F. HASENÖHRL †

ÜBER EIN BEZUGSSYSTEM DER NEWTONSCHEN MECHANIK

Sonderdruck aus der Physikalischen Zeitschrift
Verlag von S. Hirzel in Leipzig

Fritz Hasenöhrl †.

Physikalische Zeitschrift. 16. Jahrgang. 1915. Seite 435—437.

Über ein Bezugssystem der Newtonschen Mechanik [1]).

Von Fritz Hasenöhrl †.

Alle Wahrnehmungen, die sich auf die Bewegung eines Systems materieller Punkte, sagen wir etwa der Himmelskörper, beziehen, enthalten lediglich Beziehungen der relativen Lage und Bewegung der einzelnen Teile des Systems [2]).

Im Gegensatze dazu geht die Newtonsche Mechanik von einem bestimmten, ausgezeichneten Bezugssystem, dem Inertialsystem aus, dem nur die bezüglich des letzteren in gleichförmiger Translation befindlichen Koordinatensysteme äquivalent sind.

Das Inertialsystem kann auch dadurch definiert werden, daß es das einzige ist, in bezug auf das die Schwerpunkts- und Flächensätze, die Impulssätze gelten. (Zwei Bezugssysteme, die sich gegeneinander in gleichförmiger Translation befinden, wollen wir nicht unterscheiden.)

Die genannten Sätze scheinen auf den ersten Blick auf einen metaphänomenalen Träger eines ausgezeichneten Bezugssystems (z. B. des Äthers) hinzuweisen. Doch ist hier natürlich eine andere, gewissermaßen entgegengesetzte Deutung möglich:

Wie auch immer sich ein System von Punkten bewegen mag, stets kann man ein Koordinatensystem bestimmen, bezüglich dessen die Impulssätze gelten. Es ist daher selbstverständlich, daß es ein Bezugssystem gibt, in welchem Schwerpunktsätze und Flächensätze, sagen wir etwa für das Planetensystem gelten.

Ein solches Bezugssystem kann immer bestimmt werden. Dazu hat man so vorzugehen:

Man wähle zuerst ein ganz beliebiges, durch die materiellen Punkte festlegbares Koordinatensystem, z. B. ein System, das mit der Erde fest verbunden ist; oder ein Koordinatensystem, dessen XY-Ebene stets Mars, Merkur und Jupiter enthalten soll; dessen Ursprung im Mars liegt, und dessen X-Achse stets vom Mars zum Merkur hinweist. In bezug auf ein solches System haben natürlich die Newtonschen Gleichungen, daher auch Schwerpunkts- und Flächensatz keine Geltung. In diesem System S seien x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Massenpunktes m_i als Funktionen der Zeit bekannt.

Wir suchen nun ein System S', in bezug auf das die sechs Impulssätze gelten, zu bestimmen. Das ist stets möglich. Denn die Lage S' gegenüber S ist durch sechs Parameter gegeben, zu deren Bestimmung die sechs Impulssätze gerade ausreichen. (Man erhält sechs Differentialgleichungen, in denen die obigen sechs Parameter und ihre Differentialquotienten nach der Zeit, sonst aber nur bekannte Funktionen der Zeit vorkommen, wenn die Bewegung der materiellen Punkte im System S gegeben ist.)

Das System S' ist also durch die Bewegung der materiellen Punkte in S gegeben. Bezüglich S' gelten die Gleichungen der Newtonschen Mechanik. Transformiert man dieselben wieder auf S, so erhält man Gleichungen, die für jedes beliebige, in beliebiger Translation und Rotation befindliche System gelten.

Es ist natürlich zu erwarten, daß die betreffenden Gleichungen viel weniger einfach sind, als die Newtonschen. Doch hat es vielleicht ein gewisses Interesse, die Gleichungen einmal explizite hinzuschreiben. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall einer zweidimensionalen Bewegung.

Wir denken uns also eine Anzahl materieller Punkte m_i, deren Koordinaten bezüglich S, x_i

1) Aus F. Hasenöhrls Nachlaß. (1911.)

2) Vgl. E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. III. Aufl., S. 232. Leipzig 1897.

und y_i sein sollen, die sich stets in der Ebene bewegen. Da das System S ganz beliebig gewählt ist, haben Schwerpunkts- und Flächensatz keine Gültigkeit.

Wir führen nun das System S' durch die Transformation

$$\begin{aligned} x' &= \mathfrak{x} + x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= \mathfrak{y} - x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

ein, und wollen die Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, α so als Funktionen der Zeit bestimmen, daß bezüglich S' Schwerpunktssätze und Flächensatz gelten, daß also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{M}\Sigma m_i x_i' &= A + Bt \\ \frac{1}{M}\Sigma m_i y_i' &= C + Dt \\ \Sigma m_i\left(x_i'\frac{dy_i'}{dt} - y_i'\frac{dx_i'}{dt}\right) &= F \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wird, wobei A, B, C, D, F Konstanten sind, und $M = \Sigma m_i$ gesetzt ist.

Setzen wir noch

$$\begin{aligned} \Sigma m_i x_i &= M\xi \\ \Sigma m_i y_i &= M\eta, \end{aligned}$$

so sind ξ und η die Koordinaten des Schwerpunktes im System S. ξ und η werden irgendwelche, mehr oder weniger komplizierte Funktionen der Zeit sein.

Machen wir in (2) die Substitution (1), so erhalten wir Gleichungen zur Bestimmung der Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und α.

Bei den zwei ersten Gleichungen (2) ist die Substitution sofort durchgeführt; wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} + \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha &= A + Bt \\ \mathfrak{y} - \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha &= C + Dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Ein wenig umständlicher ist die Durchführung der Substitution in der dritten der Gleichungen (2). Wir erhalten vor allem:

$$F = \Sigma m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt'}\right) =$$

$$\Sigma m\Big\{(\mathfrak{x} + x\cos\alpha + y\sin\alpha)\frac{d}{dt}(\mathfrak{y} - x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

$$-(\mathfrak{y} - x\sin\alpha + y\cos\alpha)\frac{d}{dt}(\mathfrak{x} + x\cos\alpha + y\sin\alpha)\Big\}.$$

(Der Index i soll jetzt weggelassen werden.)

Benützen wir die bereits gewonnenen Gleichungen (3), so erhalten wir:

$$F = M(D\mathfrak{x} - B\mathfrak{y}) + \frac{d\mathfrak{y}}{dt}M(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) -$$

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt}M(-\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha) +$$

$$\Sigma m\Big\{(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\frac{d}{dt}(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) -$$

$$(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)\frac{d}{dt}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\Big\},$$

oder nach abermaliger Benutzung von (3)

$$F = MD(\mathfrak{x} + \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) - MB(\mathfrak{y} -$$

$$\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha) - M\Big\{(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha)\frac{d}{dt}$$

$$(-\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha) - (-\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha)\frac{d}{dt}$$

$$(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha)\Big\} + \Sigma m\Big\{(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\frac{d}{dt}$$

$$(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) - (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\Big\}$$

oder:

$$\begin{aligned} F = M(AD - BC) - M\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) + \\ \dot{\alpha}M(\xi^2 + \eta^2) \\ + \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) - \\ \dot{\alpha}\Sigma m(x^2 + y^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichung liefert uns $\dot{\alpha}$ und durch eine Quadratur α, wenn die Konstanten A, B, C, D und F, so wie die Bewegung im System S gegeben ist. Ist α berechnet, so erhalten wir auch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit Hilfe von (3). Die Gleichungen (3) und (4) geben uns also das gesuchte System S' bis auf eine ganz belanglose, zu α hinzutretende Integrationskonstante.

(Eingegangen 16. November 1915.)