



universität
wien

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Die Verallgemeinerung einiger ausgezeichnete Punkte
des Dreiecks auf den höherdimensionalen Raum“

verfasst von / submitted by

Theresa Roittner BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2024 / Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 520 523 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Mathematik Unterrichtsfach Physik

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Stefan Haller, Privatdoz.

Abstract

A triangle possesses many distinguished points. The most well-known of these points are the incenter, the excenters, the circumcenter, the centroid, and the orthocenter. This thesis deals, among other things, with the generalization of these points to three- and higher-dimensional space. Furthermore, the generalization of Euler's line and Feuerbach's circle to three- and higher-dimensional space is addressed. In two- and three-dimensional space, the proofs were mostly demonstrated geometrically as well as algebraically.

The incenter, circumcenter, and centroid can be naturally generalized to higher-dimensional space. However, the excenters and the orthocenter are more complex.

In three- and higher-dimensional space, the altitudes of a simplex generally do not intersect at a single point. However, there exists another point, the Monge point, which exhibits many properties of the orthocenter in higher-dimensional space. For example, in higher-dimensional space, the Monge point lies on the line through the centroid and the circumcenter of a simplex, which also allows for the generalization of Euler's line.

Equally interesting is the possible existence of excenters in higher-dimensional space. For example, a tetrahedron possesses between four and seven exspheres, each touching the supporting plane of the lateral faces. In general, simplices have different types of circumspheres, the existence of which depends on the size of the lateral faces. The set of existing circumspheres is limited but exhibits gaps in odd dimensions. No information about whether such gaps occur in even dimensions could be found.

Abstrakt

Ein Dreieck besitzt sehr viele ausgezeichnete Punkte. Die wohl bekanntesten dieser Punkte sind der Inkreismittelpunkt, die Ankreismittelpunkte, der Umkreismittelpunkt, der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt. Diese Arbeit beschäftigt sich unter anderem mit der Verallgemeinerung dieser Punkte auf den drei- und höherdimensionalen Raum. Des Weiteren wird die Verallgemeinerung der Euler'schen Gerade und des Feuerbach'schen Kreises auf den drei- und höherdimensionalen Raum behandelt. Im zwei- und dreidimensionalen Raum wurden die Beweise meist sowohl geometrisch, als auch algebraisch argumentiert.

Der Inkreismittelpunkt, der Umkreis und der Schwerpunkt lassen sich auf sehr nahe-liegende Weise auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinern. Komplexere Fälle bilden hingegen die Ankreismittelpunkte und der Höhenschnittpunkt.

Im drei- und höherdimensionalen Raum müssen sich die Höhen eines Simplex im Allgemeinen nicht in einem Punkt schneiden. Allerdings existiert ein anderer Punkt, der Monge Punkt, der sehr viele Eigenschaften des Höhenschnittpunkts im höherdimensionalen Raum aufweist. Beispielsweise liegt der Monge Punkt im Höherdimensionalen auf der Geraden durch den Schwerpunkt und den Umkreismittelpunkt, wodurch mit dessen Hilfe auch die Euler'sche Gerade verallgemeinert werden kann.

Äußerst interessant ist ebenso die mögliche Existenz der Ankreismittelpunkte im höherdimensionalen Raum. So besitzt ein Tetraeder beispielsweise zwischen vier und sieben Ankugeln, die jede Trägerebene der Seitenflächen berühren. Im Allgemeinen haben Simplexe verschiedene Arten von Ansphären, deren Existenz mit der Größe der Seitenflächen zusammenhängt. Die Menge der existierenden Ansphären ist begrenzt, weist jedoch in ungeraden Dimensionen Lücken auf. Es konnten keine Informationen dazu gefunden werden, ob solche Lücken ebenfalls in geraden Dimensionen auftreten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Notation für Dreiecke	4
2.2	Notation für Tetraeder	5
2.3	Notation für n -Simplexe	6
3	Der Schwerpunkt	9
3.1	Der Schwerpunkt	10
3.2	Der Schwerpunkt eines Tetraeders	12
3.3	Der Schwerpunkt eines n -Simplex	15
4	Der Umkreismittelpunkt	17
4.1	Der Umkreismittelpunkt	18
4.2	Der Umkugelmittelpunkt	22
4.3	Der Umsphäremittelpunkt	27
5	Der Höhenschnittpunkt und der Monge Punkt	31
5.1	Der Höhenschnittpunkt	32
5.2	Der Höhenschnittpunkt eines Tetraeders	34
5.2.1	Der Monge Punkt eines Tetraeders	39
5.3	Der Höhenschnittpunkt eines n -Simplex	44
5.3.1	Der Monge Punkt eines n -Simplex	46
6	Die Euler'sche Gerade	51
6.1	Die Euler'sche Gerade	52
6.2	Die Euler'sche Gerade eines Tetraeders	54
6.3	Die Euler'sche Gerade eines n -Simplex	56
7	Der Feuerbach'sche Kreis	57
7.1	Der Feuerbach'sche Kreis	58
7.1.1	Die Seitenmittelpunkte der Dreiecksseiten	58
7.1.2	Der Durchschnitt des Feuerbach'schen Kreises mit den Trägergeraden der Dreiecksseiten	59
7.1.3	Die Teilung der Verbindungsstrecke der Eckpunkte mit dem Höhenschnittpunkt	61

Inhaltsverzeichnis

7.2	Die Feuerbach'sche Kugel	69
7.2.1	Verallgemeinerung der Seitenmittelpunkte auf den 3-dimensionalen Raum	69
7.2.2	Verallgemeinerung des Durchschnitts des Feuerbach'schen Kreises mit den Trägergeraden der Dreiecksseiten auf den 3-dimensionalen Raum	72
7.2.3	Verallgemeinerung der Teilung der Verbindungsstrecke der Eckpunkte mit dem Höhenschnittpunkt auf den 3-dimensionalen Raum	74
7.3	Die Feuerbach'sche Sphäre	79
7.3.1	Verallgemeinerung der Seitenmittelpunkte auf den n -dimensionalen Raum	79
7.3.2	Verallgemeinerung des Durchschnitts des Feuerbach'schen Kreises mit den Trägergeraden der Dreiecksseiten auf den n -dimensionalen Raum	81
7.3.3	Verallgemeinerung der Teilung der Verbindungsstrecke der Eckpunkte mit dem Höhenschnittpunkt auf den n -dimensionalen Raum	83
8	Der Inkreis- und die Ankreismittelpunkte	87
8.1	Der Inkreismittelpunkt	88
8.1.1	Ankreismittelpunkte	94
8.2	Der Inkugelmittelpunkt	100
8.2.1	Ankugelmittelpunkte	105
8.3	Der Insphärenmittelpunkt	113
8.3.1	Ansphärenmittelpunkte	116
	Literaturverzeichnis	119
	Literatur	122

1 Einleitung

Schon Euklid beschrieb in seinem Buch der Elemente einige der uns heute bekannten ausgezeichneten Punkte eines Dreiecks [5]. Derzeit sind mehrere tausend ausgezeichnete Punkte im Dreieck bekannt [12].

Diese Arbeit befasst sich mit der Verallgemeinerung einiger ausgezeichneter Punkte des Dreiecks auf den höherdimensionalen Raum.

Dabei werden zuerst der zwei- und dreidimensionale Fall und anschließend der allgemeine höherdimensionale Fall behandelt. Im zwei- und dreidimensionalen wurden die Beweise größtenteils sowohl algebraisch, als auch geometrisch argumentiert, im Höherdimensionalen wurde nur der algebraische Ansatz verfolgt.

Diese Arbeit befasst sich konkret mit der Verallgemeinerung des Schwerpunkts, des Umkreismittelpunkts, des Höhenschnittpunkts, der Euler'schen Gerade, dem Feuerbach'schen Kreis sowie den Inkreismittelpunkten und den Ankreismittelpunkten eines Dreiecks.

Der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Inkreismittelpunkt lassen sich auf sehr naheliegender Weise auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinern. Der Schwerpunkt eines allgemeinen Simplex kann durch die Summe der Eckpunkte dividiert durch die um Eins erhöhte Dimension definiert werden.

Für den Umsphärenmittelpunkt können die Streckensymmetralen durch die $(n - 1)$ -dimensionalen Ebenen, die normal auf jeweils eine Kante des Simplex stehen und durch ihre Mittelpunkte verlaufen, verallgemeinert werden. Der Umsphärenmittelpunkt stellt, analog zum zweidimensionalen Fall, den Schnittpunkt dieser Ebenen dar. Die Eckpunkte eines Simplex haben alle den selben Abstand zum Umsphärenmittelpunkt, es existiert also eine Sphäre, die alle Eckpunkte eines Simplex enthält.

Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks, die sich im Inkreismittelpunkt schneiden, können im dreidimensionalen Raum durch die Ebenen verallgemeinert werden, die jeweils einen inneren Kantenwinkel des Tetraeders halbieren. Diese Ebenen schneiden sich im Inkugelmittelpunkt des Tetraeders. Im Höherdimensionalen wäre eine verallgemeinerte Definition der Winkelhalbierenden ebenfalls möglich, für den allgemeinen algebraischen Beweis ist sie jedoch nicht notwendig und ist in der Arbeit daher auch nicht explizit angeführt.

Interessanter gestaltet sich die Verallgemeinerung des Höhenschnittpunkts. Da dieser im Höherdimensionalen im Allgemeinen nicht existiert, wird hier ein neuer Punkt definiert, der sehr viele Eigenschaften des Höhenschnittpunkts erfüllt, der Monge Punkt. Der Monge Punkt eines Tetraeders ist der Schnittpunkt der Ebenen, die normal auf jeweils eine Kante stehen und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante enthalten.

1 Einleitung

Im Höherdimensionalen wird der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante durch den Schwerpunkt der $(n - 2)$ -dimensionalen gegenüberliegenden Seite verallgemeinert. Ein Höhenschnittpunkt existiert genau dann, wenn jede Kante normal auf jede gegenüberliegende Kante steht. Ein solches Simplex wird orthozentrisches Simplex genannt. Im Fall der Existenz eines Höhenschnittpunkts, fällt dieser mit dem Monge Punkt zusammen. Des Weiteren lassen sich die Euler'sche Gerade und der Feuerbach'sche Kreis mithilfe des Monge Punkts auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinern. Umgekehrt führt die Verallgemeinerung der Eigenschaft, dass die Verbindungsstrecke des Höhenschnittpunkts mit den Eckpunkten eines Dreiecks vom Feuerbach'schen Kreis im gleichen Verhältnis geteilt wird, ebenfalls zur Definition des Monge Punkts. Der Monge Punkt ist im höherdimensionalen Raum also der einzige Punkt, der diese Eigenschaft des Höhenschnittpunkts eines Dreiecks erfüllt.

Einen weiteren sehr interessanten Fall bilden die Ankreismittelpunkte im höherdimensionalen Raum. Im Gegensatz zu den Inkreismittelpunkten, die sich sehr direkt verallgemeinern lassen, kommt es bei der Verallgemeinerung der Ankreismittelpunkte zu erstaunlichen Modifikationen. So existieren beispielsweise für ein Tetraeder zwischen vier und sieben Ankugeln, die in zwei Arten unterteilt werden können. Die erste Art berührt alle Trägerebenen und jeweils eine dreieckige Seite des Tetraeders. Diese Art der Ankugeln existieren für jedes Tetraeder. Die zweite Art berührt ebenso alle Trägerebenen, jedoch nicht das Tetraeder. Diese Ankugeln liegen jeweils in einem, von den Trägerebenen aufgespannten Teilraum, der eine Kante, eines gegenüberliegenden Kantenpaares enthält. Für höherdimensionale Simplexe können die Ansphären in noch mehr verschiedene Arten kategorisiert werden. Ob diese Ansphären existieren und in welchem der Teilräume sie liegen, ist abhängig von der Summe der, an den Teilraum angrenzenden $(n - 1)$ -dimensionalen Seitenflächen und der Summe der, an den gegenüberliegenden Teilraum angrenzenden $(n - 1)$ -dimensionalen Seitenflächen. Sind diese Summen genau gleich groß, so existiert in keinem der beiden Teilräume eine Ansphäre, bei Ungleichheit liegt die Ansphäre in dem Teilraum, an den die größere Summe an Seitenflächen grenzt. Die Anzahl der existierenden Ansphären kann dabei eingeschränkt werden. Diese Einschränkungen sowie die Einteilung in die verschiedenen Arten sind ebenfalls in der Arbeit enthalten. Interessanterweise tritt ab dem fünfdimensionalen Raum bei ungeraden Dimensionen in der Menge der möglichen Ansphären eine Lücke auf. Über die Existenz solcher Lücken in geraden Dimensionen konnten keine Informationen gefunden werden.

In dieser Arbeit wird die Verallgemeinerung einiger der bekanntesten ausgezeichneten Punkte des Dreiecks behandelt. Weitere ausgezeichnete Punkte wie beispielsweise der Gergonne Punkt, der Nagel Punkt und der Fermat-Torricelli Punkt lassen sich auch auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinern [3, S. 174]. Aufgrund des bereits erreichten Umfangs der Arbeit wurden diese Punkte nicht mehr behandelt. Im Allgemeinen gibt es viele Punkte, die noch nicht auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinert wurden [3, S. 174].

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die verwendeten Notationen und Begrifflichkeiten der Arbeit definiert sowie elementare Aussagen für Dreiecke, Tetraeder und n -Simplexe behandelt, die in mehreren Kapiteln der Masterarbeit benötigt werden.

2.1 Notation für Dreiecke

In diesem Abschnitt wird die in der Arbeit verwendete Notation für Dreiecke definiert. Die Notation der Tetraeder aus [11] wurde für Dreiecke übernommen. Für die Definition der Dreiecke wurde sich an der Definition für Simplexe aus [16] orientiert.

Definition 2.1.1 (Dreieck [16]). Ein Dreieck ist die konvexe Hülle aus 3 Punkten in einem 2 oder höherdimensionalen euklidischen Raum, die nicht auf einer Geraden liegen. Die drei Punkte werden als die Ecken des Dreiecks bezeichnet. Die Verbindungsstrecken der Punkte entsprechen den Seiten des Dreiecks.

Die Position der Eckpunkte wird durch Vektoren eines euklidischen Vektorraums \mathbb{E} mit innerem Produkt beschrieben. Sei O der Ursprung des Vektorraums, so ist jeder Eckpunkt A_i durch seinen Richtungsvektor

$$a_i := \overrightarrow{OA_i} \quad (2.1)$$

gegeben.

Seien A_0, A_1 und A_2 die Eckpunkte eines Dreiecks Δ im 2-dimensionalen euklidischen Raum, mit den Ortsvektoren a_0, a_1 und a_2 , so lässt sich ein Dreieck durch die Menge aller Konvexkombinationen der 3 Eckpunkte darstellen:

$$a = t_0 a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 \quad \text{mit } t_0, t_1, t_2 \geq 0, \quad t_0 + t_1 + t_2 = 1. \quad (2.2)$$

Um die Formulierung verallgemeinerter Gleichungen zu vereinfachen, wird in dieser Arbeit folgende Konvention verwendet: Seien i, j, k die Indizes der drei Eckpunkte eines Dreiecks, so erfüllen sie folgende Bedingung

$$\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}.$$

Wenn k also der Index des "obersten" Eckpunkts ist, sind i, j die Indizes der Eckpunkte der Basis.

Die Vektoren der Seiten des Dreiecks seien durch folgende Vektoren gegeben:

$$b_{ij} := a_i - a_j. \quad (2.3)$$

Diese Vektoren erfüllen die folgenden Bedingungen:

$$b_{ij} + b_{ji} = 0 \quad (2.4)$$

$$b_{ij} + b_{jk} + b_{ki} = 0 \quad (2.5)$$

$$b_{ij}, b_{ik} \text{ sind linear unabhängig.} \quad (2.6)$$

Die lineare Unabhängigkeit folgt aus der Voraussetzung, dass die Eckpunkte des Dreiecks Δ nicht auf einer Geraden liegen.

Aus (2.6) und (2.3) folgt mithilfe der Rechnung:

$$b_{ik} - b_{ij} = a_i - a_k - (a_i - a_j) = a_i - a_k - a_i + a_j = a_j - a_k = b_{jk},$$

$$b_{ij}, b_{jk} \text{ sind linear unabhängig.} \quad (2.7)$$

2.2 Notation für Tetraeder

In diesem Abschnitt wird die in der Arbeit verwendete Notation für Tetraeder definiert. Die Notation wurde aus [11] übernommen. Für die Definition der Tetraeder wurde die Definition für Simplexe aus [16] für den 3-dimensionalen Fall formuliert.

Definition 2.2.1 (Tetraeder [16]). Ein Tetraeder ist die konvexe Hülle aus 4 Punkten in einem 3 oder höherdimensionalen euklidischen Raum, die nicht in einer Ebene liegen. Die vier Punkte werden als die Ecken des Tetraeders bezeichnet. Die Verbindungsstrecken der Punkte entsprechen den Kanten des Tetraeders. Die von jeweils drei der vier Punkte aufgespannten Dreiecke, werden als die Seiten des Tetraeders bezeichnet.

Für Tetraeder wird die in Abschnitt 2.1 für Vektoren beschriebene Notation verwendet.

Seien A_0, A_1, A_2 und A_3 die Eckpunkte eines Tetraeders T im 3-dimensionalen euklidischen Raum, mit den Ortsvektoren a_0, a_1, a_2 und a_3 , so lässt sich ein Tetraeder durch die Menge aller Konvexkombinationen der 4 Eckpunkte darstellen:

$$a = t_0 a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 \quad \text{mit } t_0, t_1, t_2, t_3 \geq 0, \quad t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = 1. \quad (2.8)$$

Um die Formulierung verallgemeinerter Gleichungen zu vereinfachen, wird in dieser Arbeit folgende Konvention verwendet: Seien i, j, k, l die Indizes der vier Eckpunkte eines Tetraeders, so erfüllen sie folgende Bedingung

$$\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Wenn l also der Index des "obersten" Eckpunkts ist, sind i, j und k die Indizes der Eckpunkte der Basis.

Im 3-dimensionalen Raum erfüllen die Vektoren analog zum 2-dimensionalen Fall für $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$b_{ij} + b_{ji} = 0 \quad (2.9)$$

$$b_{ij} + b_{jk} + b_{ki} = 0 \quad (2.10)$$

$$b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li} = 0 \quad (2.11)$$

$$b_{ij}, b_{ik}, b_{il} \text{ sind linear unabhängig.} \quad (2.12)$$

Die lineare Unabhängigkeit folgt aus der Voraussetzung, dass die Eckpunkte des Tetraeder T nicht in einer Ebene liegen.

Aus (2.12) und (2.3) folgt mithilfe der Rechnungen:

$$b_{ik} - b_{ij} = a_i - a_k - (a_i - a_j) = a_i - a_k - a_i + a_j = a_j - a_k = b_{jk}$$

$$b_{il} - b_{ik} = a_i - a_l - (a_i - a_k) = a_i - a_l - a_i + a_k = a_k - a_l = b_{kl},$$

$$b_{ij}, b_{jk}, b_{kl} \text{ sind linear unabhängig.} \quad (2.13)$$

Aus Definition (2.3) folgt nach einer etwas längeren direkten Rechnung:

$$b_{ij} \cdot b_{kl} + b_{ik} \cdot b_{lj} + b_{il} \cdot b_{jk} = 0, \quad (2.14)$$

wobei \cdot das Skalarprodukt bezeichnet.

2.3 Notation für n -Simplexe

In diesem Abschnitt wird die Begrifflichkeit des n -Simplex, sowie die verwendete Notation für n -Simplexe beschrieben. Die Notation der Tetraeder aus [11] wurde für Simplexe übernommen. Für die Definition der Simplexe wurde sich an der Definition aus [16] orientiert. Die Informationen zu den p -dimensionalen Seiten wurden in [14, S. 371f] behandelt.

Ein n -dimensionales Simplex, kurz n -Simplex, ist ein n -dimensionales Analogon zu einem Dreieck, mit folgender Definition:

Definition 2.3.1 (n -Simplex [16]). Ein n -Simplex ist die konvexe Hülle aus $(n + 1)$ Punkten in einem n - oder höherdimensionalen euklidischen Raum, die nicht in einer $(n - 1)$ -dimensionalen Ebene liegen. Die $(n + 1)$ Punkte werden als die Ecken des n -Simplex bezeichnet. Die Verbindungsstrecken der Punkte entsprechen den Kanten des n -Simplex. Die von jeweils $(p + 1)$ der $(n + 1)$ Punkte aufgespannten konvexen Hüllen, werden als die p -dimensionalen Seiten des n -Simplex bezeichnet.

So sind beispielsweise die Eckpunkte des n -Simplex die 0-dimensionalen Seiten des Simplex. Die Kanten entsprechen den 1-dimensionalen Seiten, die Seitenflächen den 2-dimensionalen Seiten, die Tetraeder den 3-dimensionalen Seiten usw.

Ein beliebiges System von $p + 1$ Ecken eines n -dimensionalen Simplex legt also eindeutig eine p -dimensionale Seite fest. Die Anzahl der p -dimensionalen Seiten eines n -Simplex entspricht der Anzahl der möglichen Kombinationen von $n + 1$ Elementen zur $(p + 1)$ -ten Klasse:

$$N_p^n = \binom{n + 1}{p + 1}.$$

Ein 4-dimensionales Simplex (Pentachron) hat somit $N_3^4 = 5$ dreidimensionale Seiten (Tetraeder), $N_2^4 = 10$ zweidimensionale Seiten (Seitenflächen), $N_1^4 = 10$ eindimensionale Seiten (Kanten) und $N_0^4 = 5$ nulldimensionale Seiten (Ecken).

Für n -Simplexe wird die in Abschnitt 2.1 für Vektoren beschriebene Notation verwendet.

Um die Formulierung verallgemeinerter Gleichungen zu vereinfachen, wird in dieser Arbeit folgende Konvention verwendet: Seien i_0, i_1, \dots, i_n die Indizes der $(n + 1)$ Eckpunkte eines n -Simplex, so erfüllen sie folgende Bedingung

$$\{i_0, i_1, \dots, i_n\} = \{0, 1, \dots, n\}.$$

Die Seite $A_{i_{p+1}}, \dots, A_{i_n}$ nennt man die, der Seite $A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$ gegenüberliegende Seite.

Seien A_0, A_1, \dots, A_n die Eckpunkte eines n -Simplex im n -dimensionalen euklidischen Raum, mit den Ortsvektoren a_0, a_1, \dots, a_n , so lässt sich ein n -Simplex durch die Menge aller Konvexkombinationen der $(n + 1)$ Eckpunkte darstellen:

$$a = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n \quad \text{mit } t_0, t_1, \dots, t_n \geq 0, \quad t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1. \quad (2.15)$$

2.3 Notation für n -Simplexe

Im n -dimensionalen Raum erfüllen die Vektoren analog zum 2- und 3-dimensionalen Fall für $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $\{i_0, i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$:

$$b_{i_0 i_1} + b_{i_1 i_2} + b_{i_2 i_3} + \dots + b_{i_p i_0} = 0 \quad (2.16)$$

und

$$b_{i_0 i_1}, b_{i_0 i_2}, \dots, b_{i_0 i_n} \text{ sind linear unabhängig.} \quad (2.17)$$

Die lineare Unabhängigkeit folgt aus der Voraussetzung, dass die Eckpunkte des n -Simplex nicht in einer $(n-1)$ -dimensionalen Ebene liegen.

Aus (2.17) und (2.3) folgt mithilfe der Rechnungen:

$$\begin{aligned} b_{i_0 i_2} - b_{i_0 i_1} &= a_{i_0} - a_{i_2} - (a_{i_0} - a_{i_1}) = a_{i_0} - a_{i_2} - a_{i_0} + a_{i_1} = a_{i_1} - a_{i_2} = b_{i_1 i_2} \\ b_{i_0 i_3} - b_{i_0 i_2} &= a_{i_0} - a_{i_3} - (a_{i_0} - a_{i_2}) = a_{i_0} - a_{i_3} - a_{i_0} + a_{i_2} = a_{i_2} - a_{i_3} = b_{i_2 i_3} \\ &\vdots \\ b_{i_0 i_n} - b_{i_0 i_{(n-1)}} &= a_{i_0} - a_{i_n} - (a_{i_0} - a_{i_{(n-1)}}) = a_{i_0} - a_{i_n} - a_{i_0} + a_{i_{(n-1)}} \\ &= a_{i_{(n-1)}} - a_{i_n} = b_{i_{(n-1)} i_n}, \end{aligned}$$

$$b_{i_0 i_1}, b_{i_1 i_2}, \dots, b_{i_{(n-1)} i_n} \text{ sind linear unabhängig.} \quad (2.18)$$

3 Der Schwerpunkt

In diesem Kapitel wird der Schwerpunkt eines Dreiecks auf den 3- und n -dimensionalen Raum verallgemeinert. Da sich der Schwerpunkt sehr leicht auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinern lässt, wurde er als Inhalt des ersten Kapitels der Arbeit gewählt.

3.1 Der Schwerpunkt

In diesem Abschnitt wird die Existenz des Schwerpunkts eines Dreiecks ausgearbeitet. Der Beweis wird dabei ähnlich zu [14, S. 373] durchgeführt. Rein geometrische Beweise sind in [1, S. 21] und [9, S. 53] zu finden.

Definition 3.1.1 (Schwerlinie eines Dreiecks). Die Strecke, die den Seitenmittelpunkt mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbindet, wird Schwerlinie eines Dreiecks genannt.

Satz 3.1.2 (Existenz des Schwerpunkts eines Dreiecks). Die drei Schwerlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S im Inneren des Dreiecks. Dieser Punkt teilt jede Schwerlinie, von den Eckpunkten aus betrachtet, im Verhältnis $2 : 1$.

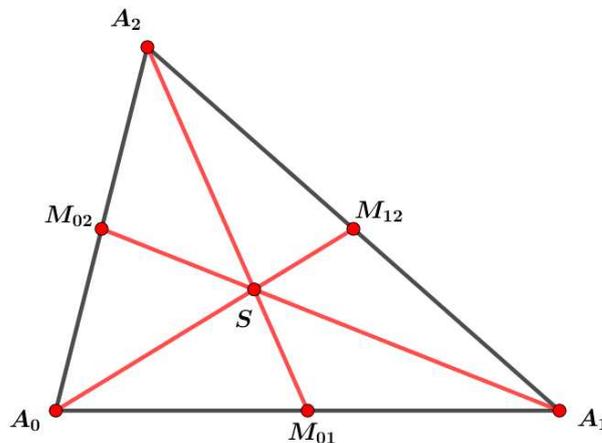


Abbildung 3.1: Skizze zum Beweis der Existenz des Schwerpunkts.

Beweis. Sei $\triangle A_0A_1A_2$ ein Dreieck mit den Eckpunkten A_0 , A_1 und A_2 . Betrachtet man eine beliebige Seite A_jA_k von $\triangle A_0A_1A_2$, so ist A_i der der Seite gegenüberliegende Eckpunkt. Sei M_{jk} der Mittelpunkt der Seite A_jA_k , so gilt für seinen Ortsvektor m_{jk} :

$$m_{jk} = \frac{1}{2}(a_j + a_k).$$

Die Ortsvektoren x_i der Punkte auf der Verbindungsgeraden A_iM_{jk} sind demnach durch

$$\begin{aligned} x_i &= a_i + (m_{jk} - a_i) \cdot t \\ &= a_i + \left[\frac{1}{2}(a_j + a_k) - a_i \right] \cdot t \\ &= (1 - t)a_i + \frac{t}{2}(a_j + a_k). \end{aligned} \tag{3.1}$$

gegeben. Für den Parameterwert $t = \frac{2}{3}$ erhält man, unabhängig von der Wahl der Kante, den Ortsvektor

$$s = \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2). \quad (3.2)$$

Der Punkt S mit dem Ortsvektor s liegt also auf allen drei durch (3.1) gegebenen Schwerlinien. Diese sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Da die Punkte A_i und M_{jk} den Parameterwerten $t = 0$ und $t = 1$ entsprechen, ist ebenso das Teilungsverhältnis der Strecke A_iM_{jk} durch den Punkt S des Dreiecks gezeigt. Der Punkt S des Dreiecks liegt also im Schnittpunkt aller Schwerlinien des Dreiecks und teilt jede Schwerlinie, von den Eckpunkten aus betrachtet, im Verhältnis $2 : 1$. \square

Definition 3.1.3 (Schwerpunkt eines Dreiecks). Der Schnittpunkt aller drei Schwerlinien eines Dreiecks wird als Schwerpunkt S des Dreiecks bezeichnet. Die Koordinaten dieses Punktes sind durch

$$s = \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k) \quad (3.3)$$

gegeben.

3.2 Der Schwerpunkt eines Tetraeders

In diesem Abschnitt wurde die Quelle [14, S. 373] herangezogen, um den Schwerpunkt eines Dreiecks auf den 3-dimensionalen Raum zu verallgemeinern.

Definition 3.2.1 (Schwerlinie eines Tetraeders). Die Strecke zwischen dem Schwerpunkt einer Seitenfläche und dem gegenüberliegenden Eckpunkt, sowie die Strecke zwischen den Schwerpunkten zweier gegenüberliegender Kanten wird Schwerlinie eines Tetraeders genannt.

Satz 3.2.2 (Existenz des Schwerpunkts eines Tetraeders). *Die sieben Schwerlinien eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkt S im Inneren des Tetraeders. Dieser Punkt teilt jede Schwerlinie zwischen einer Seitenfläche und dem gegenüberliegenden Eckpunkt von den Eckpunkten aus betrachtet, im Verhältnis $3 : 1$ und jede Schwerlinie zwischen den Schwerpunkten gegenüberliegender Kanten im Verhältnis $1 : 1$.*

Beweis. Sei T ein Tetraeder mit den Eckpunkten A_0, A_1, A_2 und A_3 . Betrachtet man eine beliebige Seitenfläche $\triangle A_j A_k A_l$, so ist A_i der der Seitenfläche gegenüberliegende Eckpunkt. Sei S'_i der Schwerpunkt der Seitenfläche $\triangle A_j A_k A_l$, so gilt laut (3.3) für seinen Ortsvektor s'_i :

$$s'_i = \frac{1}{3}(a_j + a_k + a_l).$$

Die Ortsvektoren x_i der Punkte auf der Verbindungsgeraden $A_i S'_i$ sind demnach durch

$$\begin{aligned} x_i &= a_i + (s'_i - a_i) \cdot t \\ &= a_i + \left[\frac{1}{3}(a_j + a_k + a_l) - a_i \right] \cdot t \\ &= (1 - t)a_i + \frac{t}{3}(a_j + a_k + a_l) \end{aligned} \quad (3.4)$$

gegeben. Für den Parameterwert $t = \frac{3}{4}$ erhält man, unabhängig von der Wahl der Seitenfläche, den Ortsvektor

$$s = \frac{1}{4}(a_0 + a_1 + a_2 + a_3).$$

Der Punkt S mit dem Ortsvektor s liegt also auf allen vier durch (3.4) gegebenen Schwerlinien. Diese sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Da die Punkte A_i, S und S'_i den Parameterwerten $t = 0, \frac{3}{4}$ und 1 entsprechen, ist ebenso das Teilungsverhältnis der Strecke $A_i S'_i$ durch den Punkt S des Tetraeders gezeigt.

Betrachtet man eine beliebige Kante $A_i A_j$ des Tetraeders, so ist $A_k A_l$ die gegenüberliegende Kante. Die Schwerpunkte der Kanten entsprechen ihren Seitenmittelpunkten und können demnach mit den Koordinaten

$$m_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$$

und

$$m_{kl} = \frac{1}{2}(a_k + a_l)$$

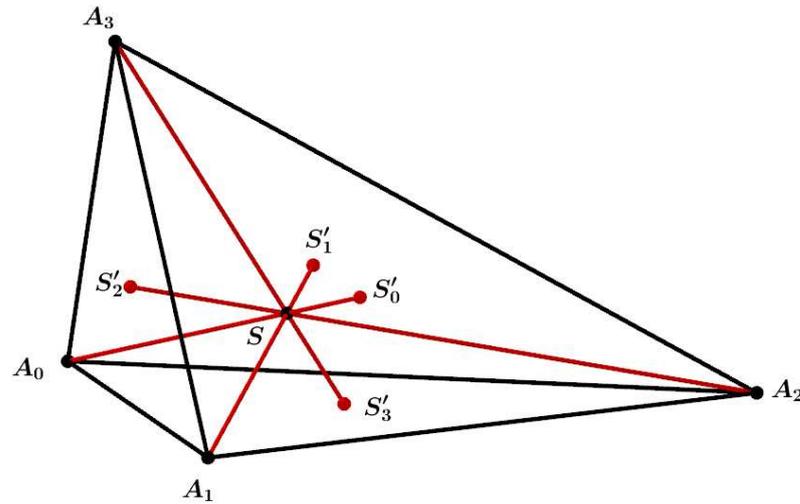


Abbildung 3.2: Schwerpunkt eines Tetraeders durch Schneiden der Schwerlinien, die den Schwerpunkt einer Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt enthalten.

ausgedrückt werden. Die Ortsvektoren x_{ij} der Punkte auf der Verbindungsgeraden der beiden Kantenschwerpunkte sind demnach durch

$$\begin{aligned} x_{ij} &= m_{ij} + (m_{kl} - m_{ij}) \cdot t \\ &= (1 - t)m_{ij} + tm_{kl} \\ &= (1 - t)\frac{a_i + a_j}{2} + t\frac{a_k + a_l}{2} \end{aligned}$$

gegeben. Für den Parameterwert $t = 0$ erhält man den Punkt M_{ij} , für $t = 1$ den Punkt M_{kl} und für $t = \frac{1}{2}$ den Punkt S . Der Punkt S teilt die Schwerlinie zwischen den Schwerpunkten gegenüberliegender Kanten demnach im Verhältnis 1 : 1.

Der Punkt S des Tetraeders liegt also im Schnittpunkt aller Schwerlinien des Tetraeders und teilt jede Schwerlinie zwischen einer Seitenfläche und dem gegenüberliegenden Eckpunkt von den Eckpunkten aus betrachtet, im Verhältnis 3 : 1 und jede Schwerlinie zwischen den Schwerpunkten gegenüberliegender Kanten im Verhältnis 1 : 1, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Definition 3.2.3 (Schwerpunkt eines Tetraeders). Der Schnittpunkt aller sieben Schwerlinien eines Tetraeders wird als Schwerpunkt S des Tetraeders bezeichnet. Die Koordinaten dieses Punktes sind durch

$$s = \frac{1}{4}(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \quad (3.5)$$

gegeben.

3 Der Schwerpunkt

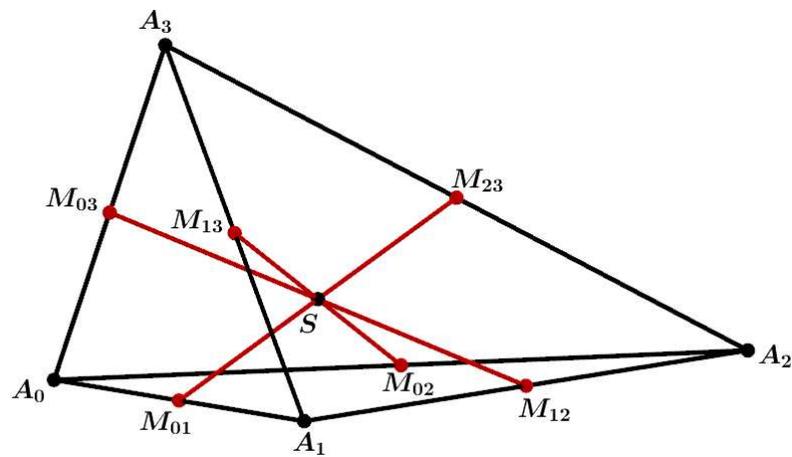


Abbildung 3.3: Schwerpunkt eines Tetraeders durch Schneiden der Schwerlinien, die den Kantenmittelpunkt zweier gegenüberliegender Kanten enthält.

3.3 Der Schwerpunkt eines n -Simplex

In diesem Abschnitt wird der Schwerpunkt mithilfe von [14, S. 373] auf den n -dimensionalen Raum verallgemeinert.

Durch die bereits bekannten Formeln (3.3) und (3.5) aus dem 1-, 2- und 3-dimensionalen Raum können die Koordinaten des Schwerpunkts einer p -dimensionalen Seite in naheliegender Weise auf den n -dimensionalen Raum verallgemeinert werden.

Definition 3.3.1 (p -Schwerpunkt). Der Punkt mit Koordinaten

$$s = \frac{1}{p+1}(a_{i_0} + a_{i_1} + \cdots + a_{i_p}) \quad (3.6)$$

wird als p -Schwerpunkt S_p einer p -dimensionalen Seite bezeichnet.

Für $p = 0, 1, 2$ stimmen die Koordinaten des p -Schwerpunkts mit den bereits bekannten Werten überein und können deshalb als Verallgemeinerung angesehen werden.

Definition 3.3.2 (p -Schwerlinie eines n -Simplex). Die Strecke zwischen einem p -Schwerpunkt und seinem gegenüberliegendem $(n-p-1)$ -Schwerpunkt wird p -Schwerlinie des n -Simplex genannt, wobei p die Werte $0, 1, \dots, n-1$ annehmen kann.

Satz 3.3.3 (Existenz des Schwerpunkts eines n -Simplex). *Alle Schwerlinien eines n -Simplex schneiden sich in einem Punkt S im Inneren des Simplex. Dieser Punkt teilt jede p -Schwerlinie im Verhältnis $(p+1) : (n-p)$.*

Beweis. Seien A_0, A_1, \dots, A_n die Eckpunkte eines n -Simplex. Betrachtet man o.B.d.A. die p -dimensionale Seite des Simplex die von den Punkten A_0, A_1, \dots, A_p aufgespannt wird. Die verbleibenden $n-p$ Eckpunkte A_{p+1}, \dots, A_n bilden eine $(n-p-1)$ -dimensionale Seite des Simplex. Sei S_p der p -Schwerpunkt der p -dimensionalen Seite und S_{n-p-1} der $(n-p-1)$ -Schwerpunkt der gegenüberliegenden $(n-p-1)$ -dimensionalen Seite, so gilt laut (3.6) für deren Ortsvektoren s_p und s_{n-p-1} :

$$s_p = \frac{1}{p+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_p)$$

$$s_{n-p-1} = \frac{1}{n-p}(a_{p+1} + \cdots + a_n).$$

Die Ortsvektoren der Punkte auf der Verbindungsgeraden $S_p S_{n-p-1}$ sind demnach durch

$$\begin{aligned} x &= s_p + (s_{n-p-1} - s_p) \cdot t \\ &= s_p + \left[\frac{1}{n-p}(a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_n) - s_p \right] \cdot t \\ &= (1-t)s_p + \frac{t}{n-p}(a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_n) \\ &= (1-t)\frac{1}{p+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + \frac{t}{n-p}(a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_n) \end{aligned} \quad (3.7)$$

3 Der Schwerpunkt

gegeben. Für den Parameter $t = \frac{n-p}{n+1}$ erhält man, unabhängig von der Wahl der p -dimensionalen Seite, den Ortsvektor

$$s = \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n).$$

Der Punkt S mit dem Ortsvektor s liegt also auf allen, durch (3.7) gegebenen p -Schwerlinien des n -Simplex. Da die Punkte S_p, S und S_{n-p-1} den Parameterwerten $t = 0, \frac{n-p}{n+1}$ und 1 entsprechen, ist ebenso das Teilungsverhältnis der Strecke $S_p S_{n-p-1}$ durch den Punkt S des n -Simplex gezeigt. Der Punkt S des n -Simplex liegt also im Schnittpunkt aller Schwerlinien des Simplex und teilt jede p -Schwerlinie im Verhältnis $(p+1) : (n-p)$, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Definition 3.3.4 (Schwerpunkt eines n -Simplex). Der Schnittpunkt aller Schwerlinien eines n -Simplex wird als Schwerpunkt S des Simplex bezeichnet. Die Koordinaten dieses Punktes sind durch

$$s = \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \tag{3.8}$$

gegeben. Der Schwerpunkt S eines n -Simplex entspricht somit dem, durch Definition 3.3.1 definierten, n -Schwerpunkt S_n .

4 Der Umkreismittelpunkt

In diesem Kapitel wird der Umkreis eines Dreiecks und sein Umkreismittelpunkt auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinert. Der Umsphärenmittelpunkt liegt demnach im Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten, also aller Ebenen, die normal auf eine Kante stehen und den Mittelpunkt der Kante enthalten. Dieser Schnittpunkt ist äquidistant zu allen Eckpunkten und somit der Mittelpunkt einer Sphäre, die alle Eckpunkte eines Simplex enthält.

4.1 Der Umkreismittelpunkt

In diesem Abschnitt wird der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks im 2-dimensionalen Raum behandelt. Ideen zum Aufbau des geometrischen Beweises wurden in [1, S. 23] und [5, S. 296] gefunden.

Definition 4.1.1 (Streckensymmetrale). Die Streckensymmetrale einer Strecke ist jene Gerade, die normal auf die Strecke steht und durch ihren Mittelpunkt verläuft.

Mittels Koordinaten kann der Ortsvektor des Mittelpunkts M_{ij} der Strecke A_iA_j wie folgt ausgedrückt werden:

$$m_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j). \quad (4.1)$$

Die Streckensymmetrale der Strecke A_iA_j ist also jene Gerade, deren Punkte für $i, j = 0, 1, 2$ mit $i \neq j$ die Gleichung

$$b_{ij} \cdot (m_{ij} - x) = 0 \quad (4.2)$$

erfüllt.

Lemma 4.1.2. *Jeder Punkt auf der Streckensymmetrale einer Strecke hat denselben Abstand zu den Endpunkten der Strecke.*

Umgekehrt liegt jeder Punkt mit selbem Abstand zu den Endpunkten einer Strecke auf ihrer Streckensymmetrale.

Beweis (algebraisch). Man betrachte eine Strecke A_iA_j . Sei P ein Punkt aus der Ebene. Es ist zu zeigen, dass für den Punkt P $d(A_i, P) = |a_i - p| = |a_j - p| = d(A_j, P)$ genau dann gilt, wenn P auf der Streckensymmetrale von A_iA_j liegt. Dies kann durch die folgenden Äquivalenzumformungen gezeigt werden:

$$\begin{aligned} d(A_i, P) &= d(A_j, P) && \iff \\ |a_i - p| &= |a_j - p| && \iff \\ |a_i - p|^2 &= |a_j - p|^2 && \iff \\ a_i^2 - 2a_i p + p^2 &= a_j^2 - 2a_j p + p^2 && \iff \\ a_i^2 - 2a_i p &= a_j^2 - 2a_j p && \iff \\ \frac{a_i^2}{2} - a_i p &= \frac{a_j^2}{2} - a_j p && \iff \\ \frac{a_i^2}{2} - a_i p - \frac{a_j^2}{2} + a_j p &= 0 && \iff \\ \frac{a_i^2}{2} + \frac{a_i a_j}{2} - a_i p - \frac{a_i a_j}{2} - \frac{a_j^2}{2} + a_j p &= 0 && \iff \\ (a_i - a_j) \cdot \left(\frac{a_i + a_j}{2} - p \right) &= 0 && \iff \\ b_{ij} \cdot (m_{ij} - p) &= 0. \end{aligned}$$

4.1 Der Umkreismittelpunkt

Der Punkt P ist also von den Punkten A_i und A_j genau dann gleich weit entfernt, wenn die Gleichung (4.2) gilt und der Punkt P somit auf der Streckensymmetrale von A_iA_j liegt. \square

Dieses Lemma kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Man betrachte eine Strecke A_iA_j . Sei M der Mittelpunkt der Strecke A_iA_j und P ein Punkt auf der Streckensymmetrale der Strecken A_iA_j , wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Da die Dreiecke $\triangle A_iMP$ und $\triangle A_jMP$ rechtwinklige Dreiecke mit zwei gleichlangen Seiten (MP und $A_iM = MA_j$) sind, folgt aus dem SWS-Satz

$$|A_iP| = |A_jP|.$$

Jeder Punkt auf der Streckensymmetrale ist also gleich weit von den beiden Endpunkten der Strecke entfernt.

Um die Umkehrung zu zeigen sei nun P ein Punkt mit

$$|A_iP| = |A_jP|.$$

Die Punkte A_i , P und A_j bilden somit ein gleichschenkliges Dreieck. Konstruiert man die Höhe auf A_iA_j durch P mit Fußpunkt F , so entstehen die Dreiecke $\triangle A_iFP$ und $\triangle A_jFP$. Die Kongruenz der beiden Dreiecke folgt aus dem SWW-Satz, da die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks kongruent sind, sowie der rechte Winkel und die Seitenlänge der Höhe übereinstimmen. Der Fußpunkt F entspricht also dem Mittelpunkt M der Strecke A_iA_j . Jeder Punkt mit selbem Abstand zu den Endpunkten einer Strecke liegt also auf ihrer Streckensymmetrale. \square

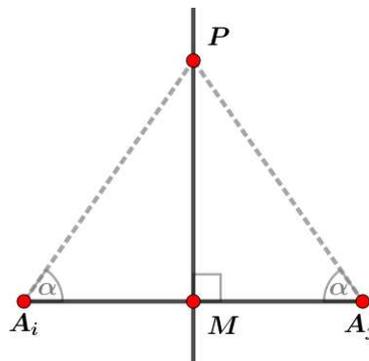


Abbildung 4.1: Skizze zur Streckensymmetrale.

Satz 4.1.3 (Existenz des Umkreismittelpunkts [5, S. 296]). *Die drei Streckensymmetralen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt U . Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des einzigen Kreises, der alle drei Eckpunkte des Dreiecks beinhaltet.*

4 Der Umkreismittelpunkt

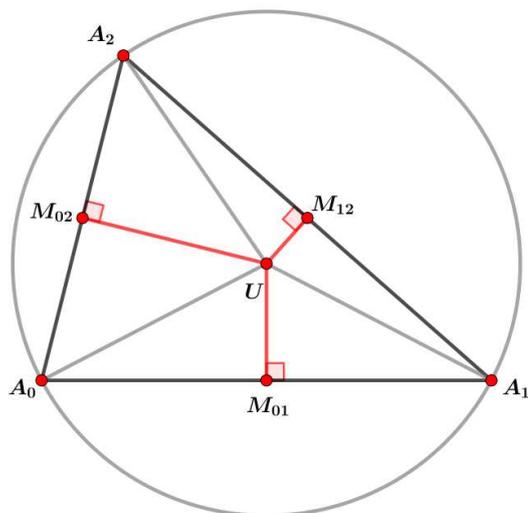


Abbildung 4.2: Skizze zum Beweis der Existenz des Umkreismittelpunkts.

Beweis (algebraisch). Seien A_0, A_1, A_2 die Eckpunkte eines Dreiecks $\triangle A_0A_1A_2$. Die drei Streckensymmetralen der Seiten des Dreiecks sind nach (4.2) durch:

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (m_{ij} - x) &= 0 \\ b_{jk} \cdot (m_{jk} - x) &= 0 \\ b_{ki} \cdot (m_{ki} - x) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

gegeben. Aus (2.4) und (2.7) folgt, dass diese Gleichungen paarweise linear unabhängig sind. Durch Addieren der Gleichungen erhält man mit (2.5):

$$\begin{aligned} &b_{ij} \cdot (m_{ij} - x) + b_{jk} \cdot (m_{jk} - x) + b_{ki} \cdot (m_{ki} - x) \\ &= b_{ij} \cdot m_{ij} + b_{jk} \cdot m_{jk} + b_{ki} \cdot m_{ki} - x(b_{ij} + b_{jk} + b_{ki}) \\ &= (a_i - a_j) \cdot \frac{1}{2}(a_i + a_j) + (a_j - a_k) \cdot \frac{1}{2}(a_j + a_k) + (a_k - a_i) \cdot \frac{1}{2}(a_k + a_i) - 0 \\ &= \frac{1}{2}(a_i^2 - a_j^2) + \frac{1}{2}(a_j^2 - a_k^2) + \frac{1}{2}(a_k^2 - a_i^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die drei Gleichungen in (4.3) sind somit linear abhängig und besitzen eine eindeutige Lösung. Die Streckensymmetralen schneiden sich also in einem Punkt U . Nach Lemma 4.1.2 ist der Punkt U von allen Eckpunkten gleich weit entfernt. Der Kreis mit Mittelpunkt U und Radius

$$r = |A_0U| = |A_1U| = |A_2U|$$

verläuft somit durch alle Eckpunkte des Dreiecks.

Um die Eindeutigkeit des Punktes U zu zeigen sei U' ein weiterer Punkt, der gleich weit von allen drei Eckpunkten des Dreiecks entfernt ist. Es muss somit

$$|A_0U'| = |A_1U'| = |A_2U'|$$

gelten. Aus der Umkehrung in Lemma 4.1.2 folgt, dass U' auf allen Streckensymmetralen liegen muss. Die Punkte U und U' fallen also zusammen, was die Eindeutigkeitsaussage des Satzes zeigt. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Man betrachte ein Dreieck $\triangle A_iA_jA_k$. Die Streckensymmetralen der Strecken A_iA_j und A_iA_k mit den Mittelpunkten M_{ij} und M_{ik} schneiden sich in einem Punkt U . Wäre dies nicht der Fall und die Streckensymmetralen wären parallel, würde nach dem Stufenwinkelsatz folgen, dass A_0, A_1 und A_2 auf einer Geraden liegen, was einem Widerspruch zur Definition des Dreiecks entspricht. Da U auf der Streckensymmetrale von A_iA_j liegt folgt aus Lemma 4.1.2:

$$|A_iU| = |A_jU|.$$

Analog folgt

$$|A_iU| = |A_kU|.$$

Somit gilt

$$|A_iU| = |A_jU| = |A_kU|. \quad (4.4)$$

Der Punkt U hat also denselben Abstand zu A_0, A_1 und A_2 . Der Punkt U liegt nach der Umkehrung in Lemma 4.1.2 also auch auf der dritten Streckensymmetrale des Dreiecks durch den Mittelpunkt der Strecke A_jA_k . Der Kreis mit Mittelpunkt U und Radius

$$r = |A_0U| = |A_1U| = |A_2U|$$

verläuft somit durch alle Eckpunkte des Dreiecks.

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes folgt analog zum algebraischen Beweis. \square

Definition 4.1.4 (Umkreis). Der Kreis, der alle drei Eckpunkte eines Dreiecks beinhaltet, wird als Umkreis des Dreiecks bezeichnet. Sein Radius heißt Umkreisradius und sein Mittelpunkt Umkreismittelpunkt U .

Der Umkreismittelpunkt U ist also der einzige Punkt, dessen Koordinaten für alle $i, j = 0, 1, 2$ mit $i \neq j$ die Gleichung

$$b_{ij} \cdot \left(\frac{a_i + a_j}{2} - u \right) = 0 \quad (4.5)$$

erfüllt.

4.2 Der Umkugelmittelpunkt

In diesem Abschnitt wird der in 4.1 behandelte Umkreismittelpunkt auf den 3-dimensionalen Raum verallgemeinert. Dabei wurde der Aufbau des geometrischen Beweises für ein n -Simplex in [14, S. 374] auf das Tetraeder übertragen.

Definition 4.2.1 (1-Mittelsenkrechte einer Strecke). Die 1-Mittelsenkrechte einer Strecke ist jene Ebene, die normal auf die Strecke steht und durch ihren Mittelpunkt verläuft.

Für die 1-Mittelsenkrechten im 3-dimensionalen Fall gilt analog zu den Streckensymmetralen aus dem 2-dimensionalen Fall: Die 1-Mittelsenkrechte der Strecke A_iA_j ist also jene Gerade, deren Punkte für $i, j = 0, 1, 2$ mit $i \neq j$ die Gleichung

$$b_{ij} \cdot (m_{ij} - x) = 0 \quad (4.6)$$

erfüllt.

Lemma 4.2.2. *Jeder Punkt auf der 1-Mittelsenkrechten einer Strecke hat denselben Abstand zu den Endpunkten der Strecke.*

Umgekehrt liegt jeder Punkt mit selbem Abstand zu den Endpunkten einer Strecke auf ihrer 1-Mittelsenkrechten.

Dieses Lemma lässt sich analog zum 2-dimensionalen Fall in 4.1 beweisen.

Mittels Koordinaten kann die 1-Mittelsenkrechte der Strecke A_iA_j wie folgt ausgedrückt werden:

$$b_{ij} \cdot \left(\frac{a_i + a_j}{2} - x \right) = 0, \quad (4.7)$$

wobei x den Ortsvektor eines beliebigen Punktes der 1-Mittelsenkrechten bezeichnet.

Definition 4.2.3 (2-Mittelsenkrechte eines Dreiecks). Die 2-Mittelsenkrechte eines Dreiecks ist jene Gerade, die normal auf das Dreieck steht und durch dessen Umkreismittelpunkt verläuft.

Lemma 4.2.4. *Jeder Punkt auf der 2-Mittelsenkrechten eines Dreiecks hat denselben Abstand zu den Eckpunkten des Dreiecks.*

Umgekehrt liegt jeder Punkt mit selbem Abstand zu den Eckpunkten eines Dreiecks auf dessen 2-Mittelsenkrechten.

Die 2-Mittelsenkrechte eines Dreiecks stimmt mit dem Durchschnitt der drei 1-Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten überein.

Dieses Lemma lässt sich algebraisch analog zum 2-dimensionalen Fall in 4.1 beweisen.

Beweis (algebraisch). Seien A_0, A_1, A_2, A_3 die Eckpunkte eines Tetraeders. Betrachtet man o.B.d.A. die Tetraederseite $\triangle A_0A_1A_2$. Die drei 1-Mittelsenkrechten der Seiten des

Dreiecks sind nach (4.6) durch:

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (m_{ij} - x) &= 0 \\ b_{jk} \cdot (m_{jk} - x) &= 0 \\ b_{ki} \cdot (m_{ki} - x) &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

gegeben. Durch das Gleichungssystem (4.9) sind drei Ebenen gegeben, die normal auf die Trägerebene ε_l stehen und nach Abschnitt 4.1 den Punkt U_{ijk} enthalten. Aus (2.9) und (2.12) folgt, dass diese Gleichungen paarweise linear unabhängig sind. Aus (2.10) folgt direkt, dass alle drei Gleichungen linear abhängig sind. Da die drei Ebenen auf jeden Fall den Punkt U_{ijk} gemeinsam haben, schneiden sie sich in einer Geraden, die normal auf die Ebene ε_l steht und den Punkt U_{ijk} enthält. Diese Gerade entspricht nach der Definition der 2-Mittelsenkrechten des Dreiecks. Die restlichen Aussagen von Lemma 4.2.4 folgen direkt aus Lemma 4.2.2 und dessen Umkehrung. In Abbildung 4.3 ist eine 2-Mittelsenkrechte eines Dreiecks dargestellt. \square

Dieses Lemma kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Man betrachte ein Dreieck $\triangle A_i A_j A_k$. Die 1-Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten schneiden sich in der Dreiecksebene, wie in Abschnitt 4.1 gezeigt, im Umkreismittelpunkt U_{ijk} . Da die 1-Mittelsenkrechten alle normal auf die Dreiecksebene stehen und durch den Punkt U_{ijk} verlaufen, schneiden sich die 1-Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten in einer Geraden, die normal auf die Dreiecksseite steht und ihren Umkreismittelpunkt enthält. Diese Gerade entspricht nach der Definition der 2-Mittelsenkrechten des Dreiecks. Die restlichen Aussagen von Lemma 4.2.4 folgen direkt aus Lemma 4.2.2 und dessen Umkehrung. In Abbildung 4.3 ist eine 2-Mittelsenkrechte eines Dreiecks dargestellt. \square

Satz 4.2.5 (Existenz des Umkugelmittelpunkts). *Die Mittelsenkrechten eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkt U . Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der einzigen Kugel, die alle vier Eckpunkte des Tetraeders beinhaltet.*

Beweis (algebraisch). Seien A_0, A_1, A_2 und A_3 die Eckpunkte eines Tetraeders T und M_{ij} der Seitenmittelpunkt der Seite $A_i A_j$, wie in (4.1) beschrieben. Durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (m_{ij} - x) &= 0 \\ b_{jk} \cdot (m_{jk} - x) &= 0 \\ b_{kl} \cdot (m_{kl} - x) &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

sind drei 1-Mittelsenkrechten gegeben, die nicht alle zur selben Dreiecksseite des Tetraeders gehören. Aus (2.13) folgt, dass diese Gleichungen linear unabhängig sind. Das System in (4.9) ist also linear unabhängig und hat somit eine eindeutige Lösung. Die drei 1-Mittelsenkrechten schneiden sich also in einem Punkt U . Nach Lemma 4.2.2 ist der

4 Der Umkreismittelpunkt

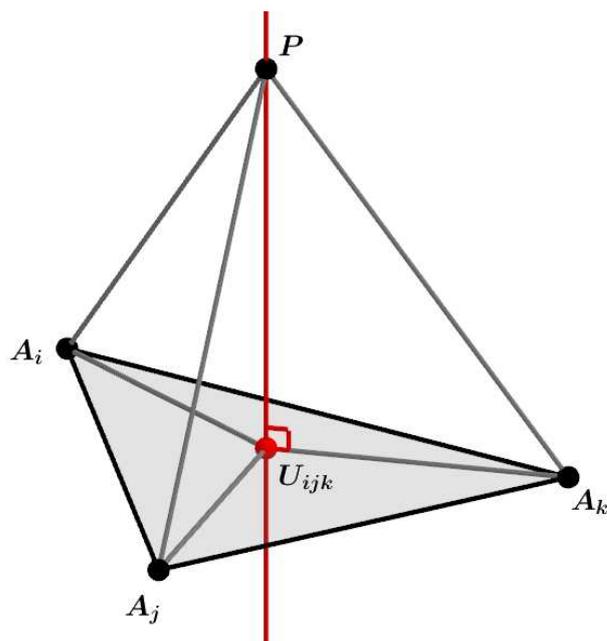


Abbildung 4.3: Skizze zur 2-Mittelsenkrechte.

Punkt U von allen Eckpunkten des Tetraeders gleich weit entfernt. Nach der Umkehrung in Lemma 4.2.2 und Lemma 4.2.4 liegt der Punkt U somit auf allen Mittelsenkrechten des Tetraeders.

Die Kugel mit Mittelpunkt U und Radius

$$r = |A_0U| = |A_1U| = |A_2U| = |A_3U|$$

verläuft somit durch alle Eckpunkte des Tetraeders.

Um die Eindeutigkeit des Punktes U zu zeigen sei U' ein weiterer Punkt, der gleich weit von allen vier Eckpunkten des Tetraeders entfernt ist. Es muss somit

$$|A_0U'| = |A_1U'| = |A_2U'| = |A_3U'|$$

gelten. Aus der Umkehrung in Lemma 4.2.2 und Lemma 4.2.4 folgt, dass U' auf allen Mittelsenkrechten liegen muss. Die Punkte U und U' fallen also zusammen, was die Eindeutigkeitsaussage des Satzes zeigt. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Die 2-Mittelsenkrechte einer Seitenfläche ist der Durchschnitt der 1-Mittelsenkrechten. Alle Punkte auf dieser Geraden sind nach Lemma 4.2.4 gleich weit von den Eckpunkten der Seitenfläche entfernt. Analog gilt dies für die Gerade der benachbarten Seitenfläche. Da sich die benachbarten Seitenflächen einen Seitenmittelpunkt

teilen, ist auch eine der beiden definierenden 1-Mittelsenkrechten ident. Beide Geraden liegen somit auf der gemeinsamen 1-Mittelsenkrechten. Da die beiden Geraden normal auf verschiedene Seitenflächen des Tetraeders stehen, können sie weder ident noch parallel sein. Als Konsequenz müssen sich die beiden Geraden in einem Punkt U schneiden. Der Punkt U liegt also auf den 2-Mittelsenkrechten zweier unterschiedlichen Seitenflächen des Tetraeders und ist nach Lemma 4.2.4 äquidistant zu allen Eckpunkten. Nach der Umkehrung in Lemma 4.2.2 und Lemma 4.2.4 liegt der Punkt U auf allen Mittelsenkrechten des Tetraeders.

Die Kugel mit Mittelpunkt U und Radius

$$r = |A_0U| = |A_1U| = |A_2U| = |A_3U|$$

verläuft somit durch alle Eckpunkte des Tetraeders.

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes folgt analog zum algebraischen Beweis. \square

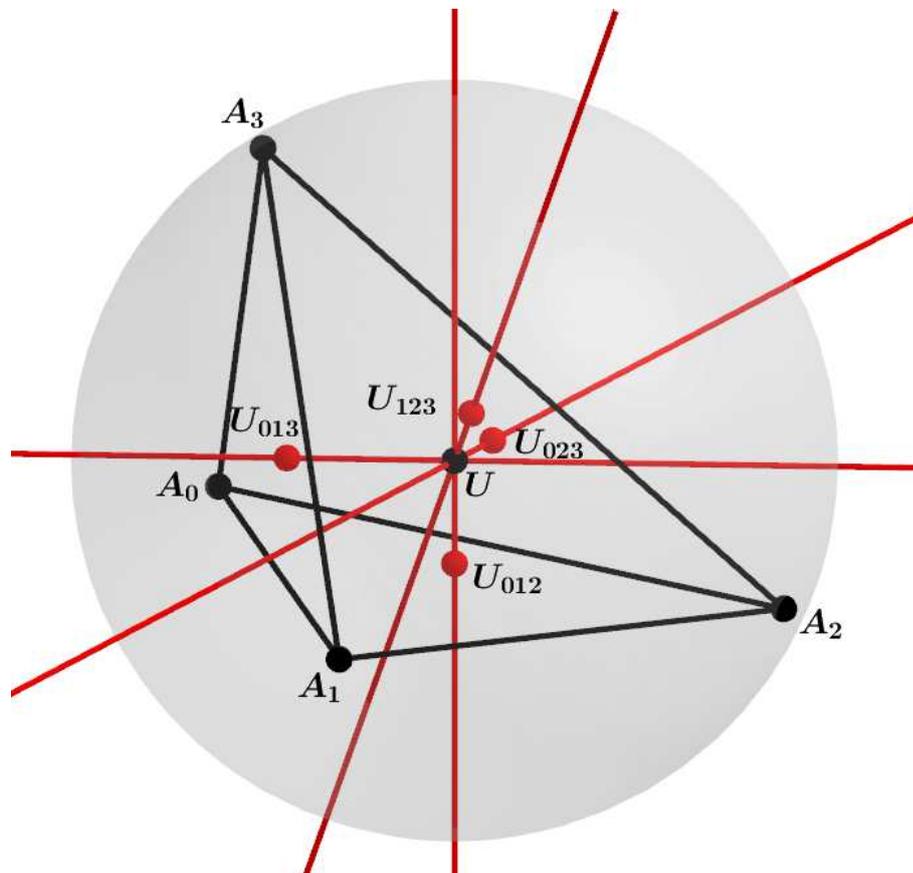


Abbildung 4.4: Skizze zum Beweis der Existenz des Umkugelmittelpunkts.

4 Der Umkreismittelpunkt

Definition 4.2.6 (Umkugel). Die Kugel, die alle vier Eckpunkte eines Tetraeders beinhaltet, wird als Umkugel des Tetraeders bezeichnet. Ihr Radius heißt Umkugelradius und ihr Mittelpunkt Umkugelmittelpunkt U .

Der Umkugelmittelpunkt U ist also der einzige Punkt, dessen Koordinaten für alle $i, j = 0, 1, 2, 3$ mit $i \neq j$ die Gleichung

$$b_{ij} \cdot \left(\frac{a_i + a_j}{2} - u \right) = 0 \quad (4.10)$$

erfüllt.

4.3 Der Umsphärenmittelpunkt

In diesem Abschnitt werden, wie schon in 4.2 erwähnt, die aus der Quelle [14, S. 374] entnommen Informationen herangezogen, um den Umkreismittelpunkt für ein n -Simplex für den n -dimensionalen Raum zu verallgemeinern. Dabei wurde das Konzept der p -Mittelsenkrechten übernommen.

Die Definitionen der Streckensymmetralen aus dem 2-dimensionalen und der 1- und 2-Mittelsenkrechten aus dem 3-dimensionalen Fall können wie folgt für den n -dimensionalen Raum verallgemeinert werden:

Definition 4.3.1 (1-Mittelsenkrechte einer Strecke). Die 1-Mittelsenkrechte einer Strecke ist jene $(n - 1)$ -dimensionale Ebene, die normal auf die Strecke steht und durch ihren Mittelpunkt verläuft.

Definition 4.3.2 (2-Mittelsenkrechte eines Dreiecks). Die 2-Mittelsenkrechte eines Dreiecks ist jene $(n - 2)$ -dimensionale Ebene, die normal auf das Dreieck steht und durch dessen Umkreismittelpunkt verläuft.

Die Aussagen der Lemma 4.2.2 und 4.2.4 aus dem 3-dimensionalen Fall, bleiben im n -dimensionalen Fall aufrecht.

Wie im 2- und 3-dimensionalen Fall, kann die Mittelsenkrechte der Strecke $A_i A_j$ mittels Koordinaten wie folgt ausgedrückt werden:

$$b_{ij} \cdot \left(\frac{a_i + a_j}{2} - x \right) = 0, \quad (4.11)$$

wobei x den Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Mittelsenkrechten bezeichnet.

Satz 4.3.3 (Existenz des Umsphärenmittelpunktes eines n -Simplex). *Alle 1- und 2-Mittelsenkrechten eines n -Simplex schneiden sich in einem Punkt U . Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der einzigen Sphäre, die alle Eckpunkte des n -Simplex beinhaltet.*

Beweis (algebraisch). Seien A_0, A_1, \dots, A_n die Eckpunkte eines n -Simplex und M_{ij} der Seitenmittelpunkt der Seite $A_i A_j$, wie in (4.1) beschrieben. Durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{01} \cdot (m_{01} - x) &= 0 \\ b_{12} \cdot (m_{12} - x) &= 0 \\ b_{23} \cdot (m_{23} - x) &= 0 \\ &\vdots \\ b_{(n-1)n} \cdot (m_{(n-1)n} - x) &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

sind n 1-Mittelsenkrechten gegeben, die nicht alle zur selben $(n - 1)$ -dimensionalen Seite des n -Simplex gehören. Aus (2.18) folgt, dass diese Gleichungen linear unabhängig sind.

4 Der Umkreismittelpunkt

Das System in (4.12) ist also linear unabhängig und hat somit eine eindeutige Lösung. Die n 1-Mittelsenkrechten schneiden sich also in einem Punkt U . Nach Lemma 4.2.2 ist der Punkt U von allen Eckpunkten des n -Simplex gleich weit entfernt. Nach der Umkehrung in Lemma 4.2.2 und Lemma 4.2.4 liegt der Punkt U somit auf allen 1- und 2-Mittelsenkrechten des n -Simplex.

Die Sphäre mit Mittelpunkt U und Radius

$$r = |A_0U| = |A_1U| = \dots = |A_nU|$$

verläuft somit durch alle Eckpunkte des n -Simplex.

Um die Eindeutigkeit des Umsphärenmittelpunkts zu zeigen sei U' ein weiterer Punkt, der gleich weit von allen $(n + 1)$ Eckpunkten des n -Simplex entfernt ist. Es muss somit

$$|A_0U'| = |A_1U'| = \dots = |A_nU'|$$

gelten. Aus der Umkehrung in Lemma 4.2.2 folgt, dass U' auf allen 1-Mittelsenkrechten liegen muss. Die Punkte U und U' fallen also zusammen, was die Eindeutigkeitsaussage des Satzes zeigt. \square

Da nun die Existenz des Umsphärenmittelpunkts eines n -Simplex bewiesen wurde folgt die Existenz der Umsphärenmittelpunkte niedrigerer Dimensionen. Es kann also eine p -Mittelsenkrechte eines p -Simplex im n -dimensionalen Raum definiert werden.

Definition 4.3.4 (p -Mittelsenkrechte). Die p -Mittelsenkrechte einer p -dimensionalen Seite ist jene $(n - p)$ -dimensionale Ebene, die normal auf die p -dimensionalen Seite steht und durch deren Umsphärenmittelpunkt verläuft, wobei p die Werte $1, 2, \dots, n$ annehmen kann.

Für $p = 1, 2$ sind die p -Mittelsenkrechten konsistent mit den Definitionen der Streckensymmetralen im 2-dimensionalen Fall bzw. den 1- und 2-Mittelsenkrechten im 3-dimensionalen Fall. Die n -Mittelsenkrechte eines n -Simplex entspricht dem Umsphärenmittelpunkt des n -Simplex.

Lemma 4.3.5. *Jeder Punkt auf der p -Mittelsenkrechten einer p -dimensionalen Seite hat denselben Abstand zu den Eckpunkten der Seite.*

Umgekehrt liegt jeder Punkt mit selbem Abstand zu den Eckpunkten einer p -dimensionalen Seite auf ihrer p -Mittelsenkrechten. Die p -Mittelsenkrechte einer p -dimensionalen Seite eines n -Simplex stimmt mit dem Durchschnitt der $\binom{p+1}{k+1}$ k -Mittelsenkrechten der p -dimensionalen Seite überein, wobei k die Werte $k = 1, 2, \dots, (p - 1)$ annehmen kann.

Dieses Lemma lässt sich analog zum 3-dimensionalen Fall in 4.2 beweisen.

Nach der Umkehrung in Lemma 4.3.5 liegt der Punkt U auf allen p -Mittelsenkrechten des n -Simplex. Dementsprechend kann der Satz der Existenz des Umsphärenmittelpunkts eines n -Simplex noch konkreter formuliert werden:

Satz 4.3.6 (Existenz des Umsphärenpunkts eines n -Simplex). *Alle Mittelsenkrechten eines n -Simplex schneiden sich in einem Punkt U . Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der einzigen Sphäre, die alle Eckpunkte des n -Simplex beinhaltet.*

Definition 4.3.7 (Umsphäre eines n -Simplex). Die Sphäre, die alle $(n + 1)$ Eckpunkte eines n -Simplex beinhaltet, wird als Umsphäre des n -Simplex bezeichnet. Ihr Radius heißt Umsphärenradius und ihr Mittelpunkt Umsphärenmittelpunkt U .

Der Umsphärenmittelpunkt U ist also der einzige Punkt, dessen Koordinaten für alle $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ mit $i \neq j$ die Gleichung

$$b_{ij} \cdot \left(\frac{a_i + a_j}{2} - u \right) = 0 \quad (4.13)$$

erfüllt.

5 Der Höhenschnittpunkt und der Monge Punkt

In diesem Kapitel wird die Verallgemeinerung des Höhenschnittpunkts eines Dreiecks auf den 3- und n -dimensionalen Raum behandelt. Die Höhen eines Tetraeders oder eines Simplex schneiden sich im Allgemeinen nicht in einem Punkt. Wie in diesem Kapitel gezeigt wird, existiert der Höhenschnittpunkt nur dann, wenn jede Kante orthogonal auf die von den restlichen Punkten aufgespannte Seite des Simplex steht, solche Simplexe werden orthozentrisch genannt.

Da im höherdimensionalen Raum im Allgemeinen kein Höhenschnittpunkt existiert, stellt sich die Frage, ob ein Analogon für den höherdimensionalen Raum gefunden werden kann. Der von Gaspard Monge (1746-1818) entdeckte Monge Punkt erfüllt sehr viele Eigenschaften des Höhenschnittpunkts aus dem 2-dimensionalen Raum und existiert für jedes n -Simplex. Im 3-dimensionalen entspricht der Monge Punkt dem Schnittpunkt aller sechs Mittelebenen eines Tetraeders. Die Mittelebenen stehen orthogonal auf eine Kante eines Tetraeders und verlaufen durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante. Da den Kanten in höheren Dimensionen keine Kanten, sondern 2- oder höherdimensionale Seiten gegenüberliegen, können die Mittelebenen nicht auf naheliegender Weise auf den 4- und höherdimensionalen Raum verallgemeinert werden.

Im höherdimensionalen Raum können die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten durch die Schwerpunkte der gegenüberliegenden Seiten verallgemeinert werden. Der Schnittpunkt dieser Mittelebenen ergibt den Monge Punkt eines Simplex im 4- und höherdimensionalen Raum.

In orthozentrischen Simplexen fällt der Monge Punkt mit dem existierenden Höhenschnittpunkt zusammen.

5.1 Der Höhenschnittpunkt

In diesem Abschnitt wird der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks behandelt. Dabei wird wieder ein Dreieck im 2-dimensionalen Raum mit Eckpunkten A_0, A_1, A_2 betrachtet und die Notation $i, j, k = 0, 1, 2$ aus Abschnitt 2.1 verwendet. Die Idee des geometrischen Beweises wurde aus [9, S. 54] aufgegriffen. Eine weitere Beweisidee eines geometrischen Beweises findet man in [9, S. 57], einen anderen analytischen Beweis in [1, S. 20f].

Definition 5.1.1 (Höhe eines Dreiecks). Eine Gerade, die normal auf die Trägergerade einer Dreiecksseite steht und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft, wird Höhe des Dreiecks genannt.

Eine Höhe des Dreiecks $\Delta A_i A_j A_k$ ist also eine Gerade, deren Punkte für $i, j, k = 0, 1, 2$ mit $i \neq j \neq k$ die Gleichung

$$b_{ij} \cdot (a_k - x) = 0 \quad (5.1)$$

erfüllt.

Satz 5.1.2 (Existenz des Höhenschnittpunkts eines Dreiecks [1, S. 22f]). *Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt H .*

Beweis (algebraisch). Seien A_0, A_1, A_2 die Eckpunkte eines Dreiecks $\Delta A_0 A_1 A_2$. Die drei Höhen des Dreiecks sind nach (5.1) durch:

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (a_k - x) &= 0 \\ b_{jk} \cdot (a_i - x) &= 0 \\ b_{ki} \cdot (a_j - x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

gegeben. Aus (2.7) folgt, dass diese Gleichungen paarweise linear unabhängig sind. Durch Addieren der Gleichungen erhält man mit (2.5):

$$\begin{aligned} &b_{ij} \cdot (a_k - x) + b_{jk} \cdot (a_i - x) + b_{ki} \cdot (a_j - x) \\ &= b_{ij} \cdot a_k + b_{jk} \cdot a_i + b_{ki} \cdot a_j - x(b_{ij} + b_{jk} + b_{ki}) \\ &= (a_i - a_j) \cdot a_k + (a_j - a_k) \cdot a_i + (a_k - a_i) \cdot a_j - 0 \\ &= a_i a_k - a_j a_k + a_i a_j - a_i a_k + a_j a_k - a_i a_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die drei Gleichungen in (5.2) sind somit linear abhängig und besitzen eine eindeutige Lösung. Die Höhen schneiden sich also in einem Punkt. □

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch) [9, S. 54]. Gegeben sei ein Dreieck $\Delta A_0 A_1 A_2$. Zeichnet man die drei Parallelen zu den Dreiecksseiten, die durch die gegenüberliegenden Eckpunkte verlaufen, so erhält man ein zweites Dreieck $\Delta A'_0 A'_1 A'_2$, wie in Abbildung 5.1 dargestellt.

5.1 Der Höhenschnittpunkt

Betrachtet man die zwei entstandenen Parallelogramme $\square A_1 A_2 A_0 A'_2$ und $\square A_1 A_2 A'_1 A_0$ folgt, dass $A'_2 A_0 = A_1 A_2 = A_0 A'_1$. A_0 ist also der Mittelpunkt der Strecke $A'_1 A'_2$, dies folgt für die Punkte A_1 und A_2 analog. Die Höhe durch A_2 des Dreiecks $\triangle A_0 A_1 A_2$ steht normal auf die Dreiecksseite $A_0 A_1$ und somit auch auf ihre Parallele $A'_0 A'_1$. Dies gilt wiederum analog für die anderen Dreiecksseiten. Die Höhen des Dreiecks $\triangle A_0 A_1 A_2$ stimmen daher mit den Streckensymmetralen von $\triangle A'_0 A'_1 A'_2$ überein. Wie in Abschnitt 4.1 gezeigt, schneiden sich die Streckensymmetralen von $\triangle A'_0 A'_1 A'_2$ in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt U' des Dreiecks. Die Höhen des Dreiecks $\triangle A_0 A_1 A_2$ schneiden sich somit im selben Punkt $U' = H$, wodurch die Existenz des Schnittpunkts H geometrisch bewiesen wurde. \square

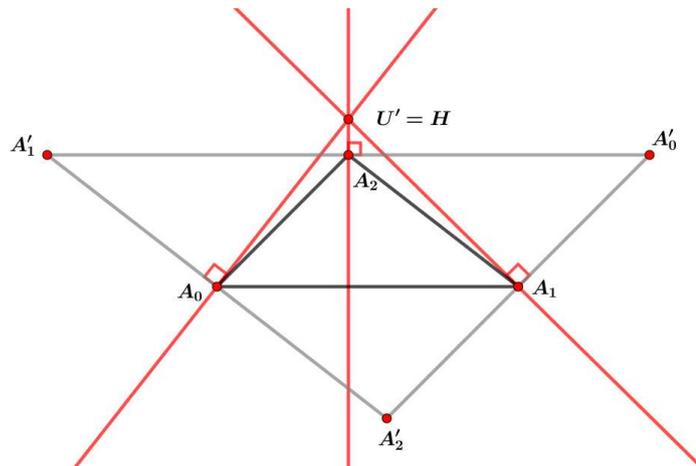


Abbildung 5.1: Skizze zum geometrischen Beweis des Höhenschnittpunkts.

Definition 5.1.3 (Höhenschnittpunkt). Der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks wird als Höhenschnittpunkt H des Dreiecks bezeichnet.

Der Höhenschnittpunkt H ist also der einzige Punkt, dessen Koordinaten für alle $i, j, k = 0, 1, 2$ mit $i \neq j \neq k$ die Gleichung (5.1)

$$b_{ij} \cdot (a_k - h) = 0$$

erfüllt.

5.2 Der Höhenschnittpunkt eines Tetraeders

In diesem Abschnitt wird der in 5.1 thematisierte Höhenschnittpunkt nach [11, S. 681-684] für Tetraeder verallgemeinert und der dafür hilfreiche Monge Punkt definiert. Dabei wurden die Beweise, die den Höhenschnittpunkt im Zusammenhang mit dem Monge Punkt betrachten ähnlich zu [6, S. 22-37] durchgeführt.

Definition 5.2.1 (Höhe eines Tetraeders). Eine Gerade, die normal auf die Trägerebene einer Seite des Tetraeders steht und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft, wird Höhe des Tetraeders genannt.

Seien A_0, A_1, A_2 und A_3 die Eckpunkte eines Tetraeders T und h_l die Höhe von T , die durch den Eckpunkt A_l verläuft. Die Höhe h_l steht also normal auf die Trägerebene $\varepsilon_l = \varepsilon(A_i, A_j, A_k)$ und verläuft durch den Punkt A_l . Durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (a_l - x) &= 0 \\ b_{jk} \cdot (a_l - x) &= 0 \\ b_{ki} \cdot (a_l - x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

sind drei Ebenen gegeben, die normal auf die Trägerebene ε_l stehen und den Punkt A_l enthalten. Aus (2.13) folgt, dass diese Gleichungen paarweise linear unabhängig sind. Aus (2.10) folgt direkt, dass alle drei Gleichungen linear abhängig sind. Da die drei Ebenen auf jeden Fall den Punkt A_l gemeinsam haben, schneiden sie sich in einer Geraden, die normal auf die Ebene ε_l steht und den Punkt A_l enthält. Die Gleichungen in (5.3) beschreiben also drei verschiedene Ebenen, die sich in der Höhe h_l schneiden. Zwei dieser Ebenen sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Sie stehen normal auf die Kanten A_0A_1 bzw. A_0A_2 und schneiden sich in der Höhe h_3 .

Definition 5.2.2 (Orthozentrisches Lot eines Tetraeders). Eine Gerade, die normal auf eine Seite des Tetraeders steht und durch ihren Höhenschnittpunkt verläuft, wird orthozentrische Lot des Tetraeders genannt.

Betrachtet man nochmals das Gleichungssystem (5.2) aus Abschnitt 5.1 im 3-dimensionalen Raum

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (a_k - x) &= 0 \\ b_{jk} \cdot (a_i - x) &= 0 \\ b_{ki} \cdot (a_j - x) &= 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

so gilt ebenfalls die lineare Abhängigkeit der Gleichungen. Die drei Ebenen stehen ebenfalls normal auf die Ebene ε_l und enthalten alle den Höhenschnittpunkt H_l des Dreiecks $\Delta A_iA_jA_k$ in der Ebene ε_l . Das System (5.4) beschreibt also ebenfalls drei Gleichungen, die sich in einer Geraden schneiden, dem orthozentrischen Lot n_l . Zwei dieser Ebenen sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Sie stehen normal auf die Kanten A_0A_1 bzw. A_0A_2 und schneiden sich im orthozentrischen Lot n_3 .

Da die Höhe h_l und das orthozentrische Lot n_l normal auf dieselbe Ebene stehen sind diese beiden Geraden parallel.

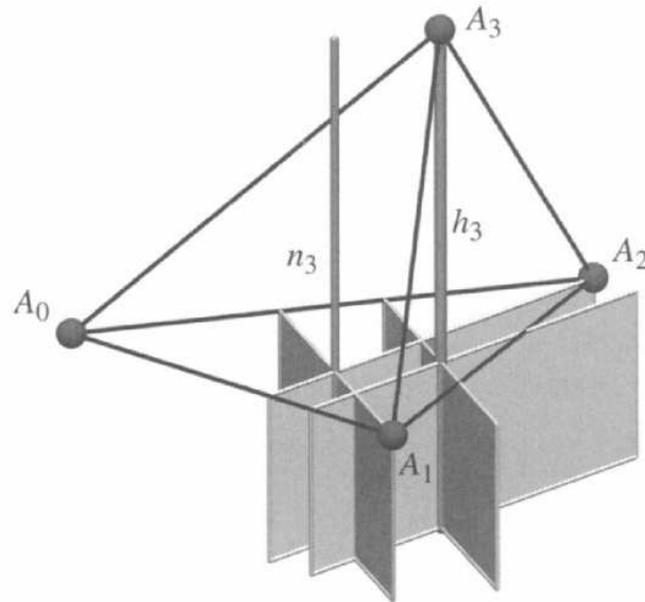


Abbildung 5.2: Skizze zu den Höhen eines Tetraeders [11, S. 681].

Satz 5.2.3 ([11, Theorem 1.]). *Jedes orthozentrische Lot n_l schneidet jede Höhe h_i mit $i \neq l$.*

Beweis (algebraisch). Betrachtet man das orthozentrische Lot n_l und die Höhe h_i , so folgt aus (5.3) und (5.4), dass n_l und h_i beide in der Ebene

$$b_{jk} \cdot (a_i - x) = 0$$

liegen, die normal auf die Kante A_jA_k steht und den Punkt A_i enthält. Da die beiden Geraden normal auf verschiedenen Ebenen stehen, die nicht parallel sein können, müssen sie sich in einem Punkt schneiden. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Betrachtet man o.B.d.A. das orthozentrische Lot n_l auf die Seite $A_iA_jA_k$ und die Höhe h_i , die normal auf die Trägerebene $\varepsilon_i = \varepsilon(A_jA_kA_l)$ steht und durch den Punkt A_i verläuft. Das orthozentrische Lot n_l liegt auf den Ebenen, die normal auf die Kanten A_iA_j , A_jA_k und A_iA_k stehen und den dritten Punkt der Seite beinhalten. Die Höhen des Tetraeders, stehen normal auf die Trägerebene dreier Eckpunkte und beinhalten den vierten Eckpunkt des Tetraeders. Die Höhe h_i und das orthozentrische Lot n_l liegen also beide auf der Ebene, die normal auf die Kante A_jA_k steht und den Punkt A_l beinhaltet. Die Existenz des Schnittpunkts folgt analog zum algebraischen Beweis. \square

5 Der Höhenschnittpunkt und der Monge Punkt

In Abbildung 5.3 ist das orthozentrische Lot n_3 sowie die drei schneidenden Höhen h_0, h_1, h_2 und die parallele Höhe h_3 dargestellt.

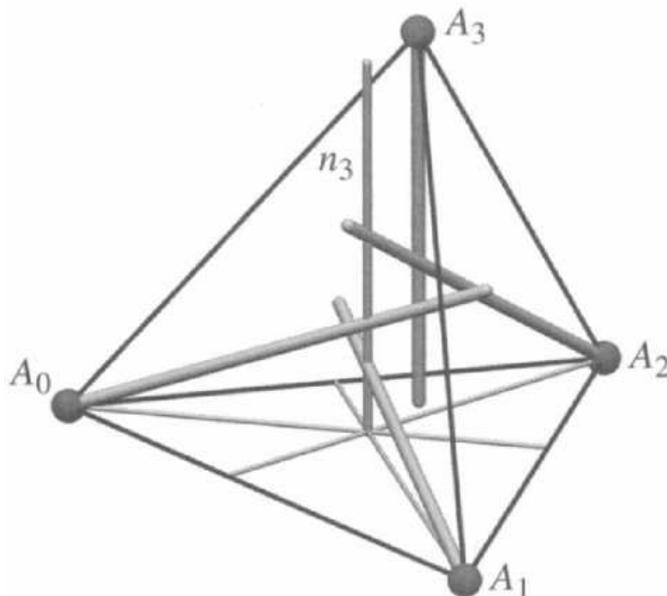


Abbildung 5.3: Skizze zu den Schnittpunkten der Höhen mit dem orthozentrischen Lot [11, S. 681].

Satz 5.2.4 ([11, Theorem 2.]). *Eine Höhe h_i schneidet eine Höhe h_j genau dann, wenn*

$$b_{kl} \cdot b_{ij} = 0 \quad (5.5)$$

oder geometrisch, wenn die gegenüberliegenden Kanten $A_k A_l$ und $A_i A_j$ normal aufeinander stehen.

Insbesondere gilt: $h_i \cap h_j \neq \emptyset \iff h_k \cap h_l \neq \emptyset$.

Beweis (algebraisch). Eine Höhe wird durch zwei Gleichungen des Gleichungssystems in (5.3) eindeutig definiert. Betrachtet man o.B.d.A. die Höhen h_i und h_j , so können sie durch die Gleichungssysteme

$$b_{jk} \cdot (a_i - x) = 0 \quad (5.6)$$

$$b_{kl} \cdot (a_i - x) = 0 \quad (5.7)$$

und

$$b_{kl} \cdot (a_j - x) = 0 \quad (5.8)$$

$$b_{li} \cdot (a_j - x) = 0 \quad (5.9)$$

5.2 Der Höhenschnittpunkt eines Tetraeders

beschrieben werden. Sei angenommen, dass Gleichung (5.5) erfüllt ist. Durch Umformung der Gleichung (5.5) folgt:

$$b_{kl} \cdot a_i = b_{kl} \cdot a_j.$$

Demnach sind die Gleichungen (5.7) und (5.8) äquivalent. Die beiden Höhen liegen somit beide in einer Ebene und können daher durch nur drei Ebenen beschrieben werden. Diese drei Gleichungen sind linear unabhängig und besitzen somit eine eindeutige Lösung. Die beiden Höhen schneiden sich also in einem Punkt.

Um die Umkehrung zu zeigen sei nun P ein gemeinsamer Punkt von h_i und h_j mit Ortsvektor $p := \overrightarrow{OP}$. Durch die Rechnung

$$0 = 0 - 0 = b_{kl} \cdot (a_i - p) - b_{kl} \cdot (a_j - p) = b_{kl} \cdot b_{ij} \quad (5.10)$$

kann man umgekehrt rückschließen, dass (5.5) erfüllt ist. □

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Damit sich zwei Höhen des Tetraeders schneiden können, muss es eine Ebene geben, die beide Höhen enthält. Die Höhen liegen auf allen Ebenen, die normal auf eine Trägerebene steht und den verbleibenden Eckpunkt des Tetraeders beinhaltet. Betrachtet man o.B.d.A. die Höhe h_i , so liegt sie auf allen Ebenen, die normal auf die Ebene $\varepsilon_i = \varepsilon(A_j, A_k, A_l)$ steht und den Punkt A_i enthalten. Analog liegt die Höhe h_j auf allen Ebenen, die normal auf die Ebene $\varepsilon_j = \varepsilon(A_i, A_k, A_l)$ steht und den Punkt A_j enthalten. Die beiden Ebenen schneiden sich in der Trägergeraden von $A_k A_l$, eine gemeinsame Ebene von h_i und h_j muss also normal auf die Kante $A_k A_l$ stehen, um normal auf beide Ebenen ε_i und ε_j zu stehen. Außerdem müsste diese Ebene die Eckpunkte A_i und A_j enthalten. Beide Bedingungen sind nur möglich, wenn die Kanten $A_i A_j$ und $A_k A_l$ normal aufeinander stehen. Um die Umkehrung zu zeigen sei nun P ein gemeinsamer Punkt von h_i und h_j . Demnach liegt der Punkt P auf einer Ebene, die normal auf die Trägerebenen ε_i und ε_j steht und die Punkte A_i und A_j enthält. Die Kante $A_i A_j$ und die gemeinsame Kante der Trägerebenen $A_k A_l$ müssen demnach normal aufeinander stehen. Dies folgt analog für die Höhen h_k und h_l . Wenn sich zwei Höhen schneiden, schneiden sich demnach auch die beiden anderen Höhen. □

Satz 5.2.5 ([11, Theorem 3.]). *Wenn eine Höhe zwei andere Höhen schneidet, dann sind alle Höhen kopunktal.*

Beweis (algebraisch). O.B.d.A. sei angenommen, dass die Höhe h_i die Höhen h_j und h_k schneidet. Aus (5.5) folgt, dass

$$b_{kl} \cdot b_{ij} = b_{jl} \cdot b_{ik} = 0. \quad (5.11)$$

Mit (2.14) folgt aus (5.11):

$$b_{il} \cdot b_{jk} = 0.$$

5 Der Höhenschnittpunkt und der Monge Punkt

Wenn sich zwei Höhen schneiden, schneiden sich ebenso die beiden anderen Höhen, demnach folgt aus Satz 5.2.4, dass jede Höhe jede andere Höhe schneidet. Betrachtet man o.B.d.A. die drei Höhen h_i, h_j und h_k . Nimmt man indirekt an, dass sich die drei Höhen nicht in einem gemeinsamen Punkt schneiden, so schneiden sie sich paarweise und müssen daher in einer gemeinsamen Ebene liegen. Dies kann jedoch nicht der Fall sein, da alle Höhen normal auf unterschiedliche Seiten des Tetraeders stehen. Die drei Höhen müssen sich somit in einem gemeinsamen Punkt schneiden, demnach schneiden sich je drei Höhen in einem gemeinsamen Punkt. Betrachtet man nun o.B.d.A. die Höhen h_i, h_j, h_k und die Höhen h_i, h_j, h_l des Tetraeders, so müssen sich diese jeweils in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Da dieser Punkt dem Schnittpunkt der Höhen h_i und h_j entspricht schneiden sich alle vier Höhen in diesem Punkt. Wenn eine Höhe zwei andere Höhen schneidet, müssen sich die vier Höhen des Tetraeders also alle in einem Punkt H schneiden. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Da zwei Höhen nicht parallel sein können, da sie normal auf unterschiedliche Seitenflächen des Tetraeders stehen, schneiden sie sich, wenn es eine Ebene gibt, die beide Höhen enthält. O.B.d.A. sei angenommen, dass die Höhe h_i die Höhen h_j und h_k schneidet. Es existiert also eine Ebene ε_{ij} , die die Höhen h_i und h_j und eine Ebene ε_{ik} , die die Höhen h_i und h_k enthält. Die Ebenen schneiden sich also in der Höhe h_i . Da die Ebene ε_{ij} normal auf die Kanten $A_k A_l$ steht und den Punkt A_j enthält und die Ebene ε_{ik} normal auf die Kanten $A_j A_l$ steht und den Punkt A_k enthält, verläuft die Höhe h_i durch den Höhenschnittpunkt von $\triangle A_j A_k A_l$. Die Höhe h_i und somit der Eckpunkt A_i liegt also auch auf der Ebene, die normal auf die Kante $A_j A_k$ steht und den Eckpunkt A_l enthält. Demnach steht die Kante $A_i A_l$ normal auf die Kante $A_j A_k$ und aus Satz 5.2.4 folgt, dass die Höhe h_i auch die Höhe h_l schneiden muss. Jede Höhe schneidet also jede andere Höhe. Die restliche Argumentation erfolgt analog zum algebraischen Beweis. \square

Aus Satz 5.2.4 und Satz 5.2.5 folgt:

Korollar 5.2.6. *Die Höhen eines Tetraeders schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn jede Kante orthogonal auf die gegenüberliegende Kante steht oder algebraisch, wenn (5.11) gilt.*

Definition 5.2.7 (Höhenschnittpunkt eines Tetraeders). Der Schnittpunkt der Höhen eines Tetraeders wird als Höhenschnittpunkt H des Tetraeders bezeichnet, falls ein solcher Schnittpunkt existiert. Ein Tetraeder in dem ein Höhenschnittpunkt existiert wird orthozentrisches Tetraeder genannt.

In Abbildung 5.5 ist ein orthozentrisches Tetraeder dargestellt, in dem sich alle vier Höhen im Höhenschnittpunkt H schneiden. In diesem Fall fällt jede Höhe h_i mit dem dazugehörigen orthozentrischen Lot n_i zusammen.

Steht nur ein Paar gegenüberliegender Seiten normal aufeinander, so wird das Tetraeder semi-orthozentrisch genannt. In einem semi-orthozentrischem Tetraeder schneiden sich

jeweils zwei der Höhen. In Abbildung 5.4 ist ein semi-orthozentrisches Tetraeder dargestellt, in dem die Kanten A_0A_3 und A_1A_2 normal aufeinander stehen. Die Höhen h_0 und h_3 und die Höhen h_1 und h_2 schneiden sich jeweils in einem Punkt.

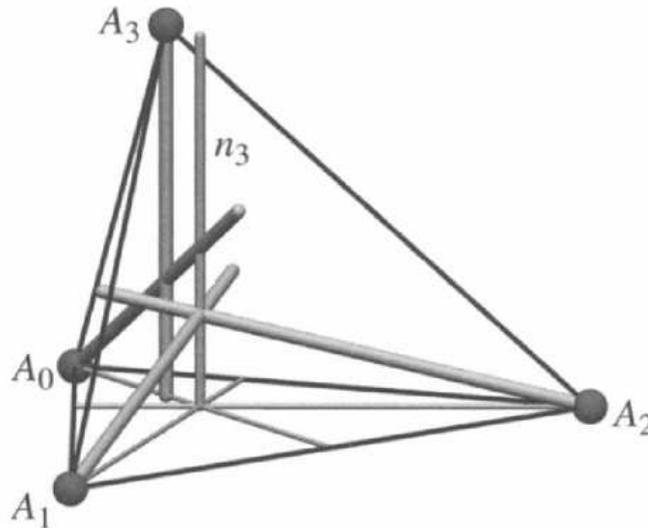


Abbildung 5.4: Schnittpunkt zweier Höhen eines semi-orthozentrischen Tetraeders [11, S. 681].

5.2.1 Der Monge Punkt eines Tetraeders

Im Allgemeinen besitzt ein Tetraeder zwar keinen Höhenschnittpunkt, allerdings existiert ein von Gaspard Monge (1746-1818) entdeckter und nach ihm benannter Punkt, der eine gute Analogie zum Höhenschnittpunkt aus dem 2-dimensionalen Raum darstellt. Der Monge Punkt M wird in der Literatur manchmal auch anders benannt, Fritsch verwendet in [6] beispielsweise den Namen Feuerbachpunkt und gibt diesem Punkt den Buchstaben H .

In einem allgemeinem Tetraeder gibt es zwei Ebenen, die orthogonal auf die Kante A_iA_j stehen und die Eckpunkte A_k und A_l enthalten. Diese Ebenen können durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (a_k - x) &= 0 \\ b_{ij} \cdot (a_l - x) &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben werden. Aus

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{Möglichkeiten für gewählte Kante}} \cdot \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{Möglichkeiten für verbliebenen Punkt}} = 12$$

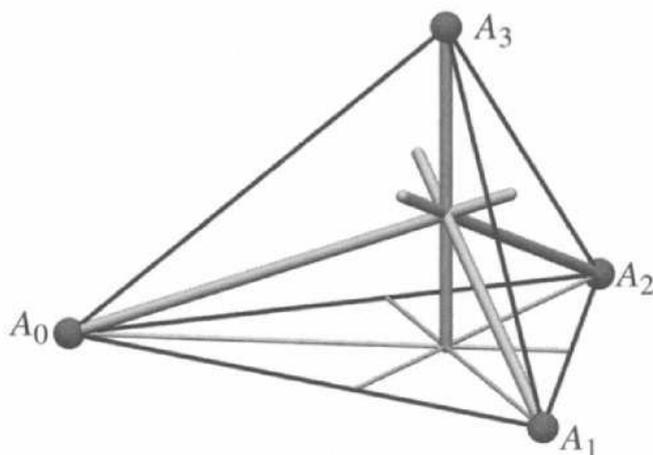


Abbildung 5.5: Höhenschnittpunkt eines orthozentrischen Tetraeders [11, S. 681].

folgt, dass es maximal 12 solcher Ebenen gibt.

Weniger als 12 Ebenen ergeben sich beispielsweise, wenn zwei gegenüberliegende Kanten normal aufeinander stehen. Denn die Ebene, die normal auf eine Kante steht enthält dann die beiden Eckpunkte der gegenüberliegenden Kante und umgekehrt. Dadurch fallen zweimal 2 dieser 12 Ebenen zusammen. In Abbildung 5.2 sind die zwei parallelen Ebenenpaare auf die Seite A_0A_2 und auf die Seite A_0A_1 eingezeichnet.

Es kann eine Ebene definiert werden, die genau zwischen den beiden Ebenen liegt.

Definition 5.2.8 (Mittlebene eines Tetraeders). Eine Ebene, die normal auf eine Kante des Tetraeders steht und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante enthält, wird Mittlebene des Tetraeders genannt.

Sind die beiden Ebenen durch die Eckpunkte ident, so stimmt auch die Mittlebene mit ihnen überein.

Mittels Koordinaten kann die Mittlebene der Strecke A_iA_j wie folgt ausgedrückt werden:

$$b_{ij} \cdot (a_k + a_l - 2x) = 0, \quad (5.12)$$

wobei x den Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Mittlebene bezeichnet. Ein Tetraeder hat sechs solche Mittlebenen. Im Allgemeinen ist die Mittlebene (5.12) nicht die Mittelsenkrechte der Strecke A_iA_j , wie im Vergleich mit der Gleichung der Mittelsenkrechten in (4.7) ersichtlich ist.

Satz 5.2.9 ([11, Theorem 4.]). *Alle sechs Mittlebenen eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis (algebraisch). Durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (a_k + a_l - 2x) &= 0 \\ b_{ik} \cdot (a_j + a_l - 2x) &= 0 \\ b_{il} \cdot (a_j + a_k - 2x) &= 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

sind drei Mittelebenen gegeben, die nicht alle zur selben Dreiecksseite des Tetraeders gehören. Aus (2.12) folgt, dass diese Gleichungen linear unabhängig sind. Das System in (5.13) ist also linear unabhängig und hat somit eine eindeutige Lösung. Die drei Mittelebenen schneiden sich also in einem Punkt M . Durch Subtrahieren der ersten Gleichungen von der zweiten Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} & b_{ik} \cdot (a_j + a_l - 2x) - b_{ij} \cdot (a_k + a_l - 2x) \\ &= b_{ik} \cdot a_j - b_{ij} \cdot a_k + (b_{ik} - b_{ij}) \cdot (a_l - 2x) \\ &= (a_i - a_k) \cdot a_j - (a_i - a_j) \cdot a_k + (b_{ik} - b_{ij}) \cdot (a_l - 2x) \\ &= a_i a_j - a_j a_k - a_i a_k + a_j a_k + (a_i - a_k - a_i + a_j) \cdot (a_l - 2x) \\ &= a_i a_j - a_i a_k + (a_j - a_k) \cdot (a_l - 2x) \\ &= b_{jk} \cdot (a_i + a_l - 2x) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Aus (5.14) folgt, dass der Punkt M auch auf der Mittelebene liegt, die normal auf die Kante $A_j A_k$ steht und den Seitenmittelpunkt M_{il} der gegenüberliegenden Seite enthält. Subtrahiert man von der ersten Gleichung in (5.13) die dritte Gleichung und von der zweiten Gleichung die dritte Gleichung, so folgt dies analog für die beiden verbleibenden Mittelebenen. Der Punkt M liegt also auf allen 6 Mittelebenen des Tetraeders. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Betrachtet man das durch die Seitenmittelpunkte M_{il}, M_{jl} und M_{kl} aufgespannte Dreieck, so sind die Seiten des Dreiecks $\triangle M_{il} M_{jl} M_{kl}$ nach dem Strahlensatz parallel zu den Seiten des Dreiecks $\triangle A_i A_j A_k$. Die Mittelebene auf die Kante $A_i A_j$ steht also ebenso normal auf die Kante $M_{il} M_{jl}$ und verläuft durch den gegenüberliegenden Eckpunkt M_{kl} . Dies folgt analog für die Mittelebenen auf die Kanten $A_i A_k$ und $A_j A_k$. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle M_{il} M_{jl} M_{kl}$ liegt somit auf allen drei Mittelebenen auf die Trägerebene $\varepsilon_l = \varepsilon(A_i, A_j, A_k)$. Somit folgt, dass sich die drei Mittelebenen auf eine Trägerebene in einer Geraden schneiden, die normal auf die Trägerebene steht. Da die Schnittgeraden der Mittelebenen zweier benachbarter Tetraederseiten eine gemeinsame Kante haben, liegen die Geraden beide in der Mittelebene auf diese Kante. Da die Geraden auf verschiedene Tetraederseiten normal stehen können sie weder ident noch parallel sein und müssen sich demnach in einem Punkt schneiden. Jede Gerade muss also die drei anderen Geraden schneiden. Da dieses Geraden nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen können schneiden sie sich alle in einem Punkt M . Der Punkt M liegt also auf allen 6 Mittelebenen des Tetraeders. \square

Definition 5.2.10 (Monge Punkt eines Tetraeders). Der Schnittpunkt aller sechs Mittelebenen eines Tetraeders wird als Monge Punkt M des Tetraeders bezeichnet.

5 Der Höhenschnittpunkt und der Monge Punkt

Der Monge Punkt M ist also der einzige Punkt, dessen Koordinaten für alle $i, j = 0, 1, 2, 3$ mit $i \neq j$ die Gleichung

$$b_{ij} \cdot (a_k + a_l - 2m) = 0 \quad (5.15)$$

erfüllt.

Der Punkt M liegt auf der Schnittgeraden der Mittelebenen auf die Trägerebene ε_i . Die Schnittgerade ist parallel zu den Geraden n_i und h_i und liegt mit minimalem Normalabstand genau zwischen den Geraden.

In Abbildung 5.6 ist ein Tetraeder und dessen Monge Punkt dargestellt. Die Schnittgerade auf die Trägerebene ε_3 ist in Abbildung 5.6 strichliert dargestellt.

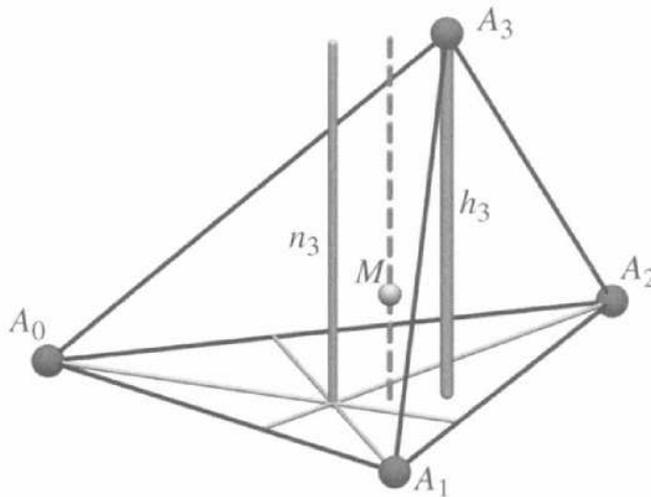


Abbildung 5.6: Skizze zum Monge Punkt eines Tetraeders [11, S. 681].

Satz 5.2.11. *In einem orthozentrischem Tetraeder fallen die Höhen mit den orthozentrischen Loten zusammen. Demnach stimmt der Höhenschnittpunkt mit dem Monge Punkt überein.*

Außerdem fallen die Höhenfußpunkte mit dem Höhenschnittpunkt der jeweiligen Seitenfläche zusammen.

Beweis (algebraisch). In einem orthozentrischem Tetraeder stehen die gegenüberliegenden Kanten normal aufeinander. Aus Gleichung (5.5) folgt $b_{ij} \cdot (a_k - a_l) = 0$ und daher

$$b_{ij} \cdot a_k = b_{ij} \cdot a_l. \quad (5.16)$$

Betrachtet man die Gleichung

$$b_{ij} \cdot (a_l - x) = 0$$

5.2 Der Höhenschnittpunkt eines Tetraeders

aus (5.3), also der Ebene, die normal auf die Kante A_iA_j steht und den Eckpunkt A_l enthält, so folgt aus (5.16)

$$b_{ij} \cdot (a_k - x) = 0.$$

Diese Gleichung entspricht genau der Gleichung der Ebene, die normal auf die Kante A_iA_j steht und den Eckpunkt A_k enthält. Die Mittelebene auf die Kante A_iA_j ist die Ebene, die genau zwischen diesen zwei Ebenen liegt. Da die beiden Ebenen ident sind fällt auch die Mittelebene mit ihnen zusammen. Durch Addition der beiden Ebenengleichungen folgt algebraisch die Ebenengleichung (5.15) der Mittelebene:

$$b_{ij} \cdot (a_l - x) + b_{ij} \cdot (a_k - x) = b_{ij} \cdot (a_k + a_l - 2m) = 0$$

In einem orthozentrischem Tetraeder fallen die Höhen also mit den orthozentrischen Lotten zusammen. Demnach fallen auch die Höhenfußpunkte mit den Höhenschnittpunkten der jeweiligen Seitenflächen und der Höhenschnittpunkt mit dem Monge Punkt zusammen. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). In einem orthozentrischem Tetraeder stehen die gegenüberliegenden Kanten normal aufeinander. Die Höhe h_l auf die Trägerebene $\varepsilon_l = \varepsilon(A_i, A_j, A_k)$ steht normal auf die Trägerebene und verläuft durch den Punkt A_l . Die Höhe liegt somit auf den drei Ebenen, die normal auf die Kanten A_iA_j , A_iA_k und A_jA_k stehen und den Eckpunkt A_l enthalten. Sei o.B.d.A. ε die Ebene, die normal auf die Kante A_iA_j steht und die Höhe h_l sowie den Eckpunkt A_l enthält. Da die Kante A_kA_l normal auf die Kante A_iA_j steht, liegt der Eckpunkt A_k ebenfalls in der Ebene ε . Dementsprechend liegt auch der Mittelpunkt M_{kl} der Seite A_kA_l in dieser Ebene. Die Ebene ε fällt also mit der Mittelebene auf die Kante A_iA_j zusammen. Dies folgt analog für die Ebenen, die normal auf die Kanten A_iA_k und A_jA_k stehen und den Eckpunkt A_l enthalten. Die Höhe h_l fällt also mit den Schnittgeraden der Mittelebenen auf die Seite $\Delta A_iA_jA_k$ des Tetraeders zusammen. Da die Schnittgerade der Mittelebenen durch den Höhenschnittpunkt der Seite $\Delta A_iA_jA_k$ verläuft und somit dem orthozentrischen Lot auf die Seite entspricht, fällt der Höhenfußpunkt der Höhe h_l mit dem Höhenschnittpunkt zusammen. Dies folgt analog für alle anderen Seiten des Tetraeders. Die Höhen fallen also mit den orthozentrischen Lotten und den Schnittgeraden von 3 Mittelebenen des Tetraeders zusammen. Demnach fällt der Höhenschnittpunkt mit dem Monge Punkt zusammen. \square

Da der Höhenschnittpunkt in einem orthozentrischem Tetraeder mit dem Monge Punkt übereinstimmt, wird der Monge Punkt als Analogie des Höhenschnittpunkts in einem allgemeinem Tetraeder angesehen.

5.3 Der Höhenschnittpunkt eines n -Simplex

In diesem Abschnitt wird mithilfe von [11, S. 685] der in 5.2 definierten Monge Punkt, als Analogon zum Höhenschnittpunkt, im n -dimensionalen Raum beschrieben und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Höhenschnittpunkts im n -dimensionalen Raum analog zum 3-dimensionalen Raum aufgezeigt.

Die Definition der Höhe kann analog zum 3-dimensionalen Fall für den n -dimensionalen Raum formuliert werden.

Definition 5.3.1 (Höhe eines n -Simplex). Eine Gerade, die normal auf die Trägerebene einer $(n - 1)$ -dimensionalen Seite des n -Simplex steht und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft, wird Höhe des n -Simplex genannt.

Seien A_0, A_1, \dots, A_n die Eckpunkte eines n -Simplex S und h_{i_n} die Höhe von S , die durch den Eckpunkt A_{i_n} verläuft. Die Höhe h_{i_n} steht also normal auf die Trägerebene $\varepsilon_{i_n} = \varepsilon(A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_{(n-1)}})$ und verläuft durch den Punkt A_{i_n} . Durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{i_0 i_1} \cdot (a_{i_n} - x) &= 0 \\ b_{i_1 i_2} \cdot (a_{i_n} - x) &= 0 \\ &\vdots \\ b_{i_{(n-1)} i_0} \cdot (a_{i_n} - x) &= 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

sind n Ebenen gegeben, die normal auf die Trägerebene ε_{i_n} stehen und den Punkt A_{i_n} enthalten. Aus (2.18) folgt, dass $(n - 1)$ dieser Gleichungen linear unabhängig sind. Aus (2.16) folgt direkt, dass alle n Gleichungen linear abhängig sind. Da die n Ebenen auf jeden Fall den Punkt A_{i_n} gemeinsam haben, schneiden sie sich in einer Geraden, die normal auf die Ebene ε_{i_n} steht und den Punkt A_{i_n} enthält. Die Gleichungen in (5.17) beschreiben also n verschiedene Ebenen, die sich in der Höhe h_{i_n} schneiden.

Satz 5.3.2 ([11, Theorem 2.]). Eine Höhe h_{i_0} schneidet eine Höhe h_{i_1} genau dann, wenn

$$b_{i_0 i_1} \cdot b_{i_2 i_3} = 0 \quad \forall \{i_2, i_3\} \subset \{0, 1, \dots, n\}, \text{ mit } i_0, i_1, i_2, i_3 \text{ paarweise verschieden,} \tag{5.18}$$

oder geometrisch, wenn die Kante $A_{i_0} A_{i_1}$ normal auf die Seitenfläche $A_{i_2} A_{i_3} \dots A_{i_n}$ steht.

Beweis. Eine Höhe wird durch $(n - 1)$ Gleichungen des Gleichungssystems in (5.17) eindeutig definiert. Betrachtet man o.B.d.A. die Höhen h_0 und h_n , so können sie durch die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} b_{12} \cdot (a_0 - x) &= 0 \\ b_{23} \cdot (a_0 - x) &= 0 \\ &\vdots \\ b_{(n-1)n} \cdot (a_0 - x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

und

$$\begin{aligned}
 b_{12} \cdot (a_n - x) &= 0 \\
 b_{23} \cdot (a_n - x) &= 0 \\
 &\vdots \\
 b_{(n-1)n} \cdot (a_n - x) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

beschrieben werden. Durch Umformen der Gleichung in (5.18) folgt:

$$b_{i_1 i_2} \cdot a_0 = b_{i_1 i_2} \cdot a_n \quad \forall \{i_1, i_2\} \subset \{1, \dots, n-1\}, \quad i_1 \neq i_2.$$

Bis auf die letzte Gleichung ist jede der Gleichungen in (5.19) zur entsprechenden Gleichung in (5.20) äquivalent. Betrachtet man nun die $(n-1)$ Gleichungen aus (5.19) und die letzte Gleichung aus (5.20), so sind diese n Gleichungen nach (2.18) linear unabhängig und besitzen somit eine eindeutige Lösung. Die beiden Höhen schneiden sich also in einem Punkt.

Um die Umkehrung zu zeigen sei nun P ein gemeinsamer Punkt von h_0 und h_n mit Ortsvektor $p := \overrightarrow{OP}$. Durch die Rechnung

$$0 = 0 - 0 = b_{i_1 i_2} \cdot (a_0 - p) - b_{i_1 i_2} \cdot (a_n - p) = b_{i_1 i_2} \cdot b_{0n}$$

kann man umgekehrt rückschließen, dass (5.18) erfüllt ist. \square

Satz 5.3.3 ([11, Theorem 3.]). *Wenn eine Höhe $(n-1)$ andere Höhen schneidet, dann sind alle Höhen kopunktal.*

Beweis. O.B.d.A. sei angenommen, dass die Höhe h_0 die Höhen $h_1, h_2, \dots, h_{(n-1)}$ schneidet. Aus (5.18) folgt, dass

$$\begin{aligned}
 b_{01} \cdot b_{i_0 i_1} &= 0 \quad \forall \{i_0, i_1\} \subset \{2, \dots, n\}, \quad i_0 \neq i_1, \\
 b_{02} \cdot b_{i_0 i_1} &= 0 \quad \forall \{i_0, i_1\} \subset \{1, 3, \dots, n\}, \quad i_0 \neq i_1, \\
 &\vdots \\
 b_{0(n-1)} \cdot b_{i_0 i_1} &= 0 \quad \forall \{i_0, i_1\} \subset \{1, \dots, n-2, n\}, \quad i_0 \neq i_1.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Durch Subtrahieren zweier Gleichungen der Form

$$b_{0i_0} \cdot b_{i_1 n} - b_{0i_1} \cdot b_{i_0 n} = b_{0n} \cdot b_{i_1 i_0} = 0 \quad \forall \{i_0, i_1\} \subset \{1, \dots, n-1\}, \quad i_0 \neq i_1.$$

erhält man analog zu (2.14):

$$b_{0n} \cdot b_{i_0 i_1} = 0 \quad \forall \{i_0, i_1\} \subset \{1, \dots, n-1\}, \quad i_0 \neq i_1.$$

Die Höhe h_0 schneidet also ebenfalls die Höhe h_n .

5 Der Höhenschnittpunkt und der Monge Punkt

Durch Subtrahieren zweier Gleichungen der Form

$$b_{0i_0} \cdot b_{i_2i_3} - b_{0i_1} \cdot b_{i_2i_3} = b_{i_1i_0} \cdot b_{i_2i_3} = 0 \quad \forall \{i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, n\},$$

wobei i_0, i_1, i_2, i_3 paarweise verschieden sind, erhält man:

$$b_{i_0i_1} \cdot b_{i_2i_3} = 0 \quad \forall \{i_0, i_1, i_2, i_3\} \subset \{0, 1, \dots, n\}, \text{ mit } i_0, i_1, i_2, i_3 \text{ paarweise verschieden.}$$

Nach Satz 5.3.2 folgt, dass jede Höhe jede andere Höhe schneidet.

Betrachtet man o.B.d.A. die drei Höhen h_{i_0}, h_{i_1} und h_{i_2} . Nimmt man indirekt an, dass sich die drei Höhen nicht in einem gemeinsamen Punkt schneiden, so schneiden sie sich paarweise und müssen daher in einer gemeinsamen Ebene liegen. Dies kann jedoch nicht der Fall sein, da alle Höhen normal auf unterschiedliche Seiten des n -Simplex stehen. Die drei Höhen müssen sich somit in einem gemeinsamen Punkt schneiden, demnach schneiden sich je drei Höhen in einem gemeinsamen Punkt. Betrachtet man nun o.B.d.A. die Höhen $h_{i_0}, h_{i_1}, h_{i_2}$ und die Höhen $h_{i_0}, h_{i_1}, h_{i_3}$ des n -Simplex, so müssen sich diese jeweils in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Da dieser Punkt dem Schnittpunkt der Höhen h_i und h_j entspricht schneiden sich alle vier Höhen in diesem Punkt. Dies folgt analog für alle anderen Höhen. Wenn eine Höhe $(n - 1)$ andere Höhen schneidet, müssen sich die $(n + 1)$ Höhen des n -Simplex also alle in einem Punkt H schneiden. \square

Aus Satz 5.3.2 und Satz 5.3.3 folgt:

Korollar 5.3.4. *Die Höhen eines n -Simplex schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn jede Kante orthogonal auf die gegenüberliegende $(n - 2)$ -dimensionale Seite steht oder algebraisch, wenn (5.21) gilt.*

Definition 5.3.5 (Höhenschnittpunkt eines n -Simplex). Der Schnittpunkt der Höhen eines n -Simplex wird als Höhenschnittpunkt H des n -Simplex bezeichnet, falls ein solcher Schnittpunkt existiert. Ein n -Simplex in dem ein Höhenschnittpunkt existiert wird orthozentrisches n -Simplex genannt.

5.3.1 Der Monge Punkt eines n -Simplex

Ein n -Simplex S im n -dimensionalen euklidischen Raum hat $(n + 1)$ Eckpunkte.

Um den Monge Punkt als Schnittpunkt aller Mittelebenen eines Tetraeders auf den n -dimensionalen Raum zu verallgemeinern müssen zunächst die Mittelebenen im n -dimensionalen definiert werden. Im 3-dimensionalen liegt jeder Kante eine Kante gegenüber, durch deren Mittelpunkt die Mittelebene verläuft. Im n -dimensionalen liegt jeder Kante eine $(n - 2)$ -dimensionale Seite gegenüber. Es muss also ein Analogon zum Seitenmittelpunkt einer Kante im $(n - 2)$ -dimensionalen Raum gefunden werden.

Für diese Analogie wären folgende Punkte naheliegend:

- Der Schwerpunkt der $(n - 2)$ -dimensionalen Seite, weil der Mittelpunkt einer Strecke im physikalischen Sinn ihrem Schwerpunkt entspricht.

- Der Umsphärenmittelpunkt, denn dieser ist äquidistant zu allen Eckpunkten, genauso wie der Streckenmittelpunkt zu den Eckpunkten der Strecke.

Da der Höhenschnittpunkt nicht für alle $(n-2)$ -dimensionalen Seiten existiert, ist dieser Punkt als Analogon unpassend.

Da n -Simplexe existieren, bei denen die Ebenen, die normal auf eine Kante stehen und durch die Umkreismittelpunkte der gegenüberliegenden Seitenflächen verlaufen, keinen gemeinsamen Schnittpunkt aufweisen, wie das folgende Beispiel zeigt, bieten sich die Schwerpunkte an.

Beispiel 5.1. Seien A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 die Eckpunkte eines 4-Simplex mit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Ortsvektor des Umsphärenmittelpunkts U_{ij} der Seitenfläche, die der Kante $A_i A_j$ gegenüberliegt gilt:

$$u_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad u_{02} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad u_{03} = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 3/10 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}, \quad u_{04} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

Durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{01} \cdot (u_{01} - x) &= 0 \\ b_{02} \cdot (u_{02} - x) &= 0 \\ b_{03} \cdot (u_{03} - x) &= 0 \\ b_{04} \cdot (u_{04} - x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.22}$$

sind 4 Ebenen gegeben, die nicht alle zur selben 3-dimensionalen Seite des 4-Simplex gehören. Aus (2.17) folgt, dass diese Gleichungen linear unabhängig sind. Das System in (5.22) ist also linear unabhängig und hat somit eine eindeutige Lösung. Die 4 Ebenen schneiden sich also in einem Punkt P :

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/5 \\ -1/15 \end{pmatrix}.$$

5 Der Höhenschnittpunkt und der Monge Punkt

Nun gilt es herauszufinden, ob P auch auf den anderen Ebenen liegt, die normal auf eine Kante des 4-Simplex stehen und den Umsphärenmittelpunkt der gegenüberliegenden Seite enthalten. Durch Einsetzen der Koordinaten von P in die Gleichung der Ebene, die normal auf eine Kante A_1A_3 steht und durch den Punkt U_{13} verläuft folgt:

$$\begin{aligned}
 & b_{13} \cdot (u_{13} - x) \\
 &= b_{13} \cdot (u_{13} - p) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/5 \\ -1/15 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/10 \\ 17/30 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \neq 0.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Aus (5.23) folgt, dass der Punkt P nicht auf dieser Ebene liegt.

Der Umsphärenmittelpunkt eignet sich daher nicht als Analogon der Seitenmittelpunkte für die Verallgemeinerung der Mittelebenen auf den n -dimensionalen Raum.

Die Mittelebenen können im n -dimensionalen wie folgt definiert werden:

Definition 5.3.6 (Mittalebene eines n -Simplex). Eine Ebene, die normal auf eine Kante des n -Simplex steht und den Schwerpunkt der $(n-2)$ -dimensionalen gegenüberliegenden Seite enthält, wird Mittelebene des n -Simplex genannt.

Wie im 2- und 3-dimensionalen Fall kann die Mittelebene der Strecke A_iA_j mittels Koordinaten wie folgt ausgedrückt werden:

$$b_{ij} \cdot (a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_n - (n-1)x) = 0. \tag{5.24}$$

wobei x den Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Mittelebene bezeichnet. Ein n -Simplex hat $\binom{n+1}{2}$ solcher Mittelebenen.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 5.3.7. Alle $\binom{n+1}{2}$ Mittelebenen eines n -Simplex schneiden sich in einem Punkt.

Beweis. Für die Schwerpunkte S_{ij} der Seitenfläche, die der Kante A_iA_j gegenüberliegt gilt:

$$\begin{aligned}
 s_{01} &= \frac{1}{n-1} (a_2 + a_3 + \dots + a_n), & s_{12} &= \frac{1}{n-1} (a_0 + a_3 + \dots + a_n), & \dots \\
 s_{02} &= \frac{1}{n-1} (a_1 + a_3 + \dots + a_n), & s_{13} &= \frac{1}{n-1} (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_n), & \dots \\
 \vdots & & \vdots & &
 \end{aligned}$$

Durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 b_{01} \cdot (a_2 + a_3 + \cdots + a_n - (n-1)x) &= 0 \\
 b_{02} \cdot (a_1 + a_3 + \cdots + a_n - (n-1)x) &= 0 \\
 &\vdots \\
 b_{0n} \cdot (a_1 + \cdots + a_{(n-1)} - (n-1)x) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

sind n Ebenen gegeben, die nicht alle zur selben $(n-1)$ -dimensionalen Seite des n -Simplex gehören. Aus (2.17) folgt, dass diese Gleichungen linear unabhängig sind. Das System in (5.25) ist also linear unabhängig und hat somit eine eindeutige Lösung. Die n Mittelebenen schneiden sich also in einem Punkt M . Durch Subtrahieren der ersten Gleichungen von der zweiten Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned}
 &b_{02} \cdot (a_1 + a_3 + \cdots + a_n - (n-1)x) - b_{01} \cdot (a_2 + a_3 + \cdots + a_n - (n-1)x) \\
 &= b_{02} \cdot a_1 - b_{01} \cdot a_2 + (b_{02} - b_{01}) \cdot (a_3 + \cdots + a_n - (n-1)x) \\
 &= b_{02} \cdot a_1 - b_{01} \cdot a_2 + b_{12} \cdot (a_3 + \cdots + a_n - (n-1)x) \\
 &= b_{12} \cdot (a_0 + a_3 + \cdots + a_n - (n-1)x) \stackrel{!}{=} 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

Aus (5.26) folgt, dass der Punkt M auch auf der Ebene liegt, die normal auf die Kante A_1A_2 steht und den Schwerpunkt

$$s_{12} = \frac{a_0 + a_3 + \cdots + a_n}{n-1}$$

der $(n-2)$ -dimensionalen Seite $A_0A_3A_4 \dots A_n$ enthält. Durch analoge Subtraktion der Gleichung in (5.25) folgt dies analog für die verbleibenden Mittelebenen. Der Punkt M liegt also auf allen $\binom{n+1}{2}$ Mittelebenen des n -Simplex, die normal auf die Kanten stehen und die Schwerpunkte der gegenüberliegenden $(n-2)$ -dimensionalen Seite enthalten. \square

Da dies allgemein für alle Simplexe gilt, verwendet man den Schwerpunkt als Verallgemeinerung des Seitenmittelpunkts auf den höherdimensionalen Raum.

Im 3-dimensionalen Fall stimmt der Satz 5.3.7 mit dem Satz 5.2.9 überein, da die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten ihren Schwerpunkten entsprechen. Im 2-dimensionalen Fall liegt der dritte Eckpunkt den Kanten gegenüber. Der Schwerpunkt dieses Eckpunkts fällt klarerweise mit dem Eckpunkt zusammen. Die Mittelebenen des n -Simplex fallen im 2-dimensionalen mit den Höhen des Dreiecks zusammen. Dementsprechend fällt auch der Monge Punkt mit dem Höhengschnittpunkt zusammen.

Definition 5.3.8 (Monge Punkt eines n -Simplex). Der Schnittpunkt aller $\binom{n+1}{2}$ Mittelebenen eines n -Simplex wird als Monge Punkt M des n -Simplex bezeichnet.

5 Der Höhenschnittpunkt und der Monge Punkt

Der Monge Punkt M ist also der einzige Punkt, dessen Koordinaten für alle $i, j = 0, 1, \dots, n$ mit $i \neq j$ die Gleichung

$$b_{ij} \cdot (a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_n - (n-1)m) = 0 \quad (5.27)$$

erfüllt.

Satz 5.3.9. *In einem orthozentrischen n -Simplex fallen die Höhen mit den Schnittgeraden der Mittelebenen zusammen. Demnach stimmt der Höhenschnittpunkt mit dem Monge Punkt überein.*

Außerdem fallen die Höhenfußpunkte mit dem Höhenschnittpunkt der jeweiligen Seitenfläche zusammen.

Beweis. In einem orthozentrischem n -Simplex stehen die Kanten normal auf die gegenüberliegenden $(n-2)$ -dimensionalen Seiten. Aus Gleichung (5.18) folgt $b_{i_0 i_1} \cdot (a_{i_2} - a_{i_3}) = 0$ und daher

$$b_{i_0 i_1} \cdot a_{i_2} = b_{i_0 i_1} \cdot a_{i_3} \quad \forall \{i_0, i_1, i_2, i_3\} \subset \{0, 1, \dots, n\}, \text{ mit } i_0, i_1, i_2, i_3 \text{ paarweise verschieden.} \quad (5.28)$$

ist demnach für alle Kanten $A_{i_0} A_{i_1}$ erfüllt. Betrachtet man die Gleichung

$$b_{i_0 i_1} \cdot (a_{i_2} - x) = 0$$

aus (5.17), also der Ebene, die normal auf die Kante $A_{i_0} A_{i_1}$ steht und den Eckpunkt A_{i_2} enthält, so folgt aus (5.28)

$$b_{i_0 i_1} \cdot (a_{i_3} - x) = 0. \quad (5.29)$$

Durch Addition von $(n-1)$ Ebenengleichungen der Form (5.29) auf die Kante $A_{i_0} A_{i_1}$ folgt algebraisch die Ebenengleichung (5.27) der Mittelebene:

$$b_{i_0 i_1} \cdot (a_{i_2} + a_{i_3} + \dots + a_{i_n} - (n-1)x) = 0.$$

In einem orthozentrischem n -Simplex fallen die Höhen also mit den Schnittgeraden der Mittelebenen zusammen. Demnach fallen auch die Höhenfußpunkte mit den Höhenschnittpunkten der jeweiligen Seitenflächen und der Höhenschnittpunkt mit dem Monge Punkt zusammen. \square

Da der Höhenschnittpunkt in einem orthozentrischem n -Simplex mit dem Monge Punkt übereinstimmt, wird der Monge Punkt als Analogie des Höhenschnittpunkts in einem allgemeinem n -Simplex angesehen.

Bemerkung 1. In einem orthozentrischem Simplex schneiden sich die Mittelebenen durch jeden Punkt der gegenüberliegenden Seite im Monge Punkt.

Da jede Kante eines orthozentrischen Simplex normal auf die gegenüberliegende Seite steht ist die Ebenengleichung unabhängig von der Wahl des Punktes in der gegenüberliegenden Seite. Genau genommen ergibt sich die Ebene durch jeden Punkt auf der Trägerebene der gegenüberliegenden Seite. Der Schnittpunkt der Ebenen entspricht dann sowohl dem Monge Punkt als auch dem Höhenschnittpunkt.

6 Die Euler'sche Gerade

In diesem Kapitel wird die Euler'sche Gerade eines Dreiecks auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinert. Da der Höhenschnittpunkt im Höherdimensionalen nur für orthozentrische Simplexe existiert, wird der in Kapitel 5 definierte Monge Punkt für die Verallgemeinerung der Euler'schen Gerade verwendet. Der Monge Punkt liegt nämlich, genau wie der Höhenschnittpunkt im 2-dimensionalen, auf der Geraden durch den Schwerpunkt und den Umsphärenmittelpunkt eines Simplex. Das Teilungsverhältnis der Geraden durch den Monge Punkt, den Schwerpunkt und den Umsphärenmittelpunkt ändert sich jedoch mit der Dimension des Simplex.

6.1 Die Euler'sche Gerade

In diesem Abschnitt wird die Euler'sche Gerade beschrieben. Der Inhalt des Satzes zur Existenz sowie der Aufbau des geometrischen Beweises wurden aus [1, S. 24f] übernommen.

Satz 6.1.1 (Existenz der Euler'schen Gerade [1, S. 24f]). *In jedem nicht gleichseitigen Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H , der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt U auf einer Geraden. Der Schwerpunkt teilt dabei die Strecke HU im Verhältnis $2 : 1$. Im gleichseitigen Dreieck fallen die Punkte H , S und U zusammen.*

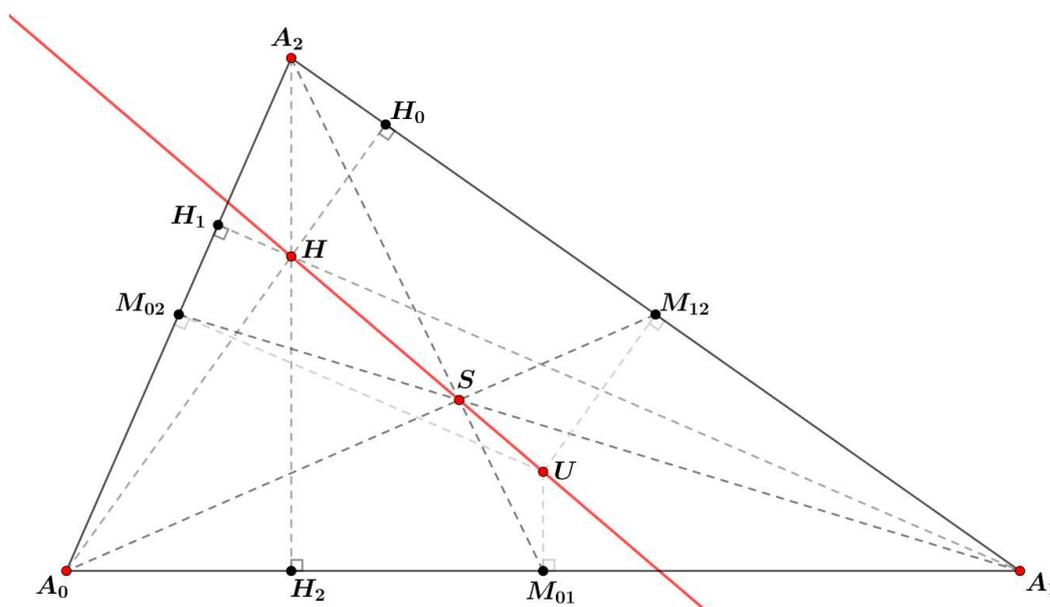


Abbildung 6.1: Skizze zum Beweis der Existenz der Euler'schen Gerade.

Beweis (algebraisch). Aus den Gleichungen (4.5) und (5.1) ist bekannt, dass die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U und die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H für alle $i, j = 0, 1, 2$ mit $i \neq j$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (a_i + a_j - 2u) &= 0 \\ b_{ij} \cdot (a_k - h) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Addieren der beiden Gleichungen erhält man:

$$b_{ij} \cdot (a_i + a_j - 2u) + b_{ij} \cdot (a_k - h) = b_{ij} \cdot (a_i + a_j + a_k - h - 2u) = 0$$

und daher

$$b_{ij} \cdot \left(\frac{a_i + a_j + a_k - h - 2u}{3} \right) = b_{ij} \cdot \left(s - \frac{h + 2u}{3} \right) = 0. \quad (6.1)$$

Da die Gleichung (6.1) unabhängig von der Wahl von i und j gelten muss, folgt für den Schwerpunkt S :

$$s = \frac{h + 2u}{3}. \quad (6.2)$$

Der Schwerpunkt S teilt die Strecke HU also im Verhältnis $2 : 1$. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Nach Konstruktion können folgende Eigenschaften vorausgesetzt werden:

- $A_0H \parallel M_{12}U$, weil $A_0H, M_{12}U \perp A_1A_2$
- $A_1H \parallel M_{02}U$, weil $A_1H, M_{02}U \perp A_0A_2$
- $A_0A_1 \parallel M_{12}M_{02}$ mit $|A_0A_1| : |M_{12}M_{02}| = 2 : 1$, nach dem Strahlensatz.

Die Dreiecke $\triangle A_0A_1H$ und $\triangle M_{12}M_{02}U$ sind also ähnliche Dreiecke mit einem Streckungsfaktor 2. Daher gilt:

$$|A_0H| : |M_{12}U| = 2 : 1. \quad (6.3)$$

Da das Dreieck $\triangle A_0H_0M_{12}$ bei H_0 einen rechten Winkel hat, muss der Winkel $\angle A_0M_{12}H_0 < 90^\circ$ sein. Nach Konstruktion gilt: $\angle H_0M_{12}U = 90^\circ$. Der Umkreismittelpunkt U und der der Höhenschnittpunkt H liegen daher auf verschiedenen Seiten von A_0M_{12} .

Es sei S' der Schnittpunkt der Strecke HU mit A_0M_{12} , dann gilt durch den Scheitelwinkelsatz:

$$\begin{aligned} \angle A_0S'H &= \angle M_{12}S'U \\ \angle HA_0S' &= \angle UM_{12}S', \text{ weil } A_0H \parallel M_{12}U. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle A_0HS'$ und $\triangle M_{12}US'$ und mit (6.3) folgt:

$$|A_0S'| : |M_{12}S'| = 2 : 1 \quad (6.4)$$

$$|S'H| : |S'U| = 2 : 1. \quad (6.5)$$

Die Seitenhalbierende A_0M_{12} wird also durch S' im Verhältnis $2 : 1$ geteilt. Diese Eigenschaft erfüllt jedoch auch der Schwerpunkt S , wodurch die Punkte S' und S zusammenfallen. Der Schwerpunkt S liegt also auf der durch H und U laufenden Strecke. Die Behauptung über das Teilungsverhältnis folgt direkt aus (6.5). \square

Bemerkung 2. In einem gleichseitigem Dreieck fallen die Punkte H, S und U zusammen, da die Eckpunkte auf den Streckensymmetralen der gegenüberliegenden Seiten liegen. In diesem Fall existiert also keine Euler'sche Gerade.

Definition 6.1.2 (Euler'sche Gerade eines Dreiecks). Die Verbindungsgerade des Höhenschnittpunkts H , des Schwerpunkts S und des Umkreismittelpunkts U eines nicht gleichseitigen Dreiecks wird als Euler'sche Gerade eines Dreiecks bezeichnet.

6.2 Die Euler'sche Gerade eines Tetraeders

In diesem Abschnitt wird die Euler'sche Gerade aus 6.1 auf ein Tetraeder verallgemeinert. Der Inhalt des Satzes zur Existenz, sowie der Aufbau des Beweises wurden aus [11, S. 685] übernommen.

Satz 6.2.1 (Existenz der Euler'schen Gerade eines Tetraeders [11, S. 685]). *In jedem nicht gleichseitigen Tetraeder liegen der Monge Punkt M , der Schwerpunkt S und der Umkugelmittelpunkt U auf einer Geraden. Der Schwerpunkt teilt dabei die Strecke MU im Verhältnis $1 : 1$. Im orthogonalen Tetraeder fallen die Punkte M, S und U zusammen.*

Beweis. Aus den Abschnitten 4.2 und 5.2 ist bekannt, dass die Koordinaten des Umkugelmittelpunkts U und die Koordinaten des Monge Punkts M für alle $i, j = 0, 1, 2, 3$ mit $i \neq j$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (a_i + a_j - 2u) &= 0 \\ b_{ij} \cdot (a_k + a_l - 2m) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Addieren der beiden Gleichungen erhält man:

$$b_{ij} \cdot (a_i + a_j - 2u) + b_{ij} \cdot (a_k + a_l - 2m) = b_{ij} \cdot (a_i + a_j + a_k + a_l - 2u - 2m) = 0$$

und daher

$$b_{ij} \cdot \left(\frac{a_i + a_j + a_k + a_l - 2m - 2u}{4} \right) = b_{ij} \cdot \left(s - \frac{m + u}{2} \right) = 0. \quad (6.6)$$

Aus Gleichung (6.6) folgt für den Schwerpunkt S :

$$s = \frac{m + u}{2}. \quad (6.7)$$

Die Punkte M, U und S liegen also auf einer Geraden, wobei der Punkt S die Strecke MU im Verhältnis $1 : 1$ teilt. \square

Bemerkung 3. In einem gleichseitigem Tetraeder fallen die Punkte $M = H, S$ und U zusammen, da die Eckpunkte und somit auch die Kantenmittelpunkte auf den 1-Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Kanten liegen. In diesem Fall existiert also keine Euler'sche Gerade.

Definition 6.2.2 (Euler'sche Gerade eines Tetraeders). Die Verbindungsgerade des Monge Punkts M , des Schwerpunkts S und des Umkugelmittelpunkts U eines nicht gleichseitigen Tetraeders wird als Euler'sche Gerade eines Tetraeders bezeichnet.

6.2 Die Euler'sche Gerade eines Tetraeders

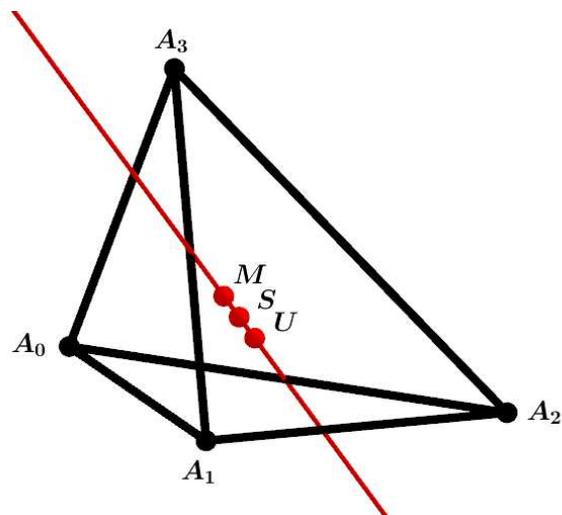


Abbildung 6.2: Skizze zum Beweis der Existenz der Euler'schen Gerade.

6.3 Die Euler'sche Gerade eines n -Simplex

In diesem Abschnitt wird die Euler'sche Gerade aus 6.1 auf ein Simplex verallgemeinert. Der Inhalt des Satzes zur Existenz, wurde aus [11, S. 685] übernommen, der Aufbau des Beweises wurde aus dem 3-dimensionalen Fall für den n -dimensionalen Fall angepasst.

Satz 6.3.1 (Existenz der Euler'schen Gerade eines n -Simplex [11, S. 685]). *In jedem nicht gleichseitigen n -Simplex liegen der Monge Punkt M , der Schwerpunkt S und der Umkugelmittelpunkt U auf einer Geraden. Der Schwerpunkt teilt dabei die Strecke MU im Verhältnis $2 : (n - 1)$. Im orthozentrischem n -Simplex fallen die Punkte M, S und U zusammen.*

Beweis. Aus den Abschnitten 4.3 und 5.3 ist bekannt, dass die Koordinaten des Umkugelmittelpunkts U und die Koordinaten des Monge Punkts M für alle $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ mit $i \neq j$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (a_i + a_j - 2u) &= 0 \\ b_{ij} \cdot (a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_n - (n-1)m) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Addieren der beiden Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} b_{ij} \cdot (a_i + a_j - 2u) + b_{ij} \cdot (a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots \\ + a_n - (n-1)m) = b_{ij} \cdot (a_0 + \dots + a_n - (n-1)m - 2u) = 0 \end{aligned}$$

und daher

$$b_{ij} \cdot \left(\frac{a_0 + \dots + a_n - (n-1)m - 2u}{n+1} \right) = b_{ij} \cdot \left(s - \frac{(n-1)m + 2u}{n+1} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Aus Gleichung (6.8) folgt für den Schwerpunkt S :

$$s = \frac{(n-1)m + 2u}{n+1}. \quad (6.9)$$

Die Punkte M, U und S liegen also auf einer Geraden, wobei der Punkt S die Strecke MU im Verhältnis $2 : (n - 1)$ teilt. \square

Das erklärt, warum im 2-dimensionalen, wo der Höhenschnittpunkt dem Monge entspricht, das Verhältnis der Euler'schen Gerade $2 : 1$ ist, im 3-dimensionalen jedoch $2 : 2$ bzw. $1 : 1$.

Bemerkung 4. In einem gleichseitigem Simplex fallen die Punkte $M = H, S$ und U zusammen, da die Schwerpunkte der $(n-2)$ -dimensionalen Seiten auf den 1-Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Kanten liegen. In diesem Fall existiert also keine Euler'sche Gerade.

Definition 6.3.2 (Euler'sche Gerade eines n -Simplex). Die Verbindungsgerade des Monge Punkts M , des Schwerpunkts S und des Umkugelmittelpunkts U eines nicht gleichseitigen Simplex wird als Euler'sche Gerade eines n -Simplex bezeichnet.

7 Der Feuerbach'sche Kreis

In diesem Kapitel wird der Feuerbach'sche Kreis eines Dreiecks auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinert. Dabei werden die Seitenmittelpunkte des Dreiecks, wie in Kapitel 5, durch die Schwerpunkte verallgemeinert. Interessant ist hier, dass die Höhenfußpunkte im Höherdimensionalen im Allgemeinen nicht auf der Feuerbach'schen Sphäre liegen. Ebenso interessant ist, dass die Verallgemeinerung der Eigenschaft, dass jede Verbindungsstrecke des Höhenschnittpunkt mit den Eckpunkten des Dreiecks durch den Feuerbach'schen Kreis im selben Verhältnis geteilt wird, wieder zum, in Kapitel 5 definierten, Monge Punkt führt.

7.1 Der Feuerbach'sche Kreis

In diesem Abschnitt wird die Existenz des Feuerbach'schen Kreises und dessen Mittelpunkt gezeigt. Für den geometrischen Beweis wurde sich an [2, S. 6-8] und [9, 57f] orientiert. Der Aufbau der mathematischen Sätze sowie die algebraische Herleitung wurden aus [6, S. 9-16] übernommen. Dabei wurde der Beweis für Tetraeder auf den 2-dimensionalen Raum adaptiert.

7.1.1 Die Seitenmittelpunkte der Dreiecksseiten

Da die Seitenmittelpunkte M_{ij}, M_{jk}, M_{ik} der Dreiecksseiten nicht auf einer Gerade liegen können, kann man einen Kreis definieren, der durch diese Punkte verläuft:

Definition 7.1.1 (Feuerbach'sche Kreis). Der Feuerbach'sche Kreis Γ ist der Umkreis der Seitenmittelpunkte der Dreiecksseiten des Dreiecks. Sein Mittelpunkt wird mit F und sein Radius mit r_Γ bezeichnet.

Satz 7.1.2. *Der Mittelpunkt F des Feuerbach'schen Kreises liegt auf der Verbindungsstrecke von H und U und teilt diese im Verhältnis $1 : 1$. Sein Radius r_Γ ist halb so groß wie der Umkreisradius r_U .*

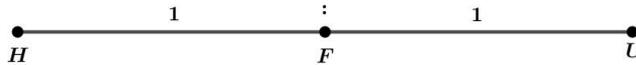


Abbildung 7.1: Skizze zur gegenseitigen Lage von H, F und U .

Beweis. Sei Δ ein Dreieck mit Eckpunkten A_i, A_j, A_k und Schwerpunkt S und Δ' das von den Seitenmittelpunkten M_{ij}, M_{ik}, M_{jk} von Δ erzeugte Dreieck. Für den Ortsvektor des Seitenmittelpunkts M_{ij} gilt nach (4.1):

$$m_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j).$$

Der Schwerpunkt S' des Dreiecks Δ' ergibt sich zu

$$\begin{aligned} s' &= \frac{1}{3}(m_{ij} + m_{ik} + m_{jk}) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}(a_i + a_j) - \frac{1}{2}(a_i + a_k) + \frac{1}{2}(a_j + a_k) \right) = \\ &= \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k) \end{aligned}$$

und fällt somit mit dem Schwerpunkt S des Dreiecks Δ zusammen. Somit haben die beiden Dreiecke Δ und Δ' denselben Schwerpunkt und für den Eckpunkt A_i von Δ und

seinen gegenüberliegenden Eckpunkt M_{jk} von Δ' gilt:

$$\begin{aligned} M_{jk} &= S - \frac{1}{2}(A_i - S) \\ m_{jk} &= \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}a_i. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Das Dreieck Δ' ergibt sich also durch zentrische Streckung des Dreiecks Δ mit Zentrum S um den Faktor $-\frac{1}{2}$.

Die Eckpunkte von Δ werden also durch die zentrische Streckung auf die Eckpunkte von Δ' abgebildet. Da sich Längen bei der zentrischen Streckung um den Betrag des Streckungsfaktors verändern wird auch der Umkreis des Dreiecks Δ auf den Umkreis des Dreiecks Δ' , also den Feuerbach'schen Kreis abgebildet. Der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises ergibt sich somit durch zentrische Streckung des Umkreismittelpunkts von Δ mit Zentrum S um den Streckungsfaktor $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} F &= S - \frac{1}{2}(U - S) \\ f &= \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}u. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Für den Radius r_Γ des Feuerbach'schen Kreises folgt:

$$r_\Gamma = \frac{1}{2}r_U,$$

wobei r_U der Umkreisradius des Dreiecks Δ ist.

Da nach Abschnitt 6.1 der Schwerpunkt S die Verbindungsstrecke von H und U im Verhältnis $2 : 1$ teilt und F um $\frac{1}{2}$ des Abstands SU in Richtung H von S entfernt ist folgt, dass F die Verbindungsstrecke HU im Verhältnis $1 : 1$ teilt. \square

Nach dem geometrischen Beweis in 5.1 entspricht der Höhenschnittpunkt H' eines eingeschriebenen Dreiecks dem Umkreismittelpunkt U des umgeschriebenen Dreiecks. Da der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises F nach Definition dem Umkreis U' des eingeschriebenen Dreiecks Δ' entspricht, liegen die Punkte $F \hat{=} U'$, $S = S'$, $U = H'$ und H nach Kapitel 6.1 alle auf einer Euler'schen Gerade. Die Lage von $H, F, S = S'$ und $U = H'$ ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Die Abbildung zeigt ebenso die Teilung von $H'F = UF$ durch $S = S'$ im Verhältnis $2 : 1$, wie in Abschnitt 6.1 erarbeitet.

7.1.2 Der Durchschnitts des Feuerbach'schen Kreises mit den Trägergeraden der Dreiecksseiten

Es stellt sich heraus, dass auch die Höhenfußpunkte H_i auf dem Feuerbach'schen Kreis liegen. Um den folgenden Satz für höhere Dimensionen leichter Verallgemeinern zu können wird diese Eigenschaft wie folgt formuliert:

7 Der Feuerbach'sche Kreis

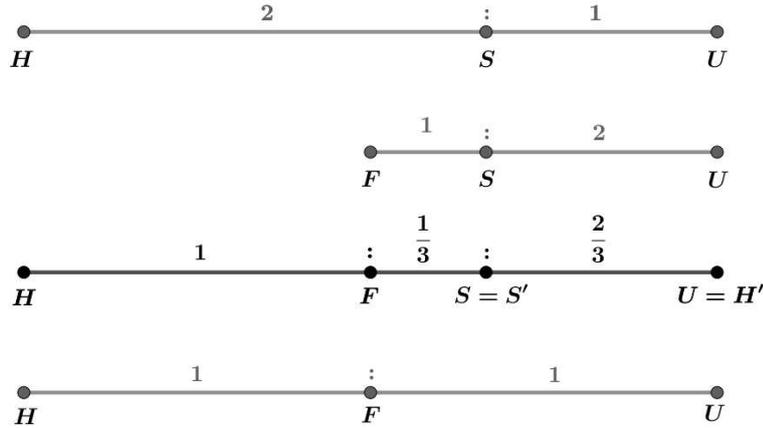


Abbildung 7.2: Skizze zur gegenseitigen Lage von $H, F, S = S'$ und $U = H'$.

Satz 7.1.3. *Der Durchschnitt des Feuerbach'schen Kreises mit der Trägergeraden $g_i = g(A_j, A_k)$ ist eine Strecke mit Mittelpunkt*

$$\begin{aligned} U'_i &= M_{jk} + \frac{1}{2}(H_i - M_{jk}) \\ u'_i &= \frac{1}{2}(m_{jk} + h_i) \end{aligned} \quad (7.3)$$

und Länge

$$d'_i = d(H_i, M_{jk}), \quad (7.4)$$

wobei der Punkt U'_i der Lotfußpunkt von F auf die Trägergerade g_i bezeichnet.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Gerade durch F und U'_i orthogonal auf die Trägergerade g_i der Dreiecksseite $A_j A_k$ steht. Für den Punkt U'_i soll dabei die Gleichung (7.3) erfüllt sein. Mit Hilfe von (7.1), (7.2) und (7.3) erhält man:

$$\begin{aligned} F - U'_i &= \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}m_{jk} - \frac{1}{2}h_i = \\ &= \frac{1}{2}(a_i + a_j + a_k) - \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}(a_j + a_k) - \frac{1}{2}h_i \\ &= \frac{1}{2}a_i - \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}(a_j + a_k) - \frac{1}{2}h_i = \\ &= \frac{1}{2}a_i - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}m_{jk} - \frac{1}{2}h_i = \\ &= -\frac{1}{2}[(U - M_{jk}) + (H_i - A_i)]. \end{aligned}$$

Da die Streckensymmetrale durch U und M_{jk} , sowie die Höhe durch H_i und A_i nach Definition beide normal auf g_i stehen folgt, dass die Gerade durch F und U'_i orthogonal auf die Trägergerade g_i steht. \square

7.1.3 Die Teilung der Verbindungsstrecke der Eckpunkte mit dem Höhenschnittpunkt

Satz 7.1.4. *Der Feuerbach'sche Kreis teilt die Verbindungsstrecken des Höhenschnittpunkts H mit den Eckpunkten A_i, A_j, A_k des Dreiecks im Verhältnis $1 : 1$.*

Beweis. Sei A'_i ein Punkt auf der Verbindungsstrecke des Höhenschnittpunkts H mit dem Eckpunkt A_i , der die Verbindungsstrecke von A_i und H im Verhältnis $1 : 1$ teilt. Für den Punkt A'_i gilt daher: Da der Punkt A'_i in der Mitte der Verbindungsstrecke von A_i und H liegt folgt:

$$A'_i = H + \frac{1}{2}(A_i - H) = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}A_i. \quad (7.5)$$

Aus Abbildung 7.2 folgt für H :

$$H = F - (U - F) = 2F - U. \quad (7.6)$$

Durch Einsetzen von (7.6) in (7.5) folgt:

$$A'_i = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}A_i = F - \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}A_i \quad (7.7)$$

daraus ergibt sich

$$A'_i - F = \frac{1}{2}(A_i - U).$$

Der Abstand von A'_i und F entspricht also $\frac{1}{2}r_U$, also der Hälfte des Umkreisradius des Dreiecks Δ und daher genau dem Radius r_Γ des Feuerbach'schen Kreises. Der Mittelpunkt A'_i der Verbindungsstrecke des Höhenschnittpunkts mit dem Eckpunkt A_i liegt also auf dem Feuerbach'schen Kreis. Analog folgt dies für die andern Eckpunkte. Demnach teilt der Feuerbach'sche Kreis die Verbindungsstrecken des Höhenschnittpunkts mit den Eckpunkten des Dreiecks im Verhältnis $1 : 1$. □

Es stellt sich die Frage, ob es noch andere Punkte gibt, deren Verbindungsstrecken mit den Eckpunkten des Dreiecks durch den Feuerbach'schen Kreis im selben Verhältnis geteilt werden.

Satz 7.1.5 ([6, S. 16, 28f]). *Der Höhenschnittpunkt ist der einzige Punkt, dessen offenen Halbgeraden durch die Eckpunkte des Dreiecks durch den Feuerbach'schen Kreis im selben Verhältnis geteilt werden.*

Beweis. Dieser Beweis folgt dem Beweis in [6, S. 26-29, 33-35]. Sei \tilde{H} ein weiterer Punkt, dessen offenen Halbgeraden durch die Eckpunkte A_i, A_j, A_k durch den Feuerbach'schen Kreis im selben Verhältnis geteilt wird. Es existiert also ein $\lambda > 0$ so, dass die Punkte

$$\begin{aligned} A'_i &= \tilde{H} + \lambda(A_i - \tilde{H}) \\ a'_i &= (1 - \lambda)\tilde{h} + \lambda a_i \end{aligned} \quad (7.8)$$

7 Der Feuerbach'sche Kreis

alle am Feuerbach'schenkreis liegen.

Demnach muss für $i = 0, 1, 2$

$$d(A'_i, F) = r_\Gamma \quad (7.9)$$

erfüllt sein, wobei F der Mittelpunkt und r_Γ der Radius des Feuerbach'schen Kreises bezeichnet. Aus den drei Eckpunkten A_0, A_1, A_2 eines Dreiecks ergeben sich 3 Gleichungen für die Unbekannten λ und \tilde{H} :

$$d(A'_i, F)^2 = ((1 - \lambda)\tilde{h} + \lambda a_i - f)^2 = r_\Gamma^2 \quad \text{mit } i = 0, 1, 2. \quad (7.10)$$

Durch Ausmultiplizieren folgt:

$$(1 - \lambda)^2 \tilde{h}^2 + \lambda^2 a_i^2 + f^2 + 2\lambda(1 - \lambda)a_i \tilde{h} - 2(1 - \lambda)\tilde{h}f - 2\lambda a_i f = r_\Gamma^2. \quad (7.11)$$

Durch Gleichsetzen von (7.10) mit verschiedenen Indizes i, j folgt

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)^2 \tilde{h}^2 + \lambda^2 a_i^2 + f^2 + 2\lambda(1 - \lambda)a_i \tilde{h} - 2(1 - \lambda)\tilde{h}f - 2\lambda a_i f = \\ (1 - \lambda)^2 \tilde{h}^2 + \lambda^2 a_j^2 + f^2 + 2\lambda(1 - \lambda)a_j \tilde{h} - 2(1 - \lambda)\tilde{h}f - 2\lambda a_j f, \end{aligned}$$

wobei sich durch Heraus Kürzen der, von a_i und a_j unabhängigen, gleichen Summanden die folgende Gleichung ergibt:

$$\lambda^2 a_i^2 + 2\lambda(1 - \lambda)a_i \tilde{h} - 2\lambda a_i f = \lambda^2 a_j^2 + 2\lambda(1 - \lambda)a_j \tilde{h} - 2\lambda a_j f.$$

Da $\lambda > 0$ kann durch λ^2 dividiert werden:

$$a_i^2 + 2\frac{1 - \lambda}{\lambda}a_i \tilde{h} - \frac{2}{\lambda}a_i f = a_j^2 + 2\frac{1 - \lambda}{\lambda}a_j \tilde{h} - \frac{2}{\lambda}a_j f. \quad (7.12)$$

Für $\lambda = 1$ würde aus (7.8) $A'_i = A_i$ und somit aus (7.9) $d(A_i, F) = r_\Gamma$ und daraus wiederum $F = U$ folgen, was zu einem Widerspruch von (7.1.1) führt. Daher ist für $\lambda = 1$ keine Lösung des Gleichungssystems (7.10) möglich. Setzt man nun

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \tilde{H} + \frac{1}{\lambda}(F - \tilde{H}) \\ \bar{h} &= \frac{\lambda - 1}{\lambda}\tilde{h} + \frac{1}{\lambda}f \end{aligned} \quad (7.13)$$

und formt nach \tilde{h} um, so erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \bar{H} + \frac{1}{\lambda - 1}(\bar{H} - F) \\ \tilde{h} &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}\bar{h} - \frac{1}{\lambda - 1}f = \frac{1}{1 - \lambda}f - \frac{\lambda}{1 - \lambda}\bar{h}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Setzt man nun in die Gleichung (7.12) für \tilde{h} den Ausdruck (7.14) ein und erweitert die Gleichung auf beiden Seiten mit \bar{h}^2 , so ergibt sich

$$\begin{aligned} a_i^2 + 2\frac{1 - \lambda}{\lambda}a_i \left(\frac{1}{1 - \lambda}f - \frac{\lambda}{1 - \lambda}\bar{h} \right) - \frac{2}{\lambda}a_i f + \bar{h}^2 = \\ a_j^2 + 2\frac{1 - \lambda}{\lambda}a_j \left(\frac{1}{1 - \lambda}f - \frac{\lambda}{1 - \lambda}\bar{h} \right) - \frac{2}{\lambda}a_j f + \bar{h}^2. \end{aligned}$$

Durch Heraus Kürzen der, von a_i und a_j unabhängigen, gleichen Summanden folgt durch einfache Umformungen:

$$\begin{aligned}
a_i^2 + \frac{2}{\lambda}a_i f - 2a_i \bar{h} - \frac{2}{\lambda}a_i f + \bar{h}^2 &= a_j^2 + \frac{2}{\lambda}a_j f - 2a_j \bar{h} - \frac{2}{\lambda}a_j f + \bar{h}^2 \\
a_i^2 - 2a_i \bar{h} + \bar{h}^2 &= a_j^2 - 2a_j \bar{h} + \bar{h}^2 \\
(A_i - \bar{H})^2 &= (A_j - \bar{H})^2 \\
d(A_i, \bar{H})^2 &= d(A_j, \bar{H})^2.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Die Eckpunkte A_i und A_j sind also gleich weit vom Punkt \bar{H} entfernt. Daraus folgt, dass der Punkt \bar{H} dem Umkreismittelpunkt U entspricht. Aus (7.14) folgt somit:

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= U + \frac{1}{\lambda - 1}(U - F) \\
\tilde{H} &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}u - \frac{1}{\lambda - 1}f.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Der Punkt \tilde{H} liegt also genau wie H auf der Geraden durch U und F . Aus (7.8) folgt für den Punkt A'_i :

$$\begin{aligned}
a'_i &= (1 - \lambda)\tilde{h} + \lambda a_i = \\
&= (1 - \lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}u - \frac{1}{\lambda - 1}f\right) + \lambda a_i = \\
&= \lambda a_i - \lambda u + f.
\end{aligned}$$

Für den Abstand von A'_i und F folgt mit (7.9):

$$\begin{aligned}
r_\Gamma &= d(A'_i, F) = \sqrt{(\lambda a_i - \lambda u + f - f)^2} = \\
&= \sqrt{(\lambda(a_i - u))^2} = \\
&= \sqrt{\lambda^2(a_i - u)^2} = \\
&= |\lambda|\sqrt{(a_i - u)^2} = \\
&= |\lambda|d(A_i, U) = \\
&= |\lambda|r_U. \\
\implies |\lambda| &= \frac{r_\Gamma}{r_U}.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Aus Satz 7.1.2 folgt mit der Voraussetzung $\lambda > 0$ damit unmittelbar

$$\lambda = \frac{1}{2}. \tag{7.18}$$

Durch Einsetzen von $\lambda = \frac{1}{2}$ in (7.16) folgt mit (7.6) $\tilde{H} = H$. Der Höhenschnittpunkt H ist also der einzige Punkt, dessen offenen Halbgeraden durch die Eckpunkte des Dreiecks vom Feuerbach'schen Kreis im selben Verhältnis geteilt werden. \square

7 Der Feuerbach'sche Kreis

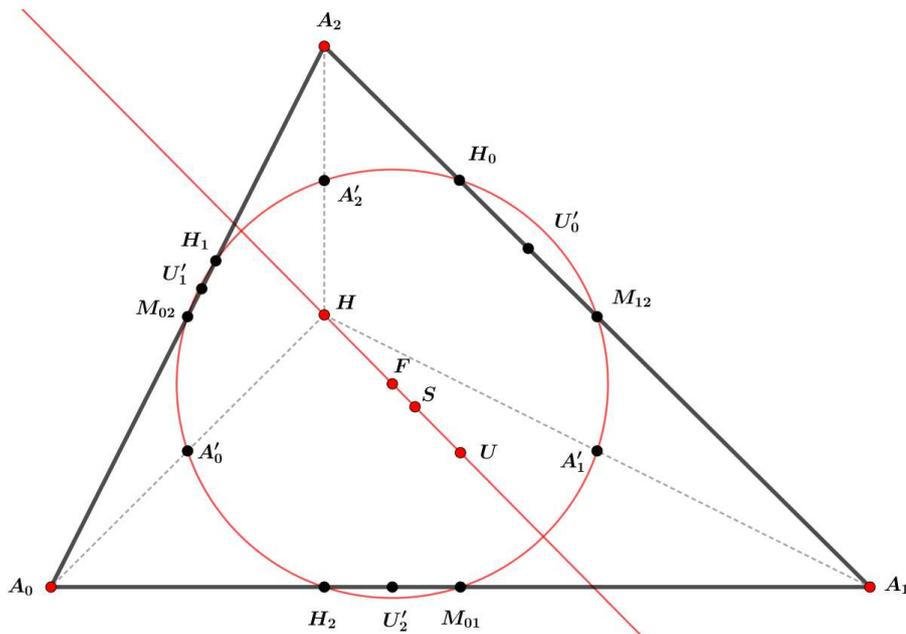


Abbildung 7.3: Skizze zum Feuerbach'schen Kreis eines spitzwinkligen Dreiecks.

In Abbildung 7.3 ist der Feuerbach'sche Kreis mit allen behandelten Punkten dargestellt.

Die bereits gezeigten Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises können nochmals zu folgendem Satz zusammengefasst werden:

Satz 7.1.6 (Existenz des Feuerbach'schen Kreises). *Für jedes Dreieck existiert ein eindeutiger Kreis, der die Seitenmittelpunkte, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte der Verbindungsstrecke der Eckpunkte mit dem Höhenschnittpunkt beinhaltet. Der Radius dieses Kreises ist halb so groß wie der Umkreisradius und sein Mittelpunkt liegt auf der Euler'schen Geraden genau zwischen dem Höhenschnittpunkt und dem Umkreismittelpunkt. Der Kreis schneidet aus den Trägergeraden des Dreiecks eine Strecke aus, deren Randpunkte der Höhenfußpunkt und der Seitenmittelpunkt der jeweiligen Dreiecksseite ist.*

Die Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises können auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Hier wird der Beweis aus [2, S. 6-8] wiedergegeben. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle A_0A_1A_2$. Seien M_{01}, M_{02} und M_{12} die Seitenmittelpunkte, H_0, H_1 , und H_2 die Höhenfußpunkte, H der Höhenschnittpunkt und A'_0, A'_1 und A'_2 die Mittelpunkte der Verbindungsstrecke der Eckpunkte mit dem Höhenschnittpunkt.

Nun ist zu zeigen, dass $M_{01}, M_{02}, M_{12}, H_0, H_1, H_2, A'_0, A'_1$ und A'_2 auf einem Kreis liegen. Nach dem Strahlensatz sind die Strecken $M_{02}M_{12}$ und A_0A_1 zueinander parallel, also

$$M_{02}M_{12} \parallel A_0A_1. \quad (7.19)$$

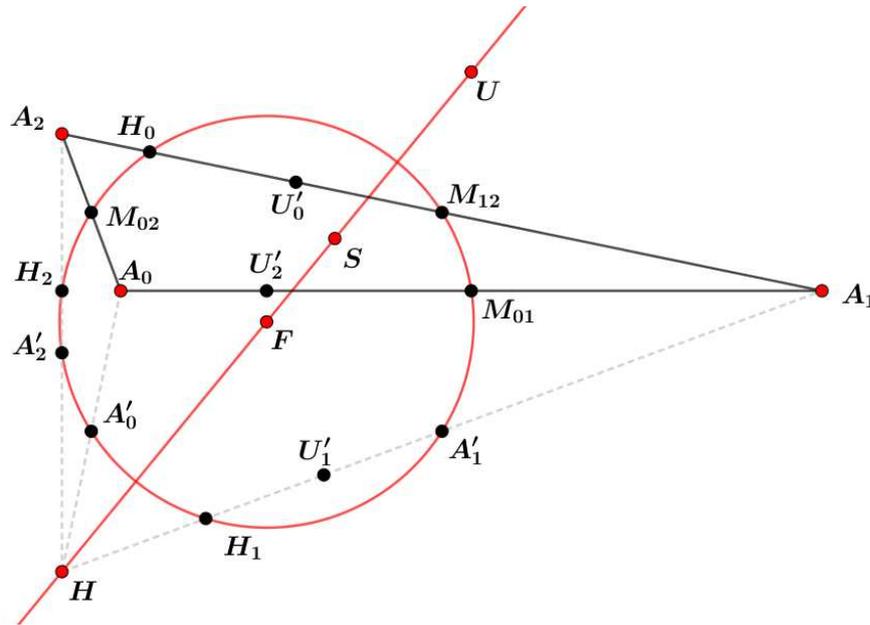


Abbildung 7.4: Skizze zum Feuerbach'schen Kreis eines stumpfwinkligen Dreiecks.

Durch Anwenden des Strahlensatzes auf das Dreieck $\triangle A_0A_1H$ folgt:

$$A'_0A'_1 \parallel A_0A_1. \quad (7.20)$$

Aus (7.19) und (7.20) folgt somit:

$$M_{02}M_{12} \parallel A'_0A'_1 \parallel A_0A_1.$$

Wendet man nun den Strahlensatz auf das Dreieck $\triangle A_1A_2H$ an, so folgt die Parallelität:

$$M_{12}A'_1 \parallel A_2H.$$

Analog folgt für das Dreieck $\triangle A_0A_2H$:

$$M_{02}A'_0 \parallel A_2H.$$

Daraus ergibt sich die Parallelität:

$$M_{12}A'_1 \parallel M_{02}A'_0 \parallel A_2H.$$

Des Weiteren stehen $M_{12}A'_1$ und $M_{02}A'_0$ normal auf $M_{02}M_{12}$ und $A'_0A'_1$, da $A_2H \perp A_0A_1$. Die Punkte M_{02} , M_{12} , A'_0 und A'_1 bilden somit ein Rechteck. Sei F der Mittelpunkt dieses Rechtecks, dann ist F äquidistant zu allen vier Eckpunkten. Die vier Eckpunkte liegen somit auf einem Kreis Γ mit Mittelpunkt F und Durchmesser $M_{12}A'_0$ bzw. $M_{02}A'_1$.

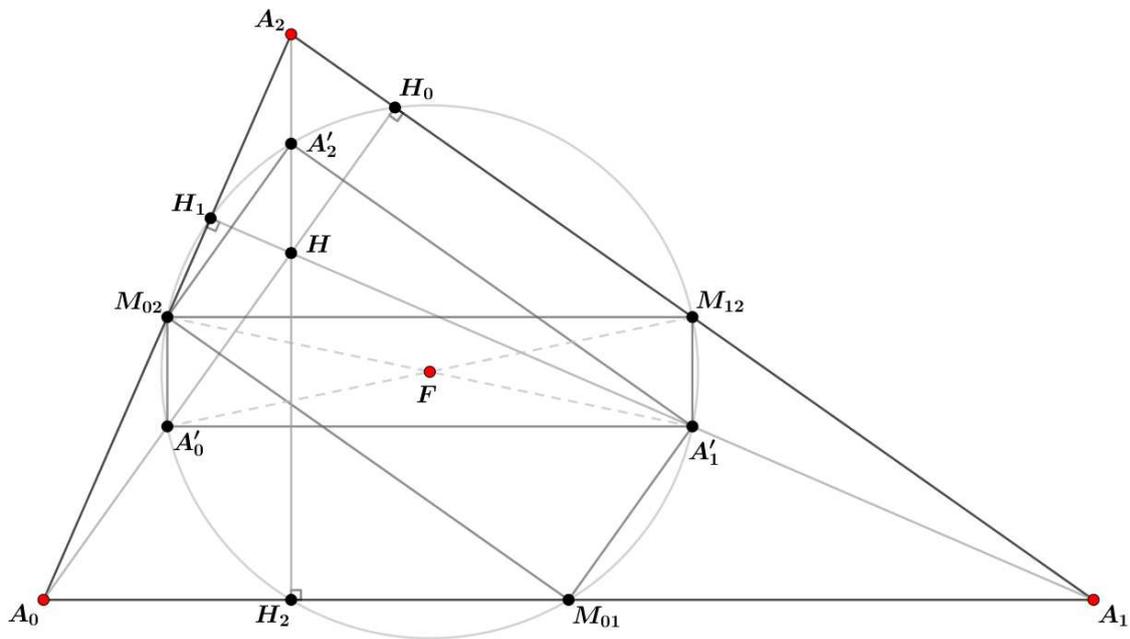


Abbildung 7.5: Skizze zum Beweis der Existenz des Feuerbach'schen Kreises.

Nun bleibt zu zeigen, dass Γ ebenso die Punkte M_{01} , H_0 , H_1 , H_2 und A'_2 enthält. Der Höhenfußpunkt H_0 liegt auf den beiden Geraden $g(A_0, H_0)$ und $g(A_1, A_2)$, wobei $g(A_0, H_0) \perp g(A_1, A_2)$. Außerdem gilt:

$$M_{12} \in g(A_1, A_2)$$

und

$$A'_0 \in g(A_0, H_0).$$

Der Winkel $\angle A'_0 H_0 M_{12}$ ist also rechtwinklig. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt der Höhenfußpunkt H_0 demnach auf einem Kreis mit der Hypotenuse $A'_0 M_{12}$ als Durchmesser. Da $A'_0 M_{12}$ Durchmesser von Γ ist, gilt: $H_0 \in \Gamma$. Über den Kreisdurchmesser $M_{02} A'_1$ folgt analog $H_1 \in \Gamma$.

Betrachtet man nun $A_1 A_2$ als Basis, so erhält man analog zu vorhin das Rechteck $M_{01} A'_1 A'_2 M_{02}$. Da F der Mittelpunkt der Strecke $M_{02} A'_1$ ist, ist F ebenso der Mittelpunkt des Rechtecks $M_{01} A'_1 A'_2 M_{02}$. Somit liegen auch M_{01} und A'_2 auf dem Kreis Γ , wobei $M_{01} A'_2$ ein weiterer Durchmesser des Kreises ist. Für den Punkt H_2 folgt analog zu oben

$$\angle M_{01} H_2 A'_2 = 90^\circ \Rightarrow H_2 \in \Gamma.$$

Nun bleibt zu zeigen, dass F der Mittelpunkt der Strecke HU und der Umkreisradius r_U doppelt so groß, wie der Radius des Kreises Γ ist. Sei A_2^* der Symmetriepunkt von A_2 bezüglich der Umkreismittelpunktes U , wie in Abbildung 7.6 dargestellt, so ist die

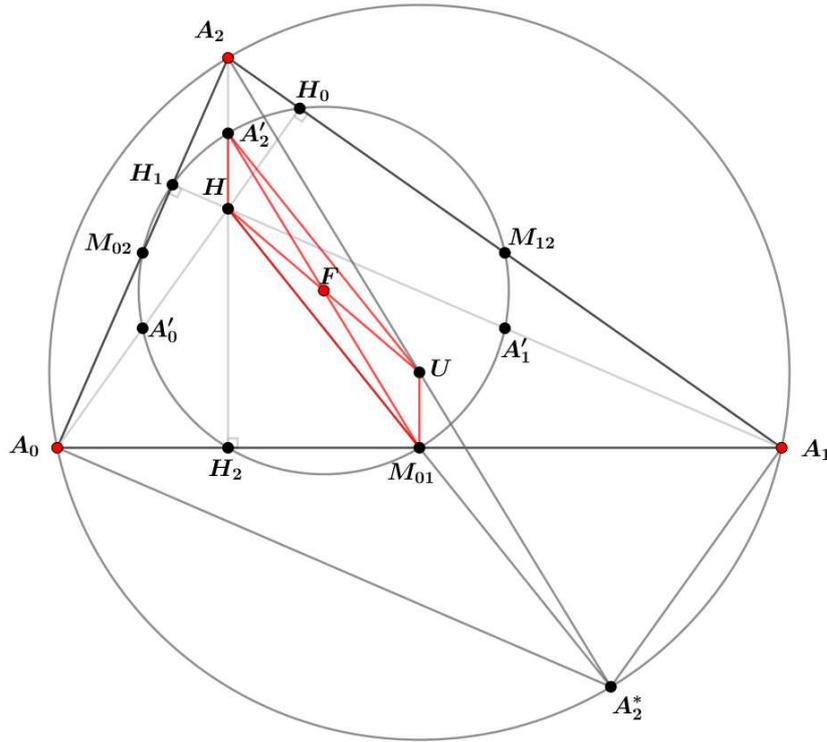


Abbildung 7.6: Skizze zum Beweis der Existenz des Feuerbach'schen Kreises.

Strecke $A_2A'_2$ ein Durchmesser des Umkreises. Nach dem Satz von Thales gilt daher:

$$\begin{aligned}\angle A_2^*A_0A_2 = 90^\circ &\Rightarrow A_0A_2^* \perp A_0A_2 & A_0A_2^* \parallel HA_1 \\ \angle A_2^*A_1A_2 = 90^\circ &\Rightarrow A_2^*A_1 \perp A_1A_2 & A_2^*A_1 \parallel A_0H.\end{aligned}$$

Die Punkte A_2^*, A_1, H und A_0 bilden also ein Parallelogramm. Da sich die Diagonalen halbieren gilt: $|HM_{01}| = |M_{01}A_2^*|$ und H, M_{01} und A_2^* sind kollinear. Nach Konstruktion gilt: $\angle M_{01}H_2A'_2 = 90^\circ$ und außerdem $H_2, M_{01}, A'_2 \in \Gamma$. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales ist die Strecke $M_{01}A'_2$ daher ein Durchmesser von Γ . Nach Definition gilt außerdem:

$$|A_2A'_2| = |HA'_2| = \frac{1}{2}|A_2H|. \quad (7.21)$$

Aus (7.21) und (6.3) folgt:

$$|M_{01}U| = |HA'_2|.$$

Die Punkte A'_2, U, M_{01} und H bilden also ein Parallelogramm. Die Diagonalen halbieren sich im Mittelpunkt des Kreises, weil $M_{01}A'_2$ Durchmesser des Kreises Γ ist. F liegt also in der Mitte der Strecke HU . Da der Punkt M_{01} Mittelpunkt der Strecke HA_2^* und A'_2 Mittelpunkt der Strecke A_2H ist, folgt aus dem Strahlensatz für das Dreiecks $\triangle A_2HA_2^*$:

$$|M_{01}A'_2| = \frac{1}{2}|A_2A_2^*|$$

7 Der Feuerbach'sche Kreis

und somit

$$r_{\Gamma} = \frac{1}{2}r_U.$$

Womit die Existenz und alle Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises aus Satz 7.1.6 bewiesen sind. \square

7.2 Die Feuerbach'sche Kugel

In diesem Abschnitt wird die Adaption des Feuerbach'schen Kreises auf den 3-dimensionalen Raum behandelt. Dafür wurde die Herleitung aus [6, S. 22-37] verwendet. Im Gegensatz zu [6] wurde in dieser Arbeit auf die Verwendung des Bosschen Kalküls verzichtet.

7.2.1 Verallgemeinerung der Seitenmittelpunkte auf den 3-dimensionalen Raum

Im 2-dimensionalen Raum entspricht der Feuerbach'sche Kreis dem Umkreis der Seitenmittelpunkte. Da ein Tetraeder 4 Seitenflächen besitzt und 4 Punkte zur Bestimmung einer Kugel verwendet werden können, ist es naheliegend vier Punkte des Tetraeders zu wählen, die sich jeweils auf einer Seitenfläche befinden. Um das Analogon zum 2-dimensionalen Raum zu bilden, sollten die gewählten Punkte in Bezug auf das 2-dimensionale Dreieck, dem Mittelpunkt einer Strecke im 1-dimensionalen entsprechen. Diese Analogie trifft auf folgende zwei Punkte zu:

- Dem Schwerpunkt des Dreiecks, weil der Mittelpunkt einer Strecke im physikalischen Sinn ihrem Schwerpunkt entspricht.
- Dem Umkreismittelpunkt, denn dieser ist äquidistant zu allen Eckpunkten, genauso wie der Streckenmittelpunkt zu den Eckpunkten der Strecke.

Die vier zu wählenden Punkte sollten dabei nicht in einer Ebene liegen. Da Tetraeder existieren, bei denen die Umkreismittelpunkte der Seitenflächen in einer Ebene liegen, wie das folgende Beispiel zeigt, bieten sich die Schwerpunkte an.

Beispiel 7.1. Seien A_0, A_1, A_2 und A_3 die Eckpunkte eines Tetraeders mit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Ortsvektor des Umkreismittelpunkts U_i der Seitenfläche, die dem Eckpunkt A_i gegenüberliegt gilt:

$$u_0 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3), \quad u_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3), \quad u_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_3), \quad u_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

Die vier Umkreismittelpunkte U_i liegen also alle in der von A_1, A_2 und A_3 aufgespannten Ebene.

Im Gegenzug dazu gilt das folgende Lemma.

Lemma 7.2.1. *Die vier Schwerpunkte eines Tetraeders liegen niemals in einer Ebene.*

7 Der Feuerbach'sche Kreis

Beweis. Sei T ein Tetraeder mit den Eckpunkten A_0, A_1, A_2 und A_3 . Die Punkte S_0, S_1, S_2 und S_3 seien die Schwerpunkte der den Ecken gegenüberliegenden Seiten. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3), & s_1 &= \frac{1}{3}(a_0 + a_2 + a_3), \\ s_2 &= \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_3), & s_3 &= \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2). \end{aligned}$$

Durch Umformen erhält man:

$$a_0 = s_1 + s_2 + s_3 - \frac{2}{3}(a_1 + a_2 + a_3) = s_1 + s_2 + s_3 - 2s_0. \quad (7.22)$$

Würden die Schwerpunkte S_i alle in einer Ebene liegen, so würde wegen (7.22) auch A_0 in dieser Ebene liegen. Dies folgt analog für die Eckpunkte A_1, A_2 und A_3 . Nach Voraussetzung bilden A_0, A_1, A_2 und A_3 jedoch ein Tetraeder, was ein Widerspruch dazu ist, dass alle Punkte in einer Ebenen liegen. Die Schwerpunkte S_i liegen daher nicht alle in derselben Ebene. \square

Da die Schwerpunkte S_0, S_1, S_2, S_3 der, den Punkten A_0, A_1, A_2, A_3 gegenüberliegenden Seiten nach Satz 7.2.1 nicht in einer Ebene liegen können, kann man eine Kugel definieren, die durch diese Punkte verläuft:

Definition 7.2.2 (Feuerbach'sche Kugel). Die Feuerbach'sche Kugel Γ ist die Umkugel der Schwerpunkte der Seitendreiecke des Tetraeders. Ihr Mittelpunkt wird mit F und ihr Radius mit r_Γ bezeichnet.

Als Analogon zum Feuerbach'schen Kreis als Umkreis der Seitenmittelpunkte nimmt man die Feuerbach'sche Kugel also als Umkugel der Schwerpunkte der Seitendreiecke des Tetraeders an. Für seinen Mittelpunkt F und seinen Radius r_Γ gilt:

Satz 7.2.3. Der Mittelpunkt F der Feuerbach'schen Kugel liegt auf der Verbindungsstrecke von M und U und teilt diese im Verhältnis $1 : 2$. Ihr Radius r_Γ beträgt $\frac{1}{3}$ des Umkugelradius r_U .



Abbildung 7.7: Skizze zur gegenseitigen Lage von M, F und U .

Beweis. Sei T ein Tetraeder mit Eckpunkten A_i, A_j, A_k, A_l und Schwerpunkt S und T' das von den Schwerpunkten S_i, S_j, S_k, S_l der Seitenflächen erzeugte Tetraeder. Für die Schwerpunkte S_i gilt nach Abschnitt 3.2:

$$s_i = \frac{1}{3}(a_j + a_k + a_l).$$

Der Schwerpunkt S' des Tetraeders T' ergibt sich zu

$$\begin{aligned} s' &= \frac{1}{4}(s_i + s_j + s_k + s_l) = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3}(a_j + a_k + a_l) + \frac{1}{3}(a_i + a_k + a_l) + \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_l) + \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k) \right] = \\ &= \frac{1}{4}(a_i + a_j + a_k + a_l) \end{aligned}$$

und fällt somit mit dem Schwerpunkt S des Tetraeders T zusammen. Somit haben die beiden Tetraeder T und T' denselben Schwerpunkt und für den Eckpunkt A_i von T und seinen gegenüberliegenden Eckpunkt S_i von T' gilt:

$$\begin{aligned} S_i &= S - \frac{1}{3}(A_i - S) \\ s_i &= \frac{4}{3}s - \frac{1}{3}a_i. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Das Tetraeder T' ergibt sich also durch zentrische Streckung des Tetraeders T mit Zentrum S um den Faktor $-\frac{1}{3}$.

Die Eckpunkte von T werden also durch die zentrische Streckung auf die Eckpunkte von T' abgebildet. Da sich Längen bei der zentrischen Streckung um den Betrag des Streckungsfaktors verändern wird auch die Umkugel des Tetraeders T auf die Umkugel des Tetraeders T' , also die Feuerbach'sche Kugel abgebildet. Der Mittelpunkt der Feuerbach'schen Kugel ergibt sich somit durch zentrische Streckung des Umkugelmittelpunkts von T mit Zentrum S um den Streckungsfaktor $-\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} F &= S - \frac{1}{3}(U - S) \\ f &= \frac{4}{3}s - \frac{1}{3}u. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Für den Radius r_Γ der Feuerbach'schen Kugel folgt:

$$r_\Gamma = \frac{1}{3}r_U,$$

wobei r_U der Umkugelradius des Tetraeders T ist.

Da nach Abschnitt 6.2 der Schwerpunkt S die Verbindungsstrecke von M und U im Verhältnis 1 : 1 teilt und F um $\frac{1}{3}$ des Abstands SU in Richtung M von S entfernt ist folgt, dass F die Verbindungsstrecke MU im Verhältnis 1 : 2 teilt. \square

Die Lage von M, F, S, M' und U ist in Abbildung 7.8 dargestellt. Die Abbildung zeigt ebenso die Teilung von FM' durch $S = S'$ im Verhältnis 1 : 1, wie in Abschnitt 6.2 erarbeitet.

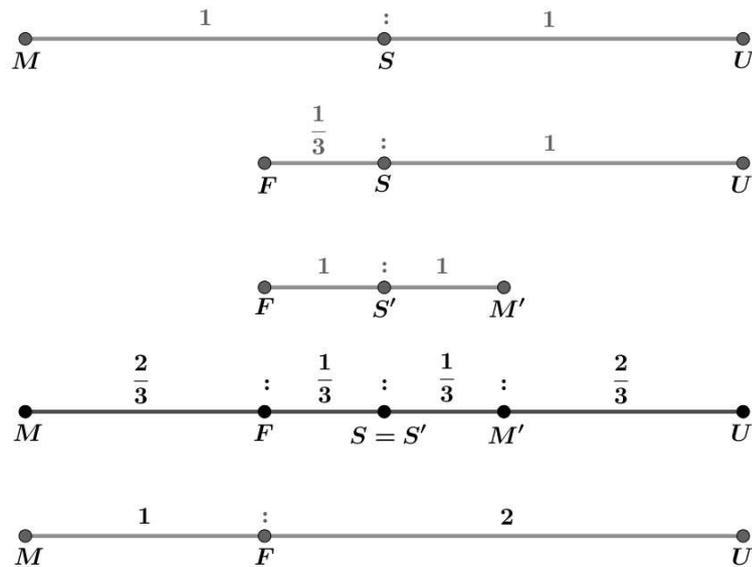


Abbildung 7.8: Skizze zur gegenseitigen Lage von M, F, S, M' und U .

7.2.2 Verallgemeinerung des Durchschnitts des Feuerbach'schen Kreises mit den Trägergeraden der Dreiecksseiten auf den 3-dimensionalen Raum

Im 2-dimensionalen Fall schneidet der Feuerbach'sche Kreis aus der Trägergerade zweier Eckpunkte des Dreiecks die Verbindungsstrecke des auf ihr liegenden Höhenfußpunkts mit dem zugehörigen Seitenmittelpunkt aus. Im 3-dimensionalen Raum entspricht dies dem Durchschnitt der Feuerbach'schen Kugel mit den Trägerebenen des Tetraeders, also den Ebenen, die jeweils drei der Eckpunkte beinhalten. Die 4 Seitenflächen des Tetraeders liegen jeweils auf einer der 4 möglichen Trägerebenen des Tetraeders. Für den Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

- 1) Der Durchschnitt ist leer.
Die Ebene und die Kugel haben also keinen gemeinsamen Punkt.
- 2) Der Durchschnitt besteht aus genau einem Punkt.
Die Ebene und die Kugel berühren sich also in genau einem Punkt, die Ebene ist eine Tangentialebene der Kugel.
- 3) Der Durchschnitt ist ein Kreis.
Der Kreismittelpunkt ist der Fußpunkt des Kugelmittelpunkts F zur Ebene.

Sei ε_i die Trägerebene der drei Eckpunkte A_j, A_k und A_l mit gegenüberliegendem Eckpunkt A_i . Der Schwerpunkt S_i der Seitenfläche $\triangle A_j A_k A_l$ liegt nach Definition auf der Feuerbach'schen Kugel und somit auch im Durchschnitt der Ebene ε_i mit der Feuerbach'schen Kugel. Der Durchschnitt der Ebene mit der Kugel kann in diesem Fall also

nicht leer sein, womit der Fall 1) ausgeschlossen werden kann.

Sei H'_i der Höhenfußpunkt von T an ε_i , also der Schnittpunkt der Geraden mit der Trägerebenen, die normal auf die Ebene steht und den gegenüberliegenden Eckpunkt A_i enthält. Außerdem sei U_i der Umkreismittelpunkt des Seitendreiecks von T in ε_i . Es gilt:

Satz 7.2.4. *Wenn $H'_i \neq U_i$, so ist der Durchschnitt der Feuerbach'schen Kugel mit der Ebene ε_i ein Kreis mit Mittelpunkt*

$$U'_i = S_i + \frac{1}{3}(H'_i - U_i), \quad (7.25)$$

wobei der Punkt U'_i der Lotfußpunkt von F auf die Trägerebene ε_i bezeichnet. Der Radius des Kreises ist gleich einem Drittel des Abstandes von H'_i und U_i .

$$r'_i = \frac{1}{3}(H'_i - U_i)$$

Gilt $H'_i = U_i$, so berührt die Feuerbach'sche Kugel die Ebene im Punkt S_i .

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Gerade durch F und U'_i orthogonal auf die Trägerebene ε_i der Tetrederseite $A_j A_k A_l$ steht. Für den Punkt U'_i soll dabei die Gleichung (7.25) erfüllt sein. Mit Hilfe von (7.23), (7.24) und (7.25) erhält man:

$$\begin{aligned} F - U'_i &= \frac{4}{3}s - \frac{1}{3}u - s_i - \frac{1}{3}(h'_i - u_i) = \\ &= \frac{4}{3}s - \frac{1}{3}u - \left(\frac{4}{3}s - \frac{1}{3}a_i\right) - \frac{1}{3}h'_i + \frac{1}{3}u_i = \\ &= -\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}a_i - \frac{1}{3}h'_i + \frac{1}{3}u_i = \\ &= -\frac{1}{3}[(U - U_i) + (H'_i - A_i)]. \end{aligned}$$

Da die Mittelsenkrechte durch U und U_i , sowie die Höhe durch H'_i und A_i nach Definition beide normal auf ε_i stehen folgt, dass die Gerade durch F und U'_i orthogonal auf die Trägerebene ε_i steht. \square

Der Durchschnitt der Feuerbach'schen Kugel mit der Ebene ε_i ist also abhängig vom Höhenfußpunkt H'_i , sowie dem Schwerpunkt S_i und dem Umkreismittelpunkt U_i von $\Delta A_j A_k A_l$, wobei der Höhenfußpunkt H'_i , wie aus dem 2-dimensionalen Raum vielleicht zu erwarten wäre, im Allgemeinen nicht auf der Feuerbach'schen Kugel liegt. Verschiebt man den Eckpunkt A_i entlang der Höhe h_i durch A_i verändert sich weder der Höhenfußpunkt H'_i noch der Schwerpunkt S_i und der Umkreismittelpunkt U_i der Seite $\Delta A_j A_k A_l$. Eine solche Verschiebung bewirkt somit keine Veränderung des Durchschnitts der Feuerbach'schen Kugel mit der Trägerebene ε_i .

Aus (7.25) kann außerdem folgende Eigenschaft hergeleitet werden:

Korollar 7.2.5. *Der Höhenfußpunkt H'_i und der Mittelpunkt U'_i des Durchschnitts der Feuerbach'schen Kugel mit der Trägerebene der Seite $\Delta A_j A_k A_l$ liegen auf einer Geraden, die die Euler'sche Gerade der Seite $\Delta A_j A_k A_l$ im Mittelpunkt F_i des Feuerbach'schen Kreises der Seite schneidet. Dabei teilt der Punkt U'_i die Verbindungsstrecke von H'_i und F_i im Verhältnis 2 : 1.*

Beweis. Sei F_i der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises der Seite $\Delta A_j A_k A_l$. Aus (7.2)

$$F_i = S_i - \frac{1}{2}(U_i - S_i) = \frac{3}{2}S_i - \frac{1}{2}U_i \quad (7.26)$$

folgt durch Umformen nach S_i :

$$S_i = \frac{2}{3}F_i + \frac{1}{3}U_i. \quad (7.27)$$

Durch Einsetzen von (7.27) in (7.25) folgt:

$$U'_i = S_i + \frac{1}{3}(H'_i - U_i) = \frac{2}{3}F_i + \frac{1}{3}H'_i = F_i + \frac{1}{3}(H'_i - F_i). \quad (7.28)$$

Die Verbindungsgeraden des Höhenfußpunkts H'_i und des Mittelpunkts U'_i , des Durchschnitts der Feuerbach'schen Sphäre mit der Trägerebene der Seite $\Delta A_j A_k A_l$, schneidet die Euler'sche Gerade der Seite $\Delta A_j A_k A_l$ also im Mittelpunkt F_i ihres Feuerbach'schen Kreises. Der Punkt U'_i teilt dabei die Verbindungsstrecke von H'_i und F_i im Verhältnis 2 : 1. Für die Trägerebene $\varepsilon_0 = \varepsilon(A_1, A_2, A_3)$ ist die Lage dieser beiden Geraden in Abbildung 7.9 dargestellt. \square

7.2.3 Verallgemeinerung der Teilung der Verbindungsstrecke der Eckpunkte mit dem Höhenschnittpunkt auf den 3-dimensionalen Raum

Es stellt sich die Frage, ob im 3-dimensionalen Raum ebenfalls ein Punkt existiert, dessen Verbindungsstrecken mit den Eckpunkten des Tetraeders von der Feuerbach'schen Kugel im selben Verhältnis geteilt werden. Da der Höhenschnittpunkt in einem Tetraeder, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, nicht zwangsweise existieren muss bietet sich als Verallgemeinerung des Höhenschnittpunkts für den höherdimensionalen Raum der in Abschnitt 5.2.1 beschriebene Monge Punkt an.

Satz 7.2.6. *Die Feuerbach'sche Kugel teilt die Verbindungsstrecke des Monge Punkts M mit den Eckpunkten A_i, A_j, A_k, A_l des Tetraeders im Verhältnis 1 : 2.*

Beweis. Sei A'_i ein Punkt auf der Verbindungsstrecke des Monge Punkts M mit dem Eckpunkt A_i , der die Verbindungsstrecke von A_i und M im Verhältnis 1 : 2 teilt. Für den Punkt A'_i gilt daher:

$$A'_i = M + \frac{1}{3}(A_i - M) = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}A_i. \quad (7.29)$$

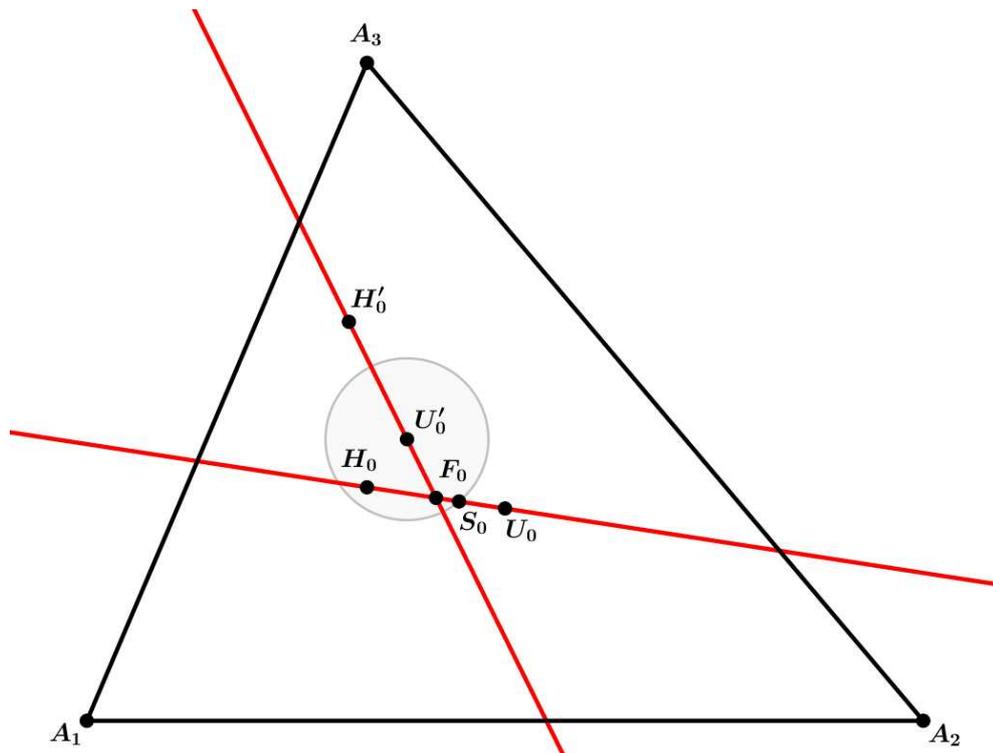


Abbildung 7.9: Skizze zur gegenseitigen Lage von $H'_0, U'_0, H_0, F_0, S_0$ und U_0 in der Ebene ε_0 .

Aus Abbildung 7.8 folgt für M :

$$M = F - \frac{1}{2}(U - F) = \frac{3}{2}F - \frac{1}{2}U. \quad (7.30)$$

Durch Einsetzen von (7.30) in (7.29) folgt:

$$A'_i = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}A_i = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}F - \frac{1}{2}U\right) + \frac{1}{3}A_i = F - \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}A_i \quad (7.31)$$

daraus ergibt sich

$$A'_i - F = \frac{1}{3}(A_i - U).$$

Der Abstand von A'_i und F entspricht also $\frac{1}{3}r_U$, also einem Drittel des Umkreisradius des Tetraeders T und daher genau dem Radius r_Γ der Feuerbach'schen Kugel. Der Punkt A'_i der die Verbindungsstrecke des Monge Punkts mit dem Eckpunkt A_i im Verhältnis 1 : 2 teilt, liegt also auf der Feuerbach'schen Kugel. Analog folgt dies für die andern Eckpunkte. Demnach teilt die Feuerbach'sche Kugel die Verbindungsstrecken des Monge Punkts mit den Eckpunkten des Tetraeders im Verhältnis 1 : 2.

□

7 Der Feuerbach'sche Kreis

Im orthozentrischen Fall fällt der Monge Punkt mit dem existierendem Höhenschnittpunkt zusammen. Demnach gilt die Aussage in Satz 7.2.6 ebenfalls für den Höhenschnittpunkt.

Es stellt sich die Frage, ob es noch andere Punkte gibt, deren Verbindungsstrecken mit den Eckpunkten des Tetraeders durch die Feuerbach'sche Kugel im selben Verhältnis geteilt werden.

Satz 7.2.7. *Der Monge Punkt ist der einzige Punkt, dessen offene Halbgeraden durch die Eckpunkte des Tetraeders durch die Feuerbach'sche Kugel im selben Verhältnis geteilt werden.*

Beweis. Dieser Beweis folgt analog zum Beweis von Satz 7.1.5 aus dem 2-dimensionalen Fall. Aufgrund dessen werden hier nur die wichtigsten Beweisschritte durchgeführt, die Rechnungen erfolgen analog zum Beweis in Abschnitt 7.1.

Sei \tilde{M} ein weiterer Punkt, dessen offene Halbgeraden durch die Eckpunkte A_i, A_j, A_k, A_l durch die Feuerbach'sche Kugel im selben Verhältnis geteilt wird. Es existiert also ein $\lambda > 0$ so, dass die Punkte

$$\begin{aligned} A'_i &= \tilde{M} + \lambda(A_i - \tilde{M}) \\ a'_i &= (1 - \lambda)\tilde{m} + \lambda a_i, \end{aligned} \tag{7.32}$$

alle auf der Feuerbach'schen Kugel liegen.

Demnach muss für $i = 0, 1, 2, 3$

$$d(A'_i, F) = r_\Gamma \tag{7.33}$$

erfüllt sein, wobei F den Mittelpunkt und r_Γ den Radius der Feuerbach'schen Kugel bezeichnet. Aus den vier Eckpunkten A_0, A_1, A_2, A_3 eines Tetraeders ergeben sich 4 Gleichungen für die Unbekannten λ und \tilde{M} :

$$d(A'_i, F)^2 = ((1 - \lambda)\tilde{m} + \lambda a_i - f)^2 = r_\Gamma^2. \tag{7.34}$$

Durch Ausmultiplizieren und Gleichsetzen folgt analog zu (7.12):

$$a_i^2 + 2\frac{1 - \lambda}{\lambda}a_i\tilde{m} - \frac{2}{\lambda}a_i f = a_j^2 + 2\frac{1 - \lambda}{\lambda}a_j\tilde{m} - \frac{2}{\lambda}a_j f. \tag{7.35}$$

Wie im 2-dimensionalen Fall ist auch im 3-dimensionalen Fall für $\lambda = 1$ keine Lösung des Gleichungssystems (7.34) möglich. Setzt man nun

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \tilde{M} + \frac{1}{\lambda}(F - \tilde{M}) \\ \bar{m} &= \frac{\lambda - 1}{\lambda}\tilde{m} + \frac{1}{\lambda}f, \end{aligned} \tag{7.36}$$

so folgt analog zu (7.15):

$$d(A_i, \bar{M})^2 = d(A_j, \bar{M})^2.$$

Die Eckpunkte A_i und A_j sind also gleich weit vom Punkt \overline{M} entfernt und der Punkt \overline{M} entspricht somit dem Umkugelmittelpunkt U . Somit folgt aus (7.36):

$$\begin{aligned}\tilde{M} &= U + \frac{1}{\lambda - 1}(U - F) \\ \tilde{m} &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}u - \frac{1}{\lambda - 1}f\end{aligned}\tag{7.37}$$

und mit (7.32) für den Punkt A'_i :

$$a'_i = \lambda a_i - \lambda u + f.$$

Für den Abstand von A'_i und F folgt mit (7.33) analog zu (7.17):

$$\begin{aligned}r_\Gamma &= d(A'_i, F) = \lambda r_U. \\ \implies |\lambda| &= \frac{r_\Gamma}{r_U}.\end{aligned}$$

Aus Satz 7.2.3 folgt mit der Voraussetzung $\lambda > 0$ damit unmittelbar

$$\lambda = \frac{1}{3}.\tag{7.38}$$

Durch Einsetzen von $\lambda = \frac{1}{3}$ in (7.37) folgt mit (7.30) $\tilde{M} = M$. Der Monge Punkt M ist also der einzige Punkt, dessen offene Halbgeraden durch die Eckpunkte des Tetraeders von der Feuerbach'schen Kugel im selben Verhältnis geteilt werden. \square

In Abbildung 7.10 ist die Feuerbach'sche Kugel mit allen behandelten Punkten einer der Dreiecksseite dargestellt.

Die bereits gezeigten Eigenschaften der Feuerbach'schen Kugel können nochmals zu folgendem Satz zusammengefasst werden:

Satz 7.2.8 (Existenz der Feuerbach'schen Kugel). *Für jedes Tetraeder existiert eine eindeutige Kugel, die die Schwerpunkte der Seitendreiecke und die Punkte, die die Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit dem Monge Punkt dritteln, beinhaltet. Der Radius dieser Kugel beträgt ein Drittel des Umkugelradius und ihr Mittelpunkt liegt auf der Euler'schen Geraden und teilt die Verbindungsstrecke des Monge Punkts M mit dem Umkugelmittelpunkt U im Verhältnis 1 : 2. Die Kugel schneidet aus den Trägerebenen einen Kreis aus, der durch den Schwerpunkt der jeweiligen Tetraederseite verläuft und dessen Mittelpunkt der Lotfußpunkt des Mittelpunkts der Feuerbach'schen Kugel auf die Trägerebene ist.*

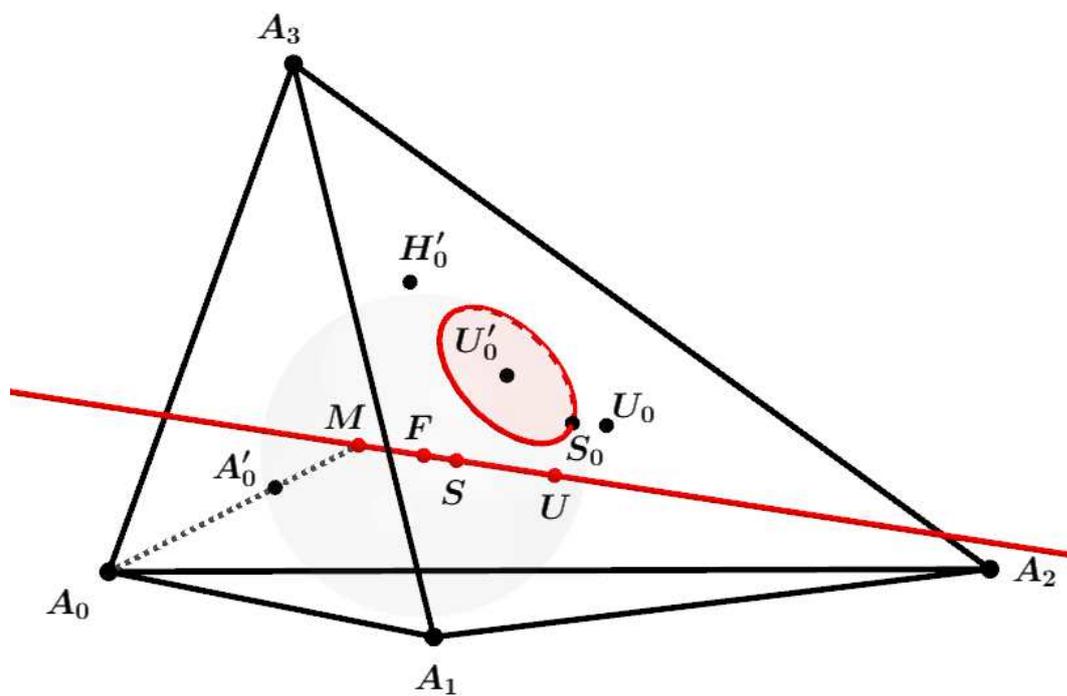


Abbildung 7.10: Skizze zur Feuerbach'schen Kugel.

7.3 Die Feuerbach'sche Sphäre

In diesem Abschnitt werden die aus der Quelle [7, S. 3-8] entnommenen Informationen herangezogen, um den Feuerbach'schen Kreis für ein n -Simplex zu verallgemeinern. Die Aufbau des Abschnittes wurde dabei analog zu Abschnitt 7.2 nach [6, S. 22-37] verfasst.

7.3.1 Verallgemeinerung der Seitenmittelpunkte auf den n -dimensionalen Raum

Da die Seitenmittelpunkte des Dreiecks, wie in Abschnitt 7.2.1 bereits erarbeitet, mit Hilfe des Schwerpunkts auf den 3-dimensionalen Raum verallgemeinert werden können und der Schwerpunkt nach Abschnitt 3.3 auch für n -Simplexe bekannt ist, können die Seitenmittelpunkte eines Dreiecks ebenso durch die Schwerpunkte auf den n -dimensionalen Raum verallgemeinert werden.

Um die Feuerbach'sche Kugel auf den n -dimensionalen Raum verallgemeinern zu können ist ein Analogon zu Lemma 7.2.1 notwendig.

Lemma 7.3.1. *Die $\binom{n+1}{n}$ Schwerpunkte der $(n-1)$ -dimensionalen Seiten eines n -Simplex liegen niemals in einer Ebene.*

Beweis. Gegeben sei ein n -Simplex mit den Eckpunkten A_0, A_1, \dots, A_n . Die Punkte S_0, S_1, \dots, S_n seien die Schwerpunkte der, den Ecken gegenüberliegenden Seiten. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ s_1 &= \frac{1}{n} (a_0 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \\ &\vdots \\ s_n &= \frac{1}{n} (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}). \end{aligned}$$

Durch Umformen erhält man:

$$a_0 = s_1 + s_2 + \dots + s_n - \frac{n-1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = s_1 + s_2 + \dots + s_n - (n-1)s_0. \quad (7.39)$$

Würden die Schwerpunkte S_i alle in einer Ebene liegen, so würde wegen (7.39) auch A_0 in dieser Ebene liegen. Dies folgt analog für die Eckpunkte A_1, A_2, \dots, A_n . Nach Voraussetzung bilden $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ jedoch ein n -Simplex, was ein Widerspruch dazu ist, dass alle Punkte in einer Ebenen liegen. Die Schwerpunkte S_i liegen daher nicht alle in derselben Ebene. \square

Dadurch kann man, analog zum 2- und 3-dimensionalen Raum die Feuerbach'sche Sphäre wie folgt definieren:

Definition 7.3.2 (Feuerbach'sche Sphäre). Die Feuerbach'sche Sphäre Γ ist die Umsphäre der Schwerpunkte der $(n-1)$ -dimensionalen Seiten des n -Simplex. Ihr Mittelpunkt wird mit F und ihr Radius mit r_Γ bezeichnet

Als Analogon zum Feuerbach'schen Kreis als Umkreis der Seitenmittelpunkte nimmt man die Feuerbach'sche Sphäre also als Umsphäre der Schwerpunkte der $(n-1)$ -dimensionalen Seiten des n -Simplex an.

Satz 7.3.3. *Der Mittelpunkt F der Feuerbach'schen Sphäre liegt auf der Verbindungsstrecke von M und U und teilt diese im Verhältnis $1 : (n-1)$. Ihr Radius r_Γ beträgt ein n -tel des Umkreisradius r_U .*



Abbildung 7.11: Skizze zur gegenseitigen Lage von M, F und U .

Beweis. Sei N ein n -Simplex mit Eckpunkten A_0, A_1, \dots, A_n und Schwerpunkt S und N' das von den Schwerpunkten S_i der $(n-1)$ -dimensionalen Seiten von N erzeugte n -Simplex. Für die Schwerpunkte S_i gilt nach (3.8):

$$s_i = \frac{1}{n}(a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n).$$

Der Schwerpunkt S' von N' ergibt sich zu

$$\begin{aligned} s' &= \frac{1}{n}(s_0 + s_1 + \dots + s_n) = \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) + \frac{1}{n}(a_0 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \dots + \frac{1}{n}(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{n}(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

und fällt somit mit dem Schwerpunkt S des n -Simplex N zusammen. Somit haben beide n -Simplexe N und N' denselben Schwerpunkt und für den Eckpunkt A_i von N und seinen gegenüberliegenden Eckpunkt S_i von N' gilt:

$$\begin{aligned} S_i &= S - \frac{1}{n}(A_i - S) \\ s_i &= \frac{n+1}{n}s - \frac{1}{n}a_i. \end{aligned} \tag{7.40}$$

Das n -Simplex N' ergibt sich also durch zentrische Streckung des n -Simplex N mit Zentrum S um den Faktor $-\frac{1}{n}$.

Die Eckpunkte von N werden also durch die zentrische Streckung auf die Eckpunkte von N' abgebildet. Da sich Längen bei der zentrischen Streckung um den Betrag des Streckungsfaktors verändern wird auch die Umsphäre des n -Simplex N auf die Umsphäre des n -Simplex N' , also die Feuerbach'sche Sphäre abgebildet. Der Mittelpunkt der

Feuerbach'schen Sphäre ergibt sich somit durch zentrische Streckung des Umsphärenmittelpunkts von N mit Zentrum S um den Streckungsfaktor $-\frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned} F &= S - \frac{1}{n}(U - S) \\ f &= \frac{n+1}{n}s - \frac{1}{n}u. \end{aligned} \tag{7.41}$$

Für den Radius r_Γ der Feuerbach'schen Sphäre folgt:

$$r_\Gamma = \frac{1}{n}r_U,$$

wobei r_U der Umsphärenradius des n -Simplex N ist.

Da nach Abschnitt 6.3 der Schwerpunkt S die Verbindungsstrecke von M und U im Verhältnis $2 : (n - 1)$ teilt und F um $\frac{1}{n}$ des Abstands SU in Richtung M von S entfernt ist folgt, dass F die Verbindungsstrecke MU im Verhältnis $1 : (n - 1)$ teilt. \square

Durch einfache Rechnungen folgen die, Verhältnisse in Abbildung 7.12. Die Lage von M, F, S und U ist in Abbildung 7.12 dargestellt. Die Abbildung zeigt ebenso die Teilung von FM' durch $S = S'$ im Verhältnis $(n - 1) : 2$, wie in Abschnitt 6.3 erarbeitet.

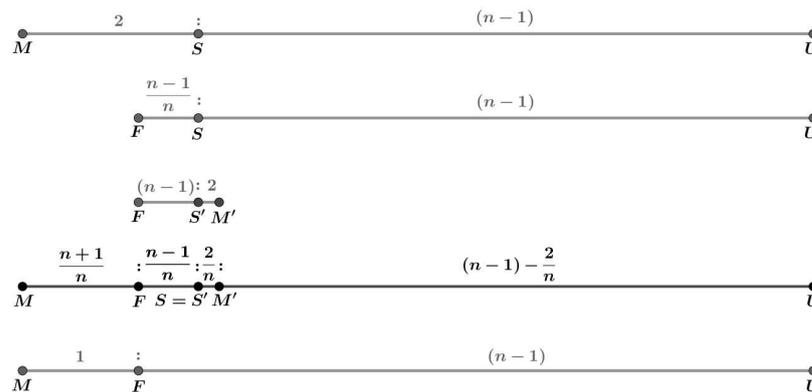


Abbildung 7.12: Skizze zur gegenseitigen Lage von M, F, S und U .

7.3.2 Verallgemeinerung des Durchschnitts des Feuerbach'schen Kreises mit den Trägergeraden der Dreiecksseiten auf den n -dimensionalen Raum

Da der Durchschnitt des Feuerbach'schen Kreises mit den Trägergeraden des Dreiecks, wie in Abschnitt 7.2.2 bereits erarbeitet, mit Hilfe des Durchschnitts der Feuerbach'schen Kugel mit den Trägerebenen des Tetraeders auf den 3-dimensionalen Raum verallgemeinert werden kann und ein solcher Durchschnitt auch für n -Simplexe existiert, kann der Durchschnitt des Feuerbach'schen Kreises mit den Trägergeraden eines Dreiecks durch den Durchschnitt der Feuerbach'schen Sphäre mit der $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebene

7 Der Feuerbach'sche Kreis

eines n -Simplex auf den n -dimensionalen Raum verallgemeinert werden. Dadurch kann man, analog zum 2- und 3-dimensionalen Raum den folgenden Satz formulieren.

Dabei sei H'_i der Höhenfußpunkt von N an $\varepsilon_i = \varepsilon(A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n)$, also der Schnittpunkt der Geraden mit der $(n-1)$ -dimensionalen Ebene, die normal auf die Ebene steht und den gegenüberliegenden Eckpunkt A_i enthält. Außerdem sei U_i der Umkreismittelpunkt der $(n-1)$ -dimensionalen Seite von N in ε_i . Es gilt:

Satz 7.3.4. *Wenn $H'_i \neq U_i$, so ist der Durchschnitt der Feuerbach'schen Sphäre mit der Ebene ε_i eine $(n-2)$ -dimensionale Sphäre mit Mittelpunkt*

$$U'_i = S_i + \frac{1}{n}(H'_i - U_i), \quad (7.42)$$

wobei der Punkt U'_i den Lotfußpunkt von F auf die Trägerebene ε_i bezeichnet. Der Radius der Sphäre ist gleich einem n -tel des Abstandes von H'_i und U_i .

$$r'_i = \frac{1}{n}(H'_i - U_i)$$

Gilt $H'_i = U_i$, so berührt die Feuerbach'sche Sphäre die Ebene im Punkt S_i .

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Gerade durch F und U'_i orthogonal auf die Trägerebene ε_i der $(n-1)$ -dimensionalen Seite $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ steht. Für den Punkt U'_i soll dabei die Gleichung (7.42) erfüllt sein. Mit Hilfe von (7.40), (7.41) und (7.42) erhält man:

$$\begin{aligned} F - U'_i &= \frac{n+1}{n}s - \frac{1}{n}u - s_i - \frac{1}{n}(h'_i - u_i) = \\ &= \frac{n+1}{n}s - \frac{1}{n}u - \left(\frac{n+1}{n}s - \frac{1}{n}a_i \right) - \frac{1}{n}h'_i + \frac{1}{n}u_i = \\ &= -\frac{1}{n}u + \frac{1}{n}a_i - \frac{1}{n}h'_i + \frac{1}{n}u_i = \\ &= -\frac{1}{n}[(U - U_i) + (H'_i - A_i)]. \end{aligned}$$

Da die $(n-1)$ -Mittelsenkrechte durch U und U_i , sowie die Höhe durch H'_i und A_i nach Definition beide normal auf ε_i stehen folgt, dass die Gerade durch F und U'_i orthogonal auf die Trägerebene ε_i steht. \square

Der Durchschnitt der Feuerbach'schen Sphäre mit der Ebene ε_i ist also abhängig vom Höhenfußpunkt H'_i , sowie dem Schwerpunkt S_i und dem Umkreismittelpunkt U_i von $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$. Eine Verschiebung von A_i entlang der Höhe h_i durch A_i verändert sich weder der Höhenfußpunkt H'_i noch der Schwerpunkt S_i und der Umsphärenmittelpunkt U_i der $(n-1)$ -dimensionalen Seite $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$. Eine solche Verschiebung bewirkt somit keine Veränderung des Durchschnitts der Feuerbach'schen Sphäre mit der Trägerebene ε_i .

Aus (7.42) kann außerdem folgende Eigenschaft hergeleitet werden:

Korollar 7.3.5. *Der Höhenfußpunkt H'_i und der Mittelpunkt U'_i des Durchschnitts der Feuerbach'schen Sphäre mit der Trägerebene der Seite $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ liegen auf einer Geraden, die die Euler'sche Gerade der Seite $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ im Mittelpunkt F_i der Feuerbach'schen Sphäre der Seite schneidet. Dabei teilt der Punkt U'_i die Verbindungsstrecke von H'_i und F_i im Verhältnis $(n-1) : 1$.*

Beweis. Sei F_i der Mittelpunkt der Feuerbach'schen Sphäre der Seite $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$. Aus (7.41)

$$F_i = S_i - \frac{1}{n-1}(U_i - S_i) = \frac{n}{n-1}S_i - \frac{1}{n-1}U_i \quad (7.43)$$

folgt durch Umformen nach S_i :

$$S_i = \frac{n-1}{n}F_i + \frac{1}{n}U_i. \quad (7.44)$$

Durch Einsetzen von (7.44) in (7.42) folgt:

$$U'_i = S_i + \frac{1}{n}(H'_i - U_i) = \frac{n-1}{n}F_i + \frac{1}{n}H'_i = F_i + \frac{1}{n}(H'_i - F_i). \quad (7.45)$$

Die Verbindungsgeraden des Höhenfußpunkts H'_i und des Mittelpunkts U'_i , des Durchschnitts der Feuerbach'schen Sphäre mit der Trägerebene der Seite $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$, schneidet die Euler'sche Gerade der Seite $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ also im Mittelpunkt F_i ihrer Feuerbach'schen Sphäre. Der Punkt U'_i teilt dabei die Verbindungsstrecke von H'_i und F_i im Verhältnis $(n-1) : 1$. \square

7.3.3 Verallgemeinerung der Teilung der Verbindungsstrecke der Eckpunkte mit dem Höhenschnittpunkt auf den n -dimensionalen Raum

Da die Eigenschaft, dass die Mittelpunkte A'_i der Verbindungsstrecken vom Höhenschnittpunkt H zu den Eckpunkten A_i auf dem Feuerbach'schen Kreis liegen und der Feuerbach'sche Kreis die Verbindungsstrecke somit im Verhältnis $1 : 1$ teilt, wie in Abschnitt 7.2.2 bereits erarbeitet, durch den Monge Punkt M auf den 3-dimensionalen Raum verallgemeinert werden kann und der Monge Punkt nach Abschnitt 5.3 auch für n -Simplexe bekannt ist, kann diese Eigenschaft eines Dreiecks ebenso auf den n -dimensionalen Raum verallgemeinert werden.

Satz 7.3.6. *Die Feuerbach'sche Sphäre Γ teilt die Verbindungsstrecke des Monge Punkts M mit den Eckpunkten A_i, A_j, A_k, A_l des n -Simplex im Verhältnis $1 : (n-1)$.*

Beweis. Sei A'_i ein Punkt auf der Verbindungsstrecke des Monge Punkts M mit dem Eckpunkt A_i , der die Verbindungsstrecke von A_i und M im Verhältnis $1 : (n-1)$ teilt. Für den Punkt A'_i gilt daher:

$$A'_i = M + \frac{1}{n}(A_i - M) = \frac{n-1}{n}M + \frac{1}{n}A_i. \quad (7.46)$$

7 Der Feuerbach'sche Kreis

Aus Abbildung 7.12 folgt für M :

$$M = U + \frac{n}{n-1}(F - U) = \frac{n}{n-1}F - \frac{1}{n-1}U. \quad (7.47)$$

Durch Einsetzen von (7.47) in (7.46) folgt:

$$A'_i = \frac{n-1}{n}M + \frac{1}{n}A_i = \frac{n-1}{n} \left(\frac{n}{n-1}F - \frac{1}{n-1}U \right) + \frac{1}{n}A_i = F - \frac{1}{n}U + \frac{1}{n}A_i \quad (7.48)$$

daraus ergibt sich

$$A'_i - F = \frac{1}{n}(A_i - U).$$

Der Abstand von A'_i und F entspricht also $\frac{1}{n}r_U$, also einem Drittel des Umsphärradius des n -Simplex N und daher genau dem Radius r_Γ der Feuerbach'schen Sphäre. Der Punkt A'_i der die Verbindungsstrecke des Monge Punkts mit dem Eckpunkt A_i im Verhältnis $1 : (n-1)$ teilt, liegt also auf der Feuerbach'schen Sphäre. Analog folgt dies für die andern Eckpunkte. Demnach teilt die Feuerbach'sche Sphäre die Verbindungsstrecken des Monge Punkts mit den Eckpunkten des n -Simplex im Verhältnis $1 : (n-1)$. \square

Im orthozentrischen Fall fällt der Monge Punkt mit dem existierendem Höhenschnittpunkt zusammen. Demnach gilt die Aussage in Satz 7.3.6 ebenfalls für den Höhenschnittpunkt.

Es stellt sich die Frage, ob es noch andere Punkte gibt, deren Verbindungsstrecken mit den Eckpunkten des n -Simplex durch die Feuerbach'sche Sphäre im selben Verhältnis geteilt werden.

Satz 7.3.7. *Der Monge Punkt ist der einzige Punkt, dessen offene Halbgeraden durch die Eckpunkte des n -Simplex durch die Feuerbach'sche Sphäre im selben Verhältnis geteilt werden.*

Beweis. Dieser Beweis folgt exakt analog zum Beweis von Satz 7.2.7 aus dem 3-dimensionalen Fall. Demnach gilt:

$$\begin{aligned} r_\Gamma &= \lambda r_U. \\ \implies |\lambda| &= \frac{r_\Gamma}{r_U}. \end{aligned}$$

und mit der Voraussetzung $\lambda > 0$ somit

$$\lambda = \frac{1}{n}.$$

Genau wie im 3-dimensionalen Fall ist der Monge Punkt M der einzige Punkt, dessen offene Halbgeraden durch die Eckpunkte des n -Simplex von der Feuerbach'schen Sphäre im selben Verhältnis geteilt werden. \square

Die bereits gezeigten Eigenschaften der Feuerbach'schen Sphäre können nochmals zu folgendem Satz zusammengefasst werden:

Satz 7.3.8 (Existenz der Feuerbach'schen Sphäre). *Für jedes n -Simplex existiert eine eindeutige Sphäre, die die Schwerpunkte der $(n - 1)$ -dimensionalen Seiten und die Punkte, die die Verbindungsstrecke der Eckpunkte mit dem Monge Punkt n -telt, beinhaltet. Der Radius dieser Sphäre beträgt ein n -tel des Umsphäereradius und ihr Mittelpunkt liegt auf der Euler'schen Geraden und teilt die Verbindungsstrecke des Monge Punkts M mit dem Umkugelmittelpunkt U im Verhältnis $1 : (n - 1)$. Die Sphäre schneidet aus den Trägerebenen eine $(n - 2)$ -dimensionale Sphäre aus, die durch den Schwerpunkt der jeweiligen $(n - 1)$ -dimensionalen Simplexseite verläuft und deren Mittelpunkt der Lotfußpunkt des Mittelpunkts der Feuerbach'schen Sphäre auf die Trägerebene ist.*

8 Der Inkreis- und die Ankreismittelpunkte

In diesem Kapitel wird der Inkreismittelpunkt sowie die Ankreismittelpunkte eines Dreiecks auf den höherdimensionalen Raum verallgemeinert. Der Inkreismittelpunkt kann dabei sehr direkt, durch den Schnittpunkt aller Winkelhalbierenden, also alle $(n - 1)$ -dimensionalen Ebenen, die einen inneren Kantenwinkel des Simplex halbieren, verallgemeinert werden. Sehr interessant verhalten sich die Ankugeln im Höherdimensionalen. Für ein Tetraeder existieren beispielsweise zwei verschiedene Arten von Ankugeln, eine Art, die jeweils eine Tetraederseite berührt und eine Art, die alle Trägerebenen, aber nicht das Tetraeder berührt. Im höherdimensionalen Raum ergeben sich alle zwei Dimensionen eine neue Art von Ansphäre. Die Anzahl dieser Ansphären und ihre Lage kann, je nachdem welche Eigenschaften das Simplex erfüllt, differieren. Die Menge der Anzahl an Ansphären kann eingeschränkt werden, die Ansphären, die die Simplexseiten auf den Trägerebenen berühren, existieren jedoch in jedem Fall.

8.1 Der Inkreismittelpunkt

In diesem Abschnitt wird der Inkreismittelpunkt, sowie die Ankreismittelpunkte im 2-dimensionalen Raum betrachtet. Die Informationen wurden dabei den Quellen [1, S. 22] und [8, S. 50] entnommen.

Zwei Trägergeraden der Dreiecksseiten schneiden sich im gemeinsamen Eckpunkt. Dadurch teilen je zwei Trägergeraden den 2-dimensionalen Raum in vier Quadranten. Die drei Trägergeraden des Dreiecks teilen den 2-dimensionalen Raum in 7 Teilräume. Den Teilraum, der das Dreieck enthält, drei Teilräume, die jeweils an eine Dreiecksseite grenzen und drei Teilräume, die jeweils an einen Eckpunkt grenzen. Sei der orientierte Abstand eines Punktes X zur Trägergeraden g_i wie folgt definiert: $g'_i(X) = \pm d(X, g_i)$, wobei für jeden Punkt X im Inneren des Dreiecks $g'_0(X) \geq 0$, $g'_1(X) \geq 0$, $g'_2(X) \geq 0$ gelten soll. Die Menge aller Punkte X , die die Gleichung $g'_i(X) = 0$ erfüllen bilden somit die Trägergerade g_i . Die beiden Teilräume, die durch die Trägergerade g_i getrennt sind, werden durch die Menge aller Punkte X , die die Ungleichungen $g'_i(X) < 0$ bzw. $g'_i(X) > 0$ erfüllen beschrieben, wobei $g'_i(A_i) > 0$ ist. Die von den Trägergeraden aufgespannten Teilräume können dann, wie in Abbildung 8.1 dargestellt, durch die Vorzeichen der orientierten Abstände zu den Trägergeraden beschrieben werden.

In Abbildung 8.1 sind die, durch die Trägergeraden geteilten, 7 Teilräume des 2-dimensionalen Raums mit den jeweiligen Ungleichungen dargestellt.

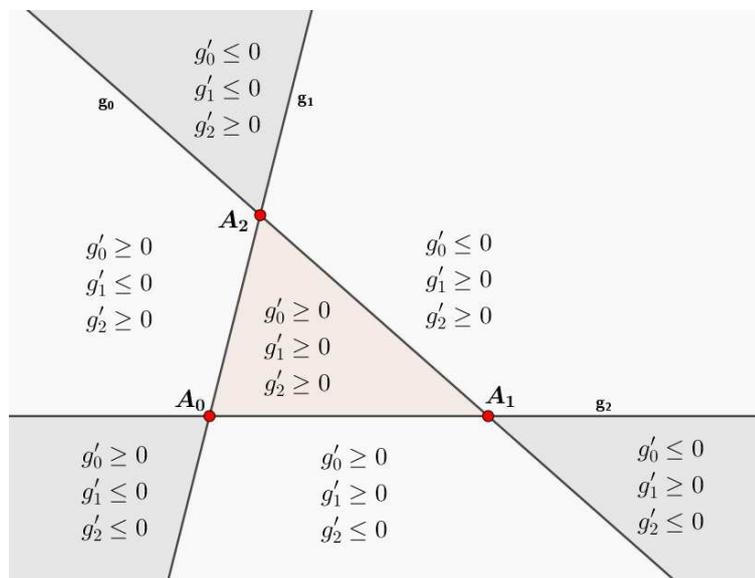


Abbildung 8.1: Skizze der 7 Teilräume und deren Ungleichungen.

Definition 8.1.1 (Winkelhalbierende eines Dreiecks). Die Winkelhalbierende durch

einen Eckpunkt eines Dreiecks ist jene Gerade, die den, von den Trägergeraden durch den Eckpunkt aufgespannten, Innenwinkel des Dreiecks halbiert.

In einem Dreieck existieren 3 solche Winkelhalbierenden, eine pro Eckpunkt.

Die Winkelhalbierende durch einen Eckpunkt A_i verläuft durch den Quadranten, der das Dreieck enthält und den gegenüberliegenden Quadranten.

Für die Fußpunkte der Lote eines Punktes auf der Winkelhalbierenden gilt folgendes Lemma:

Lemma 8.1.2. *Die Fußpunkte der Lote eines Punktes auf der Winkelhalbierenden durch einen Eckpunkt liegen entweder auf den beiden Halbgeraden, die jeweils eine Dreiecksseite beinhalten oder auf den beiden Halbgeraden, die keine Dreiecksseite beinhalten.*

Beweis. Sei α der Innenwinkel und α' der Gegenwinkel eines Dreiecks $\triangle A_i A_j A_k$ beim Eckpunkt A_i und sei β der Supplementärwinkel von α und β' der Supplementärwinkel von α' . Sei X ein Punkt auf der Winkelhalbierenden durch A_i und F_j der Fußpunkt des Lots von X auf die Trägergerade g_j und F_k der Fußpunkt des Lots von X auf die Trägergerade g_k . Die Punkte A_i, X, F_j und A_i, X, F_k bilden somit zwei rechtwinklige Dreiecke. Für den Innenwinkel des Dreiecks $\triangle A_i A_j A_k$ gilt: $\alpha < 180^\circ$. Der durch die Winkelhalbierende halbierte Winkel $\frac{\alpha}{2}$ ist also kleiner als 90° . Für den Supplementärwinkel von $\frac{\alpha}{2}$ gilt:

$$\beta + \frac{\alpha}{2} = 180 - \frac{\alpha}{2} > 90^\circ.$$

Dies folgt analog für α' und β' . Wenn X im Inneren des Winkels α liegt, dann beträgt ein Innenwinkel der Dreiecke $\triangle A_i, X, F_j$ und $\triangle A_i, X, F_k$ $\frac{\alpha}{2}$, da die Innenwinkel nicht größer als 90° sein können und somit der Supplementärwinkel ausgeschlossen werden kann. Dies folgt analog für α' . Die Fußpunkte F_j, F_k der Lote eines Punktes auf der Winkelhalbierenden liegen also entweder auf den beiden Halbgeraden, die jeweils eine Dreiecksseite beinhalten oder auf den beiden Halbgeraden, die keine Dreiecksseite beinhalten. \square

Lemma 8.1.3. *Jeder Punkt auf der Winkelhalbierenden durch einen Eckpunkt eines Dreiecks hat denselben Abstand zu den zwei Trägergeraden der Dreiecksseiten, die den Eckpunkt enthalten.*

Umgekehrt liegt jeder Punkt im Inneren eines Innenwinkels des Dreiecks oder im Inneren eines Gegenwinkels mit selbem Abstand zu den Trägergeraden zweier Dreiecksseiten auf der Winkelhalbierenden durch den gemeinsamen Eckpunkt.

Des Weiteren gilt:

$$X \in \text{Winkelhalbierende durch } A_i \iff d(X, g_j) = d(X, g_k) \wedge g'_j(X) \cdot g'_k(X) \geq 0. \quad (8.1)$$

Beweis. Man betrachte zwei Trägergeraden der Dreiecksseiten $g(A_i, A_j)$ und $g(A_i, A_k)$, die sich im Punkt A_i schneiden und die Winkel α und β sowie die Gegenwinkel α' und

8 Der Inkreis- und die Ankreismittelpunkte

β' einschließen. Sei α der Innenwinkel des Dreiecks und P ein Punkt auf der Winkelhalbierenden durch A_i . Von P aus wird das Lot auf die beiden Trägergeraden g_j und g_k gefällt und die Fußpunkte der Lote, wie in Abbildung 8.2 dargestellt, mit F_j und F_k bezeichnet. Aus Lemma 8.1.2 folgt $\angle F_j A_i P = \frac{\alpha}{2}$ und $\angle F_k A_i P = \frac{\alpha}{2}$. Dadurch entstehen die beiden kongruenten Dreiecke $\triangle A_i P F_j$ und $\triangle A_i P F_k$, wobei sich die Kongruenz aus der gemeinsamen Seite $A_i P$ und den zwei gleich großen Winkeln $w_1 = 90^\circ$ und $w_2 = \frac{\alpha}{2}$ ergibt. Somit gilt:

$$|PF_j| = |PF_k|.$$

Dies folgt analog für alle Punkte, die im Inneren des Gegenwinkels α' liegen. Jeder Punkt auf der Winkelhalbierenden ist also gleich weit von den beiden Trägergeraden der Dreiecksseiten entfernt.

Sei umgekehrt P ein Punkt im Inneren des Winkels α mit gleichem Abstand $|PF_j| = |PF_k|$ zu den Trägergeraden. Durch Verbinden der Punkte F_j, F_k und P mit A_i entstehen die beiden kongruenten Dreiecke $\triangle A_i P F_j$ und $\triangle A_i P F_k$, wobei sich die Kongruenz aus der gemeinsamen Seite $A_i P$, der gleich großen Seite $|PF_j| = |PF_k|$ und dem gleich großen Winkel $w = 90^\circ$ ergibt. Somit gilt:

$$\angle P A_i F_j = \angle F_k A_i P = \frac{\alpha}{2}.$$

Dies folgt analog für alle Punkte, die im Inneren des Gegenwinkels α' liegen. Jeder Punkt im Inneren des Winkels oder im Inneren des Gegenwinkels mit selbem Abstand zu den Trägergeraden zweier Dreiecksseiten liegt also auf der Winkelhalbierenden durch den gemeinsamen Eckpunkt.

Das Produkt der Ungleichungen der orientierten Abstände zu den Trägergeraden g_j und g_k , die den Eckpunkt A_i enthalten ist für alle Punkte X auf der Winkelhalbierenden durch A_i positiv:

Wenn X auf der Halbgerade durch das Innere des Dreiecks liegt gilt:

$$g'_j(X) \geq 0, g'_k(X) \geq 0 \text{ und daher auch } g'_j(X) \cdot g'_k(X) \geq 0.$$

Wenn X auf der Halbgerade außerhalb des Dreiecks liegt gilt:

$$g'_j(X) \leq 0, g'_k(X) \leq 0 \text{ und daher auch } g'_j(X) \cdot g'_k(X) \geq 0.$$

(8.2)

Um die Umkehrung der Äquivalenzrelation zu zeigen sei X ein Punkt mit selbem Abstand zu den Trägergeraden g_j und g_k , wobei das Produkt $g'_j(X) \cdot g'_k(X)$ nicht negativ ist. Der Punkt X liegt daher entweder im Inneren des Winkels $\angle A_j A_i A_k$ oder in dessen Gegenwinkel. Aus dem bereits bewiesenen zweiten Teil des Lemmas 8.1.3 folgt direkt, dass X auf der Winkelhalbierenden durch A_i liegt, womit das Lemma vollständig bewiesen ist.

Aus (8.2) folgt (8.1), womit das Lemma vollständig bewiesen ist. □

Satz 8.1.4 (Existenz des Inkreismittelpunkts [1, S. 22]). *Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt I im Inneren des Dreiecks. Dieser Punkt*

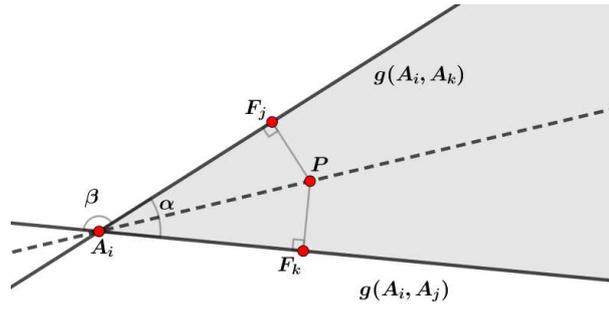


Abbildung 8.2: Skizze zur Winkelhalbierenden.

ist der Mittelpunkt des einzigen Kreises, der alle drei Dreiecksseiten berührt. Dieser Kreis liegt zur Gänze im Inneren des Dreiecks.

Beweis (algebraisch). Betrachtet man die zwei Winkelhalbierenden durch die Eckpunkte A_i und A_j eines Dreiecks $\triangle A_i A_j A_k$. Die Normalvektoren der Winkelhalbierenden ergeben sich durch Subtrahieren der Normalvektoren \vec{n}_i der Trägergeraden, die den jeweiligen Eckpunkt enthalten, wobei die Normalvektoren \vec{n}_i jeweils normal auf die Trägergerade ε_i stehen, Länge 1 haben und in den Teilraum zeigen, der A_i und das Dreieck enthält. Die Normalvektoren der Winkelhalbierenden durch A_i und A_j sind demnach durch $\vec{w}_i = \vec{n}_k - \vec{n}_j$ und $\vec{w}_j = \vec{n}_i - \vec{n}_k$ gegeben. Da in einem nicht entarteten Dreieck die Trägergeraden nicht parallel sein können, sind die Normalvektoren $\vec{n}_i, \vec{n}_j, \vec{n}_k$ der Trägergeraden paarweise linear unabhängig. Die 3 Normalvektoren sind im 2-dimensionalen Raum linear abhängig und es gilt

$$\vec{n}_k = a \cdot \vec{n}_i + b \cdot \vec{n}_j, \quad \text{mit } a, b \neq 0. \quad (8.3)$$

Damit sich die Winkelhalbierenden durch A_i und A_j in einem Punkt I schneiden, müssen die Normalvektoren \vec{w}_i und \vec{w}_j linear unabhängig sein. Demnach ist die folgende Äquivalenz zu zeigen:

$$\lambda_i \cdot \vec{w}_i + \lambda_j \cdot \vec{w}_j = 0 \iff \lambda_i = \lambda_j = 0. \quad (8.4)$$

Durch Einsetzen von $\vec{w}_i = \vec{n}_k - \vec{n}_j$ und $\vec{w}_j = \vec{n}_i - \vec{n}_k$, sowie (8.3) ergibt sich durch Umformen:

$$(\lambda_j + (\lambda_i - \lambda_j) \cdot a) \vec{n}_i + (-\lambda_i + (\lambda_i - \lambda_j) \cdot b) \vec{n}_j = 0.$$

Da die Normalvektoren \vec{n}_i und \vec{n}_j linear unabhängig sind muss

$$\lambda_j + (\lambda_i - \lambda_j) \cdot a = 0 \quad (8.5)$$

und

$$-\lambda_i + (\lambda_i - \lambda_j) \cdot b = 0 \quad (8.6)$$

8 Der Inkreis- und die Ankreismittelpunkte

erfüllt sein. Durch Umformen von (8.5) erhält man

$$\lambda_i = \frac{(a-1) \cdot \lambda_j}{a}. \quad (8.7)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (8.6) erhält man:

$$\lambda_j \cdot \left(\frac{(a-1) \cdot (b-1)}{a} - b \right) = 0. \quad (8.8)$$

Nun gilt es zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $\lambda_j = 0$

Wenn $\lambda_j = 0$, so folgt aus (8.7): $\lambda_i = 0$, womit (8.4) erfüllt wäre.

2. Fall: $\frac{(a-1) \cdot (b-1)}{a} - b = 0$

Durch Umformen von $\frac{(a-1) \cdot (b-1)}{a} - b = 0$ erhält man $a + b = 1$. Das bedeutet, dass \vec{n}_k auf der Geraden durch \vec{n}_i und \vec{n}_j liegen muss. Da die Normalvektoren alle auf dem Einheitskreis liegen und die Gerade durch \vec{n}_i und \vec{n}_j den Einheitskreis nur in zwei Punkten schneiden kann, muss der Vektor \vec{n}_k entweder mit \vec{n}_i oder \vec{n}_j übereinstimmen, was einen Widerspruch zur paarweise linearen Unabhängigkeit von \vec{n}_i und \vec{n}_k bzw. \vec{n}_j und \vec{n}_k darstellt.

Die Normalvektoren der Winkelhalbierenden sind also linear unabhängig. Demnach müssen sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt I schneiden.

Für den Schnittpunkt I gilt nach (8.1):

$$\begin{aligned} g'_j(I) \cdot g'_k(I) &\geq 0 \\ g'_i(I) \cdot g'_k(I) &\geq 0. \end{aligned}$$

Durch das Produkt der beiden Ungleichungen folgt:

$$g'_j(I) \cdot g'_k(I) \cdot g'_i(I) \cdot g'_k(I) = g'_j(I) \cdot g'_k(I)^2 \cdot g'_i(I) \geq 0.$$

Da $g_k(I)^2$ auf alle Fälle positiv ist folgt:

$$g'_i(I) \cdot g'_j(I) \geq 0.$$

Damit alle Ungleichungen erfüllt werden können müssen die Vorzeichen aller $g'(I)$ gleich sein. Da kein Teilraum existiert, für den alle Vorzeichen der Trägergeraden negativ sind, ist der einzige Teilraum, der alle drei Ungleichungen erfüllt jener, für den

$g'_i(I), g'_j(I), g'_k(I) \geq 0$ gilt. Dieser Teilraum entspricht genau dem Inneren des Dreiecks. Der Punkt I liegt also im Inneren des Dreiecks. Nach Lemma 8.1.3 hat der Punkt I den gleichen Abstand zu allen drei Trägergeraden. Der Punkt I liegt nach der Umkehrung in Lemma 8.1.3 also auch auf der dritten Winkelhalbierenden des Dreiecks, durch den Eckpunkt A_k . Da der Punkt I auf allen Winkelhalbierenden im Inneren des Dreiecks

liegt, müssen die Fußpunkte der Lote des Punktes I auf die Trägergeraden nach Lemma 8.1.2 also auf allen Halbgeraden liegen, die von den Eckpunkten A_i, A_j und A_k ausgehen und die Dreiecksseiten enthalten. Da die Durchschnitte von jeweils zwei Halbgeraden genau den Dreiecksseiten entsprechen, liegen die Fußpunkte der Lote alle auf einer Dreiecksseite.

Der Kreis mit Mittelpunkt I und Radius r bzw. Normalabstand d

$$r = d(I, g(A_i, A_j)) = d(I, g(A_i, A_k)) = d(I, g(A_j, A_k)) \quad (8.9)$$

liegt somit im Inneren des Dreiecks und berührt alle drei Dreiecksseiten.

Um die Eindeutigkeit des Punktes I zu zeigen sei I' der Mittelpunkt eines weiteren Kreises der alle drei Dreiecksseiten des Dreiecks $\triangle A_i A_j A_k$ berührt. Es muss somit nach Lemma 8.1.3

$$r' = d(I', g(A_i, A_j)) = d(I', g(A_i, A_k)) = d(I', g(A_j, A_k))$$

gelten. Würde der Punkt I' im Äußeren des Dreiecks liegen, so läge er nicht mehr im Inneren aller Innenwinkel des Dreiecks. Demnach würden analog zu Lemma 8.1.2 die Lotfußpunkte nicht alle auf den Halbgeraden liegen, die die Dreiecksseiten beinhalten. Der Kreis würde also nur die Trägergeraden, nicht aber die Dreiecksseiten berühren. Der Punkt I' muss also im Inneren des Dreiecks liegen, wobei $g'_i(I'), g'_j(I'), g'_k(I') \geq 0$ gilt. Aus der Umkehrung in Lemma 8.1.3 folgt, dass I' im Schnittpunkt aller drei Winkelhalbierenden liegen muss. Die Punkte I und I' fallen also zusammen, was die Eindeutigkeitsaussage des Satzes zeigt. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Man betrachte ein Dreieck $\triangle A_i A_j A_k$. Da die Winkelhalbierende durch den Eckpunkt A_i den Innenwinkel an der Ecke A_i halbiert, muss sie die gegenüberliegende Seite $A_j A_k$ in einem Punkt S schneiden. Betrachtet man nun das neu entstandene Dreieck $\triangle A_i S A_k$, so muss die Winkelhalbierende durch A_k die gegenüberliegende Seite $A_i S$ schneiden. Da die Seite $A_i S$ zur Gänze im Inneren des Dreiecks $\triangle A_i A_j A_k$ liegt folgt, dass sich zwei Winkelhalbierende eines Dreiecks in einem Punkt im Inneren des Dreiecks schneiden müssen. Sei I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch A_i und der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch A_j . Da I auf der Winkelhalbierenden durch A_i liegt, folgt aus Lemma 8.1.3:

$$d(I, g(A_i, A_j)) = d(I, g(A_i, A_k)).$$

Analog folgt

$$d(I, g(A_i, A_j)) = d(I, g(A_j, A_k)),$$

da I auch auf der Winkelhalbierenden durch A_j liegt. Somit gilt

$$d(I, g(A_i, A_j)) = d(I, g(A_i, A_k)) = d(I, g(A_j, A_k)). \quad (8.10)$$

Der Punkt I hat also ebenso denselben Abstand zu $g(A_i, A_k)$ und $g(A_j, A_k)$. Da der Punkt I im Inneren des Dreiecks liegt gilt außerdem: $g'_i(I), g'_j(I), g'_k(I) \geq 0$. Der Punkt I liegt nach der Umkehrung in Lemma 8.1.3 also auch auf der dritten Winkelhalbierenden des Dreiecks, durch den Eckpunkt A_k . Da der Punkt I auf allen Winkelhalbierenden im Inneren des Dreiecks liegt, müssen die Fußpunkte der Lote des Punktes I auf die Trägergeraden nach Lemma 8.1.2 also auf allen Halbgeraden liegen, die von den Eckpunkten A_i, A_j und A_k ausgehen und die Dreiecksseiten enthalten. Da der Durchschnitt von jeweils zwei Halbgeraden genau den Dreiecksseiten entsprechen, liegen die Fußpunkte der Lote alle auf einer Dreiecksseite.

Der Kreis mit Mittelpunkt I und Radius r bzw. Normalabstand d

$$r = d(I, g(A_i, A_j)) = d(I, g(A_i, A_k)) = d(I, g(A_j, A_k)) \quad (8.11)$$

liegt somit im Inneren des Dreiecks und berührt alle drei Dreiecksseiten.

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes folgt analog zum algebraischen Beweis. \square

In Abbildung 8.7 ist ein solcher Kreis dargestellt.

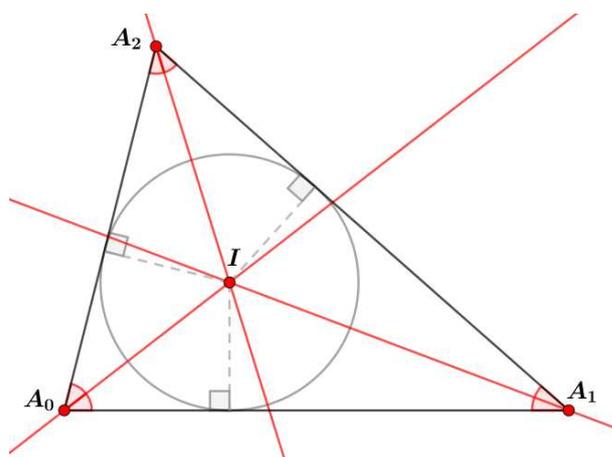


Abbildung 8.3: Skizze zum Beweis der Existenz des Inkreismittelpunkts.

Definition 8.1.5 (Inkreis). Der Kreis, der alle drei Seiten eines Dreiecks berührt und im Inneren des Dreiecks liegt, wird als Inkreis des Dreiecks bezeichnet. Sein Radius heißt Inkreisradius r_I und sein Mittelpunkt Inkreismittelpunkt I .

8.1.1 Ankreismittelpunkte

Vernachlässigt man in der Definition der Winkelhalbierenden die Einschränkung, dass die Gerade den Innenwinkel halbiert und somit durch das Dreiecksinnere verläuft, so erhält man eine weitere Gerade, die zu den Trägergeraden der Dreiecksseiten denselben Abstand hat.

Definition 8.1.6 (Außenwinkelhalbierende eines Dreiecks). Die Außenwinkelhalbierende durch einen Eckpunkt eines Dreiecks ist jene Gerade, die den von den Trägergeraden durch den Eckpunkt aufgespannten Supplementärwinkel des Dreiecks halbiert.

In einem Dreieck existieren 3 solche Außenwinkelhalbierenden, eine pro Eckpunkt.

Die Außenwinkelhalbierende verläuft ebenso durch den Schnittpunkt der Trägergeraden des Winkels und steht normal auf dessen Winkelhalbierende. Die Außenwinkelhalbierende durch den Eckpunkt A_i verläuft also durch die beiden Quadranten, die an das Dreieck und den Eckpunkt A_i angrenzen.

Lemma 8.1.7. Die Fußpunkte der Lote eines Punkts auf der Außenwinkelhalbierenden durch einen Eckpunkt liegen immer auf einer Halbgeraden, die eine Dreiecksseite enthält und einer Halbgerade, die keine Dreiecksseite enthält.

Dieser Beweis folgt analog zum Beweis von Lemma 8.1.2.

Lemma 8.1.8. Jeder Punkt auf der Außenwinkelhalbierenden durch einen Eckpunkt eines Dreiecks hat denselben Abstand zu den zwei Trägergeraden der Dreiecksseiten, die den Eckpunkt enthalten.

Umgekehrt liegt jeder Punkt im Inneren der Supplementärwinkel eines Innenwinkels des Dreiecks mit selbem Abstand zu den Trägergeraden zweier Dreiecksseiten auf der Außenwinkelhalbierenden durch den gemeinsamen Eckpunkt.

Des Weiteren gilt:

$$X \in \text{Außenwinkelhalbierende durch } A_i \iff d(X, g_j) = d(X, g_k) \wedge g'_j(X) \cdot g'_k(X) \leq 0. \quad (8.12)$$

Eine Skizze zur Außenwinkelhalbierenden ist in Abbildung 8.4 dargestellt, der Beweis von Lemma 8.1.8 und dessen Umkehrung erfolgt analog zum Beweis von Lemma 8.1.3.

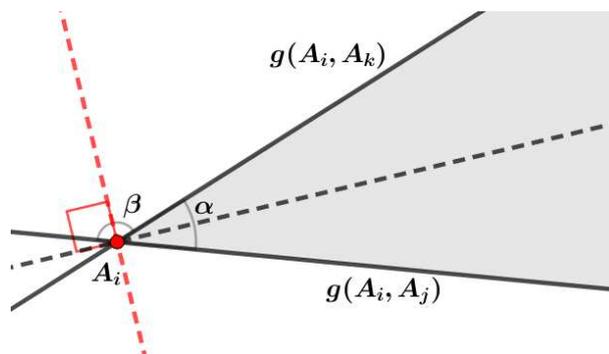


Abbildung 8.4: Skizze zur Außenwinkelhalbierenden.

Satz 8.1.9 (Existenz der Ankreismittelpunkte). *Die Außenwinkelhalbierenden zweier Eckpunkte und die Winkelhalbierende des dritten Eckpunkts eines Dreiecks schneiden sich jeweils in einem Punkt im Äußeren des Dreiecks. Diese Punkte sind die Mittelpunkte jeweils eines Kreises, der alle drei Trägergeraden der Dreiecksseiten berührt. Darüber hinaus berühren sie die von der Winkelhalbierenden geschnittene Dreiecksseite. Zusammen mit dem Inkreis sind dies die einzigen Kreise, die alle drei Trägergeraden berühren.*

Beweis (algebraisch). Betrachtet man die zwei Außenwinkelhalbierenden durch die Eckpunkte A_i und A_j eines Dreiecks $\triangle A_i A_j A_k$. Die Normalvektoren der Außenwinkelhalbierenden ergeben sich durch Addieren der Normalvektoren \vec{n} der Trägergeraden, die den jeweiligen Eckpunkt enthalten. Die Normalvektoren der Außenwinkelhalbierenden durch A_i und A_j sind demnach durch $\vec{aw}_i = \vec{n}_j + \vec{n}_k$ und $\vec{aw}_j = \vec{n}_i + \vec{n}_k$ gegeben. Für die lineare Unabhängigkeit der beiden Normalvektoren der Außenwinkelhalbierenden folgt mit einer analogen Rechnung zu dem Beweis von Satz 8.1.4: $a + b = -1$. Das bedeutet, dass \vec{n}_k auf der Geraden durch $-\vec{n}_i$ und $-\vec{n}_j$ liegen muss. Analog zum Beweis von Satz 8.1.4 folgt ein Widerspruch und somit, dass sich die beiden Außenwinkelhalbierenden demnach in einem Punkt B_k schneiden müssen. Für den Schnittpunkt B_k gilt nach (8.12):

$$\begin{aligned} g'_j(B_k) \cdot g'_k(B_k) &\leq 0 \\ g'_i(B_k) \cdot g'_k(B_k) &\leq 0. \end{aligned}$$

Durch das Produkt der beiden Ungleichungen folgt:

$$g'_j(B_k) \cdot g'_k(B_k) \cdot g'_i(B_k) \cdot g'_k(B_k) = g_j(B_k) \cdot g'_k(B_k)^2 \cdot g'_i(B_k) \geq 0.$$

Da $g'_k(B_k)^2$ auf alle Fälle positiv ist folgt:

$$g'_i(B_k) \cdot g'_j(B_k) \geq 0. \tag{8.13}$$

Der Punkt B_k liegt also auch auf der Winkelhalbierenden des Dreiecks, durch den Eckpunkt A_k .

Die einzigen Teilräume, die alle drei Ungleichungen erfüllen sind jene, für die $g'_i(B_k), g'_j(B_k) \geq 0, g'_k(B_k) \leq 0$ bzw. $g'_i(B_k), g'_j(B_k) \leq 0, g'_k(B_k) \geq 0$ gilt. Der Punkt B_k liegt also im Äußeren des Dreiecks.

Der Teilraum mit $g'_i(B_k), g'_j(B_k) \leq 0, g'_k(B_k) \geq 0$ entspricht dem Teilraum, der nur den Eckpunkt A_k des Dreiecks enthält und von den beiden Trägergeraden g_i und g_j begrenzt ist. Sei X ein Punkt in diesem Teilraum, so schneidet das Lot auf die Trägergerade g_k entweder die Trägergerade g_i oder die Trägergerade g_j . Der Abstand $d(g_k, X)$ jedes Punktes X im Teilraum ist somit auf jeden Fall größer als einer der Abstände $d(g_i, X)$ und $d(g_j, X)$. Der Punkt B_k kann somit nicht in diesem Teilraum liegen. Der Punkt B_k muss daher im Teilraum mit $g'_i(B_k), g'_j(B_k) \geq 0, g'_k(B_k) \leq 0$ liegen. Dieser Teilraum entspricht dem Teilraum, der an die Dreiecksseite $A_i A_j$ grenzt.

Der Punkt B_k liegt also auf der Seite von g_k , die A_k nicht enthält. Da der Punkt B_k auf den Außenwinkelhalbierenden durch A_i liegt, liegt nach Lemma 8.1.7 der Lotfußpunkt

F_j auf die Trägergeraden g_j auf der Halbgerade von A_i ausgehend, die den Eckpunkt A_k nicht enthält. Der Lotfußpunkt F_k auf die Trägergeraden g_k liegt daher auf der Halbgeraden, die die Dreiecksseite A_iA_j enthält. Analog folgt durch die Außenwinkelhalbierende durch A_j , dass F_i auf der Halbgeraden von A_j ausgehend liegt, die den Eckpunkt A_k nicht enthält und F_k daher auf der Halbgeraden, die die Dreiecksseite A_iA_j enthält. Aus dem Durchschnitt der beiden Halbgeraden der Trägergeraden g_k folgt, dass der Lotfußpunkt F_k auf der Dreiecksseite A_iA_j liegt. Die Lotfußpunkte F_i, F_j auf die Trägergeraden g_i, g_j liegen im Äußeren des Dreiecks.

Der Kreis mit Mittelpunkt B_k und Radius r bzw. Normalabstand d

$$r = d(B_k, g(A_i, A_j)) = d(B_k, g(A_i, A_k)) = d(B_k, g(A_j, A_k)) \quad (8.14)$$

liegt somit im Äußeren des Dreiecks, berührt alle drei Trägergeraden der Dreiecksseiten und darüber hinaus die Dreiecksseite A_iA_j . Dies folgt analog für die anderen Dreiecksseiten.

Um die Eindeutigkeit dieser Punkte zu zeigen sei B' der Mittelpunkt eines weiteren Kreises, der alle drei Trägergeraden der Dreiecksseiten berührt. Es muss somit

$$r' = d(B', g(A_i, A_j)) = d(B', g(A_i, A_k)) = d(B', g(A_j, A_k))$$

gelten. Für die Vorzeichen der Produkte der orientierten Abstände zu den Trägergeraden gibt es vier verschiedene Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 1 : & g'_i(B') \cdot g'_j(B') \geq 0; \quad g'_i(B') \cdot g'_k(B') \geq 0; \quad g'_j(B') \cdot g'_k(B') \geq 0 \\ 2 : & g'_i(B') \cdot g'_j(B') \geq 0; \quad g'_i(B') \cdot g'_k(B') \leq 0; \quad g'_j(B') \cdot g'_k(B') \leq 0 \\ 3 : & g'_i(B') \cdot g'_j(B') \leq 0; \quad g'_i(B') \cdot g'_k(B') \geq 0; \quad g'_j(B') \cdot g'_k(B') \leq 0 \\ 4 : & g'_i(B') \cdot g'_j(B') \leq 0; \quad g'_i(B') \cdot g'_k(B') \leq 0; \quad g'_j(B') \cdot g'_k(B') \geq 0. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Aus der Umkehrung in Lemma 8.1.3 folgt, dass sich für Möglichkeit 1 der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt I ergibt. Aus den Umkehrungen in Lemma 8.1.3 und Lemma 8.1.8 folgt für Möglichkeit 2 der Schnittpunkt B_k der Winkelhalbierenden durch A_k und der Außenwinkelhalbierenden durch A_i und A_j . Aus Möglichkeit 3 und 4 folgen analog die Schnittpunkte B_j und B_i . Die drei Schnittpunkte B_i, B_j, B_k einer Winkelhalbierenden mit zwei Außenwinkelhalbierenden und der Inkreismittelpunkt I sind also die Mittelpunkte der einzigen Kreise, die alle drei Trägergeraden berühren. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Man betrachte ein Dreieck $\triangle A_iA_jA_k$. Da sich, wie im Beweis von 8.1.4 bereits gezeigt, die Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden und die Außenwinkelhalbierenden normal auf die Winkelhalbierenden stehen, müssen sich zwei Außenwinkelhalbierende eines Dreiecks in einem Punkt im Äußeren des Dreiecks schneiden. Sei

8 Der Inkreis- und die Ankreismittelpunkte

B_k der Schnittpunkt der Außenwinkelhalbierenden durch A_i und A_j . Aus Lemma 8.1.8 folgt:

$$d(B_k, g(A_i, A_j)) = d(B_k, g(A_i, A_k)),$$

da B_k auf der Außenwinkelhalbierenden durch A_i liegt und

$$d(B_k, g(A_i, A_j)) = d(B_k, g(A_j, A_k)),$$

da B_k auch auf der Außenwinkelhalbierenden durch A_j liegt. Somit gilt

$$d(B_k, g(A_i, A_j)) = d(B_k, g(A_i, A_k)) = d(B_k, g(A_j, A_k)). \quad (8.16)$$

Der Punkt B_k hat also ebenso denselben Abstand zu allen Trägergeraden. Da B_k auf den Außenwinkelhalbierenden durch A_i liegt, liegt nach Lemma 8.1.7 einer der zwei Lotfußpunkte auf die Trägergeraden $g(A_i, A_j)$ und $g(A_i, A_k)$ auf einer Halbgeraden, die eine Dreiecksseite beinhaltet und der andere Lotfußpunkt auf einer Halbgeraden, die keine Dreiecksseite beinhaltet. Analog gilt dies für die Trägergeraden $g(A_i, A_j)$ und $g(A_j, A_k)$. Da zwei dieser Lotfußpunkte zusammenfallen und die beiden Eckpunkte die Trägergeraden $g(A_i, A_j)$ gemeinsam haben und die Dreiecksseite $A_i A_j$ genau dem Durchschnitt der beiden Halbgeraden von A_i und A_j entspricht, liegt ein Lotfußpunkt des Punktes B_k auf der Dreiecksseite $A_i A_j$ die anderen Lotfußpunkte liegen auf den Halbgeraden durch A_i und A_j , die keine Dreiecksseite beinhalten. Vom Punkt A_k aus betrachtet liegen diese zwei Lotfußpunkte auf den Halbgeraden der Trägerebene, die die Dreiecksseiten $A_i A_k$ und $A_j A_k$ beinhalten. Der Punkt B_k liegt nach Lemma 8.1.3 also auch auf der Winkelhalbierenden des Dreiecks, durch den Eckpunkt A_k .

Der Kreis mit Mittelpunkt B_k und Radius r bzw. Normalabstand d

$$r = d(B_k, g(A_i, A_j)) = d(B_k, g(A_i, A_k)) = d(B_k, g(A_j, A_k)) \quad (8.17)$$

liegt somit im Äußeren des Dreiecks, berührt alle drei Trägergeraden der Dreiecksseiten und darüber hinaus die Dreiecksseite $A_i A_j$.

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes folgt analog zum algebraischen Beweis. \square

Für ein Dreieck existieren drei verschiedene solche Kreise, einer pro Dreiecksseite, diese sind in Abbildung 8.5 dargestellt.

Definition 8.1.10 (Ankreis). Die Kreise, die alle drei Trägergeraden der Dreiecksseiten berühren und außerhalb des Dreiecks liegen, werden als Ankreis des Dreiecks bezeichnet. Ihre Radien heißen Ankreismittelpunkte und ihre Mittelpunkte Ankreismittelpunkte.

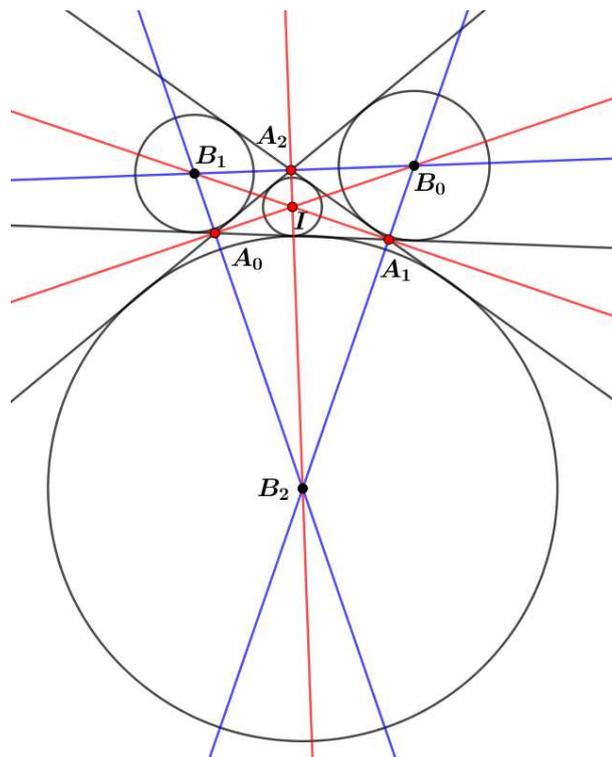


Abbildung 8.5: Skizze zum Beweis der Existenz der Ankreismittelpunkte.

8.2 Der Inkugelmittelpunkt

In dem folgenden Abschnitt wird die Existenz der Inkugel und der Ankugeln eines Tetraeders thematisiert. Die Informationen wurden dabei aus [1, S. 22], [8, S. 50] und [14, S. 374f] entnommen.

Zwei Trägerebenen der Tetraederseiten schneiden sich in der gemeinsamen Kante. Dadurch teilen je zwei Trägerebenen den 3-dimensionalen Raum in vier Quadranten. Die vier Trägerebenen des Tetraeders teilen den 3-dimensionalen Raum in 15 Teilräume. Den Teilraum, der das Tetraeder enthält, vier Teilräume, die jeweils an eine Tetraederseite grenzen, sechs Teilräume, die jeweils an eine Kante grenzen und vier Teilräume, die jeweils an einen Eckpunkt grenzen. Sei der orientierte Abstand eines Punktes X zur Trägerebene ε_i wie folgt definiert: $\varepsilon'_i(X) = \pm d(X, \varepsilon_i)$, wobei für jeden Punkt X im Inneren des Tetraeders $\varepsilon'_0(X) \geq 0, \varepsilon'_1(X) \geq 0, \varepsilon'_2(X) \geq 0$ gelten soll. Die Menge aller Punkte X , die die Gleichung $\varepsilon'_i(X) = 0$ erfüllen bilden somit die Trägerebene ε_i . Die beiden Teilräume, die durch die Trägerebene ε_i getrennt sind, werden durch die Menge aller Punkte X , die die Ungleichungen $\varepsilon'_i(X) < 0$ bzw. $\varepsilon'_i(X) > 0$ erfüllen beschrieben, wobei $\varepsilon'_i(A_i) > 0$ ist. Die von den Trägerebenen aufgespannten Teilräume können dann, wie in Tabelle 8.1 dargestellt, durch die Vorzeichen der Abstände zu den Trägerebenen beschrieben werden.

In Tabelle 8.1 sind die, durch die Trägerebenen geteilten, 15 Teilräume des 3-dimensionalen Raums mit den jeweiligen Ungleichungen zusammengefasst.

	ε'_0	ε'_1	ε'_2	ε'_3
$A_0A_1A_2A_3$	+	+	+	+
$A_0A_1A_2$	+	+	+	-
$A_0A_1A_3$	+	+	-	+
$A_0A_2A_3$	+	-	+	+
$A_1A_2A_3$	-	+	+	+
A_0A_1	+	+	-	-
A_0A_2	+	-	+	-
A_0A_3	+	-	-	+
A_1A_2	-	+	+	-
A_1A_3	-	+	-	+
A_2A_3	-	-	+	+
A_0	+	-	-	-
A_1	-	+	-	-
A_2	-	-	+	-
A_3	-	-	-	+

Tabelle 8.1: In der linken Spalte sind die Teilräume anhand der enthaltenen Eckpunkte charakterisiert. In der jeweiligen Zeile sind die Vorzeichen der Ungleichungen der Trägerebenen für diesen Teilraum dargestellt.

Definition 8.2.1 (2-Winkelhalbierende eines Tetraeders). Die 2-Winkelhalbierende durch eine Kante eines Tetraeders ist jene Ebene, die den von den Trägerebenen durch die Kante aufgespannten Innenwinkel des Tetraeders halbiert.

In einem Tetraeder existieren 6 solche 2-Winkelhalbierenden, eine pro Kante.

Die 2-Winkelhalbierende durch die Kante A_iA_l verläuft durch den Quadranten, der das Tetraeder enthält und den gegenüberliegenden Quadranten. Für die Fußpunkte der Lote eines Punktes auf der 2-Winkelhalbierenden gilt folgendes Lemma:

Lemma 8.2.2. *Die Fußpunkte der Lote eines Punktes auf der 2-Winkelhalbierenden durch einen Eckpunkt liegen entweder auf den beiden Halbebenen, die jeweils eine Tetraederseite beinhalten oder auf den beiden Halbebenen, die keine Tetraederseite beinhalten.*

Dieser Beweis folgt analog zum Beweis von Lemma 8.1.2.

Lemma 8.2.3. *Jeder Punkt auf der 2-Winkelhalbierenden durch eine Kante eines Tetraeders hat denselben Abstand zu den zwei Trägerebenen der Tetraederseiten, die die Kante enthalten.*

Umgekehrt liegt jeder Punkt im Inneren eines Innenwinkels des Tetraeders oder im Inneren eines Gegenwinkels mit selbem Abstand zu den Trägerebenen zweier Tetraederseiten auf der 2-Winkelhalbierenden durch die gemeinsame Kante.

Des Weiteren gilt:

$$X \in 2\text{-Winkelhalbierende durch } A_iA_j \iff d(X, \varepsilon_k) = d(X, \varepsilon_l) \wedge \varepsilon'_k(X) \cdot \varepsilon'_l(X) \geq 0. \quad (8.18)$$

Dieser Beweis folgt analog zum Beweis von Lemma 8.1.3.

Satz 8.2.4 (Existenz des Inkugelmittelpunkts). *Die sechs 2-Winkelhalbierenden eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkt I im Inneren des Tetraeders. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der einzigen Kugel, die alle vier Seitenflächen des Tetraeders berührt. Diese Kugel liegt zur Gänze im Inneren des Tetraeders.*

Beweis (algebraisch). Betrachtet man die drei 2-Winkelhalbierenden durch die Kanten A_iA_j , A_jA_k und A_kA_l eines Tetraeders $A_iA_jA_kA_l$. Diese drei 2-Winkelhalbierenden verlaufen jeweils durch eine Kante, die nicht alle zur selben Dreiecksseite des Tetraeders gehören. Die Normalvektoren der 2-Winkelhalbierenden ergeben sich durch Subtrahieren der Normalvektoren \vec{n} der Trägerebenen, die die jeweilige Kante enthalten. Die Normalvektoren der Winkelhalbierenden durch A_iA_j , A_jA_k und A_kA_l sind demnach durch

$$\begin{aligned} \vec{w}_{ij} &= \vec{n}_k - \vec{n}_l \\ \vec{w}_{jk} &= \vec{n}_l - \vec{n}_i \\ \vec{w}_{kl} &= \vec{n}_i - \vec{n}_j \end{aligned} \quad (8.19)$$

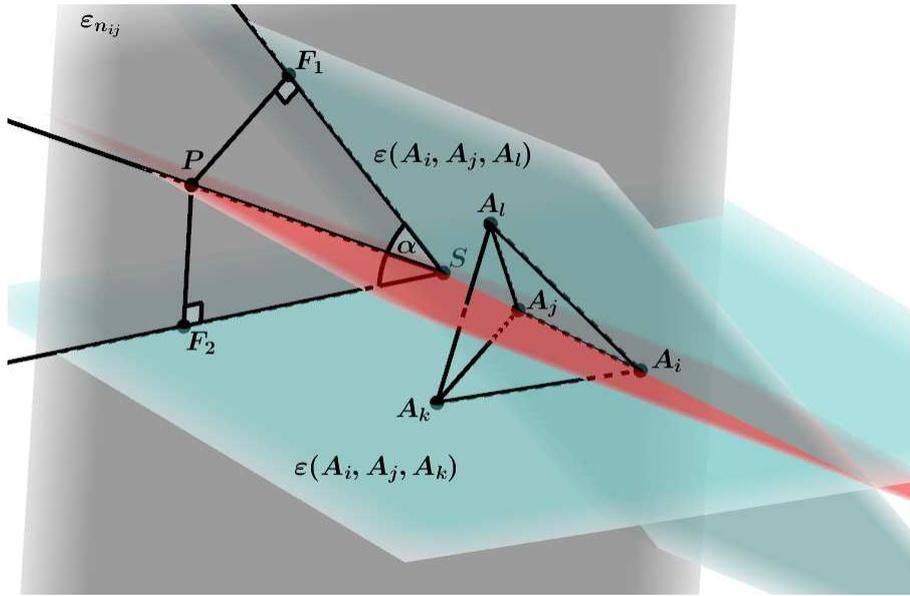


Abbildung 8.6: Skizze zur 2-Winkelhalbierenden.

gegeben. Da das Tetraeder nicht entartet ist, sind jeweils drei der Normalvektoren $\vec{n}_i, \vec{n}_j, \vec{n}_k, \vec{n}_l$ der Trägerebenen linear unabhängig. Die 4 Normalvektoren sind im 3-dimensionalen Raum linear abhängig und es gilt

$$\vec{n}_l = a \cdot \vec{n}_i + b \cdot \vec{n}_j + c \cdot \vec{n}_k, \text{ mit } a, b, c \neq 0. \quad (8.20)$$

Für die Zahlen a, b, c kann noch eine größere Einschränkung vorgenommen werden: Da $A_l - A_i \parallel \varepsilon_k$ und $A_l - A_i \parallel \varepsilon_j$ gilt:

$$\vec{n}_j \cdot (A_l - A_i) = 0 = \vec{n}_k \cdot (A_l - A_i). \quad (8.21)$$

Multipliziert man beide Seiten von (8.20) mit $(A_l - A_i)$, so folgt mit (8.21):

$$\vec{n}_l \cdot (A_l - A_i) = a \cdot \vec{n}_i \cdot (A_l - A_i). \quad (8.22)$$

Da \vec{n}_l nach Innen zeigt gilt:

$$\vec{n}_l \cdot (A_l - A_i) > 0. \quad (8.23)$$

Da \vec{n}_i nach Innen zeigt folgt:

$$\vec{n}_i \cdot (A_l - A_i) < 0. \quad (8.24)$$

Aus (8.22), (8.23) und (8.24) folgt $a < 0$. Analog kann $b < 0$ und $c < 0$ gezeigt werden.

Damit sich die Winkelhalbierenden durch $A_i A_j$, $A_j A_k$ und $A_k A_l$ in einem Punkt I schneiden, müssen die Normalvektoren $\vec{w}_{ij}, \vec{w}_{jk}$ und \vec{w}_{kl} linear unabhängig sein. Demnach ist die folgende Gleichung zu zeigen:

$$\lambda_i \cdot \vec{w}_{ij} + \lambda_j \cdot \vec{w}_{jk} + \lambda_k \cdot \vec{w}_{kl} = 0 \iff \lambda_i = \lambda_j = \lambda_k = 0. \quad (8.25)$$

Durch Einsetzen von (8.19), sowie (8.20) ergibt sich durch Umformen:

$$(\lambda_k - \lambda_j + \lambda_j a - \lambda_i a) \vec{n}_i + (\lambda_j b - \lambda_i b - \lambda_k) \vec{n}_j + (\lambda_i + \lambda_j c - \lambda_i c) \vec{n}_k = 0.$$

Da die Normalvektoren \vec{n}_i, \vec{n}_j und \vec{n}_k linear unabhängig sind muss

$$\lambda_k - \lambda_j + \lambda_j a - \lambda_i a = 0 \quad (8.26)$$

und

$$\lambda_j b - \lambda_i b - \lambda_k = 0 \quad (8.27)$$

und

$$\lambda_i + \lambda_j c - \lambda_i c = 0 \quad (8.28)$$

erfüllt sein. Durch Umformen von (8.28) erhält man

$$\lambda_j = \frac{(c-1) \cdot \lambda_i}{c}. \quad (8.29)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (8.27) erhält man:

$$\lambda_k = -\frac{\lambda_i b}{c}. \quad (8.30)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (8.29) und (8.30) in (8.26) erhält man:

$$\lambda_i \cdot \left(\frac{-a-b-c+1}{c} \right) = 0. \quad (8.31)$$

Nun gilt es zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $\lambda_i = 0$

Wenn $\lambda_i = 0$, so folgt aus (8.29) und (8.30): $\lambda_j = 0$ und $\lambda_k = 0$, womit (8.25) erfüllt wäre.

2. Fall: $\frac{-a-b-c+1}{c} = 0$

Durch Umformen von $\frac{-a-b-c+1}{c} = 0$ erhält man $a + b + c = 1$, was einen Widerspruch zu $a, b, c < 0$ darstellt.

Die Normalvektoren der drei 2-Winkelhalbierenden durch $A_i A_j, A_j A_k$ und $A_k A_i$ sind also linear unabhängig. Demnach müssen sich die 2-Winkelhalbierenden in einem Punkt I schneiden. Für den Punkt I folgt nach (8.18):

$$\begin{aligned} | &: \varepsilon'_k(I) \cdot \varepsilon'_i(I) \geq 0 \\ || &: \varepsilon'_i(I) \cdot \varepsilon'_i(I) \geq 0 \\ ||| &: \varepsilon'_i(I) \cdot \varepsilon'_j(I) \geq 0. \end{aligned} \quad (8.32)$$

8 Der Inkreis- und die Ankreismittelpunkte

Aus (8.32) folgt:

$$\begin{aligned} |\cdot| &: \varepsilon'_i(I) \cdot \varepsilon'_k(I) \geq 0 \\ ||\cdot|| &: \varepsilon'_j(I) \cdot \varepsilon'_l(I) \geq 0 \\ | \cdot || \cdot || &: \varepsilon'_j(I) \cdot \varepsilon'_k(I) \geq 0. \end{aligned}$$

Damit alle Ungleichungen erfüllt werden können müssen die Vorzeichen aller ε'_i gleich sein. Da kein Teilraum existiert, für den alle Vorzeichen der Trägerebenen negativ sind, ist der einzige Teilraum, der alle sechs Ungleichungen erfüllt jener, für den $\varepsilon'_i(I), \varepsilon'_j(I), \varepsilon'_k(I), \varepsilon'_l(I) \geq 0$ ist. Dieser Teilraum entspricht genau dem Inneren des Tetraeders. Der Punkt I liegt also im Inneren des Tetraeders. Nach Lemma 8.1.3 hat der Punkt I den gleichen Abstand zu allen vier Trägerebenen. Der Punkt I liegt nach der Umkehrung in Lemma 8.2.3 also auch auf den drei anderen 2-Winkelhalbierenden des Tetraeders. Die Kugel mit Mittelpunkt I und Radius r bzw. Normalabstand d

$$r = d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_k)) = d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_l)) = d(I, \varepsilon(A_i, A_k, A_l)) = d(I, \varepsilon(A_j, A_k, A_l))$$

liegt somit im Inneren des Tetraeders und berührt alle vier Seitenflächen.

Um die Eindeutigkeit des Punktes I zu zeigen sei I' der Mittelpunkt einer weiteren Kugel in $A_0A_1A_2A_3$, die alle vier Seitenflächen des Tetraeders berührt. Es muss somit

$$r' = d(I', \varepsilon(A_i, A_j, A_k)) = d(I', \varepsilon(A_i, A_j, A_l)) = d(I', \varepsilon(A_i, A_k, A_l)) = d(I', \varepsilon(A_j, A_k, A_l))$$

gelten. Aus den Erkenntnissen aus Abschnitt 8.2.1 folgt, dass I' im Inneren des Tetraeders liegt. Aus der Umkehrung in Lemma 8.2.3 folgt, dass I' im Schnittpunkt aller sechs 2-Winkelhalbierenden liegen muss. Die Punkte I und I' fallen also zusammen, was die Eindeutigkeitsaussage des Satzes zeigt. \square

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Man betrachte ein Tetraeder $A_iA_jA_kA_l$. Da die 2-Winkelhalbierende durch die Kante A_iA_j den Innenwinkel an der Kante A_iA_j halbiert, muss sie die gegenüberliegende Kante A_kA_l in einem Punkt S schneiden.

Betrachtet man nun das neu entstandene Tetraeder $A_iA_jA_kS$, so muss die 2-Winkelhalbierende durch A_jA_k die gegenüberliegende Seite A_iS in einem Punkt S' schneiden. Da die Strecke A_iS zur Gänze im Inneren der Tetraederseite $\triangle A_iA_kA_l$ liegt folgt, dass der Punkt S' ebenfalls in $\triangle A_iA_kA_l$ liegt. Zwei 2-Winkelhalbierende mit gemeinsamen Eckpunkt schneiden sich also in einer Geraden, die durch die Tetraederseite verläuft, die dem gemeinsamen Eckpunkt gegenüber liegt. Sei g die Schnittgerade der beiden 2-Winkelhalbierenden durch A_iA_j und A_jA_k , die durch den Eckpunkt A_j und den Schnittpunkt S' mit der Tetraederseite $\triangle A_iA_kA_l$ verläuft.

Betrachtet man nun das Tetraeder $A_iA_jA_kS'$, so muss die 2-Winkelhalbierende durch A_iA_k die gegenüberliegende Seite A_jS' in einem Punkt I schneiden. Da die Seite A_jS' auf der Gerade g und zur Gänze im Inneren des Tetraeders $A_iA_jA_kA_l$ liegt folgt, dass

sich drei 2-Winkelhalbierende eines Tetraeders in einem Punkt I im Inneren des Tetraeders schneiden müssen.

Da I auf den 2-Winkelhalbierenden durch A_iA_j , A_jA_k und A_iA_k liegt, folgt aus Lemma 8.2.3:

$$d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_k)) = d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_l)),$$

$$d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_k)) = d(I, \varepsilon(A_j, A_k, A_l)),$$

und

$$d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_k)) = d(I, \varepsilon(A_i, A_k, A_l)).$$

Somit gilt

$$d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_k)) = d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_l)) = d(I, \varepsilon(A_i, A_k, A_l)) = d(I, \varepsilon(A_j, A_k, A_l)) \quad (8.33)$$

Der Punkt I hat also ebenso denselben Abstand zu allen Trägerebenen. Der Punkt I liegt nach der Umkehrung in Lemma 8.2.3 also auch auf den anderen drei

2-Winkelhalbierenden des Tetraeders, durch die Kanten A_iA_l , A_jA_l und A_kA_l . Da der Punkt I auf allen 2-Winkelhalbierenden im Inneren des Tetraeders liegt, müssen die Fußpunkte der Lote des Punktes I auf die Trägerebenen nach Lemma 8.2.2 also auf allen Halbebenen liegen, die von den Kanten ausgehen und die Tetraederseiten enthalten. Da die Durchschnitte von jeweils drei Halbebenen genau den Tetraederseiten entsprechen, liegen die Fußpunkte der Lote alle auf einer Tetraederseite.

Die Kugel mit Mittelpunkt I und Radius r bzw. Normalabstand d

$$r = d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_k)) = d(I, \varepsilon(A_i, A_j, A_l)) = d(I, \varepsilon(A_i, A_k, A_l)) = d(I, \varepsilon(A_j, A_k, A_l))$$

liegt somit im Inneren des Tetraeders und berührt alle vier Seitenflächen.

Die Eindeutigkeitsaussage folgt analog zum algebraischen Beweis. □

Definition 8.2.5 (Inkugel). Die Kugel, die alle vier Seiten eines Tetraeders berührt und im Inneren des Tetraeders liegt, wird als Inkugel des Tetraeders bezeichnet. Ihr Radius heißt Inkugelradius r_I und ihr Mittelpunkt Inkugelmittelpunkt I .

8.2.1 Ankungelmittelpunkte

Vernachlässigt man in der Definition der 2-Winkelhalbierenden die Einschränkung, dass die Ebene einen Innenwinkel halbiert und somit durch das Innere des Tetraeders verläuft, so erhält man eine weitere Ebene, die zu den Trägerebenen der Tetraederseiten denselben Abstand hat.

Definition 8.2.6 (2-Außenwinkelhalbierende eines Tetraeders). Die 2-Außenwinkelhalbierende durch eine Kante eines Tetraeders ist jene Ebene, die den von den Trägerebenen durch die Kante aufgespannten Supplementärwinkel des Tetraeders halbiert.

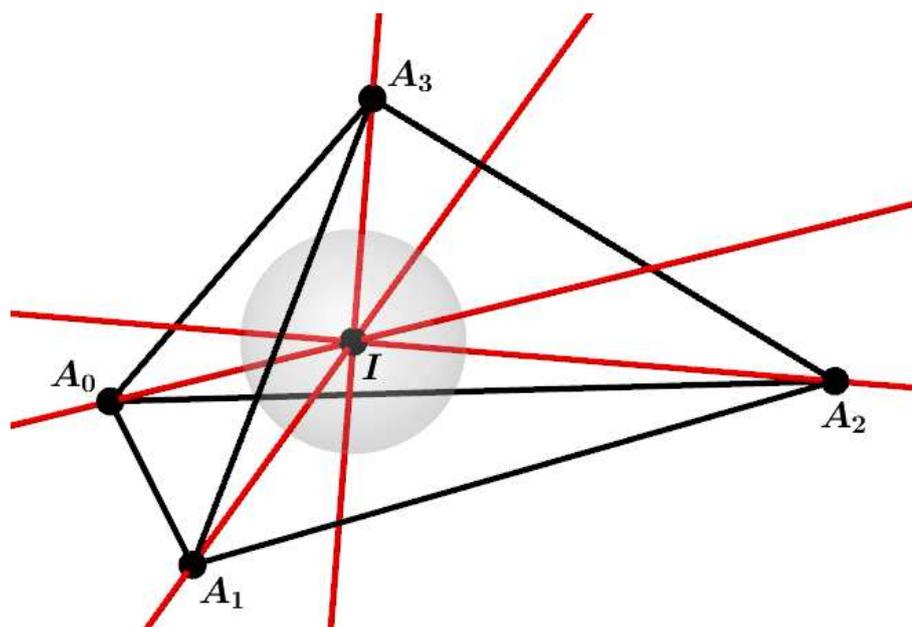


Abbildung 8.7: Skizze zum Beweis der Existenz des Inkugelmittelpunkts. Der Durchschnitt von jeweils drei 2-Winkelhalbierenden durch denselben Eckpunkt ist hier rot dargestellt.

Die 2-Außenwinkelhalbierende durch die Kante $A_i A_j$ verläuft ebenso durch die gemeinsame Kante der Trägerebenen des Winkels und steht normal auf dessen 2-Winkelhalbierende. Genau genommen verläuft die 2-Außenwinkelhalbierende durch die, das Tetraeder enthaltenen Quadranten, angrenzenden Quadranten. Die angrenzenden Quadranten enthalten dabei jeweils eine der Seitenflächen, die die gemeinsame Kante der Trägerebenen beinhalten. Eine Skizze zur 2-Außenwinkelhalbierenden durch $A_i A_j$ ist in Abbildung 8.8 dargestellt.

Lemma 8.2.7. *Die Fußpunkte der Lote eines Punkts auf der 2-Außenwinkelhalbierenden durch eine Kante liegen immer auf einer Halbebene, die eine Tetraederseite enthält und einer Halbebene, die keine Tetraederseite enthält.*

Dieser Beweis folgt analog zum Beweis von Lemma 8.1.2.

In einem Tetraeder existieren 6 solche 2-Außenwinkelhalbierende, eine pro Kante.

Lemma 8.2.8. *Jeder Punkt auf der 2-Außenwinkelhalbierenden durch eine Kante eines Tetraeders hat denselben Abstand zu den zwei Trägerebenen der Tetraederseiten, die die Kante enthalten.*

Umgekehrt liegt jeder Punkt im Inneren der Supplementärwinkel eines Innenwinkels des Tetraeders mit selbem Abstand zu den Trägerebenen zweier Tetraederseiten auf der 2-Außenwinkelhalbierenden durch die gemeinsame Kante.

Des Weiteren gilt:

$$X \in 2\text{-Außenwinkelhalbierende durch } A_i A_j \iff d(X, \varepsilon_k) = d(X, \varepsilon_l) \wedge \varepsilon'_k(X) \cdot \varepsilon'_l(X) \leq 0. \quad (8.34)$$

Der Beweis von Lemma erfolgt analog zum Beweis von Lemma 8.1.8.

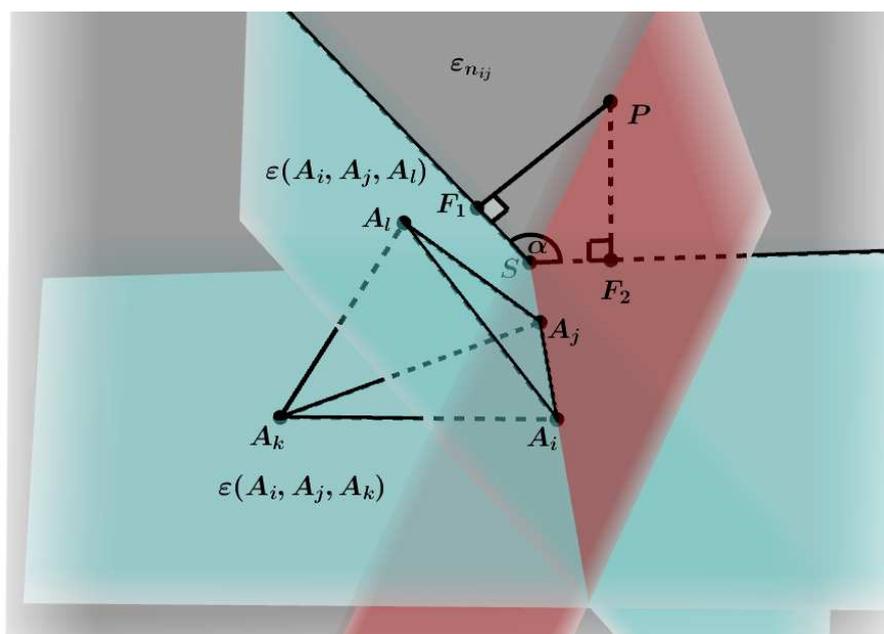


Abbildung 8.8: Skizze zur 2-Außenwinkelhalbierenden.

Nach dem sich alle 2-Winkelhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt schneiden, stellt sich die Frage, ob es noch weitere Schnittpunkte der 2-Winkelhalbierenden und der 2-Außenwinkelhalbierenden gibt. Ein solcher Punkt hätte nach Lemma 8.2.3 und Lemma 8.2.1 zu allen Trägerebenen denselben Abstand. Da der Teilraum, der nur einen Eckpunkt enthält, nicht an die Trägerebene der gegenüberliegenden Seitenfläche grenzt, kann in diesen vier Teilräumen kein Punkt existieren, der zu allen Trägerebenen denselben Abstand hat. In den Teilräumen, die an eine Kante des Tetraeders grenzen, könnten sich die 2-Winkelhalbierende durch die Kante und die gegenüberliegende Kante und alle 2-Außenwinkelhalbierenden durch die verbleibenden Kanten schneiden. In einem Teilraum, der eine Tetraederseite enthält, könnten sich die 2-Außenwinkelhalbierenden durch die Kanten der Tetraederseiten und die 2-Winkelhalbierenden der verbleibenden Kanten schneiden. Dementsprechend gibt es noch 10 Teilräume, die zu untersuchen sind.

Satz 8.2.9 (Existenz der Inkugelmittelpunkte). *Die drei 2-Winkelhalbierenden durch einen gemeinsamen Eckpunkt und die drei 2-Außenwinkelhalbierenden der verbleibenden Kanten schneiden sich in einem Punkt im Äußeren des Tetraeders. Diese Punkte sind*

8 Der Inkreis- und die Ankreismittelpunkte

die Mittelpunkte jeweils einer Kugel, die alle vier Trägerebenen der Seitenflächen des Tetraeders berühren. Darüber hinaus berühren sie die Tetraederseite, die den gemeinsamen Eckpunkt der 2-Winkelhalbierenden nicht enthält.

Des Weiteren können sich zwei 2-Winkelhalbierende, durch gegenüberliegende Kanten und vier 2-Außenwinkelhalbierende, die durch die verbleibenden Kanten verlaufen in einem gemeinsamen Punkt im Äußeren des Tetraeders schneiden. Diese Punkte sind die Mittelpunkte von Kugeln, die alle vier Trägerebenen der Seitenflächen des Tetraeders, jedoch keine Tetraederseite berühren.

Zusammen mit der Inkugel sind dies die einzigen Kugeln, die alle vier Trägerebenen berühren.

Beweis (algebraisch). Der algebraischen Beweis wird in Abschnitt 8.3 für ein allgemeines n -Simplex bewiesen. Da im folgenden Abschnitt ein anderer Aufbau verwendet wird, wird der Beweis für den 3-dimensionalen Fall hier nicht extra angeführt. \square

Die Kombinationsmöglichkeiten aus 2-Winkelhalbierenden (+) und 2-Außenwinkelhalbierenden (-) und den dadurch resultierenden Ankugeln ist in Tabelle 8.2 dargestellt.

	I	B_0	B_1	B_2	B_3	B_{01}/B_{23}	B_{02}/B_{13}	B_{03}/B_{12}
A_0A_1	+	+	+	-	-	+	-	-
A_0A_2	+	+	-	+	-	-	+	-
A_0A_3	+	+	-	-	+	-	-	+
A_1A_2	+	-	+	+	-	-	-	+
A_1A_3	+	-	+	-	+	-	+	-
A_2A_3	+	-	-	+	+	+	-	-
ε'_0	+	-	+	+	+	-/+	-/+	-/+
ε'_1	+	+	-	+	+	-/+	+/-	+/-
ε'_2	+	+	+	-	+	+/-	-/+	+/-
ε'_3	+	+	+	+	-	+/-	+/-	-/+

Tabelle 8.2: Kombinationsmöglichkeiten aus 2-Winkelhalbierenden (+) und 2-Außenwinkelhalbierenden (-) durch die jeweiligen Kanten und der dadurch entstehende Schnittpunkt, sowie die Vorzeichen der Ungleichungen der Trägerebenen für diesen Schnittpunkt.

Dieser Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden:

Beweis (geometrisch). Seien A_i, A_j, A_k, A_l die Eckpunkte eines Tetraeders T . Betrachtet man o.B.d.A. die 2-Winkelhalbierenden durch die Kanten A_iA_j, A_jA_k , so schneiden sie sich analog zum geometrischen Beweis von Satz 8.2.4 in einer Geraden g_i durch die

Punkte A_i und I . Die Punkte auf der Geraden haben nach Lemma 8.2.3 den gleichen Abstand zu allen drei Trägerebenen, die den Eckpunkt A_i enthalten. Nach der Umkehrung in Lemma 8.2.3 liegen alle Punkte auf der Schnittgeraden der 2-Winkelhalbierenden durch A_iA_j und A_iA_k auch auf der 2-Winkelhalbierenden durch A_iA_l . Die Gerade g_i verläuft als durch den Teilraum, der die Seitenfläche $\Delta A_jA_kA_l$ enthält und hat denselben Abstand zu den Trägerebenen $\varepsilon_j, \varepsilon_k, \varepsilon_l$.

Es sei indirekt angenommen, dass keine der 2-Außenwinkelhalbierenden durch A_jA_k, A_jA_l und A_kA_l die Gerade g_i schneidet. Demnach müssen diese 2-Außenwinkelhalbierenden parallel zu g_i sein. Betrachtet man nun das Tetraeder T' das sich durch die Seitenfläche $\Delta A_jA_kA_l$ und den Inkugelmittelpunkt I ergibt. Die Trägerebenen $\varepsilon_j, \varepsilon_k$ und ε_l von T' entsprechen dabei den 2-Winkelhalbierenden des Tetraeders T .

Sei F_{jk} der Fußpunkt des Lots durch I auf die Gerade $g(A_j, A_k)$. Die Gerade $g(I, F_{jk})$ liegt also in der 2-Winkelhalbierenden durch A_jA_k und steht normal auf die Gerade $g(A_j, A_k)$. Da die Gerade $g(I, F_{jk})$ in der 2-Winkelhalbierenden durch A_jA_k liegt, steht sie nach Definition normal auf die 2-Außenwinkelhalbierende durch A_jA_k und nach getroffener Annahme normal auf die Gerade g_i .

Sei $\varepsilon_n(g_i, I)$ die Normalebene auf g_i durch I . Für den Punkt F_{jk} gilt somit: $F_{jk} \in \varepsilon_n(g_i, I)$. Dies folgt analog für die Lotfußpunkte F_{jl}, F_{kl} durch I auf die Geraden $g(A_j, A_l)$ und $g(A_k, A_l)$. Die drei Lotfußpunkte F_{jk}, F_{jl}, F_{kl} liegen daher alle sowohl in der Ebene $\varepsilon_n(g_i, I)$ als auch in der Ebene $\varepsilon_i = \varepsilon(A_j, A_k, A_l)$. Da der Inkugelmittelpunkt I in $\varepsilon_n(g_i, I)$ liegt, jedoch im Inneren von T und somit nicht in ε_i liegen kann, können die beiden Ebenen nicht ident sein und müssen sich somit in einer Geraden schneiden. Die Punkte F_{jk}, F_{jl}, F_{kl} liegen also auf dieser Geraden und sind somit kollinear.

Sei F_i der Fußpunkt des Lots durch I auf die Trägerebene ε_i , dann liegt F_i im Inneren des Dreiecks $\Delta A_jA_kA_l$. Da die Ebene durch I, F_{jk} und F_i normal auf die Kante A_jA_k steht, ist F_{jk} der Fußpunkt des Lots durch F_i auf A_jA_k . Dies folgt analog für die Punkte F_{jl}, F_{kl} . Dies widerspricht jedoch dem Satz von Simson bzw. Wallace, der in [4, S. 41, Theorem 2.51] zu finden ist. Die 2-Außenwinkelhalbierenden durch A_jA_k, A_jA_l und A_kA_l können als nicht alle parallel zu g_i sein.

O.B.d.A. sei die 2-Außenwinkelhalbierende durch A_jA_k nicht parallel zu g_i , die 2-Außenwinkelhalbierende durch A_jA_k schneidet die Gerade g_i als in einem Punkt B_i . Da die 2-Außenwinkelhalbierende durch A_jA_k nicht durch das Innere des Tetraeders T verläuft, liegt der Punkt B_i im Äußeren des Tetraeders. Aus Lemma 8.2.3 und Lemma 8.2.1 folgt, dass der Punkt B_i zu allen Trägerebenen des Tetraeders denselben Abstand hat. Aus der Umkehrung in Lemma 8.2.1 folgt, dass der Punkt B_i auch auf den 2-Außenwinkelhalbierenden durch die Kanten A_jA_l und A_kA_l liegen muss. Bei den Kanten A_jA_l und A_kA_l kann es sich nur um die 2-Außenwinkelhalbierenden handeln, da die 2-Winkelhalbierenden die Gerade g_i im Inneren des Tetraeders, genau genommen im Inkreismittelpunkt I , schneiden. Der Punkt B_i ist also der Schnittpunkt aller 2-Winkelhalbierenden durch den Eckpunkt A_i und den 2-Außenwinkelhalbierenden durch die verbleibenden Kanten. Die Kugel mit Mittelpunkt B_i und Radius r bzw. Normalab-

stand d

$$\begin{aligned} r &= d(B_i, \varepsilon(A_0, A_1, A_2)) = d(B_i, \varepsilon(A_0, A_1, A_3)) \\ &= d(B_i, \varepsilon(A_0, A_2, A_3)) = d(B_i, \varepsilon(A_1, A_2, A_3)) \end{aligned}$$

liegt somit im Äußeren des Tetraeders und berührt die Seitenfläche $\triangle A_j A_k A_l$ sowie die Trägerebenen der Seitenflächen $\varepsilon(A_i, A_j, A_k)$, $\varepsilon(A_i, A_j, A_l)$ und $\varepsilon(A_i, A_k, A_l)$.

Dies folgt analog für die anderen Eckpunkte. Für ein Tetraeder existieren 4 solche Kugeln, eine pro Seitenfläche. Eine dieser Kugeln ist in Abbildung 8.9 dargestellt.

Betrachtet man o.B.d.A. die 2-Winkelhalbierenden durch die Kanten $A_i A_j$ und $A_k A_l$. Da die beiden Ebenen einen Innenwinkel des Tetraeders halbieren müssen sie durch die gegenüberliegende Seite verlaufen. Da die Ebenen außerdem nicht parallel sein können, schneiden sie sich in einer Gerade g_i . Diese Gerade schneidet daher beide Kanten und verläuft somit durch die Teilräume, die die Kanten $A_i A_j$ und $A_k A_l$ und das Tetraeder enthalten. Betrachtet man nun die 2-Außenwinkelhalbierende durch die Kante $A_i A_k$, die unter anderem auch durch die Teilräume verläuft, die die Kanten $A_i A_j$ und $A_k A_l$ enthalten. Die Gerade g_i und die 2-Außenwinkelhalbierende durch $A_i A_j$ können entweder parallel sein oder sich in einem der beiden Teilräume schneiden. Vaughan und Gabai zeigten in [15, S. 388], dass ein Schnittpunkt genau dann existiert, wenn die Summe der beiden Seitenflächen, die an die gegenüberliegenden Kanten angrenzen, verschieden sind. Der Schnittpunkt liegt dann im Teilraum, der die Kante beinhaltet, deren angrenzenden Seitenflächen die kleinere Summe ergeben. Ist die Summe von jeweils zwei Seitenflächen gleich, so stehen die 2-Winkelhalbierenden und die 2-Außenwinkelhalbierenden alle normal auf dieselbe Ebene und schneiden sich somit nicht in einem gemeinsamen Punkt. Es können also zwischen null und drei solcher Schnittpunkte existieren.

Angenommen es existiert ein Schnittpunkt und die 2 Außenwinkelhalbierende durch die Kante $A_i A_k$ schneidet die Schnittgerade g_i der 2-Winkelhalbierenden im Punkt B_{ij} . Da der Punkt auf der 2-Außenwinkelhalbierenden durch $A_j A_k$ liegt, kann er nicht im Inneren des Tetraeders liegen. Der Punkt B_{ij} liegt demnach entweder im Teilraum, der die Kante $A_i A_j$ oder im Teilraum, der die Kante $A_k A_l$ enthält. Aus Lemma 8.2.3 und Lemma 8.2.1 folgt, dass der Punkt B_{ij} zu allen Trägerebenen des Tetraeders denselben Abstand hat. Aus der Umkehrung in Lemma 8.2.3 und Lemma 8.2.1 folgt, dass der Punkt B_{ij} auch auf einer 2-Außen- oder einer 2-Winkelhalbierenden durch die verbleibenden Kanten liegen muss. Da die 2-Winkelhalbierenden durch $A_i A_k$, $A_i A_l$ und $A_j A_l$ die Gerade g_i alle im Inneren des Tetraeders, genau genommen im Inkreismittelpunkt I , schneiden, kann der Punkt B_{ij} nur auf den 2-Außenwinkelhalbierenden der Kanten liegen. Der Punkt B_{ij} ist, falls er existiert, also der Schnittpunkt der 2-Winkelhalbierenden durch das gegenüberliegende Kantenpaar $A_i A_j$ und $A_k A_l$ und den 2-Außenwinkelhalbierenden durch die verbleibenden Kanten.

Die Kugeln mit Mittelpunkt B_{ij} und Radius $r_{b_{ij}}$ bzw. Normalabstand d

$$\begin{aligned} r_{b_{ij}} &= d(B_{ij}, \varepsilon(A_i, A_j, A_k)) = d(B_{ij}, \varepsilon(A_i, A_j, A_l)) \\ &= d(B_{ij}, \varepsilon(A_i, A_k, A_l)) = d(B_{ij}, \varepsilon(A_j, A_k, A_l)) \end{aligned}$$

liegt somit im Äußeren des Tetraeders und berührt die Trägerebenen der Seitenflächen, jedoch keine Tetraederseite. Dies folgt analog für die anderen gegenüberliegenden Kantenpaare. \square

Für ein Tetraeder existieren zwischen 0 und 3 solche Punkte bzw. 0 und 3 solche Kugeln, maximal einer bzw. eine pro gegenüberliegendem Kantenpaar. Eine dieser Kugeln ist in Abbildung 8.10 dargestellt.

Ein Tetraeder besitzt also insgesamt zwischen 5 und 8 Kugeln, die die Trägerebenen der Seitenflächen berühren, eine im Inneren und 4 bis 7 außerhalb des Tetraeders, wobei 4 davon jeweils eine Tetraederseite berühren und 0 bis 3 davon keine Tetraederseite berühren.

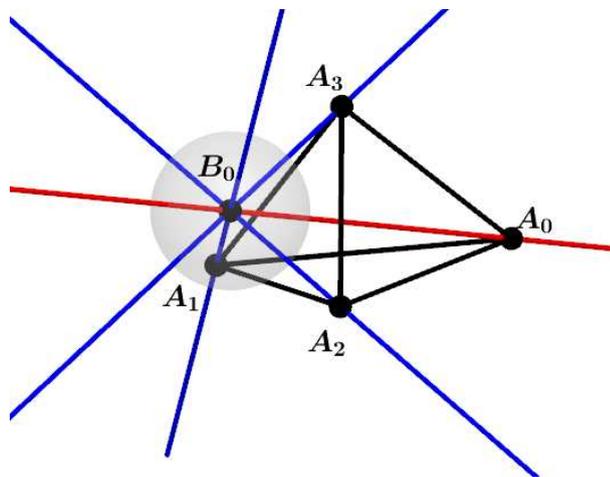


Abbildung 8.9: Skizze zum Beweis der Existenz des Anku­gel­mit­tel­punkts, der eine Seitenfläche des Tetraeders berührt. Der Durchschnitt der drei 2-Winkelhalbierenden durch den Eckpunkt A_0 ist hier rot dargestellt. In der blauen Geraden durch einen Eckpunkt schneiden sich jeweils die 2-Winkelhalbierende durch den Eckpunkt und A_0 und die zwei 2-Außenwinkelhalbierenden durch die verbleibenden Kanten.

Definition 8.2.10 (Anku­gel). Die Kugeln, die alle vier Trägerebenen der Seitenflächen des Tetraeders berühren und außerhalb des Tetraeders liegen, werden als Anku­gel­ des Tetraeders bezeichnet. Ihre Radien heißen Anku­gel­radien und ihre Mittelpunkte Anku­gel­mit­tel­punkte. Für ein Tetraeder gibt es zwei verschiedene Arten von Anku­gel­.

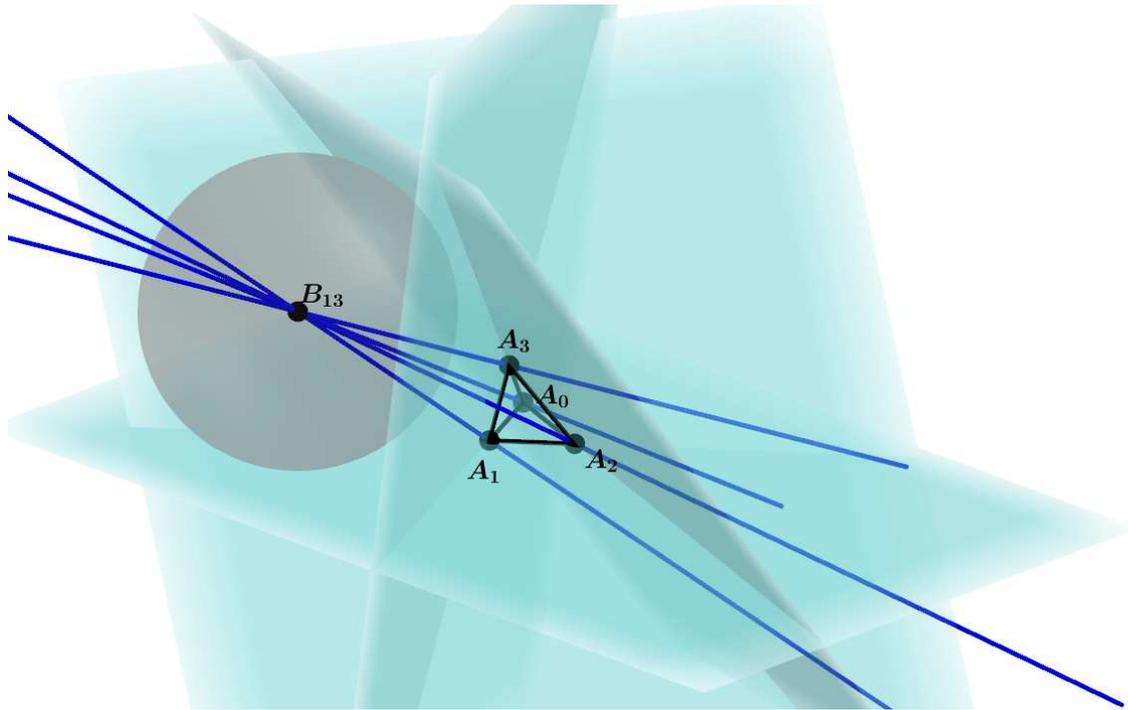


Abbildung 8.10: Skizze zum Beweis der möglichen Existenz des Ankugelmittelpunkts, der keine Seitenfläche des Tetraeders berührt. In der blauen Geraden durch einen Eckpunkt schneiden sich jeweils eine 2-Winkelhalbierende durch die Kante A_0A_2 oder A_1A_3 und die zwei 2-Außenwinkelhalbierenden durch die verbleibenden Kanten, die den Eckpunkt enthalten.

8.3 Der Inphärenmittelpunkt

In diesem Abschnitt wird die Inphäre und ihr zugehöriger Inphärenmittelpunkt, sowie die verschiedenen Arten der Anphären mit ihren Anphärenmittelpunkten, eines n -Simplex behandelt. Dabei wird ein anderer Zugang, als in den vorherigen Abschnitten verwendet. Der Abschnitt liegt dabei den Informationen aus [13, S. 131-133] und [15, S. 384-389] zugrunde.

Vaughan und Gabai begannen ihre Überlegungen durch Verallgemeinerung der folgenden Tatsache:

Sei P ein Punkt auf der Geraden durch die Punkte A_0 und A_1 , so gilt für den Ortsvektor von P :

$$p = a_0 \cdot \frac{V_0}{V} + a_1 \cdot \frac{V_1}{V}, \quad (8.35)$$

wobei a_0 und a_1 die Ortsvektoren der Punkte A_0, A_1 und V_0, V_1 und V die gerichteten Längen der Strecken PA_1, A_0P und A_0A_1 bezeichnet. Die gerichtete Länge sei so zu wählen, dass $V > 0$ gilt.

Um die Formel (8.35) auf den n -dimensionalen Raum zu verallgemeinern, sei σ ein n -Simplex und σ_i das n -Simplex, dass sich durch Tauschen des Eckpunkts A_i von σ mit einen Punkt P im n -dimensionalen Raum ergibt. Analog zum 1-dimensionalen Fall sei V_i das orientierte n -dimensionale Volumen, von σ_i , wobei für das gerichtete $(n-1)$ -dimensionale Volumen V von σ wieder $V > 0$ gelten soll. Ersetzt man jeden Eckpunkt von σ einmal mit P , so gilt für die Summe der gerichteten $(n-1)$ -dimensionalen Volumen aller entstehenden n -Simplexe:

$$\sum_{i=0}^n V_i = V. \quad (8.36)$$

Der Beweis zur Formel in (8.36) ist im Kapitel 7.6 in [10] zu finden.

Die Formel (8.35) kann somit wie folgt für den n -dimensionalen Raum verallgemeinert werden:

Satz 8.3.1 ([15, Theorem 1.]). $p = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{V_i}{V}$.

Beweis. Sei P ein Punkt im n -dimensionalen Raum. Da die Vektoren $b_{i0} = a_i - a_0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ den n -dimensionalen Raum aufspannen, kann der Vektor $p' = p - a_0$ als Linearkombination wie folgt beschrieben werden:

$$p' = \overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) \cdot x_i. \quad (8.37)$$

Sei V'_i das $(n-1)$ -dimensionale Volumen der auf der Trägerebene ε_i liegenden, $(n-1)$ -dimensionalen Seite von σ und sei h_i die Höhe des Punktes A_i über der Trägerebene ε_i , dann gilt für das n -dimensionale Volumen V von σ :

$$V = \frac{h_i V'_i}{n}.$$

8 Der Inkreis- und die Ankreismittelpunkte

Durch das innere Produkt des Normalvektors \vec{n}_i mit dem Vektor $(a_i - a_0)$ folgt für die Höhe h_i :

$$h_i = \vec{n}_i \cdot (a_i - a_0), \quad (8.38)$$

wobei \vec{n}_i den normierten Normalvektor, der normal auf die Trägerebene ε_i steht und in Richtung des Eckpunktes A_i zeigt, bezeichnet. Betrachtet man wieder die Trägerebene ε_i und ersetzt den Eckpunkt A_i von σ durch P , so ist die orientierte Höhe des Punktes P über der Trägerebene mit (8.37) durch

$$h_{p_i} = \vec{n}_i \cdot (p - a_0) = \vec{n}_i \cdot \sum_{j=1}^n (a_j - a_0) \cdot x_j$$

gegeben. Da bis auf den Vektor $(a_i - a_0)$ alle Vektoren der Summe in der Ebene ε_i liegen und somit normal auf den Normalvektor \vec{n}_i stehen, folgt:

$$h_{p_i} = \vec{n}_i \cdot (a_i - a_0) \cdot x_i.$$

Die orientierte Höhe h_{p_i} von P über der Trägerebene ε_i ergibt sich mit (8.38) also durch $h_{p_i} = h_i \cdot x_i$, wobei x_i positiv ist, falls P und A_i auf derselben Seite von ε_i liegen und negativ ist, falls P und A_i auf unterschiedlichen Seiten von ε_i liegen. Für das orientierte n -dimensionale Volumen V_i von σ_i folgt daher:

$$V_i = \frac{h_{p_i} V_i'}{n} = \frac{x_i h_i V_i'}{n} \quad (8.39)$$

und somit $x_i = \frac{V_i}{V}$. Durch Ersetzen von x_i durch $\frac{V_i}{V}$ in (8.37) erhält man:

$$p' = \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) \cdot \frac{V_i}{V} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{V_i}{V} - a_0 \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V}.$$

Aus (8.36) folgt $\sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V} = 1 - \frac{V_0}{V}$ und somit:

$$\begin{aligned} p' = p - a_0 &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{V_i}{V} - a_0 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{V_i}{V} - a_0. \end{aligned}$$

Für den Ortsvektor p von P folgt daher:

$$p = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{V_i}{V}. \quad \square$$

Da $x_i = \frac{V_i}{V}$ und $\sum_{i=0}^n V_i = V$ folgt $\sum_{i=0}^n x_i = 1$.

Es lassen sich somit folgende Korollare formulieren:

Korollar 8.3.2 ([15, Corollary 1.]). *Wenn $p = \sum_{i=0}^n a_i x_i$ und $\sum_{i=0}^n x_i = 1$, dann gilt für $0 \leq i \leq n$: $x_i = \frac{V_i}{V}$.*

Korollar 8.3.3 ([15, Corollary 2.]). *Wenn $\sum_{i=0}^n x_i = 1$, so existiert ein Punkt P , sodass für $0 \leq i \leq n$ $V_i = x_i \cdot V$ gilt.*

Um den Inkreismittelpunkt und die Ankreismittelpunkte auf den n -dimensionalen Raum zu verallgemeinern soll analog zum 2- und 3-dimensionalen Fall, ein Punkt gefunden werden, der äquidistant zu allen $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebenen der Simplexseiten ist.

Korollar 8.3.4 ([15, Corollary 3.]). *Sei P ein Punkt, der zu allen $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebenen ε_i mit $0 \leq i \leq n$ denselben Abstand h hat. Sei*

$$\varepsilon'_i = \begin{cases} -1, & \text{wenn } P \text{ und } A_i \text{ auf unterschiedlichen Seite von } \varepsilon_i \text{ liegen,} \\ 1, & \text{wenn } P \text{ und } A_i \text{ auf derselben Seite von } \varepsilon_i \text{ liegen.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\frac{nV}{h} = \sum_{i=0}^n \varepsilon'_i V'_i > 0$$

und

$$p = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{\varepsilon'_i V'_i}{\sum_{i=0}^n \varepsilon'_i V'_i}. \quad (8.40)$$

Umgekehrt: jede Wahl von $\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ mit $\sum_{i=0}^n \varepsilon'_i V'_i > 0$ ergibt einen eindeutigen Punkt, der zu allen $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebenen denselben Abstand hat und für den sich die gewählten Vorzeichen ergeben.

Beweis. Da der Punkt P zu allen Trägerebenen den selben Abstand h hat und das Vorzeichen ε'_i jedoch verschieden sein kann folgt aus (8.39):

$$V_i = \frac{h p_i V'_i}{n} = \frac{\varepsilon'_i h V'_i}{n}. \quad (8.41)$$

Bildet man die Summe aller V_i , so ergibt sich:

$$\sum_{i=0}^n V_i = V = \sum_{i=0}^n \frac{\varepsilon'_i h V'_i}{n}. \quad (8.42)$$

Da das Volumen V nach Definition positiv ist, folgt mittels einer einfachen Umformung die erste Aussage von Korollar 8.3.4. Die zweite Aussage des Korollars 8.3.4 folgt durch Einsetzen von (8.41) und (8.42) in die Formel des Satzes 8.3.1 und Kürzen von n und h . □

Mit Hilfe von Korollar 8.3.4 kann folgender Satz formuliert werden:

Satz 8.3.5. *Für ein n -Simplex existieren maximal 2^n Punkte, die zu allen $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebenen denselben Abstand haben.*

Beweis. Wählt man für $\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1}$ entweder -1 oder 1 , so gibt es 2^{n+1} verschiedene Möglichkeiten. Da maximal für die Hälfte dieser Möglichkeiten die Summe $\sum_{i=0}^n \varepsilon'_i V'_i$ positiv ist, bleiben 2^n Möglichkeiten. Im n -dimensionalen Raum existieren also maximal 2^n verschiedene Punkte, die zu allen $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebenen denselben Abstand haben. □

Satz 8.3.6 (Existenz des Insphärenmittelpunkts). *Für die Wahl $\varepsilon'_0 = \varepsilon'_1 = \dots = \varepsilon'_n = 1$ ergibt sich ein Schnittpunkt I im Inneren des n -Simplex. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der einzigen Sphäre, die alle $(n+1)$ $(n-1)$ -dimensionalen Seiten des n -Simplex berührt. Diese Sphäre liegt zur Gänze im Inneren des n -Simplex.*

Beweis. Wenn $\varepsilon'_0 = \varepsilon'_1 = \dots = \varepsilon'_n = 1$, so ergibt sich nach Korollar 8.3.4 ein Punkt I , der zu allen $(n-1)$ -dimensionalen Trägerebenen denselben Abstand hat und für den alle $\varepsilon'_i(I) > 0$ sind. Daher liegt der Punkt I für alle Eckpunkte A_i auf derselben Seite der Trägerebene ε_i mit $i = 0, 1, \dots, n$. Der Punkt I liegt also im Inneren des n -Simplex und hat zu allen Trägerebenen denselben Abstand. Die Sphäre mit Mittelpunkt I und Radius r bzw. Normalabstand d

$$r = d(I, \varepsilon_0) = d(I, \varepsilon_1) = \dots = d(I, \varepsilon_n)$$

liegt somit im Inneren des n -Simplex und berührt alle $(n+1)$ Seitenflächen.

Um die Eindeutigkeit des Punktes I zu zeigen sei I' der Mittelpunkt einer weiteren Sphäre des n -Simplex, die alle $(n+1)$ $(n-1)$ -dimensionalen Seitenflächen des n -Simplex berührt. Es muss somit

$$r' = d(I', \varepsilon_0) = d(I', \varepsilon_1) = \dots = d(I', \varepsilon_n)$$

gelten. Da der Punkt in dem Teilraum liegen muss, der alle $(n-1)$ -dimensionalen Seitenflächen enthält, müssen alle $\varepsilon'_i = 1$ sein. Aus der Umkehrung in Korollar 8.3.4 folgt, dass es nur einen Punkt mit diesen Eigenschaften gibt. Die Punkte I und I' fallen also zusammen, was die Eindeutigkeitsaussage des Satzes zeigt. \square

Definition 8.3.7 (Insphäre eines n -Simplex). Die Sphäre, die alle $(n+1)$ $(n-1)$ -dimensionalen Seiten eines n -Simplex berührt und im Inneren des n -Simplex liegt, wird als Insphäre des n -Simplex bezeichnet. Ihr Radius heißt Insphärenradius r_I und ihr Mittelpunkt Insphärenmittelpunkt I .

8.3.1 Ansphärenmittelpunkte

Satz 8.3.8 (Existenz des Ansphärenmittelpunkts der Art 1). *Für die Wahl $\varepsilon'_i = -1$ und $\varepsilon'_j = 1 \forall j \neq i$ ergibt sich ein Schnittpunkt B_i im Äußeren des n -Simplex. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt einer Sphäre, die alle $(n+1)$ $(n-1)$ -dimensionalen Trägerebenen des n -Simplex berührt. Darüber hinaus berührt sie die $(n-1)$ -dimensionalen Seiten des n -Simplex, die dem Eckpunkt A_i gegenüberliegt.*

Beweis. Da das $(n-1)$ -dimensionale Volumen jeder Seite eines n -Simplex kleiner ist, als die Summe der $(n-1)$ -dimensionale Volumen der verbleibenden Seiten, führt die Wahl von $\varepsilon'_i = -1$ und $\varepsilon'_j = 1 \forall j \neq i$ auf jedem Fall zu einem Schnittpunkt B_i . Da nur ε'_i negativ ist, liegt der Punkt B_i für alle $(n-1)$ -dimensionalen Trägerebenen, außer ε_i auf der Seite, die das Simplex enthält. Der Punkt B_i liegt also in dem Teilraum, der an die Seitenfläche angrenzt, die A_i gegenüber liegt. Die Sphäre mit Mittelpunkt B_i und Radius r bzw. Normalabstand d

$$r = d(B_i, \varepsilon_0) = d(B_i, \varepsilon_1) = \dots = d(B_i, \varepsilon_n)$$

liegt somit im Äußeren des n -Simplex und berührt die Seitenfläche, die A_i gegenüberliegt, sowie die $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebenen der restlichen Seitenflächen.

Dies folgt analog für die anderen Eckpunkte. Für ein n -Simplex existieren also $n + 1$ solche Sphären, eine pro $(n - 1)$ -dimensionaler Seitenfläche.

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes folgt analog zum Beweis von Satz 8.3.6. \square

Definition 8.3.9 (Ansphäre der Art 1). Die Sphären, die alle $(n+1)$ $(n-1)$ -dimensionalen Trägerebenen der Seitenflächen und insbesondere eine Seitenfläche des n -Simplex berühren und außerhalb des n -Simplex liegen, werden als Ansphären der Art 1 des n -Simplex bezeichnet. Für ein n -Simplex gibt es $n + 1$ Ansphären der Art 1, eine pro Seitenfläche.

Umgekehrt führt die Wahl von $\varepsilon'_i = 1$ und $\varepsilon'_j = -1 \forall j \neq i$, da das $(n - 1)$ -dimensionale Volumen jeder Seite eines n -Simplex kleiner ist, als die Summe der $(n - 1)$ -dimensionale Volumen der verbleibenden Seiten, nie zu einem Schnittpunkt. In den Teilräumen, die nur einen Eckpunkt enthalten existiert somit kein Punkt, der zu allen $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebenen den gleichen Abstand hat.

Allgemein lässt sich feststellen, dass nur in einem von zwei gegenüberliegenden Teilräumen ein Schnittpunkt existieren kann, da die Gleichung $\sum_{i=0}^n \varepsilon'_i V'_i > 0$ nicht für beide Teilräume erfüllt sein kann. Für $n > 2$ ist es möglich zwei oder mehrere ε' negativ zu wählen. Der Schnittpunkt liegt dabei immer in dem Teilraum, dessen Summe der $(n - 1)$ -dimensionalen Volumen der angrenzenden $(n - 1)$ -dimensionalen Seiten kleiner ist als die Summe der $(n - 1)$ -dimensionalen Volumen der restlichen $(n - 1)$ -dimensionalen Seiten des Simplex. Sind diese Summen gleich groß, existiert in keinem der beiden Teilräume ein Schnittpunkt. In einem gleichseitigen Simplex existieren somit keine weiteren Ansphären.

Definition 8.3.10 (Ansphäre der Art k). Die Sphären, die alle $(n+1)$ $(n-1)$ -dimensionalen Trägerebenen der Seitenflächen des n -Simplex berühren und insbesondere in einem Teilraum liegen, der entweder eine $(k - 1)$ - oder eine $(n - k)$ -dimensionale Seite des n -Simplex enthält und außerhalb des n -Simplex liegen, werden als Ansphären der Art k des n -Simplex bezeichnet. Für ein n -Simplex gibt es maximal $\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1-k}$ Ansphären der Art k , eine pro $(k - 1)$ - bzw. $(n - k)$ -dimensionaler Seite.

Definition 8.3.11 (Ansphäre). Die Sphären, die alle $(n + 1)$ $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebenen der Seitenflächen des n -Simplex berühren und außerhalb des n -Simplex liegen, werden als Ansphäre des n -Simplex bezeichnet. Ihre Radien heißen Ansphärenradien und ihre Mittelpunkte Ansphärenmittelpunkte. Für ein n -Simplex gibt es $\frac{n}{2}$ verschiedene Arten von Ansphären, wenn n eine gerade und $\frac{n+1}{2}$ verschiedene Arten von Ansphären, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Zusammen mit der Insphäre sind dies die einzigen Sphären, die alle $(n + 1)$ Trägerebenen berühren.

Für ein n -Simplex existiert also immer eine Insphäre und die $(n + 1)$ Ansphären der Art 1. Das Maximum von $2^n - 1$ Ansphären wird für ein n -Simplex, für $n > 1$ beispielsweise dann erreicht, wenn alle, bis auf eine Seite gleich groß sind und die verbleibende Seite

8 Der Inkreis- und die Ankreismittelpunkte

$(n - 1)$ -mal so groß ist, falls n eine ungerade Zahl ist bzw. wenn alle Seiten gleich groß sind, falls n eine gerade Zahl ist.

Ab einer Dimension $n > 3$ existieren zusätzlich zur Inosphäre und den $(n + 1)$ Anosphären der Art 1 immer weitere Anosphäre von anderen Arten. Es ist in diesen Dimensionen also nicht möglich, dass keine Anosphäre der Art k mit $k \neq 1$ existieren.

Satz 8.3.12 ([13]). *Für n gerade existieren mindestens*

$$2^n - \binom{n}{\frac{n+2}{2}}$$

und für n ungerade mindestens

$$2^n - \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$$

Sphären, die zu allen $(n - 1)$ -dimensionalen Trägerebenen den gleichen Abstand haben.

Purdy untersuchte die Existenz der In- und Anosphären eines n -Simplex noch genauer und zeigte in [13, S. 131-133], dass zwischen dem Minimum und dem Maximum der Anzahl an In- und Anosphären nicht jede Anzahl existieren kann. Nach Purdy existieren somit in einem n -dimensionalen Raum, wobei n eine ungerade Zahl ist, kein n -Simplex mit T In- und Anosphären, wobei für T

$$2^n - \binom{n}{\frac{n+1}{2}} < T < 2^n - \frac{1}{2} \binom{n+1}{\frac{n+3}{2}}$$

gilt. Somit existieren beispielsweise keine 5-Simplexe, mit 23 oder 24 Sphären, die zu den Trägerebenen denselben Abstand haben, das Minimum 22 und alle Anzahlen zwischen 25 und dem Maximum 32 sind jedoch möglich.

Für n -Simplexe, wobei n eine gerade Zahl ist, ist die Existenz solcher Lücken zwischen dem Minimum und dem Maximum der Anzahl an Sphären noch ungeklärt.

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

- [1] Ilka Agricola, Thomas Friedrich, Elementargeometrie - Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht. *Springer Fachmedien Wiesbaden* (2015).
- [2] Peter Andree, Geometrie: Der Feuerbach-Kreis oder Neun-Punkte-Kreis.
<https://www.matheraetsel.de/texte/feuerbach-kreis-main.pdf>
(24.05.2023).
- [3] Trevor Kai Hei Cheung, Hon Ching Ko, OLD AND NEW GENERALIZATIONS OF CLASSICAL TRIANGLE CENTRES TO TETRAHEDRA. *Hang Lung Mathematics Awards Vol. 8 (2018), Band 31* (2018).
- [4] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry revisted *Mathematical Assoc. of America* (2008)
- [5] Euklid, Euclid's elements of geometry. *Cambridge: at the univertity press* (1893).
- [6] Rudolf Fritsch, Zum Feuerbachschen Kreis. *Druckerei und Verlagsanstalt Konstanz Universitätsverlag GmbH Konstanz* (1975).
- [7] Rudolf Fritsch, « Höhenschnittpunkte » für n -Simplizes. *Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts, Band 31* (1976).
- [8] Stefan Haller, Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt.
<https://www.mat.univie.ac.at/stefan/Geometrie.S2019/Geometrie.V0.pdf>
(15.06.2023).
- [9] Robin Hartshorne, Geometry: Euclid and Beyond. *New York: Springer-Verlag* (2000).
- [10] Melvin Hauser, A Vector Space Approach to Geometry.
New York: Dover Publications (2010).
- [11] Hans Havlicek, Gunther Weiß, Altitudes of a Tetrahedron and Traceless Quadratic Forms. *The American Mathematical Monthly, Vol. 110, No. 8* (2003).
- [12] Clark Kimberling, Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers - ETC
<https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>(15.04.2024)
- [13] George B. Purdy, Spheres Tangent to All the Faces of a Simplex. *Journal of combinatorial theory (A) 17* (1974)

Literaturverzeichnis

- [14] B. A. Rosenfeld, I. M. Jaglom, Mehrdimensionale Räume, in Enzyklopädie der Elementarmathematik, vol. 5, P. S. Alexandroff, A. I. Markuschwitsch, A. J. Chintschin, *Verlag d. Wissenschaften, Berlin* (1969).
- [15] H.E. Vaughan, H. Gabai, Hyperspheres associated with an n-simplex. *The American Mathematical Monthly, Vol. 74* (1967)
- [16] Wilfried Wessner, Mesh Refinement Techniques for TCAD Tools.
<https://www.iue.tuwien.ac.at/phd/wessner/node11.html> (21.07.2023).