante mit denen der ersten komponieren, so erhalten wir

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} (H, H) & (H, H_1) & \dots & (H, H_{n-1}) & (H, K) & (H, K_1) & \dots & (H, K_{n-1}) \\ (H_1, H) & (H_1, H_1) & \dots & (H_1, H_{n-1}) & (H_1, K) & (H_1, K_1) & \dots & (H_1, K_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (H_{n-1}, H) & (H_{n-1}, H_1) & \dots & (H_{n-1}, H_{n-1}) & (H_{n-1}, K) & (H_{n-1}, K_1) & \dots & (H_{n-1}, K_{n-1}) \\ (K, H) & (K, H_1) & \dots & (K, H_{n-1}) & (K, K) & (K, K_1) & \dots & (K, K_{n-1}) \\ (K_1, H) & (K_1, H_1) & \dots & (K_1, H_{n-1}) & (K_1, K) & (K_1, K_1) & \dots & (K_1, K_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (K_{n-1}, H) & (K_{n-1}, H_1) & \dots & (K_{n-1}, H_{n-1}) & (K_{n-1}, K) & (K_{n-1}, K_1) & \dots & (K_{n-1}, K_{n-1}) \end{vmatrix}$$

Nach den obigen Sätzen wird weiter:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-1) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (-1) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (-1) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Somit ist, da es hier nicht auf das Vorzeichen ankommt, $\Delta = 1$ zu setzen, was zu beweisen war.

Kennt man alle Integrale der kanonischen Differentialgleichungen (1), so kann natürlich die Phasendichte D als Funktion der Zeit dargestellt werden. Es ist ja

$$\frac{dD}{dt} = 0,$$

also kann D nur eine Funktion der Integrale sein.

Berechnet man durch Umkehrung der Funktionen H und K die Identitäten

$$q_i \equiv \varphi_i(H, K) \quad \text{und} \quad p_i \equiv \psi_i(H, K);$$

war ferner zur Zeit $t = 0$

$$D = F(q_i, p_i),$$

wo F eine willkürliche Funktion ist, so ist für alle Zeiten

$$\begin{aligned} D &= F\{\varphi_i(H, H_1, \dots, H_{n-1}, K-t, K_1, \dots, K_{n-1}), \\ &\quad \psi_i(H, H_1, \dots, H_{n-1}, K-t, K_1, \dots, K_{n-1}) = \\ &= f(H, H_1, \dots, H_{n-1}, K-t, K_1, \dots, K_{n-1})\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Nachträglich kann man hierin wieder die Funktionen H und K durch die Variablen q und p ersetzen und erhält so

$$D = G(q, p, t).$$

Als Beispiel können wir unendlich kleine und endliche Pendelschwingungen betrachten.

Im ersten Falle kann

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2),$$

$$K = \arctg \frac{q}{p}$$

gesetzt werden. War für $t = 0$

$$D = F(q, p) \equiv F\{\sqrt{2H} \sin K, \sqrt{2H} \cos K\},$$

so ist für alle Zeiten

$$\begin{aligned} D &= F\{\sqrt{2H} \sin(K-t), \sqrt{2H} \cos(K-t)\} \\ &= F\{(q \cos t - p \sin t), (q \sin t + p \cos t)\}. \end{aligned}$$

Man erkennt also auch hieraus, daß in diesem Falle keinerlei Tendenz zu einem Ausgleich besteht. Die Gesamtheit der repräsentativen Punkte dreht sich wie eine starre Ebene um den Ursprung mit der Winkelgeschwindigkeit 1.

Im Falle der endlichen Schwingungen setzen wir

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \cos q,$$

$$K = \int_0^{\arcsin \frac{1}{\kappa} \sin \frac{q}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}},$$

worin

$$\kappa = \sqrt{\frac{1+H}{2}} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \sin^2 \frac{q}{2}}$$

ist. Umgekehrt ergeben sich die Identitäten

$$q \equiv 2 \arcsin \left\{ \sqrt{\frac{1+H}{2}} \sin am K \right\}; \quad p \equiv 2 \sqrt{\frac{1+H}{2}} \cos am K \pmod{\kappa}.$$

War für $t = 0$

$$D = F(q, p),$$

so ist für alle Zeiten

$$D = F \left\{ 2 \arcsin \sqrt{\frac{1+H}{2}} \sin am (K-t), \right. \\ \left. 2 \sqrt{\frac{1+H}{2}} \cos am (K-t) \right\}.$$

Setzt man hierin wieder für K und H ihre Werte als Funktionen von q und p ein und benützt das Additionstheorem der elliptischen Funktionen, so wird

$$D = F \left\{ 2 \arcsin \left(\frac{\sin \frac{q}{2} \cos am t \Delta am t - \frac{p}{2} \cos \frac{q}{2} \sin am t}{1 - \sin^2 \frac{q}{2} \sin^2 am t} \right), \right. \\ \left. \frac{p \cos am t + \sin q \sin am t \Delta am t}{1 - \sin^2 \frac{q}{2} \sin^2 am t} \right\}.$$

§ 3.

Für unsere Zwecke ist es aber besser, von dem Ausdrucke (3) auszugehen. Da die Funktionaldeterminante $\Delta = 1$ ist, ist

$$f(H, H_1 \dots H_{n-1}, K-t, K_1 \dots K_{n-1}) dH dH_1 \dots dK_{n-1}$$

die Anzahl der Systeme, für welche die Größen $H, H_1 \dots K_{n-1}$ in dem Gebiete $dH \dots dK_{n-1}$ liegen.

Für den Fall eines Systems mit einem Freiheitsgrad haben wir einfach

$$f(H, K-t) dH dK$$

für die eben definierte Anzahl.

Das Wesentliche ist hier, daß die Größe K bloß modulo τ Bedeutung hat, wobei τ von H abhängt. Man bringt dies am besten dadurch zum Ausdruck, daß man die Phasenebene auf eine Rotationsfläche abbildet, wobei der längs des Meridians gemessene Abstand von einer festen, zur Rotationsachse senkrechten Ebene die Größe H mißt. Die Kurven $H = \text{const.}$ sind dann Parallelkreise, deren Umfang wir gleich τ nehmen und längs welchen die Größe K , von einem beliebigen Meridian aus gemessen, variiert. Das Element dieser Rotationsfläche ist wieder gleich $dH dK$. Alle repräsentativen Punkte bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit 1 längs den Parallelkreisen der Rotationsfläche.

Der in § 1 betrachtete Flächenstreifen zwischen den Kurven 1 und 2 wird durch eine von zwei Parallelkreisen begrenzte schmale Zone abgebildet.

Wir wollen nun weiters die Rotationsfläche auf einen geraden Kreiszyylinder vom Radius 1 abbilden. Das geschieht, indem wir an Stelle von H und K die Variablen

$$H \text{ und } x = \frac{2\pi}{\tau} K$$

eingeführen. Dann ist x nur modulo 2π zu betrachten; wir können uns demnach x als Zentriwinkel denken, der von einem beliebigen Schnitt durch die Zylinderachse ab gezählt wird. Die Kurven $H = \text{const.}$ sind jetzt gleich große Kreise.

Wir finden sofort für jedes Gebiet

$$\iint dH dK f(H, K-t) = \iint dH dx \frac{\tau}{2\pi} f\left[H, \frac{\tau}{2\pi}\left(x - \frac{2\pi}{\tau}t\right)\right].$$

Es wird demnach die Zahl der repräsentativen Punkte, die sich innerhalb $dx dH$ durch

$$dx dH g\left(H, x - \frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

dargestellt sein, wobei g bezüglich der zweiten Variablen mod 2π periodisch ist; d. h. die repräsentativen Punkte bewegen sich alle auf Parallelkreisen des Zylinders, aber mit einer von H , das ist also vom Niveau abhängigen Geschwindigkeit.

Nun betrachten wir die Zone, welche dem Flächenstreifen zwischen den Kurven 1 und 2 entspricht. Sie wird von den Parallelkreisen \bar{H} und $\bar{H} + \Delta\bar{H}$ begrenzt. Sei zu Beginn der Zeit die Phasendichte

$$D = g(H, x),$$

so ist nach der Zeit t

$$D = g\left(H, x - \frac{2\pi}{\tau}t\right).$$

Ist $\Delta\bar{H}$ genügend klein (aber endlich), so kann, da ja die ursprüngliche Verteilung stetig vorausgesetzt werden muß, für dieselbe

$$D = g(x)$$

gesetzt werden, wo wieder g modulo 2π periodisch ist, und die Verteilung zur Zeit t wird

$$D = g\left(x - \frac{2\pi}{\tau}t\right).$$

In dem letzten Ausdruck ist τ , wie oft betont, Funktion von H ; trotz der Kleinheit von $\Delta\bar{H}$ darf aber τ hier nicht konstant gesetzt werden, da es mit der über alle Grenzen wachsenden Größe t multipliziert ist. (Das ist das wesentliche des hier vorgebrachten Gedankenganges.)

Wir fragen uns nun nach der Anzahl der repräsentativen Punkte im Flächenstück $dx \Delta\bar{H}$, wobei dx mathematisch unendlich klein sein kann, $\Delta\bar{H}$ jedoch endlich bleiben muß.

Diese Zahl sei

$$dN = dx \int_{\bar{H}}^{\bar{H} + \Delta \bar{H}} g\left(x - \frac{2\pi}{\tau} t\right) dH.$$

Setzen wir hierin

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{\bar{\tau}} + \frac{d}{dH} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right) (H - \bar{H}) = \frac{2\pi}{\bar{\tau}} + k(H - \bar{H}),$$

wobei $\bar{\tau} = \tau(\bar{H})$, so begehen wir einen Fehler, der gegen das Resultat zu vernachlässigen ist, wenn wir k konstant annehmen.¹ Es wird also, wenn wir noch für den Augenblick

$$H - \bar{H} = \xi$$

setzen:

$$dN = dx \int_0^{\Delta \bar{H}} g\left(x - \frac{2\pi}{\bar{\tau}} t - k\xi t\right) d\xi.$$

Nun setzen wir die Anfangsverteilung stetig und integrierbar voraus, es existiert daher eine Funktion

$$\Psi(u) = \int^u g(u) du.$$

Da $g(u)$ mod 2π periodisch ist, muß Ψ von der Gestalt

$$\Psi(u) = C \cdot u + \Phi(u)$$

sein, worin C eine Konstante, $\Phi(u)$ wieder modulo 2π periodisch ist.

Es wird dann

$$\begin{aligned} dN &= dx \left| -\frac{1}{kt} \left\{ C \cdot \left(x - \frac{2\pi}{\bar{\tau}} t - k\xi t \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Phi \left(x - \frac{2\pi}{\bar{\tau}} t - k\xi t \right) \right\} \right|_{\xi=0}^{\xi=\Delta \bar{H}} \\ &= dx \left\{ C \cdot \Delta \bar{H} + \frac{1}{kt} \Phi \left(x - \frac{2\pi}{\bar{\tau}} t \right) - \frac{1}{kt} \Phi \left(x - \frac{2\pi}{\bar{\tau}} t - k t \Delta \bar{H} \right) \right\}; \end{aligned}$$

¹ Es darf bloß $\frac{d\tau}{dH}$ zwischen \bar{H} und $\bar{H} + \Delta \bar{H}$ sein Zeichen nicht ändern.

setzen wir hierin

$$\frac{2\pi}{\bar{\tau}} + k\Delta\bar{H} = \frac{2\pi}{\bar{\tau} + \Delta\bar{\tau}},$$

wobei also

$$\bar{\tau} + \Delta\bar{\tau} = \tau(\bar{H} + \Delta\bar{H})$$

ist, so wird

$$dN = dx \left\{ C\Delta\bar{H} + \frac{1}{kt} \left[\Phi\left(x - \frac{2\pi}{\bar{\tau}}t\right) - \Phi\left(x - \frac{2\pi}{\bar{\tau} + \Delta\bar{\tau}}t\right) \right] \right\}.$$

Der Ausdruck innerhalb der eckigen Klammer bleibt stets endlich, welche Werte auch t annimmt (man dürfte ihn aber nicht etwa nach Potenzen von $\Delta\bar{\tau}$ entwickeln, weil $\Delta\bar{\tau}$ mit t multipliziert ist und t beliebig groß wird).

Demnach nähert sich mit wachsender Zeit unser Ausdruck der Grenze

$$dN = dx C\Delta\bar{H},$$

was also einer gleichförmigen Verteilung entspricht ($2\pi C\Delta\bar{H}$ ist die unveränderliche Zahl der repräsentativen Punkte in der betrachteten Zone).

Wir können jetzt unsere Abbildung wieder rückgängig machen; dem Element $dx\Delta H$ entspricht wieder eine Zelle des Flächenstreifens, wie wir sie in § 1 betrachteten.

Man gelangt also auch auf diesem Wege zu dem dort festgestellten Resultate.

Die Verallgemeinerung auf den Fall von Systemen mit vielen Freiheitsgraden liegt wieder auf der Hand. Wir bilden uns jetzt an Stelle des Flächenstreifens zwischen den Kurven 1 und 2 die oben betrachtete zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die von einer einparametrischen Schar von Bahnkurven gebildet wird, auf eine Zone eines Kreiszyinders ab. Die Überlegungen sind genau so durchführbar, wie für ein System mit einem Freiheitsgrad. Nur ist an Stelle von H der Parameter der Kurvenschar zu setzen.

Eine Bemerkung scheint mir noch von Wichtigkeit: Wir haben angenommen, daß die Phasendichte zu Beginn der Zeit

eine stetige, differenzierbare Funktion der Zustandsvariablen ist. Es soll also etwa die oben eingeführte Funktion

$$D = g(H, x)$$

endliche Differentialquotienten nach beiden Variablen besitzen, die wir mit g_1 und g_2 bezeichnen wollen. Nach der Zeit t ist

$$D = g\left(H, x - \frac{2\pi}{\tau} t\right),$$

demnach:

$$\frac{\partial D}{\partial H} = g_1\left(H, x - \frac{2\pi}{\tau} t\right) - g_2\left(H, x - \frac{2\pi}{\tau} t\right) \cdot \frac{d}{dH}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right) \cdot t \dots$$

Dieser Ausdruck wächst mit t über alle Grenzen. Die Zustandsverteilung hat also die Tendenz, unstetig zu werden,¹ falls nicht die Funktion $g_2 = 0$ ist, falls also nicht schon zu Beginn der Zeit statistisches Gleichgewicht herrschte. Darin liegt der charakteristische Unterschied zwischen Anfangs- und Endzustand.

Das Manuskript der vorliegenden Arbeit war bereits druckreif, als ich — zwei Tage vor der Sitzung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften — eine Arbeit des Herrn J. Kroò: »Über den Fundamentalsatz der statistischen Mechanik«² zu Gesicht bekam. Das Resultat der Arbeit des Herrn Kroò scheint sich mit den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit zu decken; auch sonst haben die beiden Abhandlungen manche Berührungspunkte, auf die ich jedoch hier nicht mehr eingehen konnte.

¹ Die Funktion D nähert sich ferner mit wachsendem t einer Funktion mit unendlich vielen Maximis und Minimis in einem endlichen Bereich.

² Ann. der Phys., 34, Heft 5, p. 907, Mai 1911.

- Lorch F., v. und Wartburg E., v., Über das Thorium D. (Mit 2 Textfiguren.) K 0-60 — M 0-60
- Meißner F., Über die Abhängigkeit der Torsionselastizität einiger Metalle von der Temperatur. (Mit 7 Textfiguren.) K 1-— — M 1-—
- Przibram K., Über die Beeinflussung der Ionenbeweglichkeit in Luft durch Dämpfe. (Mit 2 Textfiguren.) K 1-05 — M 1-05
- Über die Beweglichkeit der Ionen in Dämpfen und ihre Beziehung zur Kondensation. (II. Mitteilung.) (Mit 5 Textfiguren.) K 1-10 — M 1-10
- Salpeter J., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXIV. Über den Einfluß des Erdfeldes auf die Verteilung der Radiuminduktion in der Atmosphäre und auf der Erdoberfläche. K 0-35 — M 0-35
- Schmidt W., Eine unmittelbare Bestimmung der Fallgeschwindigkeit von Regentropfen. (Mit 2 Textfiguren.) K 0-35 — M 0-35
- Studien zum nächtlichen Temperaturgang. (Mit 2 Textfiguren.) K 0-90 — M 0-90
- Zur Beobachtung und Analyse rascher Luftdruckschwankungen. I. Der Variograph, ein Instrument zur Registrierung der Änderungsgeschwindigkeit des Luftdruckes. (Mit 2 Textfiguren.) K 0-55 — M 0-55
- Schweidler E., v., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXI. Luftelektrische Messungen an Alpenseen in den Sommern 1907 und 1908. K 0-30 — M 0-30
- Sirk H., Versuche über die kathodische Ausfällung der Thoriuminduktion aus ihren salzsauren Lösungen. K 0-35 — M 0-35
- Trabert W., Der Zusammenhang zwischen den Temperaturverhältnissen der Atmosphäre und dem Druck an der Erdoberfläche. (Mit 1 Textfigur.) K 0-45 — M 0-45
- Die Ursache der vertikalen Bewegungen in der Atmosphäre. (Mit 4 Textfiguren.) K 0-70 — M 0-70
- Versuch einer Bestimmung der Geschwindigkeit der absteigenden Luftbewegungen. (Mit 2 Textfiguren.) K 0-70 — M 0-70
- Tumilz O., Die Zustandsgleichung der Flüssigkeiten bei hohem Drucke. K 1-10 — M 1-10
- Wagner A., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXV. Luftelektrische Beobachtungen zu Kalocsa. (Mit 8 Textfiguren.) K 1-35 — M 1-35

Aus den Sitzungsberichten, 119. Bd. (1910).

- Auer v. Welsbach C., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. VI. Über die chemische Untersuchung der Actinium enthaltenden Rückstände der Radiumgewinnung. (I. Teil.) K 1-20 — M 1-20
- Bamberger M. und Krüse K., Beiträge zur Kenntnis der Radioaktivität der Mineralquellen Tirols. (II. Mitteilung.) (Mit 4 Textfiguren.) K 0-75 — M 0-75
- Behacker M., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XLI. Zur Berechnung des Erdfeldes unter der Voraussetzung homogener Ionisierung der Atmosphäre. K 0-35 — M 0-35
- Benndorf H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXVII. Die Grazer luftelektrische Station. (Mit 2 Tafeln und 1 Textfigur.) K 0-80 — M 0-80
- Boltzmann A., Über den Luftwiderstand gekrümmter Flächen. (Mit 1 Tafel und 6 Textfiguren.) K 1-50 — M 1-50
- Dechant J., Doppelter Regenbogen auf Wasserflächen. (Mit 3 Textfiguren.) K 0-60 — M 0-60
- Defant A., Über die Beziehung der synoptischen Luftdruckänderungen zu den Temperaturverhältnissen der Atmosphäre. (Mit 1 Textfigur.) K 1-— — M 1-—
- Dimmer G., Über die Polarisation des Lichtes bei der inneren Diffusion. (II. Mitteilung.) (Mit 4 Textfiguren.) K 0-80 — M 0-80
- Doelter C. und Sirk H., Über den verschiedenen Einfluß der α -, β - und γ -Strahlen auf die Farben fester Körper. (Mit 4 Textfiguren.) K 0-45 — M 0-45
- Domek E., Das Emissionsspektrum des Eisenoxyds im elektrischen Lichtbogen. (Mit 1 Tafel.) K 0-70 — M 0-70
- Eder J. M. und Valenta E., Wellenlängenmessungen im sichtbaren Bezirk der Bogen-spektren. I. Teil: Die von Auer v. Welsbach entdeckten Elemente Aldebaranium und Cassiopeum. K 0-30 — M 0-30
- und Valenta E., Wellenlängenmessungen im sichtbaren Bezirk der Bogen-spektren. II. Teil: Dysprosium, Terbium, Erbium (Neoerbiun), Gadolinium, Neoholmium, Yttrium, Zirkon, Lanthan, Samarium. K 0-95 — M 0-95
- und Valenta E., Wellenlängenmessungen im sichtbaren Bezirk der Bogen-spektren. III. Teil: Thulium. K 0-20 — M 0-20
- und Valenta E., Wellenlängenmessungen im sichtbaren Bezirk der Bogen-spektren. IV. Teil: Aluminium, Antimon, Barium, Beryllium, Blei, Cäsium, Calcium, Cassiopeum, Cerium Chrom, Gallium, Iridium, Kalium, Kohle, Kupfer, Lanthan, Mangan, Molybdän, Natrium, Neodym, Niob, Osmium, Palladium, Platin, Praseodym, Quecksilber, Rhodium, Rubidium, Ruthenium, Scandium, Strontium, Tantal, Thallium, Thorium, Titan, Uran, Vanadium, Wismut, Wolfram, Yttrium, Zink, Zinn, Zirkon. K 2-50 — M 2-50
- Ehrenhaft F., Über die Messung von Elektrizitätsmengen, die kleiner zu sein scheinen als die Ladung des einwertigen Wasserstoffions oder Elektrons oder von dessen Vielfachen abweichen. (Mit 3 Tafeln.) K 1-80 — M 1-80
- Exner F. M., Grundzüge einer Theorie der synoptischen Luftdruckveränderungen. (Mit 4 Textfiguren.) K 1-10 — M 1-10

- Exner F. und Haschek E., Zur Spektroskopie der seltenen Erden. . . . K 0-30 — M 0-50
- Ficker H., v., Die Ausbreitung kalter Luft in Rußland und Nordasien (Fortschreiten der „Kältewellen“ in Asien-Europas. (Mit 7 Karten.) K 3-30 — M 3-30
- Frank Th. und Rothe H., Über eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips und die dazugehörige Mechanik. K 0-50 — M 0-50
- Haas A. E., Über die elektrodynamische Bedeutung des Planck'schen Strahlungsgesetzes und über eine neue Bestimmung des elektrischen Elementarquantums und der Dimensionen des Wasserstoffatoms. K 0-75 — M 0-75
- Hasenöhrl F., Über den Widerstand, welchen die Bewegung kleiner Körperchen in einem mit Hohlraumstrahlung erfüllten Raume erleidet. K 0-55 — M 0-55
- Hess V. F., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXIX. Absolutbestimmungen des Gehaltes der Atmosphäre an Radiuminduktion. (Mit 6 Textfiguren.) K 1-60 — M 1-60
- Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XL. Über einige an den bisherigen Absolutbestimmungen des Gehaltes der Atmosphäre an Radiuminduktion anzubringende Korrekturen. (Mit 3 Textfiguren.) K 0-50 — M 0-50
- Jäger G., Versuche mit dem Wechselstromlichtbogen. (Mit 1 Textfigur.) K 0-40 — M 0-40
- Kielhauser A. E., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XLII. Luftelektrische Beobachtungen in Triest am 19. Mai 1910. K 0-20 — M 0-20
- Die tägliche und jährliche Periode des Niederschlages in Triest. K 1-20 — M 1-20
- Kohlrausch K. W. F., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XLIII. Über Radiuminduktionen in der Atmosphäre. (Mit 4 Textfiguren.) . . K 1- — M 1- —
- Lampa A., Farbe und Teilchengröße von kolloidalen Goldlösungen. . . K 0-35 — M 0-35
- Lang V., v., Lage der Absorptionsachsen im Axinit. (Mit 4 Textfiguren.) K 0-40 — M 0-40
- Löschner H., Festes Lot. (Mit 1 Textfigur.) K 0-35 — M 0-35
- Löwy R., Flüssigkeitsströmungen mit unstetigen Druckverhältnissen. (Mit 2 Textfiguren.) K 0-60 — M 0-60
- Mache H., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXVI. Messungen über die in der Atmosphäre vorhandene radioaktive Strahlung von hohem Durchdringungsvermögen. (Mit 1 Textfigur.) K 1- — M 1- —
- Über die Verdunstungsgeschwindigkeit des Wassers in Wasserstoff und Luft. (Mit 1 Textfigur.) K 0-80 — M 0-80
- Myrbach-Rheinfeld O., v., Über die Abhängigkeit des Transmissionskoeffizienten der Atmosphäre für die Sonnenstrahlung von Feuchtigkeit, Luftdruck und Wetterlage in Innsbruck. (Mit 2 Textfiguren.) K 0-60 — M 0-60
- Paulus Fr., Über eine unmittelbare Bestimmung jeder einzelnen Reaktionskraft eines bedingten Punktsystems für sich aus den Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art. (Mit 4 Textfiguren.) K 1-55 — M 1-55
- Przibram K., Ladungsbestimmungen an Nebelteilchen. Beiträge zur Frage des elektrischen Elementarquantums. (Mit 3 Tafeln.) K 3- — M 3- —
- Ladungsbestimmungen an Nebelteilchen. Beiträge zur Frage des elektrischen Elementarquantums. (II. Mitteilung.) (Mit 6 Textfiguren.) . . K 1-40 — M 1-40
- Rumpf E., Die Wasserstoffabsorption der Kathoden und die dadurch bewirkte Veränderung der Polarisation. (Mit 6 Textfiguren.) K 1- — M 1- —
- Salpeter J., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXVIII. Über den Einfluß des Erdfeldes auf die Verteilung der Radiuminduktion in der Atmosphäre und auf der Erdoberfläche. (II. Mitteilung.) K 0-40 — M 0-40
- Samec M. und Jencić A., Über ein selbstregistrierendes Photometer. (Mit 2 Tafeln.) K 0-80 — M 0-80
- Schmidt W., Gewitter und Böen, rasche Druckanstiege. Zur Beobachtung und Analyse rascher Luftdruckschwankungen II. (Mit 4 Tafeln.) K 3-80 — M 3-80
- Schrödinger E., Über die Leitung der Elektrizität auf der Oberfläche von Isolatoren an feuchter Luft. (Mit 3 Textfiguren.) K 0-45 — M 0-45
- Schweidler E., v., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XLIV. Beobachtungen an der luftelektrischen Station Seeham im Sommer 1910. (Mit 4 Textfiguren.) K 0-70 — M 0-70
- Sirk H., Über den Zusammenhang zwischen dem Brechungsindex eines Gases, der mittleren freien Weglänge seiner Molekeln und den zwischen ihnen wirkenden Kräften. K 0-35 — M 0-35
- Versuche über die kathodische Abscheidung radioaktiver Substanzen aus einer Lösung der Radiumrestaktivität. K 0-40 — M 0-40
- Souczek H., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. V. Messungen des Radiumgehaltes der bei der Verarbeitung von St. Joachimsthaler Uranpfecherzrückständen resultierenden radiumarmen Produkte. K 0-30 — M 0-30
- Stark J., Zahl der Zentren von Lichtemission und Intensitätsverhältnis verschiedener Interferenzordnungen. (Mit 8 Textfiguren.) K 0-95 — M 0-95
- Szarvassi A., Das Prinzip der Erhaltung der Energie und der Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern. K 1-50 — M 1-50
- Tumlirz O., Über die Volumkontraktion, das Dichtemaximum und den Binnendruck der Mischungen von Äthylalkohol und Wasser. (Mit 2 Textfiguren.) K 0-80 — M 0-80

Aus den Denkschriften 85. Bd. (1911).

- Ficker H., v., Innsbrucker Föhnstudien (IV.). Weitere Beiträge zur Dynamik des Föhns. (Mit 32 Textfiguren.) K 6-80 — M 6-80