MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Einführung in die mathematische Logik

verfasst von | submitted by

Franz Schekolin BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 514 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Informatik Unterrichtsfach Mathematik
Betreut von | Supervisor:	Assoz. Prof. Vera Fischer Privatdoz. PhD

Abstract

This work provides a fundamental introduction to mathematical logic. It starts by providing historical background to the topics covered in the thesis. The first attempts to formalize mathematics are outlined. After that, the main part is divided into three further main focuses. The second chapter looks at formal systems in general and introduces important concepts of metamathematics. In particular, propositional logic and first order logic are analyzed in detail as the basis for the following chapters. In the third part of the thesis, Peano arithmetic is introduced as the foundation of classical mathematics. Using the axioms and deductive tools, theorems from classical number theory are formulated and proved within Peano arithmetic. In the final part of the thesis, the main results of Kurt Gödel's incompleteness theorems from 1931 are analyzed, which provide information about the meta-properties of Peano arithmetic and other formal systems of mathematics.

Zusammenfassung

Diese Arbeit bietet eine grundlegende Einführung in die mathematische Logik. Zu Beginn werden historische Hintergründe zu den in der Arbeit vorkommenden Themen aufgezeigt. Dabei wird umfassend ausgeholt und die ersten Versuche, die Mathematik zu formalisieren, werden skizziert. Danach teilt sich der Hauptteil in drei weitere Schwerpunkte auf. Im zweiten Kapitel werden formale Systeme im Allgemeinen betrachtet und wichtige Konzepte der Metamathematik eingeführt. Dabei werden vor allem die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik erster Stufe als Grundlage für die kommenden Kapitel im Detail analysiert. Im dritten Teil der Arbeit wird die Peano-Arithmetik als Fundament der klassischen Mathematik eingeführt. Mithilfe der Axiome und Schlussregeln werden Sätze aus der klassischen Zahlentheorie innerhalb der Peano-Arithmetik formuliert und bewiesen. Im letzten Teil der Arbeit werden die Hauptresultate von Kurt Gödels Unvollständigkeitssätze aus dem Jahr 1931 analysiert, die Aufschluss über die Metaeigenschaften der Peano-Arithmetik und weitere formale Systeme der Mathematik geben.

Inhaltsverzeichnis

1 Historische Hintergründe

Dieses Kapitel basiert inhaltlich auf den Büchern *Grenzen der Mathematik* [10] und *Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze* [9]. In diesem Kapitel wird bewusst auf mathematische Präzision verzichtet, da die dafür notwendigen Grundlagen erst in den folgenden Kapiteln erarbeitet werden. Für ein tiefergehendes Studium der historischen Hintergründe wird auf die entsprechenden Stellen in der Literatur verwiesen.

1.1 Lügner-Paradoxon

Um die Entwicklungen in der mathematischen Logik historisch nachvollziehen zu können, kann ein kurzer Blick in ihre Geschichte hilfreich sein. Bereits aus dem antiken Griechenland ist uns von Epimenides von Kreta (5., 6. oder 7. Jhdt. v. Chr.) ein berühmtes Paradoxon überliefert, welches im neuen Testament zu finden ist: *Es hat einer von ihnen gesagt, ihr eigener Prophet: Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäuche.* (Titus 1,12)

Aus diesem Satz, der eine Aussage über sich selbst trifft, lässt sich das sogenannte Lügner-Paradoxon ableiten:

Dieser Satz ist falsch.

Durch seine Selbstreferenz ist dieser Satz unentscheidbar:

- Ist der Satz wahr, so ist seine Bedeutung wahr, was den Satz wiederum falsch macht.
- Ist der Satz falsch, so ist seine Bedeutung falsch, was den Satz wiederum wahr macht.

Sichtlich haben diese Aussagen wenig mit einer formalen Mathematik zu tun, dennoch sind sie von enormer Bedeutung. So ist das Lügner-Paradoxon die Grundlage für den berühmten ersten Unvollständigkeitssatz des Wiener Mathematikers Kurt Gödel (1906 - 1978), der damit die Grundfesten der Mathematik im frühen 20. Jahrhundert erschütterte.

In Kapitel 4 werden Gödels Sätze im Detail betrachtet.

Wie es gelingen kann, Aussagen mathematisch zu formulieren und Schlüsse zu ziehen, ist eine Frage, die viele Mathematiker beschäftigte.

1.2 Entstehung formaler Systeme

Gegen Ende des 17. Jahrhunderts träumte der Universalgelehrte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) von einer *Characeristica universalis*, in der das gesamte menschliche Wissen mit einer universellen Sprache notiert werden soll. Dazu war eine formale Sprache zu definieren, die nur mit Symbolen und deren Beziehung zueinander auskommt. Er war davon überzeugt, dass man mit seiner Sprache den Wahrheitsgehalt von Aussagen durch die Anwendung eines festen Regelwerks ableiten kann. Damit war er seiner Zeit weit voraus, denn erst 200 Jahre später gelang es, so eine Sprache inklusive fest definierten Schlussregeln zu etablieren. ([10], S. 1-3)

1.2.1 Begriffsschrift

Der deutsche Mathematiker Gottlob Frege (1848 - 1925) publizierte im Jahr 1879 ein grundlegendes Werk der mathematischen Logik, die *Begriffsschrift*. In diesem Werk schuf Frege erstmals eine künstliche Sprache, die mit ihrem Schlussapparat ausdrucksstark genug ist, um die gewöhnliche Mathematik zu formalisieren. Die Symbolik seiner Sprache hat mit unserer modernen Notation jedoch nur wenig gleich, da sie im Gegensatz zur heutzutage üblichen eindimensionalen Schreibweise zweidimensional ist. Abbildung 1.1 zeigt einen Vergleich der Frege'schen Notation ([4], S. 5-15) mit der heutzutage üblichen Notation. ([10], S. 29)

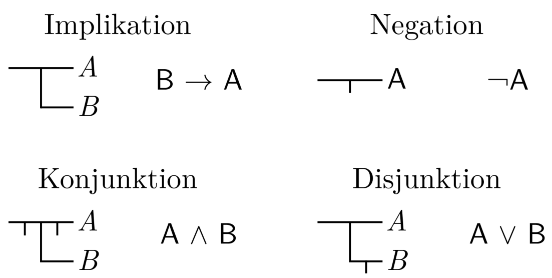
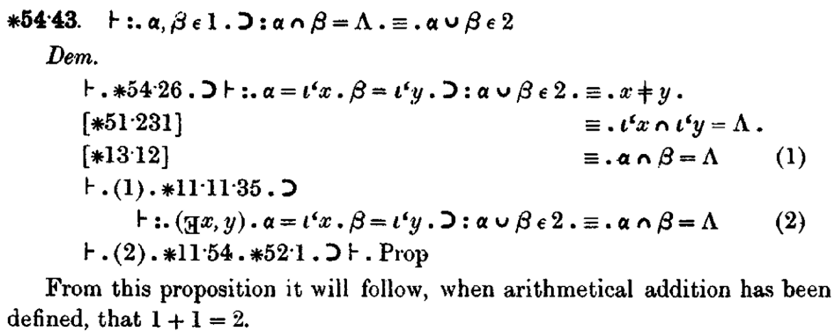


Abbildung 1.1: Vergleich der Frege'schen Notation (links) mit der heutzutage üblichen Notation (rechts)

Mit seinem zweiten Hauptwerk, *Grundgesetze der Arithmetik*, schuf er im Jahr 1893 den ersten Versuch, die Mathematik auf die Logik zurückzuführen. Knapp zehn Jahre später erhielt Frege einen Brief des britischen Mathematikers Bertrand Russel (1872 - 1970), mit dem die jahrelange Arbeit von Frege auf einen Schlag zunichte gemacht wurde. ([10], S. 27-31)
Die *Russel'sche Antinomie* zeigt auf, dass Frege zu unvorsichtig im Umgang mit der Unendlichkeit war. Russel zeigte, dass man unter anderem eine Menge konstruieren kann, die sich nur dann selbst enthält, wenn sie sich nicht selbst enthält. ([9], S. 75-79)

1.2.2 Principia Mathematica

Russel war davon überzeugt, dass man mit einer Abwandlung der zugrundeliegenden Axiome diese Antinomien ausschließen kann und arbeitete mit dem britischen Mathematiker Alfred North Whitehead (1861 - 1947) zehn Jahre lang an einem neuen Werk. In den Jahren 1910 bis 1913 erschien mit ihrem dreibändigen Werk *Principia Mathematica* der zweite Versuch, die Mathematik auf ein widerspruchsfreies Grundgerüst zu stellen. Auf ihren über 1800 Seiten schafften sie es, große Teile der Mathematik auf die formale Mathematik zurückzuführen, und so gilt dieses Werk bis heute als eines der berühmtesten mathematischen Werke überhaupt. ([9], S. 89-97)


***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 \,.\supset : \alpha \cap \beta = \Lambda \,.\equiv.\, \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Abbildung 1.2: Formaler Beweis für 1+1=2 in der *Principia Mathematica* ([13], S. 379)

1.2.3 Axiomatische Mengenlehre

Trotz des Erfolgs von Russel und Whitehead konnte sich die Principia Mathematica aufgrund ihrer Komplexität nicht final durchsetzen. Das heute übliche formale System ist die sogenannte *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre* (Abk.: ZF), die auf die deutschen Mathematiker Ernst Zermelo (1871 - 1953) und Abraham Fraenkel (1891 - 1965) zurück-geht. Mithilfe der ZF können alle Begriffe und Konzepte der gewöhnlichen Mathematik formalisiert werden. ([10], S. 42-44)

1.3 Hilberts Programm

Der deutsche Mathematiker David Hilbert (1862 - 1943) hatte das ehrgeizige Ziel, alle mathematischen Konzepte auf ein solides Fundament zu stellen. Er war davon überzeugt, dass ein formales System gefunden werden kann, das folgende Eigenschaften besitzt:

1. *Vollständigkeit*: In einem vollständigen formalen System kann jede wahre Aussage, die in diesem System formuliert werden kann, mithilfe des dazugehörigen logischen Schlussapparates bewiesen werden.
2. *Widerspruchsfreiheit*: In einem widerspruchsfreien formalen System kann niemals eine Aussage gemeinsam mit ihrer Verneinung bewiesen werden.
3. *Entscheidbarkeit*: In einem entscheidbaren formalen System kann für jede Aussage entschieden werden, ob sie innerhalb des Systems bewiesen werden kann.

Am 8. September 1930 betonte Hilbert vor der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Königsberg, dass es in der Naturwissenschaft keine unlösbaren Probleme gäbe. Er beendete seine Rede, die auch als Radioansprache ausgestrahlt wurde, mit dem Satz:

„Wir müssen wissen, wir werden wissen.“ ([1], 4:57 - 5:01)

Genau einen Tag vor seiner Radioansprache meldete sich Kurt Gödel auf einer dreitägigen Konferenz, ebenso in Königsberg, zu Wort und formulierte zum ersten Mal öffentlich seinen ersten Unvollständigkeitssatz:

„Man kann (unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik) sogar Beispiele für Sätze [...] angeben, die zwar inhaltlich richtig, aber im formalen System der klassischen Mathematik unbeweisbar sind.“ ([6], S. 148)

Damit hat er Hilberts Aussage schon widerlegt, bevor er sie überhaupt ausgesprochen hatte. 1931 publizierte er schließlich seine beiden Unvollständigkeitssätze und veränderte damit das mathematische Grundverständnis für immer. Obwohl Hilberts großes Ziel nun als gescheitert angesehen werden konnte, hatte das Programm große Fortschritte in der Formalisierung der Mathematik vorangetrieben. ([10], S. 44-51)

2 Formale Systeme

Die folgenden Kapitel basieren inhaltlich auf den Büchern *The Incompleteness Phenomenon* [8], *Mathematische Logik* [14], *Grenzen der Mathematik* [10], *Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze* [9] und *Einführung in die mathematische Logik* [3].

In diesem Kapitel wird der im Begriff des formalen Systems mathematisch präzise erarbeitet. Dafür werden vorerst anhand eines einfachen Beispielkalküls (ein Kalkül ist ein anderes Wort für formales System) die Grundlagen für die berühmten formalen Systeme ab Kapitel 2.2 eingeführt. Jedes Kalkül braucht vier Komponenten, die in allen betrachteten formalen Systemen nach und nach erarbeitet werden:

1. Syntax
2. Semantik
3. Axiome
4. Schlussregeln

2.1 Beispielkalkül *B*

2.1.1 Syntax

Die Syntax eines formalen Systems legt fest, nach welchen Regeln Ausdrücke aufgebaut sein müssen. Die Interpretation bzw. der Wahrheitsgehalt der konstruierbaren Ausdrücke spielt hier keine Rolle. Um Ausdrücke zu formulieren, wird ein *Alphabet* benötigt, das in unserem Beispielkalkül B aus den folgenden Symbolen besteht: $\{\mathtt{0}, \mathtt{s}, =, >, (,), \neg\}$
Nicht jede Aneinanderreihung dieser Symbole ist ein Ausdruck des Kalküls, sondern nur jene, die mithilfe einiger Bildungsregeln aufgebaut sind. Diese Ausdrücke werden *Formel* genannt. Die Menge aller Formeln heißt die *Sprache* von B.

Definition 2.1.1 *Bildungsregeln für B* ([9], S. 22)

Für das Beispielkalkül B gelten folgende Bildungsregeln:

- $\mathtt{0}$ ist ein Term.

- Ist σ ein Term, dann ist es auch $\mathsf{s}(\sigma)$.
- Sind σ, τ Terme, sind die folgenden Ausdrücke Formeln:
  $(\sigma = \tau), (\sigma > \tau), \neg(\sigma = \tau), \neg(\sigma > \tau)$

Bemerkung. Die Symbole σ, τ sind keine Symbole der Kalkülsprache, sondern dienen als Platzhalter für einen Ausdruck. Erst durch die Substitution mit einem Ausdruck (z.B.: $\mathsf{s}(\mathsf{0}) = \mathsf{s}(\mathsf{0})$) entsteht ein Ausdruck innerhalb der Sprache.

Aus diesen Bildungsregeln lassen sich folgende Terme und Formeln bilden:

- Terme: $\mathsf{s}(\mathsf{0}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))), \ldots$
- Formeln: $(\mathsf{0} = \mathsf{0}), (\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) > \mathsf{s}(\mathsf{0})), \neg(\mathsf{0} = \mathsf{0}), \neg(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) > \mathsf{s}(\mathsf{0})), \ldots$
  ([10], S. 72)

2.1.2 Semantik

Nach der syntaktischen Betrachtung des Systems B folgt nun eine inhaltliche Interpretation auf der semantischen Ebene. Zu Beginn wird folgende vereinfachte Schreibweise eingeführt:

$$\bar{n} := \underbrace{\mathsf{s}(\mathsf{s}(\ldots\mathsf{s}}_{n-\mathsf{mal}}(\mathsf{0})\ldots))$$

Damit können Formeln von B deutlich lesbarer geschrieben werden:

$$\begin{aligned} (\bar{3} > \bar{1}) &\text{ entspricht } (\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))) > \mathsf{s}(\mathsf{0})) \\ \neg(\bar{2} = \bar{4}) &\text{ entspricht } \neg(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))))) \\ (\bar{0} > \bar{0}) &\text{ entspricht } (\mathsf{0} > \mathsf{0}) \end{aligned}$$

Die inhaltliche Bedeutung der Formeln (Interpretation) von B wird wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned} \bar{n} &\text{ entspricht der natürlichen Zahl } n \in \mathbb{N} \\ (\bar{n} = \bar{m}) &\text{ entspricht der Aussage } n = m \\ (\bar{n} > \bar{m}) &\text{ entspricht der Aussage } n > m \qquad \text{([9], S. 24)} \\ \neg(\bar{n} = \bar{m}) &\text{ entspricht der Aussage } n \neq m \\ \neg(\bar{n} > \bar{m}) &\text{ entspricht der Aussage } n \leq m \end{aligned}$$

Um den Wahrheitsgehalt einer Formel angeben zu können, wird das Zeichen „$\models$“ eingeführt, mit folgender Definition:

Definition 2.1.2 *Modellrelation „$\models$“ für das Kalkül B* ([10], S. 75)

Für das Beispielkalkül B gilt für die Modellrelation „$\models$“:

- $\models (\bar{n} = \bar{m}) \;:\Leftrightarrow\; n = m$
- $\models (\bar{n} > \bar{m}) \;:\Leftrightarrow\; n > m$
- $\models \neg\varphi \;:\Leftrightarrow\; \not\models \varphi$

Nun können Ausdrücke, die mit der Syntax von B gebildet werden, auf ihren Wahrheitsgehalt überprüft werden:

$$\begin{array}{ll} \models & (\bar{3} > \bar{1}) \\ \models & \neg(\bar{2} = \bar{4}) \\ \not\models & (\bar{0} > \bar{0}) \\ \not\models & \neg(\bar{1} > \bar{3}) \end{array}$$

Bemerkung. Aus Definition 2.1.2 folgt, dass im Kalkül B niemals $\models \varphi$ und $\models \neg\varphi$ gleichzeitig gelten kann.

2.1.3 Axiome und Schlussregeln

Mit der Modellrelation „$\models$“ wurde ein Werkzeug definiert, um über die Wahrheit von Formeln zu urteilen. Um auch über die Beweisbarkeit einer Formel sprechen zu können, wird ein logischer Schlussapparat benötigt. Dafür werden Axiome, die als allgemeingültig angenommen werden, sowie Schlussregeln, die eine Ableitung von Aussagen aus den Axiomen erlauben, definiert. Die Axiome und Schlussregeln im Beispielkalkül B sind in Tabelle 2.1 definiert.

Bemerkung. Der Kalkül B besitzt sieben *Axiomenschemata* (A2) bis (A8), aus denen durch Substitution der Platzhalter σ und τ unendlich viele Axiome gewonnen werden können. Die Schlussregel (MP) steht für *Modus ponens* und besagt, dass eine Formel τ genau dann wahr ist, wenn σ wahr ist und σ aus τ gefolgert werden kann. Über dem Mittelstrich stehen demnach die Prämissen, unter dem Mittelstrich die Schlussfolgerung. ([9], S. 23)

Mithilfe der Axiome und der Schlussregel von B kann nun auf der syntaktischen Ebene überprüft werden, ob eine Formel in B ableitbar ist. Eine in B ableitbare Formel nennt man

Axiome		Schlussregeln
$(0 = 0)$	(A1)	
$(\sigma = \tau) \to (\mathsf{s}(\sigma) = \mathsf{s}(\tau))$	(A2)	
$(\sigma = \tau) \to (\mathsf{s}(\sigma) > \tau)$	(A3)	
$(\sigma > \tau) \to (\mathsf{s}(\sigma) > \tau)$	(A4)	$\dfrac{\sigma, \sigma \to \tau}{\tau}$ (MP)
$(\sigma > \tau) \to \neg(\sigma = \tau)$	(A5)	
$(\sigma > \tau) \to \neg(\tau = \sigma)$	(A6)	
$(\sigma > \tau) \to \neg(\tau > \sigma)$	(A7)	
$(\sigma = \tau) \to \neg(\tau > \sigma)$	(A8)	

Tabelle 2.1: Axiome und Schlussregeln des Kalküls B. ([10], S. 81)

ein *Theorem* von B. Es folgen nun zwei Beispiele von Ableitungen um die anschließende formale Definition eines *Beweises* besser nachvollziehen zu können.

Beispiel 2.1.1. Ableitung von $(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ (bzw. $(\bar{4} > \bar{2})$) ([10], S. 81)

1. $\vdash$ $(0 = 0)$ (A1)
2. $\vdash$ $(0 = 0) \to (\mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(0))$ $[\sigma = 0, \tau = 0]$ (A2)
3. $\vdash$ $(\mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(0))$ (MP, 1,2)
4. $\vdash$ $(\mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(0)) \to (\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $[\sigma = \mathsf{s}(0), \tau = \mathsf{s}(0)]$ (A2)
5. $\vdash$ $(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ (MP, 3,4)
6. $\vdash$ $(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to (\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $[\sigma = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \tau = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$ (A3)
7. $\vdash$ $(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ (MP, 5,6)
8. $\vdash$ $(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to (\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $[\sigma = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))), \tau = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$ (A4)
9. $\vdash$ $(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ (MP, 7,8)

Bemerkung. Das Zeichen „$\vdash$“ beschreibt die *Beweisbarkeitsrelation* und bedeutet, dass eine Formel durch wiederholtes Anwenden von Schlussregeln aus den Axiomen abgeleitet werden kann. Aus diesem Grund steht das Zeichen am Anfang jeder Zeile in den Ableitungssequenzen von Formeln.

Beispiel 2.1.2. Ableitung von $\neg(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$ (bzw. $(\bar{2} \neq \bar{3})$) ([10], S. 81)

1.	$\vdash$	$(0 = 0)$	(A1)
2.	$\vdash$	$(0 = 0) \to (\mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(0))$	$[\sigma = 0, \tau = 0]$ (A2)
3.	$\vdash$	$(\mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(0))$	(MP, 1,2)
4.	$\vdash$	$(\mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(0)) \to (\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$	$[\sigma = \mathsf{s}(0), \tau = \mathsf{s}(0)]$ (A2)
5.	$\vdash$	$(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$	(MP, 3,4)
6.	$\vdash$	$(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to (\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$	$[\sigma = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \tau = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$ (A3)
7.	$\vdash$	$(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$	(MP, 5,6)
8.	$\vdash$	$(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to \neg(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$	$[\sigma = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))), \tau = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$ (A6)
9.	$\vdash$	$\neg(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$	(MP, 7,8)

Definition 2.1.3 *Formaler Beweis* ([10], S. 81-82, [8], S. 81)

Ein formaler Beweis ist eine Kette von Formeln $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$, die nach den folgenden Konstruktionsregeln gebildet wird:

- φ_i ist ein Axiom, oder
- φ_i ist eine Voraussetzung, oder
- φ_i entsteht aus den vorangegangenen Gliedern der Beweiskette durch die Anwendung einer Schlussregel.

Die letzte Formel φ_n der Kette $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$ ist das bewiesene *Theorem* φ. Man schreibt „$\vdash \varphi$“ um auszudrücken, dass φ innerhalb des zugrundeliegenden formalen Systems ein beweisbares Theorem ist.

Um auch mathematische Voraussetzungen der Form „Unter der Annahme, dass M gilt, folgt ...“ modellieren zu können, darf ein Beweis um eine *Menge von Voraussetzungen* M ergänzt werden. Dies wird in Punkt 2 der Definition 2.1.3 dargestellt. Mit „$M \vdash \varphi$“ beschreibt man, dass die Formel φ unter den Voraussetzungen M ableitbar ist. Falls keine Voraussetzungen vorhanden sind, verwendet man „$\vdash \varphi$“ als Abkürzung für „$\emptyset \vdash \varphi$“.

Satz 2.1.1 ([10], S. 82)

Es gelten folgende Beziehungen:

1. $\{\varphi\} \cup M \vdash \varphi$
2. Aus $M \subset N$ und $M \vdash \varphi$ folgt $N \vdash \varphi$
3. Aus $M \vdash \varphi_1, \ldots, M \vdash \varphi_n$ und $\{\varphi_1, \ldots, , \varphi_n\} \vdash \varphi$ folgt $M \vdash \varphi$
4. $M \vdash \varphi \Leftrightarrow$ für eine endliche Teilmenge $M' \subseteq M$ gilt $M' \vdash \varphi$

Beweis. Die Punkte 1 bis 3 folgen direkt aus der Definition 2.1.3. Die „$\Leftarrow$“-Richtung von Punkt 4 folgt direkt aus Punkt 2. Die „$\Rightarrow$“-Richtung gilt, da M' aus allen verwendeten Voraussetzungen im Beweis von $M \vdash \varphi$ konstruiert werden kann. Da die Beweiskette endlich ist, ist auch M' endlich, und da jede Voraussetzung aus jedem Schritt vom Beweis zu M' hinzugefügt wird, gilt $M' \vdash \varphi$. □

2.1.4 Metaeigenschaften des Kalküls *B*

In einem formalen System können Formeln syntaktisch und semantisch betrachtet werden. Die folgende Definition zeigt die Bedeutung der dazugehörigen Relationen:

Definition 2.1.4 *Bedeutung von Beweisbarkeits- und Modellrelation* ([9], S. 24)

Die *Beweisbarkeitsrelation* „$\vdash$“ hat die folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} \vdash \varphi \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{Die Formel } \varphi \text{ ist innerhalb des Kalküls beweisbar} \\ \nvdash \varphi \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{Die Formel } \varphi \text{ ist nicht innerhalb des Kalküls beweisbar} \end{aligned}$$

Die *Modellrelation* „$\models$“ hat die folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} \models \varphi \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{Die inhaltliche Aussage der Formel } \varphi \text{ ist wahr} \\ \not\models \varphi \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{Die inhaltliche Aussage der Formel } \varphi \text{ ist falsch} \end{aligned}$$

Die Beweisbarkeit einer Formel hängt vom zugrundeliegenden formalen System ab. Eine Formel, die im Kalkül B nicht beweisbar ist, kann in einem anderen Kalkül C sehr wohl beweisbar sein. Unabhängig davon ist die semantische Bedeutung einer Formel.

Sei C eine Kopie des Kalküls B, jedoch ohne dem Axiom (A8). Ein Beispiel für eine im Kalkül C wahre, aber unbeweisbare Formel, ist $\neg(\mathsf{0} > \mathsf{0})$. Die inhaltliche Aussage der Formel ist offensichtlich wahr, jedoch ist es mit den Axiomen und dem Schlussapparat in C nicht beweisbar. Das zeigt, dass die Begriffe *Wahrheit* und *Beweisbarkeit* einer Formel voneinander unabhängig sind. Während die Beweisbarkeit auf einen rein mechanischen Vorgang zurückzuführen ist, bedingt die Wahrheit einer *Interpretation*. Die Formel $\neg(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))) > \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))$ ist ohne Interpretation nur eine Zeichenkette, die auf der syntaktischen Ebene auf die Beweisbarkeit überprüft werden kann. Die im Kalkül B zugrundeliegende Interpretation macht daraus eine Formel, die in den natürlichen Zahlen semantisch interpretiert werden kann ($\bar{4} \leq \bar{2}$). Um zwischen diesen Ebenen besser unterscheiden zu können, wird in dieser Arbeit die syntaktische Ebene stets mit serifenloser Schrift abgebildet.

Für eine Formel φ muss immer eine der folgenden vier Möglichkeiten gelten: ([9], S. 25)

$\models \varphi$ und $\vdash \varphi$:	φ ist inhaltlich wahr und formal beweisbar
$\models \varphi$ und $\nvdash \varphi$:	φ ist inhaltlich wahr und formal unbeweisbar
$\not\models \varphi$ und $\vdash \varphi$:	φ ist inhaltlich falsch und formal beweisbar
$\not\models \varphi$ und $\nvdash \varphi$:	φ ist inhaltlich falsch und formal unbeweisbar

Darüber hinaus kann das formale System an sich ebenso Eigenschaften besitzen. Man spricht hier von der sogenannten *Metamathematik*.

Definition 2.1.5 *Metaeigenschaften formaler Systeme* ([9], S. 27, [10], S. 76)

Ein formales System (Kalkül) ist:

- *widerspruchsfrei*, wenn eine Formel niemals gleichzeitig mit ihrer Negation aus den Axiomen abgeleitet werden kann (aus $\vdash \varphi$ folgt $\nvdash \neg\varphi$).
- *negationsvollständig*, wenn für jede Formel die Formel selbst oder deren Negation aus den Axiomen abgeleitet werden kann (aus $\nvdash \neg\varphi$ folgt $\vdash \varphi$).
- *korrekt*, wenn jede Formel, die innerhalb des formalen Systems bewiesen werden kann, inhaltlich wahr ist (aus $\vdash \varphi$ folgt $\models \varphi$).
- *vollständig*, wenn jede Formel, die inhaltlich wahr ist, auch innerhalb des formalen Systems bewiesen werden kann (aus $\models \varphi$ folgt $\vdash \varphi$).

Die Widerspruchsfreiheit und Negationsvollständigkeit sind Eigenschaften, die nur auf der syntaktischen Ebene analysiert werden. Dadurch ist keine Interpretation notwendig, um über diese Eigenschaften zu sprechen. Im Gegensatz dazu bedingt die Korrektheit und die Vollständigkeit den Begriff der Wahrheit. Es ist möglich, formale Systeme zu konstruieren, in dem alle vier Eigenschaften erfüllt sind. Das Beispielkalkül B ist genau so ein formales System, was nach Studium der Seiten 77 bis 81 in [9] einfach zu sehen ist. Es folgt ein Satz, der zeigt, dass die Widerspruchsfreiheit und die Negationsvollständigkeit (unter einer Bedingung) automatisch gilt, wenn ein Kalkül korrekt und vollständig ist.

Satz 2.1.2 ([10], S. 77)

Es gelten folgende Beziehungen:

1. Ist ein Kalkül vollständig und gilt für alle Formeln immer entweder $\models \varphi$ oder $\models \neg\varphi$, so ist er auch negationsvollständig.
2. Ist ein Kalkül korrekt, so ist er auch widerspruchsfrei.

Beweis.

1. Nach Voraussetzung gilt für jede Formel φ, dass entweder φ selbst, oder $\neg\varphi$ wahr ist. Aus Definition 2.1.5 folgt, dass somit entweder $\vdash \varphi$ oder $\vdash \neg\varphi$ gilt, was der Negationsvollständigkeit entspricht.
2. Nach Definition 2.1.5 lassen sich in einem korrekten Kalkül nur wahre Aussagen ableiten. Da in einem formalen System immer nur φ oder $\neg\varphi$ wahr sein kann, kann auch nur φ oder $\neg\varphi$ ableitbar sein.

$\square$

In Kapitel 1 wurde das große Ziel der Logiker besprochen, ein formales System zu finden, in dem alle vier Eigenschaften gelten und die Mathematik ein Fundament finden kann. Das Beispielkalkül B ist zwar korrekt und vollständig, aber für die Formalisierung der „klassischen Mathematik“ nicht mächtig genug. Was mit der Formalisierung der „klassischen Mathematik“ gemeint ist, wird in Kapitel 3 beleuchtet.

2.2 Aussagenlogik

Mit der *Aussagenlogik* wird ein zweites formales System eingeführt. Während der Kalkül B als einführendes Beispiel diente, bildet die in der Mathematik allgemein bekannte Aussagenlogik die Grundlage für komplexere formale Systeme. Die Aussagenlogik befasst sich mit der Untersuchung von Aussagen und ihrer Beziehung zueinander. Auch in der Aussagenlogik werden Syntax, Semantik und Axiome mit Schlussapparat nach und nach erarbeitet.

2.2.1 Syntax

Eine Aussage wird mit einer Variable abgekürzt. Aussagen aus unserer Alltagssprache und deren Beziehung zueinander können zum Beispiel folgenderweise formalisiert werden:

A: „Es schneit."
B: „Es ist kalt."
$\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}$: „Wenn es schneit, dann ist es kalt."
$\mathsf{B} \vee \mathsf{A}$: „Es ist kalt oder es schneit (oder beides)."
$\mathsf{B} \wedge (\neg\mathsf{A})$: „Es ist kalt, aber es schneit nicht."

Um solche Aussagen, in weiterer Folge *aussagenlogische Formeln* genannt, zu formalisieren, werden die allgemeinen Bildungsregeln dafür definiert.

Definition 2.2.1 *Syntax der Aussagenlogik* ([10], S. 87)

Die Menge der *aussagenlogischen Formeln* über dem *Variablenvorrat* $V = \{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \ldots\}$ ist rekursiv definiert:

- $\mathsf{0}$ und $\mathsf{1}$ sind Formeln.
- Jede Variable aus der Menge V ist eine Formel.
- Sind φ und ψ Formeln, dann sind es auch:
  $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \not\leftrightarrow \psi)$

Bemerkung. Die Variablen aus dem Variablenvorrat V werden für das leichtere Verständnis von Fall zu Fall angepasst. Statt $\{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \ldots\}$ wird manchmal $\{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots\}$ verwendet.

Definition 2.2.2 *Aussagenlogische Verknüpfungen* ([8], S. 24)

Die *aussagenlogischen Verknüpfungen* sind folgendermaßen definiert:

1. „$\neg$“ ist die *Negation* und man sagt „*nicht*“.
2. „$\wedge$“ ist die *Konjunktion* und man sagt „*und*“.
3. „$\vee$“ ist die *Disjunktion* und man sagt „*oder*“.
4. „$\rightarrow$“ ist die *Implikation* und man sagt „*impliziert*“.
5. „$\leftrightarrow$“ ist der *Äquivalenzoperator* und man sagt „*ist äquivalent zu*“.
6. „$\nleftrightarrow$“ ist der *Antivalenzoperator (XOR-Operator)* und man sagt „*ist nicht äquivalent zu*“.

Mit den in Definition 2.2.1 eingeführten Bildungsregeln lassen sich folgende Formeln bilden:

- $((\neg\mathsf{A}) \wedge \mathsf{B})$, $((\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \rightarrow \mathsf{C})$, $((\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}) \rightarrow (\neg(\mathsf{A} \vee \mathsf{B})))$, ...
- *Atomare Formeln*: $\mathsf{0}$, $\mathsf{1}$, A_1, A_2, ...
- *Teilformeln*: Seien $\varphi = (\mathsf{A} \wedge \mathsf{B})$ und $\psi = ((\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \vee \mathsf{C})$, dann gilt: $\varphi \in \psi$

Um die Lesbarkeit zu vereinfachen können Klammern wie folgt weggelassen werden:

$$\begin{aligned} ((\neg\mathsf{A}) \wedge \mathsf{B}) &\;\widehat{=}\; (\neg\mathsf{A}) \wedge \mathsf{B} \\ (\neg(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \rightarrow \mathsf{C}) &\;\widehat{=}\; \neg(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \rightarrow \mathsf{C} \\ (\neg(\neg\mathsf{A})) &\;\widehat{=}\; \neg\neg\mathsf{A} \end{aligned}$$

2.2.2 Semantik

Grundsätzlich können Formeln, die aus mehreren logisch verknüpften Teilformeln bestehen können, als wahr oder falsch betrachtet werden, indem jeder Variablen, die in einer aussagenlogischen Formel vorkommt, einer der beiden Wahrheitswerte 0 ($\widehat{=}$ „*falsch*“) oder 1 ($\widehat{=}$ „*wahr*“) zugeordnet wird. Diesen Vorgang nennt man *Interpretation*.

Definition 2.2.3 *Interpretation* ([10], S. 88)

Sei φ eine aussagenlogische Formel. $\mathsf{A_1}, \dots, \mathsf{A_n}$ bezeichnen die in φ vorkommenden Variablen. Dann heißt jede Abbildung

$$I : \{\mathsf{A_1}, \dots, \mathsf{A_n}\} \to \{0, 1\}$$

eine *Interpretation* von φ.

Mit diesen Grundlagen kann nun die Modellrelation „$\models$“ für die Aussagenlogik definiert werden.

Definition 2.2.4 *Semantik der Aussagenlogik* ([10], S. 89)

Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln und I eine Interpretation. Die Semantik der Aussagenlogik ist durch die *Modellrelation* „$\models$“ gegeben, die induktiv über dem Formelaufbau definiert ist:

$$\begin{aligned}
I &\models \mathsf{1} && \\
I &\not\models \mathsf{0} && \\
I &\models \mathsf{A}_i &&:\Leftrightarrow \quad I(\mathsf{A}_i) = 1 \\
I &\models (\neg\varphi) &&:\Leftrightarrow \quad I \not\models \varphi \\
I &\models (\varphi \wedge \psi) &&:\Leftrightarrow \quad I \models \varphi \text{ und } I \models \psi \\
I &\models (\varphi \vee \psi) &&:\Leftrightarrow \quad I \models \varphi \text{ oder } I \models \psi \\
I &\models (\varphi \to \psi) &&:\Leftrightarrow \quad I \not\models \varphi \text{ oder } I \models \psi \\
I &\models (\varphi \leftrightarrow \psi) &&:\Leftrightarrow \quad I \models \varphi \to \psi \text{ und } I \models \psi \to \varphi \\
I &\models (\varphi \not\leftrightarrow \psi) &&:\Leftrightarrow \quad I \not\models \varphi \leftrightarrow \psi
\end{aligned}$$

Eine Interpretation I mit $I \models \varphi$ heißt *Modell* für φ.

Bemerkung. ([10], S. 89) Eine aussagenlogische Formel φ mit n Variablen kann auch als *boolesche Funktion* $f_\varphi : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ betrachtet werden. Ordnet eine Interpretation I ihren Variablen $\mathsf{A_1}, \dots, \mathsf{A_n}$ die Wahrheitswerte $a_1, \dots, a_n$ zu, dann gilt:

$$f_\varphi(a_1, \dots, a_n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } I \models \varphi \\ 0 & \text{falls } I \not\models \varphi \end{cases}$$

Funktionen dieser Art können als *Wahrheitstabelle* dargestellt werden, indem jede mögliche Kombination der Variablen $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_\mathsf{n}$ zusammen mit ihren Funktionswerten Zeile für Zeile untereinander aufgeschrieben werden.
Tabelle 2.2 zeigt, wie die aussagenlogischen Operatoren mit Wahrheitstabellen dargestellt werden können.

$\varphi = \neg \mathsf{A}$

A	φ
0	1
1	0

$\varphi = \mathsf{A} \land \mathsf{B}$

A	B	φ
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\varphi = \mathsf{A} \lor \mathsf{B}$

A	B	φ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\varphi = \mathsf{A} \to \mathsf{B}$

A	B	φ
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\varphi = \mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}$

A	B	φ
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\varphi = \mathsf{A} \not\leftrightarrow \mathsf{B}$

A	B	φ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabelle 2.2: Wahrheitstafeln aussagenlogischer Operatoren

Im folgenden Beispiel wird die zusammengesetzte Formel $\varphi = (\mathsf{B} \to \mathsf{A}) \land \mathsf{B}$ auf Modelle untersucht, die φ erfüllen. Dabei wird einerseits die Definition 2.2.4 verwendet und andererseits Wahrheitstabellen. Der Vergleich beider Varianten in der Durchführung und Lesbarkeit macht den großen Vorteil von Wahrheitstabellen sichtbar.

Beispiel 2.2.1. Modell finden für $\varphi = \underbrace{(B \to A)}_{\psi} \land \mathsf{B}$

Variante 1: nach Definition 2.2.4:

1. Interpretation: $I(\mathsf{A}) = 0$, $I(\mathsf{B}) = 0$
$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\mathsf{B}}_{I\not\models \mathsf{B}} \to \underbrace{\mathsf{A}}_{I\not\models \mathsf{A}})}_{I\models \mathsf{B}\to\mathsf{A}} \land \underbrace{\mathsf{B}}_{I\not\models \mathsf{B}}}_{I\not\models (\mathsf{B}\to\mathsf{A})\land\mathsf{B}}$$
2. Interpretation: $I(\mathsf{A}) = 0$, $I(\mathsf{B}) = 1$
$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\mathsf{B}}_{I\models \mathsf{B}} \to \underbrace{\mathsf{A}}_{I\not\models \mathsf{A}})}_{I\not\models \mathsf{B}\to\mathsf{A}} \land \underbrace{\mathsf{B}}_{I\models \mathsf{B}}}_{I\not\models (\mathsf{B}\to\mathsf{A})\land\mathsf{B}}$$
3. Interpretation: $I(\mathsf{A}) = 1$, $I(\mathsf{B}) = 0$
$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\mathsf{B}}_{I\not\models \mathsf{B}} \to \underbrace{\mathsf{A}}_{I\models \mathsf{A}})}_{I\models \mathsf{B}\to\mathsf{A}} \land \underbrace{\mathsf{B}}_{I\not\models \mathsf{B}}}_{I\not\models (\mathsf{B}\to\mathsf{A})\land\mathsf{B}}$$
4. Interpretation: $I(\mathsf{A}) = 1$, $I(\mathsf{B}) = 1$
$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\mathsf{B}}_{I\models \mathsf{B}} \to \underbrace{\mathsf{A}}_{I\models \mathsf{A}})}_{I\models \mathsf{B}\to\mathsf{A}} \land \underbrace{\mathsf{B}}_{I\models \mathsf{B}}}_{I\models (\mathsf{B}\to\mathsf{A})\land\mathsf{B}}$$

Variante 2: mit einer Wahrheitstabelle:

A	B	ψ	φ
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Aus beiden Varianten geht hervor, dass die Interpretation, die A den Wahrheitswert 1 und B den Wahrheitswert 1 zuordnet, das einzige Modell für φ ist.

Die Formel φ in Beispiel 2.2.1 wird als *erfüllbar* bezeichnet, da sie ein Modell besitzt. Allgemein werden aussagenlogische Formeln wie folgt gegliedert:

Definition 2.2.5 *Erfüllbarkeit einer Formel* ([8], S. 27, [10], S. 90)

Eine aussagenlogische Formel φ heißt:

- *erfüllbar*, falls φ mindestens ein Modell besitzt.
- *unerfüllbar*, falls φ kein Modell besitzt.
- *allgemeingültig*, falls jede mögliche Interpretation ein Modell von φ ist.

Eine allgemeingültige Formel nennt man *Tautologie*.

Beispiel 2.2.2. Dieses Beispiel zeigt eine erfüllbare Formel φ_1, eine unerfüllbare Formel φ_2 und eine Tautologie φ_3.

$$\varphi_1 := \underbrace{(\mathsf{A} \lor \mathsf{B})}_{\psi_1} \to \underbrace{(\mathsf{B} \land \mathsf{A})}_{\psi_2} \qquad \varphi_2 := \underbrace{(\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B})}_{\psi_3} \land \underbrace{(\mathsf{A} \nleftrightarrow \mathsf{A})}_{\psi_4} \qquad \varphi_3 := \underbrace{(\mathsf{A} \land \mathsf{B})}_{\psi_5} \to \underbrace{(\mathsf{B} \lor \mathsf{A})}_{\psi_6}$$

A	B	ψ_1	ψ_2	φ_1
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

A	B	ψ_3	ψ_4	φ_2
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

A	B	ψ_5	ψ_6	φ_3
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Um die in Definition 2.2.1 vorkommenden aussagenlogischen Verknüpfungen auf ein Minimum zu reduzieren, wird zunächst der Begriff der Äquivalenz eingeführt.

Definition 2.2.6 *Äquivalenz* ([10], S. 92)

Seien φ und ψ zwei aussagenlogische Formeln. Die Relation „≡“ ist wie folgt definiert:

$$\varphi \equiv \psi :\Leftrightarrow \varphi \models \psi \text{ und } \psi \models \varphi$$

Zwei Formeln φ und ψ mit $\varphi \equiv \psi$ heißen *äquivalent*.

Bemerkung. Ein Ausdruck $\varphi \models \psi$, wie er in Definition 2.2.6 vorkommt, bedeutet, dass das Modell von φ auch ein Modell von ψ ist.

Mithilfe folgender Äquivalenzen ist es möglich, alle aussagenlogischen Verknüpfungen auf die Menge $\{\neg, \rightarrow\}$ zu reduzieren:

$$\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &\equiv \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)) \\
\varphi \vee \psi &\equiv (\neg\varphi) \rightarrow \psi \\
\varphi \leftrightarrow \psi &\equiv \neg((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg(\psi \rightarrow \varphi))) \\
\varphi \not\leftrightarrow \psi &\equiv (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg(\psi \rightarrow \varphi))
\end{aligned}$$

Einen Beweis für die erste der genannten Äquivalenzen zeigt die Wahrheitstabelle in Tabelle 2.3. Mit diesen Äquivalenzen lässt sich mittels Induktion über die Struktur der aussagenlogischen Formeln zeigen, dass jede aussagenlogische Formel mit den Operatoren $\neg$ und $\rightarrow$ darstellbar ist.

φ	ψ	$\neg\psi$	α_2	α_3	α_1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Tabelle 2.3: Beweis für die Äquivalenz $\underbrace{\varphi \wedge \psi}_{\alpha_1} \equiv \neg\underbrace{(\underbrace{\varphi \rightarrow (\neg\psi)}_{\alpha_2})}_{\alpha_3}$.

Bemerkung. Es ist genauso möglich, die aussagenlogischen Verknüpfungen auf eine der Mengen $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}$ oder $\{\nleftrightarrow\}$ zu beschränken. Jede dieser Mengen lässt sich mit dementsprechenden Äquivalenzen auf die in Definition 2.2.1 eingeführten Operatoren zurückführen.

2.2.3 Aussagenlogischer Kalkül

In diesem Abschnitt werden Axiome und Schlussregeln für ein aussagenlogisches Kalkül eingeführt, in dem ausschließlich Tautologien herleitbar sind. Tabelle 2.4 zeigt die Axiome und Schlussregeln des aussagenlogischen Kalküls, das ausschließlich aus den aussagenlogischen Operatoren $\neg$ und $\rightarrow$ besteht.

Axiome		Schlussregeln
$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	(A1)	$\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ (MP)
$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	(A2)	
$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	(A3)	

Tabelle 2.4: Axiome und Schlussregeln des aussagenlogischen Kalküls. ([10], S. 93)

Bemerkung. Die Wahl dieser Axiome ist nicht eindeutig. Es gibt mehrere Axiomatisierungen, die der Aussagenlogik zugrunde liegen können und dieselben Metaeigenschaften besitzen. Das erste Axiom (A1) sagt aus, dass aus jeder Formel φ die Formel $\psi \rightarrow \varphi$ folgt. (A2) drückt die *Distributivität* der Implikation aus und (A3) ist die logische *Kontraposition* (Diese kennt man aus dem Alltag: „Wenn es schneit, dann ist es kalt.“ ist äquivalent zu „Wenn es nicht kalt ist, dann schneit es nicht.“). Alle drei Axiome lassen sich mit Wahrheitstabellen auf ihre Allgemeingültigkeit überprüfen. Als Schlussregel wird wieder der *Modus ponens* verwendet, der die Allgemeingültigkeit weitergibt, wie später noch gezeigt wird. ([11], S.34, [10], S. 93)

Als erstes Beispiel im aussagenlogischen Kalkül wird die Formel $\varphi = \mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A}$ hergeleitet. Aufgrund der semantischen Definition der Implikation muss φ natürlich wahr sein, aber wie bereits in Kapitel 2.1.4 erwähnt, sind Wahrheit und Beweisbarkeit zwei unterschiedliche Begriffe. Beim Herleiten von Formeln geht es ausschließlich um die Beweisbarkeit, die man im folgenden Beispiel sieht.

Beispiel 2.2.3. Ableitung von $\varphi = \mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A}$ ([10], S. 94)

1. $\vdash\ \mathsf{A} \rightarrow ((\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A}) \rightarrow \mathsf{A})$ (A1) $[\varphi = \mathsf{A}, \psi = (\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A})]$
2. $\vdash\ (\mathsf{A} \rightarrow ((\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A}) \rightarrow \mathsf{A})) \rightarrow ((\mathsf{A} \rightarrow (\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A})) \rightarrow (\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A}))$ (A2) $[\varphi = \mathsf{A}, \psi = (\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A}), \chi = \mathsf{A}]$
3. $\vdash\ (\mathsf{A} \rightarrow (\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A})) \rightarrow (\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A})$ (MP, 1,2)
4. $\vdash\ \mathsf{A} \rightarrow (\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A})$ $[\varphi = \psi = \mathsf{A}]$ (A1)
5. $\vdash\ \mathsf{A} \rightarrow \mathsf{A}$ (MP, 3,4)

Die im vorigen Kapitel eingeführte Definition 2.1.3 eines formalen Beweises gilt auch für die Aussagenlogik. Das bedeutet, dass für eine Menge $M = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ genau dann $M \vdash \varphi$ gilt, wenn jedes $\varphi_i \in M$ ein Axiom bzw. eine Formel aus der Menge M ist oder aus vorangegangenen Gliedern der Beweiskette durch die Anwendung der Schlussregel entsteht. Somit kann man auch in der Aussagenlogik Formeln mit Annahmen („*Wenn M gilt, folgt ...*“) herleiten. Die letzte Formel φ_n aus der Menge M entspricht der hergeleiteten Formel φ.

Bemerkung. Angenommen, die Menge $M = \{\psi\}$ besteht nur aus der Annahme ψ und es gilt $M \vdash \varphi$, dann bedeutet das nach Definition 2.1.3: $\{\psi\} \vdash \varphi$ bzw. „*Wenn ψ gilt, folgt φ.*“ Nach der Definition des Implikationsoperators bedeutet $\psi \rightarrow \varphi$ ebenso: „*Wenn ψ gilt, folgt φ.*“ Trotz der Ähnlichkeit muss hier klar unterschieden werden: Der Operator $\rightarrow$ existiert nur innerhalb der Logik, während der Operator $\vdash$ eine Aussage über die Beweisbarkeit einer Formel macht und somit nur außerhalb der Logik in der Metamathematik existiert. Tatsächlich herrscht zwischen der Welt innerhalb der Logik und der Welt außerhalb der Logik (Metamathematik) ein Zusammenhang, den Satz 2.2.1 aufzeigt. ([10], S. 94)

Satz 2.2.1 *Deduktionstheorem(DT)* ([10], S. 95, [8], S. 84)

Für beliebige aussagenlogische Formeln $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und ψ gilt:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Beweis.
Richtung: $\Leftarrow$
Wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ gilt, dann ist $\varphi \rightarrow \psi$ aus $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ableitbar und φ_n entspricht $\varphi \rightarrow \psi$. Wenn man nun φ in die Menge $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ hinzufügt, dann kann man mit dem Modus Ponens ψ aus φ und $\varphi \rightarrow \psi$ ableiten. Somit gilt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Richtung: $\Rightarrow$

Wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ gilt, dann ist ψ aus $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup \{\varphi\}$ herleitbar. Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass $\varphi \rightarrow \varphi_i$ für jedes φ_i in der Beweiskette $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$ herleitbar ist. Da φ_n der Formel ψ entspricht, steht am Ende der neuen Beweiskette $\langle \varphi \rightarrow \varphi_1, \varphi \rightarrow \varphi_2, \ldots, \varphi \rightarrow \varphi_n \rangle$ die Formel $\varphi \rightarrow \varphi_n$, was der Formel $\varphi \rightarrow \psi$ entspricht. Damit $\varphi \rightarrow \varphi_i$ für jedes φ_i in $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$ gilt, müssen drei Fälle unterschieden werden:

φ_i ist ein Axiom oder eine Voraussetzung: $\varphi \rightarrow \varphi_i$

1. $\vdash \ \varphi_i$ (atomar)
2. $\vdash \ \varphi_i \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi_n)$ $[\varphi = \varphi_n, \psi = \varphi]$ (A1)
3. $\vdash \ \varphi \rightarrow \varphi_n$ $[\varphi = \varphi_n, \psi = \varphi]$ (MP, 1,2)

φ_i ist die Formel φ selbst: $\varphi \rightarrow \varphi$

1. $\vdash \ \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ (A1) $[\varphi = \varphi, \psi = (\varphi \rightarrow \varphi)]$
2. $\vdash \ (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ (A2) $[\varphi = \varphi, \psi = (\varphi \rightarrow \varphi), \chi = \varphi]$
3. $\vdash \ (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ (MP, 1,2)
4. $\vdash \ \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ $[\varphi = \psi = \varphi]$ (A1)
5. $\vdash \ \varphi \rightarrow \varphi$ (MP, 3,4)

φ_i wurde mit dem Modus Ponens aus φ_j und $\varphi_j \rightarrow \varphi_i$ gebildet. Nachdem sowohl φ_j als auch $\varphi_j \rightarrow \varphi_i$ von den ersten beiden Fällen abgedeckt sind, müssen irgendwo in der Beweiskette bereits folgende Zeilen vorkommen:

1. $\vdash \ \varphi \rightarrow \varphi_j$
2. $\vdash \ \varphi \rightarrow (\varphi_j \rightarrow \varphi_i)$

Damit kann man $\varphi \rightarrow \varphi_i$ wie folgt herleiten:

3. $\vdash \ (\varphi \rightarrow (\varphi_j \rightarrow \varphi_i)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi_j) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi_i))$ $[\varphi = \varphi, \psi = \varphi_j, \chi = \varphi_i]$ (A2)
4. $\vdash \ (\varphi \rightarrow \varphi_j) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi_i)$ (MP, 2,3)
5. $\vdash \ \varphi \rightarrow \varphi_i$ (MP, 1,4)

$\square$

Das Deduktionstheorem ist sehr hilfreich beim Herleiten von Theoremen. Anschaulich wird das in den folgenden Beispielen, in denen die bekannten Theoreme T1: $(\neg\neg\varphi) \rightarrow \varphi$ und T2: $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ bewiesen werden. T1 sagt aus, dass aus einer doppelten Verneinung einer Formel die Formel selbst folgt. T2 beschreibt die *Transitivität* der Implikation.

Beispiel 2.2.4. Ableitung von T1: $(\neg\neg\varphi) \to \varphi$ ([10], S. 98)

1. $\vdash\ (\neg\neg\varphi) \to ((\neg\neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi))$ $[\varphi = (\neg\neg\varphi), \psi = (\neg\neg\neg\neg\varphi)]$ (A2)
2. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi)$ (DT)
3. $\vdash\ ((\neg\neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi)) \to ((\neg\varphi) \to (\neg\neg\neg\varphi))$ $[\varphi = (\neg\neg\neg\varphi), \psi = (\neg\varphi)]$ (A3)
4. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\varphi) \to (\neg\neg\neg\varphi)$ (MP, 2,3)
5. $\vdash\ ((\neg\varphi) \to (\neg\neg\neg\varphi)) \to ((\neg\neg\varphi) \to (\varphi))$ $[\varphi = \varphi, \psi = (\neg\neg\varphi)]$ (A3)
6. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\neg\varphi) \to \varphi$ (MP, 4,5)
7. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ (DT)
8. $\vdash\ (\neg\neg\varphi) \to \varphi$ (DT)

Beispiel 2.2.5. Ableitung von T2: $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ ([10], S. 97)

1. $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (Satz 2.1.1)
2. $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ (Satz 2.1.1)
3. $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (MP, 1,2)
4. $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$ (Satz 2.1.1)
5. $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (MP, 3,4)
6. $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi$ (DT)
7. $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)$ (DT)
8. $\vdash\ (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$ (DT)

2.2.4 Metaeigenschaften des aussagenlogischen Kalküls

Nach Definition 2.1.5 kann ein Kalkül widerspruchsfrei, negationsvollständig, korrekt sowie vollständig sein. Im aussagenlogischen Kalkül von Tabelle 2.4 wurden die Axiome so gewählt, dass jedes Axiom eine Tautologie darstellt, was mit Wahrheitstabellen leicht überprüfbar ist. Tabelle 2.5 zeigt die Allgemeingültigkeit des Modus Ponens, der mit der aussagenlogischen Formel $(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$ darstellbar ist. Da er die einzige Schlussregel ist, müssen alle ableitbaren Theoreme im aussagenlogischen Kalkül Tautologien sein. Daher ist der Kalkül korrekt (aus $\vdash \varphi$ folgt $\models \varphi$) und nach Satz 2.1.2 auch widerspruchsfrei.

Der Kalkül ist auch vollständig (aus $\models \varphi$ folgt $\vdash \varphi$), einen Beweis dafür kann man in [11] auf Seite 35 nachlesen. Trotz der Vollständigkeit ist der Kalkül nicht negationsvollständig. Das ist kein Widerspruch zu Satz 2.1.2, da die Voraussetzung, dass für eine Formel φ immer entweder $\models \varphi$ oder $\not\models \varphi$ gelten muss, nicht zutrifft. In Beispiel 2.2.1 wurde eine aussagenlogische Formel gezeigt, die nur in gewissen Interpretationen wahr ist, für die also weder $\models \varphi$ noch $\not\models \varphi$ gilt.

φ	ψ	α_1	α_2	α_3
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Tabelle 2.5: Beweis für die Allgemeingültigkeit des Modus Ponens: $\underbrace{\underbrace{(\varphi \wedge \underbrace{(\varphi \rightarrow \psi)}_{\alpha_1})}_{\alpha_2} \rightarrow \psi}_{\alpha_3}$

2.3 Prädikatenlogik erster Stufe

In diesem Abschnitt wird die *Prädikatenlogik erster Stufe* eingeführt, die als Grundlage die Erkenntnisse der Aussagenlogik nutzt. Um Theoreme aus der gewöhnlichen Mathematik formalisieren zu können, müssen noch einige Bausteine ergänzt werden. Mit der Prädikatenlogik erster Stufe, auch PL1 genannt, wird ein formales System eingeführt, das als Fundament für Theorien dient, die ausdrucksstark genug sind, um die gewöhnliche Mathematik zu formalisieren. In Kapitel 3 wird eine entsprechende Theorie beleuchtet.

2.3.1 Syntax

Die Syntax der PL1 wird in drei Schritten definiert. Zunächst wird die prädikatenlogische Signatur eingeführt, die den Vorrat an Symbolen angibt, aus denen prädikatenlogische Formeln entstehen können.

Definition 2.3.1 *Prädikatenlogische Signatur* ([10], S. 104, [8], S. 43)

Eine prädikatenlogische Signatur Σ ist ein Tripel $(V_\Sigma, F_\Sigma, R_\Sigma)$. Dieses besteht aus

- einer Menge V_Σ von *Variablen*, z.B. $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots\}$,
- einer Menge F_Σ von *Funktionssymbolen*, z.B. $\{\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2, \ldots\}$,
- einer Menge R_Σ von *Relationssymbolen*, z.B. $\{\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2, \ldots\}$.

Jedes Funktions- und jedes Relationssymbol besitzt eine *Stelligkeit* ≥ 0.

Bemerkung. Wie in der Aussagenlogik können auch hier die Symbole von Fall zu Fall angepasst werden. Für Variablen wird manchmal $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$, für Funktionssymbole $\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}$ und für Relationssymbole $\mathsf{R}, \mathsf{S}, \mathsf{T}$ verwendet.

Definition 2.3.2 *Prädikatenlogischer Term* ([10], S. 105, [8], S. 46)

Sei $\Sigma = (V_\Sigma, F_\Sigma, R_\Sigma)$ eine prädikatenlogische Signatur. Die Menge der *prädikatenlogischen Terme* ist induktiv definiert:

- Jede Variable $x \in V_\Sigma$ ist ein Term.
- Jedes 0-stellige Funktionssymbol $f \in F_\Sigma$ ist ein Term.
- Sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ Terme und ist $f \in F_\Sigma$ ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ein Term.

Mithilfe der Definitionen 2.3.1 und 2.3.2 lassen sich folgende Beispielterme bilden:

- Terme über Σ_1 mit: $V_{\Sigma_1} = \{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}$ und $F_{\Sigma_1} = \{\mathsf{f}(\text{2-stellig})\}$:
  x, y, $\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{x})$, $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{y})$, $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{x}))$, ...
- Terme über Σ_2 mit: $V_{\Sigma_2} = \{\mathsf{y}, \mathsf{z}\}$ und $F_{\Sigma_2} = \{\mathsf{g}(\text{1-stellig})\}$:
  y, $\mathsf{g}(\mathsf{y})$, $\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{z}))$, $\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{y})))$, ...

Um diese Terme in Beziehung zueinander zu setzen, wird wieder auf die logischen Operatoren aus der Aussagenlogik zurückgegriffen. Zusätzlich werden zwei *Quantoren* als Operatoren hinzugefügt:

- „$\forall$“ ist der *Allquantor* und bedeutet „*für alle*“.
- „$\exists$“ ist der *Existenzquantor* und bedeutet „*es existiert*“.

Definition 2.3.3 *Syntax der Prädikatenlogik* ([10], S. 105, [8], S. 47)

Sei $\Sigma = (V_\Sigma, F_\Sigma, R_\Sigma)$ eine prädikatenlogische Signatur. Die Menge der *atomaren prädikatenlogischen Formeln* ist wie folgt definiert:

- Sind $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ Terme und ist $P \in P_\Sigma$ ein n-stelliges Relationssymbol, dann ist $P(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ eine atomare Formel.

Die *prädikatenlogischen Formeln* sind induktiv definiert:

- $\mathsf{0}, \mathsf{1}$ und jede atomare Formel sind Formeln.
- Sei $x \in V_\Sigma$. Sind φ und ψ Formeln, dann sind es auch: $(\neg\varphi), (\varphi \land \psi), (\varphi \lor \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \not\leftrightarrow \psi), \forall x\varphi, \exists x\varphi$

Beispiele für prädikatenlogische Formeln über Σ_1 mit $V_{\Sigma_1} = \{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}$, $F_{\Sigma_1} = \{\mathsf{f}(\text{2-stellig})\}$ und $R_{\Sigma_1} = \{\mathsf{R}(\text{2-stellig})\}$ sind:

- Atomare Formeln über Σ_1:
  $\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{x})$, $\mathsf{R}(\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{y})$, $\mathsf{R}(\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{x}))$, ...
- Formeln über Σ_1:
  $\forall\mathsf{x}\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{x})$, $\mathsf{R}(\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{y}) \lor (\neg(\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y})))$, $\forall\mathsf{x}\exists\mathsf{y}(\mathsf{R}(\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{x})))$, ...

Ist eine Variable in einer Formel von einem Quantor umgeben, so sagt man, dass die Variable *gebunden* ist. In der Formel $\varphi = \forall\mathsf{x}\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{x})$ ist die Variable x gebunden. Hingegen ist die Variable x *frei* oder *ungebunden* in der Formel $\psi = \exists\mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$. Die Variable x kann in einer Formel auch frei und gebunden vorkommen, wie z.B. in der Formel $\varphi \to \psi$, was der Formel $\forall\mathsf{x}\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{x}) \to \exists\mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ entspricht. Um den Umgang mit verschiedenen Teilformeln zu erleichtern, ist es oft hilfreich, gleichnamige Variablen umzubenennen. Im Beispiel von $\varphi \to \psi$ ist es hilfreich, die Variable x in ψ mit der Variable z zu tauschen, um Verwechslungen vorzubeugen. Die neue Formel $\varphi \to \psi$ lautet $\forall\mathsf{x}\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{x}) \to \exists\mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{z}, \mathsf{y})$. Formeln, in denen freie Variablen vorkommen, werden *offene* Formeln genannt.

2.3.2 Semantik

Wie in der Aussagenlogik muss einer prädikatenlogischen Formel zunächst eine Interpretation zugrunde liegen, bevor man mit der Modellrelation den Wahrheitsgehalt der Formel bestimmen kann.

Definition 2.3.4 *Prädikatenlogische Interpretation* ([10], S. 106)

Sei $\Sigma = (V_\Sigma, F_\Sigma, R_\Sigma)$ eine prädikatenlogische Signatur. Eine *Interpretation* über Σ

ist ein Tupel (D, I) mit den Eigenschaften:

- D ist eine nichtleere Menge und wird *Domäne* oder *Grundmenge* genannt.
- I ist eine Abbildung, die
  - jedem Variablensymbol $x \in V_\Sigma$ ein Element $I(x) \in D$,
  - jedem n-stelligen Funktionssymbol $f \in F_\Sigma$ eine Funktion
    $$I(f) : D^n \to D \text{ mit } I(f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) := I(f)(I(\sigma_1), \ldots, I(\sigma_n))$$
  - und jedem n-stelligen Relationssymbol $R \in R_\Sigma$ eine Relation
    $$I(R) \subseteq D^n$$

  zuordnet.

Bemerkung. Sowohl in der Definition 2.3.3 der Syntax als auch in der Definition 2.3.4 der Interpretation sind keine Konstanten vorgekommen. Das liegt daran, dass beide Definitionen an [10] angelehnt sind und der Autor die 0-stelligen Funktionssymbole als Konstanten einsetzt. Dass das funktioniert, ist leicht einsehbar: Jedem 0-stelligen Funktionssymbol f wird laut Definition 2.3.4 eine Funktion $I(f) : D^0 \to D$ zugeordnet, die für ein einzelnes Element aus der Domäne steht, also für eine Konstante. Es ist auch möglich, die Konstanten in der prädikatenlogischen Signatur mitzudefinieren, wie in [3] auf Seite 12 und in [8] auf Seite 43 nachzulesen ist.

Beispiel 2.3.1. Die folgende syntaktisch korrekt gebildete Formel mit $V_\Sigma = \{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}$, $F_\Sigma = \{\mathsf{f}\}$, $R_\Sigma = \{\mathsf{R}, \mathsf{S}\}$ ist ohne Interpretation völlig bedeutungslos:

$$\mathsf{R}(\mathsf{f}) \wedge \forall \mathsf{x}(\mathsf{R}(\mathsf{x}) \to \exists \mathsf{y}(\mathsf{S}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \wedge \mathsf{R}(\mathsf{y})))$$

Eine mögliche Interpretation (D, I) wäre:

$$\begin{array}{rcl} D & := & \mathbb{R} \\ I(\mathsf{f}) & := & 0 \\ I(\mathsf{R}) & := & \mathbb{N} \\ I(\mathsf{S}) & := & \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a < b\} \end{array}$$

Diese macht aus der oben angeführten Formel die Aussage: „*0 ist eine natürliche Zahl, und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.*“.

Um den Wahrheitswert so einer Formel zu bewerten, wird nun die Modellrelation „$\models$“ für die Prädikatenlogik definiert.

Definition 2.3.5 *Semantik der Prädikatenlogik* ([10], S. 107)

Seien φ und ψ prädikatenlogische Formeln und (D, I) eine Interpretation. Die Semantik der Prädikatenlogik ist durch die *Modellrelation* „$\models$“ gegeben, die induktiv über dem Formelaufbau definiert ist:

$$\begin{aligned}
(D, I) &\models \mathsf{1} \\
(D, I) &\not\models \mathsf{0} \\
(D, I) \models P(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) &:\Leftrightarrow (I(\sigma_1), \ldots, I(\sigma_n)) \in I(P) \\
(D, I) \models (\neg\varphi) &:\Leftrightarrow (D, I) \not\models \varphi \\
(D, I) \models (\varphi \wedge \psi) &:\Leftrightarrow (D, I) \models \varphi \text{ und } (D, I) \models \psi \\
(D, I) \models (\varphi \vee \psi) &:\Leftrightarrow (D, I) \models \varphi \text{ oder } (D, I) \models \psi \\
(D, I) \models (\varphi \to \psi) &:\Leftrightarrow (D, I) \not\models \varphi \text{ oder } (D, I) \models \psi \\
(D, I) \models (\varphi \leftrightarrow \psi) &:\Leftrightarrow (D, I) \models \varphi \to \psi \text{ und } (D, I) \models \psi \to \varphi \\
(D, I) \models (\varphi \nleftrightarrow \psi) &:\Leftrightarrow (D, I) \not\models \varphi \leftrightarrow \psi \\
(D, I) \models \forall x\varphi &:\Leftrightarrow \text{Für alle } d \in D \text{ gilt } (D, I_{[x/d]}) \models \varphi \\
(D, I) \models \exists x\varphi &:\Leftrightarrow \text{Es gibt ein } d \in D \text{ mit } (D, I_{[x/d]}) \models \varphi
\end{aligned}$$

Eine Interpretation (D, I) mit $(D, I) \models \varphi$ heißt *Modell* für φ.

Bemerkung. Der Ausdruck $I_{[x/d]}$ in Definition 2.3.5 meint, dass mit $(D, I_{[x/d]})$ eine Interpretation vorliegt, die der Variablen x das Element d aus der Domäne zuordnet. Das ist notwendig, um die (möglicherweise) einzige freie Variable x zu binden.

Im folgenden Beispiel werden einer vergleichsweise einfachen Formel zwei unterschiedliche Interpretationen zugrunde gelegt.

Beispiel 2.3.2. ([10], S. 108)
Es sei $\varphi = \forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathsf{y}))$ mit $V_\Sigma = \{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}, F_\Sigma = \{\mathsf{f}\}, R_\Sigma = \{\mathsf{R}\}$. Die Interpretationen (D_1, I_1) und (D_2, I_2) sind wie folgt definiert:

Interpretation 1 (D_1, I_1):	Interpretation 2 (D_2, I_2):
$D := \mathbb{Z}$	$D := \mathbb{N}$
$I(\mathsf{f}) := (x, y) \mapsto x + y$	$I(\mathsf{f}) := (x, y) \mapsto x + y$
$I(\mathsf{R}) := \{0\}$	$I(\mathsf{R}) := \{0\}$
„Für jede ganze Zahl x existiert eine ganze Zahl y mit x + y = 0“	*„Für jede natürliche Zahl x existiert eine natürliche Zahl y mit x + y = 0“*

Die Formel φ ist mit der Abbildung I und der Menge der ganzen Zahlen offensichtlich wahr, mit der Menge der natürlichen Zahlen hingegen falsch. Es gilt $(D_1, I_1) \models \varphi$ und $(D_2, I_2) \not\models \varphi$.

Bemerkung. Es folgen einige Erweiterungen auf Grundlage der Aussagenlogik. ([10], S. 109)

- Wie in der Aussagenlogik gelten auch hier die Definitionen der Erfüllbarkeit (2.2.5) und der Äquivalenz (2.2.6) einer Formel. Demnach ist die Formel φ aus Beispiel 2.3.2 eine *erfüllbare* Formel.

- Die Definition der Erfüllbarkeit lässt sich auf Mengen von Formeln erweitern. Die Menge $M = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_2\}$ heißt erfüllbar, wenn eine Interpretation existiert, die für jede Formel $\varphi_i \in M$ ein Modell ist. Ist jede Interpretation ein Modell für jedes $\varphi_i \in M$, dann ist M allgemeingültig.

- Wenn M eine Menge von Formeln ist, schreibt man $M \models \varphi$, wenn für jedes Modell (D, I) von M gilt: $(D, I) \models \varphi$.

- Der Ausdruck $\emptyset \models \varphi$ wird mit $\models \varphi$ abgekürzt und bedeutet, dass φ allgemeingültig ist.

- Neben den bekannten Äquivalenzen der aussagenlogischen Operatoren, die es ermöglichen, die Menge der Operatoren auf $\{\neg, \rightarrow\}$ zu beschränken, gibt es auch eine Äquivalenz, die es erlaubt, den Allquantor auf den Existenzquantor zurückzuführen und umgekehrt. Es gelten:

  $$\begin{aligned} \exists x\varphi &\equiv \neg\forall x(\neg\varphi) \\ \neg\exists x\varphi &\equiv \forall x(\neg\varphi) \\ \exists x(\neg\varphi) &\equiv \neg\forall x\varphi \\ \neg\exists x(\neg\varphi) &\equiv \forall x\varphi \end{aligned}$$

  Ein Beispiel aus der Alltagssprache hilft, diese Äquivalenzen zu interpretieren: φ sei die Aussage „Jemand kann Deutsch sprechen.“ und die Variable x stehe für einen beliebigen Menschen. So lautet z.B. die dritte Äquivalenz: „Es gibt einen Menschen, der nicht Deutsch sprechen kann.“ Das ist gleichbedeutend mit: „Nicht alle Menschen können Deutsch sprechen.“

2.3.3 Prädikatenlogischer Kalkül

Um die Allgemeingültigkeit einer Formel zu beweisen, wird in diesem Abschnitt ein prädikatenlogischer Kalkül definiert, der wie in der Aussagenlogik Ableitungen aus Axiomen und Schlussregeln trifft. Die Axiome und Schlussregeln werden wieder so definiert, dass sie selbst Tautologien sind und daher alle abgeleiteten Formeln ebenso Tautologien sein müssen.

Axiome			
$\varphi \to (\psi \to \varphi)$			(A1)
$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$			(A2)
$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$			(A3)
$\forall x\varphi \to \varphi[x \leftarrow \sigma]$			(A4)
$\forall x(\varphi(\cancel{x}) \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$			(A5)
Schlussregeln			
$\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$	(MP)	$\dfrac{\varphi(\cancel{x})}{\forall x\varphi}$	(G)

Tabelle 2.6: Axiome und Schlussregeln des prädikatenlogischen Kalküls. ([10], S. 110)

Bemerkung. Es folgen einige Erläuterungen zur Tabelle 2.6: ([10], S. 110)

- Die Menge der logischen Operatoren und Quantoren beschränkt sich auf $\neg, \to$ und $\forall$. Dass dies ausreichend ist, wurde bereits mit entsprechenden Äquivalenzen gezeigt.
- Die ersten drei Axiome (A1) bis (A3) sind vom aussagenlogischen Kalkül übernommen.
- Ein Ausdruck $[x \leftarrow \sigma]$ steht für eine Substitution, die alle freien Variablen x einer Formel φ mit dem Term σ ersetzt. Beispiel:

$$\text{Sei } \varphi = (\forall \mathsf{x} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y})),\ \psi = (\forall \mathsf{y} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y})) \text{ und } \sigma = \mathsf{a}, \text{ dann gilt:}$$
$$\varphi[\mathsf{x} \leftarrow \mathsf{a}] = (\forall \mathsf{x} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}))$$

$$\psi[\mathsf{x} \leftarrow \mathsf{a}] = (\forall \mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{a}, \mathsf{y}))$$

- Eine kollisionsfreie Substitution liegt vor, wenn eine Variable eines Terms durch Substitution nicht von einem Quantor gebunden wird. Beispiel für eine Kollision:

  $$\text{Sei } \varphi = \exists \mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \text{ und } \sigma = \mathsf{y}, \text{ dann gilt:}$$
  $$\varphi[\mathsf{x} \leftarrow \mathsf{y}] = \exists \mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{y}, \mathsf{y})$$

  Gäbe es im Axiom (A4) nicht die Voraussetzung der Kollisionsfreiheit, so wäre die falsche Aussage $\forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \rightarrow \exists \mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{y}, \mathsf{y})$ ein ableitbares Theorem.

- Axiom (A4) ermöglicht, die freien Vorkommnisse der Variable x in einer Formel φ mit einem Term σ zu *instanziieren*.

- Der Ausdruck $\varphi(\cancel{x})$ in Axiom (A5) bedeutet, dass die Variable x in φ nicht frei vorkommt. $\varphi(x)$ bedeutet hingegen, dass die Variable x in φ frei vorkommen kann. Somit besagt (A5), dass eine Teilformel von einem Quantor befreit werden darf, wenn die quantifizierte Variable in der Teilformel nur gebunden vorkommt.

- Die Schlussregel (MP) wurde von der Aussagenlogik übernommen. Die neue Regel (G) ist die *Generalisierungsregel*. Diese gilt nur, wenn die neu quantifizierte Variable x in φ nur gebunden vorkommt. Einen Beweis für (G) findet man in [8] auf Seite 85.

Das Deduktionstheorem aus Satz 2.2.1 behält auch in der Prädikatenlogik seine Gültigkeit, was die Ableitung der folgenden Theoreme wieder deutlich verkürzt:

Beispiel 2.3.3. Ableitung von: $\forall x \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \forall y \forall x \varphi(x, y)$ ([10], S. 112)

1.	$\{\forall x \forall y \varphi(x, y)\} \vdash \forall x \forall y \varphi(x, y)$	(Satz 2.1.1)
2.	$\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \forall y \varphi(x, y)$	(A4)
3.	$\{\forall x \forall y \varphi(x, y)\} \vdash \forall y \varphi(x, y)$	(MP, 1,2)
4.	$\vdash \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$	(A4)
5.	$\{\forall x \forall y \varphi(x, y)\} \vdash \varphi(x, y)$	(MP, 3,4)
6.	$\{\forall x \forall y \varphi(x, y)\} \vdash \forall x \varphi(x, y)$	(G, 5)
7.	$\{\forall x \forall y \varphi(x, y)\} \vdash \forall y \forall x \varphi(x, y)$	(G, 6)
8.	$\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \forall y \forall x \varphi(x, y)$	(DT)

Beispiel 2.3.4. Ableitung von: $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x))$ ([10], S. 112)

1. $\{\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\} \vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ (Satz 2.1.1)
2. $\{\forall x\varphi(x)\} \vdash \forall x\varphi(x)$ (Satz 2.1.1)
3. $\vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ (A4)
4. $\{\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\} \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)$ (MP, 1,3)
5. $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)$ (A4)
6. $\{\forall x\varphi(x)\} \vdash \varphi(x)$ (MP, 2,5)
7. $\{\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)), \forall x\varphi(x)\} \vdash \psi(x)$ (MP, 4,6)
8. $\{\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)), \forall x\varphi(x)\} \vdash \forall x\psi(x)$ (G, 7)
9. $\{\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\} \vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x)$ (DT)
10. $\vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x))$ (DT)

2.3.4 Metaeigenschaften der Prädikatenlogik

Auch die Prädikatenlogik erster Stufe kann nach Definition 2.1.5 eingeordnet werden. In Kapitel 2.2.4 wurde gezeigt, dass die Axiome (A1) bis (A3) sowie der Modus Ponens Tautologien sind. Da alle Instanzen von (A4) und (A5) Tautologien sind, folgt die Allgemeingültigkeit von (A4) und (A5). Eine detailliertere Ausführung ist in [10] auf den Seiten 112 bis 113 nachzulesen. Die Allgemeingültigkeit der Generalisierungsregel folgt aus dem Beweis in [8] auf Seite 85. Damit ist der prädikatenlogische Kalkül korrekt (aus $\vdash \varphi$ folgt $\models \varphi$) und nach Satz 2.1.2 auch widerspruchsfrei.
Dass auch die Vollständigkeit des Kalküls gilt, bewies Kurt Gödel in seiner Doktorarbeit im Jahr 1929. Ein Auszug des berühmten Gödel'schen *Vollständigkeitssatzes* [5] ist in Abbildung 2.1 zu sehen. Moderne Formen des Beweises findet man in [14] auf den Seiten 17 bis 24 und in [8] auf den Seiten 110 bis 119.

2.3.5 Ausblick: Prädikatenlogik zweiter Stufe

Neben der Prädikatenlogik erster Stufe (PL1) existieren noch weitere Logiken höherer Stufe (PL2, PL3, ...). Was man sich darunter vorstellen kann, ist im Detail in [10] auf den Seiten 118 bis 124 dargestellt. PL2 besagt grob zusammengefasst, dass die Quantoren nicht nur über Variablen, sondern auch über Funktions- und Relationssymbole quantifizieren dürfen. Ein Beispiel für eine Formel in PL2 sieht folgendermaßen aus:

$$\forall \mathsf{R}(\forall \mathsf{x}\forall \mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \leftrightarrow \exists \mathsf{f}\mathsf{R}(\mathsf{x},\mathsf{f}(\mathsf{x})))$$

Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls[1].

Von **Kurt Gödel** in Wien.

Whitehead und Russell haben bekanntlich die Logik und Mathematik so aufgebaut, daß sie gewisse evidente Sätze als Axiome an die Spitze stellten und aus diesen nach einigen genau formulierten Schlußprinzipien auf rein formalem Wege (d. h. ohne weiter von der Bedeutung der Symbole Gebrauch zu machen) die Sätze der Logik und Mathematik deduzierten. Bei einem solchen Vorgehen erhebt sich natürlich sofort die Frage, ob das an die Spitze gestellte System von Axiomen und Schlußprinzipien vollständig ist, d. h. wirklich dazu ausreicht, jeden logisch-mathematischen Satz zu deduzieren, oder ob vielleicht wahre (und nach anderen Prinzipien ev. auch beweisbare) Sätze denkbar sind, welche in dem betreffenden System nicht abgeleitet werden können. Für den Bereich der logischen

---

Satz I: Jede allgemeingültige[4]) Formel des engeren Funktionenkalküls ist beweisbar.

Dabei legen wir folgendes Axiomensystem[5]) zugrunde:

Undefinierte Grundbegriffe: $\vee$, $\overline{}$, (x). [Daraus lassen sich in bekannter Weise &, $\rightarrow$, $\sim$, (Ex) definieren.]

Formale Axiome:

1. $X \vee X \rightarrow X$	4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$
2. $X \rightarrow X \vee Y$	5. $(x) F(x) \rightarrow F(y)$
3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$	6. $(x)[X \vee F(x)] \rightarrow X \vee (x) F(x)$.

Abbildung 2.1: Auszug aus der Dissertation von Kurt Gödel im Jahr 1929. Der erste Ausschnitt zeigt die Einleitung, in der die Motivation für den Beweis zu lesen ist. Der zweite Ausschnitt zeigt den *Vollständigkeitssatz* und die gewählte Axiomatisierung, die Gödel aus der Principia Mathematica ([13]) von Russel und Whitehead übernahm. ([5], S. 1-2)

3 Peano-Arithmetik

Die in Kapitel 2.3 kennengelernte Prädikatenlogik 1. Stufe dient mit ihren Axiomen und ihrem Schlussapparat als Grundlage für die sogenannte *Peano-Arithmetik* (Abk.: PA). Diese wird mit zusätzlichen Axiomen aus der PL1 gebildet und ist eine sogenannte *Theorie*. Bei Theorien unterscheidet man zwischen *logischen Axiomen* eines formalen Systems (z.B. PL1) und *Theorieaxiomen*, die spezifische Eigenschaften zugrunde legen. Wählt man bei den logischen Axiomen die PL1, so spricht man von einer Theorie 1. Stufe. ([10], S. 135)

Mit der PA liegt eine Theorie vor, mit der die natürlichen Zahlen formalisiert werden können. Ihr Name geht zurück auf den italienischen Mathematiker Giuseppe Peano (1858 - 1932), der im Jahr 1889 neun Axiome definierte, die in Bild 3.1 zu sehen sind. Die Axiome 1, 6, 7, 8 und 9 sind jene fünf Axiome, die man heute meint, wenn man von den Peano-Axiomen spricht. Diese bilden mit einigen anderen Axiomen die Theorieaxiome der PA. In Kapitel 3.3 werden diese näher beleuchtet. ([9], S. 56)

Axiomata.

1. $1 \in \mathrm{N}.$
2. $a \in \mathrm{N} . \supset . a = a.$
3. $a, b, c \in \mathrm{N} . \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \in \mathrm{N} . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \in \mathrm{N} : \supset . a \in \mathrm{N}.$
6. $a \in \mathrm{N} . \supset . a + 1 \in \mathrm{N}.$
7. $a, b \in \mathrm{N} . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \in \mathrm{N} . \supset . a + 1 -= 1.$
9. $k \in \mathrm{K} \therefore 1 \in k \therefore x \in \mathrm{N} . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . \mathrm{N} \supset k.$

Abbildung 3.1: Das Bild zeigt die Axiomatisierung der natürlichen Zahlen in Peanos Werk *Arithmetices principia* aus dem Jahr 1889. Das Symbol „Ɔ“ steht für Implikation „→“. Im ersten Axiom ist zu sehen, dass Peano die Zahl 1 als kleinste natürliche Zahl definierte. ([2], S. 17)

3.1 Syntax

Die Syntax der Peano-Arithmetik basiert auf der Syntax der PL1, mit dem Unterschied, dass die Konstanten auf die Zahl „$\mathsf{0}$“, die Funktionyssymbole auf „s“, „$+$“, „$\cdot$“ und die Relationssymbole auf „$=$“ beschränkt sind.

Definition 3.1.1 *Syntax der Peano-Arithmetik* ([10], S. 136)

Die Menge der *arithmetischen Terme* ist induktiv definiert:

- $\mathsf{0}, \mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3, \ldots$ sind arithmetische Terme.
- Sind σ und τ arithmetische Terme, so sind es auch:

$$\mathsf{s}(\sigma), (\sigma + \tau), (\sigma \cdot \tau)$$

Die Menge der *arithmetischen Formeln* ist induktiv definiert:

- Sind σ und τ arithmetische Terme, so ist

$$(\sigma = \tau) \text{ eine arithmetische Formel.}$$

- Sind φ und ψ arithmetische Formeln, dann sind es auch:

$$(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \not\leftrightarrow \psi)$$

- Ist φ eine arithmetische Formel, dann sind es auch:

$$\forall x\varphi, \exists x\varphi \text{ mit } x \in \{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3, \ldots\}$$

Bemerkung. Wie in Kapitel 2.1.2 bereits eingeführt, werden auch hier Ausdrücke der Form „$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))))$“ mit „$\bar{4}$“ abgekürzt, um die Lesbarkeit zu vereinfachen. Ebenso werden Klammerpaare dort weggelassen, wo die Eindeutigkeit der Bedeutung erhalten bleibt.

Beispiele für Ausdrücke der Peano-Artihmetik sind:

- Arithmetische Terme:
  - $\mathsf{0}$
  - x_1

  - $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))$ bzw. $\bar{3}$
  - $(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})) \cdot (\mathsf{x}_1 + \mathsf{s}(\mathsf{0})))$ bzw. $\bar{2} \cdot (\mathsf{x}_1 + \bar{1})$

- Arithmetische Formeln:
  - $\exists \mathsf{x}_1(\bar{3} \cdot \mathsf{x}_1 = \bar{12})$
  - $\forall \mathsf{x}_1(\bar{2} \cdot \mathsf{x}_1 = \mathsf{x}_1 + \mathsf{x}_1)$

3.2 Semantik

Die Modellrelation „$\models$" der PA basiert auf der Semantik der PL1 (siehe Definition 2.3.5). Im Gegensatz zur PL1 gilt die Modellrelation der PA nur für eine bestimmte Interpretation (D, I). Als Domäne D dient die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die Abbildung I ist für die Symbole „$\mathsf{0}$", „s", „$+$", „$\cdot$" wie folgt definiert: ([10], S. 137)

$$\begin{aligned} I(\mathsf{0}) &:= 0 \\ I(\mathsf{s}(\sigma)) &:= I(\sigma) + 1 \\ I(\sigma_1 + \sigma_2) &:= I(\sigma_1) + I(\sigma_2) \\ I(\sigma_1 \cdot \sigma_2) &:= I(\sigma_1) \cdot I(\sigma_2) \end{aligned}$$

Die Symbole „s", „$+$", „$\cdot$" beschreiben also die Nachfolgerfunktion, die Addition und die Multiplikation. Somit kann die Semantik der PA definiert werden.

Definition 3.2.1 *Semantik der Peano-Arithmetik* ([10], S. 137)

Seien φ und ψ geschlossene arithmetische Formeln. Die Semantik der Peano-Arithmetik ist durch die *Modellrelation* „$\models$" gegeben, die induktiv definiert ist:

$$\begin{aligned} \models (\sigma_1 = \sigma_2) &:\Leftrightarrow I(\sigma_1) = I(\sigma_2) \\ \models (\neg\varphi) &:\Leftrightarrow \not\models \varphi \\ \models (\varphi \wedge \psi) &:\Leftrightarrow \models \varphi \text{ und } \models \psi \\ \models (\varphi \vee \psi) &:\Leftrightarrow \models \varphi \text{ oder } \models \psi \\ \models (\varphi \rightarrow \psi) &:\Leftrightarrow \not\models \varphi \text{ oder } \models \psi \\ \models (\varphi \leftrightarrow \psi) &:\Leftrightarrow \models \varphi \rightarrow \psi \text{ und } \models \psi \rightarrow \varphi \\ \models (\varphi \nleftrightarrow \psi) &:\Leftrightarrow \not\models \varphi \leftrightarrow \psi \\ \models \forall x\varphi &:\Leftrightarrow \text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \models \varphi[x \leftarrow \bar{n}] \\ \models \exists x\varphi &:\Leftrightarrow \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \models \varphi[x \leftarrow \bar{n}] \end{aligned}$$

Die Aussage $\models \varphi$ hat in der PA eine andere Bedeutung als in PL1. In PL1 bedeutet sie, dass φ unter jeder möglichen Interpretation wahr ist, während in PA die Aussage nur in der oben angeführten Interpretation wahr ist. Diese heißt *Standardinterpretation* und kann mit $(\mathbb{N}, \{\mathsf{s}, +, \cdot\})$ ausgedrückt werden. Im Gegensatz zur Aussagen- und Prädikatenlogik gilt hier für jede Aussage φ entweder $\models \varphi$ oder $\not\models \varphi$, da nur für eine spezifische Interpretation ausgewertet wird. ([10], S. 138)
Eine Auswertung einer PA-Formel ohne Variablen kann wie folgt aussehen:

Beispiel 3.2.1. Gilt $\models (\sigma_1 = \sigma_2)$ mit $\sigma_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(0)$ und $\sigma_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$?

$$\begin{aligned} I(\sigma_1) &= I(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) + \mathsf{s}(0)) \\ &= I(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + I(\mathsf{s}(0)) \\ &= I(\mathsf{s}(0)) + 1 + I(0) + 1 \\ &= I(0) + 1 + 1 + 0 + 1 \\ &= 0 + 1 + 1 + 0 + 1 \\ &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} I(\sigma_2) &= I(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \\ &= I(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) + 1 \\ &= I(\mathsf{s}(0)) + 1 + 1 \\ &= I(0) + 1 + 1 + 1 \\ &= 0 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Da $I(\sigma_1) = I(\sigma_2)$ gilt nach Definition 3.2.1: $\models (\sigma_1 = \sigma_2)$.

Beispiel 3.2.2. Darstellung zahlentheoretischer Aussagen ([9], S. 122, [10], S. 139)
Die folgenden Beispiele zeigen, wie zahlentheoretische Aussagen formalisiert werden können. Dabei werden Abkürzungen für häufig vorkommende Beziehungen eingeführt. Am Ende werden mit dem Satz von Euklid *„Es gibt unendlich viele Primzahlen."* und der Goldbach'schen Vermutung zwei berühmte Aussagen der Zahlentheorie formal dargestellt werden.

- $\exists \mathsf{y}(\mathsf{x} = \bar{2} \cdot \mathsf{y})$
  Diese Formel sagt aus, dass eine Zahl y existiert, sodass x gleich $2 \cdot \mathsf{y}$ ist. Damit ist diese Formel äquivalent zu der Aussage „x *ist eine gerade Zahl.*" Diese Formel wird abgekürzt mit dem Ausdruck „even(x)".

- $\exists \mathsf{y}(\mathsf{z} \cdot \mathsf{y} = \mathsf{x})$
  Diese Formel sagt aus, dass eine Zahl y existiert, sodass x gleich $\mathsf{z} \cdot \mathsf{y}$ ist. Damit ist diese Formel äquivalent zu der Aussage „z *ist ein Teiler von* x." Diese Formel wird abgekürzt mit dem Ausdruck „$\mathsf{z}|\mathsf{x}$".

- $\exists \mathsf{y}(\mathsf{x} = \bar{3} + \mathsf{y})$
  Diese Formel sagt aus, dass x für eine Zahl steht, die größer oder gleich 3 ist. Somit steht die Formel für den Ausdruck „$\mathsf{x} \geq 3$". Im Allgemeinen können die Relationen $<$, $>$, $\leq$ und $\geq$ wie folgt abgekürzt werden:

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{x} < \mathsf{y}) &:= \exists \mathsf{z}(\mathsf{x} + \mathsf{z} + \bar{1} = \mathsf{y}) \\
(\mathsf{x} > \mathsf{y}) &:= \exists \mathsf{z}(\mathsf{x} = \mathsf{y} + \mathsf{z} + \bar{1}) \\
(\mathsf{x} \leq \mathsf{y}) &:= \exists \mathsf{z}(\mathsf{x} + \mathsf{z} = \mathsf{y}) \\
(\mathsf{x} \geq \mathsf{y}) &:= \exists \mathsf{z}(\mathsf{x} = \mathsf{y} + \mathsf{z})
\end{aligned}
$$

- $\forall \mathsf{x}(\mathsf{x}|\bar{7}) \rightarrow (\mathsf{x} = \bar{1} \vee \mathsf{x} = \bar{7})$
  Diese Formel besagt, dass jede Zahl, die die Zahl 7 teilt, entweder 1 oder 7 ist. Somit steht die Formel für die Aussage *„7 ist eine Primzahl.“* Eine Formel für die Aussage, dass eine Zahl x eine Primzahl ist, kann wie folgt abgekürzt werden:

$$
\text{prime}(\mathsf{x}) \quad := \quad \neg(\mathsf{x} = \bar{1}) \wedge \forall \mathsf{y}((\mathsf{y}|\mathsf{x}) \rightarrow (\mathsf{y} = \bar{1} \vee \mathsf{y} = \mathsf{x}))
$$

- $\forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y}(\mathsf{y} > \mathsf{x} \wedge \text{prime}(\mathsf{y}))$
  Diese Formel besagt, dass es zu jeder Zahl x eine Zahl y gibt, die größer als x und eine Primzahl ist. Somit steht diese Formel für den Satz von Euklid: *„Es gibt unendlich viele Primzahlen.“*

- $\forall \mathsf{x}((\text{even}(\mathsf{x}) \wedge x > \bar{2}) \rightarrow \exists \mathsf{y} \exists \mathsf{z}(\text{prime}(\mathsf{y}) \wedge \text{prime}(\mathsf{z}) \wedge \mathsf{x} = \mathsf{y} + \mathsf{z}))$
  Diese Formel besagt, dass jede Zahl x, die gerade und größer als 2 ist, als Summe von zwei Primzahlen y und z gebildet werden kann. Damit steht diese Formel für die Goldbach'sche Vermutung: *„Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben.“*

Bemerkung. Ohne den oben eingeführten syntaktischen Abkürzungen wären der Satz von Euklid bzw. die Goldbach'sche Vermutung nur schwer lesbar. Der folgende Vergleich macht dies anhand des Satzes von Euklid sichtbar: ([10], S. 140)

- Mit syntaktischen Abkürzungen:
  $\forall \mathsf{x}_1 \exists \mathsf{x}_2(\mathsf{x}_2 > \mathsf{x}_1 \wedge \text{prime}(\mathsf{x}_2))$

- Ohne syntaktische Abkürzungen:
  $\forall \mathsf{x}_1 \exists \mathsf{x}_2(\exists \mathsf{x}_5(\mathsf{x}_2 = \mathsf{x}_1 + \mathsf{x}_5 + \mathsf{s}(0)) \wedge \neg(\mathsf{x}_2 = \mathsf{s}(0)) \wedge$
  $\forall \mathsf{x}_3(\exists \mathsf{x}_4(\mathsf{x}_3 \cdot \mathsf{x}_4 = \mathsf{x}_2) \rightarrow (\mathsf{x}_3 = \mathsf{s}(0) \vee \mathsf{x}_3 = \mathsf{x}_2)))$

3.3 Axiome und Schlussregeln

In diesem Kapitel werden die Axiome und Schlussregeln der Peano-Arithmetik festgelegt. Bevor es so weit ist, werden die in der Einleitung des Kapitels erwähnten fünf Axiome von

Peano genauer analysiert. Sie bilden die Grundlagen die man braucht, um die natürlichen Zahlen zu charakterisieren. Die folgende Auflistung zeigt eine umgangssprachliche Formulierung der Peano-Axiome (P1) - (P5), sowie eine Darstellung in moderner Schreibweise. ([10], S. 142)

- (P1): *„0 ist eine natürliche Zahl.“*
- (P2): *„Jede Zahl x hat einen eindeutigen Nachfolger s(x).“*
- (P3): *„0 ist nicht der Nachfolger irgendeiner Zahl.“*
  - $\forall \mathsf{x} \neg (0 = \mathsf{s}(\mathsf{x}))$
- (P4): *„Verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger.“*
  - $\forall \mathsf{x} \forall \mathsf{y} (\mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{s}(\mathsf{y}) \to \mathsf{x} = \mathsf{y})$
- (P5): *„Hat die Zahl 0 die Eigenschaft φ und folgt aus $\varphi(x)$ stets $\varphi(s(x))$, so haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft φ.“*
  - $\varphi(0) \to (\forall \mathsf{x}(\varphi(\mathsf{x}) \to \varphi(\mathsf{s}(\mathsf{x}))) \to \forall \mathsf{x} \varphi(\mathsf{x}))$

In [9] findet man auf den Seiten 60 bis 66 eine Erläuterung, warum keines der fünf Axiome weggelassen werden darf, um die natürlichen Zahlen eindeutig zu formalisieren. Ebenda ist die gegenteilige Frage nachzulesen, ob diese fünf Axiome ausreichend sind um $\mathbb{N}$ zu definieren. Der *Isomorphiesatz* des Mathematikers Richard Dedekind (1831 - 1916) gibt darauf eine positive Antwort. Deshalb werden die Peano-Axiome auch als *Dedekind-Peano-Axiome* bezeichnet.

Tabelle 3.1 zeigt die Axiome und Schlussregeln der Peano-Arithmetik. Die Logikaxiome (A1) - (A5) und die Schlussregeln (MP) und (G) sind direkt aus der PL1 übernommen. Die Theorieaxiome setzen sich aus folgenden Axiomen zusammen: ([10], S. 143)

- (S1) - (S2): Beschreiben die Eigenschaften des Gleichheitsoperators
- (S3) - (S4): Entsprechen den Peano-Axiomen (P3) und (P4)
  - Die Peano-Axiome (P1) und (P2) sind bereits in der Syntax der Peano-Arithmetik formalisiert, mit $\mathsf{0}$ als Konstantensymbol und s als Funktionssymbol
- (S5) - (S8): Charakterisieren die Eigenschaften der Addition und Multiplikation
- (S9): Entspricht dem Peano-Axiom (P5) und wird auch *Induktionsaxiom* genannt

Theorieaxiome		Logikaxiome	
$\sigma = \tau \to (\sigma = \rho \to \tau = \rho)$	(S1)	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$	(A1)
$\sigma = \tau \to \mathsf{s}(\sigma) = \mathsf{s}(\tau)$	(S2)	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to$	
$\neg(\mathsf{0} = \mathsf{s}(\sigma))$	(S3)	$((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	(A2)
$\mathsf{s}(\sigma) = \mathsf{s}(\tau) \to \sigma = \tau$	(S4)	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	(A3)
$\sigma + \mathsf{0} = \sigma$	(S5)	$\forall x \varphi \to \varphi[x \leftarrow \sigma]$	(A4)
$\sigma + \mathsf{s}(\tau) = \mathsf{s}(\sigma + \tau)$	(S6)	$\forall x(\varphi(\cancel{x}) \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$	(A5)
$\sigma \cdot \mathsf{0} = \mathsf{0}$	(S7)	Schlussregeln	
$\sigma \cdot \mathsf{s}(\tau) = (\sigma \cdot \tau) + \sigma$	(S8)	$\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$	(MP)
$\varphi(\mathsf{0}) \to (\forall \mathsf{x}(\varphi(\mathsf{x}) \to \varphi(\mathsf{s}(\mathsf{x}))) \to \forall \mathsf{x} \varphi(\mathsf{x}))$	(S9)	$\dfrac{\varphi(\cancel{x})}{\forall x \varphi}$	(G)

Tabelle 3.1: Axiome und Schlussregeln der Peano-Arithmetik. ([10], S. 143)

3.4 Beweise zahlentheoretischer Aussagen

Da die Peano-Arithmetik eine Theorie 1. Stufe ist, dürfen alle bereits bewiesenen Theoreme und Sätze aus Kapitel 2.3 verwendet werden. Die folgenden Beispiele zeigen, wie Theoreme aus der klassischen Mathematik in PA formal bewiesen werden können. Die Theoreme (PA1) bis (PA3) sind aus semantischer Sicht trivial und zeigen, wie aufwendig formale Beweise sein können. Der Beweis für Theorem (PA4) zeigt, wie die vollständige Induktion in formalen Beweisen durchgeführt werden kann. Das Theorem (PA5) zeigt die berühmte Nachfolgerfunktion, mit der die allgemein bekannte Aussage „*1 + 1 = 2*“ formal bewiesen werden kann.

Beispiel 3.4.1. Ableitung von (PA1): $\sigma = \sigma$ ([10], S. 145)

1. $\vdash \sigma + \mathsf{0} = \sigma$ (S5)
2. $\vdash \sigma + \mathsf{0} = \sigma \to (\sigma + \mathsf{0} = \sigma \to \sigma = \sigma)$ (S1)
3. $\vdash \sigma + \mathsf{0} = \sigma \to \sigma = \sigma$ (MP, 1,2)
4. $\vdash \sigma = \sigma$ (MP, 1,3)

Beispiel 3.4.2. Ableitung von (PA2): $\sigma = \tau \to \tau = \sigma$ ([10], S. 145)

1. $\vdash \ \sigma = \tau \to (\sigma = \sigma \to \tau = \sigma)$ (S1)
2. $\{\sigma = \tau\} \vdash \sigma = \sigma \to \tau = \sigma$ (DT)
3. $\{\sigma = \tau, \sigma = \sigma\} \vdash \tau = \sigma$ (DT)
4. $\{\sigma = \sigma\} \vdash \sigma = \tau \to \tau = \sigma$ (DT)
5. $\vdash \ \sigma = \sigma \to (\sigma = \tau \to \tau = \sigma)$ (DT)
6. $\vdash \ \sigma = \sigma$ (PA1)
7. $\vdash \ \sigma = \tau \to \tau = \sigma$ (MP, 5,6)

Beispiel 3.4.3. Ableitung von (PA3): $\sigma = \tau \to (\tau = \rho \to \sigma = \rho)$ ([10], S. 145)

1. $\vdash \ \tau = \sigma \to (\tau = \rho \to \sigma = \rho)$ (S1)
2. $\vdash \ \sigma = \tau \to \tau = \sigma$ (PA2)
3. $\{\sigma = \tau\} \vdash \tau = \sigma$ (DT)
4. $\{\sigma = \tau\} \vdash \tau = \rho \to \sigma = \rho$ (MP, 1,3)
5. $\vdash \ \sigma = \tau \to (\tau = \rho \to \sigma = \rho)$ (DT)

Beispiel 3.4.4. Ableitung von (PA4): $\forall \mathsf{x} \varphi(\mathsf{x})$, mit $\varphi(\mathsf{x}) := (\mathsf{x} = \mathsf{0} + \mathsf{x})$ ([10], S. 146)

1. $\vdash \ \mathsf{0} + \mathsf{0} = \mathsf{0}$ (S5)
2. $\vdash \ \mathsf{0} + \mathsf{0} = \mathsf{0} \to \mathsf{0} = \mathsf{0} + \mathsf{0}$ (PA2)
3. $\vdash \ \mathsf{0} = \mathsf{0} + \mathsf{0}$ (MP, 1,2)
4. $\vdash \ \varphi(\mathsf{0})$ (Definition)
5. $\{\varphi(\mathsf{x})\} \vdash \mathsf{x} = \mathsf{0} + \mathsf{x}$ (Satz 2.1.1)
6. $\vdash \ \mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{x})$ (S6)
7. $\vdash \ \mathsf{x} = \mathsf{0} + \mathsf{x} \to \mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{x})$ (S2)
8. $\{\varphi(\mathsf{x})\} \vdash \mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{x})$ (MP, 5,7)
9. $\vdash \ \mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{x}) \to (\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{x}) \to \mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{x}))$ (PA3)
10. $\{\varphi(\mathsf{x})\} \vdash \mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{x}) \to \mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{x})$ (MP, 8,9)
11. $\{\varphi(\mathsf{x})\} \vdash \mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{x})$ (MP, 6,10)
12. $\{\varphi(\mathsf{x})\} \vdash \varphi(\mathsf{s}(\mathsf{x}))$ (Definition)
13. $\vdash \ \varphi(\mathsf{x}) \to \varphi(\mathsf{s}(\mathsf{x}))$ (DT)
14. $\vdash \ \forall \mathsf{x}(\varphi(\mathsf{x}) \to \varphi(\mathsf{s}(\mathsf{x})))$ (G, 13)
15. $\vdash \ \varphi(\mathsf{0}) \to (\forall \mathsf{x}(\varphi(\mathsf{x}) \to \varphi(\mathsf{s}(\mathsf{x}))) \to \forall \mathsf{x} \varphi(\mathsf{x}))$ (S9)
16. $\vdash \ \forall \mathsf{x}(\varphi(\mathsf{x}) \to \varphi(\mathsf{s}(\mathsf{x}))) \to \forall \mathsf{x} \varphi(\mathsf{x})$ (MP, 4,15)
17. $\vdash \ \forall \mathsf{x} \varphi(\mathsf{x})$ (MP, 14,16)

Bemerkung. Dieser Beweis zeigt, wie die vollständige Induktion in formaler Mathematik funktioniert. Den bewiesenen Induktionsanfang sieht man in Schritt 4, den bewiesenen Induktionsschritt sieht man in Schritt 14.

Beispiel 3.4.5. Ableitung von (PA5): $\sigma + \bar{1} = \mathsf{s}(\sigma)$ ([10], S. 147)

1. $\vdash \; \sigma + \mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(\sigma + 0)$ (S6)
2. $\vdash \; \sigma + 0 = \sigma$ (S5)
3. $\vdash \; \sigma + 0 = \sigma \rightarrow \mathsf{s}(\sigma + 0) = \mathsf{s}(\sigma)$ (S2)
4. $\vdash \; \mathsf{s}(\sigma + 0) = \mathsf{s}(\sigma)$ (MP, 2,3)
5. $\vdash \; \sigma + \mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(\sigma + 0) \rightarrow (\mathsf{s}(\sigma + 0) = \mathsf{s}(\sigma) \rightarrow \sigma + \mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(\sigma))$ (PA3)
6. $\vdash \; \mathsf{s}(\sigma + 0) = \mathsf{s}(\sigma) \rightarrow \sigma + \mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(\sigma)$ (MP, 1,5)
7. $\vdash \; \sigma + \mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(\sigma)$ (MP, 4,6)
7. $\vdash \; \sigma + \bar{1} = \mathsf{s}(\sigma)$ (Definition)

Bemerkung. Um die Aussage „*1 + 1 = 2*“ formal zu beweisen, muss der Platzhalter σ in (PA5) mit $\bar{1} = \mathsf{s}(0)$ ersetzt werden.

3.5 Metaeigenschaften der Peano-Arithmetik

Wie bei den formalen Systemen aus Kapitel 2 stellt sich auch in der PA die Frage nach den Metaeigenschaften. In Kapitel 1 wurde bereits herausgearbeitet, dass der Mathematiker David Hilbert ursprünglich im festen Glauben war, dass die PA widerspruchsfrei und vollständig ist. Kapitel 4 wird Hilberts Wunschdenken aufklären. Die Korrektheit der PA wird in [8] auf Seite 202 erläutert: Da alle Theorieaxiome als wahr angenommen werden und die Logikaxiome aus der PL1 sowie die Schlussregeln (MP) und (G) ebenso als wahr gelten, ist jede Formel bzw. jedes Theorem aus der PA wahr. Aus der Korrektheit der PA folgt nach Satz 2.1.2 direkt die Widerspruchsfreiheit.

3.6 Ausblick: Axiomatische Mengenlehre

Da die PA nur Aussagen über die natürlichen Zahlen treffen kann, wurden weitere formale Systeme entwickelt, um die ganze moderne Mathematik auf ein formales Fundament zu stellen. Mit der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre liegt so ein formales System vor, das der modernen Mathematik als heute übliches Fundament dient. ZF ist ebenso eine Theorie 1. Stufe. Kapitel 4 wird zeigen, dass auch ZF nicht von Gödels Ergebnissen ausgenommen ist. Die Axiomatisierung der ZF sowie deren Umgang mit der Unendlichkeit sind in [10] auf den Seiten 149 bis 175 nachzulesen.

4 Gödels Unvollständigkeitssätze

In diesem Kapitel werden die berühmten Gödel'schen Unvollständigkeitssätze im Detail analysiert und Schritt für Schritt hergeleitet. Zu Beginn wird eine Beweisskizze dargestellt, um den roten Faden für dieses Kapitel aufzuzeigen. Im Anschluss werden die einzelnen notwendigen Schritte nach und nach erarbeitet. Am Ende des Kapitels werden häufige Fehlschlüsse aus Gödels Resultaten aufgezeigt und widerlegt.

4.1 Beweisskizze

Gödels Beweis für den 1. Unvollständigkeitssatz basiert auf der Idee des Lügner-Paradoxons aus Kapitel 1. Mit einem mathematischen Trick gelang es ihm, einen Satz der Art „*Ich bin innerhalb des Kalküls unbeweisbar.*“ mathematisch zu konstruieren. Damit hat er eine Aussage geschaffen, die etwas über sich selbst aussagt. Um solche Sätze konstruieren zu können, muss man einen Trick anwenden, der erlaubt, eine Aussage sowohl in der Metaebene als auch in der arithmetischen Ebene zu betrachten. Damit das gelingt, müssen formale mathematische Sätze in die Arithmetik übersetzt werden. Diesen Vorgang nennt man Arithmetisierung der Syntax und wird im kommenden Kapitel im Detail eingeführt. Damit die Arithmetisierung gelingt, muss ein formales System ausdrucksstark genug sein, um die natürlichen Zahlen, die Addition und die Multiplikation zu formalisieren. Das bedeutet umgekehrt: Jedes System mit diesen Eigenschaften lässt sich arithmetisieren. Für die Arithmetisierung gibt es viele Methoden, die zum selben Ergebnis führen. In dieser Arbeit wird die Methode aus [10] verwendet. Als zugrundeliegendes System wird die PA dienen, da sie einerseits alle Voraussetzungen für die Arithmetisierung erfüllt und andererseits in Kapitel 3 bereits im Detail analysiert wurde.

Nach der Arithmetisierung der Syntax wird erarbeitet, wie Konzepte der Zahlentheorie in der PA dargestellt werden können. Beispielsweise ist in der PA keine Operation für das Potenzieren definiert. Wie Relationen und Funktionen im Allgemeinen in der PA repräsentiert werden können, zeigt Kapitel 4.3. Dies ist von großer Bedeutung, da Gödels Beweis auf einer Funktion und einer Relation basiert, von denen man erst sichergehen muss, dass sie überhaupt in der PA formulierbar sind. Damit werden alle Voraussetzungen geschaffen sein, um den 1. Unvollständigkeitssatz von Gödel zu formulieren und zu beweisen.

4.2 Arithmetisierung der Syntax

Um jede Formel der Peano-Arithmetik als natürliche Zahl darstellen zu können, wird eine Zuordnungsvorschrift definiert, mit der die Syntax der PA mit natürlichen Zahlen substitioniert wird. Tabelle 4.1 zeigt, wie die einzelnen Elemente der Syntax mit natürlichen Zahlen verknüpft werden. Die ungeraden Zahlen repräsentieren die logischen Symbole und die geraden Zahlen repräsentieren die Variablen $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3, \ldots$

Symbol	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\forall$	$\exists$	$=$	(	)	0	s	$+$	$\cdot$
Zuordnung	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
Variable	x_1	x_2	x_3	$\ldots$										
Zuordnung	2	4	6	$\ldots$										

Tabelle 4.1: Zuordnungstabelle der logischen Symbole. ([10], S. 209)

Bemerkung. Die Zuordnungsvorschrift ist nicht eindeutig bestimmt. Beispielweise können die logischen Operatoren $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists$ weggelassen werden, da nach Kapitel 2.3 jede Aussage auf die Operatoren $\wedge, \neg, \forall$ beschränkbar ist.

4.2.1 Gödelnummern

Um eine Formel codieren zu können, muss eine sogenannte *Gödelnummer* konstruiert werden. Dafür werden die vorkommenden Symbole einer Formel nacheinander als Exponent von Primzahlen geschrieben. Da jede natürliche Zahl eindeutig durch ihre Primfaktoren beschrieben ist, können Formeln eindeutig als natürliche Zahl codiert werden. Dabei werden bei einer Formel φ die vorkommenden Symbole $a_1, \ldots, a_n$ von links nach rechts Stück für Stück als Hochzahl einer Primzahl p zugeordnet. Die arithmetisierte Formel $\ulcorner\varphi\urcorner$ heißt Gödelnummer von φ und ist im Allgemeinen wie folgt definiert:

$$\ulcorner\varphi\urcorner := p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \ldots \text{ ([10], S. 209)}$$

Das folgende Beispiel zeigt, wie Formeln aus der PA gödelisiert werden können. Dabei ist schnell zu sehen, dass es nicht sinnvoll ist, die Zahlen tatsächlich auszurechnen. Die

Darstellung in der faktorisierten Variante ist für die Idee der Darstellung von Formeln als natürliche Zahl vollkommen ausreichend.

Beispiel 4.2.1. Gödelisierung der Formeln φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4. ([10], S. 210)

- $\varphi_1 := 0 + 0 = 0$
  $\ulcorner\varphi_1\urcorner = \ulcorner 0 + 0 = 0\urcorner = 2^{21} \cdot 3^{25} \cdot 5^{21} \cdot 7^{15} \cdot 11^{21}$

- $\varphi_2 := 0 + 0 = 0 \to (0 + 0 = 0 \to 0 = 0)$
  $\ulcorner\varphi_2\urcorner = \ulcorner 0 + 0 = 0 \to (0 + 0 = 0 \to 0 = 0)\urcorner = 2^{21} \cdot 3^{25} \cdot 5^{21} \cdot 7^{15} \cdot 11^{21} \cdot 13^{7} \cdot 17^{17} \cdot 19^{21} \cdot 23^{25} \cdot 29^{21} \cdot 31^{15} \cdot 37^{21} \cdot 41^{7} \cdot 43^{21} \cdot 47^{15} \cdot 53^{21} \cdot 59^{19}$

- $\varphi_3 := 0 + 0 = 0 \to 0 = 0$
  $\ulcorner\varphi_3\urcorner = \ulcorner 0 + 0 = 0 \to 0 = 0\urcorner = 2^{21} \cdot 3^{25} \cdot 5^{21} \cdot 7^{15} \cdot 11^{21} \cdot 13^{7} \cdot 17^{21} \cdot 19^{15} \cdot 23^{21}$

- $\varphi_4 := 0 = 0$
  $\ulcorner\varphi_4\urcorner = \ulcorner 0 = 0\urcorner = 2^{21} \cdot 3^{15} \cdot 5^{21}$

Die soeben gödelisierten Formeln entsprechen den einzelnen Beweisschritten aus der Ableitung von (PA1) mit der Instanziierung $\sigma = 0$. Um eine Ableitung, bzw. eine Folge von Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, als Gödelnummer zu schreiben, werden die einzelnen Formeln erneut als Hochzahl von Primzahlen angeschrieben:

$$\ulcorner\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\urcorner := p_1^{\ulcorner\varphi_1\urcorner} \cdot p_2^{\ulcorner\varphi_2\urcorner} \cdot p_3^{\ulcorner\varphi_3\urcorner} \cdot \ldots \text{ ([10], S. 210)}$$

Beispiel 4.2.2. Darstellung des Beweises von (PA1) als Gödelnummer. ([10], S. 210)

$$\begin{gathered}\ulcorner\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\urcorner = 2^{2^{21}\cdot 3^{25}\cdot 5^{21}\cdot 7^{15}\cdot 11^{21}} \cdot \\ 3^{2^{21}\cdot 3^{25}\cdot 5^{21}\cdot 7^{15}\cdot 11^{21}\cdot 13^{7}\cdot 17^{17}\cdot 19^{21}\cdot 23^{25}\cdot 29^{21}\cdot 31^{15}\cdot 37^{21}\cdot 41^{7}\cdot 43^{21}\cdot 47^{15}\cdot 53^{21}\cdot 59^{19}} \cdot \\ 5^{2^{21}\cdot 3^{25}\cdot 5^{21}\cdot 7^{15}\cdot 11^{21}\cdot 13^{7}\cdot 17^{21}\cdot 19^{15}\cdot 23^{21}} \cdot \\ 7^{2^{21}\cdot 3^{15}\cdot 5^{21}}\end{gathered}$$

4.3 Primitiv-rekursive Funktionen

In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, um allgemein bekannte mathematische Konzepte der Zahlentheorie als sogenannte *primitiv-rekursive* Funktionen bzw. Relationen darzustellen. Das Wort setzt sich aus *primitiv* und *rekursiv* zusammen, da man auf Basis von drei elementaren bzw. primitiven Funktionen mittels Rekursion weitere Funktionen erschaffen kann. Die meisten bekannten Funktionen zählen zu den primitiv-rekursiven Funktionen. Eine nicht primitiv-rekursive Funktion stellt z.B. die *Ackermann-Funktion* aus [10] auf Seite 212 dar.

Definition 4.3.1 *Primitiv-rekursive Funktionen* ([10], S. 211)

Die folgenden Funktionen sind primitiv-rekursiv:

- Nullfunktion: $\mathrm{null}(x) := 0$
- Nachfolgerfunktion: $s(x) := x + 1$
- Projektionsfunktion: $p_i^n(x_1, \ldots, x_n) := x_i$

Es gelten folgende Bildungsregeln für weitere primitiv-rekursive Funktionen:

- Komposition: Sind $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv, dann ist es auch $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n))$$

- Primitive Rekursion: Sind $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv, dann ist es auch $f(m, x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f(m + 1, x_1, \ldots, x_n) = h(f(m, x_1, \ldots, x_n), m, x_1, \ldots, x_n)$$

Bemerkung. Die einzelnen Punkte der Definition 4.3.1 sind wie folgt zu verstehen:

- Die Nullfunktion und die Nachfolgerfunktion benötigen keine weitere Erklärung.
- Die Projektionsfunktion ermöglicht es, Variablen gezielt auszuwählen:

$$p_1^3(x_1, x_2, x_3) = x_1 \text{ bzw. } p_3^3(x_1, x_2, x_3) = x_3$$

- Die Komposition ermöglicht es, eine primitiv-rekurisve Funktion als Parameter in eine andere einzusetzen.
- Die primitive Rekursion ermöglicht es, den Funktionswert einer Funktion rekursiv zu berechnen. Dabei dient m als eine Art Zähler, wie oft eine Rekursion durchgeführt werden muss.

Das folgende Beispiel zeigt, wie sich die Addition als primitiv-rekursive Funktion darstellen lässt. Dafür wird zu Beginn eine leicht verständliche rekursive Art der Addition dargestellt, die dann in die Sprache der primitiv-rekursiven Funktionen umgewandelt wird. Anhand einer konkreten Addition wird die Funktionsweise der primitiv-rekursiven Form aufgezeigt.

Beispiel 4.3.1. ([10], S. 212) Die Addition lässt sich rekursiv wie folgt darstellen:

$$\mathrm{add}(m,n) = \begin{cases} n & \text{falls } m = 0 \\ s(\mathrm{add}(m-1,n)) & \text{falls } m > 0 \end{cases}$$

Beispiel: $\mathrm{add}(2,3)$, mit $m = 2, n = 3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{add}(2,3) &= s(\mathrm{add}(1,3)) \\ &= \mathrm{add}(1,3) + 1 \\ &= s(\mathrm{add}(0,3)) + 1 \\ &= \mathrm{add}(0,3) + 1 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Um diese zweistellige Funktion primitiv-rekursiv zu machen, werden nach Definition 4.3.1 eine einstellige Funktion g und eine dreistellige Funktion h benötigt. Nach den Bildungsregeln können diese wie folgt konstruiert werden:

$$g := \mathrm{add}(0,n) = p_1^1(n),$$
$$h := \mathrm{add}(m+1,n) = s(p_1^3(\mathrm{add}(m,n),m,n))$$

Die Funktion $\mathrm{add}(m+1,n)$ ist primitiv-rekursiv und hat dieselben Eigenschaften wie die Addition, wie erneut anhand der Addition von 2 und 3 gezeigt wird.
Beispiel: $\mathrm{add}(2,3)$, mit $m = 1, n = 3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{add}(2,3) &= s(p_1^3(\mathrm{add}(1,3),1,3)) \\ &= s(p_1^3(s(p_1^3(\mathrm{add}(0,3),0,3)),1,3)) \\ &= s(p_1^3(s(p_1^3(3,0,3)),1,3)) \\ &= s(p_1^3(s(3),1,3)) \\ &= s(p_1^3(4,1,3)) \\ &= s(4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Bemerkung. So wie die Addition sind auch andere Funktionen primitiv-rekursiv darstellbar. In [9] findet man auf den Seiten 218 - 220 eine Herleitung der Multiplikation, des Potenzierens und der Subtraktion.

Definition 4.3.2 *Primitiv-rekursive Relationen* ([10], S. 213)

Eine Relation R zwischen den natürlichen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ heißt *primitiv-rekursiv*, wenn eine primitiv-rekursive Funktion f mit der folgenden Eigenschaft existiert:

$$R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

f nennt man die *charakteristische Funktion* von R.

Definition 4.3.2 zeigt, dass auch Relationen primitiv-rekursiv definiert werden können, indem eine *charakteristische Funktion* genau dann den Wert 0 annimmt, wenn die Relation erfüllt wird. In [9] findet man auf Seite 220 die entsprechende Herleitung der Relation $\leq$.

4.3.1 Arithmetische Repräsentierbarkeit

Der nächste Schritt liegt darin, die primitv-rekursiven Funktionen und Relationen in die Sprache der PA zu übersetzen. Gödel hat dafür in seiner Arbeit im „*Satz V*" einen wichtigen Zusammenhang zwischen diesen beiden Welten aufgezeigt. Anhand eines Beispiels wird der Aufbau und die Aussage seines Satzes Schritt für Schritt erarbeitet.

Die folgende Formel $\varphi(\mathsf{x})$ repräsentiert alle geraden natürlichen Zahlen. Hierbei ist x eine freie Variable, die beliebig instanziiert werden kann. ([9], S. 275)

$$\varphi(\mathsf{x}) = \exists \mathsf{z}(\mathsf{x} = \mathsf{z} \cdot \bar{2})$$

Es ist schnell zu sehen, dass die Formel für alle geraden natürlichen Zahlen wahr und für alle ungeraden natürlichen Zahlen falsch ist. Mathematisch ausgedrückt:

$$\begin{gathered}
\models \varphi(\bar{0}) \Leftrightarrow \models \exists \mathsf{z}(\bar{0} = \mathsf{z} \cdot \bar{2}) \\
\models \varphi(\bar{4}) \Leftrightarrow \models \exists \mathsf{z}(\bar{4} = \mathsf{z} \cdot \bar{2}) \\
\text{bzw.} \\
\not\models \varphi(\bar{1}) \Leftrightarrow \not\models \exists \mathsf{z}(\bar{1} = \mathsf{z} \cdot \bar{2}) \\
\not\models \varphi(\bar{3}) \Leftrightarrow \not\models \exists \mathsf{z}(\bar{3} = \mathsf{z} \cdot \bar{2})
\end{gathered}$$

Bezeichnet R die Menge der natürlichen Zahlen, so gilt weiters:

$$\begin{aligned}
n \in R &\Rightarrow \models \quad \varphi(\bar{n}) \\
n \notin R &\Rightarrow \models \neg\varphi(\bar{n})
\end{aligned}$$

Man sagt, dass die Formel φ die Relation R *semantisch repräsentiert*. Die Verallgemeinerung dieser Vorgangsweise von einstelligen auf mehrstellige Relationen führt zu nachfolgender Definition.

Definition 4.3.3 *Semantisch repräsentierbare Relationen* ([10], S. 214)

Seien $R \subseteq \mathbb{N}^n$ eine Relation und φ eine Formel mit n freien Variablen. R wird durch φ *semantisch repräsentiert*, wenn gilt:

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) \in R &\Rightarrow \models \quad \varphi(\bar{x_1}, , \ldots, \bar{x_n}) \\ (x_1, \ldots, x_n) \notin R &\Rightarrow \models \neg\varphi(\bar{x_1}, , \ldots, \bar{x_n})\end{aligned}$$

Nach [9], S. 276 lassen sich n-stellige Funktionen als Relation mit Stelligkeit $n+1$ auffassen, was in Beispiel 4.3.2 gezeigt ist. Somit sind auch Funktionen semantisch repräsentierbar.

Beispiel 4.3.2. Darstellung einer 2-stelligen Funktion als 3-stellige Relation.
Es sei $f : X \times Y \to Z$ mit $X = \{1, 2\}$ und $Y = \{3, 4\}$, und $f(x, y) = x + y$. Die entsprechende Relation R hat dann folgende Gestalt:

$$R = \{(x, y, x + y)|x \in X, y \in Y\} = \{(1, 3, 4), (2, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 4, 6)\}$$

Definition 4.3.4 *Semantisch repräsentierbare Funktionen* ([10], S. 214)

Sei $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ eine Funktion und φ eine Formel mit $n + 1$ freien Variablen. f wird durch φ *semantisch repräsentiert*, wenn gilt:

$$\begin{aligned}f(x_1, \ldots, x_n) = y &\Rightarrow \models \quad \varphi(\bar{x_1}, , \ldots, \bar{x_n}, \bar{y}) \\ f(x_1, \ldots, x_n) \neq y &\Rightarrow \models \neg\varphi(\bar{x_1}, , \ldots, \bar{x_n}, \bar{y})\end{aligned}$$

Der nächste Schritt, um Gödels *Satz V* formulieren zu können, ist eine Definition für die syntaktische Repräsentierbarkeit von Relationen und Funktionen. Dafür wird wieder das Beispiel $\varphi(\mathsf{x}) = \exists \mathsf{z}(\mathsf{x} = \mathsf{z} \cdot \bar{2})$ herangezogen. Es wurde bereits gezeigt, dass die Formel für alle geraden natürlichen Zahlen wahr ist. Tatsächlich ist jede Instanziierung mit einer geraden Zahl $n \in R$ auch in der PA beweisbar. Genauso kann man in der PA zeigen, dass bei einer ungerade Zahl $n \notin R$ die Formel $\neg\varphi(n)$ herleitbar ist. Herleitungen der Instanzen $\varphi(\bar{0}), \varphi(\bar{2}), \varphi(\bar{4}), \neg\varphi(\bar{1}), \neg\varphi(\bar{3}), \neg\varphi(\bar{5})$ sind in [9] auf den Seiten 276 bis 277 zu finden. Somit gilt:

$$n \in R \Rightarrow \vdash \quad \varphi(\bar{n})$$
$$n \notin R \Rightarrow \vdash \neg\varphi(\bar{n})$$

Man sagt, dass die Formel φ die Relation R *syntaktisch repräsentiert*. Auch hier kann man von einstelligen auf mehrstellige Relationen verallgemeinern.

Definition 4.3.5 *Syntaktisch repräsentierbare Relationen* ([10], S. 218)

Seien $R \subseteq \mathbb{N}^n$ eine Relation und φ eine Formel mit n freien Variablen. R wird durch φ *syntaktisch repräsentiert*, wenn gilt:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in R \Rightarrow \vdash \quad \varphi(\bar{x_1}, , \ldots, \bar{x_n})$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \notin R \Rightarrow \vdash \neg\varphi(\bar{x_1}, , \ldots, \bar{x_n})$$

Wie bei der semantischen Repräsentation lässt sich auch hier der Begriff der syntaktischen Repräsentation auf Funktionen übertragen.

Definition 4.3.6 *Syntaktisch repräsentierbare Funktionen* ([9], S. 278)

Sei $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ eine Funktion und φ eine Formel mit $n + 1$ freien Variablen. f wird durch φ *syntaktisch repräsentiert*, wenn gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = y \Rightarrow \vdash \quad \varphi(\bar{x_1}, , \ldots, \bar{x_n}, \bar{y})$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) \neq y \Rightarrow \vdash \neg\varphi(\bar{x_1}, , \ldots, \bar{x_n}, \bar{y})$$

Die soeben eingeführten Definitionen und die erläuternden Beispiele erlauben folgende Aussage: Die Formel $\varphi(\mathsf{x}) = \exists \mathsf{z}(\mathsf{x} = \mathsf{z} \cdot \bar{2})$ ist in der PA syntaktisch repräsentierbar. Die große Frage, ob man diese Aussage auf alle primitiv-rekursiven Relationen übertragen kann, wird in *Satz V* von Gödel beantwortet. Bevor dieser Satz nun formuliert wird, zeigt das nächste Beispiel, wie man das Potenzieren als primitiv-rekursive Funktion in der PA syntaktisch repräsentieren kann.

Beispiel 4.3.3. Herleitung der Exponentialfunktion als PA-Formel. ([10], S. 214-217) Zunächst wird eine Formel $\mathrm{pow}(x, y)$ konstruiert, die die Exponentialfunktion $z = x^y$ darstellt.

$$\mathrm{pow}\,(\mathsf{x}, \mathsf{y}) := \exists \mathsf{u}_0 \ldots \exists \mathsf{u}_\mathsf{y}(\psi_0(\mathsf{x}, \mathsf{u}_0) \wedge \ldots \wedge \psi_\mathsf{y}(\mathsf{x}, \mathsf{u}_\mathsf{y}) \wedge \mathsf{z} = \mathsf{u}_\mathsf{y})$$

Diese Formel enthält für jede natürliche Zahl $0 \leq i \leq y$ eine gebundene Variable u_i und eine Teilformel $\psi_i(\mathsf{x}, \mathsf{u}_i)$. Dabei ist $\psi_i(\mathsf{x}, \mathsf{u}_i)$ genau dann wahr, wenn $\mathsf{u}_i = \mathsf{x}^i$. Die letzte gebundene Variable u_y entspricht dann dem gesuchten Wert z. Die Teilformeln $\psi_i(\mathsf{x}, \mathsf{u}_i)$ lassen sich rekursiv wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \psi_0(\mathsf{x}, \mathsf{u}_0) &:= \quad \mathsf{u}_0 = \bar{1} \\ \psi_{i+1}(\mathsf{x}, \mathsf{u}_{i+1}) &:= \quad \forall \mathsf{w}(\psi_i(\mathsf{x}, \mathsf{w}) \rightarrow \mathsf{u}_{i+1} = \mathsf{w} \cdot \mathsf{x}) \end{aligned}$$

Die Funktionsweise der Teilformeln zeigt die Auswertung der ersten drei Glieder:

$$\begin{array}{lcllcl} \psi_0(\mathsf{x}, \mathsf{u}_0) & := & \mathsf{u}_0 = \bar{1} & & \Rightarrow & \mathsf{u}_0 = \bar{1} \\ \psi_1(\mathsf{x}, \mathsf{u}_1) & := & \forall \mathsf{w}(\psi_0(\mathsf{x}, \mathsf{w}) \rightarrow \mathsf{u}_1 = \mathsf{w} \cdot \mathsf{x}) \Rightarrow (\psi_0(\mathsf{x}, 1) \rightarrow \mathsf{u}_1 = 1 \cdot \mathsf{x}) & & \Rightarrow & \mathsf{u}_1 = \mathsf{x} \\ \psi_2(\mathsf{x}, \mathsf{u}_2) & := & \forall \mathsf{w}(\psi_1(\mathsf{x}, \mathsf{w}) \rightarrow \mathsf{u}_2 = \mathsf{w} \cdot \mathsf{x}) \Rightarrow (\psi_1(\mathsf{x}, \mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{u}_2 = \mathsf{x} \cdot \mathsf{x}) & & \Rightarrow & \mathsf{u}_2 = \mathsf{x}^2 \end{array}$$

Somit ist klar, dass die konstruierte Formel $\mathrm{pow}(x, y)$ eine rekursive Darstellung der Exponentialfunktion $z = x^y$ darstellt. Da in der Formel eine variable Anzahl an Quantoren und die Variable y im Index der Variablen u_y vorkommt, ist sie aber keine Formel der PA. Man bräuchte also eine Funktion α, die mit einer Zahl b jede Zahlenfolge $a_0, \ldots a_y$ wie folgt darstellen kann:

$$\alpha(b, 0) = a_0, \alpha(b, 1) = a_1, \ldots, \alpha(b, y) = a_y$$

Wenn α mit einer Funktion φ_α arithmetisch repräsentierbar ist, dann kann $\mathrm{pow}(x, y)$ wie folgt definiert werden:

$$\begin{gathered} \exists \mathsf{u}(\varphi_\alpha(\mathsf{u}, 0, \bar{1}) \wedge \\ \forall \mathsf{v} \forall \mathsf{w}(\mathsf{v} < \mathsf{y} \wedge \varphi_\alpha(\mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}) \rightarrow \varphi_\alpha(\mathsf{u}, \mathsf{v} + \bar{1}, \mathsf{w} \cdot \mathsf{x})) \wedge \\ \varphi_\alpha(\mathsf{u}, \mathsf{y}, \mathsf{z})) \end{gathered}$$

Auch hier ist die Bedeutung der Formel dieselbe: An Position $\mathsf{0}$ von u steht der Wert $\bar{1}$, an Position $\mathsf{v} + 1$ von u steht der Wert von $\mathsf{v} \cdot \mathsf{x}$ und an Position y steht der gesuchte Wert z. Dass eine Funktion mit der Eigenschaft von α existiert, ist ebenso Gödel zu verdanken.

Satz 4.3.1 *Gödels β-Funktion* ([10], S. 216)

Für jede endliche Zahlenfolge $a_0, \ldots a_{k-1}$ existieren b und c mit

$$a_i = \beta(b, c, i) = b \bmod (1 + c \cdot (i + 1))$$

Den Beweis für Gödels β-Funktion und ihre Funktionsweise am Beispiel aller Zweierpotenzen findet man in [10] auf den Seiten 216 bis 217. Das Spezielle an Gödels β-Funktion ist, dass sie sich arithmetisch repräsentieren lässt. Die Herleitung der Arithmetisierung findet man in [9] auf Seite 316. Gödels β-Funktion hat demnach die folgende arithmetische Darstellung:

$$\varphi_\beta(\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{i}, \mathsf{a}) := \exists \mathsf{d}(\mathsf{b} = \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(\mathsf{i})) \cdot \mathsf{d} + \mathsf{a} \wedge \mathsf{a} < \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(\mathsf{i})))$$

Somit ergibt sich für die Funktion pow(x, y) folgende Gestalt:

$$\begin{gathered}\exists \mathsf{b} \exists \mathsf{c}(\varphi_\beta(\mathsf{b}, \mathsf{c}, 0, \bar{1}) \wedge \\ \forall \mathsf{v} \forall \mathsf{w}(\mathsf{v} < \mathsf{y} \wedge \varphi_\beta(\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{v}, \mathsf{w}) \rightarrow \varphi_\beta(\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{v} + \bar{1}, \mathsf{w} \cdot \mathsf{x})) \wedge \\ \varphi_\beta(\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{y}, \mathsf{z}))\end{gathered}$$

Mit dem Einsetzen der Definition von φ_β ergibt sich folgende PA-Formel für die Exponentialfunktion $z = x^y$:

$$\begin{gathered}\exists \mathsf{b} \exists \mathsf{c}(\exists \mathsf{d}(\mathsf{b} = \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(0)) \cdot \mathsf{d} + \bar{1} \wedge \bar{1} < \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(0))) \wedge \\ \forall \mathsf{v} \forall \mathsf{w}(\mathsf{v} < \mathsf{y} \wedge \exists \mathsf{d}(\mathsf{b} = \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(\mathsf{v})) \cdot \mathsf{d} + \mathsf{w} \wedge \mathsf{w} < \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(\mathsf{v}))) \rightarrow \\ \exists \mathsf{d}(\mathsf{b} = \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(\mathsf{v} + \bar{1})) \cdot \mathsf{d} + (\mathsf{w} \cdot \mathsf{x}) \wedge (\mathsf{w} \cdot \mathsf{x}) < \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(\mathsf{v} + \bar{1})))) \wedge \\ \exists \mathsf{d}(\mathsf{b} = \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(\mathsf{y})) \cdot \mathsf{d} + \mathsf{z} \wedge \mathsf{z} < \mathsf{s}(\mathsf{c} \cdot \mathsf{s}(\mathsf{y}))))\end{gathered}$$

Obwohl das Potenzieren eine vergleichsweise einfache mathematische Operation ist, bedarf es einigen Aufwand, diese in die PA zu übersetzen.

Mit der Gödel'schen β-Funktion liegt ein so mächtiges mathematisches Werkzeug vor, dass Gödel folgende Verallgemeinerung in seinem *Satz V* postulierte. Abbildung 4.1 zeigt diesen Satz im originalen Wortlaut.

Satz 4.3.2 *Gödels Satz V* ([10], S. 218)

Jede primitiv-rekursive Relation $R(x_1, \ldots, x_n)$ ist in der Peano-Arithmetik syntaktisch repräsentierbar.

Bemerkung. Gödels *Satz V* bezieht sich im Original, wie Abbildung 4.1 zeigt, auf das formale System P und nicht wie in Satz 4.3.2 beschrieben, auf die PA. In [9] ist auf den Seiten 307 bis 319 detailliert dargestellt, dass Gödels System P ein allgemeineres System darstellt, dessen Eigenschaften man insbesondere auf die PA ableiten kann.

Die Tatsache, die man vage so formulieren kann: Jede rekursive Relation ist innerhalb des Systems P (dieses inhaltlich gedeutet) definierbar, wird, ohne auf eine inhaltliche Deutung der Formeln aus P Bezug zu nehmen, durch folgenden Satz exakt ausgedrückt:

Satz V: Zu jeder rekursiven Relation $R\ (x_1 \ldots x_n)$ gibt es ein n-stelliges *Relationszeichen* r (mit den *freien Variablen*[38]) $u_1,\ u_2 \ldots u_n$), so daß für alle Zahlen-n-tupel $(x_1 \ldots x_n)$ gilt:

$$R\ (x_1 \ldots x_n) \rightarrow \mathrm{Bew}\left[Sb\left(r \begin{smallmatrix} u_1 & \ldots & u_n \\ Z(x_1) & \ldots & Z(x_n) \end{smallmatrix}\right)\right] \tag{3}$$

$$\overline{R}\ (x_1 \ldots x_n) \rightarrow \mathrm{Bew}\left[\mathrm{Neg}\ Sb\left(r \begin{smallmatrix} u_1 & \ldots & u_n \\ Z(x_1) & \ldots & Z(x_n) \end{smallmatrix}\right)\right] \tag{4}$$

Wir begnügen uns hier damit, den Beweis dieses Satzes, da er keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet und ziemlich umständlich ist, in Umrissen anzudeuten[39]). Wir beweisen den Satz für alle

Abbildung 4.1: Gödels *Satz V* in seiner ursprünglichen Form. ([7], S. 186)

Der Beweis dieses Satzes ist so aufwendig, dass ihn selbst Gödel nur skizziert hat. Einen vollständig durchgeführten Beweis findet man in [12] auf den Seiten 106 bis 117. In [9] wird auf den Seiten 279 bis 280 gezeigt, dass sich Gödels *Satz V* auch auf primitiv rekursive Funktionen übertragen lässt. Damit sind alle Voraussetzungen geschaffen, um Gödels 1. Unvollständigkeitssatz zu formulieren und zu beweisen.

4.4 1. Unvollständigkeitssatz

In diesem Kapitel wird Gödels 1. Unvollständigkeitssatz Schritt für Schritt bewiesen. Die Argumentation folgt dem Beweis aus [10].

4.4.1 Gödels Diagonalargument

Wie in Kapitel 1 erwähnt, hat Gödel es geschafft, einen Satz der Art „*Ich bin unbeweisbar.*“ mathematisch zu konstruieren. Damit diese Konstruktion gelingt, hat sich Gödel auf Formeln der Form $\varphi(x)$ konzentriert, die genau eine freie Variable x haben. Tabelle 4.2 zeigt, wie man sich Gödels Diagonalargument vorstellen kann: ([10], S. 222)

- Tabelle 4.2 zeigt einen Ausschnitt einer „unendlich“ großen Tabelle, die alle arithmetischen Formeln mit genau einer freien Variable enthält.
- In der i-ten Zeile steht die Formel $\varphi_i(x)$, die der Gödelnummer $i = \ulcorner\varphi_i(x)\urcorner$ entspricht.

	0	1	2	3	4	5	6	7		g	
									$\dots$		$\dots$
$\varphi_1(x)$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\dots$	$\vdash$	$\dots$
									$\dots$		$\dots$
									$\dots$		$\dots$
$\varphi_4(x)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\dots$	$\nvdash$	$\dots$
$\varphi_5(x)$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\dots$	$\vdash$	$\dots$
									$\dots$		$\dots$
$\varphi_7(x)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\dots$	$\nvdash$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$\varphi_g(x)$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\dots$	$\nvdash$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$
$\neg\varphi_g(x)$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\dots$	$\nvdash$	$\dots$

Tabelle 4.2: Visualisierung von Gödels Diagonalargument. ([10], S. 222)

- Da nicht jede Zeile einer Gödelnummer einer Formel mit einer freien Variable entspricht, bleiben viele Zeilen leer.
- Die Spalten stehen für die natürlichen Zahlen.
- Wenn eine Formel $\varphi_i(x)$ mit der Instanz $\bar{n}$ in der PA beweisbar ist, so steht in der entsprechenden n-ten Zeile das Symbol $\vdash$.
- Gödel hat in seiner Arbeit gezeigt, dass es auf der Hauptdiagonalen mindestens eine Formel $\varphi_g(x)$ mit der Gödelnummer g geben muss, die mit der Instanz $\bar{g}$ unentscheidbar ist, für die also weder $\varphi_g(\bar{g})$ noch $\neg\varphi_g(\bar{g})$ in der PA beweisbar ist.

4.4.2 Konstruktion der Formel $\varphi_g(\bar{g})$

Im nächsten Schritt wird die Formel $\varphi_g(\bar{g})$ Stück für Stück konstruiert. Zunächst werden die Funktion $diag(y)$ und die Relation xBy wie folgt definiert: ([10], S. 223)

$$\begin{aligned} diag(y) \quad &:= \quad \begin{cases} \ulcorner\varphi_y(\bar{y})\urcorner & \text{falls } y = \ulcorner\varphi_y(x)\urcorner \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ xBy \quad &:\Leftrightarrow \quad x \text{ codiert einen Beweis für die Formel mit der Gödelnummer } y. \end{aligned}$$

Die Funktion $diag(y)$ beschreibt den Diagonalisierungsvorgang aus Tabelle 4.2. Steht also y für die Gödelnummer der Formel $\varphi_y(x)$, so wird y auf die Gödelnummer der Formel $\varphi_y(\bar{y})$ abgebildet. Die Relation xBy gibt an, dass, wenn x der Gödelnummer eines Beweises und y der Gödelnummer einer Formel entspricht, x genau dann in Relation zu y steht, wenn x einen Beweis für y codiert. Das bedeutet: x steht für die Gödelnummer einer Sequenz von Formeln ($\ulcorner \varphi_1, \ldots, \varphi_n \urcorner = x$), die die Formel φ ($\ulcorner \varphi \urcorner = y$) aus den Peano-Axiomen ableitet.

Dass sowohl $diag(y)$ als auch xBy primitiv-rekursiv, und somit nach Satz 4.3.2 in der PA syntaktisch repräsentierbar sind, zeigte Gödel in seiner Originalarbeit. Eine detaillierte Herleitung dieser Formeln ist in [9] auf den Seiten 231 bis 274 gezeigt.

1. $x/y \equiv (Ez)\,[z \leqq x \;\&\; x = y\,.\,z]$[33])
x **ist teilbar durch** y[34]).

2. Prim $(x) \equiv \overline{(Ez)}\,[z \leqq x \;\&\; z \neq 1 \;\&\; z \neq x \;\&\; x/z] \;\&\; x > 1$
x **ist Primzahl.**

3. $0\,Pr\,x \equiv 0$
$(n+1)\,Pr\,x \equiv \varepsilon y\,[y \leqq x \;\&\; \mathrm{Prim}\,(y) \;\&\; x/y \;\&\; y > n\,Pr\,x]$
$n\,Pr\,x$ **ist die** n**-te (der Größe nach) in** x **enthaltene Primzahl**[34a]).

44. $Bw\,(x) \equiv (n)\,\{0 < n \leqq l\,(x) \rightarrow Ax\,(n\,Gl\,x) \vee (Ep, q)\,[0 < p, q < n \;\&\; Fl\,(n\,Gl\,x, p\,Gl\,x, q\,Gl\,x)]\} \;\&\; l\,(x) > 0$

x **ist eine** ***Beweisfigur*** **(eine endliche Folge von** ***Formeln*****, deren jede entweder** ***Axiom*** **oder** ***unmittelbare Folge*** **aus zwei der vorhergehenden ist).**

45. $x\,B\,y \equiv Bw\,(x) \;\&\; [l\,(x)]\;Gl\,x = y$
x **ist ein** ***Beweis*** **für die** ***Formel*** y**.**

46. Bew $(x) \equiv (Ey)\;y\,B\,x$
x **ist eine** ***beweisbare Formel.*** **[Bew** (x) **ist der einzige unter den Begriffen 1—46, von dem nicht behauptet werden kann, er sei rekursiv.]**

Abbildung 4.2: Dieses Bild aus Gödels Originalarbeit zeigt einen Ausschnitt der 46 Funktionen und Relationen, die Gödel in seiner Arbeit definiert hat. Dabei entspricht Nummer 45 der Relation xBy. ([7], S. 182 - 186)

Die syntaktischen Versionen von $diag$ und B lauten $\mathsf{Diag}(\mathsf{y}, \mathsf{z})$ und $\mathsf{B}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ und für diese gelten: ([10], S. 224)

$$\begin{aligned} diag(y) = z \quad &\Rightarrow \quad \forall \mathsf{z}(\mathsf{Diag}(\bar{y}, \mathsf{z}) \leftrightarrow \mathsf{z} = \bar{z}) \\ (x, y) \in B \quad &\Rightarrow \quad \vdash \mathsf{B}(\bar{x}, \bar{y}) \\ (x, y) \notin B \quad &\Rightarrow \quad \vdash \neg \mathsf{B}(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

Aus Diag und B kann nun folgende Formel konstruiert werden: ([10], S. 224)

$$\psi_g(\mathsf{x},\mathsf{y}) \quad := \quad \exists \mathsf{z}(\mathsf{Diag}(\mathsf{y},\mathsf{z}) \wedge \mathsf{B}(\mathsf{x},\mathsf{z}))$$

Die Bedeutung von $\psi_g(x,y)$ ist leicht erkennbar: x ist die Gödelnummer eines Beweises von $\varphi_y(\bar{y})$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \vdash \psi_g(\bar{x},\bar{y}) \quad &:\Leftrightarrow \quad x \text{ ist die Gödelnummer eines Beweises von } \varphi_y(\bar{y}). \\ \vdash \neg\psi_g(\bar{x},\bar{y}) \quad &:\Leftrightarrow \quad x \text{ ist nicht die Gödelnummer eines Beweises von } \varphi_y(\bar{y}). \end{aligned}$$

Nun kann die gesuchte Formel $\varphi_g(\bar{y})$ wie folgt definiert werden: ([10], S. 224)

$$\varphi_g(\mathsf{y}) \quad := \quad \forall \mathsf{x}(\neg\psi_g(\mathsf{x},\mathsf{y}))$$

Mit $\varphi_g(\bar{y})$ wurde nun eine arithmetische Formel konstruiert, deren Diagonalargument $\varphi_g(\bar{g})$ unentscheidbar ist. Vor dem mathematischen Beweis dafür, wird die Interpretation dieser Formel aufgezeigt:

- Wird die Formel mit y instanziiert, so bedeutet $\varphi_g(\bar{y})$, dass kein x die Gödelnummer eines Beweises von $\varphi_y(\bar{y})$ sein kann. Oder anders gesagt:
  $\varphi_g(\bar{y}) :\Leftrightarrow$ „$\varphi_y(\bar{y})$ ist nicht beweisbar."
- Wird die Formel mit g instanziiert, so bedeutet $\varphi_g(\bar{g})$, dass kein x die Gödelnummer eines Beweises von $\varphi_g(\bar{g})$ sein kann. Oder anders gesagt:
  $\varphi_g(\bar{g}) :\Leftrightarrow$ „$\varphi_g(\bar{g})$ ist nicht beweisbar.", was gleichbedeutend ist mit:
  „Ich bin nicht beweisbar."
  Die Formel $\varphi_g(\bar{g})$ entspricht also dem gesuchten Lügner-Paradoxon aus Kapitel 1.

4.4.3 Beweis der Unentscheidbarkeit von $\varphi_g(\bar{g})$

Mathematisch lässt sich die Unentscheidbarkeit der Formel $\varphi_g(\bar{g})$ wie folgt zeigen. ([10], S. 225)

- Angenommen, es gilt: $\vdash \varphi_g(\bar{g})$
  Da nach Annahme $\varphi_g(\bar{g})$ beweisbar ist, muss es eine Gödelnummer n geben, die einen Beweis für diese Formel codiert. Da $\varphi_g(\bar{g})$ das Diagonalargument von $\varphi_g(\bar{y})$ ist, muss ebenso gelten:

  $$\vdash \psi_g(\bar{n},\bar{g})$$

Setzt man in die Annahme die Definition von $\varphi_g(\bar{g})$ ein, so erhält man $\vdash \forall \mathsf{x}(\neg\psi_g(\mathsf{x}, \bar{g}))$. Der Allquantor sagt aus, dass jede Instanz für x keinen Beweis für die Formel $\varphi_g(\bar{g})$ codiert. Daher gilt insbesondere für die Instanz n:

$$\vdash \neg\psi_g(\bar{n}, \bar{g})$$

Somit führt die Annahme zu einem klaren Widerspruch nach Definition 2.1.5. Da die PA als Fundament der Mathematik frei von Widersprüchen sein soll, kann die Annahme nicht gelten.

- Angenommen, es gilt: $\vdash \neg\varphi_g(\bar{g})$
  Setzt man in die Annahme die Definition von $\varphi_g(\bar{g})$ ein, so erhält man $\vdash \neg(\forall \mathsf{x}(\neg\psi_g(\mathsf{x}, \bar{g})))$, was gleichbedeutend ist mit:

  $$\vdash \exists \mathsf{x}(\psi_g(\mathsf{x}, \bar{g}))$$

  Wie bereits herausgearbeitet, soll die PA nicht widersprüchlich sein, weshalb nach Annahme nicht gleichzeitig die Formel $\varphi_g(\bar{g})$ beweisbar sein kann. Das bedeutet, es gibt keine Zahl, die der Gödelnummer eines Beweises für $\varphi_g(\bar{g})$ entspricht. Oder mathematisch ausgedrückt:

  $$\begin{gathered} \vdash \neg\psi_g(\mathsf{0}, \bar{g}) \\ \vdash \neg\psi_g(\bar{1}, \bar{g}) \\ \vdash \neg\psi_g(\bar{2}, \bar{g}) \\ \vdash \neg\psi_g(\bar{3}, \bar{g}) \\ \vdots \end{gathered}$$

  Somit behauptet die Annahme einerseits, dass es eine Zahl x geben muss, für die $\psi_g(\bar{x}, \bar{g})$ beweisbar ist, andererseits gilt unter Annahme der Widerspruchsfreiheit, dass für kein x die Formel $\psi_g(\bar{x}, \bar{g})$ beweisbar ist. Mit dieser inhaltlichen Interpretation ist das ein offensichtlicher Widerspruch, jedoch ist es noch nicht gelungen, einen konkreten formalen mathematischen Widerspruch zu erzeugen. Gödel war sich diesem Problem bewusst und hat daher in seiner Originalarbeit die sogenannte „*ω-Widerspruchsfreiheit*“ definiert, die dieses Problem löst.

Definition 4.4.1 *ω-Widerspruchsfreiheit* ([10], S. 226)

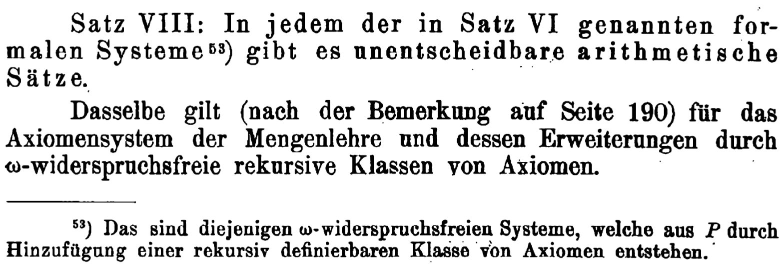
Ein formales System heißt *ω-widerspruchsfrei*, wenn es widerspruchsfrei ist und zusätzlich gilt:

$$\vdash \neg\varphi(\bar{n}) \text{ (für alle } n \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad \nvdash \exists \mathsf{x}\varphi(\mathsf{x})$$

Unter der Voraussetzung der ω-Widerspruchsfreiheit kann also weder $\vdash \varphi_g(\bar{g})$ noch $\vdash \neg\varphi_g(\bar{g})$ gelten. Somit liegt mit $\varphi_g(\bar{g})$ eine PA-Formel vor, die innerhalb der Peano-Arithmetik unentscheidbar ist, woraus die Negationsunvollständigkeit nach Definition 2.1.5 folgt.

Satz 4.4.1 *Gödels 1. Unvollständigkeitssatz* ([9], S. 320)

Jedes ω-widerspruchsfreie formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist negationsunvollständig.


Satz VIII: In jedem der in Satz VI genannten formalen Systeme[53]) gibt es unentscheidbare arithmetische Sätze.

Dasselbe gilt (nach der Bemerkung auf Seite 190) für das Axiomensystem der Mengenlehre und dessen Erweiterungen durch ω-widerspruchsfreie rekursive Klassen von Axiomen.

[53]) Das sind diejenigen ω-widerspruchsfreien Systeme, welche aus P durch Hinzufügung einer rekursiv definierbaren Klasse von Axiomen entstehen.

Abbildung 4.3: Gödels 1. Unvollständigkeitssatz in seiner ursprünglichen Form aus dem Jahr 1931. ([7], S. 193)

4.4.4 Rossers Beitrag

Erst fünf Jahre nach Gödels Originalarbeit gelang es dem amerikanischen Mathematiker John Barkley Rosser (1907 - 1989), die ω-Widerspruchsfreiheit mit der Widerspruchsfreiheit zu ersetzen. Dafür ersetzte er die Gödel'sche Formel $\varphi_g(\bar{y})$ mit einer neuen Formel $\varphi_r(\bar{y})$: ([10], S. 227)

$$\varphi_r(\mathsf{y}) \quad := \quad \forall \mathsf{x}(\psi_g(\mathsf{x},\mathsf{y}) \rightarrow \exists z(z \leq x \land \psi_{g'}(\mathsf{z},\mathsf{y})))$$

Dabei bedeutet $\psi_{g'}(x, y)$: x ist die Gödelnummer eines Beweises von $\neg\varphi_y(\bar{y})$.
Inhaltlich kann die Formel $\varphi_r(\bar{y})$ wie folgt interpretiert werden: ([10], S. 227)

- Wird die Formel mit y instanziiert, so bedeutet $\varphi_r(\bar{y})$, dass für jede Gödelnummer x, die für einen Beweises von $\varphi_y(\bar{y})$ steht, ein z existiert, die einen kürzeren Beweis für die Negation von $\varphi_y(\bar{y})$ codiert. Oder anders gesagt:
  $\varphi_r(\bar{y}) :\Leftrightarrow$ „Ist $\varphi_y(\bar{y})$ beweisbar, so existiert ein kürzerer Beweis für $\neg\varphi_y(\bar{y})$."
- Wird die Formel mit ihrem Diagonalargument r instanziiert, so gilt:
  $\varphi_r(\bar{r}) :\Leftrightarrow$ „Ist $\varphi_r(\bar{r})$ beweisbar, so existiert ein kürzerer Beweis für $\neg\varphi_r(\bar{r})$.", was gleichbedeutend ist mit:
  „Wenn ich beweisbar bin, dann existiert ein kürzerer Beweis für meine Negation."
  Unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit ist diese Formel unentscheidbar.

Der Beweis mit der neuen Formel folgt Gödels Argumentationslinie und führt zu einer neuen Version des 1. Unvollständigkeitssatzes, die als *Gödel-Rosser-Theorem* bekannt ist. Eine detaillierte Ausarbeitung des Beweises von Rosser findet man in [10] auf den Seiten 227 bis 229.

Satz 4.4.2 *Gödel-Rosser-Theorem* ([9], S. 320)

Jedes widerspruchsfreie formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist negationsunvollständig.

4.4.5 Beweis, dass $\varphi_g(\bar{g})$ in der Peano-Arithmetik nicht beweisbar ist

Abbildung 4.2 zeigt die 46 Funktionen und Relationen, die Gödel in seiner Originalarbeit definiert hat. Die letzte Funktion mit der Nummer 46 lautet wie folgt: ([10], S. 230)

$$\mathsf{Bew}(\mathsf{y}) \quad := \quad \exists \mathsf{x} \mathsf{B}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$$

Die Aussage dieser Formel lautet, dass eine Gödelnummer x existiert, die einen Beweis für die Formel mit der Gödelnummer y codiert. Mithilfe dieser Formel lässt sich die Unbeweisbarkeit der Gödel'schen Formel $\varphi_g(\bar{g})$ sogar mathematisch ausdrücken:

$$\varphi_g(\bar{g}) \leftrightarrow \neg\mathsf{Bew}(\overline{\ulcorner\varphi_g(\bar{g})\urcorner})$$

Um zu zeigen, dass die Unbeweisbarkeit von Gödels Formel innerhalb der PA nicht nur konstruierbar, sondern auch beweisbar ist, formulierte Gödel zunächst das sogenannte Fixpunkttheorem, dessen Beweis man in [10] auf den Seiten 230 bis 232 findet.

Satz 4.4.3 *Fixpunkttheorem* ([10], S. 231)

Zu jeder PA-Formel $\varphi(x)$ existiert eine PA-Formel ψ mit

$$\vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$$

Aus dem Fixpunkttheorem kann man die Aussage „Innerhalb der Peano-Arithmetik kann man beweisen, dass es für die Formel $\varphi_g(\bar{g})$ keinen Beweis gibt." ableiten: ([10], S. 233 - 235)

$$\vdash \varphi_g(\bar{g}) \leftrightarrow \neg \mathsf{Bew}(\overline{\ulcorner \varphi_g(\bar{g}) \urcorner})$$

4.4.6 Wahrheitsprädikat in der Peano-Arithmetik

Der polnische Mathematiker Alfred Tarksi (1901 - 1983) beschäftigte sich zur selben Zeit wie Gödel mit dem Begriff der *Wahrheit* im mathematischen Sinn. Er untersuchte, inwiefern sich die Wahrheit in formalen Systemen definieren lässt. Zunächst wird eine Menge definiert, in der alle wahren Sätze eines formalen Systems vorkommen. Konkret sieht diese Menge wie folgt aus: ([10], S. 236)

$$T := \{x | x \text{ ist die Gödelnummer einer wahren Formel}\}$$

Ist eine Formel φ wahr, so gilt $\ulcorner \varphi \urcorner \in T$, ist sie falsch, so gilt $\ulcorner \varphi \urcorner \notin T$. Tarski verwendete den Begriff „*Wahrheitsprädikat*" für eine Formel $\mathcal{T}(x)$, die für alle wahren Formeln wahr ist, mit der folgenden Definition: ([10], S. 236)

$$\models \mathcal{T}(\bar{x}) \Leftrightarrow x \in T$$

Da für jede Formel φ mit der Gödelnummer x, für die $x \in T$ gilt, eine wahre Formel ist, folgt stets $\models \varphi$. Somit gilt für das Wahrheitsprädikat $\mathcal{T}(x)$: ([10], S. 236)

$$\models \varphi \Leftrightarrow \models \mathcal{T}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$$
$$\text{bzw.}$$
$$\models \varphi \leftrightarrow \mathcal{T}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$$

Dass so ein Wahrheitsprädikat für die PA nicht existieren kann, vermutete Tarksi bereits in seiner Publikation im Jahr 1931. Doch erst nach der Veröffentlichung von Gödels Arbeit zu den Unvollständigkeitssätzen konnte Tarksi seine Vermutung im Jahr 1935 beweisen. Zunächst wird eine Formel $\psi(x)$ konstruiert, die die Negation von $\mathcal{T}(x)$ darstellt: ([10], S. 238)

$$\psi(x) := \neg\mathcal{T}(x)$$

Aufgrund des Fixpunkttheorems aus Satz 4.4.3 existiert eine Formel φ mit der Gödelnummer x, für die gilt:

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathcal{T}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$$

Da die Peano-Arithmetik nach Kapitel 3.5 korrekt ist, gilt für jede beweisbare Formel, dass sie wahr ist, und somit:

$$\models \varphi \leftrightarrow \neg\mathcal{T}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$$

Dies ist ein direkter Widerspruch zur bereits hergeleiteten Formel $\models \varphi \leftrightarrow \mathcal{T}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$, was zu Tarskis *Undefinierbarkeitssatz* führt.

Satz 4.4.4 *Tarskis Undefinierbarkeitssatz* ([10], S. 239)

Der Begriff der Wahrheit ist innerhalb der Peano-Arithmetik nicht definierbar - es gibt kein Wahrheitsprädikat.

4.4.7 Unvollständigkeit der Peano-Arithmetik

Mit Tarskis Undefinierbarkeitssatz lässt sich eine wesentliche Erkenntnis aus Gödels 1. Unvollständigkeitssatz folgern. In Kapitel 4.4.5 wurde die Formel Bew(y) definiert, mit folgender Eigenschaft: ([10], S. 239)

$$\models \mathsf{Bew}(\bar{y}) \Leftrightarrow y \text{ ist die Gödelnummer einer beweisbaren Formel}$$

Somit gelten für eine Formel φ mit der Gödelnummer y folgende Zusammenhänge:

- Ist die PA korrekt, so gilt:

$$\models \mathsf{Bew}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \varphi$$

- Ist die PA vollständig, so gilt:

$$\models \varphi \to \mathsf{Bew}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$$

- Ist die PA korrekt und vollständig, so gilt:

$$\models \varphi \leftrightarrow \mathsf{Bew}(\ulcorner\varphi\urcorner)$$

Da mit dem dritten Fall ein Wahrheitsprädikat nach Tarski vorliegen würde, kann die PA nicht gleichzeitig korrekt und vollständig sein. Da nach Kapitel 3.5 die PA korrekt ist, ergibt sich folgende Version des 1. Unvollständigkeitssatzes.

Satz 4.4.5 ([10], S. 204)

Jedes korrekte formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist unvollständig.

Somit ist die PA nach Definition 2.1.5 widerspruchsfrei und korrekt, aber negationsunvollständig und unvollständig.

4.5 2. Unvollständigkeitssatz

Gödel hat in seiner Arbeit neben dem berühmten 1. Unvollständigkeitssatz noch eine Folgerung daraus gezogen, die in der Literatur als 2. Unvollständigkeitssatz bezeichnet wird. Abbildung 4.4 zeigt die Formulierung in Gödels Originalarbeit.

Aus den Ergebnissen von Abschnitt 2 folgt ein merkwürdiges Resultat, bezüglich eines Widerspruchslosigkeitsbeweises des Systems *P* (und seiner Erweiterungen), das durch folgenden Satz ausgesprochen wird:

Satz XI: Sei ϰ eine beliebige rekursive widerspruchsfreie[63]) Klasse von *Formeln*, dann gilt: Die *Satzformel*, welche besagt, daß ϰ widerspruchsfrei ist, ist nicht ϰ-*beweisbar*; insbesondere ist die Widerspruchsfreiheit von *P* in *P* unbeweisbar[64]), vorausgesetzt, daß *P* widerspruchsfrei ist (im entgegengesetzten Fall ist natürlich jede Aussage beweisbar).

Abbildung 4.4: Gödels 2. Unvollständigkeitssatz in seiner Originalarbeit. ([7], S. 196)

Konkret hat Gödel eine Formel Wid konstruiert, die die Widerspruchsfreiheit innerhalb der PA formal darstellt: ([10], S. 245)

$$\mathsf{Wid} := \neg\exists \mathsf{x}(\mathsf{Bew}(\mathsf{x}) \wedge \mathsf{Bew}(\neg \mathsf{x}))$$

Gödel konnte zeigen, dass Wid nicht innerhalb der PA beweisbar ist, wie man im Detail in [10] auf den Seiten 244 - 247 nachlesen kann. Daraus folgt sein 2. Unvollständigkeitssatz.

Satz 4.5.1 *Gödels 2. Unvollständigkeitssatz* ([10], S. 247)

In jedem widerspruchsfreien formalen System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, gilt $\nvdash \mathsf{Wid}$.

Somit konnte Gödel zeigen, dass man die Widerspruchsfreiheit eines Systems nicht innerhalb des Systems selbst beweisen kann. Im Jahr 1936 konnte der deutsche Mathematiker Gerhard Gentzen (1909 - 1945) die Widerspruchsfreiheit der PA mithilfe mengentheoretischer Mittel beweisen. ([10], S. 258)

4.6 Missinterpretationen der Unvollständigkeitssätze

Da die Ergebnisse von Gödels Arbeit oft falsch interpretiert werden, werden drei Missinterpretationen analysiert. ([10], S. 254 - 257)

- „*In der Mathematik gibt es wahre Sätze, die nicht beweisbar sind.*“
  Die Beweisbarkeit eines Satzes bzw. einer Formel hängt vom zugrundeliegenden formalen System ab, also von den Axiomen und den Schlussregeln. Der Begriff der Beweisbarkeit ist daher nicht allgemein definierbar. Sollte tatsächlich ein Satz φ vorliegen, den man z.B. in der PA nicht beweisen kann, kann man φ als Axiom hinzufügen und erhält so ein System, das φ beweisen kann. Eine korrekte Formulierung der Aussage wäre: „*In der PA gibt es wahre Sätze, die nicht beweisbar sind.*“ Ein Beispiel für einen Satz aus der Zahlentheorie, der innerhalb der PA nicht beweisbar ist, ist der *Satz von Goodstein*, zu finden in [10] auf den Seiten 260 bis 266.
- „*In jedem formalen System existieren unentscheidbare Sätze.*“
  Gödels 1. Unvollständigkeitssatz gilt nach Definition nur für Systeme, die stark genug sind, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren. In Kapitel 2.1 wurde ein Beispielkalkül konstruiert, dass negationsvollständig ist und somit keine unentscheidbaren Sätze beinhaltet. Betrachtet man jedoch ausschließlich formale Systeme, die mindestens die PA formalisieren können, z.B. die in Kapitel 3.6 erwähnte Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, dann ist die zitierte Aussage wahr.
- „*Der 1. Unvollständigkeitssatz von Gödel steht im Widerspruch zu Gödels Vollständigkeitssatz.*“
  Wie in Kapitel 2.2.4 erwähnt, hat Gödel in seiner Doktorarbeit im Jahr 1929 die

Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe bewiesen. Der 1. Unvollständigkeitssatz bezieht sich jedoch auf die Vollständigkeit der PA. Es ist leicht zu sehen, dass die beiden Sätze Aussagen über völlig unterschiedliche Themengebiete treffen. Zudem hat die Modellrelation „$\models$“ in der PL1 eine andere Bedeutung als in der PA. Für eine Formel φ sagt in der PL1 $\models \varphi$ aus, dass φ allgemeingültig ist, das heißt, dass φ in jeder möglichen Interpretation wahr ist. In der PA sagt $\models \varphi$ aus, dass φ innerhalb einer ganz bestimmten Interpretation, nämlich die der natürlichen Zahlen mit der Addition, der Multiplikation und der Nachfolgerfunktion, wahr ist.

Literaturverzeichnis

[1] *SWR2 Archivradio. David Hilberts Radioansprache.* 1930. URL: https://www.swr.de/swr2/wissen/archivradio/david-hilbert-1930-radioansprache-100.html (visited on 11/26/2023).

[2] *Arithmetices principia: Nova Methodo Exposita.* lat. Fratres Bocca, 1889.

[3] *Heinz-Dieter Ebbinghaus. Einführung in die mathematische Logik.* ger. 6. Aufl. 2018. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, 2018. ISBN: 9783662580295.

[4] *Gottlob Frege. Begriffsschrift : Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* ger. Halle: Verlag Louis Nebert, 1897.

[5] *Kurt Gödel.* "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls". In: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37.1 (Dec. 1930), pp. 349–360. ISSN: 1436-5081. DOI: 10.1007/BF01696781. URL: https://doi.org/10.1007/BF01696781.

[6] *Kurt Gödel.* "Diskussion zur Grundlegung der Mathematik: am Sonntag, dem 7. Sept. 1930". ger. In: *Erkenntnis* 2.1 (1931), pp. 135–151. ISSN: 0165-0106.

[7] *Kurt Gödel.* "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". eng. In: *Monatshefte für Mathematik* 149.1 (2006), pp. 1–29. ISSN: 0026-9255.

[8] *Martin Goldstern. The incompleteness phenomenon : a new course in mathematical logic.* eng. [Paperback ed.] Natick, Mass.: Peters, 1998. ISBN: 1568810938.

[9] *Dirk W Hoffmann. Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze : Eine geführte Reise durch Kurt Gödels historischen Beweis.* ger. 2. Aufl. 2017. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 9783662543009.

[10] *Dirk W Hoffmann. Grenzen der Mathematik : Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik /.* ger. 3rd ed. 2018. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg : Imprint: Springer Spektrum, 2018. ISBN: 3-662-56617-6.

[11] *Elliott Mendelson. Introduction to mathematical logic.* eng. 6. ed. A Chapman and Hall book. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2015. ISBN: 9781584888765.

[12] *Peter Smith. An introduction to Gödel's theorems.* eng. 1. publ. Cambridge introductions to philosophy. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. ISBN: 0521857848.

[13] *Alfred North Whitehead. Principia mathematica. 1 (1910).* eng. Cambridge: Univ. Press, 1910.

[14] *Martin Ziegler. Mathematische Logik.* ger. Mathematik kompakt. Basel: Birkhäuser, 2010. ISBN: 9783764399733.