MASTERARBEIT / MASTER’S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master‘s Thesis

Unendlichkeit in Mathematik und der christlichen Theologie –

Menschen in der kognitiven Spannung zwischen Wissen-Wollen und Glauben-Dürfen

verfasst von / submitted by

Michaela Stefanie Jahoda, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2023 / Vienna 2023

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 518 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Katholische Religion Unterrichtsfach Mathematik
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Denn Gott hat seine Zeit gesetzt

für jedes Ding und jedes Werk.

Als Dank für meine Familie

Danksagung

In erster Linie bedanke ich mich bei meinem Betreuer, Herrn a. o. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz, der diese Masterarbeit erst ermöglichte und der durch sein hilfreiches Feedback, seine Geduld sowie seine kompetente und zuverlässige Unterstützung bei jedem Schritt des Schreibprozesses bedeutend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Mein besonderer Dank gebührt meiner Familie. Allen voran danke ich meinen Eltern und meiner Schwester, die mich jahrelang in verschiedenster Form tatkräftig unterstützt und mich durch deren anhaltendende Überzeugung an einen erfolgreichen Abschluss meines Studiums motiviert und bestärkt haben. Ebenso danke ich meinen Großeltern, die mir in schweren Prüfungsstunden im Gebet, in Gedanken, und speziell in der Endphase meines Studiums, als Schutzengel und geistige Begleiter stets inspirierend zur Seite standen.

Ein großes Danke kommt meinem Freund und Verlobten Johannes zuteil für all die motivierenden und liebevollen Worte, Gesten und unterstützenden Tätigkeiten während des gesamten gemeinsamen Studiums. Es ist für mich unfassbar, dass uns das Schicksal über diesen Weg zusammengeführt hat und der universitäre Abschluss erst den Beginn unserer gemeinsamen Reise darstellt.

Ein ebenso großer Dank gilt auch meiner besten Freundin Katharina Fehringer, der ich während meiner Studienzeit begegnen durfte und mit der ich gemeinsam durchs Ziel gehen kann. Zusammen durchlebten wir alle möglichen Höhen und Tiefen des Studiums und die damit verbundenen Aufgaben. Liebe Kathi, danke für deine Freundschaft und Unterstützung in herausfordernden Zeiten.

Danke möchte ich auch Paula Pfaller und meinen besten Freundinnen Ines und Denise Eibel sagen, die mich seit dem Kindergarten begleiten und mit denen mich eine sehr tiefe Freundschaft verbindet. Aufgrund der raschen und zuverlässigen Bereitschaft, Korrektur zu lesen, ermöglichten sie es mir erst, diese Arbeit fertigzustellen.

Last but not least möchte ich mich bei allen nicht namentlich genannten Freunden und Kommilitonen bedanken, die mir mit guten Ratschlägen, Tipps und aufmunternden Gesprächen ermutigend zur Seite gestanden haben.

Mein größtes Anliegen ist es, diese Masterarbeit all jenen Personen und verstorbenen guten Seelen zu widmen, die mich im Laufe meines gesamten Lebens wesentlich unterstützt und geprägt haben: Mama, Papa, Katrin, Oma und Opa, Tanten, Uromas, Freunde, Kommilitonen, Sr. Matthäa, Priester und Lehrer.

Vorwort

„Weißt du wie viel Sternlein stehen?“ ist ein Kinderlied mit tiefgründiger Bedeutung, auf dessen Frage wohl nicht nur Kinder gerne eine mathematisch-logische Antwort bekommen würden. Doch anstelle einer überaus großen, namhaften Zahl erwidert der Liedtext, dass Gott in seiner Liebe und Allmacht alles seit Anbeginn im Überblick hat und wir Menschen darauf vertrauen dürfen. Das Lied ruft einerseits zur bewussten Wahrnehmung der verschiedenen Existenzen und Abläufe in der Welt auf, macht aber zugleich klar, dass die Hauptverantwortung im Überblicken und Zählen niemals allein den Menschen obliegt.

Viele solcher scheinbar „leichten“ Kinderfragen ergeben sich auch im Schulunterricht. Leider kann nicht immer eine eindeutige oder zufriedenstellende Antwort darauf gegeben werden. Oft möchte man sich als Lehrperson solchen Dingen nicht stellen, da sie aufgrund ihrer Komplexität als nicht lösbar oder kompetenzübersteigend empfunden werden. Das Problem ist, dass gesellschaftlich wie auch in der Schule gerne die einzelnen Unterrichtsgegenstände in die Disziplinen Sprachen, Geistes-, Naturwissenschaften etc. unterteilt werden und somit kaum eine bis gar keine Schnittmenge entdeckt werden kann. Blickt man allerdings in die Antike zurück, so galten Lehrpersonen wie Aristoteles (384-322 v. Chr.) meist als Universalgelehrte, da sie sich nicht nur mit einer Wissenschaft auseinandersetzten, sondern interdisziplinäre Verknüpfungen herstellten und Fragen mehrdimensional betrachteten.

„Back to the roots und Mut zur Lücke, denn der Mensch lernt nie aus!“

Gibt man als Lehrperson Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, Fragen zu stellen, welche die Lernenden als fachzugehörig betrachten, so kann es passieren, dass die Frage nach der Unendlichkeit aufkommt. Sehr philosophisch, würde man meinen. Doch ist es nicht die Mathematik, die sich mit Zahlen, dem Zählen und Zahlenmengen befasst? Oder führt diese Frage doch mehr in die Theologie über? Steven Hawking (1942-2018), einer der bekanntesten Astrophysiker der Welt, schrieb selbst Bücher wie „god created the integers“. Anhand dieser Beispiele erkennt man vielleicht schon, dass die Frage nicht bloß eine Wissenschaft beschäftigt. Möchte man nun als Lehrperson dieser Frage Raum geben, so sollte man keine Scheu vor einem interdisziplinären Diskurs haben und sich stets im Klaren sein:

Das Unendliche ist weit, vor allem gegen Ende ~Alphonse Allais

Inhaltsverzeichnis

1. Am Anfang war das Wort und das Wort wurde fassbar

Seit der Antike, genauer gesagt ab dem vierten Jahrhundert vor Christus, ergab sich bereits für Aristoteles (384-322 v. Chr.) das Problem des Unendlichkeitsbegriffs. Im Zuge der Problemlösebewerkstelligung analytischer Gedankenexperimente, wie beispielsweise der Zenon‘schen[1] Paradoxie, wurde eine Differenzierung des Unendlichkeitsbegriffs in zwei Kategorien ausgesprochen: das Aktual-Unendliche sowie das Potenziell-Unendliche. Während das Aktual-Unendliche als diejenige Unendlichkeit betrachtet wird, welche zu einem festgelegten Zeitpunkt abgeschlossen existiert, stellt das Potenziell-Unendliche die zeitlich dauerhaft zunehmende, nicht gleichbleibende Veränderung dar. Erst 2000 Jahre später entwickelte Georg Cantor (1845-1918) gegen Ende des 19. Jahrhunderts die transfinite Mathematik. Cantor bewies damit die Existenz unendlicher Zahlen und die Vielschichtigkeit ihrer Größen sowie die Messbarkeit und Größenordnung unendlicher Mengen. (Vgl. Moore 1995: 64).

Nur wenige Jahre vor Cantors wissenschaftlicher Errungenschaft entschwand im Zusammenhang mit der Umstrukturierung der Analysis der konventionelle Begriffsgebrauch der potenziellen Unendlichkeit. Stattdessen sprach man häufiger über die pointiert definierte Vorstellung des Grenzwertes aufgrund der eindeutigen und daher geringeren widerspruchsanfälligen Wortbedeutung. Ihn bevorzugte man selbst in damalig gebräuchlichen Redewendungen für Beschreibungen, in welchen man bestimmte Größen auszudrücken versuchte. Aussagen wie „potenziell unendlich klein/groß“ wurden dadurch obsolet. (Vgl. Tapp 2008: 236).

Das Rätsel der Unendlichkeit mitsamt den dazugehörigen Facetten erscheint über all die Zeiten hinweg gleich einer Herkulesaufgabe. Bis dato bleibt die Erforschung der Unendlichkeit ein hoch diskutiertes Thema im philosophischen Background der Mathematik (vgl. Tapp 2008: 236). So interpretiert auch der deutsche Mathematiker, Philosoph und katholische Theologe Christian Tapp (*1975) das herangezogene Argument der Unendlichkeitsunterteilung, indem er erklärt:

---

[1] Die Zenon‘sche Paradoxie bezieht sich auf die Überlegung, dass zwischen Achilles, einem griechischen Halbgott, und einer Schildkröte, die einen größeren Vorsprung erhält, ein (unendlich langer) Wettlauf veranstaltet wird. Das Contradictio in adjecto bildet sich bei der Feststellung, dass Achilles aufgrund des Vorsprungs der Schildkröte sowie deren ständig voranschreitenden Vorwärtsbewegung, diese niemals einholen wird. (Vgl. Moore 1995: 64).

> Viele Ansätze zur Fundierung der Mathematik setzen auf den harmloser scheinenden ‚kleinen Bruder' des aktual Unendlichen, um sich offenbar von metaphysischem Anschein freizuhalten. (Tapp 2008: 236)

Für eine weiterführende und vor allem sorgfältige Untersuchung des Unendlichkeitsbegriffs aus mathematischer sowie theologischer Sicht bedarf es zunächst eine Rückführung zu den Anfängen der „Mathematik-Philosophie" – deren fundamentalen Ausgangspunkt und Impuls für die eigentliche Entwicklung von Mathematik.

1.1. Herr über die Welt werden

> Gott segnete sie und [...] sprach zu ihnen: [...] bevölkert die Erde, unterwerft sie euch und herrscht über [sie]. (Gen 1,28) [Einheitsübersetzung 2005]

> Gott segnete sie und [...] sprach zu ihnen: [...] füllt die Erde, unterwerft sie und waltet über [sie]. (Gen 1,28) [Neue Einheitsübersetzung 2016]

Nach Genesis 1,28 der Einheitsübersetzung der Bibel aus dem Jahre 2005 bekommt der Mensch von Gott den Auftrag, über die Erde zu herrschen (hebräisch: *kabasch*) (vgl. Wünsch 2014: 2). Die begrifflichen Abänderungen, die nun in der Neuen Einheitsübersetzung zu finden sind, entstanden aufgrund der Intentionen einer genaueren und adäquaten Anpassung an den hebräischen Originaltext sowie der Achtung der Namensschreibung, welche einen neuen Maßstab für einen ökumenischen Dialog bezüglich jüdisch-christlicher Tradition setzt[2].

Gerade diese altorientalische Textstelle, fachtheologisch ebenso als Dominium terrae bezeichnet, bringt sehr viel Interpretationsbedarf mit sich (vgl. Schütz 2012: 1). Historisch lässt sich belegen, dass einige Bibelverse des Alten und Neuen Testaments, aufgrund ihrer Interpretationsbedürftigkeit, Ungerechtigkeiten und Gewalttaten legitimierten, was sich unter anderem oftmals in kriegerischen Landeroberungen und Zwangsmissionierungen äußerte (vgl. Söding 2023: 1).

Das Dominium terrae, welches als eine der ursprünglichen und zentralen Hauptaufgaben Gottes für die Menschen verstanden wird (vgl. Geoghegan 2020: 68), könnte somit im geisteswissenschaftlichen Konnex als *„Herr der eigenen Ideenwelt"* und auf mathematischer Ebene als *„Herr der Zahlenwelt"* umgedeutet werden.

[2] Vgl. katholisch.de 2020: 1

Die Bezeichnung und Entwicklung des Gedankens einer realen Ideenwelt wurzelt, ebenso wie die Unendlichkeitsvorstellung, in der Antike bei Platon (428/427-348/347 v. Chr.). Er klassifizierte die Welt in das Reich der Wahrnehmung und das Reich der Ideen. Während im Reich der Wahrnehmung, die auch Sinneswelt genannt wird, alles aus vergänglichem Material geschaffen ist und sich dieses letztlich dekomponiert, existieren geistige Musterbilder, wie zum Beispiel die der Zahlen und all damit Verbundenes, im Reich der Ideen fortwährend.[3]

Platons Auffassung der Ideenwelt, welche sich lediglich dem Verstand offenbart, beinhaltet auch den Standpunkt, dass Ideen ewig, unteilbar und unabhängig von der Existenz wahrnehmbarer Dinge der Sinneswelt seien. Da diese Geistesbilder trotz temporaler Unabhängigkeit ein reales Sein besitzen, wird ihnen der Wahrheitsanspruch zuteil. Ideen veranlassen, physische Phänomene begreifbar und nachvollziehbar zu gestalten. (Vgl. ebd.: 1).

Im Allgemeinen erkannte bereits Platon in seinem Denken die Basis für ein mathematisches und naturwissenschaftliches Arbeiten:

> Mathematik ist die Beschreibung logischer Strukturen [...] und bietet Modelle zur Beschreibung der Wirklichkeit. Ihre abstrakten, logischen Strukturen beruhen auf zuvor streng bewiesenen Axiomen. Mathematik ist also zugleich Sprache und Werkzeug, um diese Strukturen beschreiben und ihre Eigenschaften und Beziehungen untersuchen zu können. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung ist das mathematische Zahlensystem. Sie ist zudem wichtiger Bestandteil der Naturwissenschaften [...,] Grundlage des technischen Fortschritts, als auch Hilfsmittel, um unsere Gesellschaft zu organisieren. (Berking 2017: 1)

Summa summarum meint am Ende die Aussage *„Herr über die Welt zu sein“* nichts anderes, als *„den Überblick nicht zu verlieren“.* Für den Überblick sind, wie der Begriff schon in sich trägt, der Blick sowie die Fähigkeit zu sehen, zu erblicken und Wesentliches zu erfassen, äußerst zentral. Damit sich der Mensch kognitiv einen Überblick verschaffen beziehungsweise diesen bewahren kann, bedarf es zuallererst der Klassifizierung, der Einteilung von Objekten in übersichtliche und abzählbare Mengen (vgl. Michael & Jordan 1999: 104-106; Austeda 1989: 184).

[3] Vgl. hipa.at. o. J.: 1

1.2. Zählen und Messen

Rund 50.000 Jahre alte archäologische Funde beweisen, dass Menschen schon seit mindestens 48.000 v. Chr. Zählverfahren hervorbrachten, die sich als zentraler Bestandteil für die Erfassung von damaligen sozialen wie ökonomischen Zählobjekten erwiesen. Dieser mathematische Fortschritt wirkte zusätzlich als Affekt für die Entwicklung von Schrift, Zahlensystemen und Zahlennotation. (Vgl. Eves 1990: 9).

Das Verb zählen beschreibt einerseits den Ermittlungsvorgang mit Hilfe von Zählschritten, zumeist Einerschritten, zur Beurteilung der Anzahl von Elementen in einer Menge von gleichartigen Objekten. Andererseits versteht man darunter im umgangssprachlichen Sinne eine mengenmäßige Erhebung unterscheidbarer Objekte. (Vgl. Burch 2021a).

Der Begriff Zählung, das beigeordnete Nomen zu dem gerade erläuterten Verb, verdeutlicht zum einen den Zählvorgang per se und zum anderen das Resultat des durchgeführten Vorgangs (vgl. Burch 2021b).

Das Quantifizieren beziehungsweise das Prinzip der Messung beschreibt die Untersuchung verschiedener Aspekte eines vorliegenden Objekts, wie etwa jene der Länge, Größe oder des Gewichts (vgl. Keyence 2021: 1).

Regulär ist es möglich, kleinere Mengen mit rund vier Elementen auch ohne zählen, sozusagen *„auf den ersten Blick“,* festzustellen und deren Anzahl richtig zu erfassen. Eine *quasi-simultane* quantitative Erfassung bei größeren Mengen gelingt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass diese sowohl in der Gesamtheit wie auch als Zusammensetzung diverser Teile oder Gruppen erkannt werden (vgl. Ruwisch 2015: 4f.; Wittmann 2009: 4), wie man der Abbildung 1 zu Arten der Mengenerfassung (Selter 2021: 1) entnehmen kann.

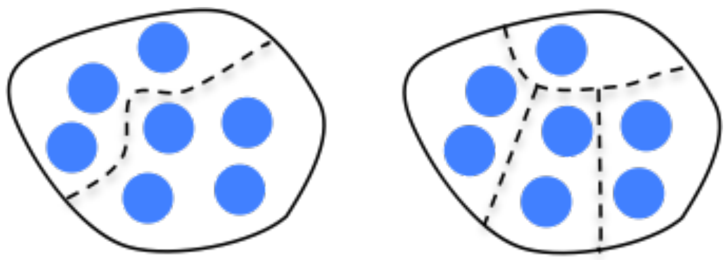


Abbildung 1: Arten der Mengenerfassung (Selter 2021:1)

Für die korrekte Betrachtungsweise des hier bereits häufig verwendeten Begriffs *Menge* und um einen mathematisch-historisch sowie logisch nachvollziehbaren Bogen zur Unendlichkeit zu schaffen, soll im nachstehenden Kapitel auf eine mathematische Teildisziplin, die *Mengenlehre*, näher eingegangen werden. Wie sich herausstellen wird, ist die Frage nach der Unendlichkeit gerade in der Mengenlehre stark präsent. Aus diesem Grund, und um den Rahmen der Arbeit nicht zu sprengen, soll nun – im mathematischen Teil der Arbeit – der Unendlichkeitsbegriff zentrierter aus dem mengentheoretischen Aspekt heraus diskutiert werden.

2. Mathematik, die Wissenschaft vom Unendlichen

Bis Mitte des 18. Jahrhunderts schrieb man alle aufkommenden Unendlichkeitsfragen der Metaphysik, dem ursprünglichen Kernstück der Philosophie, zu. Seit Immanuel Kants (1724-1804) Kritik erfolgte die sukzessive Ausgliederung metaphysischer Themen aus der Philosophie. Somit passierte eine Zergliederung der Inhalte, wonach man vorliegende Gottesfragen an die Theologen, das Themengebiet der Kosmologie an die Physiker und die gesamte Psychologie an die empirischen Psychologen, abtrat. Diese drei Fachrichtungen zusammen, welche der speziellen Metaphysik zugeteilt werden, bilden die sogenannten „Gipfelwissenschaften" im „Gesamtgebäude aller Wissenschaften" (das in Abbildung 2 bei Neidhart 2008: 218 illustriert ist), da sie die letzten Fragen behandeln, die alles Übrige voraussetzen. Genauer befassen sich jene mit den Fragen zur Existenz des Unendlichen jenseits der Welt, mit der Teilhabe des Menschen und seiner Seele an der Unendlichkeit, sowie mit der temporalen und lokalen Unbegrenztheit des Alls. (Vgl. Neidhart 2008: 217f).

Der Fokus der Philosophie liegt seit jeher am stärksten auf der Ontologie, welche als allgemeine Metaphysik und gleichzeitig als Fundamentalwissenschaft[4] hervorgeht. Zentrale Inhalte der Ontologie bilden die Fragen zum Sein im allumfassenden Sinne sowie Fragen rund um die Existenz, Definition, Widersprüchlichkeit und dem Wesen der Unendlichkeit.

Allerdings leistet seit Ende des 19. Jahrhunderts die Mathematik mit ihren Fundamentaldisziplinen Logik und Mengenlehre hinsichtlich der vielfältigen Betrachtungsweisen der Unendlichkeit wesentliche Beiträge, die gleichzeitig erhebliche Auswirkungen für die oben angeführten metaphysischen Disziplinen aufweisen. Gerade deswegen deutete auch der deutsche Mathematiker Hermann Weyl (1885-1955) die Mathematik als „die Wissenschaft vom Unendlichen". (Vgl. Neidhart 2008: 218f).

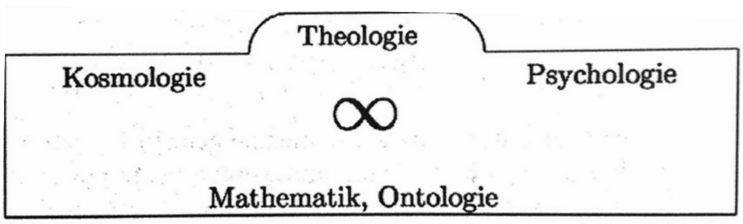


Abbildung 2: Gesamtgebäude aller Wissenschaften (Neidhart 2008: 218)

[4] Basis aller Wissenschaften

2.1. Die Mengenlehre im Allgemeinen

Die Mengenlehre, oder auch Mengentheorie genannt, kann als eine Art logisch-konnotierte Sprache betrachtet werden, die diverse Sachverhalte prägnant wiedergibt beziehungsweise abbildet. Sie besitzt nicht den alleinigen Anspruch auf das zentrale Charakteristikum der Mathematik, sondern bildet ein echtes Teilgebiet innerhalb der Mathematik, zusammen mit der Zahlentheorie (Algebra), Funktionentheorie (Analysis), Geometrie, Topologie sowie der Wahrscheinlichkeitstheorie in Zusammenhang mit der mathematischen Statistik und Numerik. Nachdem die gesamte Mathematik einheitlich mengentheoretisch dargestellt wird und auch die Mengenlehre per se, mittels ihrer einheitlichen, mengentheoretischen Denkweise – ebenso als mengentheoretische Methode bezeichnet – einen allgemeingültigen Charakter besitzt, bildet diese das Fundament für die Formalwissenschaft[5]. (Vgl. Gut 2017: 2; Klaua 2016: 9f).

Die Entfaltung wie auch die Progression der Mengenlehre bewirkte, dass zusätzliche Disziplinen der Mathematik hervorgingen, bereits fundierte mathematische Gebiete reformiert und die methodisch ursprüngliche Cantor'sche naive (unaxiomatische) Mengenlehre von der axiomatischen Mengenlehre abgelöst wurde. Das hatte zur Folge, dass Ausdrücke – speziell in der Analysis, die oftmals leicht zu Widersprüchen oder Missverständnissen führten – verbessert beziehungsweise generell vermieden wurden. Zusätzlich erkannte man, dass alle bereits angewandten mathematischen Begriffe, Aussagen und Ergebnisse ganzheitlich in das anerkannte mengentheoretische System übernommen werden und somit die Mathematik im Sinne der Mengenlehre ausgedrückt werden kann. Aus diesem Grund heraus findet die Mathematik praktische Usance in den Naturwissenschaften und der Technik, wie in der Ökonomie. (Vgl. Klaua 2016: 9f; Berking 2017: 1).

[5] Als Formalwissenschaft bezeichnet man wissenschaftliche Fachrichtungen, die sich der Analyse von formalen Systemen beziehungsweise Kalkülen widmen. Der Wahrheitsgehalt der formalwissenschaftlichen Aussagen wird ausschließlich über logische Folgerungen, fachsprachlich als Deduktion bezeichnet, geprüft. (Vgl. Stiller 2020: 1)

2.2. Begriffsdefinitionen der Mengenlehre

Bevor in die fachliche Materie genauer eingedrungen wird, sollen nachfolgend zentrale Ausdrücke, die den Grundstock der Mengenlehre bilden und unter anderem als Basis axiomatischer Beschreibungen dienen, definiert werden.

2.2.1. Der Mengenbegriff

> „Eine Menge" bedeutet nicht unbedingt „viel". (Gut 2017: 2)

Mengen setzen sich aus verschiedensten Gegenständen zusammen, wie etwa Personen, Objekten oder abstrakten Ideen. Speziell in der Mathematik arbeitet man vorläufig mit Mengen von Zahlen oder Punkten. Beachtenswert beim Umgang ist die Klarstellung der zugehörigen oder deutlich ausgeschlossenen Elemente zur angeführten Menge. Alltagssprachlich versteht man unter der Begrifflichkeit „eine Menge" zumeist ein Synonym für das unbestimmte Zahlwort „viel".

Führt man die Elemente einer (endlichen) Menge an, so werden diese in geschwungene Klammern geschrieben: z. B. $\{a, b, c\}$. Die Reihenfolge der Aufzählung ist nicht festgelegt. Der logisch einfacheren Nachvollziehbarkeit werden die Elemente meist nach einer bestimmten Anordnung (Wert, alphabetisch, ...) aufgelistet (vgl. Gut 2017: 2; Hemion: 1).

2.2.2. Element

Als Element (Notation: $\in$) betrachtet man wohlunterscheidbare Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens. Möchte man aussagen, dass ein solches Objekt Bestandteil einer Menge ist, so schreibt man $b \in B$ oder $B \ni b$ und sagt: b ist Element der Menge B. Ist ein Objekt kein Teil einer Menge, so notiert man beispielsweise $a \notin A$ und betont dabei, dass a kein Element der Menge A ist (vgl. Neidhart 2008: 220f).

2.2.3. (Echte) Teilmenge

Eine Teilmenge einer Menge M ist eine Menge, deren Elemente alle in M liegen. Ist M zum Beispiel eine dreielementige Menge $\{a, b, c\}$, so besitzt M die folgenden Teilmengen:

- die leere Menge { },
- die drei einelementigen Mengen $\{a\}, \{b\}, \{c\},$
- die drei zweielementigen Mengen $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},$
- und die dreielementige Menge selbst $\{a, b, c\}.$

Die Notation dazu lautet $C \subseteq D$, gesprochen: C ist Teilmenge von D. Zusammengefasst bedeutet dies, dass eine dreielementige Menge über acht Teilmengen verfügt. Dabei sind die obigen ersten sieben Teilmengen völlig verschieden gegenüber der Ursprungsmenge, weshalb sie auch als echte Teilmengen von M (Notation: $\subset$) bezeichnet werden (vgl. Neidhart 2008: 224).

2.2.4. Potenzmenge

Werden alle Teilmengen einer Menge herausgenommen und zu einer neuen Menge zusammengesetzt, so nennt man diese neue Menge Potenzmenge von M, oder anders gesagt: aus jeder Menge M kann eine Potenzmenge $P(M)$ gebildet werden, deren Elemente die Teilmengen von M sind (vgl. Neidhart 2008: 224f).

2.3. Axiomatische Mengenlehre

Axiome bilden den zentralen Ausgangspunkt der Mathematik und dienen als Grundsatz beziehungsweise Fundamentalgesetz, das als gültig vorausgesetzt wird. Allerdings unterliegen diesen Festlegungen weder ausgewiesene Beweisstellungen noch deduktive Vorgänge. Formuliert werden ebendiese, anders als die formale Theorie (bestehend aus allen axiomatisch abgeleiteten Sätzen), in einer mathematisch-logischen sowie formalen Sprache, welche auch als Metatheorie bekannt ist. (Vgl. Walz 2017: 1; Klaua 2016: 9).

Die Axiomenauswahl ergibt sich nicht willkürlich. Die hintergründige Absicht liegt darin, im Nachhinein formulierte Theoreme beweisen zu können. Ein wichtiges Kriterium bei der Erwählung von Axiomen und ihrem System ist die Aufrechterhaltung der Transparenz aufgrund der geringen Anzahl, geringen Verständniskomplexität sowie der intuitiven Zuschreibung beziehungsweise Namensgebung. (Vgl. Ganster 2016: 1). Ein weiterhin markantes Merkmal des Axiomen-Systems ist das Aufweisen einer ausreichend großen, gleichfalls aber auch fassbaren Anzahl von Mengen, sodass die

Erforschungsmöglichkeit aller mathematisch relevanten Theoreme und Analysepunkte geboten wird (vgl. Walz 2017: 1).

Die axiomatische Mengenlehre an sich ist eine bestimmte Ordnung (das Axiomen-System), welche auf Axiomen beruht und zugleich die Spitze der gesamten Theorie darstellt, die sowohl die Existenz wie auch die Eindeutigkeit von Mengen sichert. Gleichzeitig erkennt man diese Lehre als Hintergrundmengenlehre an, da sie die Basis aller mathematischen Untersuchungen darstellt. Findet man dieselbe Mengenlehre als ein Objekt mathematischer Analyse vor, so kennzeichnet diese Art die Objektmengenlehre. Relevant ist dabei die klare Differenzierung von Hintergrund- und Objektmengenlehre sowie die präzise Beachtung einer Unvermischtheit ihrer Bedeutungsstränge, um Paradoxien durch Ebenenverflechtung entgegenzuwirken. Die axiomatische Mengenlehre billigt lediglich mengentheoretische Begriffe und Aussagen, gemeint sind hier vor allem die Axiome sowie mengentheoretische Ergebnisse. (Vgl. Walz 2017: 1; Klaua 2016: 9).

2.4. Axiome der Mengenlehre (nach Zermelo-Fraenkel)

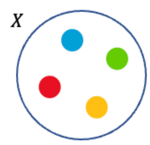
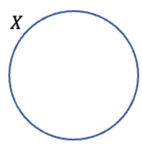
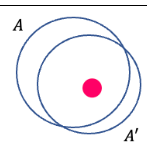
Die *Zermelo-Fraenekl‘sche Mengenlehre* erhielt den Namen durch ihre beiden aus Deutschland stammenden Begründer Ernst Zermelo (1871-1953) und Abraham Fraenkel (1891-1965). Sie bildet den alles verknüpfenden Ausgangspunkt der verschiedenen Disziplinen innerhalb der Mathematik. (Vgl. Casalena 2012: 1).

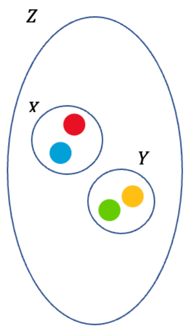
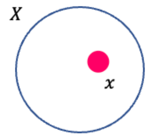
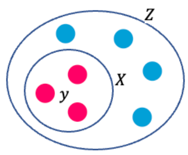
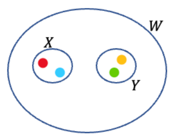
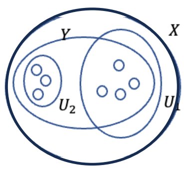
Die neun Axiome (ZF1 – ZF9), in der nachstehenden Tabelle 2 aufgelistet, bilden die *Zermelo-Fraenkel‘sche Mengenlehre* beziehungsweise das *Zermelo-Fraenkel‘sche Axiomensystem der Mengenlehre* – kurz auch als ZF angegeben. Zählt man das *Auswahlaxiom* (AC – Axiom of Choice) zur *Zermelo-Fraenkel‘schen Mengenlehre* dazu, so wird diese in Kurzschreibweise mit ZFC benannt. Hingegen deutet das *Zermelo‘sche Axiomensystem* oder die *Zermelo‘sche Mengenlehre* auf die Ausklammerung des Ersetzungsaxioms im ZF hin und wird demnach lediglich mit einem Z abgekürzt. Gelegentlich werden zur Definition von ZFC andere äquivalente Axiomensysteme verwendet. Alternative Axiome für das Existenzaxiom und das Paarmengenaxiom sind das Axiom der leeren Menge oder Nullmengenaxiom sowie das Einermengenaxiom. (Vgl. Ganster 2016: 4; Walz 2017: 1; Deiser 2021: 521f; Ebbinghaus 2021: 44).

Die Notation, in der die Axiome angeführt werden, stammt aus der Sprache der Logik und wird durch die dazugehörigen Symbole ausgedrückt. Die Bedeutungen der jeweiligen Symbole können der folgenden Legende (siehe Tabelle 1) entnommen werden.

Symbole	Bedeutung
$\forall x$	Für alle x gilt
$\exists x$	Es existiert ein x, für welches gilt
$\exists!\, x$	Es existiert genau ein x, für welches gilt
$\nexists x$	Es existiert kein x , für welches gilt
$\neg P$ $\neq P$	Negation einer Aussage P
$P \wedge Q$	Konjunktion (Durchschnitt) von P und Q
$P \vee Q$	Disjunktion (Vereinigung) von P und Q
$P \Longrightarrow Q$	Implikation (Bedingung) zwischen P und Q
$P \Longleftrightarrow Q$	Äquivalenz (wechselseitige Bedingung) von P und Q

Tabelle 1: Legende der logischen Symbole

Name	Formulierung	Erläuterung	Verdeutlichung
(ZF1) Ex: **Existenzaxiom**	$\exists X\ X = X$	Das Existenzaxiom fordert die Existenz einer Menge X, die nicht ohne Elemente ist, $X \neq \varnothing$. Kurz gesagt beschreibt dieses Axiom, dass es eine Menge gibt und das Universum demnach nicht leer ist. (Vgl. Casalena 2012: 1; Ganster 2016: 4; Walz 2017: 1; Ebbinghaus 2021: 25).	
Alternativ Axiom für Ex: **Axiom der leeren Menge oder (veraltet) Nullmengenaxiom**	$\exists X\colon \forall Y\colon \neg(Y \epsilon X)$	Es gibt eine Menge X, die kein Element enthält, die sogenannte leere Menge, welche mit {} oder $\varnothing$ angeschrieben wird (vgl. Deiser 2021: 521; Walz 2017: 1; Ebbinghaus 2021: 26).	
(ZF2) Ext: Extensionalitätsaxiom	$\forall A, A'\colon (A = A' \leftrightarrow \forall\, c\colon c \in A \leftrightarrow c \in A')$	Zwei Mengen sind ident, insofern sie dieselben Elemente besitzen. (vgl. Kuba & Götz 2004: 36; Steinfeld o. J.: 1).	

(ZF3) **Paarmengenaxiom**	$Z \in \{X, Y\} \leftrightarrow Z = X \vee Y$	Dieser Ausdruck verdeutlicht, dass zu je zwei Mengen X und Y auch eine Menge Z existiert, welche X sowie Y als Elemente enthält. Z ist eindeutig bestimmt und wird als ungeordnetes Paar $\{X, Y\}$ beschrieben. Besitzt die Menge Z ausschließlich die beiden Mengen X und Y als Elemente und sind diese verschieden voneinander, so nennt man die Menge Z auch Paarmenge. (Vgl. Ebbinghaus 2021: 33).	
Alternativ Axiom für das Paarmengenaxiom: **Einermengenaxiom**	$\{x\} \coloneqq \{z \in Pot(x) \mid z = x\}$	Die Menge $\{x\}$ fasst genau das Element x und heißt *Einermenge (Singletonmenge) von* x. Dabei ist eine sorgfältige Differenzierung der beiden Mengen x und $\{x\}$ erforderlich. Stets gilt $x \in \{x\}$, allerdings trifft das nicht auf die Umkehrung zu: $\{x\} \notin x$, wie im Beispiel an der leeren Menge erkennbar: $\{\emptyset\} \notin \emptyset$. (Vgl. Ebbinghaus 2021: 34; Walz 2017: 1).	
(ZF4) Aus: Aussonderungsaxiom, Frege'sches Komprehensionsaxiom oder Teilmengenaxiom	$\forall Z \exists X \forall y\ (y \in X) \leftrightarrow ((y \in Z) \wedge F(y)))$	Das Axiom (genauer: Axiomenschema) erlaubt es, alle Elemente y einer vorgegebenen Menge Z, die eine bestimmte Eigenschaft $F(y)$ haben, zu einer neuen Menge X zusammenzufassen beziehungsweise auszusondern. Die Menge X ist daher immer eine Teilmenge zu der bereits bestehenden Menge Z. (Vgl. Resag 2003: 1).	
(ZF5) Vereinigungsmengenaxiom			
Kleines Vereinigungsmengenaxiom (▯-Ax)	$\forall X \forall Y \exists W \forall z$ $\big(z \in W \leftrightarrow (z \in X \vee z \in Y)\big)$	Zu je zwei Mengen X und Y gibt es eine Menge W, welche genau die Elemente von X und Y umfasst (vgl. Casalena 2012: 1; Ebbinghaus 2021: 31).	
Großes Vereinigungsmengenaxiom **(∪ −Ax)**	$\forall X \exists Y \forall Z$ $(Z \in Y \leftrightarrow \exists U(U \in X \wedge Z \in U))$	Für jede Menge X gibt es eine Menge Y, die genau die Mengen Z als Elemente enthält, die in irgendeiner Menge $U \in X$ enthalten sind (Ebbinghaus 2021: 32).	

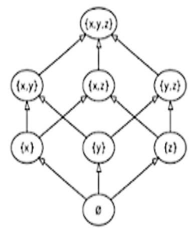
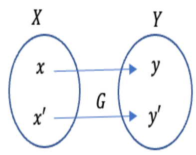
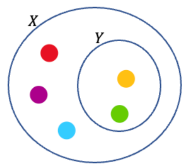
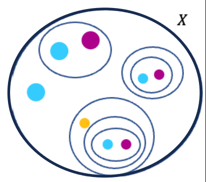
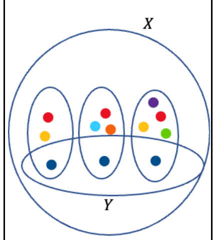
(ZF6) Pot: Potenzmengenaxiom	$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$	Zu jeder Menge X existiert eine Menge, die alle Teilmengen von X als Elemente enthält (vgl. Ebbinghaus 2021: 34). Diese Menge wird Potenzmenge von X genannt und mit P(X) bezeichnet (vgl. Walz 2017: 1). Potenzmengen werden oftmals via Hasse-Diagrammen, siehe Abbildung 3 (KSmrq 2004: 1), dargestellt.	 Abbildung 3: Potenzmenge (KSmrq 2004: 1)
(ZF7) Ers: Ersetzungsaxiom oder Funktionalaxiom	$\forall X \exists Y \forall y\, ((y \in Y) \leftrightarrow$ $(\exists x: (x \in X) \wedge y = G(x)))$	Dieses Axiom, von Fränkel aus dem Jahr 1922, wurde hinzugefügt, um Abbildungen im System der Mengenlehre zu formulieren. Das Axiom sagt aus, dass das Abbild einer beliebigen Menge unter einer Abbildung G wieder eine Menge ist. (Vgl. Resag 2003: 1). Dabei müssen die beiden Mengen X und Y nicht disjunkt sein, und für $x \neq x'$ kann $y = y'$ gelten (Ebbinghaus 2021: 41).	
(ZF8) Fund: Fundierungsaxiom oder Regularitätsaxiom	$\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists x\, (x \in X \wedge \neg \exists y$ $(y \in X \wedge y \in x)))$ das heißt: $\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists x(x \in X \wedge x \cap X = \emptyset))$	Jede nichtleere Menge X besitzt ein minimales Element Y, so dass kein Element von Y in X vorkommt (vgl. Ebbinghaus 2021: 43; Resag 2003: 1). Damit sind Mengen, die sich selbst enthalten, ausgeschlossen.	
(ZF9) Inf: Unendlichkeitsaxiom	$\exists X\, (\emptyset \in X \wedge \forall z(z \in X \rightarrow z \cup \{z\} \in X))$	Das Unendlichkeitsaxiom fordert eine Menge X, die die leere Menge enthält und mit jedem z auch $z \cup \{z\}$. Solch eine Menge nennt man induktiv. (Vgl. Ebbinghaus 2021: 39).	
(AC) Auswahlaxiom (Axiom of Choice)	$\forall X\, (\forall x \forall y\, (x \in X \wedge y \in X \rightarrow$ $x \neq \emptyset \wedge (x = y \vee x \cap y = \emptyset))$ $\rightarrow \exists Y\, \forall x\, (x \in X \rightarrow$ $\exists z: Y \cap x = \{z\})$	Selbst Georg Cantor formulierte dieses Axiom nie ausdrücklich, er setzte seine Richtigkeit instinktiv voraus. Ist X eine Menge, deren Elemente nichtleer und paarweise disjunkt sind, so existiert eine Menge Y, die mit jedem Element von X genau ein Element gemeinsam hat (vgl. Resag 2003: 1; Deiser 2021: 522; Ebbinghaus 2021: 45)).	

Tabelle 2: Legende der logischen Symbole

2.5. Mathematiker im Umgang mit der Mengenlehre

Im Laufe der letzten drei Jahrhunderte setzten sich zahlreiche mathematische Wissenschaftler und Forscher mit dem Themenbereich der Mengenlehre tiefgründiger auseinander. Am bedeutendsten wirkten der Namensgeber der Mengenlehre *Georg Cantor* (1845-1918), der analytische Grundlagenforscher *Bernard Bolzano* (1781-1848) und der Urheber der ersten exakten Einführung der natürlichen Zahlen mittels Axiomen, *Richard Dedekind* (1831-1916). Aufgrund der umfassenden Ausführungsmöglichkeit, die sich an dieser Stelle bietet, soll der Fokus der Arbeit nun in weiterer Folge auf dem deutschen Wissenschaftler Georg Cantor und seine Errungenschaften, sowie auf dem theologischen Background des Reflexionsprinzips von *Azriel Levy* (*1934) gründen.

2.5.1. Georg Cantors Ansätze

Die dezidierte Erfassung sowie die Namensgebung der jahrtausendlangen praktizierten mathematischen Disziplin entstammte erst in den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts von dem Mathematiker Georg Cantor (vgl. Moore 1995: 64). In seiner Arbeit „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" manifestierte er die Theorie zu (endlichen und unendlichen) Mengen beliebiger Dinge, die heute auch als die sogenannte „Mengenlehre" bekannt ist (vgl. Klaua 2016: 9). Cantors Forschung belief sich nicht lediglich darauf, was er allein unter gewissen Sachverhalten verstand, sondern betrieb regen Austausch mittels Briefverkehres mit Mathematikern, Philosophen und christlichen Theologen.

Aufgrund seiner Kindheit, in einer stark christlich geprägten Familie, als auch durch seine eigene ethische Lebensweise, trat Georg Cantor im Zuge seiner Forschung zur Mengenlehre und der darin aufkommenden Frage nach (dem Wesen) der Unendlichkeit oftmals mit Theologen der damaligen Zeit in einen Diskurs. Bekannt ist, dass der Mathematiker mit insgesamt 30 Geisteswissenschaftlern, wovon allein 26 katholisch zugehörig waren, über die philosophische Grundlegung der Mengenlehre, wie auch hypothetischer Beweise einer Nichtexistenz aktual-unendlicher Zahlen konferierte. (Vgl. Tapp 2008: 234f). Laut seinem Schreiben an Pater Thomas Esser vom 01.02.1896 sah Georg Cantor in der Theologie und Metaphysik eine starke wissenschaftliche Interessengleichheit und gegenseitige Ergänzungseventualität. In der weiterführenden Literatur von Ludwig Neidhart wird deshalb auch erklärt, dass zur Fundierung der Mathematik – durch die Mengenlehre – man letzten Endes auf die Metaphysik angewiesen bleibt (vgl. Neidhart 2008: 219f).

> Die allgemeine Mengenlehre [...] gehört durchaus zur Metaphysik [, welche zugleich durch ein] unzereißbare[s] Band [mit der Theologie verbunden ist]. (Tapp 2005: 308, 310)

Mithilfe seiner Korrespondenzen sowie der Deduktion und der Reductio ad absurdum[6] erstrebte Cantor seine Annahme aktual-unendlicher Zahlen in mathematischer wie philosophisch-theologischer Richtung nicht nur zu rechtfertigen, sondern stichfest zu beweisen (vgl. Tapp 2008: 236), wie dies ein anderer Brief aus dem Jahre 1895 an Pater Esser zeigt:

> Es war mir eine innige Befriedigung, [...], dass ich den heiligen Thomas [von Aquin] in diesem Puncte und dem damit zusammenhängenden Fragen richtig verstanden habe, [...] dass vor Allem seine Argumentation gegen das actuale Unendliche [...] gegen die Möglichkeit act. unendl. großer Zahlen für ihn selbst nicht die Bedeutung eines Beweisgangs, der allenthalben aus Notwendigkeit schließt, und metaphysische Gewissheit liefert, gehabt hat; sondern sie war in seinen eigenen Augen nur in gewissem Grade probabel. (Tapp 2005: 300)

2.5.2. Cantors Differenzierung des Unendlichkeitsbegriffs

Cantor unterteilte das mathematisch Unendliche in ein Uneigentlich-Unendliches (später potenziell Unendliches oder Transfinitum genannt), das stets endlich bleibt und über alle Grenzen in beliebiges Minimum oder Maximum wächst, das Eigentlich-Unendliche (später: aktual Unendlich) sowie das absolut Unendliche, das im Gegensatz zum Eigentlich-Unendlichen wesentlich unvermehrbar ist. Dieses Unendlichkeitsverständnis bildete dahingehend das Herz seiner Theorie: die Lehre der transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen. (Vgl. Schneider 2017: 15; Pfeifer 2017: 1; Tapp 2008: 234, 236).

In Cantors Sichtweise zur Unendlichkeit fließen zum einen das aristotelische Denken mit der Unterscheidung eines aktual sowie potenziell Unendlichen[7], wie auch die

---

[6] Rückführung von Hypothesen auf einen Widerspruch

[7] Nochmals prägnant zusammengefasst, versteht man unter dem Begriff „Aktual-Unendlich“ eine zu einem festgelegten Zeitpunkt abgeschlossene existierende Unendlichkeit, während das Potenziell-Unendliche die temporal immerzu wachsende Unendlichkeit manifestiert (vgl. Moore 1995: 64).

scholastische Logik, welche zwischen einer kategorematischen[8] und synkategorematischen Prädizierung des Begriffs differenziert, mit ein (vgl. Tapp 2008: 236).

Im Gegensatz zu Aristoteles kritisiert er das potenziell Unendliche, welches Cantor, laut den Ausführungen von Christian Tapp, als eine in Wahrheit endliche Größe, für die man nur keine Schranke kennt, auffasst (vgl. ebd.: 236). Für Aristoteles selbst stellt das potenziell Unendliche ein fundamentales *„Charakteristikum der Wirklichkeit"* dar, *„dass bei jedem niemals endenden Vorgang anerkannt werden müsse"*, wie etwa bei der Dezimierung von Materie, dem temporalen Voranschreiten oder der summierenden Hochrechnung. Jegliche konträre Kritik in Bezug auf die Vorstellung des Unendlichen verweist Aristoteles, nach Moore, lediglich auf das aktuale Unendliche. (Vgl. Moore 1995: 64).

Indessen unterteilt Cantor in Kooperation mit spät- und neuscholastischen Philosophen das aktual Unendliche in drei Beziehungen: In das Infinitum in concreto, Infinitum in abstracto und Infinitum in Deo. Die ersten beiden Arten bezeichnete er als Transfinites, letzteres als Absolutes. Der Unterschied der beiden transfiniten Gegenstände besteht darin, dass das Infinitum in concreto ein abhängiges Unendliches in der kreatürlichen Welt und Natur meint. Hingegen beschreibt das Infinitum in abstracto die Unendlichkeit abstrakter Zahlen und mathematischer Größen. Diese beiden Unendlichkeiten sah er im Bereich des geschaffenen Seienden (Infinitum in natura naturata/creata) zugehörig. Gegenwirkend dazu beschreibt er das Infinitum in natura naturans, was das Unendliche in der erschaffenen Natura, welches alleinig in Gott ist, meint. (Vgl. Tapp 2005: 108; Tapp 2008: 236). Das Infinitum in Deo, wie der Name schon verrät, deutet auf ein vollkommenes außerweltliches Sein hin oder anders gesagt, beschreibt dieses die transzendente Unendlichkeit Gottes. (Vgl. Tapp 2008: 236; Pfeifer 2017: 1).

Der Forscher blieb in seiner Begriffsausdifferenzierung des Aktual-Unendlichen nicht immer einheitlich. Vereinzelt unterschied er lediglich zwischen Absoluten und

[8] Kategorematisch oder auch tautosemantisch beschreibt eine Art sprachlicher Ausdrücke, die selbstständig als Subjekt oder Prädikat angeführt werden können und zugleich, unabhängig vom kontextuellen Zusammenhang, Bedeutung besitzen (zum Beispiel: alle Eigennamen und Verben).
Stattdessen verfügen Begriffe synkategorematischen Charakters über keinen zentralen Wortinhalt. Solche Wortgebräuche erlangen ausschließlich in der Beifügung zu einem Kategorem (einem Nomen oder Verb) vollständigen Sinngehalt. (Vgl. Meier-Oeser: 1; Prechtl 2008: 1).

Transfiniten, zeitweise unternahm er wiederum, wie schon oben erwähnt, eine Dreiteilung des Aktual-Unendlichen. (Vgl. Pfeifer 2017: 2f).

2.5.3. Vertragen sich die verschiedenen Unterscheidungen bei Cantor?

Trotz der Charakterisierung des Transfiniten als ein vermehrbares Aktual-Unendliches, identifiziert Georg Cantor ebendieses in vielerlei Hinsicht als beschränkt:

> Jede einzelne transfinite Zahl ist durch eine größere transfinite Zahl beschränkt, das Transfinite generell ist durch das Absolute beschränkt (vgl. Pfeifer 2017: 3).

Demnach scheint es so, als würde der Mathematiker aktual-unendliche Zahlen als Potenziell-Unendliche interpretieren. Hingegen akzentuierte Cantor selbst die Unvermischtheit des Transfiniten mit dem Potenziell-Unendlichen (vgl. Pfeifer 2017: 3).

> Das Potentiell-Unendliche ist nicht in sich bestimmt, fest und unveränderlich, sondern ein in Veränderung begriffenes Endliches. Aktual-unendliche Zahlen sind jedoch in sich bestimmte Größen, denen nur eine bestimmte unendliche Größe zukommt (vgl. Pfeifer 2017: 3).

Zumal unterstrich der Wissenschaftler, dass das Transfinite wohl die Eigenschaft mit dem Endlichen teile aber auch weiterhin unbegrenzt vermehrbar sei. Im Gegensatz dazu gilt das Absolute als wesentlich unvermehrbar (vgl. Tapp 2005: 80).

Eine zum Vorschein kommende Frage ist, ob das Transfinite folglich gesehen nicht doch eigentlich endlich sei. An dieser Stelle kristallisieren sich nun die unterschiedlichen Aspekte des Unendlichkeitsbegriffs heraus, die in den verschiedensten wissenschaftlichen Disziplinen aufgegriffen, diskutiert, analysiert und interpretiert werden. (Vgl. Pfeifer 2017: 3).

2.5.4. Der Mengen- und Unmengenbegriff nach Cantor

Für Cantor selbst stand der Mengenbegriff nicht von Beginn an fest. Wie üblich im Verlauf einer Forschungsentwicklung variierten wiederholt die Bezeichnungen. Anfangs sprach der Mathematiker von einer Wertereihe, danach von Werte- und Punktmenge, bis hin zu Inbegriffen. Die W e r t e r e i h e kennzeichnete er als eine Aufzählung der Werte ins beliebig Kleine oder Große $(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$. Unter einer W e r t e m e n g e verstand Georg Cantor eine gegebene endliche oder auch unendliche

Anzahl von Zahlengrößen. Die Punktmenge ähnelte seiner Vorstellung hinreichend der Wertemenge. Sie umfasst eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten auf einer Geraden. An dieser Stelle der Forschung rückte zum allerersten Mal die Menge selbst als Betrachtungsgegenstand in den Vordergrund. Die Bezeichnung Inbegriff kann man zum einen seinem Briefverkehr mit Richard Dedekind entnehmen, ebenso wie seinem aus dem Jahre 1874 stammenden Aufsatz. Darunter sah er alle positiven ganzzahligen Individuen oder positiven reellen Zahlengrößen. (Vgl. Schneider 2017: 15; Pfeifer 2017: 1; Tapp 2008: 234, 236).

Laut Ludwig Neidhart baute Cantor seine Mengenlehre nicht auf formalen Axiomen auf. Stattdessen bezog er sich mehr auf einen intuitiven Mengenbegriff, da er darunter keine konkreten, sondern – im Sinne der platonischen Ideen – reale abstrakte Gedanken, die frei von jeglichen Zeit- und Subjektbezügen sind, wahrnahm. Dieser speziellen platonischen Denkweise hinsichtlich Mengen werden noch zweierlei Eigenschaften zuteil, um die ursprünglich richtige Vorstellung des Bedeutungsinhalts zu gewähren: Zum einen muss der Inhalt eine Gesamtheit von Individuen bilden, welches eine Gesamtheit von wohlunterschiedenen Objekten (= Elementen) zu einem Ganzen meint. Zum anderen zählt lediglich die reine Gesamtheit dieser Elemente zum Inhalt. Das bedeutet, dass die Denkform eine gewisse Abstraktheit aufweisen muss, sodass jeder Zusatz zum bloßen Vorhandensein dieser Elemente, wie etwa eine vorausgesetzte Anordnung, keine dezidierten Richtlinien verlangt. (Vgl. Neidhart 2008: 220f). Somit definiert Cantor den Mengenbegriff auf folgende Weise:

> Eine Menge M ist eine Denkform, die eine reine Gesamtheit von Individuen beinhaltet, welche die Elemente der Mengen heißen. (Neidhart 2008:221)

Neidhart folgert daraus für sich das wichtigste Anliegen der Mengenlehre, welches die Gleichbehandlung von beliebigen Vielheiten (oder allgemeiner gesprochen: Gesamtheiten) und Individuen ist. Eine Menge stellt demnach ein neues Individuum dar, welches die Gesamtheit einer gewissen Anzahl, die auch gleich 0 sein kann, von Individuen repräsentiert.

Eine Schwierigkeit im Denken von Vielheiten, die laut seinem Brief an Dedekind 1889 Cantor selbst bemerkte, liegt bei der Unterscheidung von „relativ kleinen und übersichtlichen“ unendlichen Vielheiten und „unvorstellbar großen“ unendlichen Vielheiten. Der Mathematiker bezeichnete letztere Vielheiten, die alle Grenzen unserer Vorstellung sprengen, als inkonsistent unendlich beziehungsweise absolut unendlich, oder prägnanter zusammengefasst: als eine Unmenge. Einer Unmenge kommen zwei Charakteristiken zu. Einerseits beschreibt es etwas überaus Großes, andererseits kann es auch als Negation einer Menge verstanden werden, woraus sich die dazugehörige Definition formulieren lässt (vgl. Neidhart 2008: 221ff):

> Eine Unmenge oder inkonsistente Vielheit ist eine Vielheit, die so groß ist, dass die dazugehörigen Individuen nicht in einer Menge enthalten sind. (Neidhart 2008: 223)

Unter der präziseren Bezeichnung konsistente Gesamtheiten verdeutlicht man Gesamtheiten, denen eine Menge selbst entspricht. So gehören dieser sowohl endliche wie auch unendliche Gesamtheiten an. Größer als konsistente Gesamtheiten sind inkonsistente Vielheiten (Unmengen), die keiner Menge entsprechen.

Mengen wie auch Unmengen fasst man zusammen zum Begriff der Klasse. Eine Klasse entspricht – regressiv gesehen – einem Objekt, das entweder eine Menge oder eine Unmenge ist.

Die an dieser Stelle angeführte Abbildung 3 (Neidhart 2008: 223) soll besseren Aufschluss zu der Beziehung von Gesamtheiten und (Un)Mengen geben.

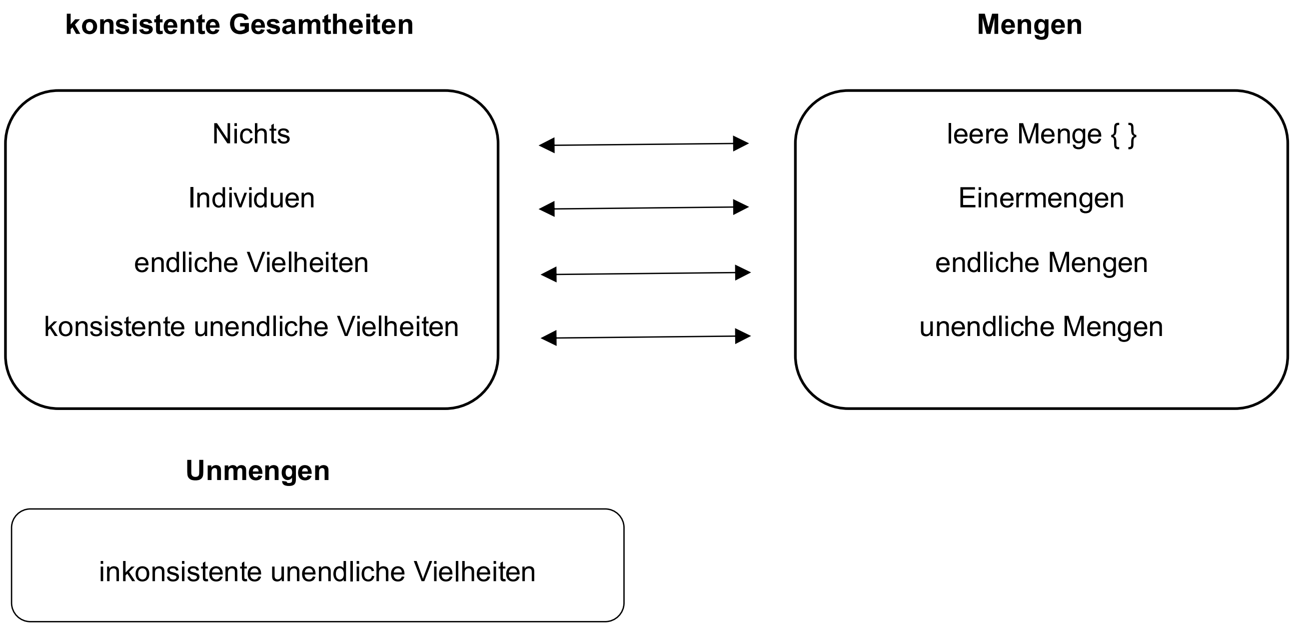


Abbildung 3: Beziehung von Gesamtheiten, Mengen und Unmengen (Neidhart 2008: 223)

2.5.5. Definition der unendlichen Menge

Möchte man die Größenunterschiede zweier Mengen verdeutlichen, so erfolgt dies in der Mengenlehre mittels Relationen. Eine Relation zwischen zwei Mengen ist eine Zuordnung der einzelnen Elemente beider Mengen, welche mit Pfeilen illustriert wird. Dabei unterscheidet man drei Arten von Zuordnungen, wie in Abbildung 4 (Neidhart 2008: 225) erkenntlich:

Ist eine Relation linkseindeutig, so geht von jedem Element der Menge A nur ein Pfeil aus. Die Relation heißt rechtseindeutig, wenn auf jedes Element der Menge B nur ein Pfeil zeigt. Ist die Relation sowohl rechts- wie auch linkseindeutig, nennt man diese beidseitig eindeutig oder Bijektion, welche zur Eigenschaft hat, dass sie alle Elemente von A und B eins zu eins gegenüberstellt. (Vgl. Neidhart 2008: 225).

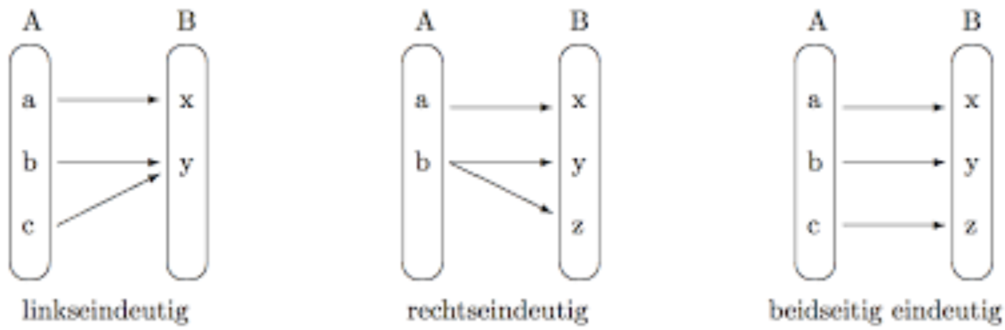


Abbildung 4: Relationsarten (Neidhart 2008: 225)

Für die Größenunterscheidung von Mengen gibt es zwei Varianten, wie diese vollzogen werden kann. Der in der Mengenlehre üblichere Vergleich nennt sich relationstheoretischer Größenvergleich (vgl. Neidhart 2008: 225). Dieser besagt:

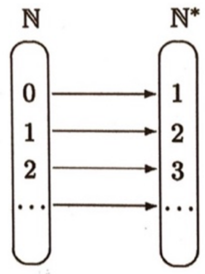
> Zwei Mengen A und B heißen relationstheoretisch gleich groß oder gleichmächtig, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt. Gibt es keine Bijektion, wohl aber eine links- bzw. rechtseindeutige Relation zwischen A und B, heißt A relationstheoretisch größer bzw. kleiner als B. (Neidhart 2008: 225f)

Die zweite Art, der ergänzungstheoretische Größenvergleich, wird vermehrt im alltäglichen Sprachgebrauch angewendet (vgl. Neidhart 2008: 226) und man versteht darunter:

> Eine Menge A heißt ergänzungstheoretisch kleiner bzw. größer als B, wenn A eine echte Teilmenge von B bzw. B eine echte Teilmenge von A ist. (Neidhart 2008: 226)

Dabei fällt auf, dass für endliche Mengen die beiden Kategorien in einem gewissen Sinne konvergieren, während das im Unendlichen nicht der Fall ist. Dort kann eine unendliche Menge A nämlich ergänzungstheoretisch kleiner und gleichzeitig trotzdem relationstheoretisch mit einer Menge B gleich sein (vgl. Neidhart 2008: 226f), wie die beiden angeführten Beispiele in Abbildung 5 (Neidhart 2008: 226f) zeigen.

1. Beispiel: Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist ergänzungstheoretisch größer als die Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen ohne Null – sie ist um genau ein Element größer – aber relationstheoretisch sind beide gleich groß.



2. Beispiel: Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist wiederum ergänzungstheoretisch größer als die Menge $\mathbb{N}_g$ der geraden Zahlen – sie ist sogar um unendlich viele Elemente größer – und dennoch sind auch diese beiden Mengen relationstheoretisch gleich groß.

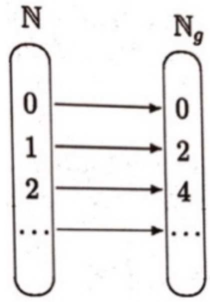


Abbildung 5: Beispiele für ergänzungstheoretisch größer - relationstheoretisch gleich groß (Neidhart 2008: 226f)

Dieses Phänomen ist das zentrale Merkmal unendlicher Mengen, welche von Cantor und Dedekind folgendermaßen definiert wurden (vgl. Neidhart 2008: 227):

> Eine Menge heißt unendlich, wenn sie mit einer ergänzungstheoretisch kleineren Teilmenge gleichmächtig ist. (Neidhart 2008: 227)

Im Gegensatz zu den früher allgemein gültigen Begriffsbestimmungen und -verständnissen, welche oftmals nicht präzise genug oder teils fälschlich erfasst wurden, bietet nun der Satz von Cantor und Dedekind zu unendlichen Mengen eine unmissverständliche Definition (vgl. Neidhart 2008: 228).

2.5.6. Der Satz von Cantor und seine philosophisch – theologischen Konsequenzen

1890 formulierte Cantor in seiner Arbeit den Satz:

> Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist stets relationstheoretisch größer als M.

Mithilfe von Induktion (indirekter Beweisführung) soll durch einen Widerspruch diese Aussage bestätigt werden: Angenommen es liege eine Bijektion zwischen M und $\mathcal{P}(M)$ vor, wie etwa in Abbildung 6 (Neidhart 2008: 228) suggeriert. Dabei sei M eine unendliche Menge. Ist M endlich, dann ist, $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} > |M|$.

- Induktionsbehauptung: $n < 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsvoraussetzung $n = 1$: $1 < 2 \quad w.A.$
- Induktionsschritt: $n \to n+1$: $n+1 < 2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

$\uparrow$ Voraussetzung

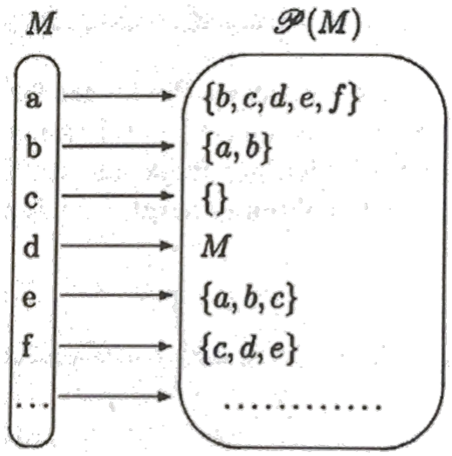


Abbildung 6: Zuordnung der Bijektion zwischen Menge M und Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ (Neidhart 2008: 228)

Um zum gewünschten „ad absurdum“ zu gelangen, entwirft man eine Teilmenge *T* von M, die nicht in der Menge aller Teilmengen von M liegt. Dabei verfährt man folgendermaßen:

1. In der dem Element *a* zugeordneten Menge *{b,c,d,e,f}* ist *a selbst* nicht enthalten. Deshalb wird *a* in die zu konstruierende Menge *T* aufgenommen: *T = {a, ...}. T ≠{b, c, d, e, f},* da a ∈ *T* ist.

2. In der dem Element *b* zugeordneten Menge *{a,b}* ist *b* inkludiert, weshalb nun *b* kein Teil der Menge *T* wird. Die Gestalt von *T = {a, ...}* bleibt somit unverändert und unterscheidet sich durch das Nicht-Beinhalten des Elements *b* von der Menge *{a,b}.*

3. In der dem Element *c* zugeordneten leeren Menge *{ }* ist *c* nicht enthalten, weshalb *c* Element der Menge *T* wird und nun diese die Gestalt *T = {a, c, ...}* annimmt und sich somit von der leeren Menge differenziert.

Zusammenfassend erhält man die unendliche Teilmenge *T,* die von allen rechts in Abbildung 6 aufgeführten Teilmengen verschieden ist. Das führt zum Widerspruch der Annahme, wodurch der Satz von Cantor folglich bewiesen wurde. (Neidhart 2008: 228f).

Die Frage, die sich an dieser Stelle sowohl für Philosophie als auch Theologie ergibt, betrifft die Relevanz für die inhaltliche Konsequenz des Satzes von Cantor im philosophisch-theologischen Kontext. Im Gegensatz zu anderen Autoren, wie das beispielsweise Markus Gabriel zu erkennen gibt, sieht Neidhart in diesem Sinne zwei eindeutige Konsequenzen, wobei letztere hinreichend zu einer theologisch korrelierenden Schlussfolgerung führt. (Vgl. Gabriel 2016: 142 – 150; Neidhart 2008: 229).

Eine kontextuell bedeutsame Auswirkung des Satzes von Cantor entdeckt die Ontologie (Lehre vom Sein) für sich aufgrund der Erkenntnis der Existenz unendlich vieler qualitativ verschiedener Stufen des Unendlichen.

Aus mathematischer Sicht sind diese Stufen vor allem bei den Zahlenmengen und im Mengenverständnis gut erkennbar. Die unterste Stufe der Unendlichkeit wird als abzählbare Unendlichkeit bezeichnet, zu der die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ebenso wie die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zählen. Auf der zweiten Stufe – oder auch kontinuierliche Unendlichkeit genannt – finden sich Potenzmengen $\mathcal{P}(M)$ und alle damit gleichmächtigen Mengen wieder, wie etwa die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und alle kontinuierlichen Mengen, welche Strecken, Geraden, Ebenen und ganze Räume beinhalten. Laut des Satzes von Cantor existiert auch hier wiederum eine nächsthöhere Stufe, die als funktionale Unendlichkeit verstanden wird. Diese umfasst die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ sowie die Mengen aller reellen und komplexen Funktionen. Nach dem Satz von Cantor lassen sich unzählige solcher Stufen bilden, solange bis man am Ende dieser unendlichen Treppe schließlich an der Unmenge angelangt ist.

Zu alldem ergibt sich aus dem Satz von Cantor eine weitere wesentliche Konsequenz für die metaphysische Psychologie (Lehre vom Wesen des Menschen): Aus dem logischen Konsens heraus zeigt sich, dass es keine größte Menge gibt. Nach erkenntnistheoretischer Sicht kann dies so aufgefasst werden, dass aus jeder Erkenntnis eine weitere Erkenntnis entstehen kann, dessen Inhalt umfassender ist als die zuvor erfahrene. Kurz gesagt meint das nichts anderes als die stetige erweiterungsfähige Erkenntnis des Menschen. Das hat zur Folge, dass einerseits die Chance der allezeit überschreitbaren Möglichkeit der eigenen und gegenwärtigen Wissensgrenzen besteht, aber zugleich niemals der Zustand einer Allwissenheit erreicht werden kann. (Vgl. Neidhart 2008: 229f). In Anbetracht dessen versteht Neidhart die menschliche Erkenntnis als potenziell unbegrenzt[9] und erklärt dazu:

> Versuchen wir, etwas wirklich absolut Grenzenloses zu denken (z. B. die Unmenge $\mathbb{D}$), so stellen wir fest, daß es sich uns als ein inkonsistent Unendliches darbietet, dass wir auch auf der abstrakt-mathematischen Ebene nicht mehr adäquat begreifen können. (Neidhart 2008: 230)

Hierbei sieht er auch die Bestätigung des Faktums der theologischen Einstufung des Menschen:

> wonach dieser [Mensch] in der Mitte zwischen dem in festen Grenzen eingeschlossenen Teil der Schöpfung und dem absolut unendlichen Gott steht. (Neidhart 2008: 230)

2.6. Das Reflexionsprinzip und sein theologischer Hintergrund

Im Jahr 1960 warf Azriel Levy das Reflexionsprinzip als ein Fundamentalaxiom auf, von dem die Existenz hochgradig unendlicher Mengen ableitbar ist:

> Zu jeder begreifbaren Eigenschaft einer Unmenge gibt es stets auch eine Menge, welche diese Eigenschaft ebenfalls hat. (Neidhart 2008: 230)

Damit lässt sich eine Vielzahl von vorhandenen unendlichen Mengen ableiten, die einer Unmenge ähneln und folglich auch unermesslichen Umfang besitzen. Anhand des nachstehenden Beweises des Existenzsatzes soll dies deutlich gemacht werden:

> *Existenzsatz:* Es gibt eine Menge mit der Eigenschaft, daß sie unendlich viele Mengen enthält, und mit jeder ihrer Mengen M stets auch deren Potenzmenge $P(M)$ als Element enthält.
>
> *Beweis:* Die Unmenge $\mathbb{D}$ hat diese Eigenschaft, weil $\mathbb{D}$ alle Mengen schlechthin enthält. Per Reflexionsprinzip gibt es also auch eine Menge mit derselben Eigenschaft. (Neidhart 2008: 231)

[9] Etwas, dessen Größe stets vermehrt werden kann, das aber dennoch immer begrenzt bleibt, [...], während das aktual Unbegrenzte vollkommen unbegrenzt ist. (Neidhart 2008: 230)

Dass auch das Reflexionsprinzip nicht leichtfertig allgemein anwendbar ist, zeigt folgende Überlegung:

> Zum Beispiel hat die Unmenge $\mathbb{D}$ die Eigenschaft, „größer als jede Menge“ zu sein. Daraus darf man nicht schließen, daß es auch eine Menge gäbe, die größer als jede Menge ist (was ja ein Widerspruch wäre). (Neidhart 2008: 231)

Hierbei liegt der Fehler bei der Missachtung des expliziten Grundverständnisses, dass das Reflexionsprinzip ausschließlich von begreifbaren Eigenschaften spricht. Nicht- begreifbare Eigenschaften – wie oben als Beispiel angeführt als „größer als jede Menge“ zu sein – können nicht auf das Prinzip umgemünzt werden, da es sich hierbei um Merkmale einer Unmenge handelt, die nicht restlos begriffen werden können.

Das Reflexionsprinzip lässt sich simpel mittels menschlicher Begrenztheit kognitiven Fassungsvermögens und der Eingeschränktheit der Denkfähigkeit erklären: Möchte man versuchen, eine Unmenge, welche inkonsistent unendlich ist, zu begreifen, so wurde letzten Endes lediglich eine überaus große Menge gedacht, in der sich nur eine Eigenschaft der Unmenge wiederfindet, sprich das Gedachte eine Teilmenge von $\mathbb{D}$ ist. Die Unmenge als komplexes Ganzes mit all ihren Exklusivattributen kann nicht begriffen, nur „reflektiert“ werden.

An dieser Stelle des Erklärens und vernunftbasierten Denkens (des Philosophierens) bezüglich der Unmenge kommen sich die beiden Wissenschaften Mathematik und Theologie äußerst nahe. Schon Papst Gregor der Große (540-604) tätigte eine Aussage hinsichtlich der unendlichen Erhabenheit Gottes, welche Ähnlichkeiten zum Begriffsverständnis der Unmenge als Allklasse aufweist. (Vgl. Neidhart 2008: 230f).

> Was immer nun von ihm [Gott] geschaut wird, ist noch nicht er selbst, sondern ist unterhalb von ihm. (Neidhart 2008: 231)

Auch das Judentum und die alttestamentlichen Schriften erkennen an, dass Gott mit Attributen geschmückt werden darf, ohne dabei dem Bilderverbot zu widersprechen. Denn die Eigenschaften Gottes sind niemals Gott und nehmen niemals Gott vollkommen ein. Schlussendlich bleiben sie stets nur Zusprüche. (Vgl. Joseph 1987: 687f; Lenzen 1995: 21-110).

Aus der Sicht Neidharts ergibt sich aus den vorangegangenen Ausführungen, dass die Allklasse $\mathbb{D}$ und der theologische Gottesbegriff in engem Verhältnis zueinanderstehen und $\mathbb{D}$ eine Art Darstellung göttlichen Wesens ist. Zudem erfasst der Autor der herangezogenen Quelle Gott als ein Individuum, wodurch dieser nicht als Allklasse per se verstanden werden darf. Gott bleibt jedoch allwissend, wodurch dieser vollkommen und verständlich erfassen kann, sodass Neidhart die Allklasse $\mathbb{D}$ als wesentlichen Inhalt des göttlichen Verstandes definiert. Dahingehend kann auch ein vollständiges Begreifen der Allklasse einem vollständigen Begreifen Gottes gleichkommen, wonach das Reflexionsprinzip der modernen Mengenlehre dahingehend als theologisches Prinzip verstanden werden kann. (Vgl. Neidhart 2008: 231f).

3. Unendlichkeit vom Standpunkt der christlichen Theologie

Wie in 2.6. angesprochen, erweist sich das Problem des Unendlichkeitsbegriffs im (philosophischen) Denken als verknüpfendes Element von Mathematik und der philosophischen[10] Theologie. Allerdings liegt der Fokus bei der jeweiligen Wissenschaft auf einem anderen Betrachtungspunkt.

Die Theologie[11] beschäftigt sich zumal mit der Frage nach Gott. Sie gibt als ihre Kernaufgabe an, sich mit dem Wesen Gottes und seinem Offenbarungsgehalt – eingebettet in mehreren unterschiedlichen Teilbereichen und wissenschaftlichen Disziplinen[12] durch Interpretation, Schriftexegese, Reflexion und historisch-archäologische Befunde – genauer auseinander zu setzen (vgl. Nolte 2022: 1, Katholische Fakultät Universität Wien 2022: 1). Zentrum der philosophischen Arbeit bilden in Anbetracht auf den Unendlichkeitsbezug nicht etwa die Fragen nach der Unendlichkeit oder dem Unendlichen per se, sondern vielmehr die Fragen: Ist Gott unendlich – und wenn ja, inwiefern ist er *der* Unendliche? (Vgl. Schaede 2008: 349f.).

Kurz gefasst bedeutet das: In ihren beiden Disziplinen Metaphysik und philosophische Gotteslehre spricht die Theologie von der Unendlichkeit in einem umfassenden Sinne (mit möglichem Gottesbezug). In einem Interview von Elke Zapf äußert sich Wolfgang Schoberth vom Lehrstuhl für Systematische Theologie der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg auf die Frage, ob es in allen Religionen die Verknüpfung von Unendlichkeit mit Gott gibt, folgendermaßen:

> Das Wesen des Unendlichen ist insbesondere ein Thema der Metaphysik – aber nicht nur sie stellt die Fragen nach dem Jenseits unserer Erfahrung. Alle Religionen wollen wissen „Wo kommen wir her?“, „Wo gehen wir hin?“, „Was gibt unserem Leben und Handeln Sinn?“ und finden andere Bilder für das, was jenseits unserer Grenzen liegt. Und jede Religion entwickelt andere Praktiken, um der Unendlichkeit näherzukommen – Meditieren, Yoga, Beten. In der Geschichte der christlichen Theologie ist die Unendlichkeit eines der Attribute Gottes – die Schöpfung dagegen ist ihrem Wesen nach endlich. (Zapf 2019: 1).

Hingegen dazu zielt die Mathematik auf das quantitative Problem, mit der wesentlichen Frage nach dem *Wieviel*, ab. Trotz unterschiedlicher Auffassung gibt es immerhin

[10] Bestehend aus den Teilbereichen: Metaphysik, philosophischer Gotteslehre, Religionsphilosophie, philosophischer Anthropologie, Epochenphilosophie, interkultureller Philosophie und Sprachphilosophie (vgl. Katholische Fakultät Universität Wien 2022: 1).

[11] griechisch: theos – Gott, logos – das Wort; Wissenschaft von Gott (vgl. Nolte 2022: 1).

[12] Bibelwissenschaft, Religionsgeschichte und allgemeine Religionswissenschaft, Kirchengeschichte, Kirchenrecht, Metaphysik, Philosophie, Ethik, Moral-, Pastoral-, Fundamentaltheologie und systematische Theologie (Dogmatik, Christologie) (vgl. Katholische Fakultät Universität Wien 2022: 1).

wechselseitige Implikationen der beiden Forschungsrichtungen. Speziell für gehaltvolle philosophische Aussagen – wie zum Beispiel, dass das Unendliche aufgrund der mengentheoretischen Erkenntnisse nicht mehr einfach als Unbestimmtes angesehen werden kann – wird dies sichtbar. (Vgl. Tapp 2008: 246f.)

3.1. Die Fragen nach Gott

Der Sinn der philosophischen Gottesfrage ergibt sich aufgrund der *natürlichen* Gotteserkenntnis mittels sinnlich wahrnehmbarer Wirklichkeiten, die Menschen als Zeichen verstehen, welche auf ein potenzielles Dasein eines Transzendenten und Absoluten deuten. (Vgl. Schröder 2007: 1)

Im historischen Hinblick stellt die heutige, stark säkular geprägte Gesellschaft die Gottesfrage viel fokussierter in den Diskussionsmittelpunkt, als dies zuvor je notwendig war. Im Gegensatz zu den vergangenen Generationen, in denen die Jugend die Werte der Älteren vertrauensselig übernahm und nur in geringer Form abwandelte, kann heutzutage von dieser Haltung nicht mehr gesprochen werden. Die einzigen Konstanten, die zugleich auch die charakterisierenden Merkmale der modernen Gesellschaft bilden, scheinen die hektische Betriebsamkeit, eine Wegwerfkultur und Aussteigergesellschaft zu sein, welche sich seit Anbeginn des technischen Fortschritts rapide erweitert. Diese neuartige Lebensform verlangt es, über Vergangenes kritisch nachzudenken – ebenso den Gottesglauben zu hinterfragen – und nur Essenzielles beziehungsweise für die Zukunft Nützliches mitzunehmen. Das hat zur Folge, dass sich ein Gefühl der Unsicherheit, des Zweifels und des Auf-sich-selbst-Verlassens ausbreitet. Zwar offenbart sich eine gewisse, rational fundierte Bewältigung der Welt und des Lebens, doch sind es vor allem junge Menschen, die nicht ganz von dieser rationalistischen Verhaltensweise überzeugt sind. Dies scheint dahinzugehen, dass auf diesem wackeligen Fundament der Mensch auf Dauer gesehen nicht vom Brot allein leben[13] kann. Am Ende stellen sich nicht nur die Fragen, ob es einen Gott gibt und wie man sich gegebenenfalls seiner Gegenwart versichert, sondern im Zuge der ansteigenden weltweiten Solidarität, ob eine Differenzierung zwischen den

[13] Er aber antwortete: In der Schrift heißt es: Der Mensch lebt nicht vom Brot allein, sondern von jedem Wort, das aus Gottes Mund kommt. (Mt 4,4) [Neue Einheitsübersetzung 2016]

verschiedenen Glaubensweisen der Religionen noch zu rechtfertigen ist. (Vgl. Schwarz 1985: 5ff).

Letztere stellt eine mögliche Basis eines zeitgemäßen interreligiösen Dialogs dar, doch die Frage nach Gott und seiner Existenz beschäftigt die philosophische Theologie, speziell in der Metaphysik und der philosophischen Gotteslehre, schon lange. In ihr finden sich unterschiedliche Gottesbeweise (inklusive kritischer Gegenargumente) wieder, die angesichts der historischen Gegebenheiten gesellschaftlich immer relevanter wurden.

3.2. Die philosophisch-theologischen Disziplinen: Metaphysik und Philosophische Gotteslehre

Metaphysik, auch bekannt als „erste Philosophie“, leitet sich vom griechischen *meta ta physica* ab, was so viel bedeutet wie, „das, was der Physik übergeordnet ist“ oder „was nach der Physik kommt“. Auf Basis historischer Entdeckungen lässt sich dieser Begriff zurückdatieren bis zum 1. Jahrhundert vor Christus. Der Herausgeber der aristotelischen Werke – Andronikos von Rhodos – bezeichnete sie derartig, da diese das Fundament zu transzendenten, über die Erfahrung hinausgehenden Fragen bilden. Kernaufgabe der Metaphysik ist die Ontologie mit der Frage nach dem „Sein als Sein“. (Vgl. Erhard 2021: 1).

Die philosophische Gotteslehre (auch philosophische Theologie genannt) ist eine spezielle geisteswissenschaftliche Richtung innerhalb der Theologie. Im Zentrum befindet sich die Frage nach Gott, die mit Hilfe philosophischer Ansätze hinreichend durchdacht wird. Anders als die Theologie stützt sich die Philosophie auf vernunftbasierte Erkenntnisse und Argumentationsformen, unabhängig von Autoritätsaussagen, Offenbarungs-, Glaubens- oder Traditionsinhalten. (Vgl. Sans 2018: 8; Marschütz 2014: 179f). Die Gemeinsamkeit von Theologie und Philosophie erschließt sich darin, dass beide Geisteswissenschaften thematisch auf die Letztbegründung ausgerichtet sind (vgl. Wenz 2016: 18). Obwohl sich die philosophische Gotteslehre auf ihren vernunftbegründeten Modus mit Gott konzentriert, darf aber nicht vergessen werden, dass dieser schlussendlich ein Gegenstand religiösen Bewusstseins ist. (Vgl. Sans 2018: 7f).

> Ein Gott, von dem nur die Philosophen, nicht aber die Gläubigen etwas wissen, wäre genauso ein Unding wie ein Gott, an den zwar einige Menschen glauben, der sich aber nicht denken lässt. (Sans 2018: 8)

3.2.1. Historische Entwicklung der Metaphysik

Die Sichtweise und das Verständnis gegenüber dem Metaphysikbegriff variierten im Laufe der Zeit. So untergliederte man die Metaphysik im Mittelalter in eine generelle, die sich mit der Frage des Seins beschäftigte, und eine spezielle Metaphysik, die wegen ihrer Inhalte Weltordnung (griechisch: kósmos), Seele (griechisch: psyché) und Gott (griechisch: theos) den einzelnen Fachrichtungen Physik (Kosmologie), Psychologie und Theologie zugeordnet wurde. (Vgl. Erhard 2021: 1).

Während des 17. Jahrhunderts verstand man im Sinne des Rationalismus die Metaphysik als Basis dessen, worauf alles Wissen aufbauen konnte. René Descartes (1596-1650) verglich die Prinzipien der Philosophie mit einem Baum, wonach die Wurzeln die Metaphysik, der Stamm die Physik und die Zweige alle weiteren Wissenschaften ergeben. Zur Zeit der Aufklärung im 18. Jahrhundert übte Immanuel Kant (1724-1804) Kritik an der Möglichkeit einer metaphysischen Wissenschaft. Er betrachtete die entscheidenden Elemente der Metaphysik als Glaubensergebnisse, wonach lediglich die Auswirkungen derer erkenntlich sind. Trotz allem empfand Kant die Inhalte als unabdingbare moralische Postulate. (Vgl. ebd.: 1).

Aufgrund des verstärkten Hervorkommens des Atheismus und Positivismus im 19. Jahrhundert durch Karl Marx (1818-1883) und Friedrich Nietzsche (1844-1900) sah man die metaphysische Epoche als schwindend an. Doch spiritualistische Gegenbewegungen dieser Zeit bestätigen das Gegenteil. Im vorherigen Jahrhundert sprach Martin Heidegger (1889-1979) in seiner nihilistischen Denkweise von der Metaphysik als etwas zu Überwindendes, da sie im Laufe ihrer Geschichte die Seins-Frage mittels des Begriffsdenkens als eine letzte Grundlage, wie Gott oder die Vernunft sie wäre, beantwortet hätte. Konträr dazu bediente sich die zeitgenössische Philosophie, welche unabhängig von theologischen Einflüssen ist, der Metaphysik in Bezug auf ihre Untersuchungen zu Grundlagen der Wissenschaften und Grenzen des Denkens. (Vgl. Erhard 2021: 1).

3.2.2. Historische Entwicklung der philosophischen Gotteslehre

Auch das Verständnis, die Inhalte und die Bezeichnung hinsichtlich der philosophischen Gotteslehre blieben nicht immer ein und dasselbe (vgl. 3.2.1.). So sprach bereits Aristoteles von einer göttlichen Wissenschaft (theologike episteme), die sich mit der Frage nach dem unbewegten Beweger, dem absoluten Prinzip der Wirklichkeit, beschäftigte. Als göttlich betrachtete man ebendiesen letzten Urgrund der Welt, wonach alles Seiende als eine auf ein Ziel hin gerichtete Bewegung – von Möglichem zu Wirklichem – verstanden wurde. Diese Assoziation fand schlussendlich auch Einzug in die Gottesbeweise bei Thomas von Aquin (1225-1274). (Vgl. Sans 2018: 9; Burkard 2008: 1).

Die Mitte des 18. Jahrhundert ist im historischen Fachjargon auch als die sogenannte „Sattelzeit" bekannt, da sich damals zum ersten Mal der Gottesbegriff radikalst wandelte. Gott wurde nicht mehr nur als höchstes Wesen und Ursprung der Welt wahrgenommen, sondern zudem als von dem Menschen nach seinem Wünschen und Bedürfnissen geformtes Idol kritisiert. (Vgl. Sans 2018: 9).

Parallel zu diesem Umdenken fokussierte sich Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) im Bereich der philosophischen Gotteslehre zunehmend auf die Theodizee-Frage. Diese fordert die Rechtfertigung eines – speziell nach christlichem Verständnis – liebenden und allmächtigen Gottes angesichts des Leids und der Leidenden in der Welt. (Vgl. kathweb o. J.: 1; Leibniz 1996: 287).

Christian Freiherr von Wolff (1679-1754) hingegen kennzeichnete die philosophische Gotteslehre als theologia naturalis/rationalis. Sie stellt eine Theologie dar, die alleinig mittels der Vernunft betrieben wird und sich aufgrund der Tatsache, dass sie sich denselben Methoden bedient wie die Philosophie, eine Gleichrangigkeit gegenüber anderen philosophischen Fachrichtungen schafft. Die Kernfrage der Gotteslehre ist jene nach der Wirklichkeit [Gottes]. Während bei Aristoteles die philosophische Gotteslehre den Abschluss seines Metaphysikverständnisses kürte, schuf Wolff die Basis eines Gleichverständnisses der Disziplin zu anderen. (Vgl. Muck 1983: 2).

Ein Jahrhundert später charakterisierte Martin Heidegger die philosophische Gotteslehre (negativ konnotiert) als „Onto-Theo-Logie". Er kritisierte an der Lehre vom Seienden und vom Sein den zuvor schon manifestierten Grundgedanken, in welchem Gott als das erste und oberste Seiende verankert sei. (Vgl. Sans 2018: 11).

3.2.3. Das Verhältnis der philosophischen Gotteslehre zur Metaphysik

Im Gegensatz zu Aristoteles, der die Gottesfrage als Mitte des metaphysisichen Bemühens sieht, versteht Wolff die philosophische Gotteslehre als eigene Form der Metaphysik mit Fokus auf das Göttliche und Absolute. Dementsprechend lässt sich hierbei auch ein substanzieller Zusammenhang zwischen philosophischer Gotteslehre und Metaphysik erkennen. Die eigentliche Korrelation der beiden Disziplinen findet sich aber im grundlegenden Gleichheitsprinzip wieder, wonach das Göttliche ebenso wertfrei zu beforschen und analysieren ist wie dies bei anderen philosophischen Themen und Gegenständen vollzogen wird.

Aufgrund dieses verbindenden Verständnisses zwischen Metaphysik und philosophischer Gotteslehre zeichnen sich für letztere – speziell auch in der aktuellen Zeit – existenzgefährdende Anbahnungen ab. Religionskritiker wie zum Beispiel Feuerbach, Marx, Nietzsche oder Freud bezogen sich anfänglich immer auf die Gotteslehre selbst, bevor sie die Metaphysik hinterfragten. Doch der eigentliche Hauptvorwurf gegen die philosophische Gotteslehre ist nicht die Infragestellung der Metaphysik, sondern ihr thematischer Kernbereich, der rational unfassbar und nahezu unbeweisbar bleibt. (Vgl. Esterbauer 2005: 5).

3.3. Gottesbeweise

> Es liegt in der Natur des Menschen zu zweifeln und zu hinterfragen, nachzuforschen. (Beckert 2004: 1)

Das Aufkommen der Gottesbeweise ist stark verknüpft mit den historischen Entwicklungen und dem Denken der Menschen innerhalb der jeweiligen Epochen. Die brisante Hinterfragung, genaue Erforschung und Begründung von stets angenommenen oder geglaubten Gegenständen eröffnete sich erst in der frühen Neuzeit und spitzte sich im 18. Jahrhundert, in der Zeit der Aufklärung, radikalst zu. (Vgl. Beckert 2004: 1).

> In den Augen vieler Menschen ist Mathematik ein Garant für Wahrheit. Nicht nur Naturwissenschaften, sondern auch Sozial-und Geisteswissenschaften versuchen, sich auf mathematische Forschungsmethoden zu stützen. (Maaß & Götz 2021: 1)

Mittels Gottesbeweise versucht man das „Problem“ nach der tatsächlichen Existenz von Gottheiten (oder eines Gottes) durch logische Verfahren der Vernunft – bestehend aus Definitionen, Axiomen und Theoremen – zu rechtfertigen. Dieser Forschungsgegenstand erweist sich, ungeachtet seines Namens, viel mehr in der Philosophie als in der Theologie beheimatet. Die Frage nach Gott stellt die Königsdisziplin in der Philosophie dar, da sie zugleich rationale Mittel und Möglichkeiten wie auch die kognitiven Schranken und Wissensgrenzen offenbart. Sie stellt die Geisteswissenschaft vor die Herausforderung, einen metaphysischen Gegenstand mithilfe von rein rational nachvollziehbaren und logischen Aussagen zu beleuchten, um schlussendlich eine eindeutige Conclusio einer wahrhaftigen Existenz oder Nichtexistenz Gottes abzugeben. Trotz vernunftgemäßer Überlegungen bleibt es allerdings nicht ausgeschlossen, Gottesbeweise an speziellen Punkten der Beweisführung anzufechten oder diese mit Widerlegungen zu entkräften. Ein erfolgreicher Gottesbeweis ist demnach eine Abfolge von logisch richtigen Sätzen, bei der der letzte Satz „ein göttliches Wesen existiert“, durch kein Argument mehr angezweifelt werden kann. (Vgl. Bromand 2011: 9f).

3.3.1. Mathematisch-logische Beweise und ihre Ziele

Klassisch zählen als logische Beweise deduktive[14] und induktive[15] Begründungen, bestehend aus bereits anerkannten Sätzen, logisch richtig abgeleiteten und daraus entstandenen Folgerungen, Zwischenergebnissen und Schlüssen. Auf Seiten der Mathematik schaffen Axiome, welche absoluten Wahrheitsgehalt besitzen, die Grundlage für weitere logische Folgerungen (Theoreme). Ein mathematisches Theorem erhält erst dann seinen Wahrheitsanspruch, sobald dieses mittels direkter – mit Hilfe von deduktiven oder induktiven Argumenten – oder indirekter Beweisführung – im Sinne der Erzeugung eines Widerspruchs zur Ursprungsbehauptung – gewährleistet wird. Deduktive Argumente gehen von einer oder mehreren Prämissen (Voraussetzungen/Vorbedingungen) aus und münden letztlich in einer Conclusio. Die deduktive Beweisführung erfolgt auf Basis von logischen Rückführungen zu Axiomen

[14] Deduktion meint „ableiten“ beziehungsweise „fortführen“ und wird unter anderem als „Stoßrichtung vom Allgemeinen zum Besonderen“ oder anders gesagt als Übergang von Theorie zur Empirie verstanden. Doch auch deduktive Schlussfolgerungen können sich als falsch erweisen, insofern die gesetzten Prämissen gänzlich oder zum Teil falsch sind. (Vgl. Feustel 2021:1).

[15] Induktion bedeutet „herbeiführen“, „veranlassen“, welches meint, dass Sachverhalte oder Beobachtungen auf Grund von zuvor angestellter Abstraktion beziehungsweise Verallgemeinerung eine gewisse Theorie bestätigen oder entkräften. (Vgl. Feustel 2021:1).

und bereits bewiesenen Sätzen, wie folgendes Beispiel demonstriert (Vgl. Beckert 2004: 2; Deutsche Mathematiker-Vereinigung: 1; Evers 2013: 1):

> Prämisse1: Alle A sind B. (Alle Menschen sind Zweibeiner.)
> Prämisse 2: Alle B sind C. (Alle Zweibeiner sind Lebewesen.)
> Conclusio: Alle A sind C. (Alle Menschen sind Lebewesen.)

Ein Beispiel für eine deduktive Beweisführung mit einer „irreführenden“ Conclusio aufgrund einer (teilweise) falschen Prämisse zeigt die nachstehende Behauptung (vgl. Feustel 2021:1):

> Prämisse: Großgeschriebene Wörter sind in der deutschen Sprache Nomen.
> Conclusio: Demnach ist „Großgeschriebene“ im vorangegangenen Satz ein Nomen.

Anders dazu verhalten sich induktive Argumente. Sie bekräftigen mit Hilfe der Prämissen die Conclusio. In dieser Beweisführung treten Argumente auf, deren Prämissen die Conclusio wahrscheinlicher oder unwahrscheinlicher machen, da sie immer generalisiert und für alle betroffenen Objekte zu gelten hat. (Vgl. Beckert 2004: 2). Das altbewährte Instrument dabei ist die Beweisführung mittels vollständiger Induktion, die aufgrund ihrer Struktur[16] eine mathematische Aussage für alle natürlichen Zahlen als wahr oder falsch belegt. (Vgl. Feustel 2021:1; Ziegler 2022: 1).

Generell gilt nicht jedes Argument gleichzeitig als Beweis. Manche Aussagen bedürfen oft keiner Beweisgrundlage, wie das etwa bei Beweisvoraussetzungen der Fall ist. (Vgl. Evers 2013: 1).

Beweise, welche nach dem deutschen Philosophen Wilhelm Essler (1940) deduktive beziehungsweise apriorische Argumente sind, beschreibt er in einer seiner Ausführungen auf eine alltagspraktisch-verknüpfende Art folgendermaßen:

> Wenn jemand sagt, dass etwas logisch ist, so meint er damit, dass das ganz gewiss ist und auch dann wahr wäre, wenn die Welt gerade auf dem Kopf stünde, wenn man gar nicht nachzusehen hätte, wie die Welt beschaffen sei, um erkennen zu können, dass dieser Satz wahr ist [...]. (Ijjas o. J.: 1)

[16] Ein Induktionsbeweis setzt sich zusammen aus $A\ (n)$ – einer Aussage A in Abhängigkeit von n, für alle $n \in \mathbb{N}$ – dem Induktionsanfang („Zeige, dass $A\ (1)$ wahr ist.“), der Induktionsvoraussetzung/-annahme („$A\ (m)$ gilt.“), der Induktionsbehauptung („$A\ (m+1)$ gilt.“) und dem Induktionsschluss („Zeige die Induktionsbehauptung mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung.“) (vgl. Ziegler 2022: 1).

Für logische Beweise gilt: Die Conclusio ist genau dann wahr, wenn alle Prämissen wahr sind und die Folgerung formal korrekt ist, wie das auch in Abbildung 7 (Betz 2018: 1) graphisch nochmals zusammenfassend dargestellt ist (vgl. Ijjas o. J.: 1).

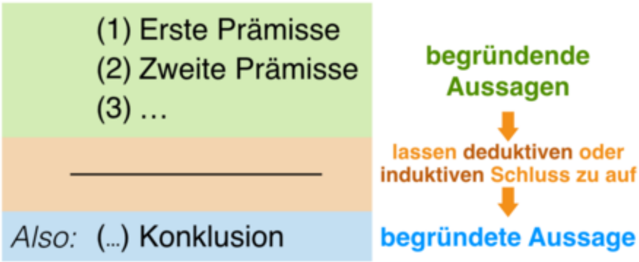


Abbildung 7: Aufbau eines Beweises (Betz 2018: 1)

3.3.2. Die klassischen Gottesbeweise und ihre Kritik

Die klassische Kategorisierung der Gottesbeweise ist auf Immanuel Kant zurückzuführen, welcher zwischen apriorischen[17] und aposteriorischen[18] Beweisen differenzierte. Wie in Tabelle 3 angeführt, zählen zu den typischen apriorischen Gottesbeweisen der ontologische, der kosmologische und der teleologische Gottesbeweis. Als zusätzliche Kategorie ergänzt man heutzutage auch gerne Kants selbst entwickelten moralischen Gottesbeweis sowie den historischen beziehungsweise ethnologischen Gottesbeweis: (Vgl. Schwarz 1985: 57; Evers 2013: 1). Der Unterschied zwischen apriorischen und aposteriorischen Gottesbeweisen beläuft sich auf den Einbezug der Erfahrung. Während apriorische Gottesbeweise unabhängig menschlicher Wissenserkenntnis sind, gründen aposteriorische Gottesbeweise alleinig auf diese, wie das auch in den fünf Wegen (quinque viae) bei Thomas von Aquin erkenntlich wird. (Vgl. Beckert 2004: 1, Evers 2013: 1, Heinle o. J.:1). Zudem entsprechen apriorische Beweise den Grundzügen der natürlichen Theologie, in welcher die Erkenntnisse zur Gottesfrage allein durch die natürlichen Feststellungen des Menschen – ohne Rückbezug göttlicher Offenbarungen – gewonnen werden. Hinsichtlich dessen zeigen sich zwei Methoden dieses Wissenserwerbs: Zum einen aus der Schöpfung und Umwelt (liber naturae), zum anderen über die Wege der Vernunftswahrnehmung (lumen naturale). (Vgl. Schröder 2007: 1).

[17] Von der Erfahrung oder Wahrnehmung; von vornherein, grundsätzlich, vorweg (vgl. Bibliographisches Institut 2022: 1).
[18] Aus der Erfahrung gewonnen; auf Erfahrung gründend; nachträglich (vgl. Bibliographisches Institut 2022: 1).

Beweisart / Aussage	Ontologisch	Kosmologisch	Teleologisch	Moralisch
Prämisse 1	Gott ist ein maximal vollkommenes Wesen. (Definition Gottes)	Das Universum existiert.	Das Universum weist eine gewisse Ordnung auf.	Es gibt moralische Phänomene.
Prämisse 2	Vollkommenheit impliziert Existenz.	Satz von zureichendem Grund.	Ordnung bedarf eines Konstrukteurs.	**Version A:** Es bedarf eines moralischen Gesetzgebers. **Version B:** Moralisches Handeln muss vernünftig sein. Gott ist Postulat praktischer Vernunft.
Prämisse 3	–	Gottes Existenz bedarf keines Grundes.	–	–
Conclusio	Gott existiert.	Gott existiert.	Gott existiert.	Gott existiert.

Tabelle 3: Übersicht der zentralsten Gottesbeweise und ihre Aussagen (Ijjas o. J.: 1)

Bei näherer Betrachtung erweist sich diese Gliederung lückenhaft. Hinsichtlich der aposteriorischen Erfahrungsbeweise gehören zuallererst empirische Ausgangssätze, wie etwa „Es gibt etwas Bewegtes“, von allgemeinen gesetzesartigen Prämissen, die teilweise auch zu Widersprüchen führen können, unterschieden. Dies gilt ebenso für apriorische Beweise. Da in diesem Bereich die Formulierungen niemals eindeutig genug sein können, kann von einer Unschärfe der Aussagen gesprochen werden, um die jeweilige Aussage dem einen oder dem anderen Gottesbeweis zuordnen zu können. Jene Unschärfe könne demnach nur dann behoben werden, indem nur zwei Satzkategorien apriorisch zugelassen werden:

- Sätze der Prädikatenlogik erster Ordnung
- Sätze der finiten Zahlentheorie

Diese Problematik führt zur scheinbaren Folge und gleichzeitig dem Kritikpunkt, dass kaum ein Gottesbeweis apriorisch möglich ist. (Vgl. Weingartner 1998: 35).

Für eine erfolgreiche, anerkannte Beweiskritik bedarf es entweder einer falschen Prämisse oder zumindest einer inkorrekten Folgerung (vgl. Ijjas o. J.: 1). Tabelle 4 zeigt, an welchen Stellen der Beweisführung in den jeweiligen Beweismodi Unklarheiten und Kritikpunkte gefunden wurden.

Beweisart / Aussage	Ontologisch	Kosmologisch	Teleologisch	Moralisch
Problem	Prämisse 2	Prämisse 2 Prämisse 3	Prämisse 1 Prämisse 2	Prämisse 2
Conclusio	?	?	?	?

Tabelle 4: Übersicht der essenziellsten Gottesbeweiskritiken (Ijjas o. J.: 1)

Aufgrund der umfangreichen Thematik wird in den weiteren Subkapiteln nur auf eine klassische Beweisart, nämlich den ontologischen Gottesbeweis nach Anselm von Canterbury inklusive der dazugehörigen Kritik genauer eingegangen. Für Interessierte findet sich ein weiterer ontologischer Gottesbeweis nach mathematisch-logischer Herangehensweise von Kurt Gödel samt Kritik im Anhang.

3.3.2.1. Der ontologische Gottesbeweis nach Anselm von Canterbury

In dem vom mittelalterlichen Theologen und Philosophen Anselm von Canterbury (um 1033-1109) stammenden Werk *Proslogion*[19] findet sich das *„unum argumentum"*, welches später durch Kant als ontologischer Gottesbeweis bezeichnet wurde, wieder. Darin erläutert er die Existenz sowie das Wesen und den Charakter Gottes, die sich der reinen menschlichen Vernunft offenbart (sprich: apriorisch und zugleich frei jeder grundlegenden Glaubensüberzeugung). Folglich bilden keine empirischen Fakten das Fundament dieses Beweismodus, wonach schließlich die Feststellung einer Existenz Gottes hervorgeht, sondern die Ableitung des vorausgesetzten Gottesbegriffs. (Vgl. Beckert 2004: 3, Evers 2013:1, Heinle o. J.:1).

Anselm von Canterbury beginnt seine Beweisführung mit einem Bittgebet und der zentralen Neudefinition des Gottesbegriffs als „denjenigen/etwas, worüber hinaus nichts Größeres (Besseres) gedacht werden kann" im Original: „id, quo nihil maius cogitari potest".

[19] Zu deutsch: Anrede. Ursprüngliche Fassung entstand ca. 1077-78, die endgültige Fassung zwischen 1083 und 1085 (vgl. Asmuth 2018: 79, Holopainen 2020: 1).

> Herr, der du dem Glauben die Einsicht verleihst, verleih mir also, daß ich, soweit du es für nützlich erachtest, verstehe, daß du etwas bist, über das hinaus nichts Größeres gedacht werden kann. (Heinle o. J.:1)

Diese einzigartige Charakterisierung des Gottesbegriffs beruht allerdings nicht auf Canterbury selbst, sondern liest sich schon bei Cicero (106-43 v. Chr.), Augustinus (354-430 n. Chr.) oder Boethius (um 480/485-524 n. Chr.). Seine Errungenschaft besteht darin, diesen Ausdruck zu einem wesentlichen Argument umzufunktionieren. (Vgl. Asmuth 2018: 79).

Anschließend setzt er mit seinen Überlegungen, Hinterfragungen und der Conclusio fort: Im ersten Argumentationsgang beabsichtigt Anselm die Widerlegung der Aussage des Toren[20] in seinem Herzen, welcher die Nichtexistenz Gottes behauptet. Dabei legt er dar, dass selbst die Törichten den vorgelegten Gottesbegriff verstehen und deshalb die Existenz Gottes in ihrem Verstand nicht verleugnen können, da alles Verstandene im Verstand ist *(„esse in intellectu“)*.

> Oder existiert etwa demnach ein solches Wesen nicht, weil der Tor in seinem Herzen sprach: Es existiert kein Gott?
>
> Aber gerade auch der Tor, wenn er eben das vernimmt, was ich aussage als etwas, über das hinaus nichts Größeres gedacht werden kann, versteht gewiß das, was er vernimmt; und was er versteht, ist in seinem Verstande, auch wenn er nicht versteht, daß es existiert.
>
> Denn es ist eines, daß etwas im Verstande ist, ein anderes, zu verstehen, daß etwas existiert.
>
> Wenn nämlich ein Maler zuvor denkt, was er zu schaffen beabsichtigt, hat er zwar im Verstande, versteht aber noch nicht, daß es existiert, was er noch nicht geschaffen hat.
>
> Wenn er aber bereits gemalt hat, hat er sowohl im Verstande als er auch versteht, daß existiert, was er bereits geschaffen hat.
>
> Also sieht auch der Tor als erwiesen an, daß etwas über das hinaus nichts Größeres gedacht werden kann, zumindest im Verstande ist, weil er das, wenn er es vernimmt, versteht und weil alles, was verstanden wird, im Verstande ist. (Heinle o. J.:1)

Zu unterscheiden gilt aber, ob etwas nur im Verstand ist oder auch in Wirklichkeit existiert. Auf sein Argument umgelegt heiß das, dass Gott nun entweder lediglich im Verstand oder sowohl im Verstand wie auch in Wirklichkeit existiert. Findet sich der

[20] [...] Der Tor sagt in seinem Herzen: Es gibt keinen Gott. [...] (Ps 14,1) [Neue Einheitsübersetzung 2016]

Begriff nur im Verstand allein, ist es möglich, Größeres zu denken – nämlich, dass dieses Größere auch in Wirklichkeit besteht. (Vgl. Asmuth 2018: 79f).

Als zweiten Zug argumentiert er, dass Gott nicht nur im Verstand allein existent sein kann. Ansonsten wäre es, wie gerade erwähnt, potenziell durchführbar, sowohl die Existenz Gottes in Wirklichkeit *(„esse in re“)* als auch ein größeres Wesen als ihn („*etwas, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann*“) zu denken. Doch das ursprüngliche *„etwas, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann“*, wäre folglich nicht das tatsächliche *„etwas, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann“.* Somit schlussfolgert er in seinem letzten Schritt aus der Unmöglichkeit, die Nicht-Existenz Gottes zu denken, die notwendige Existenz Gottes. (Vgl. Asmuth 2018: 80).

> Und gewiss kann das, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, nicht allein im Verstande sein. Denn wenn es auch nur allein im Verstande ist, kann gedacht werden, daß es auch in Wirklichkeit existiert, was größer ist.
>
> Wenn also das, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, allein im Verstande ist, ist eben das, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, eines, über das hinaus Größeres gedacht werden kann. Das aber ist doch unmöglich der Fall.
>
> Es existiert also ohne Zweifel etwas, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, sowohl im Verstande als auch in Wirklichkeit. (Heinle o. J.:1, Asmuth 2018: 80)

Den Abschluss seiner Argumentation bildet ein Zwischengebet, wonach er *„etwas, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann“* mit dem Gottesbegriff gleichsetzt und mit einem Dankgebet endet (vgl. Asmuth 2018: 80, Holopainen 2020: 4).

3.3.2.2. Kritik am ontologischen Gottesbeweis

Wesentlich ist im Ansatz Canterburys, dass er Existenz als ein Merkmal beziehungsweise eine Eigenschaft (Gottes) ansieht, die sich unumgänglich aus der Definition eines Begriffs ergibt. Er versteht allein aus der Grundbedeutung und Festlegung *Gott als vollkommendes Wesen* heraus, dass Gott die Eigenschaft der Existenz zukommen muss, da ansonsten seine Definition nicht widerspruchsfrei wäre. (Vgl. Beckermann 2013: 60).

Die ersten kritischen Äußerungen zum ontologischen Gottesbeweis tätigte bereits der Mönch *Gaunilo von Marmoutiers* (994-1083), ein Zeitgenosse Anselms von Canterbury. Dieser meinte, es sei nicht möglich aus dem Begriff allein auf die Existenz Gottes zu schließen. Gaunilo von Marmoutiers vergleicht Canterburys Argument mit dem bloßen Begriff einer „verlorenen Insel", der nicht gleichzeitig die Existenz einer solchen Insel manifestiert. Worauf Anselm damit kontert, dass die Logik seiner Argumentation sich nicht einfach auf andere Sachverhalte ummünzen lässt, da diese mit endlichen, nicht notwendig existierenden Gegenständen verglichen werden. Die „vortrefflichste Insel", wie Marmoutier sie beschreibt, entspricht nicht dem *id quo (der notwenigen Existenz*[21]*, wodurch alles ist),* von dem Anselm im eigentlichen Sinne spricht, sondern fasst sein Exempel als *maius omnibus (allumfassende, potenzielle Existenz*[22]*)*. (Vgl. Kellersohn o. J.: 3; Bitterl 2012: 42).

> Ich verspreche dir: wenn mir jemand in Wirklichkeit oder auch nur in Gedanken etwas findet außer dem „worüber hinaus Größeres nicht gedacht werden kann", worauf sich die Logik dieses meines Arguments anwenden ließe, so werde ich ihm die verlorene Insel finden und geben, auf daß sie nicht mehr verlorengeht. (Kellersohn o. J.: 3)

Desgleichen argumentiert Kant, dass der Gottesbegriff an sich kein zusätzliches Attribut inkludiert. Lediglich das Sein oder die Existenz zuzusprechen, fügt dem Subjekt noch keine Charaktereigenschaft hinzu. Etwas existiert, insofern man die Erfahrung gemacht hat. (Vgl. Beckermann 2013: 60). Bei der Gotteserfahrung spitzt sich dieser Fakt zu, da sie ausschließlich über die persönliche Ebene stattfindet.

> (…), dass jemand, der die von ihm angeführten Eigenschaften in einer mystischen Erfahrung wahrnimmt, eine Gotteserfahrung macht, ganz gleich, wie sein persönliches Gottesbild ansonsten aussieht und sogar unabhängig davon, ob er sich einer theistischen Religion zugehörig fühlt. (Fröhle 2017: 29)

Sätze wie *„Gott existiert."* oder *„Gott existiert nicht."* sind für den Philosophen und Religionskritiker in keiner Weise widersprüchlich. Sie illustrieren dahingehend bloß Zuschreibungen, welche unter den Begriff Gott fallen. Da durch die Behauptung der Nichtexistenz Gottes kein logischer Widerspruch entsteht, bedarf es für Kant keiner zwingenden Notwendigkeit, eine Erklärung über die Existenz Gottes zu tätigen oder die Stellung für eine der beiden Aussagen zu beziehen. (Vgl. Beckermann 2013: 60).

[21] Existenz, die nicht nichtexistent sein kann, da sie das Vollkommenste ist, und durch sie alles existiert
[22] Existenz, die existieren kann, aber nicht muss (Vorstellungen)

3.3.3. Kleinere Gottesbeweistheorien

In weiterer Folge werden sechs kurze Ansätze und Gottesbeweistheorien vorgestellt, die zwar nicht zu den klassischen Gottbeweisen zählen, aber im Laufe der Geschichte ihren Einzug gefunden haben.

3.3.3.1. Gott als moralische Annahme bei Kant

Trotz seiner Kritik an den traditionellen Gottesbeweisen erkannte Immanuel Kant ein gewisses moralisches Bedürfnis nach Gott, welches er als seinen Beweis darbrachte (vgl. Schwarz 1985: 72).

> Zwei Dinge erfüllen das Gemüt mit immer neuer und zunehmender Bewunderung und Ehrfurcht, je öfter und anhaltender sich das Nachdenken damit beschäftigt: *der bestirnte Himmel über mir und das moralische Gesetz in mir.* (Schwarz 1985: 72)

Im bestirnten Himmel offenbart sich für Kant die Größe des Universums und unterdessen die Winzigkeit des Menschen; im moralischen Gesetz zeigt sich die Würde sowie der Wert einer jeden Person. Das Erlangen der Vollkommenheit (der wahren Glückseligkeit) kann weiterführend dem Menschen nur im ewigen Leben widerfahren, weshalb durch die reine Vernunft das Phänomen der Unsterblichkeit wie auch Gott vorausgesetzt werden müssen.

> Wenn wir dächten, wir könnten sie schon in diesem Leben erreichen, dann biegen wir entweder das moralische Gesetz nach unseren eigenen Interessen, oder wir geben uns phantastischen Träumen hin, die unserem Selbstverständnis total widersprechen. (Schwarz 1985: 73)

Der moralische Trieb des Menschen ist das Streben nach Harmonie. Dies kann für Immanuel Kant bloß in Gott erreicht werden, woraus für ihn die Erkenntnis folgt, dass durch eine Nichtexistenz Gottes das innere Bedürfnis (der moralische Trieb) nach Glückseligkeit unbegründet wäre. Den Glauben an Gott konkretisiert er als reinen Vernunftglauben:

> weil bloß reine Vernunft (sowohl ihrem theoretischen als praktischen Gebrauche nach) die Quelle ist, daraus er [Gott] entspringt. (Schwarz 1985: 73)

Somit zeigt Kant auf, dass Gott der Grundimpuls menschlichen Daseins sowie Weltursache (causa mundi) ist, der Mensch den letzten Zweck der Schöpfung erfüllt und die Natur mit der menschlichen Glückseligkeit übereinstimmt (vgl. Schwarz 1985: 74).

Knapp zwei Jahrhunderte später greift der jüdische Schriftgelehrte, Religionsphilosoph und Rabbiner Abraham Joshua Heschel (1907-1972) in seinem Buch über den Menschen als heiliges Bild (Gottes Ebenbild) Kants Ansatz wieder auf und schreibt:

> Der Mensch wird gebraucht, er ist ein Bedürfnis für Gott. Für das biblische Denken ist der Mensch nicht nur ein Geschöpf, das ständig auf der Suche nach sich selbst ist, sondern auch *ein Geschöpf, das von Gott gesucht wird.* Der Mensch ist ein Geschöpf auf der Suche nach dem Sinn, weil ein Sinn ihn sucht, weil es Gottes eindringliche Frage gibt: „Wo bist du?[23]" (Heschel 1985: 134)

3.3.3.2. Der historische (ethnologische) Gottesbeweis

Der historische – oder auch ethnologische – Gottesbeweis zählt zu den ältesten Ausführungen, da er knapp einem Jahrhundert vor Christus dem römischen Philosophen und Konsul Cicero zugeschrieben wird. Diese Beweisart entspricht nicht dem natürlichen Verständnis eines logischen Beweises, sondern gleicht mehr einem Plausibilitätsargument. Dahingehend nahm Cicero an, dass es kein Volk ohne religiösen Bezug gäbe. Aufgrund der immerzu antreffenden Gotteserfahrung unterschiedlicher Völker, wie auch der religiösen Ausübung im Laufe der historischen Gegebenheiten, bringen Cicero zum Schluss einer realen göttlichen Existenz. (Vgl. Schwarz 1985: 74f).

3.3.3.3. Kritik am historischen (ethnologischen) Gottesbeweis

Der kritische Ansatz findet sich beim ethnologischen Gottesbeweis nicht, wie man etwa vermuten mag, in der Vergangenheit, sondern in der Zukunft. Auf Basis der heutigen Lebens- und Glaubenspraxis, in welcher der Gottesbegriff oder allgemein Götter abgelehnt werden, besteht theoretisch die Möglichkeit auf eine Welt ohne Gott. Aufgrund des „Erwachsenenwerdens" im Sinne des faktenbasierten, rationalen Denkens löst sich die metaphysische Welt immer mehr in der physikalischen Welt auf, sodass es letzten Endes nicht mehr notwendig sein muss, an etwas Göttliches oder göttliche Mächte zu glauben. (Vgl. Schwarz 1985: 75).

[23] Aber Gott, der HERR, rief nach dem Menschen und sprach zu ihm: Wo bist du? (Gen 3,9) [Neue Einheitsübersetzung 2016]

3.3.3.4. Der axiologische (eudämologische) Gottesbeweis

Der axiologische beziehungsweise eudämologische Gottesbeweis gründet in der Theorie der Verwirklichung von Werten und dem Streben nach dem höchsten Glück. Aufgrund der Tatsache irdischer Begrenztheit und Endlichkeit bedarf es eines obersten Zieles der Werte und Glückseligkeit, das als „Himmel" gedacht wird, in welchem aber nicht zwingend von einer Gottesanwesenheit gesprochen wird. (Vgl. Stiller 2019: 15).

3.3.3.5. Der pragmatische Gottesbeweis

Im pragmatischen Denken wird die Wahrheit mit dem utilitaristischen Prinzip gleichgesetzt. Demnach lautet die These des US-amerikanischen Psychologen und Philosophen William James (1842-1910), dass der Glaube an einen Gott die Menschen optimistisch bleiben lässt und somit die Hoffnung und das Vertrauen in die Zukunft gewahrt bleibt, hingegen der Atheismus das gegenteilige Phänomen erzeugt. Somit schlussfolgert James die Wahrheit im Gottesglauben. (Vgl. Homann 2016: 1).

3.3.3.6. Der pantheistische Gottesbeweis

Beim Pantheismus wird das Universum mit Gott gleichgesetzt. Nachdem das Universum eindeutig existiert, existiert folglich auch Gott. In diesem Format entfällt der Aspekt Gott als Person gänzlich. (Vgl. Schwarz 1984: 10; Beckert 2004: 8).

3.3.3.7. Die Pascal'sche Wette

Die Pascal'sche Wette, welche auf den Mathematiker und Philosophen Blaise Pascal (1623-1662) zurückgeht, stellt keinen Gottesbeweis im ursprünglichen Sinne dar, sondern arbeitet nach der Kosten-Nutzen-Analyse. Es liefert ein Pro-Argument für den Gottesglauben aufgrund der mangelnden Beweise, die eindeutig gegen eine Existenz Gottes sprechen würden. Somit sei es nach den Überlegungen des Franzosen günstiger, bedingungslos an einen Gott zu glauben. Denn durch den Glauben sei nichts verloren, selbst wenn es keinen Gott gäbe, und zugleich stünde man auf den sicheren Seiten, sofern Gott existiert. (Vgl. Schredelseke 2017: 44).

> Sagt der Atheist zum Christ': „Wie du doch betrogen bist, wenn der Himmel eine Fabel ist." Antwortet der Christ dem Atheist': „Wie du doch betrogen bist, wenn die Hölle keine Fabel ist." (aus dem Volksmund)

3.3.4. Fazit zu Gottesbeweisen

Seit Anbeginn der Aufklärung wollte man die Welt und ihre Phänomene fortlaufend entmystifizieren; Magie oder übernatürliche Kräfte sind obsolet und stellen keine Ursache für bestimmte Geschehnisse mehr dar. Deshalb gilt es, die Naturgesetze und ihre Prinzipien weitgehend zu entdecken, zu erforschen und zu beweisen.[24] Gerade Philosophien und Wissenschaften setzen auf eine Kriterienfestlegung für eine sachgerechte Bearbeitung und Auseinandersetzung mit bestimmten Themen. Doch diese Kriteriumsphilosophie kann in Bezug auf die Allgemeinheit nicht erfüllt werden, weshalb sie in vielen Fällen in Enttäuschung, Relativismus und Skeptizismus mündet. (Vgl. Popper 2003: 335). Diese Grenze zeigt sich speziell bei der Frage und den Beweisen nach Gott oder der Wahrheit, denn wie Karl Popper sagt:

> Das Fehlen eines Wahrheitskriteriums macht den Wahrheitsbegriff genausowenig bedeutungslos wie das Fehlen eines Kriteriums für Gesundheit den Begriff der Gesundheit bedeutungslos macht. Ein kranker Mensch kann nach Gesundheit streben, obwohl er kein Kriterium für sie hat. Ein irrender Mensch kann nach Wahrheit streben, obwohl er kein Kriterium für sie hat. (Popper 2003: 335)

Dahingehend liefern Gottesbeweise keine deduktiven Argumente für die Existenz oder Nichtexistenz Gottes (vgl. Ijjas o. J.: 1). Sie sind viel mehr eine Form unendlicher Sehnsuchtsbekundung des endlichen Menschen nach Gott und ewiger Liebe. Denn gerade deshalb ist der Glaube nicht faktenbasiertes Wissen. Er ist der Weg, der zu einem tieferen Geheimnis geleitet – dem Vertrauen auf das, was unsere innerste Sehnsucht ist (vgl. Marschütz 2016: 378f).

In seinem Buch der Sprüche und Bedenken postuliert der Wiener Dramatiker Arthur Schnitzler (1862-1931) hinsichtlich des Themas über Gott und dessen Existenz:

> Daß wir einen Gott ahnen, ist nur ein unzulänglicher Beweis für sein Dasein. Ein stärkerer Beweis ist, daß wir fähig sind, an ihm zu zweifeln. (Schnitzler 1927: 34)

[24] Vgl. Bayerischer Rundfunk. radioWissen 2019: 1

4. Die Unendlichkeit im Klassenzimmer

Auf die Frage nach der Transzendenz und Unendlichkeit stößt man in diversen wissenschaftlichen Disziplinen. Die Auseinandersetzung mit dieser Materie obliegt allerdings nicht bloß Wissenschaftler*innen. (vgl. Schimmöller 2011: 179). Bereits im schulischen Kontext bietet sich die Möglichkeit einer interdisziplinären Kooperation (eines fächerübergreifenden Unterrichts) an, wie dies Jürgen Maaß in einem Artikel zu erkennen gibt:

> Vieles [mit Bezug auf das Thema Unendlichkeit] lässt sich schon mit jüngeren Schüler*innen so diskutieren, dass Wissenszuwachs und Neugier auf mehr erreicht werden können. (Maaß 2021: 1)

Aufgrund eigener Unterrichtserfahrung ist aufgefallen, dass Schüler*innen oft großes Interesse – sowohl in Mathematik wie auch Religion – an der Frage zur Unendlichkeit zeigen. Da ich nun seit drei Jahren ausschließlich an einer berufsbildenden höheren Schule tätig bin, habe ich mich dazu entschlossen, im weiteren Verlauf primär auf die Lehrpläne der Handelsakademie einzugehen. Hierbei sollen Anknüpfungspunkte hervorgehoben werden, bei denen die Frage nach der Unendlichkeit in den beiden Unterrichtsgegenständen Mathematik und katholische Religion auftreten. Weiters wird das Verständnis der Lernenden hinsichtlich des Unendlichkeitsbegriffes angesprochen und abschließend eine fächerübergreifende Umsetzungsform vorgestellt.

4.1. Lehrplanbezug des Unterrichtsgegenstandes Mathematik und Angewandte Mathematik in der Handelsakademie (BHS)

Die erste (indirekte) Begegnung mit dem Unendlichkeitsverständnis findet in Mathematik und Angewandte Mathematik (MAM) im I. Jahrgang (1. und 2. Semester) unter dem Themenpunkt **Mengenlehre** statt. Im Lehrstoff sind die allgemeine Mengenlehre mit den unterschiedlichen Mengendarstellungen und -verknüpfungen, die Symbole der mathematischen Schreibweise, die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, das Rechnen mit Zahlen, Dezimal- und Gleitkommadarstellung, Prozentrechnung und Maßeinheiten enthalten. Der dazugehörige Bildungs- und Lehrauftrag gemäß dem Lehrplan lautet: Die Schülerinnen und Schüler können im Bereich Zahlen und Maße (Zahlenbereiche und Zahlenmengen) die Zahlenbereiche der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen beschreiben und damit rechnen.

Ein weiteres Themenfeld bietet der Bereich der **funktionalen Zusammenhänge**, welcher sich im Spiralprinzip vom ersten bis zum vierten Jahrgang aufbauend durchzieht. Der Lehrstoff in diesem Bereich umfasst über die genannten Jahrgänge hinweg den Funktionsbegriff, die Umkehrfunktion, lineare Funktionen, Potenzfunktionen, quadratische Funktionen und Polynomfunktionen höheren Grades, Sinus, Cosinus, Tangens im Einheitskreis, Wachstums- und Abnahmeprozesse (Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, lineares, exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum im stetigen Modell), Eigenschaften von Funktionen und die wirtschaftlichen Aspekte[25].

Im Bereich der Analysis werden speziell im IV. Jahrgang (7. Semester - Kompetenzmodul 7 und 8. Semester - Kompetenzmodul 8) der **intuitive Grenzwert** sowie die Integralrechnung thematisiert. Dabei fordert der staatliche Bildungs- und Lehrauftrag von den Schülerinnen und Schülern, dass sie im Bereich Analysis (Differenzen- und Differentialquotient) die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen intuitiv erfassen und damit argumentieren können und im Bereich Analysis (Integral und Integralrechnung) den Begriff des bestimmten Integrals auf Grundlage des intuitiven Grenzwertbegriffs erläutern, diesen als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können.

Den vierten Anknüpfungspunkt ermöglichen **diskrete und kontinuierliche Modelle**, wie jene, die im V. Jahrgang (Kompetenzmodul 9) im Bereich der Stochastik unter dem Themenpunkt Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt werden. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler den Unterschied zwischen diskreten und kontinuierlichen Zufallsvariablen, die Begriffe Wahrscheinlichkeits- beziehungsweise Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, Verteilfunktion sowie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung erklären können. (Vgl. Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung 2020: 81-87).

[25] Zins- und Zinseszinsrechnung (dekursive Verzinsung – ganzjährige und unterjährige Verzinsung, einfacher Zins, Zinseszins, stetige Verzinsung), Rentenrechnung, Schuldentilgung, Investitionsrechnung, Kurs- und Rentabilitätsrechnung

4.2. Lehrplanbezug des Unterrichtsgegenstandes katholische Religion in der Handelsakademie (BHS)

Im Unterrichtsgegenstand katholische Religion findet sich im vierten Abschnitt der allgemein gültigen Erklärung zur Bildungs- und Lehraufgabe der Gedanke zum Transzendenten wieder:

> Im Sinne ganzheitlicher Bildung hat der Religionsunterricht kognitive, affektive und handlungsorientierte Ziele, die, entsprechend dem christlichen Menschenbild, davon ausgehen, dass der Mensch auf Transzendenz ausgerichtet ist. So erhalten die zu behandelnden Grundfragen nach Herkunft, Zukunft und Sinn eine religiöse Dimension. (Erzbischöfliches Amt für Schule und Bildung 2014: 4)

Im I. Jahrgang bietet sich ebenso wie in der Mathematik das Einstiegsthema an, eine Verknüpfung zur Unendlichkeit herzustellen. Die zugehörigen Fragen zum Lehrplanthema **Ringen um Identität** sind: **Woher komme ich?, Wer bin ich?, Wohin gehe ich?** Pro Fragenbereich beziehungsweise Unterkapitel sind jeweils die dazugehörigen Kompetenzen formuliert. Bei den soeben genannten drei Existenzfragen werden die beiden Kompetenzen 1 und 2 erfüllt.

> **Kompetenz 1:** Die Schülerinnen und Schüler können in Alltags-, Grund- und Grenzerfahrungen Dimensionen der Sinnfrage wahrnehmen und beschreiben sowie aus der Perspektive der erlösenden Verheißung im Christentum verstehen und deuten.
>
> **Kompetenz 2:** Die Schülerinnen und Schüler können sich selbst differenziert wahrnehmen, ihre Fragen nach Gott zur Sprache bringen und dabei Sakramente als Zeichen der Nähe Gottes verstehen und deuten. (Erzbischöfliches Amt für Schule und Bildung 2014: 7)

Weitere Themen im I. Jahrgang bieten die Kapitel:

- Alltags-, Grund- und Grenzerfahrung mit der Frage **Umgang mit Leid und Tod** verknüpft mit dem Überthema **Leben nach dem Tod** und der Frage nach der **Jenseitsvorstellung** (Kompetenzbereich 1 sowie 9),
- Phänomen Religion mit den beiden Unterkapiteln „**Das Leben stellt Fragen**“, und „**Glauben**“ (Kompetenzbereich 9),
- Gott - Gottesbilder - Gottsuche mit den Subkapiteln „**Monotheismus**, **Glaubenszeugnisse**/-**geschichten**, **Gottesbeziehung**, **Gott und das Leid**“ (Kompetenzfelder 2 und 9),
- Welt und Schöpfung mit dem Leitgedanken „**Staunen über den Kosmos**“, der dem Kompetenzfeld 6 zugeordnet ist.

> **Kompetenz 6:** Die Schülerinnen und Schüler können den Kosmos als von Gott anvertraut sehen, sich selbst als Geschöpf Gottes verstehen und zu einem nachhaltigen Umgang mit der Schöpfung beitragen.
>
> **Kompetenz 9:** Die Schülerinnen und Schüler können die wichtigsten Welt- und Lebensdeutungen der Religionen und Weltanschauungen beschreiben und mit zentralen Deutungen des Christentums respektvoll und kritisch in Beziehung setzen. (Erzbischöfliches Amt für Schule und Bildung 2014: 7)

Im II. sowie III. Jahrgang bieten sich jeweils ein Kapitel zum Diskurs über Endlichkeit und Unendlichkeit an. Das 3. Semester beinhaltet den Themenblock **Lebenssituation Jugendlicher** mit dem Unterpunkt **Möglichkeiten und Grenzen** (in den Kompetenzfeldern 2 und 6); das 6. Semester beschäftigt sich unter anderem mit dem Kernthema Gnadenerfahrung in einer „gnadenlosen" Welt und der Frage nach **Auferstehung im Leben** (Kompetenz 1).

Der IV. Jahrgang bietet nochmals die Möglichkeit im 8. Semester das Kapitel „Lebensformen und Gottsuche" in Form von **Glaubenszeugnissen und /-geschichten** aufzugreifen (im Kompetenzfeld 2) und die Frage nach dem Unendlichen weiterzudenken.

Im V. Jahrgang (9. Semester) werden im Modul „Welt- /Lebensdeutungen und Religion(en)" die Themen **Naturwissenschaft und Schöpfungsglaube** sowie **Religionskritik** (Kompetenzbereiche 6 und 9) behandelt, welche zugleich eine naheliegende Verknüpfung zur Mathematik, Unendlichkeit und zu Gottesbeweisen darstellt. Das 10. Semester bietet ausklingend nochmals die Möglichkeit sich mit der **Theodizee-Frage** sowie dem Thema **Tod und Auferstehung** (in den Kompetenzbereichen 1 und 9) auseinander zu setzen und über den rationalen Tellerrand zu blicken und einen Funken Unendlichkeit zu denken. (Vgl. Erzbischöfliches Amt für Schule und Bildung 2014: 7-18).

4.3. Relevanz und Verständnis des Unendlichkeitsbegriffes in der Schule

Wie am Beginn dieser Arbeit angesprochen, bezeichnet Hermann Weyl (1885-1955) die Mathematik als „Wissenschaft von der Unendlichkeit". Erste Spuren des Unendlichkeitsbegriffs zeichnen sich im Mathematikunterricht in der Primarstufe (wie etwa beim Zählen und dem Zahlenstrahl) ab und verlaufen weiter bis hin zur Grenzwertberechnung in der Sekundarstufe II (siehe Lehrplanbezug in Abschnitt 4.1).

Trotz des immer wiederkehrenden Vorkommens und der grundlegenden Erwartung des Verständnisses betreffend des Unendlichkeitsbegriffes findet die Frage nach der Unendlichkeit selbst kaum Einzug in das eigentliche Unterrichtsgeschehen. (Vgl. Schimmöller 2011: 179f). Doch wie verstehen Schüler*innen solch ein Konstrukt, wenn es niemals unterrichtet wurde?

In einem Research Paper von Deborah Dötschel findet sich eine Studie, an der Unterstufenschüler*innen wie auch Mathematikstudierende teilnahmen. Die Probanden sollten den Begriff Unendlichkeit erläutern. Dabei stellte sich heraus, dass, unabhängig vom Alter oder Bildungsgrad, ähnliche Erklärversuche getätigt wurden, welche in fünf Kategorien eingeteilt werden konnten, wie in Tabelle 5 ersichtlich. (Vgl. Dötschel o. J.: 2).

Kategorie	Erklärungen
Iteration	Hört nie auf. Man fängt an zu zählen und kann niemals aufhören. Ohne Ende.
Metaphysisch	Das Universum ist unendlich. Das Weltall und der liebe Gott.
Ziffernaspekt	Einen Einser mit ewig viel Nullen. Man hängt ein Jahr lang immer wieder Nuller an den Einser und dann noch weiter …
Formalsymbolisch	Das Symbol ∞ ∞ +1
Größenvorstellung	Die größte Zahl der Welt. Unvorstellbar groß.

Tabelle 5: Kategorien der Erklärversuche zum Unendlichkeitsbegriff (vgl. Dötschel o. J.: 2)

Allerdings heißt etwas auf seine/ihre Art zu verstehen, nicht gleichzeitig etwas tatsächlich verstanden zu haben. So erkennt Hans-Joachim Vollrath[26] das Verstehen eines mathematischen Begriffs erst dann, wenn gewisse Kenntnisse und Fähigkeiten des Lernenden vorhanden sind.

[26] emeritierter Professor für Didaktik der Universität Würzburg

Lernende haben einen mathematischen Begriff verstanden, wenn sie

- wissen, was man damit erreicht,
- wissen, wie es geht,
- es auf Beispiele anwenden können,
- wissen, unter welchen Voraussetzungen es funktioniert,
- wissen, warum es funktioniert. (Vollrath 2012: 49f)

Um Begriffe und Inhalte auf lange Sicht besser zu verstehen, benötigt es eine klare Form von Vermittlung. Dabei dienen pädagogische Ansätze wie zum Beispiel das Spiralprinzip oder das Lernen in Stufen, welches in Abbildung 8 (Dötschel o. J.: 3) graphisch dargestellt ist. Beide Ideen verfolgen das Ziel, an vorhandene Grunderfahrungen oder Vorwissen anzuknüpfen, Konstrukte zu benennen und in immer komplexer werdenden Ausprägungen aufzugreifen beziehungsweise diese schlussendlich auf höheren Levels zu vertiefen. (Vgl. Schrittesser 2019: 16).

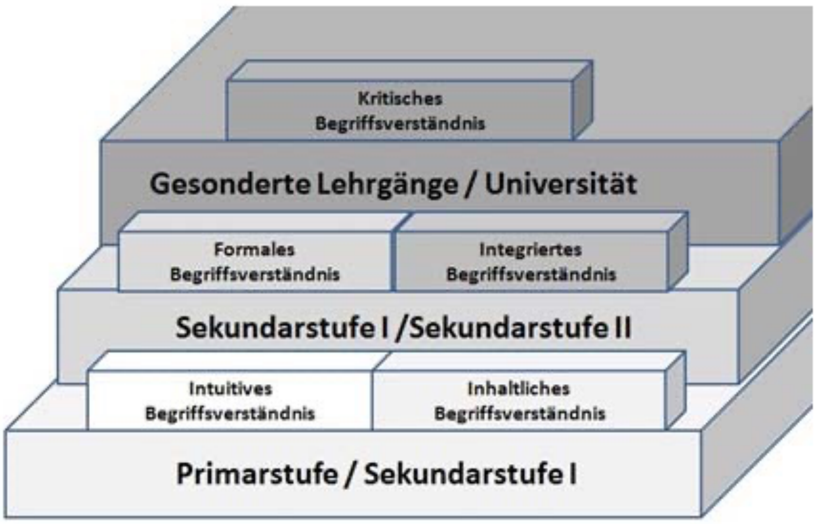


Abbildung 8: Stufenmodell zur Einordnung des Unendlichkeitsbegriffs als Grundlage der Vermittlung (Dötschel o. J.: 3)

Eine mögliche Variante, den Unendlichkeitsbegriff zu strukturieren, – orientiert nach dem Stufenmodell von Vollrath – bildet Tabelle 6 ab:

Verständnisstufen	Inhalt
Intuitives/ Inhaltliches Begriffsverständnis	- Unendlichkeit als ewiger Fortschritt und fortlaufendes Weiterzählen - Existenz eines unendlich großen Zahlenbereichs - Unterscheiden endlicher und unendlicher Mengen - 1:1 Zuordnung (Bijektion) - Umgang mit periodischen Zahlen - Phänomenologie/Paradoxa
Formales/ Integriertes Begriffsverständnis	- Mächtigkeit von Unendlichkeit (abzählbare Mengen) - Definition von Unendlichkeit nach Cantor - Verständnis von mindestens zwei Arten von Unendlichkeiten - Phänomene in der Unendlichkeit („Dimensionsproblem“) - Beweis zur Mächtigkeit der Potenzmenge - Verständnis der Existenz unendlicher Unendlichkeiten
Kritisches Begriffsverständnis	- Mengenparadoxon (Auswahlaxiom) - Menge aller Mengen - Axiomatische Mengenlehre, uvm.

Tabelle 6: Inhalte der Verständnisebenen zum Unendlichkeitsbegriff entlang des Bildungsweges (vgl. Dötschel o. J.: 4)

Nachdem nun gezeigt wurde, dass das Thema Unendlichkeit trotz seiner Komplexität einem gewissen pädagogischen Schema folgen kann, bleibt noch eine angemessene schüler*innengerechte Umsetzung offen (vgl. Dötschel o. J.: 4).

Die Unendlichkeit eröffnet ihre eigenen vielfältigen Dimensionen, wodurch sich dieses Thema kaum mit anderen mathematischen Inhalten vergleichen lässt. Aufgrund dessen benötigt man bei der Behandlung im schulischen Kontext (wohlmöglich) ein gewisses Umdenken als Lehrkraft und eine konzeptionelle Umstrukturierung der klassischen Unterrichtsgestaltung.

4.4. Back to the roots – das philosophische Gespräch im Unterricht

Die Betrachtungsweise in Bezug auf die Zusammengehörigkeit von Mathematik und Philosophie hat sich im Laufe der Zeit stark gewandelt (siehe Abbildung 2: Gesamtgebäude aller Wissenschaften). Bei komplexen Themen, wie etwa der Frage zur Unendlichkeit bedarf es allerdings zur Erlangung von Wissensfortschritten einer Reunion von Mathematik und Philosophie. Das philosophische Gespräch als Unterrichtszugang im Mathematikunterricht ist bis dato noch rar erforscht und wenig diskutiert, weshalb es für die Argumentation des Themas zusätzliche Standpunkte weiterer Fachdidaktiken bedarf. (Vgl. Meerwaldt 2011: 117).

4.4.1. Merkmale des Philosophierens und Nachdenkens mit Kindern

Das Philosophieren ist eine gewisse Form eines gemeinsamen Gesprächs, das frei von jeglichen inhaltlichen Eingrenzungen und subjektiven Bewertungen ist. Trotz seiner Offenheit unterliegt diese Kommunikationsform gewissen Regeln, die zum Teil von der Gruppe selbst festgelegt werden können. (Vgl. Meerwaldt 2011: 117f). Einige dieser allgemein gültigen Kriterien sind:

- die **Moderation** durch einen Gesprächsleiter – zumeist die Lehrperson, kann aber bei erfahrenen Gruppen auf eine oder mehrere Schüler*innen übertragen werden,
- keine richtigen Antworten primär erzielen wollen, sondern vermeintliches **Wissen hinterfragen** und somit neue Erkenntnisgewinne und Orientierung finden,
- eine konkrete Frage formulieren und somit einen **roten Faden** festlegen, auf den während des Nachdenkprozesses immer wieder Bezug genommen wird,
- an eigene **Erfahrungen und Vorwissen** anknüpfen,
- die wichtigsten Erkenntnisse regelmäßig **zusammenfassen**, den Standpunkt bestimmen und erst danach gedanklich weitersuchen,
- niemanden von seinen Vorstellungen überzeugen wollen, sondern mehrere Aspekte erfahren, **neue Seiten** erkennen, um letzten Endes besser verstehen zu können. (Vgl. Weingärtner 2014: 1; Meerwaldt 2011: 118).

Im Gegenzug zum eigentlichen Philosophieunterricht, für den thematisch ausgewählte Stoffgebiete vorliegen, ist das Philosophieren als Unterrichtskonzept weder temporal, lokal, noch an fachphilosophische Gehalte gebunden. Grundgegenstand des Philosophierens ist es, offene Fragen und Inhalte des Unterrichts vordergründig zu behandeln, gemeinsam darüber nachzudenken und eigene Gedanken in die Gruppe miteinzubeziehen. (Vgl. Meerwaldt 2011: 118).

Die Schwierigkeit von offenen Fragen sieht Barbara Brüning darin, dass sie nicht eindeutig und allgemein verbindlich beantwortet werden können, aber in den meisten Fällen sich einer der vier großen Fragen Kants zuordnen lassen (vgl. Brüning 2003: 14f):

1. Was kann ich wissen?
2. Was soll ich tun?
3. Was darf ich hoffen?
4. Was ist der Mensch?

Neben offenen Fragen dienen ebenso Bilder, Texte oder Gegenstände als beliebte Basis für philosophische Gespräche. Konkret auf den Mathematikunterricht umgemünzt können mathematische Inhalte, Begriffe und Fragen zum Philosophieren herangezogen werden. (Vgl. Meerwaldt 2011: 118; Peter 2017a: 6).

Wesentlich für einen gelingenden Diskurs ist die Auswahl des Moderators/ der Moderatorin, die Gesprächsmethodik sowie das Gesamtsetting. Auf den Schulkontext bezogen bedeutet dies:

- Die Lehrperson besitzt fundiertes Fachwissen, nimmt eine entsprechende Haltung ein, ist bereit sich auf Fragen und Erkenntnisinteresse von Schüler*innenseite einzulassen, moderiert das Gespräch und entscheidet dessen weiteren Verlauf, reflektiert, fasst zusammen, versucht Teilnehmer*innen zur Beitragsbekundung zu motivieren, nutzt das Prinzip der Mäeutik, sieht sich selbst als „Mitsuchende/r von Antworten“ und unterlässt jegliche Dominanzausübung oder Belehrungen.
- Eine geeignete Sozialform bietet der Sesselkreis. Die sprechende Person ist dabei niemals den anderen Teilnehmer*innen weggewandt, wodurch die Aussagen klar mitgeteilt werden können. Auch andere Sozial- und Kommunikationsformen sind möglich, solang niemand an seiner/ihrer Teilnahme gehindert oder benachteiligt wird.

- Hilfestellung und Anknüpfungspunkte für einen weiter ausgebauten Denkprozessverlauf können ein Miteinbezug eines Perspektivenwechsels, bestimmter Rollen, Personen oder Figuren, Situationen, Zeit und Orte darstellen.
- Getätigte Aussagen müssen von allen als gleichwertig anerkannt werden. (Vgl. Calvert 2008: 221; Meerwaldt 2011: 118; Peter 2017a: 3-8).

4.4.2. Das Philosophieren als Unterrichtsprinzip

Philosophieren im schulischen Kontext meint nicht nur, Lernende mit Fakten, Gegebenheiten oder Ergebnissen zu konfrontieren, sondern sie an den Denkprozessen, die ursprünglich zu diesen „Ergebnissen" geführt haben, selbst zu beteiligen. Anknüpfungspunkte zum Philosophieren finden sich meist dort, wo die Lehrperson bemerkt, sich nicht verständlich machen zu können, der Eindruck des Missverstanden-Seins in Bezug auf verschiedene Sachverhalte entsteht, Schüler*innenfragen irritieren oder diese nicht im erwünschten Sinne beantwortet werden können. (Vgl. Peter 2017a: 9f).

Der Miteinbezug des philosophischen Gesprächs in den Unterricht unterliegt frei der Lehrperson. Zielt man darauf ab, an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen und darauf aufzubauen, so ist dieses Vorgehen am Beginn einer thematischen Auseinandersetzung gut situiert. Man spricht dabei vom Prinzip *„Philosophieren von etwas".* Das *„Philosophieren für/über etwas"* entsteht bei der Anwendung dieses Unterrichtsprinzips während der Behandlung eines Inhaltes. Dessen Zweck ist die Analyse des bisherigen Wissensstandes (Zwischenergebnisses) oder die Erkenntnis einiger Anknüpfungspunkte und Hinweise auf relevante Aspekte in der Weiterarbeit. Ebenso eignet sich der Diskurs am Ende eines Themenblocks zur Zusammenschau unterschiedlicher Aspekte und Positionierung des/der Einzelnen. Darunter versteht man das *„Philosophieren mit etwas/jemandem".* (Vgl. Peter 2017b: 3).

4.4.3. Chancen des Philosophierens

Das Philosophieren bietet die Gelegenheit, persönliche Zugänge zum Fach zu entdecken, Interessensfragen in Bezug auf einen bestimmten Fachkontext nachzugehen und eine Neustrukturierung der Unterrichtskultur mit Fokus auf Ausprägung einer überlegteren Haltung und Geltung eigener Denkstrategien zu schaffen. Speziell im mathematischen Sinne besteht die Chance, dass gewisse Inhalte aufgrund eigener Erkenntnis eine ganz neue und eigene Bedeutung erlangen. (Vgl. Meerwaldt 2011: 118f).

Die generelle Zweckmäßigkeit eines philosophischen Gesprächs liegt zum einen darin, die eigene Meinung zu bilden und zu überprüfen (Urteilsbildung), die Sprachkompetenz, Empathiefähigkeit und eine selbstständige, kritische, aber gleichzeitig kreative Denkweise zu fördern. Andererseits bietet diese Form für Lehrpersonen einen interessanten Einblick in die Ideenwelt und Gedankengänge der Schülerinnen und Schüler. Zudem erfahren die Lernenden dabei die Möglichkeit, frei zu denken, allgemeine Wertschätzung, Interessensbekundung und Anerkennung. (Vgl.: Looks 2021: 1; Michalik 2006: 3).

Gleichzeitig gibt dieses Prinzip die Gelegenheit zu erkennen, dass die einzelnen Gegenstände, anders als in der Schule vorgelebt, miteinander verschmelzen. Für das Arbeiten mit philosophischen Problemstellungen bedarf es hauptsächlich eines Vorwissens und vernetzten sowie kreativen Denkens – es ist Nebensache, woher das Wissen bezogen wird. Tenor des Philosophierens für Schülerinnen und Schüler soll ein Bewusstwerden einer noch nicht vollständig erforschten Welt sein. Speziell im Unterrichtsgegenstand Mathematik wirkt es im schulischen Unterricht oftmals so, als gäbe es nichts mehr Neues zu entdecken. Aus wissenschaftlicher Perspektive weiß man, dass das Gegenteil der Fall ist – Stichwort: Millennium-Probleme. (Vgl. Meerwaldt 2011: 119).

Aufgrund solch einer Neuinterpretation des Unterrichts wird das Erscheinungsbild von Mathematik in der Schule radikal verändert. Die Lernenden kommen selbst zum Zug, was das Unterrichtsgeschehen interessant werden lässt. Das philosophische Gespräch kann ebenso mit jüngeren Altersgruppen beziehungsweise mit wenig mathematischem Können zum Einsatz kommen. Vor allem Fragen wie *„Sind Zahlen eine Erfindung der Menschen oder existieren sie tatsächlich?“* oder *„Wie groß ist die Unendlichkeit?“* bieten hierbei eine gute Grundlage für Gesprächsstoff und verhindern zugleich eine Reduktion von Mathematik auf ihren formalen Aspekt. (Vgl. Meerwaldt 2011: 119).

Selbst wissenschaftliche Vertreter begünstigen diese Unterrichtsmethodik und sprechen von einer „Enttrivialisierung des Schulunterrichts und der Ausbreitung einer pluralistischen Einstellung“ (vgl. Michalik 2006: 41ff). Die drei Hauptargumente für ein Voranbringen dieses Konzepts lauten:

> 1. Das Philosophieren mit Kindern als ein Unterrichtsprinzip ist einem komplexen Welt- und Wirklichkeitsverständnis förderlich und zeigt den Kindern eine andere, reichere Welt als der herkömmliche Sach- und Fachunterricht.
>
> 2. Das Philosophieren [...] trägt zu einem differenzierten Umgang mit Vielfalt und Verschiedenheit und zur Entwicklung von Gesprächsfähigkeit bei.
>
> 3. Nachdenkliche Gespräche im Unterricht wirken sich positiv auf das Verhältnis zwischen Erwachsenen und Kindern aus und sind auch für die Lehrerinnen ein Gewinn. (Michalik 2005: 19ff)

4.4.4. Methoden des Philosophierens

Es gibt zahlreiche Methoden des Philosophierens, die ständig weiterentwickelt werden. Vier davon möchte ich in weiterer Folge ansprechen und beschreiben, da sie verschiedene Denkkompetenzen fordern.

Die klassischste philosophische Methode ist der sokratische Dialog, ebenso als **Mäeutik** – Hebammenkunst – bekannt. Sie besitzt fragend-entwickelnden Charakter und lässt sich grob in drei Phasen unterteilen:

1. Das Setting: Sollte grundsätzlich noch kein „Problem“ vorhanden sein, so bedarf es der Einigung auf eine Fragestellung. Anschließend werden die Gesprächsregeln und die Gesprächsleitung fixiert.
2. Das Philosophieren: Hierbei handelt es sich um den eigentlichen Prozess, der von Gedankenaustausch, begründeten Meinungen, gezieltem Nachfragen, Begriffsklärung, zwischenzeitlichem Zusammenfassen und Aufdecken von widersprüchlichen Aussagen geprägt ist.
3. Das Metagespräch: Es bildet den Abschluss des sokratischen Gesprächs. Prinzipiell soll hier kein Gruppenkonsens o.ä. gefunden werden. Die Methode zielt hierbei auf die Darbringung potenzieller Ergebnisse, erstmaliger Erkenntnisse und neu aufgeworfener Fragen ab. In dieser Phase sollten langfristig Konsequenzen für das eigene Denken und Handeln gezogen werden. (Vgl. Martens 1990: 6; Schütze 2022: 1).

> Die Erkenntnis, dass ein Problem nicht zufriedenstellend geklärt ist, kann weiteres Nachdenken anregen, Nachdenklichkeit als Haltung begründen. (Michalik 2006: 101)

Die Idee hinter dieser Methode ist es, den Dialogpartner durch Nachfragen auf seine Problemstellung, das eigene Wissen und Erkennen durch Mitdenken zu locken. Dazu können unter vielen anderen folgende Moderationsfragen behilflich sein (vgl. Looks 2021: 1):

- Worauf begründest du das?
- Kannst du Beispiele dafür nennen?
- Gilt das generell?
- Welche Folgen wären ableitbar?
- Gibt es Gegenkonzepte?
- Kann das Gegenteil wahr sein?
- Gibt es dafür eine Regel?

Im Gegensatz zum sokratischen Gespräch bietet das **Gedankenexperiment** ein sehr kreatives und spekulatives Format. Floskeln wie „Was wäre, wenn (nicht) … ?“ sind an dieser Stelle zentral. Zumeist werden nichtexistente Sachverhalte vorausgesetzt und daraus resultierende Folgen abgeleitet. Dabei regen Gedankenexperimente die Imaginationsfähigkeit an und lassen Selbstverständliches außerordentlich scheinen. (Vgl. Freese 1995: 30). Den Lernenden wird somit die Chance geboten, sich mit Fremdem und Unerforschtem auseinanderzusetzen. Bezugnehmend auf diese Form kann auch der starke Fokus auf Faktenwissen überwunden werden. (Vgl. Engels 2004: 220).

Eine weitere Methode ist die Begriffsbildung beziehungsweise **Begriffsanalyse**. Sie ist wesentlich für die Philosophie, da Begrifflichkeiten oftmals in verschiedenen Kontexten eingesetzt werden und dann Unterschiedliches ausdrücken. Daher ist die Hauptaufgabe, die Momente der Begriffe zu filtern, mit Hilfe von diversen Zugängen, wie etwa dem Sammeln von Schlüsselwörtern, die einem Begriff zugeordnet werden, der Untersuchung des Wortfeldes durch Strukturierung anverwandter oder gegenteiliger Bedeutungen oder der Präzisierung anhand von praktischen Darstellungen oder Umsetzungen. (Vgl. Brüning 2003: 43-46).

Diese Praktik zielt darauf ab, verstärkt analytisches Denken in Anspruch zu nehmen. Auf den Unterricht umgemünzt lassen sich verschiedene mathematische Begriffe, die ebenso in der Alltagssprache gehäuft vorkommen, diskutieren. Die Begriffsanalyse ermöglicht u. a. eine Gegenüberstellung von Alltags- und fachmathematischen Kontexten und das Herauskristallisieren des mathematischen Kerns im jeweiligen Ausdruck. (Vgl. Meerwaldt 2011: 122).

Neben der klassischen Diskussion und Gesprächsführung zu einer offenen Frage bietet sich die Möglichkeit einer offenen, kognitionsorientierten **Modellierungsaufgabe**. Dafür wird eine Frage oder Beobachtung hergenommen und versucht, sie mithilfe von logischen Ansätzen, Diskussion, mathematischen Theorien und Eigenrecherche zu beantworten, beziehungsweise zu analysieren. (Vgl. Meerwaldt 2011: 120). Ein Beispiel einer Modellierungsaufgabe für die Oberstufe zeigt hierfür Abbildung 9.

Letzten Endes ist eine Methode jedoch nur dann sinnvoll, wenn eine Ergebnissicherung – in Form von Protokollen, wie einem Lerntagebuch oder einem Portfolio, Plakaten, Videos, Powerpoints, Karteikärtchen, etc. – erkennbar ist. Somit kann zu einem späteren Zeitpunkt wieder darauf zugegriffen und gegebenenfalls weiterphilosophiert werden. (Vgl. Peter 2017b: 9ff).

Satelliten (7. Klasse)

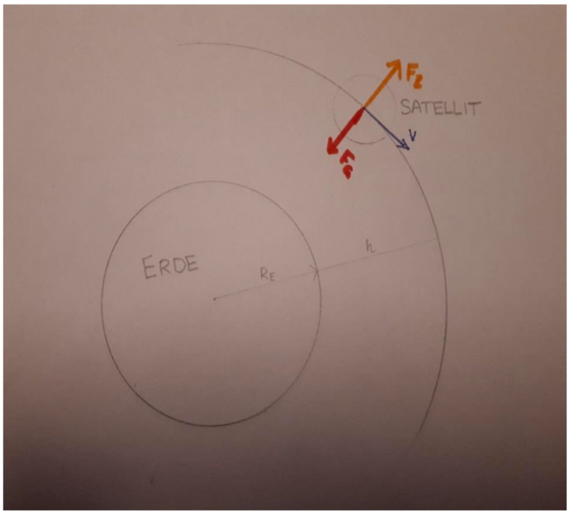
Satelliten umkreisen auf ihren Bahnen die Erde. Es gibt sehr viele von ihnen auf verschiedenen „Flughöhen“ und mit verschiedenen Umlaufzeiten.

- Recherchiert, warum ein Satellit überhaupt fliegen kann! Welche Kräfte wirken auf ihn ein?
- Gibt es theoretisch eine maximale Begrenzung der Masse eines Satelliten, so dass er noch fliegen kann?
- Zwei dieser sogenannten Erdsatelliten sind die ISS und AMSAT-OSCAR 7. Angenommen die beiden Satelliten stehen jetzt übereinander. Wie lange dauert es bis sie wieder übereinanderstehen?

Abbildung 9: Modellierungsaufgabe für die 11. Schulstufe

Potenzieller Lösungsansatz der Modellierungsaufgabe

1. Frage:



Auf den Satelliten wirken zwei Kräfte ein, nämlich die Gravitations- und Zentrifugalkraft.

m ... Masse des Satelliten

v ... Bahngeschwindigkeit des Satelliten

r ... Abstand Satellit – Erdmittelpunkt

M ... Masse der Erde

G ... Gravitationskonstante

Zentrifugalkraft: $F_Z = \frac{mv^2}{r}$

Gravitationskraft: $F_G = \frac{GMm}{r^2}$

Radius Satellit = Erdradius + Höhe

2. Frage:

Für eine Kreisbahn des Satelliten um die Erde muss $F_Z = F_G$ gelten. Dadurch, dass sich die Masse des Satelliten kürzt, zeigt sich, dass diese Komponente irrelevant für den Flug des Satelliten ist. Wenn man jene Gleichung, die durch das Gleichsetzen der beiden Kräfte entsteht, nach v umformt, erhält man: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. Mit dieser Formel kann die Geschwindigkeit eines Satelliten mit Masse m auf einer Kreisbahn mit Radius r, Erdmasse $M \approx 6 \cdot 10^{24} kg$, Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ berechnet werden.

3. Frage:

Recherche zu den Daten:

Erdradius: $6370\ km\ =\ 6370000\ m$

Erdmasse: $5{,}972 \cdot 10^{24} kg \approx 6 \cdot 10^{24}\ kg$

Orbitalhöhe der ISS: $400\ km$

Bahnhöhe von AMSAT OSKAR 7: $1450\ km$

Radius Satellitenbahn = Erdradius + Höhe

Berechnungen der ISS hinsichtlich der Kreisbahngeschwindigkeit und Umlaufzeit:

$$\sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(400+6370) \cdot 10^{3}}} = 7688{,}55 \approx 7689 \frac{m}{s} \approx 27681\ km/h$$

Kreisbahngeschwindigkeit: ca. $28\ 000\ km/h$

Umlaufzeit: $t = \frac{s}{v} = \frac{2 \cdot (400+6370) \cdot 1000 \cdot \pi}{7689} \approx 5532\ s \approx 92\ min$

Berechnungen des Satelliten AMSAT OSKAR 7 hinsichtlich der Kreisbahngeschwindigkeit und Umlaufzeit:

$$\sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(1450+6370) \cdot 10^{3}}} = 7153{,}77 \approx 7154 \frac{m}{s} \approx 25754\ km/h$$

Kreisbahngeschwindigkeit: ca. $25\ 750\ km/h$

Umlaufzeit: $t = \frac{s}{v} = \frac{2 \cdot (1450+6370) \cdot 1000 \cdot \pi}{7154} \approx 6868{,}12\ s \approx 115\ min$

Wenn die ISS einmal die Erde umkreist hat, ist Amsat Oskar 7 bei 360*(92/115) = 288°. Das heißt er ist pro Umdrehung der ISS 72° hinterher.

Wann stehen die Satelliten wieder übereinander?

T ... Umlaufzeit

v ... Bahngeschwindigkeit des Satelliten

r ... Abstand Satellit – Erdmittelpunkt

φ ... zurückgelegter Winkel

ω ... Kreisfrequenz

$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T}$, außen (AMSAT OSKAR 7): $\omega_1 = \frac{2\pi}{115 \cdot 60}$, innen (ISS): $\frac{2\pi}{92 \cdot 60} = \omega_2$

$\omega_1 < \omega_2$

$\frac{2\pi}{115 \cdot 60} < \frac{2\pi}{92 \cdot 60}$

$\varphi = \omega t, \ \varphi_1 = \omega_1 t, \ \varphi_2 = \omega_2 t,$ φ_1... Winkel, den Satellit auf äußerer Bah

n zurücklegt

$\varphi_1 < \varphi_2$ φ_2... Winkel, den Satellit auf innerer Bahn zurücklegt

$\omega_1 t < \omega_2 t$

$\varphi_1 + 2\pi = \varphi_2$

$\omega_1 t + 2\pi = \omega_2 t$

$t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$... Zeit, nach der sie wieder übereinanderstehen

$$t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \approx \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{92 \cdot 60} - \frac{2\pi}{115 \cdot 60}} = \frac{1}{\frac{1}{92 \cdot 60} - \frac{1}{115 \cdot 60}} = 27600s \approx 7,\dot{6}h = 7h\ 40\ min$$

Wird in die Formel eingesetzt, so stehen die Satelliten nach ca. 7 Stunden 40 Minuten wieder übereinander.

4.5. Unterrichtsideen

Aufgrund der im Lehrplan erkennbaren Fülle an potenziellen Anknüpfungspunkten am Unendlichkeitsverständnis möchte ich zwei Unterrichtskonzepte vorstellen, welche zumal aus einem mathematischen und einem theologischen Ausgangspunkt hervorgehen. Neben der Einbindung beider Unterrichtsfächer – Mathematik und Religion – sollen zudem verschiedene fachdidaktische Aspekte (Unterrichtsstruktur, Methoden, Materialienbenützung) dargestellt werden. Nicht außer Acht gelassen werden darf, dass das Thema „Unendlichkeit“ in beiden Lehrplänen niemals dezidiert angeführt ist, weshalb dieses nur über Umwege (z. B. Mengenlehre, Gottesfrage/Gottesbeweis etc.) angesprochen und herausgearbeitet werden kann. Festzuhalten gilt, dass bei der Heranführung von Religion an Mathematik auf die Gemeinsamkeit der Wahrheitsfindung und des Beweises Bezug genommen und gegen Ende mit Thema der Unendlichkeit verknüpft wird.

4.5.1. Anknüpfungspunkt in Mathematik und Sequenzaufbau zu Mengenlehre und Menge der natürlichen Zahlen mit fächerübergreifendem Element

Einstieg	Als Einstiegsphase bietet sich die direkte Auseinandersetzung mit der Lehrperson oder eines Arbeitsblatts mit offenen Fragen an, um die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler auf das Thema zu lenken und die Grundvorstellungen der Lernenden zu erfassen.

Philosophieren im Mathematikunterricht
AUFGABE: **Wählen Sie mindestens drei der nachfolgenden Fragen aus, die Sie gemeinsam in der Gruppe diskutieren. Fassen Sie die wichtigsten Erkenntnisse auf den Moderationskarten zusammen und pinnen Sie diese anschließend auf die Tafel.**
• Warum gibt es Zahlen? Kann eine Welt ohne Zahlen existieren? • Wo ist ihr Anfang, wo ihr Ende? • Wie groß ist die Unendlichkeit? • Was ist eine Zahl? Sind Zahlen bloß eine Idee oder auch Realität?

Erarbeitung	In der anschließenden Erarbeitungsphase ist eine Option, mit den Begriffen Axiome/Axiomensystem, Mengenaxiome und Peano-Axiome fortzufahren und ein besseres Verständnis dafür zu erhalten, um diese in den weiteren Arbeitsprozessen korrekt anzuwenden. Eine methodische Durchführungsart dazu wäre, die Themen im Sinne der „*Expertenrunde*[27]" in den Unterricht zu integrieren. Somit sollen die Inhalte und Quellen der vorliegenden Arbeit eine wissenschaftlich fundierte Basis für die Weiterarbeit mit den Schülerinnen und Schülern bilden.

„Irgendwo muss man doch anfangen" (Teil 1)

Axiome/ Axiomensystem/ richtiges mathematisches Arbeiten

AUFGABE:

Gestalten Sie ein Plakat oder eine PowerPoint Präsentation, in der Sie die folgenden Inhalte beachten:

- **Definition des Begriffs Axiome und Axiomensystem erläutern.**
- **Bedingungen und Bestandteile des „klassisch" axiomatischen Systems skizzieren.**
- **Vorgang des mathematischen Beweisens (deduktive Methode) erklären.**
- **Eigenschaften eines modernen Axiomensystems anführen.**
- **Mögliche Formulierungen eines Beweissatzes angeben.**
- **Das Prinzip eines Widerspruchsbeweises darlegen.**

Durch Axiomensysteme werden mathematische Begriffe mithilfe einer Reihe von einfachen Festlegungen (Axiome) charakterisiert. An ein mathematisches Axiomensystem werden eine Reihe von Bedingungen gestellt. Derartige mathematische Axiomensysteme genügen folgenden Bedingungen:

1. Axiome sind Grundannahmen, die meist aus bereits vorhandenen Vorstellungen über den zu definierenden Begriff resultieren, von deren Gültigkeit man ausgeht und die deshalb auch nicht bewiesen werden müssen.

2. Axiome sollen zu keinem Widerspruch führen.

[27] Diese Methode dient zur Erarbeitung und Einführung neuer Inhalte. Wesentlich ist dabei eine gleichmäßige Verteilung der Lernenden innerhalb jedes Themenfeldes. Die Inhalte sollten zunächst eigenständig durchgenommen und im Anschluss in der Themengruppe diskutiert werden. Nachdem die Inhalte in der Expertengruppe für alle Teilnehmer aufgearbeitet sind, formieren sich neue Gesprächsgruppen, wobei von jedem Themenfeld (mindestens) eine Person vertreten sein muss. Die Lehrperson fungiert während der gesamten Zeit als Ansprechpartner und Coach im Hintergrund. (Vgl. Reich 2017: 1).

3. Weitere gewünschte Eigenschaften des zu definierenden Begriffs sowie alle übrigen Sätze der entsprechenden Theorie sollen aus diesen Festlegungen mit den Regeln der Logik bewiesen werden können.

4. Keines der Axiome soll aus den anderen Festlegungen des Axiomensystems hergeleitet werden können.

Durchführung der deduktiven Methode: Eine Aussage (A1) wird auf eine offensichtlichere Aussage (A2) zurückgeführt. Anschließend wird nach einer noch trivialeren Aussage (A3) gesucht, aus der (A2) folgt, usw. Schlussendlich kommt man bei Aussagen (Axiomen) an, die jede/r als wahr akzeptiert.

Im Vorgang des mathematischen Arbeitens werden Theorien formuliert, weshalb Begriffe definiert gehören. Doch auch bei Definitionen muss auf gewisse Begriffe zurückgegriffen werden, die selbst undefiniert bleiben. Solche Begriffe nennt man *„undefinierte Begriffe"* oder *„primitive Terme"* – wie beispielsweise *„Punkt".* Eine Funktion der Axiome ist es unter anderem, die Eigenschaften der primitiven Terme festzulegen.

Ein sogenanntes ”materielles“ oder ”klassisches“ axiomatisches System besteht aus:

1. der Festlegung der Grundbegriffe (der primitiven Terme) und
2. Angabe einer Liste grundlegender Aussagen (der Axiome) über die primitiven Terme. Dabei sollten die Axiome möglichst einfach gehalten sein und über ihre Wahrheit allgemeine Einigkeit herrschen.

Alle anderen benötigten Begriffe werden in den Definitionen mit Hilfe der primitiven Terme und der Axiome festgelegt. Weitere mathematische Aussagen werden aus den Axiomen oder aus vorher bewiesenen Aussagen logisch hergeleitet und wiederum bewiesen. Neben primitiven Termen werden zudem Zahlwörter, logische Begriffe und alle essenziellen Ausdrücke als bekannt vorausgesetzt und in der üblichen Sprachbedeutung benutzt.

Ein modernes Axiomensystem sollte folgende Eigenschaften besitzen:

A) Widerspruchsfreiheit: Die Widerspruchsfreiheit beweist man am besten mit Hilfe der Konstruktion eines Modells.

Allerdings ist dies nicht möglich, ohne Widerspruchsfreiheit eines etwas primitiveren Systems als gegeben hinzunehmen ~Kurt Gödel

B) Unabhängigkeit: Kein Axiom soll aus den anderen hergeleitet werden können. Um zu zeigen, dass Axiom *A* von einem System *S* von Axiomen unabhängig ist, muss man ein Modell konstruieren, in dem alle Axiome von *S* gelten, nicht aber *A*.

C) Vollständigkeit: Ein System ist vollständig, wenn man kein unabhängiges Axiom hinzufügen kann (das nur die schon bekannten Terme benutzt), ohne Widersprüche zu erzeugen. Die Vollständigkeit eines Systems ist meist kompliziert nachzuweisen.

D) Kategorizität: Ein Axiomensystem heißt kategorisch, wenn es widerspruchsfrei ist, und wenn je zwei Modelle davon "isomorph" sind, also eindeutig aufeinander abgebildet werden können.

Formulierungen eines Beweises:

- Nach einem Axiom/bewiesenen Satz gilt . . . ,
- Nach einem vorangegangenen Schritt/ einer logischen Regel/ der Definition des Beweises/Hypothese gilt . . . ,
- Nach Annahme der verneinten Folgerung gilt . . . .

Letzteres ist die Einleitung eines Widerspruchsbeweises ("reductio ad absurdum", kurz: RAA). Um eine Implikation $A \Rightarrow B$ zu beweisen, zeigt man eine Implikation $A \wedge (\neg B) \Rightarrow C$ mit einer offensichtlich falschen Aussage C. Das ist nur möglich, wenn $A \wedge (\neg B)$ falsch ist. Da A als wahr vorausgesetzt wird, muss $\neg B$ falsch sein, also ist B wahr. (Fritzsche o.J.: 33; 35f)

„Irgendwo muss man doch anfangen" (Teil 2)
Peano-Axiome

<u>AUFGABE:</u>

Fassen Sie die Peano-Axiome zusammen und protokollieren Sie die Rechenregeln für Multiplikation und Addition, die sich aus den Peano-Axiomen ergeben. Nutzen Sie im Anschluss die QR-Codes zu den Erklärvideos von The Simple Math und (mindestens eines) von Christian Spannagel und gestalten Sie einen Raster, indem Sie aufschlüsseln, was für Sie bereits nachvollziehbar ist bzw. wobei Ungereimtheiten und Fragen zurückbleiben.

Die Menge der natürlichen Zahlen, in denen sich das Wesen das Zählprozesses widerspiegelt, wird aus den nachstehenden Axiomen manifestiert. Diese Axiome wurden 1889 vom italienischen Mathematiker Giuseppe Peano formuliert:

N0) 0 ist eine natürliche Zahl (und zugleich Startpunkt des Weiterzählens).

N1) Keine natürliche Zahl hat mehr als einen Nachfolger: Jede natürliche Zahl n hat genau eine natürliche Zahl n' als Nachfolger. Für $m, n \in \mathbb{N}$ folgt aus $m' \neq n'$ zwingend $m \neq n$.

N2) Der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist stets selbst eine natürliche Zahl: wenn $n \in \mathbb{N}$, dann $n' \in \mathbb{N}$.

N3) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt $n' \neq 0$.

N4) Zwei verschiedene natürliche Zahlen n und m besitzen stets verschiedene Nachfolger n' und m'. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich. Für $m, n \in \mathbb{N}$ folgt aus $m' \neq n'$ zwingend $m \neq n$.

N5) Sei eine Menge M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

a) $0 \in M$ und

b) $\forall\, m \in M$ gilt $m' \in M$, dann muss $M = \mathbb{N}$ gelten.

Enthält eine Menge M die Zahl 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden M die Menge der natürlichen Zahlen.

Durch die Verknüpfung der ersten Grundsätze (N0 – N4) lässt sich die Unendlichkeit der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ erkennen: N0 legt fest, dass die ursprüngliche Menge $\mathbb{N}$ keine leere Menge ist. N3 sowie N4 verhindern eine Endlosschleife, sodass man wieder zum Ursprung 0 oder einer bereits genannten Zahl zurückkehrt. Während N2 das Abkommen des „Zählwegs" verhindert, unterbindet N1 die sogenannte Weggabelung. Somit ergibt sich einerseits, dass keine Zahlen während des Zählprozesses je ausgelassen werden und andererseits, dass das Zählen per se kein Ende findet und somit unendlich weitergeht. Das letzte der Axiome (N5) ist die Grundlage des Induktionsprinzips, welches wie folgt abläuft:

N5a) beschreibt, dass $0 \in M$. Laut N5b) gilt $m' \in M \quad \forall\, m \in M$, wodurch der Nachfolger von 0 – also $0'$, das 1 entspricht – $\in M$ ist. Wiederum gilt bei $1 \in M$ das Prinzip von N5b) $1' \in M$, woraus folgt, dass $1' = 2\ \in M$, etc.

Es folgt, dass $\mathbb{N} \subseteq M$, da aber $M \subseteq\ \mathbb{N}$ muss $M = \mathbb{N}$ gelten. (Vgl. Kuba & Götz 2004: 39-42)

Grundrechnungsarten:
Definiert man etwa Addition (+) und Multiplikation (·) für natürliche Zahlen m, n mittels (1) $m + 0 = 0 + m = m$, (2) $m + n' = (m + n)'$, (3) $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$, (4) $m \cdot n' = m \cdot n + m$, so lassen sich aus den Peano‘schen Axiomen beispielsweise - die Kommutativgesetze: $m + n = n + m$ und $m \cdot n = n \cdot m$, - die Assoziativgesetze: $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ sowie das - Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ herleiten.

Definitionen Addition in $\mathbb{N}$:	
Add1: $m + 0 := m$	Eins: $1 := 0'$
Add2: $m + n' := (m + n)'$	EinsAddR: $n + 1 := n'$
NullAddL: $0 + m := m$	EinsAddL: $1 + n := n'$,
Definitionen Multiplikation in $\mathbb{N}$:	
Mult1: $m \cdot 0 := 0$	NullMultL: $0 \cdot m := 0$,
Mult2: $m \cdot n + m \coloneqq m \cdot n'$	EinsMultL: $1 \cdot m := m$,

Beweis Distributivgesetz durch Induktion über z

Behauptung: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang für $z = 0$: z. z. $x \cdot (y+0) = x \cdot y + x \cdot 0$

$x \cdot (y+0) = x \cdot y$ lt. Add1

$x \cdot y = x \cdot y + 0$ lt. Add1

$x \cdot y + 0 = x \cdot y + x \cdot 0$ lt. Mult1

Induktionsannahme: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ z. z. $x \cdot (y+z') = x \cdot y + x \cdot z'$

Induktionsschritt: $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}') = x \cdot (y+z)'$ lt. Add2

$x \cdot (y+z)' = x \cdot (y+z) + x$ lt. Mult2

$x \cdot (y+z) + x = (x \cdot y + x \cdot z) + x$ lt. Induktionsannahme

$(x \cdot y + x \cdot z) + x = x \cdot y + (x \cdot z + x)$ lt. AssAdd

$x \cdot y + (x \cdot z + x) = \boldsymbol{x \cdot y + x \cdot z'}$ lt. Mult2. q.e.d.

Beweis Assoziativgesetz der Addition durch Induktion über z

Behauptung: $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang für $z = 0$:

$(x+y)+0 = x+y = x+(y+0)$ lt. Add1

Induktionsannahme: $(x+y)+z = x+(y+z)$ z. z. $(x+y)+z' = x+(y+z')$

Induktionsschritt:

$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}' = ((x+y)+z)'$ lt. Add2

$\big((x+y)+z\big)' = \big(x+(y+z)\big)'$ lt. I.A.

$\big(x+(y+z)\big)' = x+(y+z)'$ lt. Add2

$x+(y+z)' = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}')$ lt. Add2 q.e.d.

Beweis Assoziativgesetz der Multiplikation durch Induktion über z

Behauptung: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang: z. z. $(x \cdot y) \cdot 0 = x \cdot (y \cdot 0)$

$(x \cdot y) \cdot 0 = 0$ lt. Mult1

$0 = x \cdot 0$ lt. Mult1

$x \cdot 0 = x \cdot (y \cdot 0)$ lt. Mult1

Induktionsannahme: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ z. z. $(x \cdot y) \cdot z' = x \cdot (y \cdot z')$

Induktionsschritt: $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z}' = (x \cdot y) \cdot z + (x \cdot y)$ lt. Mult2

$(x \cdot y) \cdot z + (x \cdot y) = x \cdot (y \cdot z) + (x \cdot y)$ lt. Induktionsannahme

$x \cdot (y \cdot z) + (x \cdot y) = x \cdot (y \cdot z + y)$ lt. DistR

$x \cdot (y \cdot z + y) = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}')$ lt. Mult2 q.e.d.

Beweis Kommutativgesetz der Addition durch Induktion über n

Behauptung: $m + n = n + m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang für $n = 0$: $m + 0 = m = 0 + m$ lt. Add1

Induktionsannahme: : $m + n = n + m$ z. z. $m + n' = n' + m$

Induktionsschritt: $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}' = (m + n)'$ lt. Add2

$(m + n)' = (n + m)'$ lt. Induktionsannahme

$(n + m)' = 1 + (n + m)$ lt. EinsAddL

$1 + (n + m) = (1 + n) + m$ lt. AssAdd

$(1 + n) + m = \boldsymbol{n}' + \boldsymbol{m}$ lt. EinsAddL q.e.d.

Beweis Kommutativgesetz der Multiplikation durch Induktion über n

Behauptung: $m \cdot n = n \cdot m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang für $n = 0$: z. z. $m \cdot 0 = 0 \cdot m$	
$m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot m$	lt. Mult1, NullMultL
Induktionsannahme: $m \cdot n = n \cdot m$ z. z. $m \cdot n' = n' \cdot m$	
Induktionsschritt: $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}' = m \cdot n + m$ lt. Mult2	
$m \cdot n + m = n \cdot m + m$	lt. Induktionsannahme
$n \cdot m + m = n \cdot m + 1 \cdot m$	lt. EinsMultL
$n \cdot m + 1 \cdot m = (n+1) \cdot m$	lt. DistR
$(n+1) \cdot m = \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{m}$	lt. Definition q.e.d.

Erklärvideos zu Peano-Axiome:

The SimpleMath: https://www.youtube.com/watch?v=an34mviy_jE

Christian Spannagel:

- Dreiste Mathematiker(innen):

Wir ignorieren eines der Peano-Axiome:

https://www.youtube.com/watch?v=qRZktCc0E2c&t=5s

- Die Folge der natürlichen Zahlen (Teil 1):

https://www.youtube.com/watch?v=73ZxJ_NIXUY&t=108s

- Die Folge der natürlichen Zahlen (Teil 2):

https://www.youtube.com/watch?v=65ns5w-gWsI&t=552s

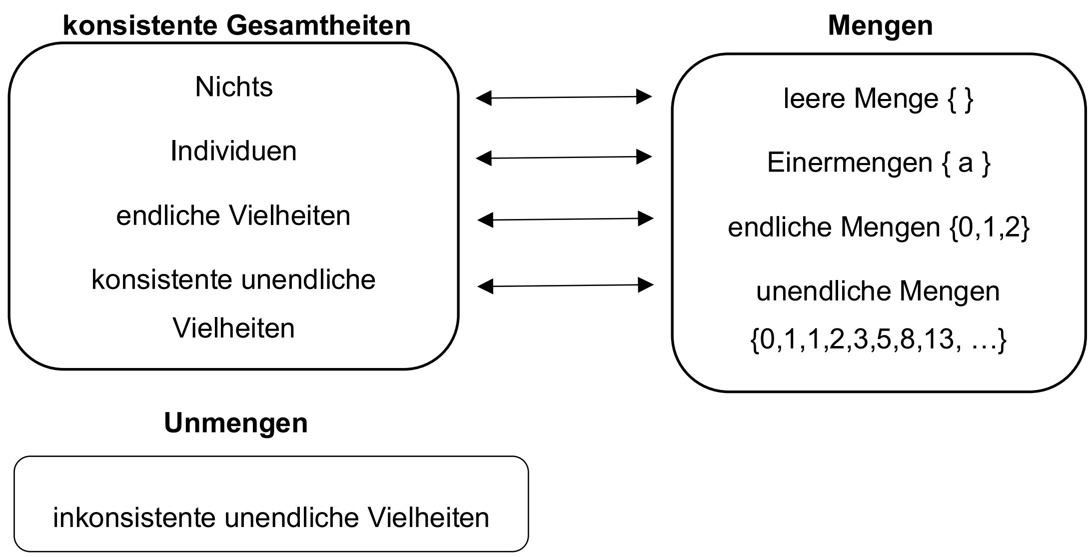
„Irgendwo muss man doch anfangen“ (Teil 3)
Unmenge – Allklasse – unendliche Menge

<u>AUFGABE:</u> Gestalten Sie ein Übersichtsblatt zu den Begriffen Unmenge, Allklasse und unendliche Menge und heben Sie mögliche Überschneidungen sowie klare Differenzen deutlich hervor. Vergleichen Sie dazu die Definitionen Ihres Mathematikbuches mit Quellen Ihrer Internetrecherche – beziehen Sie auch Quellen aus Büchern oder Artikeln (s. Google Scholar) mit ein.

Diskutieren Sie anschließend in einer Kleingruppe (max. vier Personen) über Ihre Ausarbeitung und präsentieren Sie diese im Plenum.

Leitpunkte für die Diskussionsrunde:

- **Erläuterung der eigenen Definitionen zu den drei Begriffen.**
- **Darstellungsform(en) von Unmenge und unendlicher Menge (graphische Interpretation).**
- **Fächerübergreifende Frage: Gibt es neben Mathematik auch in anderen Unterrichtsfächern solche oder ähnliche Phänomene/Größenordnungen/Dimensionen/… wie der Allklasse?**



Unmenge, Allklasse, Unendliche Menge	Die Grundinformationen können aus den Abschnitten 2.5.4., 2.5.5. und 2.6. für den eigenen Unterricht herangezogen und didaktisch aufbereitet werden. In meinem nachfolgenden Unterrichtsvorschlag fokussiere ich das eigenständige Lernen, wodurch die Schülerinnen und Schüler mittels Eigenrecherche und unter Einbezug verschiedener Quellen sowie einem reflektierten Austausch – sowohl mit Gleichaltrigen als auch der Lehrperson - zu einer eigenen Begriffsdefinition gelangen.

Unmenge: ____

____

Allklasse:____

____

Unendliche Menge:____

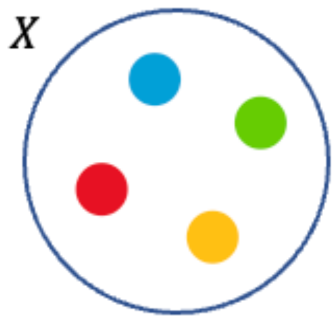
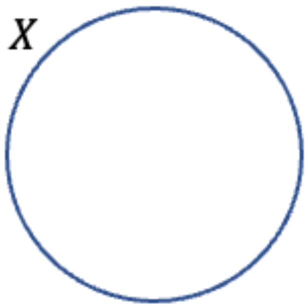
____

<u>Meine Notizen:</u>

***<u>Zu enthaltende Kernelemente bei den Begriffsdefinitionen der Schüler*innen</u>**:*

Unendliche Menge, enthält unendlich viele Elemente.

Allklasse entspricht einer Unmenge, die anders als Mengen alle Mengen als Elemente enthält.

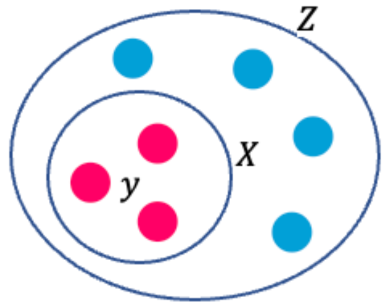
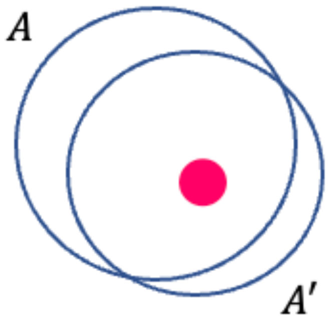
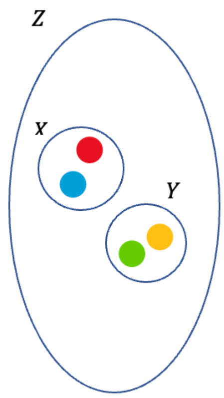
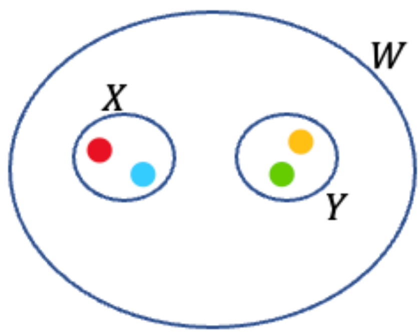
Individuelle Gruppenerarbeitungsphase innerhalb der Expertenrunde mittels Placemat[28], Concept Map[29], Plakatgestaltung, PowerPoint/Prezi[30], Padlet[31], etc.:	
Anknüpfung an Abschnitt 2.4.: **Erarbeitung der Mengenaxiome (vgl. Hebisch 2010: 1; Walz 2017:1) durch Gamification in Form von Memorykarten**	
Extensionalitätsaxiom (lateinisch: *extensio* = Ausdehnung, Umfang) *Zwei Mengen sind (genau dann) gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.*	
Axiom der leeren Menge/ Nullmengenaxiom *Es gibt eine Menge, die kein Element enthält – die leere Menge: ∅, { }*	

[28] Eine **Placemat** zählt zu den Methoden des kooperativen Lernens. Sie dient Lernenden dazu, erste Ideen und Informationen eigenständig auf seinem/ihren Teil (Place) des Plakats zu erfassen und anschließend innerhalb der Kleingruppe (max. vier Personen) zu gewichten und zu präsentieren. Die wesentlichsten Inhalte der Mitglieder werden im Mittelfeld der Placemat zusammengefasst und abschließend der gesamten Klasse vorgetragen. Diese Methode bewährt sich vor allem in der Erarbeitungsphase von kontroversen Themen und strukturiert zugleich die Gruppenarbeit. (Vgl. Kroker 2020: 1; Reinking 2022: 1).

[29] Eine **Concept Map** visualisiert Zusammenhänge von Texten oder Ideen als eigene graphische Darstellungsform. Sie ähnelt einer Mindmap mit dem Unterschied, dass wesentliche Meilensteine in Kästchen oder Kreisen angeführt und diese mittels Pfeilen oder Linien verbunden werden. Die Pfeile oder Linien werden mit Phrasen oder Verknüpfungswörtern beschriftet, um die Beziehung klar abzubilden. (Vgl. Straeter-Lietz 2018: 12-15).

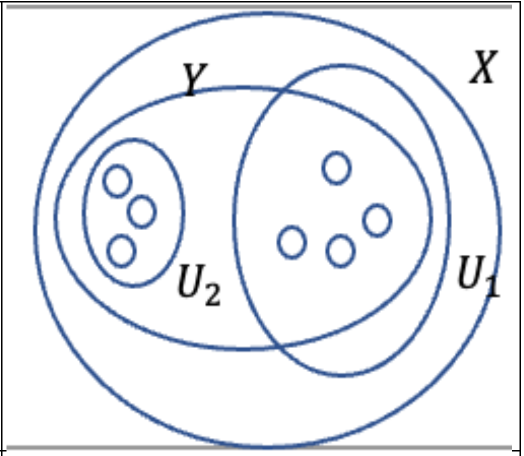
[30] **Prezi** ist ein Präsentationsprogramm – alternativ zu PowerPoint – das über die Webseite (https://prezi.com) aufgerufen werden kann.

[31] Ein **Padlet** kann auf der gleichnamigen Webseite (https://de.padlet.com) erstellt werden. Aufgrund der Vielfalt an Darstellungsmöglichkeiten können Inhalte präzise visualisiert werden.

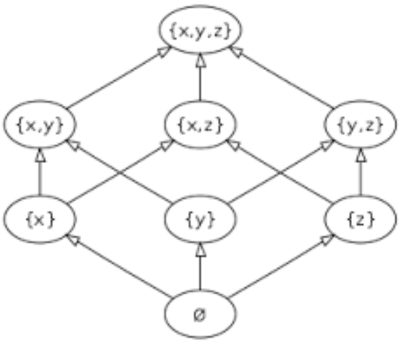
Aussonderungsaxiome Die Menge X ist eine Teilmenge zu der bereits bestehenden Menge Z, in der alle Elemente y, die eine bestimmte Eigenschaft $F(y)$ haben, zur Menge X zusammengefasst beziehungsweise ausgesondert werden.	
Existenzaxiom *Es gibt eine Menge.*	
Paarmengenaxiom *Zu je zwei Mengen gibt es stets eine Menge, die jene beiden als Elemente enthält.*	
Kleines Vereinigungsmengenaxiom *Zu je zwei Mengen gibt es eine Menge, welche alle Elemente enthält, die zu einer der beiden Mengen gehören.*	

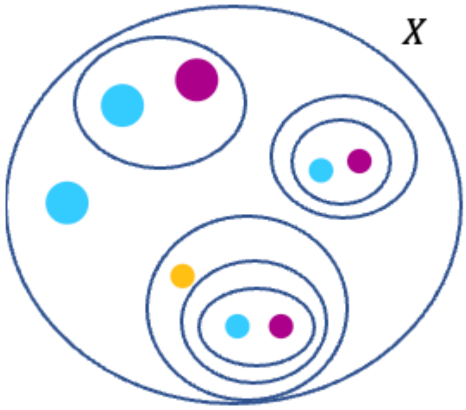
<table>
<tr>
<td>Großes Vereinigungsmengenaxiom

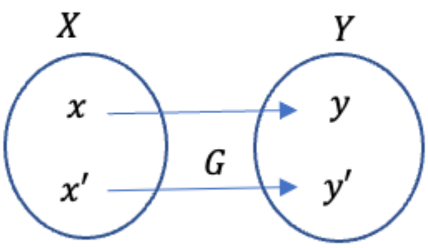
Zu jedem Mengensystem* gibt es eine Menge, welche alle Elemente enthält, die zu mindestens einer Menge des gegebenen Systems gehören.

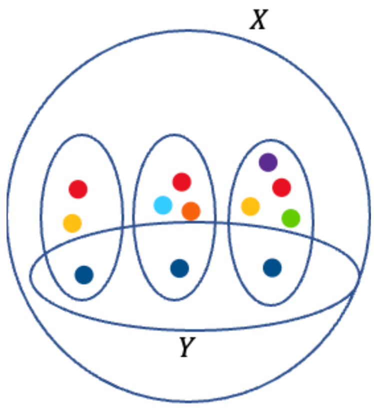
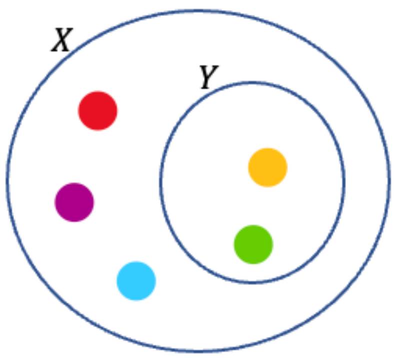
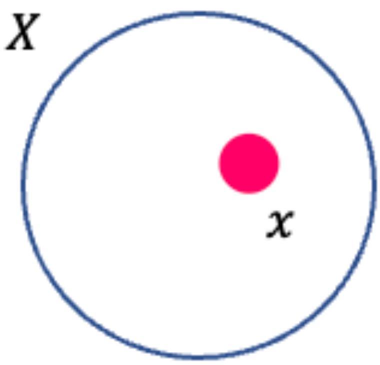
*Man nennt eine Menge auch ein Mengensystem, wenn ihre Elemente selbst Mengen sind.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Potenzmengenaxiom

Zu jeder Menge existiert ein Mengensystem*, das unter seinen Elementen alle Teilmengen der gegebenen Menge enthält.

*Man nennt eine Menge auch ein Mengensystem, wenn ihre Elemente selbst Mengen sind.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Unendlichkeitsaxiom

Es gibt eine Menge, welche die leere Menge enthält und mit jedem ihrer Elemente auch dessen Nachfolger.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Ersetzungsaxiom/ Funktionalaxiom

Dies ergibt eine Funktion, die jedem $x \in X$ genau ein y mit einer gewissen Eigenschaft zuordnet. Somit gibt es eine Menge Y, die zu jedem $x \in X$ ein y mit dieser Eigenschaft enthält $f: X \to Y, x \longmapsto y$.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Auswahlaxiom Ist X eine Menge, deren Elemente nichtleer und paarweise disjunkt sind, so existiert eine Menge Y, die mit jedem Element von X genau ein Element gemeinsam hat.	
Fundierungs-/Regularitätsaxiom *Jede nichtleere Menge X besitzt ein minimales Element Y, so dass kein Element von Y in X vorkommt.*	
Einermengenaxiom *Eine Menge fasst genau ein Element x und heißt Einermenge (Singletonmenge) von x.*	

An dieser Stelle besteht die Möglichkeit, die weiterführenden Lernpfade individuell miteinander zu verknüpfen oder gesondert fortzusetzen.

Mathematische Weiterführung I	Im Anschluss an die theoretische Auseinandersetzung dient das Schulbuch *Mathematik HAK I (Trauner-Verlag)* von Tinhof u. a. (2022: 14-22) der praktischen Orientierung, Erprobung, Umsetzung, Übung und Festigung der erarbeiteten Begrifflichkeiten mittels ausgewählter Beispiele zum Kapitel Mengenlehre.

Informations- und Arbeitsblatt zur Mengenlehre

Def.: Menge, Element, Mächtigkeit

- Eine **Menge** ist eine *Gesamtheit* von *unterscheidbaren Objekten*. Von jedem Objekt muss feststehen, ob es zur Menge gehört oder nicht.
- Gehört *ein Objekt einer Menge* an, so heißt es **Element** der Menge.
- Die *Anzahl* der unterscheidbaren Elemente einer Menge heißt **Mächtigkeit** der Menge.
- Die Menge, die *kein Element* enthält, heißt **leere Menge**. Symbol: {} oder ø
- Man unterscheidet zwischen **endlichen Mengen** (z.B.: $A = \{2,4,8,16\}$ oder die Menge der Finger an einer Hand) und **unendlichen Mengen** (z.B.: Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8, \ldots.\}$

$A = \{1,2,5,7,9\}$ ... Zeichen einer Menge ist die geschwungene Mengenklammer

$7 \in A$ ... 7 ist ein Element der Menge A

$4 \notin A$ ... 4 ist kein Element der Menge A

$|A| = 5$ ... Die Mächtigkeit der Menge A ist 5 (A hat fünf Elemente)

Def.: Gleichheit von Mengen ($\boldsymbol{A = B}$) „A ist gleich B"

Die Menge A ist gleich der Menge B, wenn sie beide genau dieselben Elemente haben. Die Reihenfolge der Elemente ist beliebig, gleiche Elemente werden nur einmal angeführt.

Def.: Teilmenge ($\boldsymbol{A \subseteq G}$) „$A$ ist Teilmenge von G"

Eine Menge A heißt Teilmenge der Grundmenge G, wenn jedes Element von A auch Element von G ist.

Grafische Darstellung:

Def.: Durchschnittsmenge ($\boldsymbol{A \cap B}$) „A Durchschnitt B“

Die Durchschnittsmenge zweier Mengen A und B ist die Menge der Elemente, die sowohl der Menge A als auch der Menge B angehören.

Weisen zwei Mengen **kein** gemeinsames Element auf, so heißen diese **elementfremd.**

Grafische Darstellung:

Def.: Vereinigungsmenge ($\boldsymbol{A \cup B}$) „A vereinigt mit B“

Die Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die der Menge A oder der Menge B oder beiden Mengen angehören. *(inklusives ODER!)*

Grafische Darstellung:

Def.: Differenzmenge ($\boldsymbol{A \backslash B}$) „$A$ ohne B“

Die Differenzmenge A ohne B ist die Menge aller Elemente, die der Menge A angehören, aber nicht der Menge B.

Grafische Darstellung:

Aufgabe: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ und $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

Ermitteln Sie folgende Mengen in aufzählender und grafischer Darstellung:

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} =$

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} =$

$\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B} =$

$\boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{A} =$

Aufgabe: Ermitteln Sie alle Teilmengen der Menge $A = \{1,2,3\}$

Aufgabe: Überprüfen Sie, ob die Mengen A und B gleich sind. Ermitteln Sie die Elemente von A und B und geben Sie ihre Mächtigkeit an.

$A =$ Menge der Buchstaben des Wortes „RENNEN“

$B =$ Menge der Buchstaben des Wortes „NENNER“

Mengen können auf zwei verschiedene Arten dargestellt werden:

1. **Aufzählendes** Verfahren
   $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

2. **Beschreibendes** Verfahren
   $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 8\}$

Übungsaufgaben zur Mengenlehre

1. Setzen Sie das richtige Symbol ∈ oder ∉:

91 ________ $A = \{x|x \text{ } ist \text{ } eine \text{ } zweistellige \text{ } Primzahl\}$

Erde ______ $B = \{x|x \text{ } ist \text{ } ein \text{ } Planet\}$

a _________ $C = \{x|x \text{ } ist \text{ } ein \text{ } Vokal\}$

2. Schreiben Sie in aufzählender Form an:

a) Die Menge A der positiven ganzen Zahlen, die größer als 11 und kleiner als 14 sind.

b) Die Menge B der positiven ganzen Zahlen, die größer als 11 und kleiner als 12 sind.

c) Die Menge C der Ziffern der Zahl 240 438.

d) Die Menge D der österreichischen Bundesländer.

3. Schreiben Sie alle Elemente der Menge an:

a) $A = \{x|x \text{ } ist \text{ } eine \text{ } Primzahl \wedge x \text{ } ist \text{ } größer \text{ } als \text{ } 3 \wedge x \text{ } ist \text{ } gerade\}$

b) $B = \{x|x \text{ } ist \text{ } eine \text{ } Primzahl \wedge x \text{ } ist \text{ } kleiner \text{ } als \text{ } 20\}$

c) Die Menge C der Quadratzahlen zwischen 5 und 40.

4. Setzen Sie „ein“ oder „kein“ ein, sodass eine wahre Aussage entsteht:

Die leere Menge enthält _________(ein/kein) Element.

$\{0\}$ enthält ________ (ein/kein) Element.

5. Überprüfen Sie, ob die Mengen A und B gleich sind! Begründen Sie Ihre Antwort!

$A = \{x|x \text{ } ist \text{ } eine \text{ } Primzahl \text{ } zwischen \text{ } 9 \text{ } und \text{ } 22.\}$

$B = \{11,13,15,17,19\}$

6. Gegeben ist die Menge $M = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 15\}$. Ermitteln Sie die Teilmenge, deren Elemente

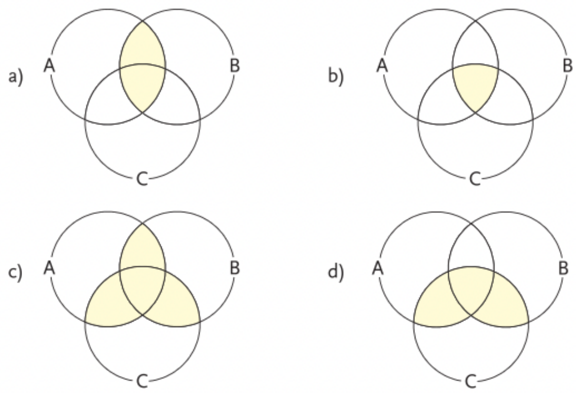
a) durch 3 teilbar sind. b) durch 4 teilbar sind. c) durch 7 teilbar sind.

7. a) Schreiben Sie für die Mengen $\{a, b\}, \{a, b, c\}$ und $\{a, b, c, d\}$ alle Teilmengen an!

b) Ermitteln Sie die Anzahl der jeweiligen Teilmengen!

c) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie viele Teilmengen eine Menge mit *n* Elementen besitzt!

8. Schreiben Sie die gekennzeichneten Mengen jeweils als Durchschnitt oder Vereinigung der Menge A, B oder C an!



9. Zeichnen Sie ein Mengendiagramm und schraffieren Sie jeweils die angegebenen Mengen:

a) $A \cup (B \setminus C)$ b) $(A \cap B) \cup (C \setminus B)$ c) $(A \setminus B) \cup (C \setminus B)$

d) $(A \cup B) \setminus C$ e) $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$ f) $A \setminus (B \cap C)$

10. In einer Kindergartengruppe (Menge *K*) finden am Freitag zeitgleich zwei Zusatzangebote statt: Mathematische Früherziehung (Menge *M*) und Early English (Menge *E*). Stellen Sie die Struktur der Gruppe am Freitag grafisch dar und entscheiden Sie, ob ein Kind Mathematik und Englisch besuchen kann!

11. In einem Internat mit 100 Studierenden werden 3 Sportarten betrieben: Fußball, Handball und Tennis. 58 Studierende spielen Fußball, 54 spielen Handball, 19 spielen Tennis. 28 Studierende spielen Fußball und Handball, 14 spielen Handball und Tennis, 13 spielen Fußball und Tennis, 10 Studierende spielen alle drei Sportarten.

a) Zeichnen Sie ein Mengendiagramm!

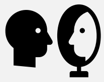
b) Ermitteln Sie, wie viele Studierende nur eine Sportart betreiben!

c) Entscheiden Sie, ob es Studierende gibt, die an keiner Sportart teilnehmen!

Mathematische Weiterführung II	Zur weiteren Vertiefung und Horizonterweiterung mathematischen Arbeitens kann eine Modellierungsaufgabe wie das dargestellte Satellitenbeispiel aus Abschnitt 4.4.4. oder der Artikel von Graumann (2019: 85-94) herangezogen und in das Unterrichtsgeschehen eingebettet werden.
Fachübergreifende Konzeption	Im fächerübergreifenden Kontext gestaltet sich die Chance, die Gemeinsamkeit der beiden Fächer beim Problem transzendenter Begriffe zu erkennen und diese im Sinne des philosophischen Denkens zu verknüpfen. Grundlage für diese Unterrichtsphase bieten die vorangegangenen Materialien und Fortführungen. Dahingehend sollen die Schülerinnen und Schüler nun über den Gottesbegriff, ebenso wie das Phänomen der Allklasse und die Axiome im folgenden Arbeitsblatt nachdenken, philosophieren und diese zusammenfassen. Wesentlich ist dabei, die Bedeutung der einzelnen Aspekte zu erarbeiten und mögliche Relationen zu den genannten Begriffen herzustellen. Ziel ist es hierbei, dass die Lernenden nicht primär zu der Gewissheit einer göttlichen Existenz gelangen, sondern den ursprünglichen inklusiven Zugehörigkeitscharakter der beiden Disziplinen (Mathematik und Theologie) beim Nachdenken und Philosophieren von transzendentalen Fragen erkennen und diese für sich individuell verknüpfend und („weitgehend") beantworten können.

Entspricht Gott der Allklasse? ⟺ Entspricht die Allklasse Gott?

Ist Gott ein Axiom?



Gott ist …	Allklasse ist …	Axiome sind …
• • • • •	• • • • •	• • • • •

Aufgabe:

Listen Sie nochmals in einigen Punkten auf, was für Sie die Begriffe Gott, Allklasse und Axiome bedeuten. Verfassen Sie ein kurzes Essay, in dem Sie darüber erörtern, inwiefern Gott der Allklasse oder einem Axiom entspricht und worin Widersprüchlichkeiten bestehen. Diskutieren Sie zudem über den Buchtitel: „Ist Gott ein Mathematiker?“ und beantworten Sie folgende Frage für sich: Ist Gott berechenbar?

Sicherung	Als Ergebnissicherung des Gesamtprozesses kann entweder die fächerübergreifende Konzeption fungieren oder zusätzlich noch ein gruppenindividuelles kreatives Plakat im Sinne eines Lapbooks – wie in Abbildung 10 – oder ein persönliches Reflexions-Lerntagebuch angefertigt werden.

Abbildung 10: Lapbookgestaltungsmuster (school-scout.de 2022: 20)

4.5.2. Anknüpfungspunkt mit fächerübergreifendem Element in Religion und Sequenzaufbau zur Pilatusfrage: Was ist Wahrheit?

Auf der Suche nach einer potenziellen Schnittstelle von Religions- und Mathematikunterricht bietet sich neben dem Philosophieren über Abzählbarkeit, Mengen, Unendlichkeit sowie Gott als mögliche Wesensdarstellung einer Unmenge/Allklasse oder von Axiomen, das u. a. im vorherigen Abschnitt kurz skizziert wurde, auch die Frage nach Wahrheit an. Wahrheit ist eines der zentralsten Themen der Menschheit und findet sich auch häufig in der Bibel sowohl im Alten wie auch Neuen Testament. Die Mathematik beschäftigt sich zudem damit, Hypothesen als wahr oder falsch zu beweisen. In diesem Sinne soll ein weiterer Berührungspunkt von Mathematik und Religion gezeigt werden, der sich im Bereich der Beweisführung (Deduktion sowie Gottesbeweise) ergibt. Vorweg soll gesagt sein, dass die beiliegenden Arbeitsmaterialien zum Thema „Logische Wahrheit und Glaubenswahrheit“ konzipiert sind und aufgrund des Gottesbeweises, der am mathematisch-wissenschaftlichen Arbeiten angelehnt ist, letztendlich wieder über das Wesen des ewigen (unendlichen) Gottes philosophiert werden kann – wodurch sich hierbei der fächerübergreifende Themenkreis schließen mag.

Auf diese Frage kann man durch verschiedene Lehrplaninhalte aus dem katholischen Religionsunterricht hinführen. Gelegenheiten bieten dabei das Arbeiten mit biblischen Texten, die Frage nach Gott, dem Ostergeheimnis – Auferstehung, Leben nach dem Tod und Jenseitsvorstellungen – aber auch die Auseinandersetzung mit der Religionskritik und Gottesbeweisen.

Je nach Themenschwerpunkt ergeben sich unterschiedliche Facetten und Fokussierungen hinsichtlich der Frage nach dem Wahrheitsbegriff. Neben der naheliegenden rhetorisch-offenen Fragestellung „Was ist Wahrheit?“, die für einen „spontanen“ Themeneinstieg herangezogen werden kann, ergeben sich additive Gestaltungsansätze, welche nachfolgend in schüler*innenadäquater Form dargestellt und für die verschiedenen Phasen, je nach Ausrichtung, im Unterricht individuell einsetzbar sind.

Einstieg zum Thema Wahrheit	Zur schnellen Erfassung der Grundvorstellungen sowie dem potenziellen Vorwissen der Schüler*innen zum Wahrheitsbegriff eignet sich die Methode des Brainstormings. Die Antworten geben darauf Aufschluss, inwieweit sich gewisse Moralvorstellungen inklusive Absichten- und Folgeabschätzung sowie Grundorientierungen (Autoritätsanerkennung) bislang entwickelt haben. Diese Unterrichtsmethode kann entweder sofort im Plenum an der Tafel oder schüler*innenspezifisch in persönlichen Notizen angefertigt werden. Weiterführend wird in Zusammenarbeit ein Begriff definiert, in welchem alle charakteristischen Aspekte erörtert werden. Im Anschluss an die Definition des Wahrheits- und eventuellen Lügenbegriffs können diesbezüglich die nachstehenden Materialien zu Wahrheit und Lüge aufgegriffen werden. Primärziel dieser Materialblätter und der Einstiegsphase ist ein bewusster und reflektierter Umgang mit den Begriffen.

LÜGE, NOTLÜGE UND DAS GEBOT – DU SOLLST NICHT LÜGEN

AUFGABE 1:

Diskutieren Sie in Kleingruppen von zwei bis drei Personen Situationen, in denen Ihrer Meinung nach Lügen ungerechtfertigt oder gerechtfertigt sind und ordnen Sie diese den jeweiligen Boxen zu.

+	–
+	–
+	–

AUFGABE 2:

Beurteilen Sie die nachfolgenden Sachlagen und begründen Sie Ihre Entscheidung.

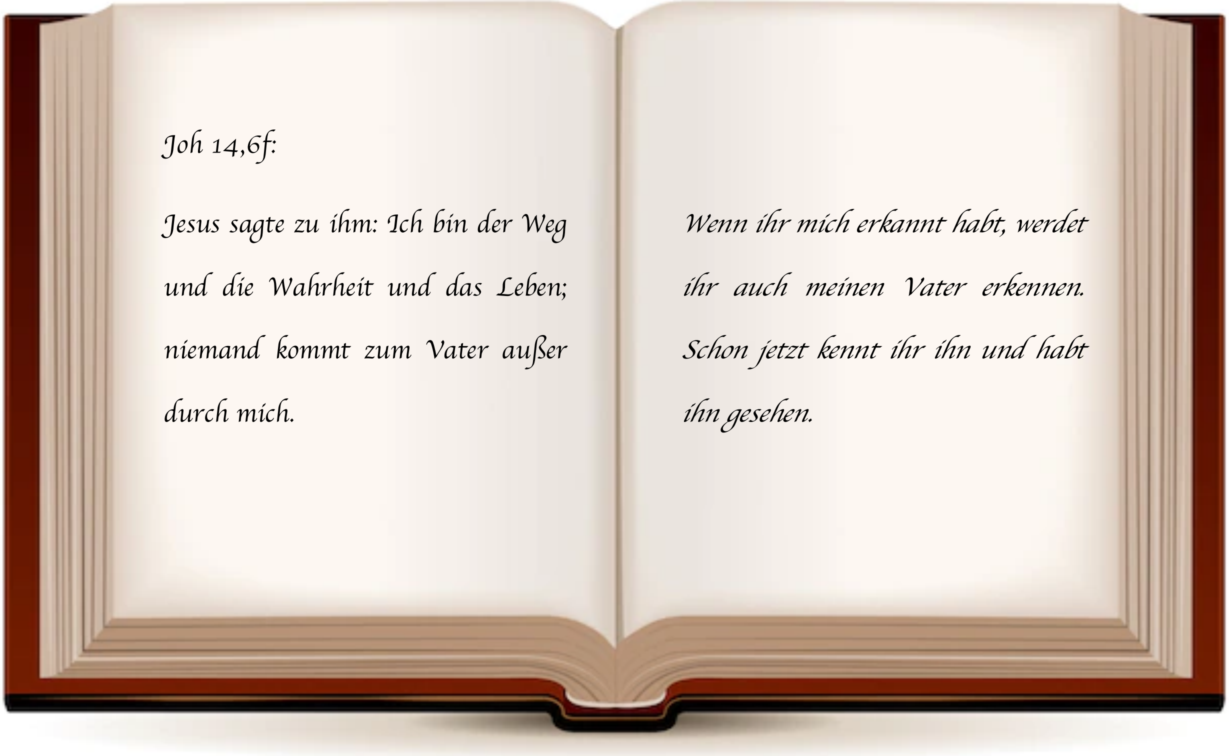
Situation	Gerecht gehandelt	Ungerecht gehandelt	Begründung
Andreas (16) hat eine negative Note auf die Mathematikschularbeit bekommen und verschweigt dies ihren Eltern.			
Sabinas Freundin möchte sich am Nachmittag mit ihr treffen. Allerdings hat sie keine Lust und sagt aufgrund eines vorgeschobenen Zahnarzttermins ab.			
Franz sieht, dass aus Omas Geldbörse ein 50€ Schein gefallen ist. Er steckt ihn heimlich ein und hilft anschließend bei der Suche.			
Die Studenten stimmen jener Meinung zu, die ihr Professor von ihnen hören möchte.			
Das geliebte Haustier von Jana (14) ist während der Sprachreise gestorben. Die Eltern beschließen, ihr die Nachricht erst nach ihrer Heimkehr mitzuteilen.			
Michi (8) hat versehentlich die Keramikvase umgestoßen. Den Eltern erzählt er, dass es seine kleine Schwester (2) gewesen sei.			
Aus Anstand loben die Partygäste ihren Gastgeber für das Essen, obwohl dieses äußerst salzig und scharf ist.			

Erarbeitungsphase I **„Was ist Wahrheit?“** **(Joh 18,38)** **Die Pilatusfrage im gegenwärtigen gesellschaftlichen Kontext**	In einem ersten Erarbeitungsschritt sollte auf die christliche Urquelle Bezug genommen werden, indem jeweils zentrale Bibelstellen betrachtet und diskutiert werden. Nach der Klarstellung dieser beiden Textstellen bietet der theologische Aufsatz von Pastor Dr. Christoph Schroeder die Basis für ein tieferes theologisches Verständnis. Ziel dabei ist, einerseits die Argumentations- und Auslegungsstränge kennenzulernen, und andererseits gehaltvoller in die Materie der Bibelexegese zu gelangen. An dieser Stelle ist es möglich, den Fokus auf zusätzliche Erarbeitungs- und Verknüpfungsphasen wie nachfolgend beschrieben zu legen oder sofort auf die fächerübergreifende Konzeption zu wechseln.

AUFGABE:

Diskutieren Sie im Plenum über die Bedeutung und Relevanz der beiden Textstellen des Johannesevangeliums. Scannen Sie im Anschluss den QR-Code zum theologischen Aufsatz von Pater Dr. Schroeder, markieren Sie die wichtigsten Inhalte, fassen Sie diese im Anschluss nachvollziehbar zusammen und präsentieren Sie ihre Ergebnisse. (Einzel- oder Partnerarbeit ist erlaubt.)

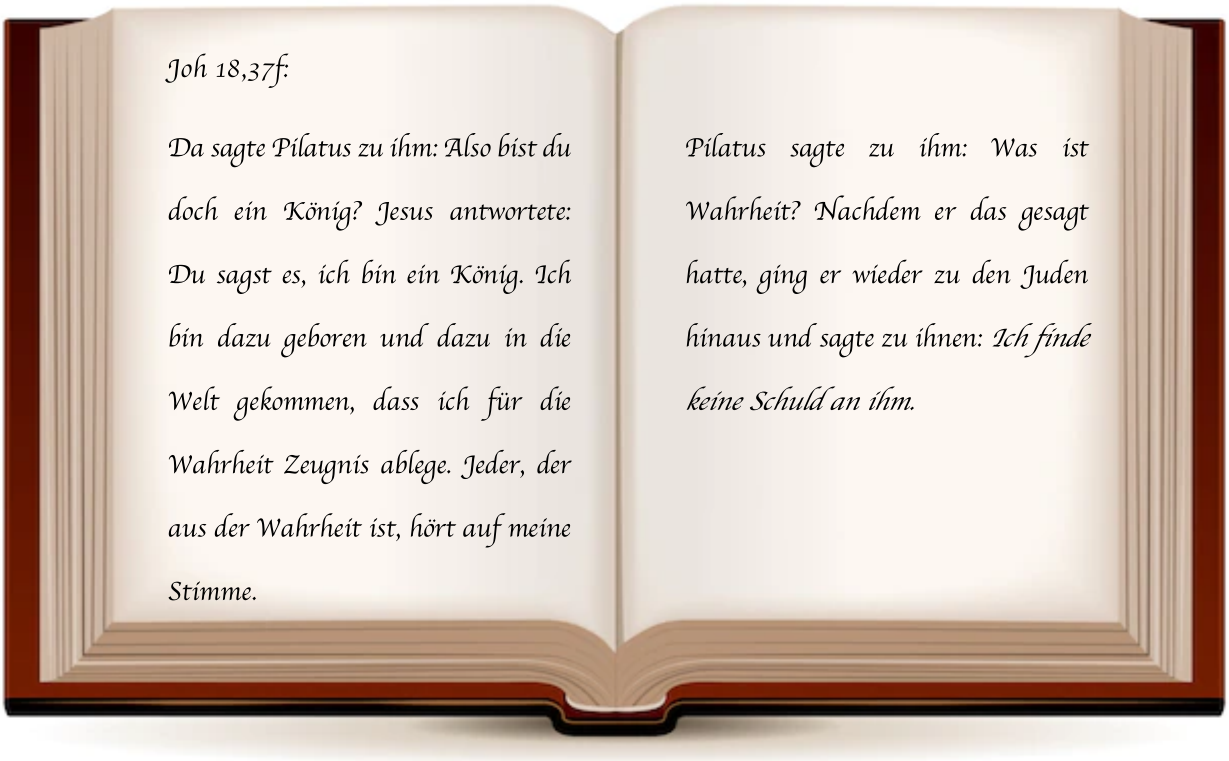
Read me



Joh 14,6f:

Jesus sagte zu ihm: Ich bin der Weg und die Wahrheit und das Leben; niemand kommt zum Vater außer durch mich.

Wenn ihr mich erkannt habt, werdet ihr auch meinen Vater erkennen. Schon jetzt kennt ihr ihn und habt ihn gesehen.



Joh 18,37f:

Da sagte Pilatus zu ihm: Also bist du doch ein König? Jesus antwortete: Du sagst es, ich bin ein König. Ich bin dazu geboren und dazu in die Welt gekommen, dass ich für die Wahrheit Zeugnis ablege. Jeder, der aus der Wahrheit ist, hört auf meine Stimme.

Pilatus sagte zu ihm: Was ist Wahrheit? Nachdem er das gesagt hatte, ging er wieder zu den Juden hinaus und sagte zu ihnen: *Ich finde keine Schuld an ihm.*

Abbildungsquelle: https://de.freepik.com/vektoren-premium/offenes-buch-in-einem-braunen-einband_5903351.htm

Textquellen: https://www.frei-und-fromm.de/was-wir-wollen/positionen/was-ist-wahrheit/

(Joh 14,6f), (Joh18,37f) [Neue Einheitsübersetzung 2016]

Erarbeitung II **Antikes Wahrheits-konzept**	Als weiterführende Vertiefung kann das antike Wahrheitskonzept, das im nachstehenden Arbeitsblatt dargestellt ist, in den Unterricht eingewoben werden. Dabei ist es sinnvoll, dies mit dem christlichen Verständnis hinsichtlich des großen Glaubensbekenntnisses von Nizäa zu verknüpfen, und mit Hilfe der Erläuterungen einen konkreteren Verständniszugang zu gewähren. Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei die Entwicklung beziehungsweise den Paradigmenwechsel erkennen, nachvollziehen, selbst deuten, umformulieren sowie den Aktualitätsbezug herstellen können. Zudem lässt sich ein weiterer Bezug zur Wahrheitsvorstellung des unlängst verstorbenen und emeritierten Papst Benedikts XVI. herstellen. Die ORF-Dokumentation Kreuz und Quer zu *Benedikt XVI. – Der Denker auf dem Thron* vom 31.12.2022 und 05.01.2023 geht dabei vor allem auf die Lehrhaltungen des Papstes ein, in welcher auch auf sein Wahrheitsverständnis, das aus den Geschehnissen seiner Jugend (NS-Zeit) geprägt ist, eingegangen wird. Darin wird deutlich, dass für den Kirchenführer und Theologen der Wahrheitsbegriff „eine zeitlose Theologie, in einem unverrückbaren Denken“ ist.
Fach-übergreifende Konzeption	Anschließend an die theologische Phase ließe sich ein fächerübergreifender Bezug auf die Frage nach der Wahrheit im Sinne der mathematischen Beweisführung überleiten. Aufgrund der Gegebenheit, dass in der formal-logischen Deduktion ein Instrument der Tatsachen- und „Wahrheitsfindung“ erkannt wird, ist es naheliegend, sich genauer mit diesem mathematischen Werkzeug zu befassen, da dieses Mittel auch für die Gotteserklärung herangezogen wurde. Folgend auf die Erarbeitungsphase des Prinzips der logischen Deduktion und vollständigen Induktion können die Gedankenschritte des Gottesbeweises nach Anselm von Canterbury mit Hilfe des Infoblatts und den mathematischen Arbeitsblättern analysiert, logisch erörtert und diskutiert werden.

<u>AUFGABE 1:</u>

Vergleichen Sie das antike Verständnis von Wahrheit mit den heutigen christlichen, neutestamentlichen Glaubensansätzen des großen Glaubensbekenntnisses und führen Sie Parallelen bzw. Kontroversen an.

Antikes Wahrheitskonzept	Erläuterungen
Wahrheit ist das Vernehmen der Gegenwärtigkeit des universellen Seins, die Unverborgenheit des Seins, auf das wir uns im Denken vertraulich einlassen.	Das Sein ist (existiert), das Nichtsein ist (existiert) nicht.
	Kennzeichen des Seins: Das Sein ist ungeboren, nicht geschaffen und besitzt keine Zeitlichkeit.
Im Hebräischen bedeutet Wahrheit eine erfahrene Wahrheit, persönliches Wissen, sogenanntes „Herzwissen“.	Gegenwärtigkeit bedeutet: auch im Denken ist Vergangenes gegenwärtig, wodurch die Zeitlichkeit aufgehoben ist.

Das große Credo/ Nizäno-Konstantinopolitanische Glaubensbekenntnis

Ich glaube an den einen Gott, den Vater, den Allmächtigen, der alles geschaffen hat, Himmel und Erde, die sichtbare und die unsichtbare Welt.
Und an den einen Herrn Jesus Christus, Gottes eingeborenen Sohn, aus dem Vater geboren vor aller Zeit: Gott von Gott, Licht vom Licht, wahrer Gott vom wahren Gott, gezeugt, nicht geschaffen, eines Wesens mit dem Vater; durch ihn ist alles geschaffen.
Für uns Menschen und zu unserem Heil ist er vom Himmel gekommen, hat Fleisch angenommen durch den Heiligen Geist von der Jungfrau Maria und ist Mensch geworden.
Er wurde für uns gekreuzigt unter Pontius Pilatus, hat gelitten und ist begraben worden. Er ist am dritten Tage auferstanden nach der Schrift und aufgefahren in den Himmel. Er sitzt zur Rechten des Vaters und wird wiederkommen in Herrlichkeit, zu richten die Lebenden und die Toten; seiner Herrschaft wird kein Ende sein.
Ich glaube an den Heiligen Geist, der Herr ist und lebendig macht, der aus dem Vater und dem Sohn hervorgeht, der mit dem Vater und dem Sohn angebetet und verherrlicht wird, der gesprochen hat durch die Propheten, und die eine, heilige, katholische und apostolische Kirche.
Ich bekenne die eine Taufe zur Vergebung der Sünden.
Ich erwarte die Auferstehung der Toten und das Leben der kommenden Welt. Amen.

Papst Benedikt XVI. (Teil 1)
<u>**Aufgabe 2:**</u> Recherchieren Sie zur Jugend Papst Benedikts XVI. mit Hilfe des Internets. Interpretieren Sie im Hinblick auf die Jugendzeit Papst Benedikts XVI., inwieweit er mit einer für ihn fremdartigen Wahrheitskonzeption konfrontiert wurde und wie er laut Kardinal Schönborn darauf reagierte. Stellen Sie in wenigen Worten dar, wie die Menschen seiner Zeit zur „Wahrheit" gekommen sind.

„*Wahrheit ist auch für ihn nicht einfach Besitz, ein Besitzstand, den man hütet, sondern Wahrheit ist immer auch etwas zu Suchendes, etwas das vor uns liegt und auf das wir uns ausrichten. Aber, dass es die Wahrheit gibt, das muss vorausgesetzt werden und das hat ihm die Erfahrung seines eigenen Landes, seiner Heimat, schmerzlich gezeigt. Das muss vorausgesetzt werden.*" – Kardinal Christoph Schönborn über Papst Benedikt XVI. und sein Verständnis der Wahrheit

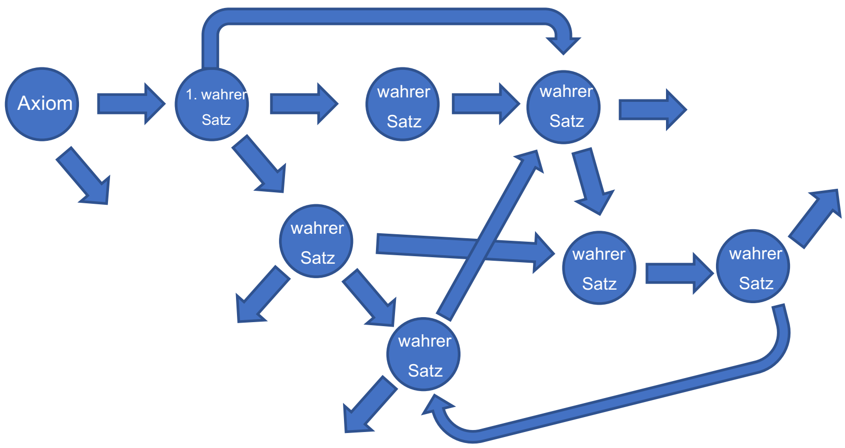
Papst Benedikt XVI. (Teil 2)		
AUFGABE 2: Vergleichen Sie das antike Wahrheitsverständnis mit jenem nach Papst Benedikt XVI. Stellen Sie ihre Feststellungen in der zu sehenden Tabelle dar.		
Bereich	**Antike**	**Benedikt XVI.**
Existenz der Wahrheit		
Bedeutung von Zeit		
Bedeutung von Vergangenheit für die Wahrheit		

AUFGABE 3:

Reflektieren Sie über die Inhalte der vorherigen Aufgaben und beantworten Sie in einer Phase der Selbstreflexion die folgenden Punkte:

- Eigenes Verständnis von Wahrheit im Vergleich zu den Inhalten
- Veränderungen im Hinblick auf das eigene Verständnis
- Unklarheiten/ Offengebliebenes

Diskutieren Sie im Anschluss an die Selbstreflexion mit einem/einer Partner*in Ihre Ergebnisse und halten Sie sowohl Überschneidungen als auch divergierende Meinungen über die Bereiche fest.

Beweis und wahre Folgerungsketten – Der Grund für das mathematische Arbeiten.
In der Mathematik unterscheidet man zwischen zwei Beweisverfahren – die direkte sowie die indirekte Beweisführung. Beweise bestehen immer aus drei Schritten: 1. Voraussetzung 2. Behauptung 3. Beweisdurchführung Möchte man mathematische Aussagen beweisen, so ist es günstig, diese im Sinne der Implikation mit „sei … daraus folgt“ oder „wenn …, so gilt …“-Sätzen zu formulieren. (Vgl. Duden Learnattack 2010:1).
Mathematische Beweisarten
Direkter Beweis Die direkte Beweisführung sieht vor, dass angefangen von den Axiomen weitere logische Sätze und Folgerungen mittels bereits bewiesener (wahrer) Sätze, Gesetzen der Logik und Regeln für äquivalente Umformungen abgeleitet werden. Wird eine Behauptung als wahr anerkannt, so bildet dies ein weiteres Glied in der Folgerungskette, auf das nun weitere Behauptungen und Anknüpfungen angestellt werden können, wie dies Abbildung 11 skizziert. (Vgl. Duden Learnattack 2010:1).    Abbildung 11: Entwicklungsprozess mathematischer Aussagenverkettungen und Themenbereichserweiterung

Indirekter Beweis Beim indirekter Beweis wird die Behauptung negiert und als wahr angenommen. Unter Anwendung gültiger Schlussfolgerungen sowie Rechengesetzen/-regeln wird diese allerdings widerlegt, indem die logische Schlussfolgerung einen Widerspruch zur Annahme (negierten Behauptung) zeigt. Somit muss die Annahme (negierte Behauptung) falsch sein und die eigentliche Grundbehauptung, wonach ursprünglich gefragt war, ist bewiesen. Kommt es allerdings zu keinem Widerspruch, so kann mit dem indirekten Verfahren die Gültigkeit der Urbehauptung nicht nachgewiesen werden. Zumeist benötigt man den indirekten Beweis für Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen, wie auch für Beweise von Satzumkehrungen und negierten Darlegungen. (Vgl. Duden Learnattack 2010:1).
Beispiel eines indirekten Beweises 1. Zu beweisende Aussage: $P =$Es gibt unendlich viele Primzahlen. 2. Negation der Aussage und neue Annahme : $\neg P =$ Es gibt eine endliche Anzahl an Primzahlen. Dies impliziert, dass es eine höchste Primzahl geben muss, die mit p bezeichnet wird. 3. Beweisdurchführung: Nun konstruiert man eine Zahl *a*, welche das um 1 vergrößerte Produkt von allen zuvor angeschriebenen Primzahlen ist. Somit gilt: $a = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p) + 1.$ a ist durch keine Primzahl teilbar, die kleiner oder gleich p ist, da bei einer Division letztendlich 1 Rest bleibt. Es gibt aber sicher eine Primzahl q, die ein Teiler von a ist. Für den Fall, dass a selbst eine Primzahl ist, muss man $q = a$ annehmen, andernfalls ist q kleiner als a. 4. Conclusio: Aufgrund dessen, dass die Zahl a aber durch keine Primzahl teilbar ist, die kleiner oder gleich p ist, muss diese Primzahl q größer als p sein. Somit wurde gezeigt, dass zu jeder Primzahl p sicher eine Primzahl q existiert, die größer als p ist. Daher kann allgemein gesagt werden, dass es tatsächlich unendlich viele Primzahlen gibt. (Vgl. Kuba & Götz 2004: 8ff).

Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Die vollständige Induktion ist ein mathematisches Beweisverfahren, welches sich stark mit allgemein gültigen Aussagen zu der Menge der natürlichen Zahlen beschäftigt. Dabei lauten solche Sätze meist „Für alle natürlichen Zahlen gilt, …“

Da es nicht möglich ist, mit jeder natürlichen Zahl die Behauptung zu überprüfen, versucht man mit Hilfe des nachstehenden Algorithmus eine allgemein gültige Schlussfolgerung zu erzielen:

1. Der Induktionsanfang wird für einen Startwert (z. B. 0, 1, 2) gewählt, indem man prüft, ob die Hypothese in diesem Fall erfüllt ist.
2. Eine Induktionsvoraussetzung lautet meist: „Die Aussage … gilt für (mindestens) ein Element *n* der Menge der natürlichen Zahlen ℕ“.
3. Die Induktionsbehauptung/-annahme führt fort, was es zu beweisen (zeigen) gilt: meist die Aussage von 2. für *n*+1.
4. Der Induktionsschritt geht nach dem Prinzip des „umfallenden Dominosteins auf seinen Nachfolger“ vor. Das bedeutet, dass man die Behauptung auch auf die Gültigkeit für einen allgemeinen Nachfolger *n*+1 einer natürlichen Zahl ausweitet und überprüft. Trifft dies zu, so ist die ursprünglich gestellte Hypothese bewiesen und wird als wahr anerkannt. Der Beweis ist abgeschlossen, sobald die Induktionsbehauptung gezeigt wurde und allgemein für jeden Nachfolger gilt. (Vgl. Dalwigk 2019: 2-7).

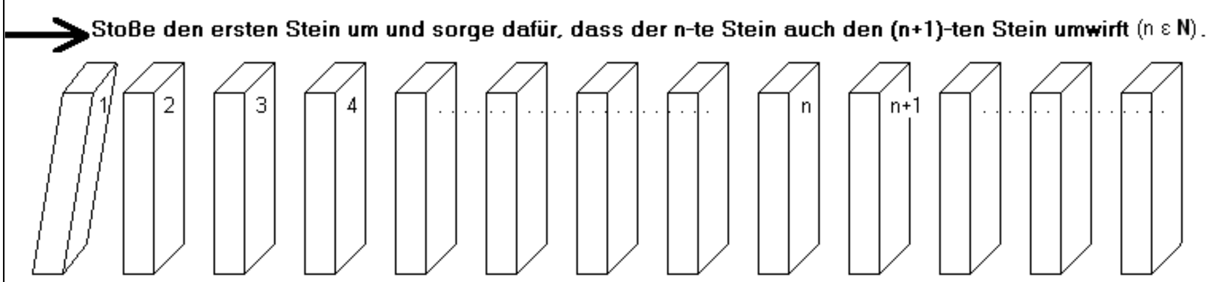


Abbildung 12: Dominoeffekt – Prinzip der vollständigen Induktion (Mohr o. J.:1)

Gottesbeweise und ihre Reaktion aufeinander – Wie Theologen und Philosophen Gott beweisen wollten

Der ontologische Gottesbeweis ist ein Versuch, Gott durch einen bestimmten Faktor für die Menschen begreifbar zu machen. Dieser Versuch unterscheidet sich vom mittelalterlichen kosmologischen Gottesbeweis, der sich auf die Aussage stützt, Gott sei die eigene Ursache für seine Existenz. Beim ontologischen Beweis nach Anselm von Canterbury (1034 – 1109) hingegen steht die Vernunft des Menschen im Zentrum. Doch auch dieser Gottesbeweis wird in weiterer Folge einige Jahrhunderte durch Immanuel Kant in Frage gestellt.

Aufgabe 1: Recherchieren Sie im Internet zum ontologischen Gottesbeweis nach Anselm von Canterbury. Rekonstruieren und führen Sie diesen in den nachstehenden Zeilen an. Diskutieren Sie, ob Ihnen dieser Beweis schlüssig erscheint oder ob es Ihrer Meinung nach Kritikpunkte gibt.

Ontologischer Gottesbeweis

____

____

____

____

____

Aufgabe 2: Lesen Sie den auf der nächsten Seite angeführten Text von Immanuel Kant. Markieren Sie Schlüsselstellen seines Versuches, den ontologischen Gottesbeweis zu hinterfragen und beschreiben Sie in eigenen Worten, was laut Kant wirklich ausschlaggebend ist.

Kritik nach Kant

____

____

____

____

____

____

Text nach Immanuel Kant:

Sein ist offenbar kein reales Prädikat, d. i. ein Begriff von irgend etwas, was zu dem Begriffe eines Dinges hinzukommen könne. […]
Im logischen Gebrauche ist es lediglich die Kopula[32] eines Urteils. Der Satz: *Gott ist allmächtig,* enthält zwei Begriffe, die ihre Objekte haben: Gott und Allmacht; das Wörtchen: *ist,* ist nicht noch ein Prädikat oben ein, sondern nur das, was das Prädikat *beziehungsweise* aufs Subjekt setzt. Nehme ich nun das Subjekt (Gott) mit allen seinen Prädikaten (worunter auch die Allmacht gehöret) zusammen, und sage: *Gott ist,* oder es ist ein Gott, so setze ich kein neues Prädikat zum Begriffe von Gott, sondern nur das Subjekt an sich selbst mit allen seinen Prädikaten, und zwar den *Gegenstand* in Beziehung auf meinen *Begriff.* Beide müssen genau einerlei enthalten, und es kann daher zu dem Begriffe, der bloß die Möglichkeit ausdrückt, darum, daß ich dessen Gegenstand als schlechthin gegeben (durch den Ausdruck: er ist) denke, nichts weiter hinzukommen. Und so enthält das Wirkliche nichts mehr als das bloß Mögliche. Hundert wirkliche Taler enthalten nicht das mindeste mehr, als hundert mögliche. Denn, da diese den Begriff, jene aber den Gegenstand […] bedeuten, so würde, im Fall dieser mehr enthielte als jener, mein Begriff nicht den ganzen Gegenstand ausdrücken, und also auch nicht der angemessene Begriff von ihm sein. Aber in meinem Vermögenszustande ist mehr bei hundert wirklichen Talern, als bei dem bloßen Begriffe derselben (d. i. ihrer Möglichkeit). […]

Wenn ich also ein Ding, durch welche und wie viel Prädikate ich will (selbst in der durchgängigen Bestimmung), denke, so kommt dadurch, daß ich noch hinzusetze, dieses Ding *ist,* nicht das mindeste zu dem Dinge hinzu. Denn sonst würde nicht eben dasselbe, sondern mehr existieren, als ich im Begriffe gedacht hatte, und ich könnte nicht sagen, daß gerade der Gegenstand meines Begriffs existiere. Denke ich mir […] nun ein Wesen als die höchste Realität (ohne Mangel), so bleibt noch immer die Frage, ob es existiere, oder nicht. […]

Unser Begriff von einem Gegenstande mag also enthalten, was und wie viel er wolle, so müssen wir doch aus ihm herausgehen, um diesem die Existenz zu erteilen. Bei Gegenständen der Sinne geschieht dieses durch den Zusammenhang mit irgendeiner meiner Wahrnehmungen nach empirischen Gesetzen; aber für Objekte des reinen Denkens ist ganz und gar kein Mittel, ihr Dasein zu erkennen […].

[32] Kopula: Verbindungsstück zwischen Subjekt und Prädikat in einem Urteil

Beweisbeispiele in Mathematik und christlich-philosophischer Theologie

Mathematisch logische Deduktion durch vollständige Induktion über n am Beispiel (vgl. King 2014: 28):	Ontologischer Gottesbeweis nach Anselm von Canterbury (vgl. Heinle o. J.: 1).
1. Aussage/Behauptung: Sei $a_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots n$. Dann gilt $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.	**1. Schritt: Definition:** Gott ist das, über dem nichts Größeres gedacht werden kann.
2. Induktionsanfang: $a_0 = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$	**2. Schritt:** Auch ohne Einsicht über die Existenz ist Gott im Verstand.
3. Induktionsvoraussetzung/-hypothese: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$	**3. Schritt:** Wenn Gott allein nur im Verstand ist, dann kann gedacht werden, dass er auch in Wirklichkeit ist.
4. Induktionsschritt: $a_n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $a_n+1 = a_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$	**4. Schritt:** Wenn aber Gott genauso in Verstande ist, wie etwas, worüber hinaus Größeres gedacht werden kann, dann kann man auch über Gott noch Größeres denken. ⚡ → Widerspruch zur Definition von Gott
5. Conclusio: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ bewiesen.	**5. Schritt: Conclusio:** Somit muss Gott sowohl im Verstand wie auch in Wirklichkeit existieren.

<u>**Aufgabe**</u>: Vergleichen Sie den mathematischen wie den theologischen Beweiszugang. Erklären Sie, worin Sie Gemeinsamkeiten beziehungsweise Differenzen erkennen und erläutern Sie diese. Kann/Darf sich der theologische Zugang in diesem Beispiel einen „logischen Beweis“ nennen?

Ergebnissicherung, Zusammenfassung, Ausblick	Die Ergebnissicherung dieser fächerübergreifenden Unterrichtsstruktur entsteht durch Erprobung simpler mathematischer Beweise und Notizführung (Mindmap, Heft, Lerntagebuch). Durch das Interview von Elke Zapf über das Verständnis zur Unendlichkeit mit einer Fachmathematikerin sowie eines Fachtheologen der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg kann auf höherer fachlicher Ebene angesetzt werden und ein letzter inhaltlicher Anknüpfungspunkt sowie Gedankenimpuls auf die Frage nach der Unendlichkeit gegeben werden. Ziel ist es, dass die Lernenden erkennen, dass selbst auf universitärer Ebene offene Fragen zurückbleiben, im Sinne der fachlichen Kooperation neue wissenschaftliche Horizonte entdeckt werden können und auch in diesem Bereich gegen manch gesellschaftliche Empfindungen diese beiden Wissenschaften einander nicht gegenseitig exkludieren.

Der ewige Diskurs – Interview mit einer Mathematikerin und einem Theologen zur Frage: „Können wir Unendlichkeit verstehen?“

AUFGABE:

Lesen Sie sich das Interview von Elke Zapf mit der Mathematikerin Prof. Dr. Christina Birkenhake und dem Theologen Prof. Dr. Wolfgang Schoberth durch und kennzeichnen Sie die für Sie zentralen Aussagen des Gesprächs. Skizzieren Sie diese anschließend in einer für Sie schlüssigen Concept-Map.

Was verstehen Sie als Mathematikerin unter Unendlichkeit? Und wie definieren Sie das als Theologe?

Prof. Dr. Christina Birkenhake: Das Wort „unendlich“ entsteht durch eine Verneinung aus dem Wort „endlich“. Wenn wir also dem Begriff der Unendlichkeit näherkommen wollen, müssen wir uns zunächst mit dem Endlichen beschäftigen, und dieses bezieht man dann auf ein Sachgebiet – auf einen Ort, eine Zeit, eine Qualität, eine Tätigkeit oder eine Menge. Und damit sind wir bei der Mathematik. Sie ist eine der ältesten Wissenschaften und beschäftigt sich schon immer mit großen Fragen: mit der Beschreibung des Himmels und der Erde, mit den Gesetzmäßigkeiten der Zahlen und der Geometrie, mit der Endlichkeit und der Unendlichkeit. Allerdings wurde das Unendliche über Jahrtausende nicht als existent für möglich erachtet. Erst vor gut 100 Jahren wurde dieser Gedanke zugelassen – und seitdem gibt es in der Mathematik sehr viele Unendlichkeiten.

Prof. Dr. Wolfgang Schoberth: Der Begriff der Unendlichkeit ist philosophischen Ursprungs und hat übrigens kein genaues Äquivalent in der Bibel. Hier ist vielmehr die Rede von der Ewigkeit, die Geheimnis und Hoffnung zugleich zur Sprache bringt. Die klassische Metaphysik dagegen fragt generell nach der höchsten Form und ersten Grundlage allen Seins. Unendlichkeit steht dabei – grob gesagt – für all das, was jenseits unserer Bestimmungen liegt und jenseits der Grenzen unseres Denkens. Die damit verbundenen Erfahrungen finden freilich ihren deutlichen Niederschlag in der Schrift und der theologischen Tradition: Die Erfahrung Gottes ist mit dem Bewusstsein für die Grenzen unseres Denkens und unserer Welt eng verbunden.

Wo sehen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Ihren Definitionen?

Schoberth: Wir fangen an unterschiedlichen Stellen an und gehen mit unterschiedlichen Methoden an die Phänomene heran. Theologisches Arbeiten ist immer auf Selbsterfahrung bezogen, die in einem anderen Verhältnis zur Wirklichkeit steht als wissenschaftliche Arbeit. Denn wir beziehen auch Stimmungen, Atmosphären und Gefühle mit ein.
Birkenhake: Und genau darum geht es bei uns im Endeffekt nicht. Auch in der mathematischen Forschung spielen zwar Intuition und Ästhetik eine große Rolle, die Ergebnisse müssen dann aber streng mathematisch, logisch und objektiv bewiesen werden. Zwangsläufig stößt man beim Umgang mit der Unendlichkeit immer wieder auf Paradoxien und Antinomien, und es stellt sich die Frage, wie man am besten damit umgehen kann, und wie man am besten diese Phänomene beschreiben kann.

Warum beschäftigen sich gerade Ihre beiden Wissenschaften mit diesem Phänomen?

Birkenhake: Sowohl die Theologie als auch die Mathematik haben ihre Ursprünge in der Philosophie, und beide versuchen, an die Grenzen zu gehen. Schon im antiken Griechenland beschäftigte sich die Wissenschaft intensiv mit der spannenden Frage nach der Unendlichkeit. Nehmen Sie Platon oder Aristoteles, deren Überlegungen uns bis heute faszinieren.
Schoberth: Bis ins 19. Jahrhundert hinein war es ohnehin selbstverständlich, in vielen Wissenschaftsbereichen tätig zu sein. Nehmen Sie zum Beispiel Gottfried Wilhelm Leibniz. Er wirkte als Philosoph, Jurist, Historiker, Naturwissenschaftler und Theologe, aber auch als Mathematiker und Techniker – er war also der klassische Universalgelehrte. Heute ist die Wissenschaft sehr ausdifferenziert, zum Teil sind wir ganz erstaunt, womit sich die Kollegen beschäftigen. Die Theologie befasst sich schon seit der Antike mit dem philosophischen Begriff der Unendlichkeit und hat sich immer an dem Thema gerieben.
Birkenhake: Erst Georg Cantor führte Ende des 19. Jahrhunderts den Begriff der Unendlichkeit wirklich ein und lieferte damit ein Fundament der modernen Mathematik. Er gilt als Begründer der Mengenlehre und entwickelte einen neuen Begriff der Unendlichkeit.
Schoberth: Er konstruiert damit sozusagen einen neuen Begriff; was traditionell das Unendliche genannt wurde, bezeichnet er als das Absolute, das unerkennbar ist.
Umgangssprachlich verwenden wir den Begriff gerne als Superlativ. Wie sehen Sie das als Wissenschaftler?
Birkenhake: Ja, der Begriff Unendlichkeit wird umgangssprachlich gerne als Steigerungsform, als ultimativer Superlativ verwendet. Denken Sie nur an Ausdrücke wie „Das ist unendlich weit weg“ oder den Bestseller „Die unendliche Geschichte“. Natürlich steckt viel mehr in dem Begriff der Unendlichkeit, aber das können die meisten Menschen nicht erfassen. Warum sollten sie auch? Man kann sehr gut leben, ohne sich diese Gedanken zu machen …

Können wir als Menschen Unendlichkeit überhaupt verstehen?

Schoberth: Ich glaube, es gehört ganz generell zu dem Begriff dazu, dass er das Vorstellbare übersteigt. Das ist ja gerade das Spannende daran. Mit der Unendlichkeit kommen wir an eine Grenze des Denk- und Vorstellbaren – und das wiederum ist sinnkonstitutiv. Denn wir müssen uns fragen, wie wir uns in einer Welt orientieren, die zum Teil durchschaubar ist, zum Teil aber auch nicht. Wie kann ich mich in dem Meer dessen, was ich nicht erfassen kann, bewegen? Wie gehen wir innerhalb dieser Grenzen mit unseren eigenen Grenzen um? Was kommt jenseits meiner eigenen Endlichkeit?

Birkenhake: Auch als Mathematikerin kann ich mir etwas Höherdimensionales oder gar Unendlichkeit nicht wirklich vorstellen. Man macht sich ein geistiges Bild, das doch immer den uns bekannten räumlichen drei Dimensionen ähnelt. Aber man kann mit der Unendlichkeit sehr wohl rechnen, man sollte wohl besser sagen argumentieren, und damit wird der Begriff Unendlichkeit entmystifiziert.
Eigentlich passiert das schon in der Schule: Eine Gerade erklärt man als sich bis ins Unendliche fortgesetzt, ohne dass jemand protestiert, in der Infinitesimalrechnung arbeiten wir mit der potenziellen Unendlichkeit, und die Zahlen, besser die Menge der Zahlen, an sich ist unendlich. Aber das, die Theorie der unendlichen Mengen und der transfiniten Kardinalzahlen, führt dann beim genaueren Betrachten schnell über das Vorstellbare hinaus.

Die Mathematik spricht von verschieden großen Unendlichkeiten. Was kann ich mir darunter vorstellen?

Birkenhake: Fangen wir mit dem an, was wir uns alle noch vorstellen können. Das sind die natürlichen Zahlen, die wir schon als Kinder lernen. Die Kleinen können sich Zahlen von eins bis zehn gut vorstellen, die Erwachsenen gehen heutzutage tagtäglich mit astronomisch großen Zahlen um, auch wenn man sich die dann wohl auch nicht wirklich vorstellen kann. Zu jeder natürlichen Zahl können wir immer noch eine weitere addieren – und schon sind wir bei der ersten Stufe von Unendlichkeit. Die Kardinalität – also die Maßzahl der Menge dieser uns allen doch scheinbar so vertrauten natürlichen Zahlen – bezeichnete Cantor mit Aleph 0 – die erste transfinite Zahl! Mit Aleph 0 tat Cantor den ersten Schritt über das Endliche hinaus in die Welt der transfiniten Zahlen Aleph 0, Aleph 1, Aleph 2,… So wie mit diesen transfiniten Zahlen viele mathematische Probleme nun behandelt werden können, so tun sich aber auch immer neue Fragen auf.

Gibt es in allen Religionen die Verknüpfung von Unendlichkeit mit Gott?

Schoberth: Das Wesen des Unendlichen ist insbesondere ein Thema der Metaphysik – aber nicht nur sie stellt die Fragen nach dem Jenseits unserer Erfahrung. Alle Religionen wollen wissen „Wo kommen wir her?“, „Wo gehen wir hin?“, „Was gibt unserem Leben und Handeln Sinn?“ und finden andere Bilder für das, was jenseits unserer Grenzen liegt. Und jede Religion entwickelt andere Praktiken, um der Unendlichkeit näherzukommen – Meditieren, Yoga, Beten. In der Geschichte der christlichen Theologie ist die Unendlichkeit eines der Attribute Gottes – die Schöpfung dagegen ist ihrem Wesen nach endlich.

Quelle: https://www.fau.de/2019/08/news/wissenschaft/koennen-wir-unendlichkeit-verstehen/

5. Anhang

5.1. Der ontologische Gottesbeweis nach Kurt Gödel

Im Jahre 1970 rekonstruierte der Mathematiker Kurt Gödel mithilfe der Modallogik den ontologischen Gottesbeweis. Ursprünglich zögerte Gödel seinen Beweis zu veröffentlichen, da er ein Missverstehen seiner Absichten befürchtete. Seine Beweisführung gründet auf drei Definitionen, drei Theoremen und fünf widerspruchsfreien Axiomen, welche in der folgenden Tabelle 7 zusammengefasst angeführt sind. (Vgl. Bromand 2011: 392).

In den ersten drei Definitionen Gödels werden der Gottesbegriff, die essenziellen Eigenschaften vom Wesen sowie die notwendige Existenz angeführt. Die Axiome gemeinsam mit den Theoremen formulieren implizit positive Eigenschaften sowie die am Ende resultierende mögliche Existenz eines göttlichen Wesens. Glaubhaft zählt jedoch Gödels Gottesbeweis nur, sofern seine Gottesdefinition sowie der ontologische Rahmen anerkannt werden.

Die Entstehung des Gottesbeweises obliegt der Auseinandersetzung Gödels mit dem ontologischen Gottesbeweis, die in zwei Schritten beschrieben werden:

Aus dem 2. Theorem (siehe T2 in Tabelle 7) ergibt sich zuallererst die notwendige Existenz eines göttlichen Wesens aus der materialen Konsequenz seiner möglichen Existenz. In Theorem 3 (siehe T3 in Tabelle 7) wird die Existenz eines möglichen göttlichen Wesens dargebracht. Durch die logische Schlussfolgerung *(modus ponens)* ergibt sich in Einbezug von T2 und T3 das Resultat der notwendigen Existenz eines göttlichen Wesens. (Vgl. Bromand 2011: 399f). Nachfolgend finden sich nun Beweisskizzen der behaupteten Theoreme in den wesentlichen Schritten.

Beweisskizze von Theorem 1: Zu zeigen ist hier der universelle Abschluss von $G(x) \rightarrow G\ Ess.x$ beziehungsweise wegen Definition 2 von: $G(x) \rightarrow \forall\psi\ [\psi(x) \rightarrow \Box\forall y\ (G(y) \rightarrow \psi(y))]$
Um dies zu zeigen, nehmen wir ein beliebiges x an, für das $G(x)$ gilt, sowie eine beliebige Eigenschaft ψ von x (so daß $\psi(x)$ gilt). Zu zeigen ist nun noch $\Box\forall x\ \left(G(x) \rightarrow \psi(x)\right)$. Ist nun ψ positiv? Falls nicht, gilt wegen Axiom 2 $P(\neg\psi)$, und wegen Definition 1 gilt dann $\neg\psi(x)$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also muß ψ positiv sein und es gilt wegen Axiom 3 $\Box P(\varphi)$. Wegen Definition 1 gilt aber $\forall x\ (G(x) \rightarrow \forall\varphi[P(\varphi) \rightarrow\ \varphi(x)])$, woraus folgt:

(#) $\Box P(\ \psi) \rightarrow \Box\forall x[G(x) \rightarrow\ \psi(x)]$.

Dies ergibt sich wie folgt: Aus $\forall\varphi[P(\varphi) \rightarrow \varphi(x)]$ folgt im Rahmen von PL2 aufgrund von universeller Spezialisierung $P(\psi) \rightarrow \psi(x)$,so daß aus $\forall x\,(G(x) \rightarrow \forall\varphi[P(\varphi) \rightarrow \varphi(x)])$ prädikatenlogisch Folgendes folgt: $\forall x\,(G(x) \rightarrow [P(\psi) \rightarrow \psi(x)])$. Letzteres ist wiederum aufgrund von PL1 äquivalent zur Aussage: $\forall x\,(P(\psi) \rightarrow [G(x) \rightarrow \psi(x)])$, woraus nach Distribuierung des Allquantors $P(\psi) \rightarrow \forall x[G(x) \rightarrow \psi(x)]$ folgt. Mit Hilfe der abgeleiteten Regel R1 folgt dann das gewünschte Resultat (#). Da wir bereits $\Box P(\psi)$ nachgewiesen hatten, folgt mit (#) sowie *modus ponens* das gewünschte Resultat $\Box\forall x\,[G(x) \rightarrow \psi(x)]$ .QED

Beweisskizze von Theorem 2: Angenommen, es gilt $G(x)$. Zu zeigen ist noch $\Box\exists y\, G(y)$. Nach D1 gilt: $\forall\varphi\,[P(\varphi) \rightarrow \varphi\,(x)]$. Insbesondere gilt $P(E) \rightarrow E\,(x)$, und da nach A4 $P(E)$, folgt $E\,(x)$. Letzteres besagt nach D3, daß $\forall\varphi\,[\varphi\, Ess.x \rightarrow \Box\exists x\,\varphi(x)]$, und hieraus folgt wiederum, dass $G\, Ess.x \rightarrow \Box\exists x\, G(x)$. Das ergibt zusammen mit T1 und der Transitivität des Konditionals das gewünschte Resultat. QED

Beweisskizze von Theorem 3: Inkompatibel wäre das System aller positiven Eigenschaften, wenn für eine endliche Teilmenge seiner positiven Eigenschaften $P_1, \ldots, P_n$ gelten würde: $\Box\forall x([P_1(x) \wedge \ldots \wedge P_n(x)$ selbst positiv, so daß wegen A5 auch $x \neq x$ positiv wäre. Dies kann aber nicht sein, da es sich bei $\Box\forall x(P_1(x) \rightarrow x = x)$ um eine (modal-)logische Wahrheit handelt, so daß wiederum wegen A5 $x = x$ positiv ist. Wegen A2 können aber nicht sowohl $x = x$ als auch $x \neq x$ positiv sein, woraus sich ein Widerspruch zur obigen Annahme ergibt. QED (Bromand 2011: 400f)

Axiom 1 (A1)	$[P(\varphi) \wedge P(\psi)] \rightarrow P(\varphi \wedge \psi)$	Die Konjunktion positiver Eigenschaften ist selbst wieder positiv.
Axiom 2 (A2)	$P(\varphi) \leftrightarrow \neg P(\neg\varphi)$	Entweder φ oder $\neg\varphi$ ist positiv.
Definition 1 (D1)	$G(x) \leftrightarrow \forall\varphi\, [P(\varphi) \rightarrow \varphi(x)]$	Eine Entität ist göttlich genau dann, wenn sie alle positiven Eigenschaften besitzt.
Definition 2 (D2)	$\varphi\ \mathrm{Ess}.x \leftrightarrow (\varphi(x) \wedge \forall\psi\, [\psi(x) \rightarrow \Box\forall y\, (\varphi(y) \rightarrow \psi(y))])$	Die Eigenschaft φ ist eine Essenz eines Objekts x genau dann, wenn x die Eigenschaft φ besitzt und alle Eigenschaften des Objekts „Konsequenzen“ von φ sind.
Axiom 3 (A3)	$P(\varphi) \rightarrow \Box P(\varphi)$ $\neg P(\varphi) \rightarrow \Box\neg P(\varphi)$	Positive (beziehungsweise negative) Eigenschaften sind in allen möglichen Welten positiv (beziehungsweise negativ).
Theorem 1 (T1)	$G(x) \rightarrow G\ Ess.x$	Wenn eine Entität göttlich ist, ist aufgrund von D2 Göttlichkeit eine ihrer Essenzen.
Definition 3 (D3)	$E(x) \leftrightarrow \forall\varphi\, [\varphi\ Ess.x \rightarrow \Box\exists x\, \varphi(x)]$	Eine Entität x existiert notwendig $(E(x))$ genau dann, wenn jede ihrer Essenzen notwendigerweise exemplifiziert (beziehungsweise in jeder möglichen Welt „verwirklicht“) ist. Anders gesagt: Eine Entität existiert notwendig genau dann, wenn die Summe ihrer Eigenschaften beziehungsweise ihr „Wesenskern“ in jeder möglichen Welt exemplifiziert ist.

Axiom 4 (A4)	$P\ (E)$	Notwendige Existenz (E)ist eine positive Eigenschaft.
Theorem 2 (T2)[33]	$G(x) \rightarrow \Box\ \exists y\ G(y)$ also $\exists x\ G(x) \rightarrow \Box\exists y\ G(y)$ also $\Diamond\ \exists x\ G(x) \rightarrow \Diamond\Box\exists y\ G(y)$ also $\Diamond\ \exists x\ G(x) \rightarrow \Box\exists y\ G(y)$	(i) Wenn etwas göttlich ist, dann ist es notwendig, dass etwas Göttliches existiert; (ii)Wenn etwas Göttliches existiert, dann ist es notwendig, dass etwas Göttliches existiert; (iii) Wenn es möglich ist, dass etwas Göttliches existiert, dann ist es möglicherweise notwendig, dass etwas Göttliches existiert; (iv) Wenn es möglich ist, dass etwas Göttliches existiert, dann ist es notwendig, dass etwas Göttliches existiert.
Axiom 5 (A5)	$[P(\varphi) \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow P(\psi)$	Notwendige Konsequenzen aus positiven Eigenschaften sind positiv. Daraus folgt: (i) $x = x$ ist positiv (ii) $x \neq x$ ist negativ.
Theorem 3 (T3)	$\Diamond\exists x\ G(x\ )$	Es ist möglich, dass es ein göttliches Wesen gibt beziehungsweise das System aller positiven Eigenschaften kompatibel ist, aufgrund von A5.

Tabelle 7: Axiome, Definitionen und Theoreme für Gödels ontologische Beweisführung (Bromand 2011: 394-397)

[33] $\Box$ … notwendig
$\Diamond$ … möglich

5.2. Kritik am ontologischen Gottesbeweis nach Gödel

Gegenüber dem Gottesbeweis nach Gödel wurden einige Einwände eingebracht, die allerdings zum Teil wiederum durch andere Verweise entkräftet werden konnten. Die ersten Bedenken kamen interessanterweise von Gödel selbst. Obwohl der Mathematiker mit seiner Beweisführung grundsätzlich zufrieden war, zweifelte er bereits vor der Veröffentlichung am Gebrauch der modallogischen Prinzipien und er erkannte die potenziell resultierenden Missverständnisse und Fehlinterpretationen. Aufgrund der Beanstandungen *Fregels*[34] hinsichtlich der Durchführbarkeit eines ontologischen Gottesbeweises im Sinne des modernen logischen Modus hielt schließlich Gödel daran fest, einen solchen darzulegen und dessen Einwände zu behelligen.

Neben der Kritik von *Löffler* am S5-Axiom[35], welches in den modallogischen Prinzipien verankert ist und durch ein anderes modallogisches Prinzip – dem *Brouwerschen System B*[36] – widerrufen werden kann, und der Kritik von *Sobel* zum Theorem $\alpha \rightarrow \Box\, \alpha,$[37] wonach es laut Anderson für die Ausführung des Gottesbeweises keine notwendige Äquivalenzdarlegung bedarf, gibt es eine weitere Anfechtung von *Graham Oppy*. Dieser verweist darauf, dass sich Gödels Argumentation nicht nur auf eine einzige Menge positiver Eigenschaften anwenden lässt – sodass ein Objekt existieren muss, welches diese Eigenschaften besitzt – sondern auf alle Mengen, für die das Axiom gilt. Nachdem es mehrere Mengen dieser Art gibt, scheint das Argument nicht nur die Existenz Gottes, sondern zugleich die Existenz vieler Entitäten zu zeigen, die weniger vollkommen sind. Oppy kritisiert die kontraintuitive Konsequenz des Beweises, dieser werde zu umfänglich beziehungsweise zu wenig exklusiv belegt. Sein Kritikpunkt gibt jedoch keine Nichtigkeitsbegründung des Beweises ab, da er weiterhin die Existenz Gottes neben eventuell anderen existierenden Objekten aufzeigt. Die zu untersuchende Frage hingegen ist, ob die Menge der Eigenschaften

[34] *Existenz* sei kein Prädikat erster Stufe, das [zugleich] Merkmal eines Begriffs wie „vollkommenes Wesen“ oder „etwas, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann“ sein kann. (Bromand 2011: 393)

[35] $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\, \Diamond\alpha$ Eine wahre Aussage in einer möglichen Welt ist in jeder anderen möglichen Welt ebenfalls möglicherweise wahr. (Vgl. Bromand 2011: 399).

[36] $\alpha \rightarrow \Box\, \Diamond\alpha$ Wenn eine Aussage α der Fall ist, dann ist diese auch in jeder möglichen Welt α zumindest möglich. (Vgl. Bromand 2011: 399).

[37] Wenn α der Fall ist, dann gilt α auch notwendigerweise.

Gottes tatsächlich eine Menge positiver Eigenschaften im Sinne von Gödels Beweis darstellt. Das Kernelement wirft dabei nochmals die Frage auf, ob die Menge der Eigenschaften Gottes ebenso wie Mengen positiver Eigenschaften konsistent ist.

Kurt Gödel definiert das System positiver Eigenschaften als ein konsistentes. Dennoch bewahrheitet sich der Gottesbeweis nur dann, wenn auch die Menge der Eigenschaften Gottes eine Menge positiver Eigenschaften ist und unter der Voraussetzung steht, dass die Eigenschaften Gottes eine konsistente Menge bilden. Doch Letzteres zeigt sich im Gottesbeweis nicht, weshalb er im Aufschluss der Existenz Gottes unvollständig bleibt. Hierbei bedarf es zuvor der Analyse und Erforschung der Eigenschaften Gottes, die aber viel mehr im Problemfeld der Theologie als der Mathematik eingebettet sind. Demnach benötigt Gödels Beweis keine weitere logische Vorerklärung.

Zwar ist dieser Gottesbeweis nicht vollkommen lückenlos, dennoch erreicht Gödel sein eigentliches Ziel, einen ontologischen Gottesbeweis nach logischer Abhandlung zu formulieren. (Vgl. Bromand 2011: 392 – 405).

Zusammenfassung

Die Unendlichkeit per se bietet nicht zwingend den Vorteil, eine kleine, überschaubare Thematik ohne Ausuferung zu sein. Um diese unbeschreibliche Größe dennoch ein wenig einzufangen, beginnt diese Arbeit mit dem Grundgedanken der Mathematik – dem Zählen und Messen von endlich erfassbaren Mengen – und fährt anschließend mit der Philosophie der Mathematik und der Mengenlehre fort. Letzteres erstreckt sich von den Axiomen (dem mathematischen Ursprung) über das Unendlichkeitsverständnis von Georg Cantor bis hin zur Unmenge (der mengentheoretischen Vollendung) und dem Reflexionsprinzip der Unmenge als Allklasse in seiner theologischen Komponente. Aufbauend darauf folgt der theologisch behaftete sowie historisch-metaphysische Aspekt der Frage und den Beweisen der Existenz eines ewigen Gottes. Abschließend mündet das Thema im Kontext der Schule und der fächerübergreifenden Auseinandersetzung durch den Einsatz der philosophischen Lehrmethode in den beiden Unterrichtsgegenständen Mathematik und katholische Religion.

Im Hinblick auf die Einführung der neuen Lehrpläne in den kommenden Jahren soll hierbei das neue Konzept der fächerübergreifenden Methodik gezeigt werden. Die kürzlich in den fachdidaktischen Lehrbüchern aufgenommene Methode des Philosophierens im Mathematikunterricht stellt dabei eine unkonventionelle Möglichkeit für einen neuen Erweiterungshorizont im Unterrichtsgegenstand dar, der diesem geplanten Bildungsmodell folgeleistet.

Auf Basis wissenschaftlicher Erkenntnisse zum Unendlichkeitsbegriff werden exemplarisch Unterrichtsmaterialien in Form von Informations- und Arbeitsblättern vorgestellt. Die Materialien bieten thematische, fachübergreifende Verknüpfungen sowie weiterführende Elemente zur Frage nach der Unendlichkeit und des Wahrheitsaspekts in Bezug auf die Beweisführung an, die an den Lehrplan der österreichischen Handelsakademien angepasst sind.

Abstract

There is not just one definition of infinity and it is therefore not limited to just one scientific field. In order to be able to capture this indescribable magnitude to some extent, this thesis begins with the fundamental idea of mathematics – the counting and measuring of finite sets – and continues with the philosophy of mathematics and set theory. The latter ranges from the axioms (the mathematical origin) to the understanding of infinity by Georg Cantor, culminating in the concept of a multitude (the completion of set theory) and the reflection principle of the multitude as the class of all classes in its theological component. Building on that, the thesis follows the theological and historically metaphysical aspect concerning the question and proofs of the existence of an eternal God. Finally, the topic concludes in the context of education, specifically the interdisciplinary approach using the philosophical teaching method in the subjects of mathematics and Catholic religion.

Regarding the introduction of new curricula in the coming years, the aim is to demonstrate the new concept of interdisciplinary methodology. The recently incorporated method of philosophizing in mathematics education textbooks represents an unconventional possibility for a new expanded horizon in the subject, following this planned educational model.

Based on scientific findings on the concept of infinity, exemplary teaching materials in the form of information and activity sheets are presented. These materials provide thematic, cross-curricular connections and additional elements related to the question of infinity and the aspect of truth – in relation to proof – which are aligned with the curriculum of Austrian commercial academies.

Literaturverzeichnis

Asmuth, C. (2018). Anselm von Canterbury (1077/1078), Proslogion. In M. Kühnlein (Hrsg.), *Religionsphilosophie und Religionskritik: ein Handbuch* (S. 76-83). Suhrkamp.

Austeda, F. (1989). Kategorien. In F. Austeda, *Lexikon der Philosophie* (Bd. 6., erweiterte Auflage) (S. 184). Brüder Hollinek.

Bayerischer Rundfunk. (2019, 08. Juli). *Das Zeitalter der Aufklärung*. Bayerischer Rundfunk. Abgerufen am 06. August 2022 von https://www.br.de/radio/bayern2/sendungen/radiowissen/geschichte/aufklaerung-vernunft-thema100.html

Beckermann, A. (2013). *Glaube.* DE GRUYTER.

Beckert, B. (2004). *Gottesbeweise.* Forschungsgruppe für Anwendungsorientierte Formale Verifikation am Institut für Informationssicherheit und Verlässlichkeit (KASTEL). https://formal.kastel.kit.edu/~beckert/teaching/Seminar-LogikaufAbwegen-SS04/graf_ausarbeitung.pdf

Berking, K. R. (2017). *Was ist Mathematik?* Universität Siegen. https://www.uni-siegen.de/fb6/phima/lehre/phima17/was_ist_mathematik_2017.pdf

Betz, G. (2018, 08. November). *Datei: Aufbau eines korrekten Arguments.png*. Wikipedia. Abgerufen am 30. Dezember 2021 von https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Aufbau_eines_korrekten_Arguments.png

Bibliographisches Institut GmbH. (2022, Januar). *a priori - a posteriori*. In: Duden. Abgerufen am 08. Januar 2022, von https://www.duden.de/suchen/dudenonline/a%20priori?utm_source=apple

Bitterl, M. (2012, April). *Weite und Wirklichkeit des Denkens – eine Debatte zwischen Anselm und Kant.* https://core.ac.uk/download/pdf/11599906.pdf

Bromand, J., & Kreis, G. (2011). *Gottesbeweise.* Suhrkamp.

Brüning, B. (2003). *Philosophieren in der Sekundarstufe. Methoden und Medien.* Beltz.

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung (2020, 30. April). *Lehrplan der Handelsakademie - Wirtschaft und Recht.* Handelsakademien und

Handelsschulen in Österreich Competence Center. Abgerufen am 14. April 2022 von https://www.hak.cc/unterricht/lehrplaene/lehrplan-der-handelsakademie-wirtschaft-und-recht

Burch, D. T. (2021a). Zählen. In *Deutsches Wörterbuch von Jacob Grimm und Wilhelm Grimm.* Abgerufen am 04. Juni 2021, von https://woerterbuchnetz.de/?sigle=DWB&lemma=zaehlen#2

Burch, D. T. (2021b). Zählung. In *Deutsches Wörterbuch von Jacob Grimm und Wilhelm Grimm.* Abgerufen am 04. Juni 2021, von https://woerterbuchnetz.de/?sigle=DWB&lemma=zaehlen#1

Burkard, F. (2008). *Metzler Lexikon Philosphie.* Spektrum.

Calvert, K., & Nevers, P. (2008). PhiNa - Kinder philosophieren über die Natur. In C. Fischer, F. J. Mönks & U. Westphal (Hrsg.), *Individuelle Förderung: Begabungen entfalten - Persönlichkeit entwickeln: allgemeine Forder- und Förderkonzepte* (S. 221-232). LIT.

Casalena, L. (2012, 28. März). *Mathematische Logik. Zermelo-Fränkel Axiome der Mengenlehre.* Department of Mathematics https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/fs2012/logik/Vortrag8.

Crosilla, L. (2020, Juni). Axioms of CZF and IZF. In *Standford Encyclopedia of Philosophy*. Abgerufen am 24. August 2021, von https://plato.stanford.edu/entries/set-theory-constructive/axioms-CZF-IZF.html

Dalwigk, F. A. (2019). *Vollständige Induktion. Beispiele und Aufgaben bis zum Umfallen.* Springer Spektrum.

Deiser, O. (2021, 19. März). *Reelle Zahlen. Die axiomatische Grundlage. Grundbegriffe der Mathematik. Sprache, Zahlen und erste Erkundungen*. https://studylibde.com/doc/18208902/reelle-zahlen---oliver-deiser

Dötschel, D. (o. J.). *Zum Verständnis der Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht.* CORE. https://core.ac.uk/download/pdf/46914385.pdf

Duden Learnattack (2010). Beweise, Allgemeines. In *Lernhelfer*. Abgerufen am 13. Februar 2023, von https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/beweise-allgemeines

Ebbinghaus, H. (2021). *Einführung in die Mengenlehre.* Springer.

Engels, H. (2004). *"Nehmen wir an ...": das Gedankenexperiment in didaktischer Absicht.* Beltz.

Erhard, D. (o. J.). *Metaphysik*. philosophie Magazin. https://www.philomag.de/lexikon/metaphysik

Erzbischöfliches Amt für Schule und Bildung (2014). *Lehrpläne.* Erzbischöfliches Amt für Schule und Bildung. Abgerufen am 14. April 2022 von https://www.schulamt.at/wp-content/uploads/2020/05/Lehrpläne-BBHS_MS_Web2.pdf

Esterbauer, R. (2005). *Philosophische Gotteslehre.* Theologie ÖH Uni Graz. https://theologie.oehunigraz.at/files/2012/10/Philosophische-Gotteslehre_WS04.pdf

Evers, D. (2013, Dezember). *Kann man Gott wissenschaftlich beweisen?* Dialog Theologie & Naturwissenschaften. Abgerufen am 25. Oktober 2021 von https://www.mathematik.de/algebra/91-erste-hilfe/verzeichnis/beweise-und-beweismethoden/709-was-ist-ein-beweis

Eves, H. (1990). *An Introduction to the History of Mathematics* (6. ed.). The Saunders Series.

Ferdinand, H. (2015). *Denker Zweifler Atheisten: Die Bibel im Kreuzfeuer.* Kern.

Feustel, D. R. (2021). *Deduktion und Induktion.* Universität Leibzig. https://home.uni-leipzig.de/methodenportal/deduktion_induktion/

Freese, H. (1995). *Abenteuer im Kopf: Philosophische Gedankenexperimente.* Beltz Quadriga.

Fritzche, K. (2015, 26. November). *Axiomatische Mathematik.* Bergische Universität Wuppertal. Fachgruppe Mathematik und Naturwissenschaften. http://www2.math.uni-wuppertal.de/~fritzsch/lectures/geo/geo2_22.pdf

Fröhle, D. (2017). *Zugänge zur Gotteserfahrung im Religionsunterricht. Empirische Erkundungen und religionspädagogische Analysen.* Kassel university press.

Gabriel, M. (2016). *Sinn und Existenz: Eine realistische Ontologie.* Suhrkamp.

Ganster, M. (2016, März). *Axiomatische Mengenlehre.* TU Graz. https://www.math.tugraz.at/~ganster/lv_grundlagen_mathematik_ss_2016/05_axiomatische_mengenlehre.pdf

Geoghegan, J., & Homan, M. (2020). *Die Bibel für Dummies* (Bd. 3). Wiley-VCH Verlag.

Graumann, G. (2019). Astronomische Entfernungen- Entwicklung von Vorstellungen und Stützgrößen. In I. Grafenhofer & J. Maaß (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 6* (S. 85-94). Springer Spektrum.

Gut, J., & Karajan, S. (2017). *Maturawissen Mathematik.* Manz.

Hebisch, U. (2010, 31. August). *Mengenaxiome.* TU-Freiberg. http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/logik/mengenaxiome.html

Heinle, J. (o. J.). *Der ontologische Gottesbeweis*. Philoclopedia. Abgerufen am 08. Januar 2022, von https://www.philoclopedia.de/was-kann-ich-wissen/gottesbeweise/ontologischer-gottesbeweis/

Hemion, G. (o. J.). *Mengenlehre und Logik.* Universität Bielefeld. https://www.math.uni-bielefeld.de/~hemion/Mengenlehre/Mengenlehre.pdf

Heschel, A. J., & Olmesdahl, R. (1985). Der Mensch - ein heiliges Bild. In A. J. Heschel, *Die ungesicherte Freiheit: Essays zur menschlichen Existenz* (S. 124-136). Neunkirchener Verlag.

hipa.at. (o. J.). *Platons Ideenlehre*. Philosophie-Seiten. Abgerufen am 29. Mai 2021 von http://hipa.at/philo/platons.htm

Hoffmann, B. (2022). *Axiomensystem*. Lernhelfer. Abgerufen am 27. Oktober 2022, von https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/axiomensysteme#

Holopainen, T. J. (2020). *A Historical Study of Anselm's Proslogion.* BRILL.

Homann, U. (2016, 21. November). *Gott wird gebraucht. Für den Pragmatisten William James zählt, was Früchte trägt.* literaturkritik.de. Abgerufen am 29. Juli 2022 von https://literaturkritik.de/id/7090

Ijjas, A. (o. J.). *Die traditionellen Gottesbeweise und ihre Kritik.* Ludwig-Maximilians-Universität München. https://www.kaththeol.unimuenchen.de/lehrstuehle/fundamental_theol/personen/ijjas/materialien/pruefungstutorium/gottesbeweise.pdf

katholisch.de. (2020, 05. Oktober). *Die Bibel. Die neue Einheitsübersetzung der Bibel auf katholisch.de.* katholisch.de. https://www.katholisch.de/artikel/27103-die-neue-einheitsuebersetzung-der-bibel-auf-katholischde

Katholische Fakultät Universität Wien. (2022). *Studienplan für das Diplomstudium Katholische Fachtheologie (Version 2015).* Universität Wien. Abgerufen am 09. Jänner 2022 von https://senat.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/s_senat/konsolidierte_Dipolmstudien/DS_KatholischeFachtheologie_Vers2015.pdf

kathweb. (o. J.). *Theodizee/Theodizeefrage*. kathweb. Abgerufen am 27. Januar 2022 von https://www.kathweb.de/lexikon-kirche-religion/t/theodizee-theodizeefrage.html

Kellersohn, A. (o. J.). *Der "ontologische" Schritt*. Universität Freiburg. https://www.ub.uni-freiburg.de/fileadmin/ub/referate/04/verweyen/anselm5.htm#101

Keyence_Deutschland. (2021). *Was ist Messen?* Keyence Corporation. https://www.keyence.de/ss/products/measure/measurement_library/basic/measurement/

King, S. (2014, 04. Februar). *Elemente der Mathematik.* Friedrich-Schiller-Universität Jena Institut für Mathematik. https://users.fmi.uni-jena.de/~king/pub/SkriptElementeDerMathematik.pdf

Klaua, D. (2016). *Elementare Axiome der Mengenlehrenlehre. Einführung in die allgemeine Mengenlehre 1.* De Gruyter.

Kroker, B. (2020, 27. Mai). *Unterrichtsmethoden: Placemat-Methode.* Betzold Blog. Abgerufen am 25. Oktober 2022 von https://www.betzold.at/blog/placemat/

KSmrq. (2004, 24. Juni). *File:Hasse diagram of powerset of 3.svg*. Wikimedia Commons. Abgerufen am 20. August 2021, von https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hasse_diagram_of_powerset_of_3.svg

Kuba, G., & Götz, S. (2004). *Zahlen.* Fischer Taschenbuchverlag.

Leibniz, G. W. (1996). *Die Theodizee.* Suhrkamp.

Lenzen, V. (1995). *Jüdisches Leben und Sterben im Namen Gottes. Studien über die Heiligung des göttlichen Namens (Kiddusch HaSchem).* Pendo.

Looks, K. (2021, 27. Mai). *Gemeinsam auf Entdeckungsreise: 9 Tipps – Philosophieren mit Kindern*. scoyo. Einfach leichter lernen. https://www.scoyo.de/magazin/familie/freizeit/philosophieren-mit-kindern-tipps/

Maaß, J. (2021, 15. Oktober). Nachdenken über Unendlichkeit: Ein Vorschlag für einen fächerübergreifenden Unterricht in Mathematik und Religion mit philosophischen Aspekten. *R&E Source Online Journal for Research and Education 16*. https://doi.org/10.53349/resource.2021.i16.a926

Maaß, J., & Götz, S. (2021, 15. April). Philosophische Fragen und didaktische Überlegungen zu einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht. *R&E Source Online Journal for Research and Education 15*. https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/981

Marschütz, G. (2014). *theologisch ethisch nachdenken 1* (2. Auflage). Echter.

Marschütz, G. (2016). *theologisch ethisch nachdenken 2* (2. Auflage). Echter.

Martens, E. (1990). *Sich im Denken orientieren: philosophische Anfangsschritte mit Kindern.* Schroedel.

Meerwaldt, D. (2011). Philosophieren als Unterrichtsprinzip im Mathematikunterricht. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik Verstehen: Philosophische und Didaktische Perspektiven* (S.117-129). Vieweg+Teubner Verlag/Springer Fachmedien.

Meier-Oeser, S. (o. J.). *Synkategorem; synkategorematisch; synsemantisch.* Westfälische Wilhelms-Universität Münster. https://www.uni-muenster.de/Leibniz/meieroeser/Synkategorem.pdf

Meisl, J. (1987). Kiddusch Haschem. In G. Herlitz & B. Kirschner (Hrsg.), *Jüdisches Lexikon. Ein enzyklopädisches Handbuch des jüdischen Wissens in vier Bänden* (S. 687-688). Jüdischer Verlag.

Michael, I., & Jordan, S. R. (1999). Categorization. In R. A. Wilson & F. C. Keil (Eds.), *The MIT Encyclopedia of the Cognitive Sciences* (pp. 104-106). The MIT Press.

Michalik, K. (2005). Philosophieren über Mensch und Natur im Sachunterricht. In C. Hößle & K. Michalik (Hrsg.), *Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen: Didaktische und methodische Grundlagen des Philosophierens (*S. 19-21). Schneider Verlag.

Michalik, K., & Schreier, H. (2006). *Wie wäre es einen Frosch zu küssen? Philosophieren mit Kindern im Grundschulunterricht.* Westermann.

Mohr, J. (o. J.). *Vertiefung zur vollständige Induktion*. Joachim Mohr Mathematik Musik Programmieren. https://kilchb.de/vollstindf.php

Moore, A. W. (1995, 01. Juni). Eine kurze Geschichte des Unendlichen. *Spektrum der Wissenschaft,* 6, 64.

Muck, O. (1983). *Philosophische Gotteslehre.* Patmos Verlag.

Neidhart, L. (2008). Mathematische Ergebnisse über Unendlichkeit und ihre Bezüge zu Metaphysik und Theologie. In J. Brachtendorf, T. Möllenbeck, G. Nickel & S. Schaede (Hrsg.), *Unendlichkeit. Interdisziplinäre Perspektiven* (Bd. 15, S. 217-232). Mohr Siebeck.

Nolte, M. (2022, Januar). *Kirche-Leben Lexikon. Was ist Theologie?* Kirche+Leben. Das katholische Online-Magazin. https://www.kirche-und-leben.de/artikel/was-ist-theologie

Peter, K. (2017a, 23. Oktober). *Anliegen und Verortung eines theologischen Gesprächs.* Universität Wien.

Peter, K. (2017b, 09. Oktober). *Theologisieren mit Kindern und Jugendlichen.* Universität Wien.

Pfeifer, E., & Vincenz, S. (2017). *Georg Cantor und das Unendliche. Zusammenfassung des Seminars zu „Kardinalität und Kardinäle".* Docplayer. Abgerufen am 31. Juli 2021 von https://docplayer.org/35905051-I-das-aktual-unendliche.html

Popper, K. (2003). *Die offene Gesellschaft und ihre Feinde. Falsche Propheten: Hegel, Marx und die Folgen* (Bd. 2). Mohr Siebeck.

Prechtl, P. (2008). *Metzler Lexikon Philosophie.* Spektrum.

Reich, K. (2017, 03. Februar). *Darstellung der Methode Expertenrunde*. Unterrichtsmethoden im konstruktiven und systemischen Methodenpool Lehren, Lernen, Methoden für alle Bereiche didaktischen Handelns. http://methodenpool.uni-koeln.de/rallye/rallye_darstellung.html

Reinking, J. (2022). *Die Placemat Methode – einfach erklärt.* Friedrich Verlag. https://www.friedrich-verlag.de/englisch/lernstrategien/placemat-methode-einfach-erklaert-sofort-einsetzbar/

Resag, J. (2003, 23. März). *Die Fundamente der Mathematik*. Jörg Resag. http://www.joergresag.privat.t-online.de/mybk3htm/chap42.htm

Ruwisch, S. (2015). Wie die Zahlen im Kopf wirksam werden. Merkmale tragfähiger Zahlvorstellungen. *Grundschule Mathematik,* 44, 4-5.

Sans, G. (2018). *Philosophische Gotteslehre: Eine Einführung.* W. Kohlhammer.

Schimmöller, T. (2011). Wie verstehen Schülerinnen und Schüler den Begriff der Unendlichkeit? In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik Verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven* (S. 179-188). Vieweg+Teubner.

Schneider, G., & Osorio-Kupferblum, N. (2017). *Georg Cantor und das Unendliche. Mathematische Fragestellungen.* Docplayer. Abgerufen am 06. August 2021 von https://docplayer.org/35905051-I-das-aktual-unendliche.html

Schnitzler, A. (1927). *Buch der Sprüche und Bedenken: Aphorismen und Fragmente.* Phaidon-Verl.

school-scout.de. (2022). *Lapbook Vorlagen für den Religionsunterricht im Paket.* school-scout.de. https://www.school-scout.de/vorschau/69583/lapbooks-vorlagen-fuer-den-religionsunterricht-im-paket.pdf

Schredelseker, K. (2017). *Alltagsentscheidungen. Die anderen sind nicht dümmer als wir.* Springer.

Schrittesser, I., Köhler, J., & Holzmayer, M. (2019). *Lernen verstehen - Unterricht gestalten. Lernen und Unterrichten aus pädagogischer Perspektive.* utb.

Schröder, W. (2007). Historisches Wörterbuch der Philosophie. In *Schwabe online.* Abgerufen am 24. Oktober 2021, von https://www.schwabeonline.ch/schwabexaveropp/elibrary/start.xav?start=%2F%2F%2A%5B%40attr_id%3D%27hwph_productpage%27%5D

Schroeder, C. (o. J.). *„Was ist Wahrheit?" (Joh 18,38) Die Pilatusfrage im gegenwärtigen gesellschaftlichen Kontext.* FREI & FROMM. Forum für Gemeinschaft und Theologie. https://docplayer.org/37370327-Was-ist-wahrheit-joh-18-38-die-pilatusfrage-im-gegenwaertigen-gesellschaftlichen-kontext.html

Schütz, U. (2012, 27. Juli). *Hintergrund-Infos. Dominium terrae*. Radio Aref. Abgerufen am 29. Mai 2021, von https://www.aref.de/kalenderblatt/mehr/dominium-terrae.htm

Schütze, M., Anskeit, N., & Dautel, K. (2022, 12. Mai). *Sokratisches Gespräch*. Zum Unterrichten. https://unterrichten.zum.de/wiki/Sokratisches_Gespräch

Schwarz, H. (1984). *Kurs: Gotteslehre. Gott oder kein Gott* (Bd. 1). Vandenhoeck und Ruprecht.

Selter, C. (2021). *Anzahlen strukturieren*. Mathe inklusiv mit Pikas Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik. https://pikas-mi.dzlm.de/node/122

Söding, T. (2023, 23. Feburar). *Gewalt-Religion-Recht. Biblische Perspektiven.* Ruhr Universtität Bochum. http://www.kath.ruhr-uni-bochum.de/imperia/md/content/nt/gewaltreligionrecht/religion_recht_gewalt.pdf

Steinfeld, T. (o. J.). *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.* Mathepedia. Abgerufen am 13. April 2022, von https://mathepedia.de/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.html

Stiller, D. G. (2020). Formalwissenschaften. In *Wirtschaftslexikon24.com Ausgabe 2020*. Abgerufen am 05. Juni 2021, von http://www.wirtschaftslexikon24.com/d/formalwissenschaften/formalwissenschaften.htm

Stiller, J. (2019). *Grundriss der Philosophie XI. Religionsphilosophie und philosophische Theologie.* neobooks.

Straeter-Lietz, C. (2018). *Was ist eine Concept Map?* Lucidchart. https://www.lucidchart.com/pages/de/was-ist-eine-concept-map/#discovery__top

Tapp, C. (2005). *Kardinalität und Kardinäle. Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit* (Bd. 53). Franz Steiner Verlag.

Tapp, C. (2008). Unendlichkeit in Mengenlehre und Theologie. Über tatsächliche und scheinbare Beziehungen. In J. Brachtendorf, T. Möllenbeck, G. Nickel & S. Schaede (Hrsg.), *Unendlichkeit. Interdisziplinäre Perspektiven* (Bd. 15, S. 233-248). Mohr Siebeck.

Tinhof, F., Fischer, W., Gerstendorf, K., Girlinger, H., & Paul, M. (2022). *Mathematik HAK I.* Trauner-Verlag.

Vollrath, H., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag.

Walz, G. (2017). *Axiomatische Mengenlehre.* Spektrum.de. https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/axiomatische-mengenlehre/422

Weingärtner, J. (2014, 07. Februar). *Philosophieren - Die wichtigsten Grundregeln.* Akademie Kinder philosophieren. https://www.philosophische-bildung.de/wp-content/uploads/2014/02/07.13_Handout_KigaGS.pdf

Weingartner, P. (1998). Wie schwach können die Beweismittel für Gottesbeweise sein? In F. Ricken S.J. & G. Haffner S.J. (Hrsg.), *Klassische Gottesbeweise in der Sicht der gegenwärtigen Logik und Wissenschaftstheorie* (Bd. 4, S. 34-59). Kohlhammer.

Wenz, G. (2016). Metaphysik und Theologie bei Wolfhart Pannenberg. In G. Wenz, *Vom wahrhaft Unendlichen* (S.18). Vandenhoeck & Ruprecht.

Wikipedia. (2020, 06. Januar). *Potenzmenge*. Wikipedia. Abgerufen am 24. August 2021, von https://de.wikipedia.org/wiki/Potenzmenge

Wittmann E. C., & Müller. G. N. (2009). *Das Zahlenbuch. Handbuch zum Frühförderprogramm.* Ernst Klett-Verlag.

Wünsch, W. (2014). *"Macht euch die Erde untertan". Deutungsansätze der "Herrschaftsformel".* wfw-film.de. https://www.wfw-film.de/media/download/erde_untertan--062--wissen--deutung_der_herrschaftsformel.pdf

Zapf, E. (2019, 08. Mai). *Können wir Unendlichkeit verstehen?* Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. https://www.fau.de/2019/08/news/wissenschaft/koennen-wir-unendlichkeit-verstehen/

Ziegler, G. M. (2021). *Was ist ein Beweis?* Deutsche Mathematiker-Vereinigung. https://www.mathematik.de/algebra/91-erste-hilfe/verzeichnis/beweise-und-beweismethoden/709-was-ist-ein-beweis

Ziegler, G. M. (2022, Januar). *Vollständige Induktion*. Deutsche Mathematiker-Vereinigung. https://www.mathematik.de/algebra/91-erste-hilfe/verzeichnis/beweise-und-beweismethoden/713-vollstaendige-induktion