KOBORDISMEN UND CW-KOMPLEXE

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Magister der Naturwissenschaften
an der Universität Wien

eingereicht von Paul Sinclair

Wien , März 1990

CW-Komplexe und Kobordismen

PAUL SINCLAIR
Weisselgasse 15/3/16, A-1210 Wien, Austria
March 15, 1990

Inhaltsverzeichnis

1 Die Absicht dieser Arbeit

Durch Geometrische Vorstellung entdeckte ich vor einigen Jahren, wie man einen Einblick in den Aufbau von Mannigfaltigkeiten mit Hilfe der Morse Theorie gewinnen kann. über einige Jahre habe ich mich damit beschäftigt und gewann dabei ein immer klareres Bild. Diese anschaulich Geometrischen Fakten habe ich versucht in eine analytische Sprache zu übersetzen. Dabei geht naturgemäß viel verloren. Das entsandene Werk enthält keine neuen Erkenntnisse in der Form neuer Lehrsätze, wohl aber eine stark vom üblichen Zugang abweichende Darstellung und eine Sammlung von Fakten, die zwar seit einiger Zeit bekannt sind, aber in der Literatur kaum dokumentiert sind. So weiß ich von dem Satz, daß jeder C^∞-Kobordismus entweder Abbildungszylinder einer Abbildung vom oberen Rand auf einen relativen CW-Komplex ist, nur daß er von einem Herrn Cohen in den sechziger Jahren für (nicht notwendigerweise C^∞) Kobordismen bewiesen wurde, die aus Henkeln zusammengeklebt sind. Diesen Beweis habe ich (vielleicht aus Bequemlichkeit) nie zu Gesicht bekommen. Leicht zu finden dürfte er jedenfalls nicht sein. Eben so wenig leicht, daß es sich lohnt ihn selbst nochmals zu beweisen oder die vorgelegte Arbeit zu lesen. Mit der Beweisidee in dieser Arbeit ließe sich nämlich leicht dasselbe beweisen. Allerdings sind diese aus Henkeln zusammengeklebten Objekte hier nichteinmal definiert, denn ich habe vielmehr versucht, die Klebeabbildungen im CW-Komplex genauer zu beschreiben.

Ich glaube auch,daß ich eine besonders übersichtliche Methode für die Konstruktion des CW-Komplexes gefunden habe. Sollte diese Methode nicht neu sein, so habe ich sie zumindest wiederentdeckt, ich glaube aber sie ist neu.

Die Mittel die verwendet werden sind größtenteils elementare Rechnungen. Man braucht wohl kaum Kenntnisse in Algebraischer Topologie, um die Beweise zu verstehen. Ich weiß allerdings nicht, ob man die Bedeutung der Sätze richtig erfassen kann ohne solche Kenntnisse.

Die Grundlage der Beweismethode wird von mir Z-Struktur genannt und in Kapitel 4 und 5 konstruiert.

Beginnend mit Kapitel 7 wird eine Konstruktionsmethode für Kobordismen angegeben. Ich habe die Schwierigkeiten, die beim Verkleben Topologischer Räume auftreten bewußt umgangen obwohl das im Allgemeinen eine heikle Angelegenheit ist. Das erklärt die,auf den ersten Blick etwas umständliche Ausdrucksweise bei der Konstruktionsvorschrift für Kobordismen. Einige Eigenschaften dieser zusammengeklebten Räume scheinen offensichtlich sind aber nicht so leicht zu beweisen wie es scheint.

Auf dieser Konstruktion gibt es eine gegebene Z-Struktur. Damit folgt ausder Konstruktionsvorschrift für den Kobordismus schon die Konstruktion des CW-Komplexes

In Kapitel 11 wird bewiesen, daß jder Kobordismus auf die gewählte Methode konstruiert werden kann.

Kapitel 12 bis 16 beschäftigt sich mit differentialtopologischer Technik die nötig ist um die konstruierten CW-Komplexe so genau wie möglich zu beschreiben. Ein wichtiges Theorem über das Paarweise eliminieren kritischer Punkte einer Morse Funktion wird als Theorem 15.4 bewiesen hier habe ich den Beweis nicht nur übersetzt, sondern auch verändert. Denn das Original war keineswegs elementar sondern benützte, wohl aus Bequemlichkeit Eigenschaften der Topologie am Raum der Trajektorien was für diesen Beweis völlig unnötig ist. Leider habe ich mir nicht Zeit genommen, über die Bedeutung dieses Satzes mehr zu sagen, aber in der Literatur gibt es genug Ausführungen darüber.

2. Definitionen

2.1. Die Kobordismen Kategorie. Ein C^∞-Kobordismus wird in dieser Arbeit stets bedeuten: Eine Triade (M, V, V') von Räumen, die folgende Bedingungen erfüllen:

i). M ist eine m–dimensionale, kompakte C^∞–Mannigfaltigkeit mit Rand.

ii). V, $\acute{V}$ sind $m-1$–dimensionale geschlossene C^∞–Untermannigfaltigkeit oder $\emptyset$.

iii). $\partial M = V \sqcup \acute{V}$

Die Morphismen. Morphismen von Kobordismen sind C^∞ Abbildungen $\Phi : M \longrightarrow N$, so daß Φ ein Morphismus von Triaden ist.

2.2. Bezeichnungen trivialer Funktoren. Ist $(M, V, \acute{V})$ ein Kobordismus so heißt:
$Bd_2(M, V, \acute{V}) = V$ der Obere Rand
$Bd_1(M, V, \acute{V}) = \acute{V}$ der Untere Rand
$\mathrm{Mf}(M, V, \acute{V}) = M$ (Vergissfunktor) die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit. mit Rand.

3. Das Verkleben von Räumen

Sei in der Kategorie der Topologischen Räume ein solches Diagramm:

$$G_1 \xhookleftarrow{i} K \xrightarrow{f} G_2$$

dann sei

$$G_1 \bigsqcup_{i^{-1}\circ f} G_2$$

der pushout dieses Systems.

Bemerkung. Im Normalfall ist K ein Unterraum und i die Inklusion. In diesem Fall schreibt man für gewöhnlich

$$G_1 \sqcup_f G_2$$

für den pushout. Selbstverständlich läßt sich eine Kategorie solcher Klebediagramme bilden mit Morphismen m_1, m_2, so daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "m_1"] & \tilde{G}_1 \\ K \arrow[u, "incl"] \arrow[r, "m_1|K"] \arrow[d, "f"'] & \tilde{K} \arrow[u, "incl"'] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \\ G_2 \arrow[r, "m_2"] & \tilde{G}_2 \end{tikzcd}$$

$\sqcup_f$ ist dann ein Funktor.

3.1. Natürliche Abbildungen. Betrachtet man Klebediagramme als Kategorie so sind die durch die pushout Eigenschaft definierten Abbildungen
$j_1 : G_1 \longrightarrow G_1 \sqcup_f G_2$ und $j_2 : G_2 \hookrightarrow G_1 \sqcup_f G_2$ natürliche Transformationen von den offensichtlichen Funktoren PR_{G_1}, PR_{G_2} nach $\sqcup_f$. Zur besseren Übersicht betrachte das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "incl"] \arrow[d, "f"'] & G_1 \arrow[d, "j_1"] \\ G_2 \arrow[r, "j_2"'] & G_1 \sqcup_f G_2 \end{tikzcd}$$

Standardsätze der Topologie besagen:
i)j_2 ist eine Einbettung
ii)ist f eine Einbettung so auch j_1.

3.2. Zusammensetzung von Kobordismen.
Seien M_1, M_2 Kobordismen und $g : Bd_1(M_2) \xrightarrow{\cong} Bd_2(M_1)$ ein Diffeomorphismus, so heißt $(\mathrm{Mf}(M_2) \sqcup_g \mathrm{Mf}(M_1), Bd_1(M_1), Bd_2(M_2))$ die Zusammensetzung von M_1 und M_2 längs g. Dafür verwende ich auch das gebräuchliche Symbol $M_1 \bullet_g M_2$. Es läßt sich ein Verfahren angeben wie man auf der topologischen Mannigfaltigkeit $M_1 \bullet_g M_2$ eine differenzierbare Struktur konstruiert. Dieses Verfahren hängt aber von sogenannten Krägen ab. Immerhin sind diese Konstrukte wenigstens diffeomorph zueinander, wie aus den folgenden Zitaten zu erkennen ist.

Krägen und differenzierbare Strukturen. Unter einem Kragen einer berandeten Mannigfaltigkeit M versteht man einen Diffeomorphismus von der berandeten Mannigfaltigkeit $\partial M \times [0,1[\rightarrow \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ eine offene Umgebung von ∂M in M, deren Einschränkung auf $\partial M \times 0$ die Inklusion ist.

3.3. Satz (Zitat ohne Beweis). *Jede berandete Mannigfaltigkeit hat einen Kragen.*

3.4. Satz (Zitat). *Sei M eine berandete Mannigfaltigkeit $\tau : \partial_1 M \longrightarrow \partial_1 M$ eine Fixpunktfreie Involution, d.h. τ ist ein Diffeomorphismus und $\tau \circ \tau = \mathrm{Id}$ wobei $\partial_1 M \subset \partial M$ offen und Abgeschlossen im Rand ist. Sei $\bar{\tau}$: folgende Äquivalenzrelation:*

$$x \underset{\tau}{\sim} y \Leftrightarrow \tau(x) = y$$

Dann gibt es auf der topologischen Mannigfaltigkeit $M/_{\bar\tau}$ zu jedem Kragen κ eine differenzierbare Struktur bezüglich der die kanonische Inklusion $(M \setminus \partial_1 M) \subset M/_{\bar\tau}$ und die durch κ gegebene Abbildung $\lambda : \partial_1 M/_{\bar\tau} \times]-1,1[\to M/_{\bar\tau}$, $\lambda(p,t) = \kappa(p,t)$ für $t \geq 0$, $\lambda(p,t) = \kappa(\tau(p), -t)$ für $t \leq 0$ C^∞ Einbettungen sind

3.5. Satz (Zitat). *Der Diffeomorphietyp von $M/_{\bar\tau}$ hängt nicht vom Kragen ab*

Alle Sätze über Krägen sind zitiert aus Bröcker Jänich Einführung in die Differentialtopologie.

4. Der Abbildungszylinder

4.1. Definition. Sei $\varphi : L \longrightarrow N$ eine stetige Abbildung. Dann bezeichne ich den pushout des folgenden Klebediagramms:

$$L \times [0,1] \xleftarrow{ins_0} L \xrightarrow{\varphi} N$$

als Abbildungszylinder von φ oder kurz $\mathcal{M}_\varphi$.

Über Abbildungszylinder will ich folgende Sätze zitieren.

4.2.
Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetig dann ist $j_2(Y) \supseteq \mathcal{M}_f$ ein Deformationsretrakt von $\mathcal{M}_f$.

4.3.
$f : X \longrightarrow Y$ hat genau dann ein Homotopie-Linksinverses wenn $j_1 \circ ins_0(X)$ ein Retrakt von$\mathcal{M}_f$ ist. Dabei ist $j_1 \circ ins_0 : X \longrightarrow \mathcal{M}_f$eine natürliche Einbettung.

4.4.
$f : X \longrightarrow Y$ hat genau dann ein Homotopie-Rechtsinverses wenn$\mathcal{M}_f$ sich nach $j_1 \circ ins_0$ deformieren läßt.

4.5.
$f : X \longrightarrow y$ ist eine Homotopieäquivalenz genau dann wenn $j_1 \circ ins_1(X)$ ein Deformationsretrakt von $\mathcal{M}_f$ ist.

4.6. Definitionen von Bezeichnungen. Sei $K \subset \mathcal{R}$ ein abgeschlossener Unterraum und $\phi \subset K \times K$ eine abgeschlossene Äquivalenzrelation auf K dann bezeichne ϕ_{total} folgende abgeschlossene Äquivalenzrelation auf $\mathcal{R}$
Seien $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$

$$r_1 \underset{\phi_{total}}{\sim} r_2 \Leftrightarrow (r_1 = r_2) \vee (r_1, r_2 \in K \wedge r_1 \underset{\phi}{\sim} r_2)$$

Sei ϕ eine Äqivalenzrelation auf $\mathcal{R}$ und $g : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}$ eine Abbildung, so bezeichne ich mit $g^*(\phi)$ folgende Äquivalenzrelation auf $\mathcal{R}_1$. Seien $r_1, r_2 \in \mathcal{R}_1$

$$r_1 \underset{g^*(\phi)}{\sim} r_2 \Leftrightarrow (g(r_1) \underset{\phi}{\sim} g(r_2))$$

4.7. Lemma. *Sei $q : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ eine Quotientenabbildung und $\bar q$ die zugehörige Äquivalenzrelation und $q_1 : \mathcal{R}_3 \to \mathcal{R}_1$ eine andere Quotientenabbildung dann ist die Quotientenrelation $\overline{q \circ q_1}$ zu $q \circ q_1$ gleich $q_1^*(\bar q)$*

Beweis: $\overline{q_1 \circ q}$ ist folgende Äquivalenzrelation

$$r_1 \underset{\overline{q_1 \circ q}}{\sim} r_2 \Leftrightarrow q \circ q_1(r_1) = q \circ q_1(r_2)$$

während $q_1^*(\bar q)$ beschrieben wird durch:

$$r_1 \underset{q_1^*(\bar q)}{\sim} r_2 \Leftrightarrow q_1(r_1) \underset{\bar q}{\sim} q_1(r_2)$$

Es gilt aber

$$q_1(r_1) \underset{\bar q}{\sim} q_1(r_2) \Leftrightarrow q \circ q_1(r_1) = q \circ q_1(r_2) \quad \blacksquare$$

4.8. Der Abbildungszylinder einer Quotientenabbildung. Seien A, B Hausdorff Räume und $q : A \longrightarrow B$ eine Quotientenabbildung und $\bar{q}$ die zugehörige Quotientenrelation sodaß $A/\bar{q} \cong B$. Sei dann $\bar{q}_{total}$ folgende Quotientenrelation auf $A \times [0,1]$

$$(a,t) \underset{\bar{q}_{total}}{\sim} (a_1,t_1) \Leftrightarrow ((a = a_1) \wedge (t = t_1)) \vee ((t = t_1 = 0) \wedge (a \underset{\bar{q}}{\sim} a_1))$$

Dann ist $\bar{q}_{total}$eine abgeschlossene Äquivalenzrelation und der Abbildungszylinder

$$\mathcal{M}_q = (A \times [0,1])/\bar{q}_{total}$$

Beweis: Den pushout in der Kategorie der topologischen Räume konstruiert man durch eine Äquivalenzrelation auf der Summe, im Fall des Abbildungszylinders sieht das so aus: $\mathcal{M}_q = A \times [0,1] \sqcup B/_\sigma$ und σ wird beschrieben durch

$$x \underset{\sigma}{\sim} y \Leftrightarrow (x = y) \vee (q(ins_0^{-1}(x)) = q(ins_0^{-1}(y))) \vee (x = q(ins_0^{-1}(y))) \vee (y = q(ins_0^{-1}(x)))$$

Da q surjektiv ist ist in jeder Äquivalenzklasse ein Punkt aus $A \times [0,1]$ enthalten, $\mathcal{M}_q$ ist also als Menge $A \times [0,1]/_{\bar{\sigma}}$ wobei $\bar{\sigma}$ nur die Bedingung $q(ins_0^{-1}(x)) = q(ins_0^{-1}(y))$ enthält. Weil aber B die Quotiententopologie trägt, ist auch die Topologie auf $\mathcal{M}_q$ die von $A \times [0,1]/_{\bar{\sigma}}$, $\bar{\sigma}$ ist aber genaudasselbe wie $\bar{q}_{total}$ ∎

5. Z-Strukturen

Bemerkung. Sei $(M, V, \acute{V})$ ein Kobordismus und $q : \acute{V} \times [0,1] \longrightarrow M$ stetig und surjektiv. Dann ist q als surjektive Abbildung von kompakten T_2 Räumen eine Quotientenabbildung.

5.1. Lemma.

(1) *Sei mit den obigen Bezeichnungen $\tilde{q}$ die zugehörige Äqivalenzrelation und nehmen wir an, daß sich $\tilde{q}$ so beschreiben läßt:*

(2) *Sei $\bar{q}$ eine abgeschlossene Äquivalenzrelation auf $\acute{V}$. und es gelte:*

$$(x,t) \underset{\tilde{q}}{\sim} (y,s) \Leftrightarrow (x = y \wedge s = t) \vee (s = t = 0 \wedge x \underset{\bar{q}}{\sim} y)$$

(3) *Ist dann $\check{q} : \acute{V} \longrightarrow \acute{V}_{/\bar{q}}$ die zugehörige Quotientenabbildung. Dann ist M homöomorph zum Abbildungszylinder $\mathcal{M}_{\check{q}}$*

Beweis: Die beschriebene Situation ist nur die von 4.6 von einer anderen Seite betrachtet.

5.2. Definition einer Z-Struktur. Sei $(M, V, \acute{V})$ ein Kobordismus. Eine stetige surjektive Abbildung $q : \acute{V} \times [0,1] \longrightarrow M$ mit folgenden Eigenschaften nenne ich Z-Struktur (Z-kommt von Zylinder):

(1) Die zugehörige Äqivalenzrelation $\tilde{q}$ läßt sich so aus einer abgeschlossenen Äquivalenzrelation auf $\acute{V}$ konstruieren.

$$(x,s) \underset{\tilde{q}}{\sim} (y,t) \Leftrightarrow (x = y \wedge s = t) \vee (s = t = 0 \wedge x \underset{\bar{q}}{\sim} y)$$

(2) Der untere Rand Vist ganz in $q(\acute{V} \times 0)$ enthalten.

(3) Die Einschränkung $q|\acute{V} \times 1$ ist die Einbettung des oberen Randes

5.3. Bezeichnungen. Soweit es sich um Z-Strukturen handelt werden über dem Namen der Abbildung dieselben Zeichen angewandt wie oben, um die entsprechenden Abbildungen und Relationen zu bezeichnen.

5.4. Lemma. *Z-Strukturen lassen sich zusammensetzen.*
Genauer: Seien $(M, V, \acute{V}), (N, W, \acute{W})$ Kobordismen, $g : W \xrightarrow{\cong} \acute{V}$ ein Diffeomorphismus, $q_M : \acute{V} \longrightarrow M, q_N : \acute{W} \longrightarrow N$ Z-Strukturen. Dann legen diese Daten auf $(M, V, \acute{V}) \underset{g}{\bullet} (N, W, \acute{W})$ eine Z-Struktur $q_M \underset{g}{\bullet} q_N$ fest.

Beweis:

(1) $(N, W, \acute{W})$ ist isomorph als Kobordismus zu $\acute{V} \times [0,1] \underset{g}{\bullet} (N, W, \acute{W})$. Diese Aussage ist trivial. Ich wähle also einen Isomorphismus

$$w : (N, W,\acute{W}) \xrightarrow{\cong} \acute{V} \times [0,1] \underset{g}{\bullet} (N, W, \acute{W}), \text{ sodaß } w|Bd_2 := j_2 \circ ins_0 \circ g \text{ ist.}$$

(2) Betrachte nun die folgende Verkettung von Abbildungen:

$$\acute{W} \times [0,1] \xrightarrow[q_N]{} N \xrightarrow[w]{} N \underset{g}{\sqcup} \acute{V} \times [0,1] \xrightarrow[\mathrm{Id} \underset{g}{\sqcup} q_M]{} N \underset{g}{\sqcup} M$$

Ich behaupte $\zeta := \mathrm{Id} \underset{g}{\sqcup} q_M \circ w \circ q_N$ ist eine Z-Struktur denn:

(3) ζ ist surjektiv als Zusammensetzung surjektiver Abbildungen

(4) $\zeta|\acute{W}\times]0,1]$ ist injektiv denn:
i)$q_N|\acute{W}\times]0,1]$ist injektiv wegen der Bedingung 5.2.(1)
ii) $q_N(\acute{W}\times]0,1]) \cap W = \emptyset$ und w ist ein Isomorphismus von Kobordismen. Daraus folgt $w \circ q_N(\acute{W}\times]0,1]) \cap Bd_1(\dots) = \emptyset$.
iii) aber $\mathrm{Id} \underset{g}{\sqcup} q_M$ ist überall injektiv außer auf dem unteren Rand. Das bedeutet aber, daß ζ die Bedingung 5.2.(1) erfüllt.

(5) $Bd_1(M, V, \acute{V}) \underset{g}{\bullet} (N, W, \acute{W})$ ist ganz in $\zeta(\acute{W} \times 0)$ enthalten denn:
$q_N(\acute{W}\times 0) \supset W$ wegen der Bedingung 5.2.(2). w ist ein Isomorphismus von Kobordismen, bildet also den unteren Rand in den unteren Rand ab. $\mathrm{Id} \underset{g}{\sqcup} q_M$ erfüllt die Bedingung weil q_M sie erfüllt.

(6) $\zeta|\acute{W}$ ist die Einbettung des oberen Randes. Das sieht man leicht indem man die Bedingung an allen drei Abbildungen nachprüft.

(7) ζ hängt im Wesentlichen nicht von der Wahl von w ab. Das sieht man in 5.5. ∎

5.5. Lemma. *Einen Isomorphismus $\omega : (N, W, \acute{W}) \cong \acute{V} \times [0,1] \underset{g}{\bullet} (N, W, \acute{W})$, der eingeschränkt auf den unteren Rand $j_2 \circ ins_0 \circ g$ ist gibt, es immer.*

Beweis: Man nehme einen Kragen $\kappa : W\times[0,1[\longrightarrow N$ Die im folgenden definierten Abbildungen η_1, η_2 sind so daß $\eta_2 \underset{g}{\sqcup} \eta_1$ ein Isomorphismus ist $\eta_1 : \acute{V} \times [0,1] \longrightarrow N$ mit $\eta_1(v,t) := \kappa(g(v), \frac{t}{2})$ und $\eta_2 : N \longrightarrow N$ mit $\eta_2|N \setminus \kappa(W \times [0,1[= \mathrm{Id}$ Sei dann $\lambda : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine C^∞ Funktion $\acute{\lambda} \geq 0$ auf ganz $\mathbf{R}$ und $\lambda(0) = \frac{1}{2}$, $\lambda(1) = 1$, $\acute{\lambda}(0) = 1$, $\acute{\lambda}(1) = \frac{1}{2}$ dann gelte für $\eta_2|\kappa(W \times [0,1[$, $\eta_2(\kappa(w,t)) = \kappa(w, \lambda(t))$ Wenn man bei der Konstruktion der Differenzierbaren Struktur den Kragen κ verwendet hat, ist $\eta_2 \underset{g}{\sqcup} \eta_1$ ein Isomorphismus, die Inversion dieses Isomorphismus ist dann ein Isomorphismus ω der die Bedingung erfüllt ∎

5.6. Eindeutigkeit. Es ist sinnlos zwei Z-Strukturen zu unterscheiden die folgende Eigenschaft haben : Seien q_1, q Z-Strukturen und $h : (M, V, \acute{V}) \longrightarrow (M, V, \acute{V})$ ein Isomorphismus sodaß $q_1 = h \circ q$ gilt. Dann nenne ich beide Z-Strukturen äquivalent. Ist nun w konstruiert wie in Lemma 5.5, dann hat die Wahl des Kragens keine Auswirkungen auf die Äquivalenzklasse von $q_M \underset{g}{\bullet} q_N$, denn es gibt immer einen Isomorphismus von Kobordismen der zwei beliebige Krägen ineinander überführt.

5.7. Die Äquivalenzrelation $\overline{q_M \underset{g}{\bullet} q_N}$ auf $\acute{W}$. Man erweitere die Relation $\bar{q}_m$ auf $\acute{V}$ zu $\bar{q}_{M,total}$ auf $N \underset{g}{\sqcup} \acute{V} \times [0,1]$wobei man $\acute{V}$ mit $j_2(\acute{V} \times 0)$ identifiziert dann ist nach Lemma 4.7.

$$\overline{q_M \underset{g}{\bullet} q_N} = (q_N|_{\acute{W}\times 0})^*(\omega^*(\bar{q}_{M,total}))$$

nun ist $\omega|W = j_2 \circ ins_0 \circ g$ laut Voraussetzung Daher gilt

$$\overline{q_M \underset{g}{\bullet} q_N} = (q_N|_{\acute{W}\times 0})^*(g^*(q_{M,total}))$$

6.Morse Theorie

Bemerkung: Ich setze im Folgenden voraus, daß die Funktionen keine kritischen Punkte auf dem Rand der M.F. haben

6.1.Nicht degenerierte Funktionen.
(1) Sei $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ eine C^∞ Funktion, ξ, η Vektorfelder auf M, und $\{x \in M; df|_x = 0\}$. Dann ist $D^2 f_x(\xi, \eta) := \xi(\eta(f))_x$ nur von ξ_x, η_x abhängig und eine Symmetrische Bilinearform auf $T_x M$
Beweis:Siehe Milnor Morse Theory.
(2) *Definition*:$f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ heißt *nicht degeneriert* wenn D^2_x nicht degeneriert ist für alle $x \in M$ mit $df|_x = 0$.
(3) *Lemma:* Sei $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ nicht degeneriert, dann ist die Menge der kritischen Punkte diskret
Beweis: Sei $x \in M; df|_x = 0$, dann ist in lokalen Koordinaten $df : U_x \longrightarrow \mathbf{R}^m$ ein lokaler Diffeomorphismus und daher lokal injektiv.
(4) *Definition* Sei x ein kritischer Punkt einer nicht degenerierten Funktion f dann heißt $ind(x) := Index(D^2 f_x)$ der Index von x.

6.2. Das Morse Lemma. *Sei $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ nicht degeneriert, $x \in M$ mit $df|_x = 0$, es sei $k := ind(x)$. Dann gibt es eine Karte $(U_{morse,x}, h_{morse,x})$ (1) $U_{morse,x} \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$ (2) $h_{morse,x}(0,0) = x$ (3) $h^*_{morse,x}(f)(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ wobei mit $\vec{u}^2$ das Skalarprodukt mit sich selbst im $\mathbf{R}^m$gemeint ist analog $\vec{v}^2$.*

Bis jetzt habe ich zum leichteren Verständnis $\vec{u}, \vec{v}$ geschrieben.Für den Rest dieser Arbeit definiere ich $u \in \mathbf{R}^{m-k}$, $v \in \mathbf{R}^k$ und u^2 beziehungsweise v^2 als Skalarprodukte.

6.3 Gradientenfelder und gradientenartige Vektorfelder.
(1) Sei $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ eine C^∞ Funktion und g eine Riemann Metrik auf M so ist $g_\sharp(df)$ das Vektorfeld auf M mit der Eigenschaft $g(\xi_x, g_\sharp(df_x)) = \xi(f)|_x$ für jedes beliebige $x \in M$ und beliebige Tangentialvektoren ξ_x.
(2) Sei G_f folgendes Vektorfeld auf $M \setminus \{df = 0\}$:

$$G_f := \frac{g_\sharp(df)}{g(g_\sharp(df), g_\sharp(df))}$$

(3) $G_f(f) \equiv 1$ auf ganz $M \setminus \{df = 0\}$
(4) Ist f nicht degeneriert so läßt sich die Riemann Metrik so wählen, daß $h^*_{morse,x}(g)$ die Standardmetrik auf einer Kugel um 0 in $U_{morse,x}$ ist. $g_\sharp(df)$ ist bei allen kritischen Punkten von f. dann dort das lineare Differentialgleichungssystem $\frac{d(v,u)}{dt} = (-v, u)$
(5) *Definition*: Konstruiert man G_f nach so einer Metrik, dann heißt G_f ein *gradientenartiges Vektorfeld.* Dieser Name wird in der Literatur anders verwendet.

6.4. Einige Eigenschaften gradientenartiger Vektorfelder. Bezeichnungen übernehme ich von oben
(1) G_f hat dieselben Trajektorien wie $g_\sharp(df)$ bis auf Geschwindigkeit. Der Beweis ist trivial.
(2) *Lemma:* Ist f zusätzlich proper (dh. Das Urbild einer kompakten Menge ist kompakt), dann

endet beziehungsweise beginnt die Trajektorie von G_f durch einen Punkt $x \in M$ entweder im Rand oder in einem kritischen Punkt oder $\mathrm{Fl}^t_{G_f}(x)$ ist für $t \in \mathbf{R}$ definiert.

Beweis: Der Ausdruck führt in einen kritischen Punkt ist sinnvoll denn obwohl G_f an einem kritischen Punkt nicht definiert ist hat G_f dieselben Trajektorien wie $g_\sharp(df)$. Die sind sogar wohlbekannt in der Umgebung kritischer Punkte siehe 6.3.4.

Angenommen die Trajektorie durch x führt nicht in positiver Richtung in einen kritischen Punkt.Dann verläuft sie sicher außerhalb einer offenen Umgebung $\mathcal{U}$ der kritischen Punkte.Weil $G_f(f) \equiv 1$ ist gilt $f(\mathrm{Fl}^t_{G_f}(x)) = f(x)+t$ falls der Fluß definiert ist.Insgesamt erhält man $\mathrm{Fl}^t_{G_f}(x)$ bleibt bei endlichem t in der kompakten Menge $f^{-1}[f(x), f(x)+t] \setminus \mathcal{U}$, sofern der Fluß definiert ist.Nicht definiert kann aber unter diesen Bedingungen der Fluß nur sein wenn die Trajektorie im Rand endet. Dasselbe gilt in negativer Richtung.

6.5. Definition. Eine nicht degenerierte Funktion $f : \mathrm{Mf}(M, V, \acute{V}) \longrightarrow \mathbf{R}$ heißt Morse Funktion wenn f ein Morphismus von Kobordismen $f : (M, V, \acute{V}) \longrightarrow ([\alpha, \beta], \alpha, \beta)$ ist

6.6. Satz. *Auf jedem Kobordismus gibt es eine Morse Funktion.*

zum Beweis ist zu sagen: Dieser Satz ist zwar nicht trivial aber ein alter Hut. Ich verweise auf die Literatur über Morse Theorie oder Katastrophentheorie.

7 Konstruierte elementare Kobordismen

Einleitung: Mit Hilfe der Morse Theorie läßt sich zeigen, daß jeder Kobordismus aus einfachen sogenannten elementaren Kobordismen zusammengesetzt werden kann. Der Begriff des elementaren Kobordismus hat sich für mein Beweisverfahren als zu allgemein erwiesen.Ich verwende daher eine spezielle Konstruktionsmethode für elementare Kobordismen weil alles einen Namen haben muß wovon man sprechen will, nenne ich sie konstruierte Kobordismen. Abgekürzt k.K.

7.1 Satz Grundmodelle für konstruierte Kobordismen. *Sei V eine $m-1$ dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit $k \in \mathbf{N}, 0 \le k \le m$ und $\varphi : \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{D}^{m-k} \hookrightarrow V$ eine C^∞ Einbettung falls $k > 0$ und $\varphi := \emptyset$ falls $k = 0$.Aus diesen Informationen läßt sich ein Kobordismus $\mathcal{K}(V, k, \varphi)$ konstruieren.Ebenso bestimmt sind durch die Konstruktion eine Morse Funktion F und ein gegebenes gradientenartiges Vektorfeld.Ferner hat F nur einen kritischen Punkt vom Index k.Ist $k \neq m$ so trägt $\mathcal{K}(V, k, \varphi)$ eine Z-Struktur $q : (Bd_2(\mathcal{K}(V, k, \varphi))) \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{K}(V, k, \varphi)$ Es gilt*

$$q((Bd_2(\mathcal{K}(V, k, \varphi)) \times 0) \cong \mathbf{D}^k \underset{\varphi|\mathbf{S}^{k-1} \times 0}{\sqcup} V$$

Im Fall $k = 0$ muß man hier die Konvention $\mathbf{D}^0 = Pt$ einführen

Korollar: $\mathcal{K}(V, k\varphi)$ ist der Abbildungszylinder der Abbildung $\check{q} : Bd_2(\mathcal{K}(V, k, \varphi)) \longrightarrow \mathbf{D}^k \underset{\varphi|\mathbf{S}^{k-1} \times 0}{\sqcup} V$ außerdem ist $\mathbf{D}^k \underset{\varphi|\mathbf{S}^{k-1} \times 0}{\sqcup} V$ ein relativer CW-Komplex.

Der Beweis nimmt das ganze folgende Kapitel in Anspruch:

8 die Konstruktion der Kobordismen

Es gibt drei Fälle von denen die ersten beiden schnell behandelt sind.

8.1.

(1) $k = 0$:dann sei

$$\mathcal{K}(V, k, \varphi) \cong (\mathbf{D}^m \sqcup V \times [\alpha, \beta], V \times \alpha, \mathbf{S}^{m-1} \sqcup V \times \beta)$$

$F|V \times [\alpha, \beta] = proj_2$ und $f|\mathbf{D}^m =$ das Quadrat der Radiusfunktion mal β Die Z-Struktur auf $\mathcal{K}(V, k, \varphi)$lässt sich so beschreiben $q|V \times [0,1]$ ist Id $\times l$ wobei $l : [0,1] \xrightarrow{\cong} [\alpha, \beta]$ $l(t) = \alpha + (\beta - \alpha)t$ ist. $q|\mathbf{S}^{m-1} \times [0,1]$ lässt sich am besten in Polarkoordinaten beschreiben. $q(\omega, t) = (\omega, t)$ wobei die Koordinaten nach dem $=$ Polarkoordinaten auf $\mathbf{D}^m$ sind.

(2) $k = m$: dann ist $\varphi : \mathbf{S}^{m-1} \hookrightarrow V$ eine C^∞ Einbettung daher proper und offen und daher ein Diffeomorphismus auf eine Zusammenhangskomponente von V. Daraus folgt $V = V_1 \sqcup \mathbf{S}^{m-1}$ wobei V_1 eine $m-1$ dimensionale M.F. oder $\emptyset$ ist.

$$\mathcal{K}(V,k,\varphi) = (\mathbf{D}^m \sqcup V_1 \times [\alpha,\beta], \mathbf{S}^{m-1} \sqcup V_1 \times \alpha, V_1 \times \beta)$$

und $F|V_1 \times [\alpha,\beta] = proj_2$ $F|D^m =$ minus Quadrat der Radiusfunktion mal α

(3) Der Fall $0 \le k \le m$ wird den Rest des Kapitels beanspruchen.

8.2. Definitionen. Die folgenden Definitionen werden für den Rest der Arbeit gelten:

(1) $k, m \in \mathbf{N}$ seien natürliche Zahlen $0 \le k \le m$

(2) $u \in \mathbf{R}^{m-k}, v \in \mathbf{R}^k$ und mit u^2 beziehungsweise v^2 sei das euklidische Standardprodukt mit sich selbst gemeint

(3) Es sei $f : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \longrightarrow \mathbf{R}$ definiert durch

$$f(v,u) := u^2 - v^2$$

(4) Ebenso $r : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ definiert durch

$$r(v,u) := \sqrt{u^2 v^2}$$

(5) Sei $\tau : \mathbf{R}^k \setminus 0 \longrightarrow \mathbf{S}^{k-1}$ definiert durch

$$\tau(v) := \frac{1}{\sqrt{v^2}} v$$

(6) $\omega : \mathbf{R}^{m-k} \setminus 0 \longrightarrow \mathbf{S}^{m-k-1}$ definiert durch

$$\omega(u) := \frac{1}{\sqrt{u^2}} \cdot u$$

(7) Sei $\pi : \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{R}^{m-k}$ definiert durch

$$\pi(\tau,\omega,r) := (\tau, r \cdot \omega)$$

(8) Sei $P : \mathbf{S}^{m-k-1} \times (\mathbf{R}^k \setminus 0) \longrightarrow \mathbf{S}^{k-1} \times (\mathbf{R}^{m-k} \setminus 0)$ definiert durch

$$P(\omega, v) := (\tau(v), \sqrt{v^2} \cdot \omega)$$

(9) $Q : \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$ definiert durch

$$Q(\tau,\omega,r,f) := (\sqrt{\frac{-f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2}} \cdot \tau, \sqrt{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2}} \cdot \omega)$$

8.3. Lemma. (1)

$$Q|\mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times (\mathbf{R}^+ \setminus 0) \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \setminus (0 \times \mathbf{R}^{m-k} \cup \mathbf{R}^k \times 0)$$

ist reell bianalytisch.
(2) *Q ist surjektiv*

Beweis: (1) Nachzurechnen ist folgende Behauptung: $Q^{-1}(v,u) := (\tau(v), \omega(u), r(v,u), f(v,u))$
Die rechte Seite ist offensichtlich auf $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \setminus (0 \times \mathbf{R}^{m-k} \cup \mathbf{R}^k \times 0)$ wohldefiniert.
Sei $(v,u) = Q(\tau,\omega,r,f)$ und $r \ge 0$

$$\text{also } (v,u) = (\sqrt{\frac{-f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2}} \cdot \tau, \sqrt{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2}} \cdot \omega)$$

$$\text{aus } 0 \leq r \text{ folgt } \|\sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2}\| \geq \|\frac{f}{2}\| \text{ sodaß } :Q^{-1}(v,u) \quad \text{wohldefiniert ist}$$

$$\text{offensichtlich ist } \tau(v) = \tau, \omega(u) = \omega$$

$$r(v,u) = \sqrt{(\frac{-f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2}) \cdot (\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2})} = \sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2 - \frac{f^2}{4}} = r$$

$$\text{ebenso } f(v,u) = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2} - (\frac{-f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2}) = f$$

Sei andererseits (v,u) gegeben sodaß $r(v,u) \geq 0$ dann sind $\tau(v), \omega(u)$ definiert und

$$Q \circ Q^{-1}(v,u) := Q(\tau(v), \omega(u), r(v,u), f(v,u))$$

$$Q(\tau(v), \omega(u), r(v,u), f(v,u)) = (\sqrt{\frac{-u^2 - v^2}{2} + \sqrt{(\frac{u^2 - v^2)^2}{4} + (\sqrt{v^2 \cdot u^2})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2}} \cdot v,$$
$$\sqrt{\frac{u^2 - v^2}{2} + \sqrt{\frac{(u^2 - v^2)^2}{4} + (\sqrt{v^2 \cdot u^2})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2}} \cdot u) = (v,u).$$

(2) Q ist surjektiv, denn ist $(v,u) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$ gegeben so ist entweder $r(v,u) \geq 0$ dann ist $Q^{-1}(v,u)$ definiert, oder $v = 0$, oder $u = 0$, oder beide sind 0. Ist das der Fall so kann man ein Urbild, finden indem man, falls $u = 0$ ω beliebig wählt, für $v = 0$ τ beliebig wählt. ∎

8.4. Definition. Sei

$$U_1 := \{(v,u) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} : r(v,u) \leq 1 + \varepsilon, f \in]\alpha_1, \beta_1[\}$$

Ebenso

$$U := \{(v,u) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} : r(v,u) \leq 1, f \in]\alpha, \beta[\}$$

Ebenso ist durch

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times (\mathbf{R}^+ \setminus 0) \times \mathbf{R} & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times (\mathbf{R}^+ \setminus 0) \times \mathbf{R} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi \times \mathrm{Id}} & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\
\mathbf{S}^{k-1}\mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{R} & \xleftarrow[\psi]{} & \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \setminus (\mathbf{R}^{k-1} \times 0 \cup 0 \times \mathbf{R}^{m-k})
\end{array}$$

die bianalytische Abbildung ψ definiert.

8.5. Damit läßt sich eine T_2 Mannigfaltigkeit konstruieren. zunächst läßt sich $\varphi : \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{D}^{m-k} \longrightarrow V$ sicher erweitern zu einer Abbildung $\varphi : \mathbf{S}^{k-1} \times ((1+\varepsilon) \cdot \overset{o}{\mathbf{D}}{}^{m-k}) \longrightarrow V$
Sei also :

$$\tilde{\mathcal{M}} := U_1 \bigsqcup_{(\varphi \times \mathrm{Id}) \circ \psi} (V \setminus \varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times]\alpha_1, \beta_1[$$

8.6.lemma. *$\tilde{\mathcal{M}}$ ist eine T_2 Mannigfaltigkeit und hat einen C^∞ Atlas, sodaß die natürlichen Einbettungen j_1, j_2 die vom Verkleben entlang einer Einbettung stammen (siehe3.1) C^∞ Einbettungen sind.*

Beweis:

(1) Aus einem C^∞ Atlas $\{(U_\sigma, \phi_\sigma), \sigma \in \Sigma\}$ von $(V \setminus \varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times]\alpha_1, \beta_1[$ konstruiert man leicht einen Atlas $\{(U_\sigma, \phi_\sigma), \sigma \in \Sigma\} \cup \{(U_1, j_1\}$ von $\tilde{\mathcal{M}}$ denn .

$$\tilde{\mathcal{M}} \setminus j_1(U_1) \cong j_2((V \setminus \varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times]\alpha_1, \beta_1[\setminus \psi(U_1^o))$$

aber $(V \setminus \varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times]\alpha_1, \beta_1[\setminus \psi(U_1 \setminus \{r = 0\})$ ist eine abgeschlossene Menge die saturiert ist bezüglich der Kleberelation.Also ist $j_1(U_1)$ offen

Dieser Atlas ist C^∞. Das möge der zweifelnde Leser durch Diagrammjagd im folgenden kommutativen Diagramm nachprüfen denn ein richtiggehender Beweis ist sehr langweilig.

$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \arrow[r, "j1"] & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[d, equal] \\
 & U_1 \setminus \{r = 0\} \arrow[u, "incl"] \arrow[r] \arrow[d, "(\varphi \times \mathrm{Id}) \circ \psi"'] & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[d, equal] \\
U_\sigma \arrow[r, "\phi_\sigma"'] & (V \setminus \varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times]\alpha_1, \beta_1[\arrow[r, "j_2"'] & \tilde{\mathcal{M}}
\end{tikzcd}$$

Dabei ist natürlich zu beachten, daß $(\varphi \times \mathrm{Id}) \circ \psi$ eine C^∞ Einbettung ist.

(2) $\tilde{\mathcal{M}}$ ist ein T_2-Raum.
Zum Beweis untersuche ich die Trennbarkeit zweier Punkte $p_1, p_2 \in \tilde{\mathcal{M}}$. Sind beide Punkte in $j_1(U1$ bzw. in $j_2((V \setminus \varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times]\alpha_1, \beta_1[)$ so sind sie getrennt, weil beide Räume T_2 sind. Ist ein Punkt aber nicht in $j_2((V \setminus \varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times]\alpha_1, \beta_1[)$, dann ist er in $j_1(U1 \cup \{r = 0\}$ und damit sicher getrennt von einem Punkt der nicht in $j_1(U1$ ist

8.7.. *Sei $F : \tilde{\mathcal{M}} \to \mathbf{R}$ definiert durch $j_1^\star(F) = f$ und $j_2^\star(F) = proj_2$. Dann ist F wohldefiniert und eine nicht degenerierte C^∞ Funktion mit genau einem kritischen Punkt $j_1(0,0)$ vom Index k*

Folgerung : $F^{-1}([\alpha, \beta])$ ist ein Kobordismus mit den in 7.1 geforderten Eigenschaften.

Ein Beweis: ist hier glaube ich nicht notwendig.

8.8. Lemma. *Sei $K(V, k, \varphi) := (F^{-1}[\alpha, \beta], F^{-1}(\alpha), \tilde{f}^{-1}(\beta))$. Dann gilt:*

(1) *$K(V, k, \varphi)$ kann aus dem folgenden Klebediagramm erhalten werden.*

$$\begin{tikzcd}
U \\
U \setminus \{r = 0\} \arrow[u, "incl"'] \arrow[d, "(\varphi \times Id) \circ \psi"'] \\
(V \setminus \varphi(S^{k-1} \times 0)) \times [\alpha, \beta]
\end{tikzcd}$$

(2) *Es gibt Einbettungen*

$$p_- : V \times [\alpha, \beta] \setminus (\varphi(S^{k-1} \times 0) \times [0, \beta]) \to \mathcal{MF}(K(V, k, \varphi)),$$
$$p_+ : \acute{V} \times [\alpha, \beta] \setminus (\varphi'(S^{m-k-1} \times 0) \times [\alpha, 0]) \to \mathcal{MF}(K(V, k, \varphi)),$$

wobei $\acute{V}$ der obere Rand des Kobordismus $K(V, k, \varphi)$ ist, und wobei φ' bei der Konstruktion definiert wird.

Beweis: (1) Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "Id"] & U \arrow[r, "incl"] & U_1 \\
U \setminus \{r < \varepsilon\} \arrow[u, "incl"'] \arrow[r, "incl"] \arrow[d, "(\varphi \times Id) \circ \psi"'] & U \setminus \{r = 0\} \arrow[u, "incl"'] \arrow[r, "incl"] \arrow[d, "(\varphi \times Id) \circ \psi"'] & U_{1,0} \arrow[u, "incl"'] \arrow[d, "(\varphi \times Id) \circ \psi"'] \\
V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \varepsilon \cdot \overset{o}{\mathbf{D}}{}^{m-k}) \times [\alpha, \beta] \arrow[r, "incl"] & V \setminus \varphi(S^{k-1} \times 0) \times [\alpha, \beta] \arrow[r, "incl"] & V \setminus \varphi(S^{k-1} \times 0) \times]\alpha_1, \beta_1[
\end{tikzcd}$$

Die linke Seite ist nach den Standardsätzen der Topologie ein kompakter Hausdorff Raum und die Zusammensetzung $\mathrm{Id} \circ incl \sqcup_f incl \circ incl$ ist injektiv ihr Bild ist genau $F^{-1}[\alpha,\beta]$.Daraus folgt $\mathrm{Id} \circ incl \sqcup_f incl \circ incl$ ist ein Homöomorphismus vom pushout der linken Spalte nach $F^{-1}[\alpha,\beta]$ weil $\tilde{\mathcal{M}}$ ein T_2-Raum ist. $incl \sqcup_f incl$: Pushout der mittleren Spalte $\longrightarrow$ Pushout der rechten Spalte ist injektiv und stetig. Das bedeutet die Topologie am Pushout der mittleren Spalte könnte höchstens feiner sei als die auf $F^{-1}[\alpha,\beta]$. Aber weil $\mathrm{Id} \sqcup_f incl$: Pushout der linken Spalte $\longrightarrow$ Pushout der mittleren Spalte injektiv surjektiv und stetig ist ist die Topologie des Pushout der mittleren Spalte gröber gleich der Topologie auf dem Pushout der linken Spalte und die ist gleich der auf $F^{-1}[\alpha,\beta]$.

(2)

Sublemma. $\psi : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \setminus \{r=0\} \longrightarrow \mathbf{S}^{k-1} \times (\mathbf{R}^{m-k} \setminus 0) \times \mathbf{R}$ *hat eine analytische Fortsetzung* $\psi_- : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \setminus (0 \times \mathbf{R}^{m-k}) \longrightarrow \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{R} \setminus (\mathbf{S}^{k-1} \times 0 \times \mathbf{R}^+)$
$P \circ \psi : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \setminus \{r=0\} \longrightarrow \mathbf{S}^{m-k-1} \times (\mathbf{R}^k \setminus 0) \times \mathbf{R}$ *hat eine analytische Fortsetzung* $\psi_+ : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \setminus (0 \times \mathbf{R}^k) \longrightarrow \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} \setminus (\mathbf{S}^{m-k-1} \times 0 \times \mathbf{R}^-)$.
Diese beiden Abbildungen sind reell bianalytisch.

Der Beweis des Sublemmas folgt am Ende dieses Abschnitts und ist nur eine Rechnung. Interessant sind aber die Folgerungen aus dem Sublemma:
Zunächst sind $F^{-1}([\alpha,\beta]) \setminus j_1((\mathbf{R}^k \times 0) \cup U)$ und $F^{-1}([\alpha,\beta]) \setminus j_1((0 \times \mathbf{R}^{m-k}) \cup U)$ wohldefinierte Untermannigfaltigkeiten von $F^{-1}[\alpha,\beta]$. Die Einbettungen deren Existenz hier bewiesen werden soll, definiere ich erst durch die folgenden Diagramme als Abbildungen.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{D}^{m-k} \times [\alpha,\beta] \setminus (\mathbf{S}^{k-1} \times 0 \times [0,\beta] \arrow[r, "\psi_-^{-1}"] & U \\
\mathbf{S}^{k-1} \times (\mathbf{D}^{m-k} \setminus 0)[\alpha,\beta] \arrow[u, "incl"] \arrow[r, "\psi^{-1}"] \arrow[d, "\varphi \times \mathrm{Id}"'] & U \setminus \{r=0\} \arrow[u, "incl"'] \arrow[d, "(\varphi \times \mathrm{Id}) \circ \psi"] \\
V \setminus (\varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times [\alpha,\beta] \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & V \setminus (\varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times [\alpha,\beta]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^{k} \times [\alpha,\beta] \setminus (\mathbf{S}^{m-k-1} \times 0 \times [\alpha,0] \arrow[r, "\psi_+^{-1}"] & U \\
\mathbf{S}^{k-1} \times (\mathbf{D}^{m-k} \setminus 0)[\alpha,\beta] \arrow[u, "incl \circ (p \times \mathrm{Id})"] \arrow[r, "\psi^{-1}"] \arrow[d, "ph \times \mathrm{Id}"'] & U \setminus \{r=0\} \arrow[u, "incl"'] \arrow[d, "(\varphi \times \mathrm{Id}) \circ \psi"] \\
V \setminus (\varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times [\alpha,\beta] \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & V \setminus (\varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)) \times [\alpha,\beta]
\end{tikzcd}$$

Auf $\mathbf{R}^k \times 0$ Beziehungsweise $0 \times \mathbf{R}^{m-k}$ entstehen beim Verkleben keine Relationen. Das heißt aber, daß die linken Spalten der beiden Diagramme homöomorph den anfangs erwähnten Untermannigfaltigkeiten sind und $\psi_+ \sqcup_f \mathrm{Id} =: p_+$ sowie $\psi_- \sqcup_f \mathrm{Id} =: p_-$ Einbettungen sind.Aus den Diagrammen ist auch ersichtlich, daß

$$Bd_2(\mathcal{K}(V,k,\varphi)) \cong \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^k \sqcup_{P \circ \varphi} V \setminus (\mathbf{S}^{k-1} \times 0).$$

Definiert man φ' als $j_1 | \mathbf{S}^{m-k-1} \times 0$ wobei mit j_1 die natürliche Einbettung gemeint ist bezüglich der obigen Verklebung, so erhält man(durch genaueres hinsehen), daß die linke Spalte des zweiten Diagramms genau die in Lemma 8.8 Punkt 2 behauptete Domäne von p_+ ist.

die Rechnung zum Sublemma.

$$\psi(v,u) = (\tau(v), r(v,u)\cdot\omega(v,u), f(v,u))$$

$$P^{-1}\circ\psi(v,u) = (\omega(u), r(v,u)\cdot\tau(v,u), f(v,u))$$

Diese Formeln folgen aus den Definitionen siehe 8.2
Durch Einsetzen entsteht daraus :

$$\psi(v,u) = (\tau(v), \sqrt{v^2\cdot u^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2}}\cdot u, f(v,u))$$

$$P^{-1}\circ\psi(v,u) = (\omega(u), \sqrt{v^2\cdot u^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{v^2}}\cdot v, f(v,u))$$

in der ersten Formel wird $f(v,u)\leq 0 \Rightarrow v^2\geq 0$ vorausgesetzt in der zweiten $f(v,u)\geq 0\Rightarrow u^2\geq 0$.daher ist alles auf den jeweiligen Definitionsbereichen wohldefiniert und analytisch
Es gibt auch eine analytische Umkehrabbildung

$$\psi^{-1}(\tau,u,f) = Q(\tau,\omega(u),\sqrt{u^2},f) =$$

$$(\sqrt{\frac{-f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+\sqrt{u^2}^2}}\cdot\tau, \sqrt{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+\sqrt{u^2}^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2}}\cdot u) =$$

$$(\sqrt{\frac{-f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}}\cdot\tau, \sqrt{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2}}\cdot u)$$

Nun gilt es nachzuprüfen, daß

$$\sqrt{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2}} = \sqrt{\frac{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}}{u^2}}$$

eine analytische Abbildung ist.Dazu betrachte ich $\frac{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}}{u^2}$ als analytische Funktion von u^2 (also von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$).Es gilt $\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}$ ist analytisch ausser bei $\frac{f^2}{4}=u^2=0$ letzteres ist wegen der Voraussetzung $f\leq 0$ nicht der Fall.Auch gilt wegen $f\leq 0$ bei $u^2=0$ $\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}=0$, somit ist $\frac{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}}{u^2}$ analytisch in f und u^2 und

$$\left.\frac{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}}{u^2}\right|_{\{u^2=0\}} =$$

$$\left.\frac{d}{d(u^2)}\right|_{\{u^2=0\}}(\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}) =$$

$$\left.\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}}\right|_{\{u^2=0\}} = \frac{1}{||f||}$$

Letzteres ist sicher nirgends $=0$ Daraus folgt in einer Umgebung von $\{u^2=0\}$ ist auch $\sqrt{\frac{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}+u^2}}{u^2}}$ analytisch.Überall sonst ist aber schon längst bewiesen daß ψ^{-1} existiert und analytisch ist Für $f\geq 0$ und $(\psi\circ P^{-1})^{-1}$ verläuft die Rechnung völlig analog. ∎

8.9. Definition eines gradientenartigen Vektorfeldes. Sei $G_{(V,k,\varphi)}$ ein Vektorfeld auf $\mathrm{Mf}(\mathcal{K}(V,k,\varphi)) \setminus j_1(0)$, sodaß

$$j_1^*(G) = 2 \cdot \frac{1}{u^2+v^2} \cdot (-v,u)$$

$$j_2^*(G) = \text{das Einheitsvektorfeld in Intervallrichtung}$$

G ist wohldefiniert, denn sei $\theta : V \times [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbf{R}^1$ eine C^∞ Funktion sodaß gilt $\theta(v,t) = \tilde{\theta}(v)$ wobei $\tilde{\theta} \in C^\infty(V,\mathbf{R}^1), v \in v$ sein soll dann gilt $2 \cdot \frac{1}{u^2+v^2} \cdot (-v,u)(j_1^{-1} \circ j_2)^*(\theta) = 0$ $2 \cdot \frac{1}{u^2+v^2} \cdot (-v,u)(f) = 1$ ebenso wie $\partial_t(\theta) = 0$ und $\partial_t(proj_2) = 1$ dann stimmen die beiden auf lokalen Koordinatenfunktionen auch überein Außerdem ist damit schon gezeigt daß G ein gradientenartiges Vektorfeld ist.

9. Die Konstruktion der $\mathcal{Z}$-Struktur auf $\mathcal{K}(V,k,\varphi)$ im Fall $0 \leq k \leq m$

9.1. Definition. Sei $\Pi : [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{\cong} [0,1] \times [\alpha,\beta]$ definiert durch folgendes:

$$\Pi_1 : [0,1] \hookrightarrow [0,1] \times \beta \subset \mathbf{R} \times \beta \subset \mathbf{R}^2$$

$$\Pi_0 : [0,1] \hookrightarrow 0 \times [\alpha,\beta] \cup [0,1] \times \alpha$$

$$\Pi_0(r) = (0, 2\alpha \cdot r) \text{ falls } r \leq \frac{1}{2} \Pi_0(r) = (2r-1,\alpha) \text{ falls } r \geq \frac{1}{2}$$

$$\Pi_1(r) = (r,\beta)$$

$$\Pi(r,t) := (1-t)\cdot \Pi_0(r) + t \cdot \Pi_1(r)$$

also $\Pi(r,t)$ liegt auf der Strecke von $\Pi_0(r)$ nach $\Pi_1(r)$ diese Strecken schneiden einander nicht was man durch eine Zeichnung leicht sieht. Ein Beweis läßt sich nur durch eine umständliche Rechnung bringen die ich dem Leser gern sparen würde.Da $[0,1] \times [0,1]$ kompakt ist folgt aus Bijektivität daß Π ein Homöomorphismus ist.Injektivität ist offensichtlich wenn man voraussetzt, daß sich die Strecken nicht schneiden.Auch Surjektivität entnimmt man am besten der Zeichnung.

9.2.Die Definition der zur $\mathcal{Z}$-Struktur gehörigen Abbildung eingeschränkt auf $\acute{V} \setminus (j_1(U) \cap \acute{V}$ ist ganz primitiv. Nämlich:

$$q(v',t) := p_+(v', \alpha + (\beta-\alpha)t)$$

9.3.Auf $j_1(U)$ muß man mit Hilfe von Π eine Abbildung finden die oben definierte ergänzt. und geeignete Bedingungen erfüllt Da j_1 eine Einbettung ist kann man beqemerweise $j_1(U)$ durch U ersetzen.

Behauptung und erster Konstruktionsschritt.
Sei:

$$\pi_1 : \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^k, \pi_1(\tau,\omega,r) := (\omega, r\cdot t)$$

Der untere waagrechte Pfeil $\tilde{\Pi}$ im folgenden Diagramm ist wohldefiniert

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times [0,1] \times [0,1] & \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\mathrm{Id}\times\Pi} & \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times [0,1] \times [\alpha,\beta] \\
{\scriptstyle \pi_1\times\mathrm{Id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\
\mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^k \times [0,1] & \xrightarrow[\tilde{\Pi}]{} & U
\end{array}$$

Beweis: Sofern $\tilde{\Pi}$ als Abbildung definiert ist so ist es stetig denn $\pi_1 \times \mathrm{Id}$ und Q sind Quotientenabbildungen. Außerhalb von $\mathbb{S}^{m-k-1} \times 0 \times [0,1]$ ist nichts zu untersuchen, denn dort ist $(\pi_1 \times \mathrm{Id})^{-1}$ als Abbildung definiert.
Sei $(\omega, 0, t) \in \mathbb{S}^{m-k-1} \times 0 \times [0,1]$ beliebig so ist $(\pi_1 \times \mathrm{Id})^{-1}(\omega, 0, t) = \mathbb{S}^{k-1} \times (\omega, 0, t)$

$$\Pi(0,t) = (1-t) \cdot (0,0) + t \cdot (0, \beta) = (0, \beta \cdot t)$$

$$Q(\tau, \omega, 0, \beta \cdot t) = (\sqrt{-\frac{\beta \cdot t}{2} + \sqrt{\frac{(\beta \cdot t)^2}{4} + 0^2}} \cdot \tau, \sqrt{\frac{\beta \cdot t}{2} + \sqrt{\frac{(\beta \cdot t)^2}{4} + 0^2}} \cdot \omega) =$$
$$= (0, \sqrt{\frac{\beta \cdot t}{2}} \cdot \omega)$$

Letzteres hängt nicht von der Wahl von τ ab. Damit ist $\tilde{\Pi}$ definiert. ∎

9.4.. $j_1 \circ \tilde{\Pi}$ *erfüllt sämtliche Voraussetzungen für die Konstruktion einer Z-Struktur als da sind*

(1) $j_1 \circ \tilde{\Pi}$ *ergänzt die Abbildung in 9.2.*
(2) $j_1 \circ \tilde{\Pi} | \mathbb{S}^{m-k-1} \times \mathbb{D}^k \times]0,1]$ *ist injektiv*
(3) $V \cap j_1(U) \subset j_1 \circ \tilde{\Pi}(\mathbb{S}^{m-k-1} \times \mathbb{D}^k \times 0)$
(4) $j_1 \circ \tilde{\Pi} | \mathbb{S}^{m-k-1} \times \mathbb{D}^k \times 1 = j_1 | \{f = \beta\}$

Beweis: (1)

$$j_1 \circ \tilde{\Pi} | \mathbb{S}^{m-k-1} \times \partial \mathbb{D}^k \times [0,1] =$$
$$= p_+(v', \alpha + (\beta - \alpha)t) | \varphi'(\mathbb{S}^{m-k-1} \times \partial \mathbb{D}^k \times [0,1])$$

erhält man durch Einsetzen

(2) Außerhalb von $\pi_1 \times \mathrm{Id}(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{m-k-1} \times \Pi^{-1}(0 \times [\alpha, \beta]))$ ist $\tilde{\Pi}$ injektiv weil dort $Q \circ \mathrm{Id} \times \mathrm{Id} \times \Pi$ injektiv ist. $\Pi^{-1}(0 \times [\alpha, \beta]) = (0 \times [0,1]) \cup ([0,1] \times 0)$. Auf $\mathbb{S}^{m-k-1} \times 0 \times [0,1]$ gilt

$$\tilde{\Pi}(\omega, 0, t) = (0, \sqrt{\frac{\beta \cdot t}{2}} \cdot \omega)$$

wie schon oben berechnet wurde. daher ist $\tilde{\Pi}$ auf $\mathbb{S}^{m-k-1} \times 0 \times]0,1]$ injektiv.

(3) Hier ist zu zeigen, daß $[0,1] \times \alpha \subset \Pi([0,1] \times 0)$ ist, denn $\tilde{\Pi}$ bildet $\mathbb{S}^{m-k-1} \times \mathbb{D}^k \times 0$ auf$Q(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{m-k-1} \times (\Pi([0,1] \times 0))$ ab und $V \cap j_1(U) = j_1 \circ Q(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{m-k-1} \times [0,1] \times \alpha)$. Die Abbildung $\tilde{\Pi} | \mathbb{S}^{m-k-1} \times \mathbb{D}^k \times 0$ ist aber das interessanteste an dieser Konstruktion und die Rechnung zu diesem Beweis ist in der folgenden Untersuchung von $\tilde{\Pi} | \mathbb{S}^{m-k-1} \times \mathbb{D}^k \times 0$ enthalten.

9.5.Eine Beschreibung von $\tilde{\Pi} | \mathbb{S}^{m-k-1} \times \mathbb{D}^k \times 0$ und damit eine Beschreibung der zur *Z*-Struktur $q_{(V,k,\varphi)}$ gehörigen Äquivalenzrelation $\bar{q}_{(V,k,\varphi)}$. Sei $(\omega, v, 0) \in \mathbb{S}^{m-k-1} \times \mathbb{D}^k \times 0$. im Fall $v = 0$ ist $\tilde{\Pi}(\omega, 0, t) = (0, \sqrt{\frac{\beta \cdot t}{2}} \cdot \omega)$ wie schon vorher berechnet also

$$\tilde{\Pi}(\omega, 0, 0) = (0, 0)$$

Ansonsten gilt

$$(\pi_1 \times \mathrm{Id})^{-1}(\omega, v, 0) = (\tau(v), \omega, \sqrt{v^2}, 0)$$

daher gilt

$$\tilde{\Pi}(\omega, v, 0) = Q(\tau(v), \omega, \Pi(\sqrt{v^2}, 0) =$$

im Fall $\sqrt{v^2} \leq \frac{1}{2}$

$$= (\sqrt{-\alpha \cdot \sqrt{v^2} + \sqrt{(\alpha \cdot \sqrt{v^2})^2}} \cdot \sqrt{\alpha \cdot \sqrt{v^2} + \sqrt{(\alpha \cdot \sqrt{v^2})^2}} \cdot \omega) =$$

$$(\sqrt{2\alpha \cdot \sqrt{v^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2}} \cdot v, 0)$$

$$(\sqrt{2\alpha} \cdot v, 0)$$

im Fall $\sqrt{v^2} \geq \frac{1}{2}$

$$= Q(\tau(v), \omega, 2\sqrt{v^2} - 1, \alpha) \Rightarrow$$

$$j_1 \circ \tilde{\Pi}(\omega, v, 0) = \varphi(\tau(v), \omega, 2\sqrt{v^2} - 1, \alpha)$$

Das Ergebnis ist also $\mathbf{S}^{m-k-1} \times \frac{1}{2} \cdot \mathbf{D}^k \times 0$ wird auf $j_1(U \cap \mathbf{R}^k \times 0$ abgebildet das ist eine topologische $\mathbf{D}^k$ deren Rand genau $\varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0)$ ist.
Korollar: Es gibt einen Deformationsretrakt von$\mathcal{K}(V, k, \varphi)$ nach $V \cup j1(U \cap \mathbf{R}^k \cong \mathbf{D}^k \underset{\varphi|\mathbf{S}^{k-1}\times 0}{\sqcup} V$
Letzteres ist ein relativer CW-Komplex

9.6.Feststellung. *Die Quotientenrelation $\bar{q}_{(V,k,\varphi)}$ auf $\acute{\varphi}(\mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^k)$ ist*
für $\sqrt{v^2} \leq \frac{1}{2}$

$$(\omega, v) \underset{\bar{q}(V,k,\varphi)}{\sim} (\omega_1, v_1) \Leftrightarrow (v = v_1)$$

für $\sqrt{v^2} \geq \frac{1}{2}$

$$(\omega, v) \underset{\bar{q}(V,k,\varphi)}{\sim} (\omega_1, v_1) \Leftrightarrow ((\omega, v) = (\omega_1, v_1))$$

und sonst auf dem restlichen $\acute{V}$ trivial.

Die eigentliche Konstruktion der konstruierten Kobordismen

Sei $n \in \mathbf{N}$ Sei (V, k, φ) wie vorher mit dem einzigen Unterschied, daß φ im Fall $k \geq 0$ eine Einbettung $\varphi : n \times \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{D}^{m-k} \hookrightarrow V$ ist.Im Fall $k = 0$ ersetzt man φ durch n.
Nun definiere ich alles was bis jetzt über konstruierte Kobordismen gesagt wurde so daß die bisherige Definition zum Spezialfall $n = 1$ wird. Alles läßt sich übertragen und alle Beweise funktionieren auch wenn man an die Richtige Stelle $n\times$ schreibt.Nur im Fall $k = 0$ ist die Definition
$\mathcal{K}(V, 0, n)$ nenne ich folgenden Kobordismus

$$(V \times [\alpha, \beta] \sqcup (n \times \mathbf{D}^m), V \times \alpha, V \times \sqcup(n \times \mathbf{S}^{m-1}))$$

Die Definition von F und der Z-Struktur $q_{(V,0,n)}$ ist auf jeder einzelnen $\mathbf{D}^m$ gleich wie auf der $\mathbf{D}^m$ in Kapitel8 (1) Genau das Gleiche gilt für $k = m$ und 8.1 (2)
Bei $0 \leq k \leq m$ definiert man

$$\mathcal{K}(V, k, \varphi) = n \times U \underset{(\varphi\times\mathrm{Id})\circ(\psi\times\mathrm{Id}_n}{\sqcup} V \setminus \varphi(n \times \mathbf{S}^{k-1} \times 0)$$

Alle Argumente die für $n = 1$ gelten lassen sich durch ersetzen von $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}, U_1, U_1^o, \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1}, \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{D}^{m-k}, \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^k$ durch $n \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}, n \times U_1, n \times U_1^o, n \times \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{S}^{m-k-1}, n \times \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{D}^{m-k}, n \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^k$ übertragen, sodaß $\mathcal{K}(V, k, \varphi)$ ein C^∞ Kobordismus ist. Die Z-Struktur $q_{(V,k,\varphi)}$ wird vermittels $\mathrm{Id}_n \times \tilde{\Pi} : n \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^k \times [0,1] \longrightarrow n \times U$ konstruiert, und ergibt daher dieselbe Äqivalenzrelation $\bar{q}_{(V,k,\varphi)}$ auf jeder einzelnen $\mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^k$

10. Die Zusammensetzung von konstruierten Kobordismen und der zugehörige CW- Komplex

10.1. Definition. Seien $(V, k, \varphi), (V_1, k_1, \varphi_1)$ konstruierte Kobordismen, $k_1 \geq k$, es sei $g : V_1 \overset{\cong}{\longrightarrow} \acute{V}$ ein Diffeomorphismus, so nenne ich $(V, k, \varphi) \underset{g}{\bullet} (V_1, k_1, \varphi_1)$ die Zusammensetzung der beiden konstruierten Kobordismen längs g und

$$\mathcal{K}((V, k, \varphi) \underset{g}{\bullet} (V_1, k_1, \varphi_1)) :=$$

$$\mathcal{K}(V,k,\varphi)\underset{g}{\bullet}\mathcal{K}(V_1,k_1,\varphi_1)$$

mit der Zusätzlichen Bedingung, daß die C^∞ Struktur nach Krägen konstruiert wird, die man mit $G_{(V,k,\varphi)}$ konstruiert
zu $G_{(V_1,k_1,\varphi_1)}$ siehe Definition 8.9.

Auf diesem Konstrukt gibt es eine Morse Funktion F mit genau zwei kritischen Werten aber vor allem eine Z-Struktur

$$q_{(V,k,\varphi)}\underset{g}{\bullet}q_{(V_1,k_1,\varphi_1)},$$

wozu die letzte Bedingung nicht nötig wäre. Sei $(V_2,k_2,\varphi_2), k_2\geq k_1$ und $g_1: V_2 \xrightarrow{\cong} \acute{V}_1$ ein Diffeomorphismus so nenne ich $(V,k,\varphi)\underset{g}{\bullet}(V_1,k_1,\varphi_1)\underset{g_1}{\bullet}(V_2,k_2,\varphi_2)$ die Zusammensetzung der konstruierten Kobordismen längs g und g_1

$$\mathcal{K}((V,k,\varphi)\underset{g}{\bullet}(V_1,k_1,\varphi_1))\underset{g_1}{\bullet}(V_2,k_2,\varphi_2)):=$$
$$\mathcal{K}(V,k,\varphi)\underset{g}{\bullet}\mathcal{K}(V_1,k_1,\varphi_1)\underset{g_1}{\bullet}\mathcal{K}(V_2,k_2,\varphi_2)$$

Auf diesem Konstrukt gibt es eine Morse Funktion F mit genau drei kritischen Werten aber vor allem eine Z-Struktur

$$q_{((V,k,\varphi)}\underset{g}{\bullet}q_{(V_1,k_1,\varphi_1)}\underset{g_1}{\bullet}q_{(V_2,k_2,\varphi_2)}$$

und so weiter für endlich viele. Maximal können es $m+1$ konstruierte Kobordismen sein, aber bei Index m stimmt die Aussage mit der Z-Struktur nicht mehr.

10.2. Lemma:. *Sei $(M,V,\acute{V})$ ein Kobordismus mit einer Z-Struktur ζ so daß $\zeta(\acute{V}\times 0)=P\subset M$ und (P,V) ein relativer CW-Komplex der Dimension l. Sei fernerk $\geq l$, $g: V_1\longrightarrow \acute{V}$ ein Diffeomorphismus und (V_1,k,φ) ein konstruierter Kobordismus. Dann hat die Z-Struktur $\zeta\underset{g}{\bullet}q_{(V_1,k,\varphi)}$ folgende Eigenschaft $\zeta\underset{g}{\bullet}q_{(V_1,k,\varphi)}(\acute{V}_1\times 0)$ ist*

$$n\times \mathbf{D}^k \bigsqcup_{\zeta o in_s o \varphi|\mathbf{S}^{k-1}} P$$

und somit ein Relativer CW-Komplex.

Beweis: Zur Erinnerung $\zeta\underset{g}{\bullet}q_{(V_1,k,\varphi)}$ ist definiert als die Zusammensetzung:

$$\acute{V}_1\times[0,1]\xrightarrow{q_{(V_1,k,\varphi)}}\mathrm{Mf}(\mathcal{K}(V_1,k,\varphi))\xrightarrow{\cong}\mathrm{Mf}(\mathcal{K}(V_1,k,\varphi))\underset{g}{\sqcup}\acute{V}\times[0,1]\xrightarrow{\mathrm{Id}\sqcup_g\zeta}\mathrm{Mf}(\mathcal{K}(V_1,k,\varphi))\underset{g}{\sqcup}M$$

Dabei wird auf $\acute{V}_1\times 0$ die Äquivalenzrelation $(g^*(\bar{\zeta}))_{total}$ angewandt also eine Äqivalenzrelation auf $n\times\mathbf{D}^k \bigsqcup_{\varphi|\mathbf{S}^{k-1}\times 0} V_1$die außer auf V_1 trivial ist damit sind die k-Zellen richtig geklebt da die jeweilige charakteristische Abbildung der k-Zelle am Inneren injektiv ist.

10.3. SATZ: Der Zusammenhang zwischen konstruierten Kobordismen und CW-Komplexen. *Es sei Γ eine Zusammensetzung von konstruierten Kobordismen wie in 10.1, definiert von höchstens Index $m-1$ so läßt sich aus den gegebenen Daten eindeutig ein relativer CW-Komplex $(\mathcal{P}_\Gamma, Bd_1(\mathcal{K}(\Gamma))$ konstruieren und es gilt:*
Sei q_Γ die auf $\mathcal{K}(\Gamma)$ nach 10.1. konstruierte Z–Struktur, dann ist $\mathrm{Mf}(\mathcal{K}(\Gamma))$ homöomorph zum Abbildungszylinder $\mathcal{M}_{q_\Gamma}$

Beweis: In Lemma 10.2 hingen die Klebeabbildungen der Zellen nur von der Einbettung φ, dem Diffeomorphismus g und der Z-Struktur ζ ab. Nun müßte man den Satz durch Induktion beweisen diese Induktionsschluß soll aber dem Leser überlassen bleiben, denn nach dem bisher bewiesenen ist die Vorgangsweise klar. Bei jedem Schritt ist nun die Z-Struktur durch die Konstruktion in Kapitel 5. festgelegt. Das ist zwar willkürlich (man könnte auch andere Z-Strukturen verwenden) aber eindeutig. Der Diffeomorphismus der Ränder sowie die Einbettung ist vorgegeben durch Γ ∎

11.Anwendung der Konstruktionen auf C^∞ Kobordismen

11.1.Final rearrangement theorem(Milnor Lectures on the h-Cobordism Theorem 4.8). *Jeder Kobordismus C kann als Zusammensetzung*

$$C_0 \underset{g_0}{\bullet} C_1 \underset{g_1}{\bullet} C_2 \underset{g_2}{\bullet} C_3 \underset{g_3}{\bullet} \dots \underset{g_{m-1}}{\bullet} C_m$$

geschrieben werden. Wo C_j ein Kobordismus ist der eine Morse Funktion mit nur einem kritischen Wert und nur kritische Punkte vom Index j hat.

Dieses Theorem wurde von Smale zuerst bewiesen. Allerdings werde ich letztendlich den gesamten Differentialtopologischen Apparat brauchen, der für den Beweis nötig ist, um CW-Komplexe mit schönen Klebeabbildungen zu basteln.Das Zitat dient dazu die folgenden Lemmata zu motivieren.Ein Beweis folgt erst wesentlich später.

In der Folge wird vorerst Satz 11.4 bewiesen und zwar mit Hilfe des obigen Zitats

11.2Lemma. *Satz 11.1 ist äquivalent zu folgender Aussage: Sei $\mathcal{C}$ ein Kobordismus von Dimension m dann gibt es eine Morse Funktion $F : \mathcal{C} \longrightarrow [a,b]$ s.d. es $m+1$ Werte $\{w_0, w_1, \dots, w_m\}$ von F, $w_0 = a$, $w_m = b$ und $w_i \geq w_j \Leftrightarrow i \geq j$ und alle krit. Punkte vom Index j liegen in $F^{-1}(w_j)$*

Beweis: (1) $11.2 \Rightarrow 11.1$:Man findet sicher $m+2$ Werte $y_i \in [a,b]$ sodaß $w_i \leq y_{i+1} \leq w_i + 1$ falls $i + 1 \neq 0$ und$y_0 = a$. Dann sind $\mathcal{C}_i := F^{-1}[y_i, y_{i+1}]$ Kobordismen sd

$$\mathcal{C} = C_0 \underset{g_0}{\bullet} C_1 \underset{g_1}{\bullet} C_2 \underset{g_2}{\bullet} C_3 \underset{g_3}{\bullet} \dots \underset{g_{m-1}}{\bullet} C_m$$

gilt und die Bedingungen an die $\mathcal{C}_i$ sind alle erfüllt

(2)

11.3.Sublemma. *Sind zwei Kobordismen gegeben die sich zusammensetzen lassen und auf beiden eine Morse Funktion dann kann man eine bis auf Konstante eindeutige Morse Funktion F auf der Zusammensetzung konstruieren und zwar so, daß $j_1^*(F)$ und $j_2^*(F)$ die ursprünglichen Morse Funktionen bis auf Addition mit einer Konstanten sind.*

Beweis:

Seien $(M, V, \acute{V}), (N, W, \acute{W})$ und $g : W \xrightarrow{\cong} \acute{V}$ $F_1 : (M, V, \acute{V}) \longrightarrow [a_1, b_1]$, $F_2 : (M, V, \acute{V}) \longrightarrow [a_2, b_2]$ Definiert man dann $F|j_2(M)$ als $j_{2*}(F_1)$ und $F|j_1(N)$ als $j_{1*}(F_2) + b_1 - a_2$ dann muß man nur noch zeigen daß dieses F differenzierbar ist. Tatsächlich kann man auf Mf$((M, V, \acute{V}) \underset{g}{\bullet} (N, W, \acute{W}))$ die Differenzierbare Struktur so wählen daß F differenzierbar ist, indem man Krägen verwendet : $\kappa_1 : \acute{V} \times [0,1[\longrightarrow M$, $\frac{\partial}{\partial t}|_0(\kappa_1) = -G_1$ wo G_1 ein gradientenartiges Vektorfeld zu F_1 ist und $\kappa_2 : W \times [0,1[\longrightarrow N$, $\frac{\partial}{\partial t}|_0(\kappa_2) = G_2$ wo G_2 ein gradientenartiges Vektorfeld zu F_2 ist. Wie man solche Krägen konstruiert überlasse ich dem Leser

Daraus folgt aber ist 11.1 erfüllt dann kann man auf jedem Kobordismus eine Morse Funktion mit den in11.2 geforderten Eigenschaften konstruieren ∎

11.4. Hilfssatz. *Jeder Kobordismus läßt sich als $\mathcal{K}(\Gamma)$ darstellen, wo Γ eine Zusammensetzung von konstruierten Kobordismen ist.*

Der Beweis erfolgt über

11.5. Lemma. *Sei $\mathcal{C}_k$ ein Kobordismus und $F : \mathcal{C} \longrightarrow [\alpha, \beta]$ eine Morse Funktion mit nur einem Kritischen Wert und nur kritischen Punkten vom Index k. Dann ist $\mathcal{C} \cong \mathcal{K}(V, k, \varphi)$ wobei $V = F^{-1}(\alpha)$ aber $\varphi : n \times \mathsf{S}^{k-1} \times \mathsf{D}^{m-k} \hookrightarrow V$ nur bis auf Diffeotopie durch $\mathcal{C}_k$ und F festgelegt ist.*

Der Beweis erfolgt durch eine größere Anzahl Lemmata die auch später noch Verwendung finden. Im Folgenden sollen die in Kapitel 8 gemachten Definitionen gelten.Bei Unklarheiten sollte man daher in 8.3 oder 8.8 nachschauen.

Ich werde Einbettungen $h_{p,ext}$ von Mengen $U_p \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$

$$U_p = \{(v.u) : r(v,u) \leq 1+\varepsilon, f(v,u) \in [\alpha,\beta]\}$$

zu jedem krit. Punkt p und sodaß $\{f = \alpha\}$ in den unteren Rand eingebettet wird und $\{f = \beta\}$ in den oberen Rand. Sowie eine Einbettung von

$$(Bd_1(\mathcal{C}_k) \setminus \bigsqcup_{i=0}^{n}(h_{p_i,ext}|_{\{f=\alpha,r=0\}}) \times [\alpha,\beta]$$

sodaß die Koordinatenwechsel gleich sind wie bei den entsprechenden Mengen in $\mathcal{K}(Bd_1(\mathcal{C}_k), k, \bigsqcup_{i=0}^{n}(h_{p_i,ext}|_{\{f=\alpha\}}$. Dabei muß man sich erinnern daß die Unterräume $\{f = \alpha\}$ diffeomorph zu $\mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{D}^{m-k}$ sind. Hat man das so ist das Lemma bewiesen. Ich werde bei der Konstruktion auch einige nützliche Dinge beweisen die ich erst später brauche.

11.6. Lemma. *Sei $U_\rho := \{(v,u) : r(v,u) \leq \rho, f(v,u) \in]\alpha,\beta[\}$, $\rho \leq 1$ dann gibt es einen Diffeomorphismus $\mu_\rho : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$, der eingeschränkt ein Diffeomorphismus von U_ρ nach U_1 ist.*

Beweis: Es gibt sicher eine C^∞ Funktion $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die auf $]-\infty,\delta]$ eingeschränkt $\mathrm{Id}_\mathbf{R}$ ist und so daß $\lambda(t) = \frac{1+\varepsilon}{\rho} \cdot t$ falls $t \geq 2\delta$ wo $\delta \leq \frac{\varrho}{3}$ gelten soll. Sei dann

$$\mu_\rho(v,u) := (\sqrt{\frac{-f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \lambda(r)}} \cdot \frac{1}{v^2} \cdot v, \sqrt{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \lambda(r)}} \cdot \frac{1}{u^2} \cdot u)$$

beziehungsweise die Fortsetzung dieser Abbildung auf $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$ einschließlich $\{r = 0\}$ durch die Identität auf$\{r = 0\{$.

μ_ρ ist auch auf einer Umgebung von $\{r = 0\}$ die Identität und sonst $Q \circ (\mathrm{Id} \times \mathrm{Id} \times \lambda \times \mathrm{Id}) \circ Q^{-1}$ und erfüllt somit die Anforderungen ∎

11.7. Lemma. *Ist $F : M \to \mathbf{R}$ eine nicht degenerierte Funktion und $p \in M$ ein kritischer Punkt vm index k dann gibt es eine C^∞ Einbettung $h_p : U_{1,p} \to M$ wobei gilt*

$$U_{1,p} := \{(v,u) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} : r \leq 1+\varepsilon, f \in]\alpha_0,\beta_0[\}$$
$$h_p(0,0) = p$$
$$h_p^*(F) = F(p) + u^2 - v^2$$

Beweis: Laut Morse Lemma gibt es eine offene Kugel $B_\rho := \{(v,u) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} : v^2+u^2 \leq \rho\}$ und eine C^∞ Einbettung $h_{morse} : B_\rho \hookrightarrow M$, sodaß

$$h_{morse}(0,0) = p, h^*_{morse}(F) = F(p) + u^2 - v^2$$

Die Funktion $u^2 + v^2$ läßt sich auch als $2\sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2}$ ausdrücken. Man sieht leicht daß es $\varrho, \alpha_0, \beta_0$ gibt, sodaß für $r \leq \varrho, f \in]\alpha_0,\beta_0[$ gilt, $2\sqrt{\frac{f^2}{4} + r^2} \leq \rho$. Dann ist $h_{morse} \circ \mu_{\frac{1}{\varrho}} =: h_p$ eine Einbettung die das Lemma erfüllt. ∎

11.8. Lemma. *Sei $F : M \to \mathbf{R}$ nicht degeneriert, s ein regulärer Wert, G ein gradientenartiges Vektorfeld zu F und $\mathcal{O}$ eine offene Menge in der Untermannigfaltigkeit $F^{-1}(s)$.ist dann $\mathrm{Fl}_G^t(o)$ definiert für $o \in \mathcal{O}, t \in]\alpha,\beta[$, dann existiert eine Einbettung $\Theta : \mathcal{O} \times]\alpha,\beta[\hookrightarrow M$, sodaß $F \circ \Theta = proj_1$ ist*

Beweis: Sei $\Theta(o,t) := \mathrm{Fl}_G^t(o)$ dann istΘ sicher eine Immersion

Behauptung: Θ ist injektiv denn wegen $G(F) \equiv 1$ würde folgen

$$\mathrm{Fl}_G^t(o) = \mathrm{Fl}_G^{t_1}(o_1) \Rightarrow F \circ \mathrm{Fl}_G^t(o) = F \circ \mathrm{Fl}_G^{t_1}(o_1)$$

daraus aber wegen $F(o) = F(o_1) = s$ $t = t_1$, und daraus $o = o_1$, weil Fl_G^t injektiv ist. Aus Dimensionsgründen ist aber Θ ein lokaler Diffeomorphismus ∎

11.9. Lemma. *Sei $F : \mathcal{C} \to [a,b]$ eine Morse Funktion, p ein kritischer Punkt, $h_p : U_{1,p} \to \mathrm{Mf}(\mathcal{C})$ die zugehörige Einbettung und G ein gradientenartiges Vektorfeld $h_p^*(G) = \frac{2}{u^2+v^2} \cdot (-v,u)$. Sei ferner $]\gamma,\delta[$ das maximale Intervall das die folgende Bedingung erfüllt:*
$\mathrm{Fl}_G^t(x)$ ist definiert für $x \in h_p(\{f \le 0\} \cap U_{1,p}$ und $t \in]\gamma - F(x) + F(p), 0[$
ebenso für $x \in h_p(\{f \ge 0\} \cap U_{1,p}$ und $t \in]0, \delta - F(x) + F(p)[$.
Dann gibt es eine Erweiterung von h_p

$$h_{p,ext}^G : U_{1,p,ext}^G \to \mathrm{Mf}(\mathcal{C})$$

Wobei so definiert ist $U_{1,p,ext}^G := \{(v,u) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} : r \le 1+\varepsilon, f \in]\gamma,\delta[\}$

Beweis: Die Definition mit einem maximalen Intervall ist sinnvoll denn die Flusslinien enden entweder in einem kritischen Punkt oder im Rand und brauchen dafür genau die Differenz der Funktionswerte an Zeit. Es gibt also endlich viele mögliche Definitionsbereiche.

Ein Vektorfeld ist durch seinen Fluß sicher schon festgelegt

und der Fluss von Υ , $\Upsilon(v,u) := \dfrac{2}{u^2+v^2} \cdot (-v,u)$, ist festgelegt durch

$$r \circ \mathrm{Fl}_\Upsilon^t = r, f \circ \mathrm{Fl}_\Upsilon^t = f + t, \mathrm{Fl}_\Upsilon^t(v,u) = (\frac{1}{\kappa} \cdot v, \kappa \cdot u)$$

Das rechnet man nach in dem man folgende Behauptungen prüft:

$$\Upsilon(r) \equiv 0, \Upsilon(f) \equiv 1$$

und Υ hat dieselben Flusslinien wie die lineare Differentialgleichung $\dfrac{d(v,u)}{dt} = (-v,u)$

mit den drei Gleichungen erhält man eine Gleichung vierten Grades für den Faktor κ die aber leicht zu lösen ist.

In der Tat gilt$Q(\tau,\omega,r,f) = \mathrm{Fl}_\Upsilon^f(\sqrt{r} \cdot \tau, \sqrt{r} \cdot \omega)$

Seien ψ_-, ψ_+ definiert wie in Sublemma 8.9 und es gelte in den folgenden Diagrammen, daß die Flüsse alle definiert sind, dann gibt es eine C^∞ Einbettung $\tilde{h}_p : \{r \le 1+\varepsilon, f \in]\gamma,\delta[\} \hookrightarrow M$ die eine Fortsetzung von h_p ist. Dabei gelte $h_{p,s} := h_p|_{\{f=s\}}$

$$\begin{array}{ccc}
U_{1,p,ext}^G \setminus (0 \times \mathbf{R}^{m-k}) & = & U_{1,p,ext}^G \setminus (0 \times \mathbf{R}^{m-k}) \\
\psi_- \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{S}^{k-1} \times (1+\varepsilon)\overset{o}{\mathbf{D}}{}^{m-k} \times]\gamma - s, \delta - s[\setminus (\mathbf{S}^{k-1} \times 0 \times [-s, \delta - s[) & \xrightarrow[\mathrm{Fl}_G^{t-s} \circ h_{p,s} \circ \psi_-^{-1}]{} & M
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
U_{1,p,ext}^G \setminus \mathbf{R}^k \times 0 & = & U_{1,p,ext}^G \setminus \mathbf{R}^k \times 0 \\
\psi_+ \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{S}^{m-k-1} \times (1+\varepsilon)\overset{o}{\mathbf{D}}{}^{k} \times]\gamma - s, \delta - s[\setminus (\mathbf{S}^{m-k-1} \times 0 \times [-s, \delta - s[) & \xrightarrow[\mathrm{Fl}_G^{t-s} \circ h_{p,s} \circ \psi_-^{-1}]{} & M
\end{array}$$

Für das erste Diagramm soll gelten $s \in]\alpha - 0, 0[$ für das zweite $s \in]0, \beta_o[$. Der rechte senkrechte Pfeil ist dann definiert und eine C^∞ Einbettung. Die beiden Einbettungen und h_p stimmen auf dem gemeinsamen Definitionsbereich überein. Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis des Satzes 11.5: Da F keine weiteren kritischen Werte hat kann nur der Rand ein Hindernis für die Erweiterung von $h_{p,ext}$ sein. Daher ist in diesem Fall $U_{1,p,ext} = \{(v,u) : r \le 1+\varepsilon, f \in [\alpha,\beta]$. Durch die Einbettungen von $\{f = \alpha\}$ in den unteren Rand ist ein konstruierter Kobordismus definiert. Und $\mathrm{Fl}_G^t : Bd_1(\mathcal{C}_k) \setminus \bigsqcup_{i=0}^{n}(h_{p_i,ext}|_{\{f=\alpha, r\le 1\}} \times [\alpha,\beta] \to \mathrm{Mf}(\mathcal{C}_k)$ ist eine Einbettung. Wählt man den Isomorphismus zwischen $\{f = \alpha\}$ so wie in 8.8. dann ist der Koordinatenwechsel so wie in $\mathcal{K}(Bd_1(\mathcal{C}_k), k, \bigsqcup_{i=0}^{n}(h_{p_i,ext}|_{\{f=\alpha\}})$. Dieser Kartenwechsel wird nämlich durch die Eigenschaften des Vektorfelds in 11.9 festgelegt.

12. Diffeotopien, Isotopien und Zeitabhängige Vektorfelder

Dieses Kapitel enthält eine Aufstellung der Tatsachen über Isotopien und Diffeotopien ohne die ich nicht fortfahren kann. Irgendwelche Aussagen über Kobordismen sind nicht enhalten. Auch nehme ich an daß diese Dinge dem Leser bekannt sind. Daher ist alles etwas kurz gehalten.

12.1. Definition einer Isotopie. Sei $f: M \longrightarrow N$ eine C^∞ Einbettung. Eine C^∞ Abbildung $h: [0,1] \times M \longrightarrow N$ heißt Isotopie von f wenn gilt

$$h_t \text{ ist eine Einbettung für } t \in [0,1];\, h_0 = f$$

Man nennt h auch Isotopie zwischen f und h_1.

12.2. Definition einer technischen Isotopie. Sei h wie in 12.1 mit der zusätzlichen Bedingung $h_t = h_0$ für $t \leq \varepsilon$ und $h_t = h_1$ für $t \geq 1 - \varepsilon$. So nennt man h eine technische Isotopie. *Bemerkung:*Technische Isotopien kann man zusammensetzen. Das heißt ist h eine technische Isotopie zwischen f und f_1 und g eine solche zwischen f_1 und f_2 so ist $h \bullet g$

$$(h \bullet g)_t := h_{2t} \text{ für } t \leq \frac{1}{2}\ (h \bullet g)_t := h_{2t} \text{ für } t \geq \frac{1}{2}$$

eine technische Isotopie zwischen f und f_2.

12.3. Lemma. *Sei h eine Isotopie zwischen f_1 und f_2 dann gibt es auch eine technische Isotopie zwischen f_1 und f_2. Isotopien werden von nun an bei Bedarf o.B.d.A. technisch sein.*

Beweis: Sei $\mu : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine C^∞ Funktion, sodaß $\mu(t) = 0$ für $t \leq \varepsilon$ und $\mu(t) = 1$ für $t \geq 1 - \varepsilon$ und μ streng monoton auf $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Dann ist $\tilde{h}$

$$\tilde{h}(x,t) := h(x, \mu(t))$$

eine technische Isotopie zwischen f_1 undf_2. ∎

12.4. Definition einer Diffeotopie. Eine differenzierbare Abbildung $H : [0,1] \times N \longrightarrow N$ mit $H_0 = \mathrm{Id}_N$ und jedes H_t einDiffeomorphismus, nennt man Diffeotopie.

12.5.Bemerkung. Ist H eine Diffeotopie und $f : M \longrightarrow N$ eine Einbettung so ist $H \circ f$ eine Isotopie.

12.6. Definition und Lemma. *Sei μ wie in 12.3 so ist durch*

$$\tilde{H}(x,t) := H(x, \mu(t))$$

eine sogenannte technische Diffeotopie gegeben. Die Definition ist offensichtlich.

12.7. Lemma.
Eine technische Diffeotopie läßt sich als Fluß eines eindeutig bestimmten zeitabhängigen Vektorfelds darstellen

Beweis: Sei H eine solche. Dann sei

$$\zeta(x,t) := T|_{(H_t^{-1}(x),t)} H \partial_t$$

Es gilt $\mathrm{Fl}_\zeta^t(x) = H(x,t)$ denn die Flusslinien sind die Kurven $H(x,\cdot)$. ∎

12.8. Lemma. *Auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit ist der Fluß eines zeitabhängigen Vektorfelds immer eine Diffeotopie.*

Beweis: Ich setze voraus, daß der Leser weiß, daß der Fluß eines Zeitabhängigen Vektorfelds immer ein Diffeomorphismus auf das Bild und damit ein lokaler Diffeomorphismus ist. Das ist zwar nicht trivial aber es ist unmöglich solche Sätze hier zu beweisen. Eine schöne Darstellung findet man bei Serge Lang. Damit ist der Fluß offen und proper und daher surjektiv. ∎

12.9. Definition Einbettung einer Isotopie. Eine Isotopie $h : [0,1] \times M \longrightarrow N$ heißt in eine Diffeotopie einbettbar , wenn es eine Diffeotopie H von N gibt so daß $h = H \circ h_0$ gilt. Die Einbettungen h_0 und h_1 heißen dann diffeotop.

12.10. Satz (R.Thom 1957). *Ist h eine technische Isotopie von Einbettungen von M in N, die außerhalb einer kompakten Teilmenge $M_0 \subset M$ alle Punkte festläßt, dann kann man h in eine technische Diffeotopie von N einbetten, die außerhalb einer kompakten Umgebung von $h([0,1] \times M_0$ alle Punkte festläßt.*

13. Die Allgemeine Lage von Tubenumgebungen eines Transversalen Durchschnitts von Untermannigfaltigkeiten

Transversalität, Diffeotopien, Normalenbündel

13.1. Definition. Seien M, N C^∞ Mannigfaltigkeiten, $L \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension k.

$$f : M \longrightarrow N \text{ heißt transversal zu } L, \text{ wenn gilt :}$$
$$T_p f(T_p M) + T_{f(p)} L = T_{f(p)} N \text{ für alle } p \in M, f(p) \in L$$

Zwei Untermannigfaltigkeiten nennt man transversal wenn gilt daß die Inklusion der einen transversal zur andern ist.

Ich werde den folgenden Satz später verwenden:

13.2.Transversalitätssatz für Schnitte von Vektorbündeln. *Sei* $\mathbf{E}, \pi, M$ *ein* C^∞ *Vektorbündel mit einer beliebigen Riemann Metrik. Sei* $N \subset \mathbf{E}$ *eine* C^∞ *Untermannigfaltigkeit und* η *eine überall positive Funktion auf* M. *Dann gibt es einen* C^∞ *Schnitt* $s : M \longrightarrow \mathbf{E}$ *sodaß* $\|s(p)\| \leq \eta(p)$ *für alle* $p \in M$, *so daß* s *transversal zu* N *ist. Ist* $A \subset M$ *abgeschlossen und erfüllt der Nullschnitt die Transversalitätsbedingung auf ganz* A *so kann man* s *so wählen, daß* $s|A = 0$*-Schnitt ist.*

Weil es nicht viel Platz wegnimmt werde ich einige Tatsachen über Transversalität erwähnen, die ich dann dringend brauchen werde.

13.3. Definition. Sei L eine Untermannigfaltigkeit von M, so bezeichnet man $TM/_{TL}$ als das Normalenbündel zu L. Im Folgenden schreibe ich für Normalenbündel immer $\perp$, also z.B. $\perp L$ Normalenbündel hängen nicht nur von der abstrakten Mannigfaltigkeit L ,sondern auch von der Einbettung von L ab. Zumindest sind sie aber für homotope Einbettungen isomorph. In späteren Abschnitten dieser Arbeit gehe ich auf diese Feinheiten nicht ein, weil das so üblich ist und leichter verständlich.

13.4. Satz. *Seien* M, N, L, f *wie in 13.1 so ist* $f^{-1}(L)$ *entweder leer oder eine* $k-$*kodimensionale Untermannigfaltigkeit von* M, *und man hat einen kanonischen Bündelisomorphismus* $\perp f^{-1}(L) \cong f^*(\perp L)$ *gegeben*

Beweis: Sei $\vartheta : V \longrightarrow N$ eine Untemannigfaltigkeitskarte von L. Das heißt $V = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$ und $\vartheta(0 \times \mathbf{R}^{m-k}) \subset L$ sei $U = f^{-1}(\vartheta(V))$ dann ist durch

$$U \xrightarrow{\vartheta^{-1} \circ f} \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} \xrightarrow{proj} \mathbf{R}^k$$

lokal eine Submersion gegeben und $f^{-1}(L)$ ist lokal das Urbild von $0 \in \mathbf{R}^k$ unter dieser Submersion. Daher ist $f^{-1}(L)$ eine $k-$kodimensionale Untermannigfaltigkeit von M.
Ebenso ist $Tf|_{f^{-1}(L)} : TM|_{f^{-1}(L)} \longrightarrow TN|_L$ lokal gegeben durchdie erste Abbildung in

$$TU \xrightarrow{T(\vartheta^{-1} \circ f)} T(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}) \xrightarrow{Tproj} T\mathbf{R}^k$$

und $Tproj$ ist die lokale Projektion auf $\perp L$ etc ... einen detaillierten Beweis findet man in jedem Buch über Differentialtopologie.

Bemerkung: Es gibt aber keinen natürlichen Schnitt $\perp L \longrightarrow TN|_L$

13.5.Der Transversale Durchschnitt zweier Untermannigfaltigkeiten.
Seien S_1, S_2 transversale Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen s_1, s_2 von F so ist wie eben gezeigt ihr Durchschnitt L eine $s_1 + s_2 - m$-Dimensionale Untermannigfaltigkeit oder leer, wenn F Dimension m hat. Insbesondere ist $L = \emptyset$ wenn $s_1 + s_2 - m \leq 0$ ist. Das Pullbackdiagramm macht vieles übersichtlicher und sieht so aus

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "incl_{1,1}"] \arrow[d, "incl_{1,2}"'] & S_1 \arrow[d, "incl_1"] \\ S_2 \arrow[r, "incl_2"'] & F \end{tikzcd}$$

und kommutiert. Also kommutiert auch

$$\begin{tikzcd} TL \arrow[r, "Tincl_{1,1}"] \arrow[d, "Tincl_{1,2}"'] & TS_1 \arrow[d, "Tincl_1"] \\ TS_2 \arrow[r, "incl_2"'] & TF \end{tikzcd}$$

Lemma.

Seien $\perp_1 L := TS_1/_{TL}, \perp_2 L := TS_2/_{TL}$.
Aus den Tatsachen : $TL = TS_1|_L \cap TS_2|_L$, $TS_1|_L + TS_2|_L = TF|_L (\Leftrightarrow$ *Transversalität*
folgt $\perp L = \perp_1 L \oplus \perp_2 L$

Beweis:

$$\perp L = T\mathcal{F}|_L/_{TL} = TS_1|_L + TS_2|_L/_{TS_1 \cap TS_2} = TS_1|_L/_{TS_1 \cap TS_2} \oplus TS_2/_{TS_1 \cap TS_2} \quad \blacksquare$$

13.6.Das Ausgangsproblem für diese Betrachtungen ist:. Seien S_1, S_2 transversale Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen s_1, s_2 von $\mathcal{F}$ mit trivialem Normalenbündel, ihr Durchschnitt L eine $s_1 + s_2 - m$-Dimensionale Untermannigfaltigkeit wenn $\mathcal{F}$ Dimension m hat und es seien folgende Tubenumgebungen gegeben

$$\Delta_1 : \perp S_1 \longrightarrow \mathcal{F}, \Delta_2 : \perp S_2 \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$\sigma_1 : \perp_1 L \longrightarrow S_1, \sigma_2 : \perp_2 L \longrightarrow S_2$$

Wie ist dann die allgemeine Lage der Tubenumgebungen modulo Diffeotopien

Definition: Mit einer Radiusfunktion r auf einem Vektorbündel E meine ich immer $r(x, v) := \langle v, v \rangle$ nach einer beliebigen Riemann Metrik und unter einem Scheibenbündel $p \cdot \mathbf{D} \subset E$ meine ich $\{\eta \in E | r(\eta) \leq p\}$ mit der eingeschränkten Projektion von E. Das ist ein C^∞ Bündel.

13.7. Satz. *In der obigen Situation gibt es eine Einbettung* $\tilde{\Delta}_2 : \perp S_2 \longrightarrow \mathcal{F}$ *diffeotop zu* Δ_2 *und* $\tilde{\Delta}_2 | L = \Delta_2 | L$, *sodaß auf den zu* $\perp_1$, $\perp_2$ *gehörigen Scheibenbündeln mit Faser eine kompakte Scheibe gilt :*

$$\begin{tikzcd} \perp_1 L \oplus \perp_2 L \arrow[r, "A"] \arrow[d, "D"'] & \perp S_1 \arrow[d, "\Delta_1"] \\ \perp S_2 \arrow[r, "\tilde{\Delta}_2"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

kommutiert, sofern diese Bedingung schon außerhalb der Fasern über einer kompakten Menge $C \subset L$ erfüllt ist.

A ist ein Bündelisomorphismus über σ_1, und D ein Bündelisomorphismus über σ_2. Ferner läßt sich durch Verwendung diffeotoper Abbildungen $\tilde{\Delta}_1$ und $\tilde{\Delta}_2$ von erreichen, daß auch

$$\begin{array}{ccc} \perp_1 L \oplus \perp_2 L & \xrightarrow{A} & \perp S_1 \\ {\scriptstyle D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\Delta}_1} \\ \perp S_2 & \xrightarrow[\tilde{\Delta}_2]{} & \mathcal{F} \end{array}$$

ein Pullbackdiagramm wird. Wo außerdem die linearen Abbildungen nur vom Basispunkt in L abhängen also A_l, D_l geschrieben werden können.

Der Beweis gliedert sich in mehrere Lemmata. Ich führe ihn weil ich nicht mehr brauche nur für triviale Bündel.

13.8. Lemma. *Sei (E, π, L) ein C^∞ Vektorbündel und $VE := kerT\pi$ das vertikale Bündel so gibt es auf $TE|$0-Schnitt eine natürliche Zerlegung in ein vertikales und ein horizontales Bündel das eine gegeben durch $Tincl_{0-\text{Schnitt}} : TL \longrightarrow TE$ das andere ist sowieso natürlich. Damit gibt es dort auch eine natürliche Horizontale Projektion $T\pi$ und eine natürliche Vertikale Projektion* $\mathbf{vpr} := \mathrm{Id}_{TE}(Tincl_{0-\text{Schnitt}} \circ T\pi)$

Es gibt auch einen natürlichen Isomorphismus $\rho : E \longrightarrow V|$0-Schnitt gegeben durch

$$\rho(x, v) := \frac{d}{dt}|_0(x, tv)$$

13.9. Lemma. *Sei$\gamma : E_1 \hookrightarrow E_2$ eine C^∞ Einbettung, wobei (E_1, π_1, L) und (E_2, π_2, L) C^∞ Vektorbündel von Dimensionen k_1 und k_2 sind und $\gamma|0 - Schnitt = \mathrm{Id}_L$ ist. Dann ist γ isotop zu $\rho_2^{-1} \circ \mathbf{vpr}_2 \circ T\gamma \circ \rho_1$ wobei die Indizes die jeweiligen Vektorbündel bezeichnen, sofern γ schon außerhalb der Fasern über einer einer kompakten Menge $C \subset L$ $\rho_2^{-1} \circ \mathbf{vpr}_2 \circ T\gamma \circ \rho_1$ ist.*

Beweis: Seien $m_{1,t}, m_{2,t}$ die Multiplikation mit $t \in \mathbf{R}$ in den jeweiligen Vektorbündeln.

$$\text{Sei } h :]0,1] \times E_1 \longrightarrow E_2,\ h(t, x) := m_{2,\frac{1}{s}} \circ \gamma \circ m_{1,s}$$

Dann ist das Lemma bewiesen wenn sich folgende Behauptung verifizieren läßt:
h hat eine differenzierbare Fortsetzung auf $[0,1] \times E_1$
und h_0 ist genau $\rho_2^{-1} \circ \mathbf{vpr}_2 \circ T\gamma \circ \rho_1$
Zunächst zeige ich das lokal.

$$\text{Sei also } L = U \subset \mathbf{R}^{s_1+s_2-m}, \gamma : U \times \mathbf{R}^{k_1} \hookrightarrow U \times \mathbf{R}^{k_2}$$

$$\text{Dort gilt } \gamma(x, v) = x + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\gamma(x, s \cdot v)|_{t=s} dt$$

$$\text{daraus folgt } h(r, x, v) = m_{2,\frac{1}{r}}(x + \int_0^1 D(\gamma)|_{(x,t \cdot r \cdot v)} dt) \cdot r \cdot v$$

$$\text{wobei } \int_0^1 D(\gamma)|_{(x,t \cdot r \cdot v)} dt \text{ eine } C^\infty \text{ Abbildung}$$

$\lambda(r, x, v)$ nach $\mathcal{L}(\mathbf{R}^{s_1+s_2-m+k_1}, \mathbf{R}^{s_1+s_2-m+k_2}$ mit $\lambda(0, x, v) = D\gamma|_(x, 0)$ ist.

$$m_{2,\frac{1}{r}} \text{ multipliziert dann den } \mathbf{R}^{k_2} \text{ Anteil des Bildes mit } \frac{1}{r}$$

$$\text{aber } h(r, x, v) = m_{2,\frac{1}{r}}(\lambda(r, x, v) \cdot r \cdot v =$$

$$r \cdot proj_{\mathbf{R}^{s_1+s_2-m}} \circ \lambda(r, x, v) \cdot v + proj_{\mathbf{R}^{k_2}} \circ \lambda(r, x, v) \cdot v$$

daraus folgt $(x, v) \longrightarrow (x, proj_{\mathbf{R}^{k_2}} \circ D\gamma \cdot v)$ ist eine C^∞ Fortsetzung bei 0 für h.

Diese Fortsetzung erfüllt die Bedingungen des Lemmas in Koordinaten.
Damit diese lokale Rechnung Sinn macht braucht man Trivialisierungen $U_1 \times \mathbf{R}^{k_1}, U_2 \times \mathbf{R}^{k_2}$, $U_1, U_2 \subset \mathbf{R}^{s_1+s_2-m}$ von E_1, E_2 sodaß es eine Einschränkung $\gamma : U_1 \times \mathbf{R}^{k_1} \longrightarrow U_2 \times \mathbf{R}^{k_2}$ gibt, das ist im allgemeinen nicht so. Aber zu jedem solchen $\gamma : E_1 \hookrightarrow E_2$ gibt es ein isotopes $\bar{\gamma}$ wo man solche Trivialisierungen finden kann.

Nun konstruiere ich eine Isotopie $\kappa : [0,1] \times E_1 \longrightarrow E_1$, sodaß $\kappa_1(E_1) \subset p \cdot \mathbf{D} \subset E_1$ zuerst wähle ich eine C^∞ Funktion $\mu : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ $\mu(t) = 1$ falls $t \leq \varepsilon$, $\mu(t) = \frac{2p}{\pi}\frac{arctan(t)}{t}$ falls $t \geq 2\varepsilon$ und μ ist monoton und es gelte $\dot{\mu} \geq \frac{\mu}{t}$. Dann ist in lokalen Bündelkoordinaten durch $\kappa(s,x,v) = (x, (1 - s + s\mu(\sqrt{r(x,v)}) \cdot v)$ eine Isotopie gegeben die das verlangte erfüllt.
Also gilt es Mengen $U \subset L$ zu finden sodaß $\pi_1 \circ \gamma(p \cdot \mathbf{D}^{k_1}) \subset U_1 \subset L$ und U_1 diffeomorph zu einer offenen Menge im $\mathbf{R}^{s_1+s_2-m}$. Hier verwende ich daß die untersuchten Bündel trivial sind was aber nur Vorteile in der Schreibweise bringt.

Sei g eine vollständige Riemann Metrik auf L dann gibt es auf der kompakten menge C ein Maximum K für $||T\pi_2 \circ T\gamma|_{T\mathbf{R}^{k_1}}||$ bezüglich der Riemann Metrik g und einer Metrik auf $\mathbf{R}^{k_2}$. Sei $B_\delta(x) := \{y : d(x,y) \leq \delta\}$. Dann ist $\pi_1 \circ \gamma(B_\delta(x) \subset B_{\delta+Kp}(x)$. Auf C gibt es aber eine endliche Überdeckung mit geodätisch konvexen Mengen $\{B_{\delta_i}(x_i)\}$, sodaß $B_{\delta_i+\eta_i}(x_i)$ noch immer geodätisch konvex sind dann gibt es aber auch ein Minimum η für die η_i. Verwendet man als Radius p eine Zahl$\leq \frac{\eta}{K}$ dann sind die B_{δ_i} geeignete Mengen. ∎

13.10. Lemma. *Sei $\Lambda : E_1 \longrightarrow E_2$ ein Vektorbündel Isomorphismus über der Identität. Seien $E_1 = E_{1,1} \oplus E_{1,2}$, $E_2 = E_{2,1} \oplus E_{2,2}$ und $A : E_{1,1} \longrightarrow E_{2,1}$, $B : E_{1,2} \longrightarrow E_{2,1}$, $C : E_{1,1} \longrightarrow E_{2,2}$, $D : E_{1,2} \longrightarrow E_{2,2}$ Bündelhomomorphismen, sodaß*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

gilt und sei die Bedingung erfüllt A, D sind Bündelisomorphismen. Dann ist Λ isotop zu dem Bündelisomorphismus

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & A^{-1} \cdot B \\ D^{-1} \cdot C & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

ist ein Vektorbündel Endomorphismus auf E_1und

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} [\mathrm{Id} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & A^{-1} \cdot B \\ D^{-1} \cdot C & \mathrm{Id} \end{pmatrix}]$$

ist eine Isotopie zwischen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Es gibt aber sicher auch eine Isotopie sodaß A, D Isometrien werden auch sind nur bis auf Homotopieklassen von Abbildungen von L in die jeweiligen Orthogonalen Gruppen festgelegt' ∎

13.11. Lemma. *Sei $h : \mathbf{R} \times L \times \mathbf{R}^p \longrightarrow L \times \mathbf{R}^p$ eine technische Isotopie die auf dem Nullschnitt immer die Identität ist und außerhalb der Fasern über einer kompakten Menge $L_0 \subset L$ alle Punkte unverändert läßt. Dann gibt es eine technische Diffeotopie $H : \mathbf{R} \times L \times \mathbf{R}^p \longrightarrow L \times \mathbf{R}^p$, sodaß $H \circ h_0 = h$ gilt auf einem Scheibenbündel $q \cdot \mathbf{D}^p \times L$.*

Beweis: $\mathrm{Id} \times h : \mathbf{R} \times L \times \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R} \times L \times \mathbf{R}^p$ ist eine Einbettung und ein lokaler Diffeomorphismus, sodaß $T(\mathrm{Id} \times h)\partial_t$ ein Vektorfeld auf dem offenen Bild ist.

Sei λ C^∞ von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$ eine Funktion sodaß $\lambda(t) = 0 \Leftrightarrow t \geq q + \varepsilon$ und $\lambda(t) = 1 \Leftrightarrow t \leq q$ und $\tilde{\lambda} : L \times \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$ definiert durch $\tilde{\lambda}(l, x) := \lambda(x^2)$. Dann ist $T(\mathrm{Id} \times h)(\tilde{\lambda} \cdot \partial_t) : \xi$ ein Vektorfeld mit Träger im Bild Sei pr die Projektion die die ∂_t Komponente vernichtet, dann hat $pr(\xi)$ kompakten Träger, das heißt $\partial_t + pr(\xi)$ ist ein Zeitabhängiges Vektorfeld mit kompaktem Träger, und der Fluß ist die gesuchte Diffeotopie.

13.12. Die Anwendung auf die Situation in 13.6 und der Beweis von 13.7. Ich identifiziere E_1 mit $\Delta_1 \circ \sigma_1 \times \mathrm{Id}(\perp L)$ und E_2 mit $\Delta_2 \circ \sigma_2 \times \mathrm{Id}(\perp L)$. Nun kontrahiere ich das Bündel E_1 Isotop in sich selbst, sodaß $(\sigma_2 \times \mathrm{Id})^{-1} \circ (\Delta_2|_{\sigma_2 \times \mathrm{Id}(\perp_2 L)})^{-1} \circ (\Delta_1 \circ \sigma_1 \times \mathrm{Id})$ eine Einbettung von $\perp_1 \oplus \perp_2 \longrightarrow \perp_1 \oplus \perp_2$ ist. Diese Einbettung nenne ich γ. γ ist dann isotop zu einer direkten Summe von Bündelisometrien

$$A \oplus D : \perp_1 \oplus \perp_2 \longrightarrow \perp_1 \oplus \perp_2$$

Es gibt auch eine Diffeotopie H mit Träger in $\Delta_2(\perp S_2)$ sodaß

$$\sigma_2 \times \mathrm{Id}^{-1} \circ (H_1 \circ \Delta_2|_{\sigma_2 \times \mathrm{Id}(\perp_2 L)})^{-1} \circ (\Delta_1 \circ \sigma_1 \times \mathrm{Id})$$

eingeschränkt auf $\mathbf{D}^{m-s_2} \times \mathbf{D}^{m-s_1} \times L$ ebenfalls $A \oplus D$ ist.

Ich brauche aber, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\perp_1 L \oplus \perp_2 L \arrow[r, "A"] \arrow[d, "D"'] & \perp S_1 \arrow[d, "\Delta_1"] \\
\perp S_2 \arrow[r, "\tilde{\Delta}_2"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

ein Pullbackdiagramm ist. Das heißt daß der gesamte Durchschnitt in $\Delta_1 \circ A(\mathbf{D}^{m-s_2} \times \mathbf{D}^{m-s_1} \times L = \Delta_2 \circ D(\mathbf{D}^{m-s_2} \times \mathbf{D}^{m-s_1} \times L$ liegt.

Dazu ist als erstes wichtig, daß die neue Einbettung von S_2 keine neuen Durchschnitte mit S_1 hat.

. Diese Hürde kann man nur mit der Hilfe von Abschätzungen nehmen. Also ist es nötig Riemann Metriken einzuführen deren Eigenschaften so unwesentlich sind, daß ich ohne nähere Definition $\|\|$ bzw. $d(\bullet, \bullet)$ schreiben werde.

Nach einer Idee von Thom werde ich positive Konstanten K, k finden die nur von der konstruierten Isotopie h abhängen, die erst nach der eventuellen Kontraktion des Bündels in sich selbst einsetzt. Diese Kontraktion ist ungefährlich und sowieso in eine Diffeotopie einbettbar, also beginnt für die folgenden Betrachtungen die Diffeotopie erst nach der Kontraktion.

13.13. Übersetzt in die Sprache der Bündel bedeutet das: $\perp_1$ kann man mit S_1 und $\perp_2$ mit S_2 identifizieren. $\gamma(\perp_1)$ darf $\perp_2$ nicht schneiden außer im 0-Schnitt analoges gilt für $\gamma(\perp_2)$

13.14. Lemma. *Es gilt für die im vorhergehenden Konstruierte Isotopie h*

$$\|\pi_{\perp_2} \circ h_t(l, v_1, 0)\| \geq k\|v_1\|$$

$$\|\pi_{\perp_1} \circ h_t(l, 0, v_2)\| \geq k\|v_2\|$$

für beliebige $t \in [0, 1]$ *und* $\|v_1\|$, $\|v_2\| \leq \rho$

Beweis: Man muß als erstes in Betracht ziehen, daß h keine neuen Durchschnitte der Mannigfaltigkeiten erzeugt, das sieht man aus der Konstruktion. Da h C^∞ ist und jedes h_t ein lokaler Diffeomorphismus gilt

$$\frac{\|\pi_{\perp_2} \circ h_t(l, v_1, 0)\|}{\|v_1\|} \text{ und } \frac{\|\pi_{\perp_1} \circ h_t(l, 0, v_2)}{\|v_2\|}$$

sind stetige Funktionen die nirgends 0 werden man sieht das leicht an der ersten Taylorentwicklung mit Restglied um den 0-Schnitt also haben die beiden Funktionen Minima ≥ 0 auf der kompakten Menge $\mathcal{L}_0 \times \rho \cdot \mathbf{D}^p$ das kleinere der Minima ist als k geeignet.

13.15. Lemma. *Es gibt ein $K \geq 0$, sodaß*

$$\|\frac{\partial}{\partial t} h|_{(t,x,v)}\| \leq \|v\|$$

wo (t,x,v) lokale Koordinaten sind auf $\perp_1 \oplus \perp_2$

Beweis: Da h auf dem 0-Schnitt überall die Identität ist, ist $\frac{\partial}{\partial t}h|_L \equiv 0$. In lokalen Bündelkarten kann man so schreiben.

$$\frac{\partial}{\partial t}h(t,x,v) = \int_0^1 D(\frac{\partial}{\partial t}h)|_{(t,x,s\cdot v)}ds \cdot v$$

$\|D(\frac{\partial}{\partial t}h)\|$ hat sicher ein Maximum auf der kompakten Menge $L_0 \times \rho \cdot \mathbf{D}^p$ und jedes K das größer ist als dieses ist geeignet

13.16. Lemma. *Sei nun H die in 13.11 konstruierte Diffeotopie mit dem Träger eine Scheibe mit Radius ρ. Dann kann H_t, $t \in [0, \frac{k}{K}]$ keine neuen Durchschnitte erzeugen.*

Beweis: Dazu muß man nur nachprüfen, was H mit $\perp_1$ tut, denn das ist das Stück von S_2 mit dem wir hantieren. Für $\eta \in \perp_1$ gilt entweder

$$\|\pi_{\perp S_2} \circ h_t(\eta)\| \geq k \cdot \|(\eta)\|$$

oder H bewegt das Bild von η nicht. Für die Distanz von $H_0(\eta)$ und $H_t(\eta)$ gilt

$$d(H_0(\eta), H_t(\eta)) \leq K \cdot t \cdot \|\eta\|$$

wegen Lemma 13.15. Hat man die Metriken richtig gewählt, dann ist

$$\|\pi_{\perp S_2} \circ H_t(\eta)\| \geq \|\pi_{\perp S_2} \circ h_0(\eta)\| - d(H_0(\eta), H_t(\eta))$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

13.17.Induktionsbeweis von 13.13. Auf $L \times (\rho - \varepsilon)\mathbf{D}$ ist $H \circ \gamma = h$ also gelten dort dieselben Abschätzungen. Setzt man also eine Diffeotopie H^1 mit Träger im Bild dieses Scheibenbündels mit der ersten zusammen sodaß sie auf $L \times (\rho - 2\varepsilon)\mathbf{D}^p$ erfüllt $H^1 \circ \gamma(t,\eta) = h(t + \frac{k}{K}, \eta)$ so entstehen daraus wegen 13.16 keine neuen Durchschnitte für $t \leq \frac{k}{K}$ etc ... Also erreicht man nach endlich vielen Schritten und Verkleinerungen des Scheibenbündels das gewünschte Ergebnis.

Jetzt ist noch nicht geklärt, daß die Tubenumgebungen keine weiteren Durchschnitte haben als $\Delta_1 \circ A(\mathbf{D}^{m-s_1} \times \mathbf{D}^{m-s_2} \times L)$. Nimmt man an, daß $S_1 \setminus \sigma_1(\mathring{\mathbf{D}}^{m-s_2})$ und $S_1 \setminus \sigma_2(\mathring{\mathbf{D}}^{m-s_1})$ kompakt beziehungsweise, daß die Aussage außerhalb einer kompakten Menge stimmt sind und die Aussage von 13.7 auch auf einer $(1+\varepsilon) \cdot \mathring{\mathbf{D}}^{m-s_2} \times \mathbf{D}^{m-s_1} \times L$ gilt dann ist der Abstand d_1 von $\Delta_1(S_1 \setminus \sigma_1((1+\varepsilon)\mathring{\mathbf{D}}^{m-s_2} \times L))$ und S_2 positiv in jeder Metrik. Dann kann man eine Riemann Metrik g nehmen, die lokal um $\Delta_1(S_1 \times \mathbf{D}^{m-s_1})$ auf $\mathbf{D}^{m-s_1}$ die euklidische Metrik ist. Es gibt sicher eine Diffeotopie $\tilde{H}$ mit kompaktem Träger auf einer großen Scheibe die $\mathbf{D}^{m-s_1}$ zu $\frac{d_1}{2} \cdot \mathbf{D}^{m-s_1}$ kontrahiert. Nun konstruiere ich eine Diffeotopie von $S_1 \times \mathbf{R}^{m-s_1}$ aus $\tilde{H}$ mit Träger auf $(S_1 \setminus \sigma_1(\mathring{\mathbf{D}}^{m-s_2} \times L) \times p \cdot \mathbf{D}^{m-s_1}$. Sei λ eine C^∞ Funktion $S_1 \longrightarrow \mathbf{R}$, die auf $\sigma_1(\mathbf{D}^{m-s_2} \times L$ gleich 0 ist , auf $\sigma_1((1+\varepsilon) \cdot \mathbf{D}^{m-s_2} \times L$ eine C^∞ Funktion des Radius in der $\mathbf{D}^{m-s_2}$ die bei 1 gleich 0 und bei $1+\varepsilon$ gleich 1 und auf dem Rest von S_1 gleich 1 ist. Sei dann $H(x,y,t) := (x, \tilde{H}(y, \lambda(x) \cdot t))$ so hat man erreicht daß der $H_1 \circ \Delta_1(S_1 \setminus (\sigma_1((1+\varepsilon) \cdot \mathbf{D}^{m-s_2} \times L) \times \mathbf{D}^{m-s_1} \cap S_2 = \emptyset$ gilt . Dann hat $\Delta_2(S_2 \setminus (\sigma_2((1+\varepsilon) \cdot \mathbf{D}^{m-s_1} \times L))$ positiven Abstand in jeder Metrik zu $\Delta_1(S_1 \times \mathbf{D}^{m-s_1})$ und daher kann man jetzt dieselbe Konstruktion mit $S_2 \times \mathbf{D}^{m-s_2}$ wie mit S_1 ausführen und erhält das gewünschte Ergebnis.

14. Die Auswirkungen der bewiesenen und zitierten Sätze auf die Theorie der Kobordismen.

Es gibt mehrere Anwendungen der Aussagen in den letzten beiden Kapiteln auf die Theorie der Kobordismen. Der Zusammenhang zwischen beiden läßt sich so umreissen
Das grundlegende Problem ist das. In Lemma 11.6 wurde bewiesen, daß zu jedem kritischen Punkt p einer Morse Funktion, und einem frei wählbaren gradientenartigen Vektorfeld G gibt es eine eindeutige Einbettung

$$h^G_{p,ext} : U^G_{1,p,ext} \longrightarrow \mathrm{Mf}(\mathcal{C})$$

Die Beliebigkeit des gradientenartigen Vektorfelds stört ein klares Bild. Denn dadurch gibt es für denselben elementaren Kobordismus überabzählbar viele Konstruktionen die einander nicht ähnlich sehen. Leider läßt sich diese Schwierigkeit nicht ausmerzen, aber mit der Anwendung von Transversalitäts und Diffeotopiesätzen kann man etwas mehr Übersicht in diese verwirrende Vielfalt bringen. Der Leser möge selbst beurteilen um wieviel klarer die Verhältnisse dadurch werden.
In diesem Kapitel wird gezeigt wie man mit dem Transversalitätssatz das Theorem 11.1 beweist und dann mit der Hilfe von Satz 13.7 eine Z-Struktur q_{normal} auf einem Kobordismus mit einer Morse Funktion, die keine kritischen Punkte vom höchsmöglichen Index hat, sodaß $q_{normal}(Bd_2(\mathcal{C}) \times 0)$ ein normaler CW-Komplex ist mit etwas übersichtlicheren Klebeabbildungen. Im nächsten Kapitel werde ich auf der Grundlage von Satz 13.7 einen Satz beweisen, der es ermöglicht, diese Ergebnisse auf beliebige C^∞ Kobordismen zu erweitern.

14.1. Lemma. *Ist $F : \mathcal{C} \longrightarrow [a,b]$ eine Morse Funktion $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ ein Intervall, auf dem keine kritischen Werte liegen $\mathcal{F} := F^{-1}(a)$ so gibt es zu jedem gradientenartigen Vektorfeld G einen Isomorphismus von Kobordismen $i_G : \mathcal{F} \times [\alpha,\beta] \longrightarrow f^{-1}[\alpha,\beta]$.*

Beweis: Definiere $i_G(x,t) := \mathrm{Fl}^t_G(x)$

14.2. Lemma. *Wählt man nun ein anderes gradientenartiges Vektorfeld $\bar{G}$ so ergibt sich $i_{\bar{G}}(x,t) = \mathrm{Fl}^t_{\bar{G}}(x)$ und $i^*_G(\bar{G})$ ist ein zeitabhängiges Vektorfeld auf$\mathcal{F}$ und $i_G(\mathrm{Fl}^t_{i^*_G(\bar{G})}(x),t) = i_{\bar{G}}(x,t)$. Also entspricht der Wechsel des gradientenartigen Vektorfeld's einer Diffeotopie von $\mathcal{F}$. und jede Diffeotopie H von $\mathcal{F}$ läßt sich durch die Verwendung von $i^*_G(\frac{\partial}{\partial t}(H))$ als gradientenartiges Vektorfeld ausführen.*

14.3Bezeichnungen. Sei $t \in [a,b]$ ein regulärer Wert der Morse Funktion $F : \mathcal{C} \longrightarrow [a,b]$, dann bezeichne ich mit $\mathcal{F}_t$ die geschlossene Mannigfaltigkeit $F^{-1}(t)$.

Sei p ein kritischer Punkt vom Index k und $t \leq F(p)$ ein regulärer Wert, sodaß in dem Intervall $[t, F(p)]$ kein kritischer Wert liegt. Dann ist $U_{1,p,ext} = \{(v,u) : r \leq 1+\varepsilon, f \in [\alpha,\beta]\}$ wobei $\|\alpha\| \geq F(p)-t$ ist. Das folgt aus dem Beweis von 11.9. Also gibt es auch die Einbettung $h_{p,ext}|\{f = F(p)-t\}$ einer $\mathbb{S}^{m-k-1} \times \overset{o}{\mathbb{D}}{}^{m-k}$ nach $\mathcal{F}_t$
Ebenso sei $t_1 \geq F(p)$ ein regulärer Wert, sodaß in $[F(p), t_1]$ kein kritischer Wert liegt, dann ist $\beta \geq t_1 - F(p)$ und es gibt die Einbettung $h_{p,ext}|\{f = t_1 - F(p)\}$ einer $\mathbb{S}^{m-k-1} \times \overset{o}{\mathbb{D}}{}^{k}$ nach $\mathcal{F}_t$
Ebenso kann es Einbettungen nach $\mathcal{F}_t$ geben, die von anderen kritischen Punkten stammen. Ich nenne solche Einbettungen dann $\varphi_{p_j,k_j,t}$ wo $p_j$der krit. Punkt und k_j sein Index ist falls $F(p_j) \geq t$ und $\acute{\varphi}_{p_j,k\cdot j,t}$ falls $F(p_j) \leq t$ ist.

Trajektorien eines beliebigen gradientenartigen Vektorfeld's schneiden $\mathcal{F}_t$ entweder in einem Punkt oder garnicht. Letzteres aber nur dann, wenn sie vorher ineinem kritischen Punkt enden. Sei also G ein solches gradientenartiges Vektorfeld Die durch $\acute{\varphi}_{p_j,k_j,t}$ eingebetteten $\mathbb{S}^{m-k_j-1}$en sind also gleichzusetzen mit den Trajektorien von $-G$ die nach p_j führen. Umgekehrt sind die eingebetteten $\varphi_{p_i,k_i,t}(\mathbb{S}^{k_i-1})$en gleichzusetzen mit Trajektorien von G die nach p_i führen. Daher kann man an Durchschnitten solcher Sphären ablesen ob und welche Trajektorien von p_i nach p_j führen

14.4. Lemma. *Schneiden sich $\acute{\varphi}_{p_j,k_j,t}(\mathbb{S}^{m-k_j-1})$ und $\varphi_{p_i,k_i,t}(\mathbb{S}^{k_i-1})$ nicht so kann man durch die Wahl einer kleineren Umgebung von p_i erreichen, daß*

$$h_{p_j,ext}(U_{p_j,ext}) \cap h_{p_i,ext}(U_{p_i,ext}) = \emptyset \text{ gilt}$$

Beweis: Man betrachte folgendes beide Sphären sind kompakt und haben daher in einer beliebigen Metrik auf $\mathcal{F}_t$ positiven Abstand, sofern sie sich nicht schneiden. Man wähle eine Riemann Metrik die auf $\varphi_{p_i,k_i,t}(\mathbf{S}^{k_i-1} \times \overset{o}{\mathbf{D}}{}^{m-k_i})$ eine Riemann Metrik auf $\mathbf{S}^{k_i-1}\times$die euklidische Metrik auf $\mathbf{D}^{m-k_i}$ ist. Dann werden lokal um $\varphi_{p_i,k_i,t}(\mathbf{S}^{k_i-1} \times \mathbf{D}^{m-k_i})$ die Abstände von der Sphäre, von der Metrik auf der $\mathbf{D}^{m-k_j}$ bestimmt. Ist der Abstand von $\acute{\varphi}_{p_j,k_j,t}(\mathbf{S}^{m-k_j-1} \times \mathbf{D}^{k_j})$ und der Sphäre gr"ßer als $1+\varepsilon$ so ist nichts zu beweisen. Andernfalls verwende man anstelle von h_{p_i} die Einbettung $\mu_\delta \circ h_{p_i}$ wo δ kleiner als der Abstand ist. Das μ_t stammt von Lemma 11.4

14.5. Lemma. *Zwischen einem Schnitt in einem Vektorbündel der außer auf einer kompakten Menge K aus der Basis der 0-Schnitt ist und dem 0-Schnitt gibt es eine Isotopie mit kompaktem Träger nämlich $h(t,x) = m_t(s_x)$ wo m_t die Multiplikation mit t im Vektorbündel und x aus dem 0-Schnitt ist.*

14.6. Lemma. *Nun kann man den Transversalitätssatz und 12.10 einsetzen und erhält ohne lange Rechnung, daß die Sphären von denen nun die ganze Zeit die Rede ist, o.B.d.A. transversal sind.*

Beweis: Man fasse $\acute{\varphi}_{p_j,k_j,t}(\mathbf{S}^{m-k_j-1} \times \mathbf{D}^{k_j}$ auf als Vektorbündel und
$\varphi_{p_i,k_i,t}(\mathbf{S}^{k_i-1}) \cup \acute{\varphi}_{p_j,k_j,t}(\mathbf{S}^{m-k_j-1} \times \mathbf{D}^{k_j}$ als Untermannigfaltigkeit.
Dann besagt Satz 13.2, daß es einen Schnitt gibt der transversal zu $\varphi_{p_i,k_i,t}|(\mathbf{S}^{k_i-1})$. Dieser Schnitt ist laut 14.5 isotop zum 0-Schnitt und laut Satz 12.10 gibt es dann eine Diffeotopie H mit kompaktem Träger, sodaß

$$H_1 \circ \acute{\varphi}_{p_j,k_j,t}|\mathbf{S}^{m-k_j-1} \text{ transversal ist zu} \varphi_{p_i,k_i,t}|(\mathbf{S}^{k_i-1})$$

Nach 14.2 kann man dann das gradientenartige Vektorfeld so verändern daß ein neues $\acute{\bar{\varphi}}_{p_j,k_j,t} = H_1 \circ \acute{\varphi}_{p_j,k_j,t}|\mathbf{S}^{m-k_j-1}$ entsteht.

14.7. Schlußfolgerungen. Die Menge der Trajektorien von $-G$ die von p_i nach p_j führen entspricht dem transversalen Durchschnitt der beiden Sphären. Der ist entweder leer oder eine $k_i - 1 + m - k_j - 1 - m + 1 = k_i - k_j - 1$ dimensionale Mannigfaltigkeit. Daher gilt:

i.) Ist $k_j \geq k_i$ so, ist dieser Durchschnitt leer
ii.) Ist der Durchschnitt nichtleer, so kann man Satz 13.7 anwenden
Ich wende mich vorläufig weiteren Folgerungen von i) zu

14.8. Lemma. *Wendet man auf i) das Lemma 14.4 an so folgt: Ein Hindernis für die Erweiterung von $U_{p_i,ext}$ nach unten kann nur ein kritischer Punkt von niedrigerem Index oder der untere Rand des Kobordismus sein. Ansonsten kann man das gradientenartige Vektorfeld so ändern, daß ein eventuelles Hindernis umgangen wird.*

Beweis: Man beachte im Zweifel den Anfang des Beweises von 11.9. Daraus geht hervor, daß ein solches Hindernis, nur ein Hindernis zur Fortsetzung einer Flußlinie des gradientenartigen Vektorfelds (in negativer Richtung), die durch $h_{p_i}(U_{1,p_i})$ verläuft, bestehen kann. Ein solches kann dann nur ein kritischer Punkt oder der untere Rand sein. Einem kritischen Punkt höhereren Indices kann wegen 14.7 i) und 14.4 immer durch Wahl der Umgebungen und des gradientenartigen Vektorfeld's ausgewichen werden.

14.9. Lemma.
Ist p_i ein krit. Punkt und $U_{p,ext} = \{(v,u) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} : r(v,u) \leq 1, f(v,u) \in]\alpha,\beta[\}$, dann gibt es eine Morse Funktion $\tilde{F}$, die außerhalb von $h_{p,ext}(U_{p,ext})$ gleich F ist und dieselben kritischen Punkte hat wie F. $\tilde{F}(p) = F(p) + \alpha + \varepsilon$ und $\tilde{F}$ hat ein gradientenartiges Vektorfeld, dessen Trajektorien sich nur durch Geschwindigkeit von Trajektorien des gradientenartigen Vektorfelds unterscheiden, mit dem $h_{p,ext}$ konstruiert wurde

Beweis: Es liegt nahe, eine C^∞ Funktion $\tilde{f}$ auf $U_{p,ext}$ zu konstruieren, die erfüllt:
$\tilde{f} = f$ auf einer Umgebung des Randes in $U_{p,ext}$

$\tilde{f} = f + \alpha + \varepsilon$ in einer Umgebung von $(0,0) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$
$\Upsilon(\tilde{f}) \geq 0$ auf $U_{p,ext} \setminus (0,0)$ Dann würde $F(p) + h_{p,ext,*}(\tilde{f})$ auf $U_{p,ext}$ und F überall sonst alle Anforderungen erfüllen.
Behauptung ohne Beweis: Es gibt eine C^∞ Funktion θ mit Träger in dem Intervall $[\alpha, \beta]$, sodaß gilt

$$\theta(t) = 0 \Leftrightarrow t \notin]\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon[,$$

$$\theta(t) = |\alpha| - \varepsilon_1 \Leftrightarrow t \in [-\delta, \delta],$$

$$\acute{\theta} \leq 1 \forall t \in \mathbf{R}.$$

Sei λ eine Glockenfunktion, die folgendes erfüllt

$$\lambda(t) = 1 \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{2}, \ \lambda(t) = 0 \leftrightarrow t \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Dann setze ich $\tilde{f}$ fest als

$$\tilde{f}(v,u) = f(v,u) - \theta(f(v,u)) \cdot \lambda(r(v,u))$$

Der Träger von $\theta(f(v,u)) \cdot \lambda(r(v,u))$ ist $\{(v,u) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} : r \leq \frac{1}{2} + \varepsilon, f \in [\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]\}$, also ist sicher $\tilde{f} = f$ auf einer Umgebung des Randes. $\theta(f(v,u)) \cdot \lambda(r(v,u))$ ist lokal konstant $= |\alpha| - \varepsilon_1$ auf $\{(v,u) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k} : r \leq \frac{1}{2}, f \in [-\delta, \delta]\}$
Nun ist noch die Ableitung zu überprüfen

$$d\tilde{f} = df - \lambda(r) \cdot \acute{\theta} \cdot df + \theta(f) \cdot \acute{\lambda} \cdot dr$$

$$df = 2(-v,u), \ dr = \frac{1}{r} \cdot (u^2 \cdot v, v^2 \cdot u)$$

df und dr sind also linear unabhängig außer dort wo $r = 0$ ist aber da ist sowieso $\acute{\lambda} = 0$ $(1 - \lambda(r) \cdot \acute{\theta})$ der Koeffizient von df istüberall größer als 0, weil $\acute{\theta} \leq 1$ und damit erfüllt $\tilde{f}$ alle Anforderungen. Als gradientenartiges Vektorfeld kann man nun $1/\Upsilon(\tilde{f}) \cdot \Upsilon$ verwenden.

Aus 14.8 und 14.9 kann man dann den Satz 11.1 durch eine triviale Induktion beweisen. Von diesem Satz gibt es in der Literatur aber immerhin genug Beweise.

15. Konsequenzen des Satzes 13.7

In diesem Kapitel wird stets angenommen, daß eine Morse Funktion $FC \longrightarrow [a,b]$ so aussieht. F hat $m+1$ Werte $w_0, w_1 \dots w_m$, für die gilt $w_0 = a, w_m = b$, $w_i \geq w_j \Leftrightarrow i \geq j$ und $F^{-1}(w_i)$ enthält alle kritischen Punkte vom Index i. Es sei denn eine andere Annahme wird ausdrücklich verwendet. Die obige Grundannahme ist eine Folgerung aus Satz 11.1.

15.1.Einiges über Kartenwechsel.

Angenommen $\varphi_{p_i,k_i,t}(\mathbf{S}^{k_i-1})$ und $\acute{\varphi}_{p_j,k_j,t}(\mathbf{S}^{m-k_j-1})$ schneiden einander, wobei $t \in [w_j, w_i]$ ein regulärer Wert ist. Dann tun sie das o.B.d.A. transversal, und der Durchschnitt ist eine $k_i - k_j - 1$ dimensionale Untermannigfaltigkeit L von $\mathcal{F}_t$. Durch Anpassung des gradientenartigen Vektorfeld's G kann man erreichen, daß

$$\begin{array}{ccc} L \times \mathbf{D}^{k_j} \times \mathbf{D}^{m-k_i} & \xrightarrow{A} & \mathbf{S}^{k_i-1} \times \mathbf{D}^{m-k_i} \\ {\scriptstyle D}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{p_i,k_i,t}} \\ \mathbf{S}^{m-k_j-1} & \xrightarrow[\acute{\varphi}_{p_j,k_j,t}]{} & \mathcal{F}_t \end{array}$$

kommutiert, wobei A und D Vektorbündelisometrien über Tubenumgebungen .

$$\sigma_1 : l \times \mathbf{D}^{k_j} \longrightarrow \mathbf{S}^{k_i-1}, \ \sigma_2 : L \times \mathbf{D}^{m-k_i} \longrightarrow \mathbf{S}^{m-k_j-1}$$

der Untermannigfaltigkeit L in den Sphären sind. Außerdem bin ich im Beweis von beliebig gewählten Tubenumgebungen ausgegangen. Man kann daher die Tubenumgebungen vorher frei wählen. Außerdem kann man in globalen Bündel Koordinaten (die beiden Bündel sind trivial) $A(l,v,u) = (\sigma_1(l,v), A_l \cdot u)$, $D(l,v,u) = (\sigma_2(l,u), D_l \cdot v)$ schreiben wo A_l, D_l von $l \in L$ differenzierbar abhängige orthogonale Matritzen sind.

Sei nun $\gamma_{i,j}$ der Kartenwechsel zwischen $U_{1,p_i,ext}, h_{p_i,ext}$ und $U_{1,p_j,ext}, h_{p_j,ext}$ und $\bar{\gamma}_{i,j}$ seine Einschränkung auf $\mathcal{F}_t$, dann kann man in Koordinaten schreiben

$$\bar{\gamma}_{i,j}(\sigma_1(l,v),u) = (\sigma_2(l, A_l^{-1} \cdot u), D_l \cdot v).$$

$D_l \cdot v$ wird durch l, v schon bestimmt. Das heißt durch den Punkt auf der Sphäre $\mathbf{S}^{k_i-1}$, während der Punkt auf der $\mathbf{S}^{m-k_j-1}$ durch l und u bestimmt wird.

Die Konstruktion des Kartenwechsels $\gamma_{i,j}$ aus $\bar{\gamma}_{i,j}$. Sei Υ_i das Vektorfeld $\frac{1}{v2+u^2} \cdot (-v,u)$ auf $\mathbf{R}^{k_i} \times \mathbf{R}^{m-k_i}$ und Υ_j dasselbe mit j statt i. Da die beiden Umgebungen nach dem gleichen gradientenartigen Vektorfeld konstruiert sind müssen, da Flußlinien in Flußlinien übergehen Flußlinien von Υ_i in Flußlinien von Υ_j übergehen Am besten läßt sich das so als Formel aufschreiben.

$$\text{Falls } \bar{\gamma}_{i,j} \circ Q_i(\tau_i, \omega_i, r_i, t - w_i) = Q_j(\tau_j, \omega_j, r_j, t - w_j),$$
$$\text{dann ist } \gamma_{i,j} \circ Q_i(\tau_i, \omega_i, r_i, s - w_i) = Q_j(\tau_j, \omega_j, r_j, s - w_j).$$

Das definiert den Kartenwechsel auf einer offenen dichten Menge des Durchschnitts. Vielleicht ist auch

$$\gamma_{i,j} \circ Q_i(\sigma_1(l,v), \omega(u), \sqrt{u^2}, s - w_i) = Q_j(\sigma_2(l, Al^{-1} \cdot u), \tau_j(D_l \cdot v), \sqrt{v^2}, s - w_j)$$

eine übersichtliche Schreibweise.

15.2. Das Eliminieren kritischer Punkte. *Aus der (Ko-)Homologie Theorie kann man folgern, daß sich zwei kritische Punkte p_i, p_j nur eliminieren lassen, wenn $k_i = k_j + 1$ ist und $\varphi_{p_i,k_i,t}, \varphi_{p_j,k_j,t}$ Durchschnittszahl* 1 *oder* -1 *haben.*

15.3. Ich wende mich aber jetzt dem Spezialfall zu $k_i = k_j + 1$ und L ist ein Punkt. Dann kann man die Koordinaten in U_{p_i} so wählen, daß dieser Punkt auf der $\mathbf{S}^{k_i-1}$ durch die erste Koordinate im $\mathbf{R}^{k_i}$ gegeben ist. Ebenso für U_{p_j} wähle man Koordinaten , sodaß dieser Punkt$\in$ $\mathbf{S}^{m-k_j-1}$ die erste Koordinate in $\mathbf{R}^{m-k_j}$ ist.

Das ist so gemeint: Es handelt sich um Punkte auf einer $\mathbf{S}^{k_i-1}$ beziehungsweise auf einer $\mathbf{S}^{m-k_j-1}$ diese Sphären sind in den konstruierten Karten Äquipotentialflächen der Funktion f geschnitten mit dem entsprechenden Unterraum $\mathbf{R}^{k_i}$ beziehungsweise $\mathbf{R}^{m-k_j-1}$. Sicherlich gibt es einen linearen Koordinatenwechsel in diesem Unterraum, der diesen Durchschnittspunkt in jeden beliebigen Punkt auf der entsprechenden Sphäre abbildet. Nun erinnere man sich daran, daß an A, D nur jeweils eine Homotopieklasse von Abbildungen $L \longrightarrow \mathcal{O}(m-k_i)$ bzw $L \longrightarrow \mathcal{O}(k_j)$ festgelegt ist. Da L nur ein Punkt ist steht nur Orientierungsumkehrung oder die Identität zur Auswahl. Orientierungsumkehrung kann man vermeiden indem man auf den Koordinaten andere Orientierungen wählt. O.B.d.A. ist also ein Kartenwechsel in diesem Fall immer gleich wählbar, dh er ist durch $m, k_i, w_i - w_j$ schon eindeutig festgelegt bis auf die beliebige Wahl der Tubenumgebungen.

15.4. Satz (first cancellation Theorem). *Angenommen es gibt auf $\mathcal{C}$ eine Morse Funktion $F : \mathcal{C} \longrightarrow [a,b]$ und dazu ein gradientenartiges Vektorfeld, sodaß zwischen zwei krit. Punkten p_i und p_j genau eine Trajektorie T von G verläuft und sich die Sphären in $\mathcal{F}_t$ transversal schneiden. Dann gibt es auf $\mathcal{C}$ eine Morse Funktion die bei p_i und p_j keine kritischen Punkte hat aber sonst dieselben kritischen Punkte wie F, und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von T dasselbe gradientenartige. Vektorfeld*

15.5. Lemma. *Man kann o.B.d.A. annehmen, daß*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_a \underset{g_1}{\bullet} \bar{\mathcal{C}} \underset{g_2}{\bullet} \mathcal{C}_b$$

gilt wobei $\bar{C}$ als einzige krit. Punkte von F p_i, p_j enthält. Allerdings muß man hier von der ursprünglichen Annahme am Anfang von Kapitel 15 abgehen.

Beweis: Nach den Lemmata 14.8 und 14.9 kann man die kritischen Werte so verschieben, daß es ein gradientenartiges Vektorfeld der neuen Morse Funktion gibt, dessen Trajektorien sich nur durch Geschwindigkeit von denen des alten gradientenartigen Vektorfeld's unterscheiden. Die Bedingungen für eine Verschiebung der Werte aller kritischen Punkte vom Index k_i außer p_i nach oben, sowie die Bedingungen für eine Verschiebung der Werte aller kritischen Punkte vom Index k_j außer p_j nach unten sind gegeben.

Sei also $\bar{C} =: (W, V, \acute{V})$

Ich werde nun nach einer Idee von Marston Morse das gradientenartige Vektorfeld so in einer Umgebung der Trajektorie ändern, daß ein Vektorfeld entsteht, dessen Trajektorien von V nach $\acute{V}$ verlaufen

15.6. Konstruktion einer Umgebung der Trajektorie T, die mit praktischen Koordinaten versehen ist.. Sei $\phi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine C^∞ Funktion mit den Eigenschaften

$$\phi|_{]-\infty,\varepsilon]} = \mathrm{Id}_{]-\infty,\varepsilon]}\,, \; \phi|_{[1-\varepsilon,\infty[}(t) = t-1,$$

$$\phi(t) \geq 0 \text{ für } t \in [0,1] \int_0^1 \phi(t)dt = w_i - w_j$$

Dann ist das Vektorfeld auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{k_j} \times \mathbf{R}^{m-k_i}$, $(t, v, u) = \frac{1}{(\phi(t))^2+v^2+u^2}(\phi(t), -2v, 2u)$ ein gradientenartiges Vektorfeld zu $\int_0^t \phi(t)dt + u^2 - v^2$, und die einzige Trajektorie, die die kritischen Punkte $(0,0,0)$ und $(1,0,0)$ verbindet ist die Strecke zwischen ihnen. Es gibt Einbettungen

$$h_{(0,0,0)} : \mathbf{R}^{k_j} \times \mathbf{R}^{m-k_j} \longrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{k_j} \times \mathbf{R}^{m-k_i}$$
$$h_{(1,0,0)} : \mathbf{R}^{k_i} \times \mathbf{R}^{m-k_i} \longrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{k_j} \times \mathbf{R}^{m-k_i}$$

in Umgebungen der kritischen Punkte. $h_{(0,0,0)}$ identifiziert die erste Koordinate in $\mathbf{R}^{m-k_j}$ mit der $\mathbf{R}$ Koordinate und $h_{(1,0,0)}$ bildet die erste Koordinate x_1 in $\mathbf{R}^{k_i}$ affin durch $1 + x_1$ auf die $\mathbf{R}$ Koordinate ab, sonst sind beide die Identität. Den tatsächlichen Kartenwechsel der durch das gradientenartige Vektorfeld festgelegt wird braucht man zum Glück nicht ausrechnen, denn in einer Umgebung der Trajektorie zwischen $(0,0,0)$ und $(1,0,0)$ kann man das gradientenartige Vektorfeld so verändern, daß ein vorbestimmter Kartenwechsel entsteht, siehe 15.1 bis 15.3, und denselben Kartenwechsel kann man zwischen $U_{p_j,ext}, h_{p_j,ext}$ und $U_{p_i,ext}, h_{p_i,ext}$ durch Anpassung des gradientenartigen Vektorfelds wählen. Daher kann man die Vereinigung der Bilder von $h_{(0,0,)}, h_{(1,0,0)}$ in W einbetten, darin ist auf jeden Fall folgende Menge enthalten. Sei $F : C \longrightarrow [-\varepsilon, w_i - w_j + \varepsilon]$, $F(p_j) = 0$, $F(p_i) = w_i - w_j$ dann gibt es eine Umgebung U_r von $[-\sqrt{w_i - w_j + \varepsilon}, 1 + \sqrt{w_i - w_j + \varepsilon}] \times 0 \times 0$, $U_\mathrm{r} := \{(t, v, u) : t \in [-\sqrt{w_i - w_j + \varepsilon}, 1 + \sqrt{w_i - w_j + \varepsilon}], u^2 + v^2 \leq \mathrm{r}\}$ und von der gibt es eine C^∞ Einbettung v nach W. $v([-\sqrt{w_i - w_j + \varepsilon}, 1 + \sqrt{w_i - w_j + \varepsilon} \times 0 \times 0])$ nenne ich $\bar{T}$ und $v([0,1] \times 0 \times 0)$ nenne ich T, letzteres ist die Trajektorie von p_j nach p_i. In einer kleineren Umgebung von $\bar{T}$ ändere ich das gradientenartige Vektorfeld zu $v_*(\frac{1}{(\phi(t))^2+v^2+u^2} \cdot (\phi(t), -2v, 2u))$ und dieses lokal geänderte gradientenartige Vektorfeld nenne ich G. $\bar{T}$ zerfällt in drei Trajektorien, eine von V nach p_i, das ist $v([1, 1 + \sqrt{w_i - w_j + \varepsilon}] \times 0 \times 0)$ T von p_j nach p_i und $v([-\sqrt{w_i - w_j + \varepsilon}, 0] \times 0 \times 0)$ von p_j nach $\acute{V}$

Die Idee ist nun das Vektorfeld lokal so zu verändern, daß $\bar{T}$ eine Trajektorie wird, die von V nach p_i von da in umgekehrter Richtung zum ursprünglichen Vektorfeld nach p_j und von dort weiter nach $\acute{V}$ geht.

Das geht zwar leicht, aber das globale Verhalten des neuen Vektorfelds ist schwer zu beurteilen. Vorläufig rechne ich in den eben konstruierten Koordinaten. Es wird jedoch genügen folgendes zu wissen:

15.7Lemma. *Es gibt eine Umgebung $v(U_\delta)$ von $\bar{T}$, $U_\delta = \{u^2+v^2 \leq \delta\}$, sodaß keine Trajektorie von G $v(U_\delta)$ schneidet, dann $v(U)$ verläßt, und wieder nach $v(U_\delta)$ zurückkehrt*

Beweis: Andernfalls gibt es eine Folge von Trajektorien T_k, sodaß T_k durch Punkte r_k, s_k, t_k in dieser Reihenfolge verläuft, sodaß die Häufungspunkte von r_k und t_k auf $\bar{T}$ liegen. $W \setminus v(U_r)$ ist kompakt, und daher kann man die T_k so wählen, daß die Folge s_k in einen Punkt $s \in W \setminus v(U_r)$ konvergiert . Die Trajektorie T_s durch s kann nicht von p_j nach p_i verlaufen wegen der Voraussetzung, daß es nur *eine* solche gibt. Also kommt T_s entweder von V, oder geht nach $\acute{V}$, oder beides. Wie man später aus den Argumenten leicht sehen wird, ist es nur nötig folgenden Fall zu untersuchen.
Angenommen T_s kommt von V. Sei $s_a := T_s \cap V$ und $\bar{T} \cap V := P \in V$. Es gibt drei Fälle.

(1) $T_s$führt von s_a nach s und von dort nach p_j und endet daher dort. Dann ist $F(s) \leq F(p_j) = 0$. s_a ist sicher von P durch eine kompakte Umgebung K getrennt . Dann ist $\bar{K} := \mathrm{Fl}^t_G(K \times [0, F(s)+\varepsilon])$ eine kompakte Umgebung, die disjunkt ist zu $\bar{T}$ und daher positiven Abstand zu $\bar{T}$ hat. $\bar{K}$ enthält alle Punkte s_k für große k und auch alle zugehörigen Punkte r_k. Das ist ein Widerspruch.

(2) T_s verläuft nach p_i und endet daher dort.
Es gilt: s_a ist durch eine kompakte Unmgebung K von $\varphi_{p_j,-\varepsilon}(\mathbf{S}^{k_j-1})$ getrennt. Daher ist $F(s) \leq F(p_i)$. $\bar{K} := \mathrm{Fl}^t_G(K \times [0, F(s) + \varepsilon])$ eine kompakte Umgebung von s, disjunkt zu $\bar{T}$. $\bar{K}$ enthält alle Punkte s_k, für große k und auch alle zugehörigen Punkte r_k. Das ist ein Widerspruch.

(3) T_s verläuft nach $\acute{V}$. Sei dann $F(p_j) \leq t \leq F(p_i)$ und $\acute{P} := T_s \cap \mathcal{F}_t$. $\acute{P}$ ist dann sicher getrennt von $\varphi_{p_i,t}(\mathbf{S}^{k_i-1})$ und $\acute{\varphi}_{p_j,t}(\mathbf{S}^{m-k_j-1})$ durch eine kompakte Umgebung K. Sei nun $\bar{K} := \mathrm{Fl}^t_G(K \times [-t-\varepsilon, w_i - w_j + \varepsilon - t])$. $\bar{K}$ enthält alle Punkte s_k, für große k und auch alle zugehörigen Punkte r_k. Das ist ein Widerspruch. ∎

15.8. Jetzt ändere ich das Gradientenfeld. $v^*(grad(F)) = (\phi(t), -2v, 2u)$ Sei λ eine C^∞ Funktion $\lambda : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ mit Träger $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}] \times [-\varepsilon_1, w_i - w_j + \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ und das neue Vektorfeld ξ sei $\lambda((u^2+v^2), t) \cdot (-1, -2v, 2u) + (1 - \lambda((u^2+v^2), t)) \cdot v^*(grad(F))$ in Koordinaten. Das läßt sich zweifellos durch $grad(F)$ überall sonst zu einem Vektorfeld auf W ergänzen. In den gewählten Koordinaten ist jedenfalls der $\mathbf{R}^{k_j} \times \mathbf{R}^{m-k_i}$-Anteil $(-2v, 2u)$. Das heißt die $\mathbf{R}^{k_j} \times \mathbf{R}^{m-k_i}$ Koordinaten von $\mathrm{Fl}^s_\xi(t, v, u)$ sind $exp(-2s) \cdot v, exp(2s) \cdot u)$, sofern die Flußlinie nicht $v(U)$ verläßt. Daraus kann man folgern, eine Flußlinie verläßt entweder nach endlicher Zeit $v(U)$, dadurch daß $u^2 + v^2$ zu groß wird, oder die u Koordinate ist 0 und die Flußlinie nähert sich dem Bild des Intervalls, oder sie verläßt $v(U)$ „vorher" aus irgendeinem anderen Grund. Das Bild des Intervalls ist eine Flußlinie von ξ, die von V nach p_j von dort nach p_i und dann nach $\acute{V}$ geht, und ξ angewandt auf die Koordinatenfunktion t ist in einer kleinen Umgebung immer kleiner als eine fixe negative Zahl und daher verläuft jede Trajektorie die $v(U)$ nicht verläßt nach $\acute{V}$.

15.9. Lemma. *Alle Trajektorien von ξ verlaufen von V nach $\acute{V}$*

Beweis: Alle Trajektorien, deren Durchschnitt mit $v(U_{\frac{\delta}{2}})$ leer ist, verlaufen sowieso so, denn es sind Trajektorien von G, die in keinen kritischen Punkt verlaufen. Sei x ein Punkt aus $v(U_{\frac{\delta}{2}})$ und T_x die Trajektorie von ξ durch x.
Laut 15.7 gilt : Falls T_x $v(U_\delta)$ verläßt, dann kehrt T_x nichtmehr in diese Menge zurück.

Daraus folgt: T_x bleibt dann eine Trajektorie von G, und die verläuft immer nach $\acute{V}$. Verläßt T_x $v(U_\delta)$ nicht, dann nähert sich T_x beliebig nahe (siehe 15.8) an $\bar{T}$ an, falls sie nicht vorher $\acute{V}$ erreicht, aber in einer kleinen Umgebung von $\bar{T}$ verlaufen alle Trajektorien nach $\acute{V}$

Dieselben Argumente sind auch für die negative Richtung und V anwendbar. ∎

15.10. Lemma. *In der gegebenen Situation ist $(W, V, \acute{V}) \cong (V \times [0,1], V \times 0, V \times 1)$.*

Beweis: Um umständliche technische Konstruktionen zu vermeiden, verwende ich die Tatsache, daß $W = F^{-1}[-\varepsilon, w_i - w_j + \varepsilon] \subset \mathrm{Mf}(\mathcal{C})$ ist und $\frac{\xi}{\langle \xi, \xi \rangle} = G$ in einer Umgebung des Randes von W. Sei $\frac{\xi}{\langle \xi, \xi \rangle} =: \xi_1 | W$ und sonst überall $\xi_1 = G$, dann ist $\acute{V}$ wegen 15.9 sicher im Bild von $\mathrm{Fl}^t_{\xi_1} o incl_V : V \times \mathbf{R} \supset \mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{Mf}(\mathcal{C})$ und $\acute{V}$ ist sicher transversal zu der Abbildung daher ist $(\mathrm{Fl}^t_{\xi_1} o incl_V)^{-1}(\acute{V})$ eine Untermannigfaltigkeit von Kodimension 1 in $\mathcal{O}$. Zu jedem Punkt $v \in V$, muß es, wegen 15.9 genau einen Zeitpunkt $t(v)$ geben, sodaß $\mathrm{Fl}^{t(v)}_{\xi_1}(v) = \acute{v} \in \acute{V}$ ist. $\acute{v}$ ist durch v eindeutig bestimmt, weil die Trajektorien eindeutig sind. Die Aussage mit der Untermannigfaltigkeit bedeutet nichts anderes, als daß $t(v)$ C^∞ ist. Nun definiere ich das C^∞ Vektorfeld $\tilde{\xi}$ auf W durch $\tilde{\xi}(\mathrm{Fl}^s_{\xi_1} o incl_V(v) := t(v) \cdot \xi(\mathrm{Fl}^s_{\xi_1} o incl_V(v))$. Dann ist

$$\mathrm{Fl}^t_{\tilde{\xi}} o incl_V : V \times [0,1] \xrightarrow{\cong} W$$

ein Diffeomorphismus wie man leicht nachrechnet, und dieser Diffeomorphismus ist auch ein Isomorphismus von Kobordismen.

Das heißt wenn man auf 15.5 zurückkommt, daß

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_a \underset{g_1}{\bullet} Bd_2(\mathcal{C}_a) \times [0,1] \underset{g}{\bullet} \mathcal{C}_b$$

gilt wo g ein Diffeomorphismus ist der von g_2 und dem eben konstruierten Diffeomorphismus von V und $\acute{V}$ bestimmt wird. Da sich Morse Funktionen wie Kobordismen zusammensetzen lassen, folgt leicht 15.4. ∎

Mit diesem Satz ist die Grundlage dafür gegeben, daß ich auch konstruierte Kobrdismen vom Index m behandeln kann

15.11. Lemma. *Ist $\mathcal{C}$ ein Kobordismus, $\mathrm{Mf}(\mathcal{C})$ zusammenhängend und $F : \mathcal{C} \longrightarrow [a,b]$ eine Morse Funktion. Dann kann man F so ändern , daß gilt:*

(1) *Ist $Bd_1(\mathcal{C}) = \emptyset$, so gibt es genau einen kritischer Punkt vom Index 0*
(2) *Ist $Bd_1(\mathcal{C}) \neq \emptyset$, dann gibt es keine kritischen Punkte vom Index 0.*
(3) *Ist $Bd_2(\mathcal{C}) = \emptyset$, so gibt es genau einen kritischen Punkt vom Index m.*
(4) *Ist $Bd_2(\mathcal{C}) \neq \emptyset$, dann gibt es keine kritischen Punkte vom Index m.*

Bei der Änderung bleiben kritischen Punkte vom Index k, $1 \leq k \leq m-1$ erhalten.

Der Beweis braucht einige Sublemmata.

15.12. Lemma. *Ist $m \geq 1$, dann ist die 0-te (KO-)Homologie von $\mathrm{Mf}(\mathcal{C})$ schon bestimmt durch die 0-te (KO-)Homologie von $F^{-1}[a,\acute{b}]$, wo $w_1 \leq \acute{b} \leq w_2$ ist.*

Beweis: Ein Kobordismus setzt sich laut Satz 11.1 zusammen aus $F^{-1}[a,\acute{c}]$, wo $w_{m-1} \leq \acute{c} \leq b$ gilt, und $F^{-1}[\acute{c},b]$. Letzteres ist isomorph zu $n \times (b-\acute{c}) \cdot \mathbf{D}^m \sqcup Bd_2(\mathcal{C}) \times [\acute{c},b]$ wobei $F^{-1}[a,b] \setminus n \times \mathbf{D}^m \cong F^{-1}[a,\acute{c}]$ ist.

$F^{-1}[a,\acute{c}]$ ist Homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex mit einer k Zelle für jeden kritischen Punkt vom Index k. Die m -Zellen sind entlang einer Einbettung des Randes angeklebt und es gibt sicher eine Mayer Vietoris Seqenz:

$$\begin{aligned}\ldots \longrightarrow H_i(n \times \mathbf{S}^{m-1}) \xrightarrow{H(incl)\oplus H(incl)} H_i(n \times \mathbf{D}^m) \oplus H_i(F^{-1}[a,\acute{c}]) \longrightarrow H_i(F^{-1}[a,b]) \\ \longrightarrow H_{i-1}(n \times \mathbf{S}^{m-1}) \longrightarrow \ldots\end{aligned}$$

Die Abbildung $H(incl) \oplus H(incl)$ ist in Dimension 0 aber offensichtlich $\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}^n} \oplus \eta$ wo

$$\eta : \mathbf{Z}^n \longrightarrow \mathbf{Z},\ \eta(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{i=1}^n z_i$$

Daraus folgt $\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}^n} \oplus \eta$ ist insbesondere injektiv und der Kokern dieser Abbildung ist isomorph zu $H_0(F^{-1}[a,b])$, wegen

$$0 \longrightarrow H_0(n \times \mathbf{S}^{m-1}) \xrightarrow{H(incl)\oplus H(incl)} H_0(n \times \mathbf{D}^m) \oplus H_0(F^{-1}[a,\acute{c}]) \longrightarrow H_0(F^{-1}[a,b]) \longrightarrow 0$$

$H_0(F^{-1}[a,b])$ ist frei, also auch der Kokern und dieser Kokern muß ebensoviele Erzeuger haben wie $H_0(F^{-1}[a,\acute{c}])$

$F^{-1}[a,\acute{c}]$ ist homotopieäquivalent zu einem relativen CW-Komplex und ich behaupte nun F^{-1} ist homotopieäquivalent zu dessen 1-Gerüst. Stimmt diese Behauptung dann ist das Lemma bewiesen. Diese Behauptung ist aber ein Korollar eines Satzes den ich als nächstes beweisen will.

15.13. Satz. *Sei $\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \mathcal{C}_1 \ldots \mathcal{C}_{m-1}$ ein Kobordismus mit einer Morse Funktion F, sodaß $F^{-1}[a_i, b_i]$ $\mathcal{C}_i$ ist. Dann ist $F^{-1}[a, b_l]$ homotopieäqivalent zum l Gerüst des zugehörigen CW-Komplexes.*
Genauer ausgedrückt: Aus diesen Daten kann man (nicht eindeutig) eine Zusammensetzung von konstruierten Kobordismen aufbauen. Dieser entspricht dann eine Z-Struktur und ein CW-Komplex eindeutig. Aber es ist praktischer, $\mathcal{C}_i$ nur dann als konstruierten Kobordismus aufzufassen, falls es kritische Punkte der vom Index i gibt, und dort die Z-Struktur zu verwenden. Andernfalls ist $\mathcal{C}_i$ ein Zylinder und auf dem Zylinder gibt es auch eine eindeutige triviale Z-Struktur. Das hat den Zweck ,daß dann keine Fallunterscheidungen mehr getroffen werden müssen.

Beweis: Der CW-Komplex wird nun, wenn man wie oben beschrieben vorgeht, stufenweise aufgebaut:

$$Bd_2(\mathcal{C}_{m-1})/_{\bar{q}_{m-1}} \cong n_{m-1} \times \mathbf{D}^{m-1} \underset{\ldots}{\sqcup} Bd_1(\mathcal{C}_{m-1}),$$

$$\text{nächstens} Bd_2(\mathcal{C}_{m-2})/_{\bar{q}_{m-2}} \cong n_{m-2} \times \mathbf{D}^{m-2} \underset{\ldots}{\sqcup} Bd_1(\mathcal{C}_{m-2})$$

$$\text{der CW-Komplex zu } \mathcal{C}_{m-2} \underset{q_m-2}{\bullet} \mathcal{C}m-1 \text{ ist dann } n_{m-1} \times \mathbf{D}^{m-1} \underset{\ldots}{\sqcup} Bd_1(\mathcal{C}_{m-1}/_{\bar{q}_{m-2,total}}$$

das $m-2$ Gerüst dieses Komplexes ist $Bd_2(\mathcal{C}_{m-2})/_{\bar{q}_{m-2}}$ und auf offensichtliche Weise eingebettet in $n_{m-1} \times \mathbf{D}^{m-1} \underset{\ldots}{\sqcup} Bd_1(\mathcal{C}_{m-1}/_{\bar{q}_{m-2,total}}$ Der CW-Komplex zu $\mathcal{C}$ ist

$$Bd_2(\mathcal{C})/_{q_{m-1}}/_{q_{m-2,total}} \ldots / \ldots /_{q_{0,total}}.$$

Alle Zellen von Dimension $\leq l$ sind dabei Quotienten von $Bd_2(\mathcal{C}_l)$ mit denselben Quotientenrelationen, mit denen auch der CW-Komplex zu $\mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \mathcal{C}_1 \ldots \mathcal{C}_l$ konstruiert wird. Also ist letzterer isomorph zum l-Gerüst und nach Voraussetzung ist

$$\mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \mathcal{C}_1 \bullet \cdots \bullet \mathcal{C}_l \cong F^{-1}[a, b_l] \quad \blacksquare$$

15.14. Sublemma. *Sei $\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \mathcal{C}_1$, dann werden durch $(q := q_0 \underset{g_0}{\bullet} q_1)|Bd_2(\mathcal{C}) \times 0 \longrightarrow \mathrm{Mf}(\mathcal{C})$ die 1-Zellen abgebildet in die Trajektorien des gradientenartigen Vektorfelds, die in die kritischen Punkte vom Index 1 gehen, und entweder vom unteren Rand oder von einem kritischen Punkt mit Index 0 kommen.*

Beweis: Für q_1 auf $\mathcal{C}_1$ gilt das, wegen der Konstruktion von $\tilde{\Pi}$ in 9.3, wodurch $\acute{\varphi}\mathbf{S}^{m-2} \times \frac{1}{2} \cdot \mathbf{D}^1$ abgebildet wird auf $j_1(\alpha \cdot \mathbf{D}^1)$, wenn man $\mathcal{C}_1$ als $\mathcal{K}(V, k, \varphi)$ auffasst, bzw. auf $h_{p_i, ext}(\mathbf{R})$, wenn man das nicht tut,aber die Z-Struktur von $\mathcal{K}(V, k, \varphi)$ überträgt. Die Randpunkte einer Zelle sind zwei Punkte, von denen o.B.d.A. nur die Zusammenhangskomponente festgelegt ist. Die Z-Struktur q_0 ist auf den $\mathbf{D}^m$ die Abbildung $\pi : \mathbf{S}^{m-1} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbf{D}^m$, $\pi(r, \omega) = r \cdot \omega$. Wählt man bei der Konstruktion der zusammengesetzten Z-Struktur den Isomorphismus von $\mathcal{C}_1$ nach $Bd_2(\mathcal{C}_0) \times [0, 1] \underset{g}{\bullet} \mathcal{C}_1$ so:
Dieser Isomorphismus wird in 5.4 (Konstruktion der Z-Struktur) durch einen Kragen festgelegt, den kann man mit der Hilfe des gradientenartigen Vektorfeld,das in 8.9 festgelegt ist konstruieren.
So werden durch $\mathrm{Id} \underset{g}{\sqcup} q_0$ Trajektorien in Trajektorien abgebildet, also insbesondere diejenigen die 1-Zellen repräsentieren $\blacksquare$

Beweis von Lemma 15.12: Nun ist bewiesen, daß aus $\mathrm{Mf}(\mathcal{C})$ ist zusammenhängend folgt, daß $F^{-1}[a, \acute{b}]$ zusammenhängend ist.
(1) Angenommen $Bd_1(\mathcal{C}) \neq \emptyset$ und es gibt einen kritischen Punkt vom Index 0, dann repräsentiert dieser eine 0-Zelle und die müßte durch eine 1-Zelle mit $Bd_1(\mathcal{C})$ oder einer anderen 0-Zelle verbunden sein. In beiden Fällen enthält die 1-Zelle eine Trajektorie, die von einem Punkt vom

Index 1, nach dem krit Punkt vom Index 0 geht, und die zweite Trajektorie verläuft nicht in diese $\mathbb{D}^m$. Damit sind die Bedingungen für die Elimination dieser kritischen Punkte gegeben.

(2) Ist $Bd_1(\mathcal{C}) = \emptyset$, dann hat F sicher ein lokales Minimum, und das ist ein kritischen Punkt vom Index 0. Gibt es noch einen zweiten solchen, so müssen beide durch eine 1-Zelle verbunden sein. Diese bedeutet wieder einen kritischen Punkt vom Index 1 der mit beiden genau durch eine Trajektorie verbunden ist. Daher kann man einen der beiden kritischen Punkte vom Index 0 eliminieren.

(3), (4) beweist man indem man (1) und (2) auf $-F$ anwendet und dann wieder die negative der neuen Morse Funktion nimmt.

15.15. Satz. *Ein Kobordismus $\mathcal{C}$ mit leerem Oberem Rand entspricht einem CW-Komplex, der homöomorph ist zu* $\mathrm{Mf}(\mathcal{C})$. *Genauer: $\mathcal{C}$ hat eine Darstellung als $\mathcal{K}(\Gamma)$ wo Γ eine Zusammensetzung von konstruierten Kobordismen ist, und Γ hat als konstruierten Kobordismus von Dimension m den Raum* $(\mathbb{S}^{m-1}, m, \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{m-1}})$. *$\Gamma$ entspricht eindeutig ein CW-Komplex und dieser CW-Komplexe ist homöomorph zu* $\mathrm{Mf}(\mathcal{C})$.

Beweis:

$$\text{Sei } \mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \dots \underset{g_{m-1}}{\bullet} \mathcal{C}_m$$

$Bd_1(\mathcal{C}_m)$ ist wegen 15.12 o.B.d.A. eine $\mathbb{S}^{m-1}$ und der relative CW-Komplex zu $\mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \dots \underset{g_{m-2}}{\bullet} \mathcal{C}_{m-1}$ ist ein Quotient der Sphäre.Es gilt auch:

$$\mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \dots \underset{g_{m-2}}{\bullet} \mathcal{C}_{m-1} \underset{gm-1}{\bullet} (\mathbb{S}^{m-1} \times [0,1], \mathbb{S}^{m-1} \times 0, \mathbb{S}^{m-1} \times 1) \cong \mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \dots \underset{g_{m-2}}{\bullet} \mathcal{C}_{m-1}.$$

Von $\mathrm{Mf}(\mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \dots \underset{g_{m-2}}{\bullet} \mathcal{C}_{m-1} \underset{gm-1}{\bullet} (\mathbb{S}^{m-1} \times [0,1], \mathbb{S}^{m-1} \times 0, \mathbb{S}^{m-1} \times 1))$ nach $\mathrm{Mf}(\mathcal{C})$ gibt es die Quotientenabbildung $\pi \underset{g_{m-1}}{\sqcup} \mathrm{Id}$, $\acute{\pi}(\omega, r) := (1-r) \cdot \omega$.

Im folgenden Diagramm ist der untere Pfeil eine wohldefinierte Quotientenabbildung

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{m-1} \times [0,1] \arrow[r, "q^{m-1}"] \arrow[d, "\acute{\pi}"'] & \mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \dots \underset{g_{m-2}}{\bullet} \mathcal{C}_{m-1} \underset{gm-1}{\bullet} (\mathbb{S}^{m-1} \times [0,1], \mathbb{S}^{m-1} \times 0, \mathbb{S}^{m-1} \times 1) \arrow[d, "\acute{\pi} \underset{gm-1}{\sqcup} \mathrm{Id}"] \\
\mathbb{D}^m \arrow[r, "c"'] & \mathrm{Mf}(\mathcal{C})
\end{tikzcd}$$

Um das zu zeigen braucht man nur zu zeigen, daß $\acute{\pi} \underset{g_{m-1}}{\sqcup} \mathrm{Id} \circ q^{m-1}(\acute{\pi}^{-1}(0 \in \mathbb{D}^m))$ ein Punkt ist. Das ist so, denn $q^{m-1}|\mathbb{S}^{m-1} \times 1$ ist die Einbettung des oberen Randes. c ist surjektiv und daher eine Quotientenabbildung, wobei die Äquivalenzrelation $\bar{q}^{m-1}_{total}$ zu $\bar{q}^{m-1}$ auf $\mathbb{S}^{m-1}$ ist. $\bar{q}^{m-1}/_{\bar{q}^{m-1}}$ ist aber der zu $\mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \dots \underset{g_{m-2}}{\bullet} \mathcal{C}_{m-1}$ gehörige CW-Komplex. ∎

16. Die Konstruktion eines normalen CW-Komplexes mit schönen Klebeabbildungen aus einer Zusammensetzung von konstruierten Kobordismen

16.1. Lemma. *Seien (V, k, φ) und (V_1, k, φ_1) konstruierte Kobordismen und $g : V \cong V_1$ ein Diffeomorphismus, sodaß gilt $\varphi_1 = g \circ \varphi$. Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus von Kobordismen $\bar{g} : \mathcal{K}(V, k, \varphi) \cong \mathcal{K}(V_1, k, \varphi_1)$, sodaß $\bar{g}|Bd_1 = g$ gilt*

Beweis: Betrachte:

$$
\begin{tikzcd}
n \times U_1 \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & n \times U_1 \\
n \times (U_1 \setminus \{r=0\}) \arrow[u, "incl"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\varphi\circ(\psi\times \mathrm{Id})"'] & n \times (U_1 \setminus \{r=0\}) \arrow[u, "incl"'] \arrow[d, "\varphi_1\circ(\psi\times \mathrm{Id})"] \\
(V \setminus (\varphi(n \times \mathbf{S}^{k-1} \times 0))) \times [\alpha,\beta] \arrow[r, "g\times \mathrm{Id}"'] & (V_1 \setminus (\varphi_1(n \times \mathbf{S}^{k-1} \times 0))) \times [\alpha,\beta]
\end{tikzcd}
$$

Dieses Diagramm definiert einen Homöomorphismus $\mathcal{K}(V,k,\varphi) \longrightarrow \mathcal{K}(V_1,k,\varphi_1)$, der auf den beiden offenen Mengen $j_1(n \times U_1$ und $j_2((V \setminus (\varphi(n \times \mathbf{S}^{k-1} \times 0))) \times [\alpha,\beta])$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. $\bar{g}$ ist daher offensichtlich ein Isomorphismus von Kobordismen und $\bar{g}|Bd_1 = g$ ∎

16.2. Lemma. *Sei $(M,V,\acute{V})$ ein Kobordismus und (W,k,φ), $(W_1,k,\varphi_1$ konstruierte Kobordismen. Weiters sei $g : W \xrightarrow{\cong} \acute{V}$, $g_1 : W_1 \xrightarrow{\cong} \acute{V}$ sodaß $g \circ \varphi = g_1 \circ \varphi_1$. Dann ist*

$$(M,V,\acute{V}) \underset{g}{\bullet} \mathcal{K}(W,k,\varphi) \cong (M,V,\acute{V}) \underset{g_1}{\bullet} \mathcal{K}(W_1,k,\varphi_1).$$

Beweis: Sei $g_2 := g_1^{-1} \circ g : W \xrightarrow{\cong} W_1$ dann erfüllt g_2 die Bedingung in 16.1, daher gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $\bar{g}_2 : \mathcal{K}(W,k,\varphi) \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}(W_1,k,\varphi_1)$, wo $\bar{g}_2|Bd_1 = g_2$ ist. Betrachte nun:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(W,k,\varphi) \arrow[r, "\bar{g}_2"] & \mathcal{K}(W_1,k,\varphi_1) \\
W \arrow[u, "ins_{Bd_2}"] \arrow[r, "g_2"] & W_1 \arrow[u, "ins_{Bd_2}"'] \\
(M,V,\acute{V}) \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & (M,V,\acute{V})
\end{tikzcd}
$$

Dieses kommutative Diagramm definiert einen Homöomorphismus. Überträgt man jeweils die Krägen durch die Isomorphismen so wird dieser Homöomorphismus zum Diffeomorphismus und offensichtlich zum Isomorphismus von Kobordismen. ∎

16.3. Vereinfachung der Schreibweise. In anderen Worten heißt das: Für die Zusammensetzung von Kobordismen $\mathcal{C}_1 \underset{g}{\bullet} \mathcal{C}_2$ wo $\mathcal{C}_2 = \mathcal{K}(V,k,\varphi)$ ist nur die Einbettung $g \circ \varphi : n \times \mathbf{S}^{k-1} \times \mathbf{D}^{m-k}$ ausschlaggebend.

Eine Zusammensetzung $\mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \ldots \underset{g_{p-1}}{\bullet} \mathcal{C}_p$ von Kobordismen, wo $\mathcal{C}_i = \mathcal{K}(V_i,k_i,\varphi_i)$ ist schon bestimmt durch die Einbettungen $g_i \circ \varphi_{i+1} : n_{i+1} \times \mathbf{S}^{k_{i+1}-1} \times \mathbf{D}^{m-k_{i+1}} \longrightarrow Bd_2(\mathcal{C}_i)$. Daher werde ich von nun an $\mathcal{C}_0 \underset{g_0}{\bullet} \ldots \underset{g_{p-1}}{\bullet} \mathcal{C}_p$ schreiben als $\mathcal{C}_0 \underset{\mathrm{Id}}{\bullet} \tilde{\mathcal{C}}_1 \ldots \underset{\mathrm{Id}}{\bullet} \tilde{\mathcal{C}}_p$, wo $\tilde{\mathcal{C}}_i = \mathcal{K}(Bd_2(\mathcal{C}_{i-1}, k_i, g_{i-1} \circ \varphi_i)$ ist natürlich werde ich, da eine Unterscheidung von nun an nichtmehr nötig ist $\tilde{\mathcal{C}}_i$ als $\mathcal{C}_i$ und $g_{i-1} \circ \varphi_i$ als φ_i bezeichnen.

Das nächste wird sein einige Konstruktionen, die der geometrischen Vorstellung offensichtlich sind, auszuführen. Um alles wohldefiniert zu haben muß ich leider Umwege gehen

16.4. Definition. Sei $\mathcal{K}(V,k,\varphi)$ gegeben und $\theta : N \longrightarrow \acute{V} = Bd_2(\mathcal{K}(V,k,\varphi))$ eine Abbildung:

Dann sei $\mathbf{Transp}(\theta) : N \setminus \theta^{-1}(\acute{\varphi}(n \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times 0)) \longrightarrow V$ die Abbildung,
die im Folgenden definiert wird:

$\theta | N \setminus \theta^{-1}(\acute{\varphi}(n \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times 0))$ ist eine Abbildung nach $\acute{V} \setminus (\acute{\varphi}(n \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times 0))$

Es gibt einen natürlichen Diffeomorphismus $\Phi : \acute{V} \setminus (\acute{\varphi}(n \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times 0)) \xrightarrow{\cong} V \setminus \varphi(n \times \mathbf{S}^{k-1} \times 0)$ (siehe Kapitel 8

nun sei $\mathbf{Transp}(\theta) := j_1 \circ ins_0 \circ \theta | N \setminus \theta^{-1}(\acute{\varphi}(n \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times 0))$,

wo $j_1 : (V \setminus (\varphi(\mathbf{S}^{k-1} \times 0))) \times [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathcal{K}(V,k,\varphi)$ die natürliche Einbettung ist.

Ist θ eine C^∞ Einbettung

dann ist $\mathbf{Transp}(\theta)$ eine C^∞ Einbettung einer offenen Untermannigfaltigkeit nach V.

Außerdem gilt: Ist $\theta = \acute{\varphi} \circ \tilde{\theta}$, wo $\tilde{\theta} : N \longrightarrow n \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times \mathbf{D}^k$ ist

dann ist $\mathbf{Transp}(\theta) = \varphi \circ P \circ \tilde{\theta} | N \setminus (\tilde{\theta}^{-1}(\acute{\varphi}(n \times \mathbf{S}^{m-k-1} \times 0)))$

Zur Erinnerung: $P : \mathbf{S}^{m-k-1} \times (\mathbf{R}^k \setminus 0) \longrightarrow \mathbf{S}^{k-1} \times (\mathbf{R}^{m-k} \setminus 0)$;

$$P(\omega, v) := (\tau(v), \sqrt{v^2} \cdot \omega)$$

P wurde in Kapitel 8 schon definiert.

16.5Anwendung auf die Einbettungen φ_i. In $\mathcal{C}_0 \bullet \ldots \mathcal{C}_p$ gilt $\varphi_i : n_i \times \mathbf{S}^{k_i-1} \times \mathbf{D}^{m-k_i} \longrightarrow Bd_2(\mathcal{C}_{i-1}$ und nach 13.7 o.B.d.A. $\mathbf{Transp}(\varphi_i) : (n_i \times \mathbf{S}^{k_i-1} \setminus L) \times \mathbf{D}^{m-k_i} \longrightarrow Bd_1(\mathcal{C}_{i-1}$. Letzteres ist keine Tubenumgebung einer kompakten Mannigfaltigkeit. Will man daher auch auf $\mathbf{Transp}(\varphi_i)$ und $\acute{\varphi}_{i-2}$ die Ergebnisse aus Kapitel 13 anwenden, benötigt man folgendes Lemma:

16.6. Lemma. *Sei N eine $m-o-1$ dimensionale Untermannigfaltigkeit von $Bd_2(\mathcal{C}_i)$ und $\theta : N \times \mathbf{D}^o \longrightarrow Bd_2(\mathcal{C}_i)$ eine Einbettung, sodaß :*

$$\begin{array}{ccc} L \times \mathbf{D}^{k_i} \times \mathbf{D}^o & \xrightarrow{A} & n_i \times \mathbf{S}^{m-k_i-1} \times \mathbf{D}^{k_i} \\ {\scriptstyle D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \acute{\varphi}_i} \\ N \times \mathbf{D}^o & \xrightarrow[\theta]{} & Bd_2(\mathcal{C}_i) \end{array}$$

ein Pullbackdiagramm ist (ich werde diese Eigenschaft von Tubenumgebungen transversaler Untermannigfaltigkeiten fortan zur Abkürzung stark transversal nennen). Sei ebenso $\acute{\varphi}_{i-1}$ stark transversal zu φ_i. Dann ist $\mathbf{Transp}(\theta)|\theta^{-1}(\acute{\varphi}_i(n_i \times \mathbf{S}^{m-k_i-1} \times \mathbf{D}^{k_i}))$ stark transversal zu $\acute{\varphi}_{i-1}$.

Beweis: Sei $\bar{N}$ der 0-Schnitt in $\theta^{-1}(\acute{\varphi}_i(n_i \times \mathbf{S}^{m-k_i-1} \times \mathbf{D}^{k_i}))$ und $\bar{\theta} := \theta|\theta^{-1}(\acute{\varphi}_i(n_i \times \mathbf{S}^{m-k_i-1} \times \mathbf{D}^{k_i}))$ Es ist auch praktisch, die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} L \times \mathbf{D}^{k_i} \times \mathbf{D}^o & \xrightarrow{A} & n_i \times \mathbf{S}^{m-k_i-1} \times \mathbf{D}^{k_i} \\ {\scriptstyle D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \acute{\varphi}_i} \\ \bar{N} \times \mathbf{D}^o & \xrightarrow[\bar{\theta}]{} & \acute{\varphi}_i(n_i \times \mathbf{S}^{k_i-1}\mathbf{D}^{m-k_i} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L_1 \times \mathbf{D}^{k_{i-1}} \times \mathbf{D}^{m-k_i} & \xrightarrow{\tilde{A}} & \mathbf{S}^{k_i-1} \times \mathbf{D}^{m-k_i} \\ {\scriptstyle \tilde{D}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_i} \\ \mathbf{S}^{m-k_{i-1}-1} \times \mathbf{D}^{k_{i-1}} & \xrightarrow[\acute{\varphi}_{i-1}]{} & \mathcal{V}_i \end{array}$$

aufzuzeichnen. Aus der Beschreibung der Kartenwechsel folgt:
$\mathbf{Transp}(\bar\theta)$ ist auf $(\sigma_2(L\times \mathbf{D}^{k_i}\setminus 0)\times \mathbf{D}^o$ definiert und

$$\mathbf{Transp}(\bar\theta)(\sigma_2(l,v),u)=\varphi_i\circ P\circ A\circ D^{-1}(\sigma_2(l,v),u)=\varphi_i(\tau(A_l\cdot v),\sqrt{v^2}\cdot\sigma_1(l,D_l^{-1}\cdot u))$$
$$\text{ebenso } \acute\varphi_{i-1}(\tilde\sigma_2(l_1,v_1),u_1)=\varphi_i\circ\tilde A\circ\tilde D^{-1}(\tilde\sigma_2(l_1,v_1),u_1)=\varphi_i(\tilde\sigma_1(l_1,\tilde D_{l_1}^{-1}\cdot u_1),\tilde A_{l_1}\cdot v_1)$$

Alle Punkte $\varphi_i(\tau(A_l\cdot v),\sqrt{v^2}\cdot\sigma_1(l,0))$ sind aus $\mathbf{Transp}(\bar\theta)(\bar N)$
Alle Punkte $\varphi_i(\tilde\sigma_1(l_1,0),\tilde A_{l_1}\cdot v_1)$ sind aus $\acute\varphi i-1(\mathbf{S}^{m-k_{i-1}-1}\times 0)$
Von nun an werde ich weiterrechnen als ob n_i und n_{i-1} beide 1 wären, denn der Durchschnitt zwischen zwei einzelnen Sphären ist eine offene und abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von L_1. Daher geschieht das o.B.d.A.
$\mathbf{Transp}(\bar\theta)(\bar N)$ ist daher das Produkt des Kegelstumpfs über $\sigma_2(L\times 0)\subset \mathbf{S}^{m-k_i-1}$, ohne den 0- Punkt, mit der $\mathbf{S}^{k_i-1}$. Anders ausgedrückt:

$$\varphi_i(\tau,u)\in\mathbf{Transp}(\bar\theta)(\bar N)\Leftrightarrow(u\neq 0)\wedge(\omega(u)\in\sigma_2(L\times 0))\ ,$$
$$\text{während } \varphi_i(\tau,u)\in\acute\varphi_{i-1}(\mathbf{S}^{m-k_{i-1}-1}\times 0)\Leftrightarrow\tau\in\tilde\sigma_1(L_1\times 0)\ .$$
$$\text{Daher ist } \bar\theta(\bar N)\cap\varphi_{i-1}(\mathbf{S}^{m-k_{i-1}-1}\times 0)\cong L_1\times L\times]0,1]\ .$$

Die Einbettung der $\mathbf{D}^o$-Faser über einem Punkt $\varphi_i(\tau,u)\in\bar\theta(\bar N)\cap\varphi_{i-1}(\mathbf{S}^{m-k_{i-1}-1}\times 0)$, d.h. $\tau=\tau(A_l\cdot v)$, $\sqrt{v^2}\cdot\sigma_1(l,0)=u$ ist $\varphi_i(\tau(A_l\cdot v),\sqrt{v^2}\cdot\sigma_1(l,D_l^{-1}\cdot\acute u))$ wo $\acute u\in\mathbf{D}^o$ ist die τ Koordinate ist für beide Punkte gleich und das bedeutet diese Punkte liegen alle in $\varphi_{i-1}(\mathbf{S}^{m-k_{i-1}-1}\times 0)$. Daraus folgt wieder, daß durch diese Einbettung eine Tubenabbildung $\sigma_3:L-1\times L\times]0,1]\times\mathbf{D}^o\longrightarrow\mathbf{S}^{m-k_{i-1}-1}$ gegeben ist.
Ebenso ist $\tau=\tilde\sigma_1(l_1,0)$ und $u=\tilde A\cdot u_1$ dann ist das Bild der $\mathbf{D}^{k_{i-1}}$-Faser über $(\tilde\sigma_1(l_1,0),\tilde A\cdot u_1)$ die Menge $\{\varphi_i(\tilde\sigma_1(l_1,\tilde D_{l_1}^{-1}\cdot v_1),\tilde A_{l_1}\cdot u_1)|v_1\in\mathbf{D}^{k_{i-1}}\}$. Hier bleibt die u-Koordinate gleich und das bedeutet, daß die Einbettung der $\mathbf{D}^{k_{i-1}}$-Faser eine Tubenabbildung $\sigma_4:L_1\times L\times]0,1]\times\mathbf{D}^{k_{i-1}}\longrightarrow\bar N$ darstellt.

$$\text{Sei } (\tilde\sigma_1(l_1,0),\tilde A_{l_1}\cdot u_1)=(\tau(A_l\cdot v),\sqrt{v^2}\cdot\sigma_1(l,D_l^{-1}\cdot\acute u)),$$

dann ist l, $\acute u$ und $\sqrt{v^2}$ schon bestimmt durch l_1 und u_1, und daher ist

$$(\tilde\sigma_1(l_1\tilde D_{l_1}^{-1}\cdot v_1),\tilde A_{l_1}\cdot u_1)=(\tau(A_l\cdot A_l^{-1}(\tilde\sigma_1(l_1,\tilde D_{l_1}^{-1}\cdot v_1))),\sqrt{v^2}\sigma_1(l,D_l^{-1}\acute u)).$$

d.h. die Wahl eines Punktes in der $\mathbf{D}^{k_{i-1}}$-Faser über einem Punkt ist gleichbedeutend mit der Wahl eines anderen Punktes in der Tubenumgebung von $L\subset N$, der in der Faser über $l\in L$ liegt, und dieser Punkt ist unabhängig von der Lage in der $\mathbf{D}^o$-Faser. Daher kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
L_1\times L\times]0,1]\times\mathbf{D}^o\times\mathbf{D}^{k_{i-1}} \arrow[r, "\sigma_4\times\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\sigma_3\times\mathrm{Id}"'] & \bar N\times\mathbf{D}^o \arrow[d, "\mathbf{Transp}(\theta)"] \\
\mathbf{S}^{m-ki-1}-1\times\mathbf{D}^{k_{i-1}} \arrow[r, "\varphi i-1"'] & \varphi_i(\mathbf{S}^{k_i-1}\times\mathbf{D}^{m-k_i})
\end{tikzcd}$$

∎

16.7. Interessant ist die Anwendung von 16.6 auf $\mathbf{Transp}(\varphi_j)$ denn $n_j\times\mathbf{S}^{k_j-1}\mathcal{L}$ ist keine kompakte Mannigfaltigkeit wohl aber $n_j\times\mathbf{S}^{k_j-1}\setminus\varphi_j^{-1}(\acute\varphi_{j-1}(\mathbf{S}^{m-kj-1-1}\times\mathring{\mathbf{D}}^{k_{j-1}}))$ damit ist starke Transversalität zwischen $\mathbf{Transp}(\varphi_j)$ und $\acute\varphi_{j-2}$ erfüllt, außer auf einer kompakten Menge, und o.B.d.A. sind die beiden Abbildungen stark transversal.

16.8. Zu $\mathbf{Transp}(\varphi_j)$ gibt es auch den Transport $\mathbf{Transp}(\mathbf{Transp}(\varphi_j)) \longrightarrow V_{j-2}$ den nenne ich $\mathbf{Transp}^2(\varphi_j)$ analog definiere ich $\mathbf{Transp}^i(\varphi_j) \longrightarrow V_{j-i}$. und mit Induktion nach i kann man beweisen, daß jeder Transport $\mathbf{Transp}^i(\varphi_j)$ stark transversal zu $\acute{\varphi}_{j-i-1}$ ist

Beweis: (1) *Induktionsanfang:*Auf einem Kobordismus $C_0 \bullet C_1 \bullet C_2$ ist das schon bewiesen.
(2) *Induktionsvoraussetzung:*Sei also 16.8 auf $C_0 \bullet \cdots \bullet C_{i-1}$ schon erfüllt.
(3) *Induktionsschritt:*Im Fall daß 2 erfüllt ist sind in $C_0 \bullet \cdots \bullet C_{i-1} \bullet C_i$ alle Transporte $\mathbf{Transp}^k(\varphi_i)$ stark transversal zu $\acute{\varphi} i - k - 1$

Beweis: Eine Folgerung aus der Rechnung im Beweis von 16.6 ist, daß sie auch stimmt, wenn man eine Untermannigfaltigkeit aus $\varphi_{i-1}()n_{i-1} \times \mathbb{S}^{k_{i-1}-1} \times \mathbb{D}^{m-k_{i-1}}$ herausnimmt. Also gilt, ist $\mathbf{Transp}^{k-1}(\varphi_{i-1})$ stark transversal zu $\acute{\varphi}_{i-k-1}$, dann ist

$$\mathbf{Transp}^k(\varphi_i|_{ph_i^{-1}(\acute{\varphi}_{i-1}(n_{i-i} \times \mathbb{S}^{k_{i-1}-1} \times \mathbb{D}^{m-k_{i-1}}))\setminus\Lambda}) \text{ stark transversal zu } \acute{\varphi}_{i-k-1},$$

wobei Λ die Menge ist die wegen der Transporte herausgenommen werden muß. Analoges, gilt falls $\mathbf{Transp}^q(\varphi_i)$ stark transversal zu $\acute{\varphi}_{i-q-1}$ ist. Dann ist der entsprechende Transport von φ_i auf dem Urbild stark transversal zu allem wozu φ_{i-q-1} stark transversal ist. Ich gehe nun gleichsam mit Induktion von $i-1$ gegen 0 abwärts. Der genaue Induktionsbeweis würde jedoch nur einen unübersehbaren Wust von Indizes bedeuten. Daher ersuche ich, sich mit den folgenden Aussagen zufriedenzugeben. Bei jedem Transport werden Untermannigfaltigkeiten mitsamt der $\mathbb{D}^{m-k_i}$ Faser darüber entfernt, falls beim vorhergehenden Schritt starke Transversalität erfüllt war. Ebenso ist bei jedem Schritt wo starke Transversalität erfüllt ist auf, einer $L_p\overset{o}{\mathbb{D}}{}^{k_p}$ Umgebung starke Transversalität in allen folgenden Schritten erfüllt Das heißt aber, daß nach jedem Schritt eine kompakte Menge aus $n_i \times \mathbb{S}^{k_i-1}$ übrigbleibt, auf der man aber o.B.d.A. starke Transversalität durch Anwendung von Diffeotopien herstellen kann.

Die Klebeabbildungen

Ich will als erstes näher eingehen auf den relativen CW-Komplex, der aus einer Zusammensetzung von konstruierten Kobordismen aufgebaut wird. Ich habe bewiesen, daß es Abbildungen von Zellen gibt, die als charakteristische Abbildungen verwendet werden können, und da der konstruierte Raum kompakt ist, und die Anzahl der Zellen endlich, gibt es keine Schwierigkeiten mit der Topologie. Mit einer k-Zelle in dem konstruierten Komplex zu $C_0 \bullet \cdots \bullet C_p$ identifiziere ich eine Zelle, die durch die Z-Struktur auf dem Kobordismus C_i mit $k_i = k$als $j_1(\mathbb{R}^{k_i} \times 0)$ eingebettet wird. Die wird dann durch die Z-Struktur ζ^{i-1} auf $C_0 \bullet \cdots \bullet C_{i-1}$ "weiterverarbeitet". Zur Erinnerung

$$\zeta^{i-1} : Bd_2(C_{i-1} \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Mf}(C_0 \bullet \cdots \bullet C_{i-1})$$
$$\breve{\zeta}^{i-1} = \zeta^{i-1}|Bd_2(C_{i-1} \times 0)$$
$$\text{als Klebeabbildung bezeichne ich :}\breve{\zeta}^{i-1}|\varphi_i(\mathbb{S}^{k_i-1}\ 0) : \varphi_i(\mathbb{S}^{k_i-1}\ 0) \longrightarrow \breve{\zeta}^{i-1}(Bd_2(C_{i-1}))$$

Letzteres ist eine Abbildung in einen relativen CW-Komplex, und läßt sich durch eine Folge von Quotientenrelationen beschreiben, die aus Produkt-Tubenumgebungen einer Untermannigfaltigkeit Zellen des CW -Komplexes machen, indem im Wesentlichen die Untermannigfaltigkeits -Koordinate weggelassen wird. Letzteres folgt aus 16.8.

Im folgenden wird sinnvollerweise die Klebeabbildung *einer* Zelle auf *eine* Zelle untersucht daher bedeuten $\acute{\varphi}_j, \varphi_j$ immer Einschränkungen auf eine $\mathbb{S}^{m-k_j-1} \times \mathbb{D}^{k_j}$ beziehungsweise $\mathbb{S}^{k_j-1} \times \mathbb{D}^{m-k_j-1}$

16.9. Der normale CW-Komplex:. Sei $L := \acute{\varphi}_{i-1}(\mathbb{S}^{m-k_{i-1}-1} \times 0) \cap \varphi_i(\mathbb{S}^{k_i-1} \times 0)$ und $\acute{\varphi}_{i-1}$ stark transversal zu φ_i sei dann ζ_i die Z-Struktur auf C_i und ζ^i die auf $C_o \bullet . \cdots \bullet C_i$ dann ist $\bar{\zeta}_{i-1}$ auf $\acute{\varphi}_{i-1}(\mathbb{S}^{m-k_{i-1}-1} \times \frac{1}{2} \cdot \mathbb{D}^{k_{i-1}})$:

$$(\omega, v) \underset{\zeta_{i-1}}{\sim} (\omega_1, v_1) \Leftrightarrow v_1 = v$$

Eingeschränkt auf $\varphi_i(\mathbf{S}^{k_i-1})$ ist das

$$\sigma_1(l,v) \underset{\breve{\zeta}_{i-1}}{\sim} \sigma(l_1,v_1) \Leftrightarrow D_{l_1}\cdot v_1 = D_l \cdot v \text{ falls } \sqrt{v^2} \leq \frac{1}{2}$$

Während $\breve{\zeta}_{i-1} \circ \varphi_i\sigma_1(l,v) = \mathbf{Transp}(\varphi_i)\sigma_1(l, \frac{2\sqrt{v^2}-1}{\sqrt{v^2}}\cdot v)$ ist. Falls $\sqrt{v^2} \geq \frac{1}{2}$. Mit einem Punkt $\acute{v}$ aus der k_{i-1}-Zelle wird dabei die Äquivalenzklasse

$$\{\sigma_1(l,v) | \sqrt{v^2} \leq \frac{1}{2}, 2D_l \cdot v = \acute{v}\}$$

identifiziert. Das Bild von $\mathbf{Transp}(\varphi_i)$ ist ganz im Bild von $\breve{\zeta}_{i-1}$ enthalten sodaß unter der Voraussetzung, daß $\acute{\varphi}_{1-2}$ stark transversal zu $\mathbf{Transp}(\varphi_i)$ ist $\breve{\zeta}_{i-2}$ analog auf $\varphi_i(\mathbf{S}^{k_i-1})$ wirkt. Dasselbe gilt wie man leicht sieht für die folgenden Schritte. Daraus folgt wird ein Punkt aus dem Inneren einer Zelle von der Klebeabbildung getroffen, so ist die ganze Zelle im Bild der Klebeabbildung und daher ist jede Abgeschlossene Zelle ein Unterkomplex. So einen CW-Komplex nennt man normal.

Bibliographie

References

Bröcker, Theodor; Jänich, Klaus, "Einfürung in die Differentialtopologie," Springer-Verlag, Heidelberg, 1973.

Milnor, John W., "Lectures on the h-cobordism theorem," Princeton Lecture Notes, Princeton University Press, 1965.

Milnor John W., "Morse Theory," Annals of Mathematics Study 51, Princeton University Press, 1963.

Keywords. Morse-Funktionen, CW-Zerlegungen

1980 *Mathematics subject classifications*: 57R65

Weisselgasse 15/3/16, A-1210 Wien, Austria

LEBENSLAUF

Ich wurde am 13.6.1954 in Wien geboren. Meine Eltern waren Robert und Friederike Sinclair.Die Volksschule besuchte ich in wien Floridsdorf in der Schöpfleuthnergasse, danach das BRG in der Franklinstrasse, ebenfalls in Wien 21. Danach besuchte ich ein Schuljahr lang die höhere Bundeslehr und Versuchsanstalt in der Rosensteingasse.

Danach übte ich mehrere Hilfsarbeitertätigkeiten aus. Im November 1972 begann ich eine Reise die mich nach Marokko, Gibraltar und kurzzeitig in verschiedene andere Länder Europas führte. Im August 1975 kehrte ich nach Österreich zurück um meinen Wehrdienst abzuleisten. Die Stellungskommission schrieb mich jedoch erst für ein Jahr, und später ganz untauglich.

Im September 1977 heiratete ich Frau Heidemarie Sinclair geborene Gobat.Im Herbst 1978 übersiedelten wir nach Hamburg-Harburg. Dort wurde auch am 9.1.1979 mein Sohn Samuel Sinclair geboren. Seit Mai 1983 bin ich geschieden.

Im September 1982 kehrte ich nach Wien zurück, und begann im Oktober den Vorbereitungslehrgang auf die Studienberechtigungsprüfung an der Technischen Universität Wien. Ich erhielt im Juni 1983 die Berechtigung verschiedene Fächer an einer Österreichischen Universität zu studieren. Im Wintersemester 1983 begann ich ein Studium der Forstwirtschaft, nebenbei studierte ich Mathematik an der Universität Wien. Ein solches Doppelstudium erwies sich als undurchführbar für mich, weil ich nebenbei arbeitete. Ich studierte daher vom Wintersemester 1984 an nurmehr Mathematik.