MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Die Welt mathematischer Zaubertricks und deren fachmathematische Begründungen - Ein Projekt zur Popularisierung der Mathematik

verfasst von | submitted by

David Sansenböker BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 520 525 02
Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Mathematik Unterrichtsfach Psychologie und Philosophie
Betreut von | Supervisor:	Dipl.-Phys. Dr. Volker Branding Privatdoz.

Abstract

Diese Arbeit widmet sich der Recherche mathematischer Zaubertricks, also unterhaltsamer, verblüffender Effekte, denen nicht Fingerfertigkeit oder Ablenkung, sondern eine mathematische Erklärung zugrunde liegt. Im Fokus steht einerseits die Frage, wie sich ausgewählte Effekte fachmathematisch beweisen lassen, und andererseits, ob die Welt mathematischer Zaubertricks eine ausreichende Vielfalt bietet, um möglicherweise für Projekte zur Popularisierung der Mathematik, oder im Lehr- und Lernkontext eingesetzt werden zu können. Auf Basis einer intensiven Literaturrecherche wird zu Beginn ein kurzer Überblick der Geschichte auf Mathematik basierender Tricks gegeben, die bereits Ende des 18. Jahrhunderts für die Unterhaltung eingesetzt und durch Personen wie Martin Gardner im 20. Jahrhundert gesammelt und verbreitet wurden. Es stellt sich heraus, dass die Welt mathematischer Zaubertricks sehr breit gefächert ist und zahlreiche Tricks nicht nur in der Arithmetik, sondern auch in Gebieten wie der Zahlentheorie, Geometrie, Stochastik, Topologie oder Algebra zu finden sind. Neben Beispielen aus verschiedensten mathematischen Fachgebieten werden ebenfalls Effekte vorgestellt, deren Erklärungen eine Mathematik unterschiedlicher Komplexität bedürfen - von Grundschul- bis zur Hochschulmathematik. Den fachmathematischen Kern dieser Arbeit stellt ein Trick von Steve Humble und Ehrhard Behrends dar, der von Humble im Rahmen seiner Aktivitäten zur Popularisierung der Mathematik entdeckt wurde: Das Dreifarbendreieck. Der Überblick, der durch diese Arbeit gewonnen werden konnte, lässt die Schlussfolgerung zu, dass die Vielfalt von Zaubertricks mit mathematischem Hintergrund ausreichend ist, um eine Adaption für den Lehr- und Lernkontext, sowie für Projekte zur Popularisierung der Mathematik zu gewährleisten.

Abstract (English)

This thesis is dedicated to the research of mathematical magic tricks, thus entertaining, astounding effects, that do not require dexterity, sleight of hand or distraction, but rather are based upon a mathematical explanation. The focus lies on two central questions: First, how specific effects can be proven mathematically, and second, is the landscape of mathematical magic tricks diverse enough to allow recreational-math-projects for the purpose of popularizing mathematic as a science, or to successfully incorporate tricks in an educational context. On the basis of a broad review of literature, an introductory summary is given about the history of tricks based on mathematics. Already in the 18th century, such tricks had been used for entertainment, and people like Martin Gardner had collected and popularized them during the 20th century. As it turns out, the world of mathematical magic is broad and vast, and many tricks can be found not only within the branch of Arithmetic, but also Number theory, Geometry, Probability theory, Topology, or Algebra. Apart from examples for different mathematical branches, several effects based on different levels of mathematical complexity are presented, varying from elementary school to academia level mathematics. The mathematical centerpiece of this thesis is represented by a trick discovered and formalized by Steve Humble and Ehrhard Behrends: *Das Dreifarbendreieck*. The insight gained by this study allows the conclusion, that the variety of tricks based on mathematical concepts is sufficient to ensure adaptions for educational purposes, or for projects to popularize mathematics.

Danksagung

Der Großteil dieses Projektes wurde in einer für mich sehr schwierigen Zeit verfasst, und ich möchte einigen Personen für ihre Unterstützung danken.

Hierbei geht es nicht nur um konkreten Beistand während dieser Zeit, sondern auch über die Jahre davor, sodass es mir überhaupt erlaubt war, in die Situation zu kommen, diese Abschlussarbeit meines Studiums in Angriff nehmen zu können.

Herrn Mag. Dipl.-Ing. Markus Wittberger ist es zu verdanken, dass ich ursprünglich auf die Idee gekommen bin, Begeisterung für Mathematik durch Zaubertricks zu vermitteln. Seine Tricks hatten bei mir funktioniert, also wieso sollte es nicht auch mir bei anderen Personen gelingen.

Der größte Dank gebührt meinen Eltern, Rudolf und Maria. Auch wenn unsere Beziehung in den letzten Jahren immer komplizierter geworden ist... uns ist allen bewusst, dass der Grundstein für die Ermöglichung meines Studiums von euch gelegt, und über die Jahre stabil gehalten wurde.

Ich möchte ebenfalls meinem Bruder Simon, meinem Onkel Johann, dem Freund meiner Mutter Michael, und meinen langjährigen Kumpanen Torsten und Roman für verschiedenste Unterstützungen und positiven Einfluss auf mein Leben danken.

Last but not least bin ich unsicher, welchem Medium ich für die zufällige Reihe von Ereignissen danken soll, die mich bereits bei Abschluss des Bachelorstudiums mit meinem Mentor Herrn Dr. Branding verknüpft haben. Ihm ist es nicht nur zuzuschreiben, dass meine fachliche Wahl im letzten Moment noch auf Mathematik - und nicht Philosophie - gefallen ist. Ohne seine Geduld mit mir hätte ich diese Arbeit niemals in dieser Form (falls überhaupt) vollenden können.

Danke.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Zu Beginn dieser Einleitung soll erläutert werden, inwiefern ich zu diesem Thema inspiriert und motiviert wurde, welche Ziele diese Masterarbeit verfolgt, und worin ich Sinn und Zweck für mich selbst, aber auch für den Leser oder die Leserin sehe.
Weiters werden einige Blicke in Populär- sowie Fachliteratur im Hinblick auf die Frage geworfen, welchen Stellenwert mathematische Zaubertricks bezüglich der Popularisierung der Mathematik oder pädagogischer Einsetzbarkeit haben. Im Sinne der Transparenz und um keine falschen Erwartungen zu nähren, möchte ich bereits an dieser Stelle erwähnen, dass der Fokus dieser Arbeit nicht auf didaktischen Untersuchungen oder Legitimationen liegt, sondern auf einer mathematischen Auseinandersetzung mit auf Mathematik basierenden Zaubertricks.
Da ein sehr breites Spektrum an Literatur zu Rate gezogen wurde, wird ebenso zu dem Recherche- und Filterungsprozess aufklärend Stellung genommen. Dies soll dem Leser bzw. der Leserin ermöglichen, die Kriterien nachvollziehbar zu machen, die zu der Auswahl der in Kapitel 2 und Kapitel 3 vorgestellten Tricks geführt haben.

Dieses Einleitungskapitel schließt damit ab, dass ein Überblick über die vielfältige, bunte, und spannende Landschaft mathematischer Zaubertricks gegeben wird: Was gibt es denn überhaupt für Tricks, bei denen Mathematik die erklärende Funktion übernimmt und nicht Ablenkung, Fingerfertigkeit, oder lediglich eine Präparierung von Objekten? Welche mathematischen Fachgebiete überwiegen bei deren Beschreibung? Viele Menschen haben schon von Tricks gehört, bei denen ein Zauberer oder eine Zauberin nach wenigen Fragen einen Geburtstag errät. Oder von Tricks, bei denen ein/e Mitspieler*in sich eine Zahl ausdenkt, welche der/die Magier*in nach einigen mathematischen Operationen nennen kann. Kurz gesagt: Magie, bei der selbst einem Laien sofort klar wird, dass einfache arithmetische Umformungen im Hintergrund mitspielen. Die Wenigsten würden jedoch ahnen, dass es beeindruckende Zaubertricks gibt, die Aufgrund von wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen nicht immer, aber *fast immer* zu einem erfolgreichen Wow-Effekt führen. Ebenso gibt es Zaubereien, die in der Zahlentheorie verankert sind und mit Quersummen und 9er-Resten funktionieren. Geometrie, Symmetrie, Vektorrechnung, fundamentale Sätze aus der Topologie, Fibonacci-Zahlen und viele weitere mathematische Sachverhalte bilden Grundlagen für Zaubertricks, die es sich verdienen, untersucht und vorgeführt zu werden.

Diese Arbeit lässt sich also grundsätzlich in zwei Teile gliedern. Nachdem sich Kapitel 1 den oben erwähnten Aspekten widmet, folgt in Kapitel 2 und Kapitel 3 die Erklärung und mathematische Beschreibung bzw. Untersuchung ausgewählter Zaubertricks. Den Übergang stellen einige Tricks dar, die exemplarisch dafür sein sollen, dass 'simple

Mathematik’ nicht unbedingt ’schlechter Trick’ bedeutet.

Zu guter Letzt noch einige Worte bezüglich zweier sprachlicher Formalitäten.
Ich bemühe mich im täglichen Leben, Gleichberechtigung zwischen Männern und Frauen nicht nur bei sprachlichen, sondern auch schriftlichen Formulierungen umzusetzen. Dennoch werde ich zum Vorteil der Leserlichkeit davon Abstand nehmen, im Text jedes Mal von ’der/dem Zauberer/Zauberin’, ’der/dem ZuschauerIn’, oder der/dem Mitspieler*in zu sprechen. Als Kompromiss habe ich mich dazu entschieden, bei der Beschreibung der Tricks ab Kapitel 1.6 von einem ausführenden Zauberer, Magier bzw. Vorführer auf der einen Seite, und Mitspielerinnen oder Teilnehmerinnen auf der anderen Seite auszugehen.

Der Großteil der recherchierten Literatur ist auf Englisch verfasst. Selbst bei guter Englischkenntnis liegt es in der Natur der Sache, dass die Bedeutung und Aussagekraft des Originaltextes unter einer freien Übersetzungen leiden kann, bzw. leicht verfälscht wird. Zum Glück ist dies bei einer mathematischen Arbeit nicht von größter Relevanz. Nichtsdestotrotz werde ich an manchen Stellen - speziell in diesem Einführungskapitel - eher dazu neigen, den englischen Originaltext unverfälscht zu zitieren, als zu versuchen, mich diesem mit einer Übersetzung anzunähern.

1.1 Motivation und Ziel dieser Arbeit

Wodurch wurde ich zu dieser Arbeit inspiriert? Ich kann mit Glück und Zufriedenheit behaupten, dass mehrere Momente während meines Studiums dazu beigetragen haben, mit diesem Thema in Berührung zu kommen und es für eine Bearbeitung in Betracht zu ziehen.

Zaubertricks, Illusionen, „Magie“ und ähnliche Täuschungen lernt man bereits in der Kindheit kennen. Doch wann wurde ich das erste Mal mit mathematischen Charakteristika von Zaubertricks konfrontiert? Wie bereits in der Danksagung erwähnt, ist dieser Erstkontakt Mag. Dipl.-Ing. Markus Wittberger in einem fachdidaktischen Seminar zuzuschreiben.

Es ist kein Geheimnis, dass Mathematik in der Schule immer noch als Angstfach gilt. Dass Pädagog*innen seit Jahrzehnten an didaktischen und fachdidaktischen Lösungen arbeiten, Lehrpläne umgestellt werden und auf universitärer Ebene bei der Ausbildung von Fachkräften Fortschritte gemacht werden - all dies scheint daran wenig zu ändern. Es ist nicht mein Anspruch - und auch nicht der dieser Arbeit - bahnbrechende, revolutionäre Lösungen zu präsentieren. Es wäre wahrscheinlich die fünfhundertste Diskussion über Individualisierung, stärkere Fokussierung auf Naturwissenschaften, kleinere Klassen und ähnliche Themen.

In einem Kurier-Artikel vom 21. 09. 2022 von Elisabeth Hofer *Warum kaum jemand Mathe mag* werden folgende Worte einer Studentin zitiert: „Ich halte es für wichtig, dass

Lehrende mehr Zeit bekommen, ihre eigene Faszination für das Fach zu vermitteln.“ (Hofer, 2022, S. 6)
Zeit im Unterricht ist knapp bemessen. Doch auch wenn es nicht von heute auf morgen umsetzbar ist, Mathematiklehrer*innen eine erhöhte Stundenzahl pro Klasse zu geben, könnte sich eine diesbezügliche Zeitinvestition lohnen. Die Idee scheint nicht weit hergeholt, dass sich die Vermittlung von Faszination positiv auf die Motivation von Schüler*innen, und vielleicht auch furchtlindernd auf die Berührungsängste mit Mathematik auswirken könnte.

Im späteren Verlauf meines Studiums, in der Schulpraxis des Mastercurriculums, ergab es sich schließlich zufällig, dass ich ein Thema unterrichten konnte, bei dem es recht einfach war, selbst einen Zaubertrick einzubauen. Wie würden die Schüler*innen reagieren? Lineare Gleichungen standen auf dem Tagesplan, und in weiterer Folge die Gleichungsumformungen. Als Lehrer und Zaubermeister ging es darum, eine unbekannte Zahl (z) zwischen 1 und 100 zu erraten, die sich ein/e Schüler*in ausdenken sollte.[1] Mit dieser ausgedachten Zahl und einem Taschenrechner sollte der/die Schüler*in nun folgende Anweisungen befolgen:

Anweisungen der zaubernden Person	z **... Gedachte Zahl** E **... Ergebnis**
Überlege dir eine Zahl zwischen 1 und 100.	
Multipliziere die Zahl mit 2.	$E = 2z$
Addiere zum Ergebnis 4.	$E = 2z + 4$
Multipliziere alles mit 5.	$E = (2z + 4) \cdot 5$
Ziehe zum Schluss 9 ab.	$E = (2z + 4) \cdot 5 - 9$
Nenne mir dein Ergebnis.	

Da der/die Magier*in die gedachte Zahl z erraten möchte, und diese Anweisungen natürlich bereits im Vorhinein geplant hatte, lässt sich die lineare Gleichung mithilfe elementarer Äquivalenzumformungen nach z folgendermaßen auflösen: $z = \frac{E-11}{10}$.
Dies bedeutet nun, dass der Zauberer/die Zauberin völlig problemlos die von dem/der Schüler*in gedachte Zahl z nennen kann, nachdem ihr/ihm das Ergebnis E gesagt wurde. Er/Sie braucht lediglich durch Kopfrechnung von E die Zahl 11 abziehen, und danach das Ergebnis durch 10 dividieren, was einem 'entfernen' der Null an der Einerstelle gleichkommt.[2]
Als ich diesen Zaubertrick in der Klasse vorführte, war das Staunen groß. Zunächst machte ich es mir einfach - mit Zahlen zwischen 1 bis 10 - und danach mit Zahlen von 1 bis 100.

[1] Wobei der Trick mit jeder Zahl funktioniert, wird hierbei die Wahl einer natürlichen Zahl angenommen.
[2] Es bleibt niemals ein Rest. Es muss an der Einerstelle des Ergebnisses von $E - 10$ immer eine Null stehen, wenn beide Parteien keinen Rechenfehler gemacht haben, und für z eine natürliche Zahl gewählt wurde. Dieser Umstand wurde in der Vorbereitung absichtlich herbeigeführt, um den Trick für die zaubernde Person einfach zu machen.
Es gilt $z = \frac{E-11}{10} \Leftrightarrow z \cdot 10 = E - 11$. $\Rightarrow$ Ergäbe $E - 11$ keine Zahl mit Null an der Einerstelle, hätte der/die Mitspieler*in kein $z \in \mathbb{N}$ gewählt.

Es war nicht leicht, die Schüler*innen auf ihre Fragen wie *„Herr Lehrer, wie funktioniert das?“*, oder *„Nun sagen Sie uns doch wie Sie das machen!“* erst einmal keine Antwort zu geben, und sie auf die folgenden Unterrichtsstunden zu vertrösten. Ich kann jedoch mit Bestimmtheit behaupten, etwas Interesse und Neugier geweckt, und möglicherweise auch ein wenig Furcht vor den folgenden Einheiten genommen zu haben.

Ein weiterer Motivationsfaktor für die Themenwahl dieser Masterarbeit war das starke Bedürfnis, ein Projekt zu wählen, aus dem ich in meiner weiteren Zukunft noch schöpfen könnte. Ich wollte niemals an diesen Arbeitsprozess zurückdenken und mir vorwerfen müssen, meine Zeit verschwendet zu haben. Diese Überlegung - oder besser gesagt Wunsch - lässt sich sehr gut mit einer Bewegung vereinbaren, mit der ich nicht nur im Rahmen meiner Recherche, sondern auch in Vorträgen konfrontiert wurde: Die Bewegung der Popularisierung der Mathematik.

> „Ich denke, dass alle Wissenschaftler*innen, insbesondere auch Mathematiker, eine Verantwortung haben, Wissenschaft zu kommunizieren. Aber ich merke, dass die Kommunikation in der Mathematik besonders schwierig ist.“
> - Dr. Francesca Arici (Olbrich et al., 2023)

Dieser Appell zur Aktivität von Frau Dr. Francesca Arici im Abendprogramm der Mathenacht des Max-Planck-Instituts am internationalen Tag der Mathematik 2023 wirft gleichermaßen ebenfalls die Frage auf, inwiefern sich Mathematik in einem *positiven Licht* kommunizieren lässt.

Schiemann und Wöstenfeld (2017) bringen zum Ausdruck, dass „die Schönheit der Mathematik nicht für alle Menschen leicht zu erkennen [ist]“, und die kreative Vielfalt, die in ihr steckt, durch Mathematik in der Schule oft nicht erschlossen werden kann. „Über viele Schülergenerationen und damit in der Breite der Gesellschaft verfestigt sich ein sehr einseitiges Bild der Mathematik: 'Mathematik' wird gleichgesetzt mit 'Rechnen' und ein bisschen 'Geometrie' (S. 9)“. Meiner Meinung nach geht es nicht nur darum, innerhalb der Schule Akzente zu setzen. Aktivitäten zur Förderung und Popularisierung der Mathematik können und sollen auch außerhalb von Bildungsinstitutionen stattfinden, um zu versuchen, dem negativen Ruf entgegenzuwirken oder sogar zuvorzukommen. Nicht bei allen Menschen, die auf ihrem Lebensweg eine Liebe zur Mathematik entdeckt haben, ist dies in der Schule oder im späteren Bildungsweg geschehen. Und hierbei sehe ich ein Potenzial bei mathematischen Zaubertricks. Sie bieten die Möglichkeit, in einem kleineren Rahmen selbst aktiv zu werden, und zwar nicht nur in der Schule. Auch im Kreis von Freunden, Bekannten und Verwandten kann durch Mathematik Begeisterung ausgelöst werden, um ein klein wenig an diesem öffentlichen Bild zu rütteln.

Ich habe von Gegenargumenten gehört, wonach der umgekehrte Effekt eintritt. Für Zuschauer von mathematischer Zauberei könnte - falls sie überhaupt über die erklärende Funktion der Mathematik Bescheid wissen - diese Wissenschaft nur noch komplizierter, mysteriöser und undurchschaubarer werden. Persönlich bin ich jedoch der Meinung, dass

diese Sichtweise ein wenig an der ursprünglichen Überlegung vorbei geht. Erstens ist der Effekt auf die Zuschauer ohnehin sehr stark von dem sozialen Szenario, der Art der Präsentation, sowie der Absicht des Zauberers abhängig. Und zweitens steht die Idee im Vordergrund, Verwunderung auszulösen, und über diese Schiene die Pforten für Neugier und Interesse zu öffnen, sowie Berührungsängste zu mindern.
Abgesehen davon würde ich behaupten, dass Berührungsängste eher in einem strikten Lehr- und Lernsetting aufkeimen. Dieser Negativaspekt sollte bei einer Zaubershow (mit oder ohne Trick-Erklärung - je nach Plan des Vorführenden[3]) unter den Tisch fallen.

In einem Diskurs über die Unpopularität der Mathematik[4] zeigt Posamentier (2003) einen weiteren sehr interessanten Punkt auf, der gegen die Intuition und *altbekannte* Art und Weise geht, wie *üblicherweise* von Mathematik gesprochen wird.

> „We must finally demonstrate the inherent beauty of mathematics, so that those students who do not have a daily need for it can be led to appreciate it for its beauty and not only for its usefulness.“
> (Posamentier, 2003, preface: XIII)

> „Society as a whole must embrace mathematics as an area of beauty (and fun) and not merely as a useful subject, without which further study in many areas would not be possible (although this latter statement may be true).“
> (Posamentier, 2003, preface: XV)

> „I called for the need to convince people of the beauty of mathematics and not necessarily its usefulness, as is most often the case when trying to motivate youngsters to the subject. [...] Teachers are the best ambassadors to the beautiful realm of mathematics.“
> (Posamentier, 2003, preface: XII)

Wer kennt es nicht: „Notwendig! Nützlich! Wichtig für die Zukunft!“ lauten die ständigen Leitsprüche. Darauf wird die Mathematik in unserer Gesellschaft reduziert. Ihre Schönheit wird niemals erwähnt. Da wundert es nicht, wenn einige wenige schlechte Erfahrungen in Lernsituationen oder Leistungserhebungen ausreichen, um es ziemlich

[3]Dazu am Ende dieses Kapitels noch etwas mehr.

[4]Ich möchte einem Abschnitt dieses Diskurses eine Fußnote widmen, da ich Konfrontationen dieser Art schon selbst erlebt habe, und die Ironie tatsächlich faszinierend ist:
„When I meet someone socially and they discover that my field of interest is mathematics, I am usually confronted with the proud exclamation: 'Oh, I was always terrible in math!' For no other subject in the curriculum would an adult be so proud of failure. Having been weak in mathematics is a badge of honor. Why is this so? Are people embarrassed to admit competence in this area? And why are so many people really weak in mathematics? What can be done to change this trend? Were anyone to have the definitive answer to this question, he or she would be the nation's education superstar. We can only conjecture where the problem lies and then from that perspective, hope to repair it. It is my strong belief that the root of the problem lies in the inherent unpopularity of mathematics. But why is it so unpopular?“ (Posamentier, 2003, preface: XII)

unwahrscheinlich werden zu lassen, dass Mathematik jemals wieder mit guten Gefühlen gekoppelt wird.
So muss es nicht sein, sind sich auch Engelhardt und Gustke (2005) einig. Mathematik birgt so viel Schönheit in sich, und muss nicht nur trockener Lernstoff sein. Mathematik kann „auch unterhaltsam und interessant sein, und in Bereichen vorkomm[en], in denen man es nicht erwartet hätte“ (Engelhardt & Gustke, 2005, S. 9). „Mit Wissen über Zahlen und ihren Beziehungen zueinander, mit mathematischen Vorgehensweisen und mathematischem Denken, [können] wunderbare Wirkungen erzeugt werden“ (Engelhardt Gustke, 2005, S. 9). Die Autoren führen ein weiteres interessantes pädagogisches, bzw. bildungspsychologisches Argument für das Erlernen und Beschäftigen mit Zaubertricks an: Ein erfolgreich erlernter Trick sowie dessen Vorführung würde das Selbstwertgefühl und Vertrauen in die eigenen Fertigkeiten steigern - speziell, wenn es mit einem Gebiet verbunden ist, das nicht jeder beherrscht. (vgl. Engelhardt & Gustke, 2005, S. 9)

An dieser Stelle möchte ich ein wunderschönes Zitat von der Titelseite des *Language Teacher MAGIC* teilen, das viele bisher erwähnte Punkte vereint, und meine Motivation zusammenfassend sehr gut auf den Punkt bringt.


MAGIC + TEACHING = JOLT OF EXCITEMENT!

There are as many kinds of great teachers as there are stars in the skies. The great ones reached us and make us feel the joys of our soul. They electrified us. There was a sense of excitement - sudden and intense. They startled us and surprised us into learning. They made us look forward to every lesson, pull out all the stops and thirst for more. Magic tricks can be a step in that direction.

Abbildung 1: Ein Motivationsspruch für Lehrer. Aus: MAGIC + TEACHING = JOLT OF EXCITEMENT! (Winter 2017). *Language Teacher MAGIC, Vol. 1 (No. 2).* Verfügbar unter: http://ritorn.fatcow.com/store/page1.html

Ein weiterer Autor schließt sich der Meinung von Posamentier an, dass der praktische Nutzen von Mathematik nicht unbedingt immer an erster Stelle stehen muss. Stickels (2019) beruft sich auf die Worte von Martin Gardner, der behauptet, „ein gutes mathematisches Puzzle, Paradoxon, oder magischer Trick könnte die Vorstellungskraft eines Kindes viel schneller stimulieren als eine praktische Anwendung ... und falls das Spiel weise gewählt ist, könnte es fast mühelos zu bedeutungsvollen mathematischen Ideen führen.“ (preface: XIII)[5]

Die meisten mathematischen Zaubertricks haben einen weiteren Vorteil gegenüber *herkömmlicher* Magie. Es bedarf kaum motorischer Geschicklichkeit und jahrelangen Übens. Klassische Zauberkunst arbeitet viel mit Ablenkung, Täuschung und Fingerfertigkeit - sogenannter *Sleight of Hand*. Diese Fähigkeit ist nicht (bzw. sehr selten) notwendig, falls Mathematik die Essenz des Tricks darstellt und die Hauptarbeit übernimmt. Die Anfor-

[5] Vom Verfasser übersetzt.

derungen an Geschicklichkeit und Fingerfertigkeit werden sozusagen fast eliminiert.

Ich habe bereits erwähnt, dass die Rahmenbedingungen und Zielsetzungen einer Zaubershow (bzw. einzeln vorgeführter Tricks) natürlich dem Zauberer überlassen sind. Geht es eher darum, ein Publikum in Staunen zu versetzen? Soll Mathematik mit Spaß vermittelt werden? Oder stehen mathematische Inhalte im Zentrum? Was das *Verraten* von Zaubertricks betrifft, gehen die Meinungen in der Literatur stark auseinander.[6] Auf der einen Seite 'Verraten Zauberkünstler nie ihre Tricks', und auf der anderen Seite liegt genau darin der letztendliche Zweck. Ich denke, das bestimmt der Kontext. Von einem Magierkodex, der das Auflösen von Tricks untersagt, halte ich in der Zeit, in der wir leben, nicht viel. Globale Vernetzung und augenblickliche Informationsvermittlung erlauben das *googlen* der weltweit berühmtesten Magier, Illusionisten und Mentalisten, und meistens findet man innerhalb der ersten 10 YouTube-Kommentare die Erklärung des Effektes. Ich möchte nicht damit sagen, dass bei dem/der vorführenden *Mathemagier*in* keine Verantwortung liegt. Alleine, um aus der Show bzw. den Effekten das meiste herauszuholen, sollte man sich im Vorhinein schon über seine Intentionen, das Publikum, und die Vorbereitung Gedanken machen.

Diesbezüglich soll an dieser Stelle kurz etwas bezüglich Materialgebrauch und Verpackung von Zaubertricks bemerkt werden. Mit *Verpackung* meine ich weiterhin die Art und Weise der Einkleidung bzw. Präsentation des mathematischen Effektes. Ich kann vorwegnehmen, dass ich ein und denselben Trick oftmals in mehreren Büchern gefunden habe, aber nicht selten - je nach Kreativität des Autors - unterschiedlich präsentiert, bzw. *verpackt*.

Primäres Ziel dieser Arbeit ist die mathematische Untersuchung und Beschreibung, bzw. Begründung der Effekte von Zaubertricks, die mathematischer Natur sind, oder anders gesagt: Im Fokus stehen verblüffende Effekte, deren Essenz eine gewisse mathematische Qualität hat.

Im Unterschied zu Populärliteratur wird daher weniger Fokus auf die Erläuterung unterschiedlicher *Verpackungsoptionen* gelegt. Obwohl die meisten Tricks in Kapitel 3 Ideen beinhalten, inwiefern sich die Effekte präsentieren lassen, um *magisch* zu wirken, kann der/die Leser*in an dieser Stelle seine/ihre Kreativität spielen lassen. Auch wenn diese Arbeit den Aspekt der Einkleidung nicht allzu detailliert behandelt, sollte jedem Hobbymagier bzw. jeder Hobbymagierin klar sein, dass die Art und Weise, einen Effekt zu präsentieren, von allergrößter Wichtigkeit für den Überraschungsmoment der Zuschauer ist. Es gilt also, diesen Punkt nicht zu vernachlässigen.
Ebenso habe ich bei der Filterung des Materials darauf Wert gelegt, Zaubertricks zu wählen, die mit möglichst wenig Utensilien funktionieren.[7] Meines Erachtens nach sollte ein Mathemagier nicht mehrere Koffer voller Ausrüstung benötigen.

[6]Mit 'Verraten' ist das Auflösen, bzw. Erklären des Effektes gemeint.
[7]Dazu mehr in Kapitel 1.4: Der Recherche- und Filterungsprozess.

Zum Ende dieses ersten Abschnitts der Einleitung möchte ich eine Passage eines Buches zitieren, dessen Autor der Held des nächsten Unterkapitels ist: Martin Gardner. Er berichtet von einer (im wahrsten Sinne des Wortes) *Kuriosität*, die sich vor etwa 150 Jahren zugetragen hatte. Dieser Umstand thematisiert auf humorvolle Art - fast karikaturhaft, möchte ich meinen - gewisse Themen der vorangegangenen Absätze wie Fachmathematik, Publikum, und Unterhaltungswert von Zauberei.

> „Als erster und vielleicht einziger Philosoph von Bedeutung hat sich der amerikanische Logiker und Vater des Pragmatismus, Charles Peirce, mit einer so gewöhnlichen Angelegenheit wie der Zauberei mit Karten beschäftigt. In einer seiner Arbeiten (vgl. 'The Collected Papers of Charles Sanders Peirce', 1931, Band 4, S. 473f) bekennt er, daß er sich 1860 eine Anzahl ungewöhnlicher Kartenkunststücke ausgedacht hatte, die auf, wie er es nannte, 'zyklischer Arithmetik' beruhen. Zwei dieser Tricks beschreibt er ausführlich unter den Überschriften 'Erste Kuriosität' und 'Zweite Kuriosität'. Einem modernen Zauberer erscheinen sie in einem von Peirce nicht beabsichtigten Sinn kurios. Die erste Kuriosität beruht auf einem Fermatschen Satz. Peirce benötigt 13 Seiten für die bloße Beschreibung, wie der Trick auszuführen ist, und weitere 52 Seiten, um zu erklären, warum er funktioniert. Zwar schreibt er, daß bei der Vorführung dieser Kunststücke die Zuschauer immer interessiert und überrascht gewesen seien, doch fällt es schwer zu glauben, daß Peirce's Publikum nicht schon vor Beendigung des Tricks halb eingeschlafen war, da der Effekt äußerst schwach im Verhältnis zum Aufwand ist."
> (Gardner, 2016, S. 17)

Laut Gardner wurden Zuseher glücklicherweise nicht bis zur Erfindung des Farbfernsehens mit langweiliger Zauberei gequält. Er führt an, dass über die darauffolgende Jahrhundertwende Karten- und andere Tricks einen unerhörten Aufschwung erfuhren. Und zwar nicht nur durch weit unterhaltsamere Präsentationen als es scheinbar bei Charles Peirce der Fall war, sondern auch, was den Einsatz grundlegender mathematischer Ideen für Kunststücke betrifft (vgl. Gardner, 2016, S. 17f). Und daran war Martin Gardner selbst nicht gerade unbeteiligt.

1.2 Martin Gardner; und zum Thema der Popularisierung der Mathematik im Allgemeinen

> „Newton said that his many mathematical accomplishments came because he stood on the shoulders of giants. For those of us who have tried to make mathematics accessible to a wider audience, there is one giant who towers well above anyone else: Martin Gardner."
> -KEITH DEVLIN, Stanford University, Center for the Study of Language and

Information; author of *The Math Game*; winner of the 2000 Communications Award of the Joint Policy Board for Mathematics.
(Gardner, 2001, back cover)

Kein anderer Autor wurde im Rahmen meiner Recherche annähernd so oft erwähnt wie der Amerikaner Martin Gardner (1914 - 2010). Obwohl er keine formale mathematische Bildung genossen hatte, gilt er unter vielen Aktivist*innen der Popularisierung der Mathematik als einflussreichste Person des letzten Jahrhunderts. In Gardner & Rodgers (2018) *The mathemagician and Pied Puzzler: A collection in tribute to Martin Gardner* wird der mehrfach ausgezeichnete Mathematiker John Conway mit folgenden Worten zitiert: „Gardner has brought 'more mathematics, to more millions, than anyone else'" (forward: XI). Von 1957 bis 1986 - für eine Dauer von 25 Jahren - schrieb Gardner die monatliche Kolumne *Mathematical Games* für *Scientific American*, das älteste, bis heute durchgehend publizierte Magazin der USA. In seinen mehr als 60 herausgebrachten Büchern, zu denen auch Kinder- und Jugendliteratur zählt, beschäftigt er sich unter anderem tiefgründig mit mathematischer Magie, Freizeitmathematik, Philosophie, und wissenschaftlichem Skeptizismus.[8] (vgl. Gardner, 2008, preface: I-III)

Was können wir dem Engagement solch einer Person abgewinnen? Es gilt, die Initiative zu ergreifen. Wie bereits im Einführungskapitel erwähnt, sind dabei insbesondere die Mathematiker*innen gefragt. Als Aktivistin oder Aktivist wird man dabei nicht alleine gelassen. Wobei man sich natürlich durch Literatur von Vorreitern wie Martin Gardner inspirieren lassen kann, ist es ebenso notwendig, die Augen nach bereits bestehenden Veranstaltungen offen zu halten. Leider fliegen Aktionen zur Popularisierung der Mathematik oftmals etwas unter dem Radar, was es nicht gerade einfacher macht, Freunden und Bekannten diesbezügliche Empfehlungen zu geben. Nicht selten werden am Tag der Mathematik, dem 14. 03. jedes Jahres, von mathematischen Institutionen Aktionen wie Workshops oder Live-Streams angeboten. 2008 galt als Jahr der Mathematik und wurde als Anlass genommen, die Aufmerksamkeit breiter Bevölkerungsschichten auf die schönen Seiten der Mathematik zu richten. (vgl. Neundorf, 2010, S. 3)

Nun muss aber offen gesagt werden, dass es als Einzelperson sehr schwierig ist, in einem breiteren Rahmen bzw. mit größerer Reichweite wirksam zu werden. Wie in Kapitel 1.1 geschildert, hat Mathematik in der Gesellschaft einen schlechten Ruf, und dieser Status quo wird nicht von heute auf morgen gekippt werden können. Man kann jedoch im kleinen Rahmen aktiv werden. Es gilt zu versuchen, bei einzelnen Individuen - seien es Kinder, Jugendliche, aber auch Erwachsene - einen Perspektivenwechsel zu erlangen, oder wenigstens einzuleiten. Der Mythos muss zerstreut werden, dass Mathematik *the bad guy* ist. Es ist möglich, die kreativen und schönen Seiten von Mathematik aufzuzeigen, und dass hierbei ein Spaßpotenzial existiert, auch wenn man nicht *das Mathe-Gen* besitzt. Wird dies immer gelingen? Nein, natürlich nicht. Dies sollte aber kein Grund sein, es

[8]Mit seinem Buch *Fads and Fallacies in the Name of Science* (1957) gilt Martin Gardner als Vorreiter im Kampf gegen Pseudowissenschaften.

nicht zu versuchen. Ich möchte diesen Paragraph mit einem netten Denkanstoß von Dr. Lynda Colgan beenden. Sie zeigt in Form einer Analogie zweifellos den Ort eines Defizites auf, an dem angesetzt werden könnte: „In the same way that parents, grandparents, older siblings and caregivers read to children from the time they are born to promote the positive development of language and literacy, we hope to share with you some ideas that you can use the same way to promote the development of a healthy attitude towards and knowledge about mathematics and numeracy.“ (Drayton, M. et al., 2010, preface: II)

1.3 Ein kurzer Einblick in wissenschaftliche Publikationen und Studien

Einleitend möchte ich in Erinnerung rufen, dass es nicht Anspruch dieser Arbeit ist, mathematische Zaubertricks in Bezug auf motivationsförderndes Potenzial oder fachdidaktische Einsetzbarkeit im Lehr- und Lernkontext zu untersuchen. Da diese und ähnliche Aspekte bzw. Fragestellungen der Kernthematik aber nicht fern sind, ist es mir ein Anliegen, einige Studien und deren primäre Resultate zu erwähnen. Wobei zu diesem Thema wenige Forschungsarbeiten zu finden sind, bei denen quantitativ Daten erhoben und ausgewertet werden, lohnt sich die Recherche dennoch. Der Großteil der wissenschaftlichen Veröffentlichungen arbeitet qualitativ - beispielsweise mit Blick auf Reaktionen der Schüler*innen, Adaptierungsmöglichkeiten für Zaubertricks, oder Kompensationsmöglichkeiten für Berührungsängste.

In der ersten vorgestellten Studie entwickeln Mitchell & Cummings (2017) auf Basis mehrerer anderer Arbeiten ein theoretisches Modell[9] für den Einsatz mathematischer Kartentricks im Unterricht. Ziel ist die Suche nach Indizien, ob Tricks solcher Art helfen könnten den Lernerfolg zu steigern.
Um einen tieferen Einblick in die Materie zu gewinnen, und in weiterer Folge Zaubertricks passend wählen und adaptieren zu können, werden im ersten Teil der Arbeit anhand veröffentlichter Literatur Kategorien isoliert, die für die negative Einstellung bzw. die Angst vor Mathematik verantwortlich erscheinen. Im zweiten Teil werden fünf mathematische Themengebiete gewählt, exemplarisch passende Tricks recherchiert und beispielgebend beschrieben. Mitchell & Cummings halten abschließend gewisse Schlüsselkriterien fest, die sie als essenziell für einen positiven Lern- bzw. Motivationseffekt anführen.
Als erster Schlüsselpunkt kristallisiert sich die einfache Tatsache heraus, dass Lernende Mathematik als langweilig und schwerfällig empfinden, mit wenigen interessanten Anwendungsmöglichkeiten. Je überraschender der Wow-Effekt eines Tricks also ist, umso besser. Für Personen, bei denen Mathematik mit Angst einher geht, ist es wichtig, in einem freundlichen, anregenden und ermutigenden Szenario mit der Materie konfrontiert zu werden. Das bedeutet, die Neugier der Studierenden beim Auflösen eines Trick-Effektes leitend zu unterstützen, diese unter sich selbst diskutieren zu lassen, und deren Ideen zu thematisieren, auch wenn diese vielleicht in eine falsche Richtung gehen. Weiters ist es von

[9] Es wurde nicht praktisch im Klassenraum durchgeführt, demzufolge *theoretisch*.

größter Bedeutung, Teilnehmer*innen in die Vorführung miteinzubeziehen, was gleichfalls heißt, dass der Zaubertrick von der ausführenden Person wirklich gut beherrscht und im Vorhinein geübt werden muss. Die letzte Schlüsselkomponente ist die Erklärung, wie der Trick funktioniert, um die mathematischen Konzepte und Prinzipien offenzulegen und zu erläutern - die Magie sozusagen zu entzaubern.

Lesser & Glickman (2009) zeigen in ihrer Publikation *Using magic in the teaching of probability and statistics* auf, inwiefern Zaubertricks für die Thematisierung von Wahrscheinlichkeiten und Statistik didaktisch wertvoll sein können. Obwohl ich nicht auf die Details der Resultate eingehen möchte, halte ich ein Bedenken der Autoren[10] für erwähnenswert:

> „[...] emphasis should be on building intuition, not on 'probability paradoxes or using statistics to deceive', [otherwise] students may have a negative feeling of having been 'tricked'. [...] magic tricks must be thoughtfully chosen so that the quality and intensity of surprise is 'just right', so that students will feel engaged to want to dig deeper to discuss and understand, rather than feel unduly tricked or deceived."
> (Lesser & Glickman, 2009, S. 274)

Ich kann dieser Überlegung nur zustimmen. Speziell falls Zaubertricks im Lehr- und Lernkontext eingesetzt werden und der motivationsfördernde Aspekt genutzt werden soll, müssten die Auswahlkriterien für die Tricks etwas enger gefasst werden.

Koirala & Goodwin (2000) wagen einen Versuch mit Schüler*innen der fünften und sechsten Klasse, die im Vorfeld noch keinen, bzw. fast keinen Algebra-Unterricht genossen hatten. Das Arbeiten mit Variablen sollte alleine mithilfe von Zaubertricks erarbeitet werden. Auch wenn es sich um sehr simple Effekte handelte, waren die Kinder sehr überrascht und wollten unbedingt wissen, wie diese Tricks funktionieren. Wie in Kapitel 1.1 erwähnt, ist das genau die gleiche Erfahrung, die ich selbst in meiner Unterrichtspraxis machen konnte. Die Autoren bringen zum Ausdruck, wie leicht es war, die Schüler*innen zum Ausprobieren und Experimentieren zu motivieren. Selbst in ihrer Freizeit und mehrere Tage nach dem Unterricht spielten sie die vorgeführten und selbst erarbeiteten Tricks mit anderen Lehrer*innen und Familienangehörigen. Koirala & Goodwin konnten hiermit zeigen, dass es möglich ist, einerseits gewisse algebraische Konzepte erfolgreich im Kontext von Mathe-Magie zu lehren, und andererseits, Motivation für das Lernen darauf aufbauender Konzepte zu generieren.

1.4 Der Recherche- und Filterungsprozess

Bevor Zaubertricks und deren mathematische Beschreibung in den Vordergrund rücken, möchte ich der Transparenz zugute meinem initialen Arbeitsprozess einige Worte widmen.

[10] Lesser & Glickman berufen sich hierbei Burrill (1990), sowie ASA (1994).

Ursprünglich hatte ich die Recherchephase mit der Annahme begonnen, die meisten auf Mathematik basierenden Zaubertricks wären im Gebiet der Geometrie und Analysis zu finden. Diese und einige weitere Vermutungen stellten sich im Verlauf der Materialerhebung als falsch heraus. Ich möchte damit festhalten, dass die Untersuchung der Materie wesentlich auf die Richtung dieser Arbeit Einfluss genommen hat. Ich denke, es ist nicht unüblich, dass zu Beginn eines umfangreichen Projektes die Vorstellungen und Erwartungen etwas getrübt sind, sei es aufgrund von Unklarheit oder schlichtweg Naivität, und demnach die Wege schlussendlich andere Flüsse kreuzen als anfangs erwartet.

Im Rahmen meiner Recherche wurden ungefähr 130 Literaturquellen nach *geeigneten* Zaubertricks durchleuchtet. Von diesen Quellen waren der Großteil Bücher, aber auch Journalartikel, Studien, und andere Veröffentlichungen. Ich habe das Adjektiv „geeigneten“ hervorgehoben, da die Eignungskriterien zu Beginn der Suche nach Tricks noch sehr unklar waren, und sich erst im Laufe der Wochen und Monate geformt und langsam verfestigt hatten.
Nachdem es ungefähr 150 Zaubertricks aus nahezu 70 Quellen in die Vorauswahl geschafft hatten, fand die zweite Phase der Filterung statt, in der das Material zuerst nach Prioritätsstufen (bzw. „Eignung“), und danach innerhalb dieser Prioritätsstufen thematisch (nach mathematischen Themengebieten) geordnet wurde.
Zum einen lieferten diese recherchierten und mehrfach gefilterten Ressourcen in diesem Zustand eine wunderbare Übersicht über die Welt mathematischer Zaubertricks, und zum anderen gestatteten sie einen sehr guten Überblick der Möglichkeiten und Schwerpunktsetzungen dieser Masterarbeit. Manche interessante Aspekte waren nun sehr deutlich zu erkennen: Beispielsweise stellten sich gewisse mathematische Teilgebiete als prävalent heraus, wie u.a. die Zahlentheorie. Ebenso bedeutsam für den weiteren Arbeitsprozess war die Erkenntnis, dass eine kleine Anzahl sehr ähnlicher - wenn nicht identer - Zaubertricks von einer Vielzahl von Autoren thematisiert wird. Eine Untersuchung dieser *super-populären* Tricks kann außerordentlich horizonterweiternd sein, da sie einen Einblick darauf gewährt, inwiefern unterschiedliche Zauberer bzw. Zauberinnen dieselbe Kuriosität bearbeiten, erweitern, bzw. kreativ adaptieren, sodass ihre Effekte völlig anders wirken oder noch verblüffender erscheinen.

1.5 Abgrenzung der Arbeit: Die Landschaft mathematischer Zaubertricks

Der Überblick, der im Rahmen der Recherche- und Filterungsphase gewonnen werden konnte, erlaubt nun einerseits eine Beschreibung der Landschaft mathematischer Zaubertricks, und andererseits gewisse thematische Fokussierungen.

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit konnten folgenden Teilgebieten der Mathematik Tricks zugeordnet werden: Algebra/Arithmetik, Analysis, Geometrie, Logik/Mengenlehre, Spieltheorie, Stochastik/Kombinatorik, Topologie, und Zahlentheorie. Besonders Hervorste-

chen konnte die Zahlentheorie, sowie Algebra, bzw. Arithmetik.
Manche thematisch ähnliche Zaubertricks lassen sich gut in Cluster bündeln. Innerhalb der Geometrie gibt es beispielsweise eine Vielzahl von optischen Täuschungen, die in der Literatur gerne als *geometrical vanishes* (Geometrisches Verschwinden) beschrieben werden. In Gardner's (2016) *Das verschwundene Kaninchen und andere mathematische Tricks* werden Effekten dieser Art zwei gesamte Kapitel gewidmet (vgl., S. 136-172). Die Zahlentheorie erlaubt u.a. Magie, die mithilfe von Quersummen und 9-er Resten erklärbar ist. Ein weiteres Beispiel wären einfache arithmetische Operationen, die unzählige mathematisch simple Tricks erlauben, denen ich den Abschluss dieses Einführungskapitel widmen möchte. Zwei andere Cluster, die nicht unbedingt vollständig innerhalb eines mathematischen Teilgebietes liegen, wären *speed-math*, bzw. *speed-calculations* (also Schnellrechentricks) und auch die Kartentricks.

Magie mit Karten hat - wie auch am Ende von Kapitel 1.1 erwähnt wird - eine sehr lange Tradition. Dies ist eine der wenigen Sparten von Tricks, denen Autoren ganze Bücher widmen, wie beispielsweise Mulcahys (2013) *Mathematical card magic: Fifty-two new effects*, oder Hugards (2018) *The Royal Road to Card Magic.* Es ist sehr wichtig zu erwähnen, dass Kartentricks nicht inhärent mathematischer sind.

> „For many of these tricks, you will need to have certain cards in certain places in the deck for them to work. Magicians call this positioning of cards in a deck stacking the deck. But, as your audience might suspect you've been up to something sneaky before the trick starts, that's where false shuffles and cuts come into play."
> (McOwan & Parker, n.d., S. 2)

Abgesehen von vorbereiteten, bzw. manipulierten Decks, spielen bei Kartentricks öfters ebenfalls *slight of hand* Techniken - also direkte Manipulation durch Fingerfertigkeit - und Täuschung[11] zentrale Rollen. Dennoch basiert ein guter Teil von Kartenmagie auf Mischmethoden, die gewisse Attribute des Decks *invariant* lassen, und insofern rein mathematisch erklärbar sind.
Kartentricks sind eine eigene Wissenschaft für sich. Widmet man diesem Thema nur einen kleinen Teil einer Facharbeit, würde dies die Materie meiner Meinung nach nicht tiefgründig genug beleuchten können und viele Fragen offen lassen. Behrends (2017) zeigt in Kapitel 1 seines Werkes *Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker*, wie eine von Bob Hummer gefundene Invariante durch eine spezielle Mischmethode unverändert gelassen (bzw. besser gesagt: ermöglicht) wird, und beschreibt diese fachmathematisch sehr umfangreich und detailliert.
Die im letzten Absatz angeführten Eigenheiten von Kartentricks sollen als Argument dafür dienen, diesem Typ von Tricks keinen hochrangigen Stellenwert einzuräumen.

[11] Gerne werden Mitspieler*innen abgelenkt, um unbemerkt einen schnellen Blick auf eine Karte werden zu können.

Ähnlich wie bei Zauberei mit Karten existiert für Schnellrechentricks eine ganze Reihe von Literatur. Eigene Systeme wie *Vedic Mathematics*[12] oder die *Trachtenberg-Methode*[13] erlauben es, Rechnungen, für die üblicherweise ein Taschenrechner notwendig ist, schnell auf dem Papier oder sogar im Kopf zu lösen. Dazu gehören beispielsweise die Multiplikation zweier zwei-, drei-, oder sogar vierstelliger Zahlen, Quadrate, Wurzeln, oder Divisionen.

> „A small girl with beribboned braids was asked to find the solution of 735352314 times 11. She came up with the correct answer - 8088875454 - in less time than you can say multiplication table. A thin, studious-looking boy wearing silver-rimmed spectacles was told to multiply 5132437201 times 452736502785. He blitzed through the problem, computing the answer - 2323641669144374104785 - in seventy seconds. The class was one where the Trachtenberg system of mathematics is taught. What made the exhibition of mathematical wizardry more amazing was that these were children who had repeatedly failed in arithmetic until, in desperation, their parents sent them to learn this method.“
> (Cutler & McShane, 1960, S. 7)

Auch wenn ich Systeme dieser Art persönlich für sehr interessant halte, und man ebenfalls über deren didaktisches Potenzial diskutieren könnte, gehen sie an der Kernidee dieser Arbeit vorbei. Manche der im nächsten Kapitel vorgestellten Zaubertricks basieren zwar schon darauf, dass der/die Magier*in gewisse Rechnungen im Kopf auszuführen hat, allerdings würde es den meisten reinen Schnellrechentricks aufgrund ihrer Einseitigkeit vermutlich an Unterhaltungswert fehlen.

Weitere Gruppen von mathematischen Zaubertricks sind in der Geometrie zu finden. Wie bereits am Anfang dieses Unterkapitels erwähnt sind die *geometrical vanishes* ein Beispiel dafür. Hierbei geht es üblicherweise darum, dass eine Fläche, Linie, oder ganze Teilbereiche von Objekten nach einer Neuanordnung verschwinden, größer bzw. kleiner, oder kürzer, bzw. länger werden.

[12]Das System der posthum veröffentlichten vedischen Rechenmethoden wurde von dem indischen Hindumönch Bharati Krishna Tirthaji (1884 - 1960) entwickelt. Auch wenn dafür keine Belege existieren, behauptete er, diese Methoden aus der Veda - einer Sammlung religiöser Texte des Hindiusmus - herausgearbeitet zu haben.
Vgl. dazu beispielsweise: Tekriwal, G. (2015). *MATHS SUTRA: The Art of Vedic Speed Calculation.* Penguin Random House India.
Oder: Kandasamy, V. W. B., & Smarandache, F. (2000). *VEDIC MATHEMATICS - 'VEDIC' OR 'MATHEMATICS': A FUZZY & NEUTROSOPHIC ANALYSIS.* Indo American Books.

[13]Die Trachtenberg-Methode geht auf den Gründer des Mathematischen Institutes Zürich, Jakow Trachtenberg (1888 - 1953), zurück. Der gebürtige Russe war der Meinung, jeder Mensch komme mit phänomenalen Rechenmöglichkeiten auf die Welt, und entwickelte ein neues mentales arithmetisches System, wonach dies möglich sein soll. Während seiner mehrjährigen Inhaftierung in Hitlers Konzentrationslagern entwickelte er ohne irgendetwas niederschreiben zu können die fundamentalen Konzepte seines Systems. Nachdem ihm 1945 seine Frau bei der Flucht helfen konnte, migrierten sie in die Schweiz, wo er das Institut gründen, und bis zu seinem Tode 8 Jahre später seine Ideen reifen lassen und niederschreiben konnte. (vgl. Cutler & McShane, 1960, S. 7ff)

Im folgenden Beispiel werden aus sechs geradkantigen Puzzlestücken (siehe Abbildung 2) drei unterschiedliche Objekte gelegt und der Flächeninhalt berechnet (siehe Abbildung 3).

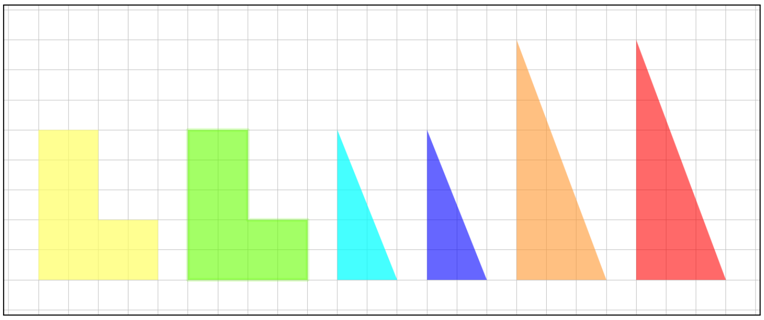

Abbildung 2: Die sechs geradkantigen Puzzleteile

Irgendetwas scheint bei dem Vergleich der Flächeninhalte nicht zu stimmen. Obwohl alle drei Objekte aus denselben geometrischen Figuren gelegt, und die Flächeninhalte scheinbar korrekt berechnet wurden, hat Objekt 1 eine Fläche von 59 F.E., das zweite Objekt 58 F.E., und das dritte Objekt 60 F.E.

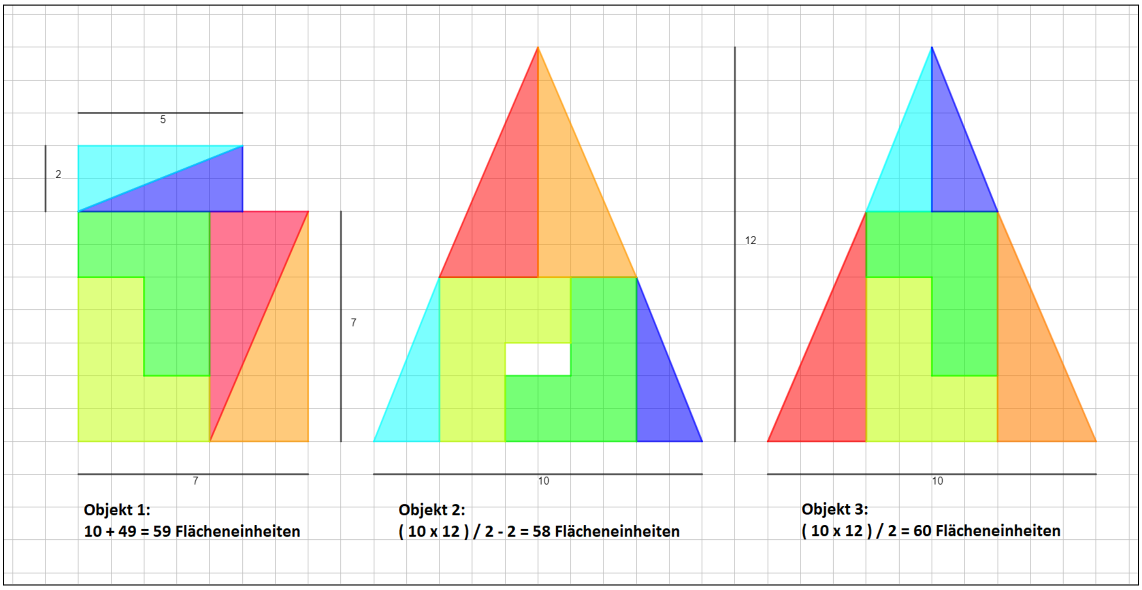

Abbildung 3: Das Sechseck und die zwei gleichschenkeligen Dreiecke - bestehend aus den gleichen Puzzleteilen - sollten denselben Flächeninhalt haben.

Wie sind diese unterschiedlichen Flächeninhalte sowie die Lücke (2 F.E.) in Objekt 2 erklärbar? Offensichtlich handelt es sich um eine Täuschung, doch auf den ersten Blick ist gar nicht so leicht zu erkennen, wo der Fehler, bzw. die Illusion liegt.

Der Flächeninhalt von Objekt 1 ist korrekt berechnet. Die Summe der Flächeninhalte aller Puzzleteile ist 59 F.E. Fehler liegen bei Objekt 2 sowie Objekt 3 vor. Um Aufschluss über die Täuschung zu erlangen bedarf es einer Untersuchung der Kanten der gleichlangen Schenkel der *mutmaßlich* gleichschenkeligen Dreiecke Objekt 2 und Objekt 3. (siehe Abbildung 4)

Abbildung 4: Diese Abbildung deckt die Täuschung auf: Es handelt sich nicht um gleichschenkelige Dreiecke.

Objekt 2 ist „aufgebläht“. Die Schenkelseiten wirken konvex nach außen gekrümmt, was daran liegt, dass die roten und cyan-farbigen Puzzle-Dreiecke nicht *ähnlich* sind. Dies wird durch zwei Tatsachen bestätigt: Die Winkel α und β sind nicht gleich groß, und: Die Seiten s_{AB} und s_{BH} liegen nicht auf der Geraden s_{AH}. Diese Blähung an den Schenkelseiten, sowie die ohnehin geringere Fläche der Summe der Puzzleteile, erlauben die Lücke von 2 Flächeneinheiten. Objekt 3 stellt den umgekehrten Fall dar. Die farbigen Schenkel sind konkav nach innen gekrümmt, und das Dreieck $\overline{SQR}$ entspricht einer kaum erkennbaren ungefüllten Fläche. Diese Diskrepanz entsteht dadurch, dass dem Auge, bzw. der getäuschten Person ein gleichschenkeliges Dreieck mit dem Schenkel s_{QS} und dem Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot Grundseite \cdot Höhe$, also 60 F.E., vorgegaukelt wird. Die wahre Fläche der kombinierten Puzzlestücke ist jedoch wie bereits erwähnt lediglich 59 F.E. (vgl. Objekt 1).

Viele geometrische Tricks dieser Art bedienen sich *nicht ganz fair konstruierter* Objekte und eines Umverteilens von Größen. Es wird mit kaum bemerkbaren Fehlern geschummelt. Diese Tatsache zum einen, und die Notwendigkeit von (teilweise präpariertem) Material zum anderen lassen mich Zaubertricks dieser Art für diese Arbeit ebenfalls als ungeeignet klassifizieren. An dieser Stelle halte ich auch Tricks für erwähnenswert, die in das Gebiet der Topologie fallen würden: Magie mit Knoten, Fingerbändern, oder abstraktere Tricks mit Möbiusbändern oder sogar Kleidungsstücken werden von Autoren beschrieben.

Wie sieht es mit Tüftel- und Puzzlebüchern aus? Auch wenn diese heutzutage nicht mehr so populär sind wie vielleicht vor 20 oder 30 Jahren, findet man in Zeitungen, Tagesblättern oder anderen Journalen immer wieder einmal Rubriken zum Knobeln. Üblicherweise lassen sich Rätsel dieser Art mit (mathematischer) Logik lösen wie beispielsweise Gleichungssystemen, Mengenanalysen bzw. der Aussagenlogik/booleschen Algebra. Obwohl also inhärent mathematisch, ist bei Spielereien dieser Art jedoch kein/e Zauberkünstler*in vonnöten.

Auch wenn es noch zahlreiche weitere erwähnenswerte Gruppen mathematischer Tricks gäbe, wie u.a. *Magic Squares*[14] oder *Memorization Magic*[15], möchte ich langsam zum Ende dieses Kapitels kommen.

Einer letzten Klasse von Zaubertricks muss jedoch noch Beachtung geschenkt werden. Ich spreche von jenen Tricks, die in der Literatur mit Abstand am häufigsten zu finden sind, und denen ich das letzte Unterkapitel dieser Einleitung widmen möchte: Zauberei, die sich durch simple Arithmetik, bzw. triviale algebraische Umformungen erklären lässt. Ein Beispiel dafür habe ich bereits in Kapitel 1.1 angeführt. In Bezug auf diese Abschlussarbeit gibt es generell zwei Aussagen betreffend Tricks dieser Art zu machen: Erstens wäre es aufgrund der geringen mathematischen Komplexität nicht vertretbar, die gesamte Arbeit mit solchen Zaubertricks zu füllen. Zweitens: Simple Mathematik hat nicht unbedingt langweilige Effekte zur Folge. Die Qualität der Effekte solcher Tricks ist sehr unterschiedlich. An dem einen Ende des Spektrums hat man Tricks, die trotz simpler Mathematik sehr kreativ verpackt, verblüffend, unterhaltsam, und noch dazu kaum von Zuschauer*innen zu entschlüsseln sind. Am anderen Ende des Spektrums hat man es mit dem Gegenteil zu tun: Effekte, die im Vergleich sehr flach und witzlos wirken. Natürlich aber sind Geschmäcker verschieden, und unterschiedliche Personen finden verschiedene Arten von Tricks unterschiedlich interessant. Da es also schwierig ist, objektive Kriterien für eine diesbezügliche Kategorisierung anzugeben, kann man es mit Beispielen versuchen.

[14] Magische Quadrate sind $n \times n$-Quadrate, deren n^2 Felder mit paarweise verschiedenen Zahlen so gefüllt werden, dass die Zeilen, Spalten, und manchmal auch die Diagonalen oder andere spezielle Bereiche die gleiche Summe ergeben.

[15] Üblicherweise sind es nicht einfach zu erlernende Assoziations-Techniken, die es einem Zauberer bzw. einer Zauberin (oder *Mentalist*in*) erlauben, sich eine enorme Menge von spontan erhaltenen Informationen zu merken.

1.6 *'Nays'* and *'Yays'* - Beispiele für unterhaltsame und weniger unterhaltsame simple Zaubertricks

In der *Schriftreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG*[16] beschreibt der ehemalige österreichische Vizestaatsmeister der Zauberkunst, Dieter Kadan (2015), mathematische Zauberkunst mit folgender Formel: „Education + Entertainment = Edutainment“. Damit unterstreicht er nebem dem Bildungs-, bzw. Lehr- und Lernaspekt auch den Unterhaltungswert von mathematischen Zaubertricks. Nachfolgend möchte ich nun Tricks mit *simpler Mathematik* im Hintergrund aufzeigen, die meiner Meinung nach gute Beispiele (*'Yays'*) und weniger gute Beispiele (*'Nays')* für den Unterhaltungsfaktor, bzw. die einkleidende Verpackung mathematischer Täuschungen sind.
Ich möchte in Erinnerung rufen, dass von nun an zugunsten der Leserlichkeit männliche ausführende Zauberer und weibliche Mitspielerinnen bzw. Teilnehmerinnen angenommen werden.

1.6.1 Nay: Immer die Fünf

Bei diesem Trick handelt es sich um einen sogenannten *Zahlenforce*. Der Zuschauerin wird freie Wahl und Einfluss auf den Ausgang suggeriert. Tatsächlich ist das Ergebnis jedoch schon von Anfang an klar. Die Zuschauerin soll sich eine Zahl x (nicht notwendigerweise $\in \mathbb{N}$) ausdenken, und folgende Operationen ausführen:

Verdopple die gedachte Zahl.	$2x$
Addiere 10 zum Ergebnis.	$2x + 10$
Nimm vom Ergebnis die Hälfte.	$\frac{2x+10}{2} = x + 5$
Ziehe die gedachte Zahl ab.	$x + 5 - x = 5$

Arithmetische Tricks wie diese findet man wie Sand am Meer, und sind ebenfalls nicht schwierig selbst zu erfinden. Viel simpler wird es nicht: Der Zauberer muss kaum eine Vorstellung abliefern, da er weder mitrechnen, etwas *vorspielen*, noch eine Geschichte erzählen muss. Deswegen würde dieser Trick in dieser minimalistischen Form von mir die Bewertung 'Nay' erhalten. Dennoch möchte ich unterstreichen, dass ich Zaubertricks dieser Art nicht unbedingt als *schlecht* abstempeln möchte. Der Trick aus Kapitel 1.1, den ich im Rahmen eines Lehr- und Lernkontextes thematisch passend vorführte, war nicht viel komplizierter, und trotzdem ließen sich Schüler*innen begeistern. Vielleicht könnte eine Präsentation auch dadurch aufgewertet werden, dass gleichzeitig mehrere Zuschauerinnen Zahlen wählen und mitrechnen sollen, wobei schließlich alle Personen verblüffenderweise zu demselben Ergebnis kommen. (vgl. Engelhardt & Gustke, 2005, S. 87)

[16]Die Österreichische Mathematische Gesellschaft.

Exemplarisch möchte ich noch eine andere Version dieses Tricks vorstellen, die vielleicht etwas spektakulärer wirkt, da sich die Teilnehmerinnen zwei aufeinanderfolgende Zahlen aussuchen dürfen. Sei die erste (niedrigere) Zahl x und deren Nachfolger y.

Addiere beide Zahlen.	$x + y$
Addiere zum Ergebnis 9.	$x + y + 9$
Dividiere das Ergebnis durch 2.	$\frac{x+y+9}{2}$
Ziehe die kleinere Zahl ab.	$\frac{x+y+9}{2} - x$

Durch die Erkenntnis, dass $y = x+1$ gilt, und ein Einsetzen in das Ergebnis $\frac{x+x+1+9}{2} - x = \frac{2x+10}{2} - x = x + 5 - x = 5$ ergibt, ist diese *Force* auf die Fünf ebenfalls aufgelöst. (vgl. Engelhardt & Gustke, 2005, S. 97)

1.6.2 Yay: Der Popcorn Trick

Nun soll ein positives Beispiel eines Tricks angegeben werden, das trotz simpler Mathematik mehrere interessante Aspekte aufweist. Erstens bedarf der Zaubertrick zweier Mitspielerinnen (folglich kurz A & B), zweitens kann der Magier bei der Durchführung blind agieren, und drittens spielen bzw. zählen wir mit einigen kleinen Objekten, wovon ungefähr 60 benötigt werden. Wir nehmen eine Box voller Popcorn an. Nachfolgend wird der Zaubertrick zweimal beschrieben: Zuerst, wie ihn die Zuschauerinnen erleben, und danach betrachten wir ihn mit der mathematischen Brille. (vgl. White & Broekel, 1991, S. 30f)

Schritt	**Anweisung an A**	**Anweisung an B**
1	Nimm zwischen 10 und 20 Popcorn aus der Box.	
2		Zähle A's Popcorn, und nimm dir zweimal so viele aus der Box.
3	Gib 4 Popcorn aus deinem Haufen an B.	
4		Zähle A's Popcorn, verdopple die Anzahl, und gib ihr so viele von deinen eigenen.

Ohne zu wissen wie viele Popcorn Mitspielerin A zu Beginn genommen hat, und ohne zugesehen zu haben, kann der Zauberer nun behaupten, die finale Anzahl der Popcorn von Spielerin B zu kennen: Zwölf. Die Antwort ist unabhängig von der zu Beginn gewählten Popcornanzahl von Spielerin A. Die Antwort ist aber nicht immer 12. Eine weitere interessante Eigenschaft dieses Zaubertricks ist die, dass die schlussendliche Antwort von dem Magier im Laufe des Tricks manipuliert werden kann. Diese Zauberei eignet sich also dazu, sie demselben Publikum öfters vorzuspielen. Wie geht das? Und wo versteckt sich diese Variable?

Untersuchen wir den Trick mathematisch:

- Sei x die Anzahl der Popcorn, die Spielerin A der Spielerin B in Schritt 3 überreichen soll. Hier kann der Zauberer frei von 1 bis 9 wählen![17] In dem vorher beschriebenen Beispielverlauf wurde 4 angenommen.
- Sei $(x + R)$ die Anzahl der Popcorn, die Spielerin A in Schritt 1 wählt.
- Seien P_A, bzw. P_B die Anzahl der Popcorn der beiden Mitspielerinnen zum gegebenen Zeitpunkt.

Schritt	**Anweisung an A**	**Anweisung an B**
1	Nimm zwischen 10 und 20 Popcorn aus der Box. $(= P_A)$ $P_A = x + R$	
2		Zähle A's Popcorn, und nimm dir zweimal so viele aus der Box. $P_B = 2 \cdot (x + R) = 2x + 2R$
3	Gib x Popcorn aus deinem Haufen zu B. $P_A = x + R - x = R$	$P_B = 2x + 2R + x = 3x + 2R$
4	(Die Anzahl der Popcorn von A ist zu diesem Zeitpunkt für den Trick irrelevant.) $P_A = R + 2R = 3R$	Zähle A's Popcorn, verdopple die Zahl, und gib ihr so viele von deinen eigenen. $P_B = 3x + 2R - 2R = 3x$

Ich möchte in Erinnerung rufen, dass der Effekt des Tricks darin besteht, dass der Zauberer nach seinen vier Anweisungen die Anzahl der Popcorn von Mitspielerin B nennen kann. Die schlussendliche Menge von A ist nicht wichtig und kann auch nicht bestimmt werden, da sie in jedem Schritt von der dem Magier Unbekannten R abhängt.
Allenfalls wurde anhand der Tabelle bewiesen, dass die Endanzahl der Popcorn von Person B immer die dreifache Anzahl der Popcorn ist, die der Zauberer in Schritt drei von Person A zu B schieben lässt: $P_B = 3x$.

1.6.3 Nay: Mysterious Dice; Würfelfrage

Ein weiterer Trick, der meiner Meinung nach nicht sehr viel zu bieten hat, da nach einigen Rechenoperationen lediglich zwei Zahlen erraten werden, wäre *Mysterious Dice* (vgl.

[17] Dieser Bereich ergibt sich dadurch, dass Person A zu Beginn zwischen 10 und 20 Popcorn wählen soll. Entscheidet sich A für die minimale Anzahl von 10 - und die Entscheidung ist dem Magier unbekannt - sollte er nicht mehr als 9 verschieben lassen, da A sonst keine Popcorn verbleiben.

Fields, n.d., S. 5). Der Zauberer bittet eine Zuschauerin, sich zwei Ziffern eines Würfels auszudenken. Wenn er es ein wenig spannender machen möchte, kann er die Mitspielerin auch verdeckt würfeln lassen. Danach gibt der Zauberer folgende Rechenanweisungen, wobei er nur das letzte Ergebnis wissen möchte.

Seien x, y die gewählten Unbekannten.

Multipliziere eine der beiden Zahlen mit 5.	$5x$
Addiere zum Ergebnis 7.	$5x + 7$
Verdopple diese Summe.	$(5x + 7) \cdot 2$
Addiere die andere gewählte Zahl.	$(5x + 7) \cdot 2 + y$ $= 10x + y + 14$

Für jeden Mathematiker ist nun mit einen Blick nachvollziehbar, dass anhand des Ergebnisses $10x + y + 14$ die beiden Würfelziffern leicht zu benennen sind. Zuerst wird 14 subtrahiert, und danach identifiziert die Einer-, sowie die Zehnerstelle von $10x + y$ direkt jeweils eine Unbekannte.

Diese Idee lässt sich auch für drei Würfel umsetzen, wie Grätzer & Stern (vgl., 2010, S. 66) mit *Würfelfrage* zeigen. An dieser Stelle sei erwähnt, dass diese beiden Tricks natürlich nicht nur für Ziffern von 1-6, sondern allgemein für 0-9 funktionieren. Die Anweisungen, die der Zauberer nach der Wahl oder dem Erwürfeln dreier Ziffern (in Folge a, b, c) durch ein Publikum gibt, lauten:

Verdopple irgendeine der drei Ziffern.	$2a$
Addiere zum Ergebnis 5.	$2a + 5$
Multipliziere die Summe mit 5.	$(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$
Addiere eine der zwei anderen Ziffern.	$10a + b + 25$
Multipliziere das Ergebnis mit 10.	$(10a + b + 25) \cdot 10 = 100a + 10b + 250$
Addiere die letzte der drei Ziffern.	$100a + 10b + c + 250$

Persönlich gefällt mir an dieser Version nicht, dass die mitspielende Person wahrscheinlich nicht ohne Taschenrechner auskommt. Die Subtraktion von 250, die der Zauberer im Kopf durchführen muss, sollte zwar kein unüberwindbares Hindernis darstellen, es ist aber doch etwas schwieriger als bei der vorangegangenen Version. Die Auflösung des Tricks ist abermals trivial. Nach der Verminderung des Ergebnisses um 250, entschlüsseln die drei Ziffern der dreistelligen Zahl $100a + 10b + c$ die Unbekannten.

1.6.4 Yay: The Mysterious Number 22

Bei diesem Trick handelt es sich um einen ähnlichen Effekt wie bei einer *Zahlenforce*. Die Wirkung ist jedoch nicht die Folge von Rechenanweisungen, deren einziger Zweck es war, in jedem Falle eine bestimmte Zielzahl zurückzuliefern. Es handelt sich um eine faszinierende Eigenschaft von dreistelligen Zahlen im Allgemeinen, was das Ganze meiner

Meinung nach viel interessanter macht (vgl. Posamentier, 2003, S. 100f).

Folgende Anweisungen sind von der Mitspielerin durchzuführen:

- Wähle irgendeine dreistellige Zahl mit drei unterschiedlichen Ziffern.
- Konstruiere aus diesen drei Ziffern alle möglichen unterschiedlichen zweistelligen Zahlen. Es sind sechs.
- Bilde die Summe dieser zweistelligen Zahlen.
- Dividiere die Summe durch die Ziffernsumme der originalen dreistelligen Zahl.

Dieser Algorithmus liefert als Ergebnis immer 22.

Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$, einstellig und paarweise verschieden die Ziffern der dreistelligen Zahl $100x + 10y + z$.
Die Summe der sechs verschiedenen aus x, y, z konstruierten zweistelligen Zahlen ist:

$$(10x + y) + (10y + x) + (10x + y) + (10z + x) + (10y + x) + (10z + y)$$

$$\begin{aligned} &= 10 \cdot (2x + 2y + 2z) + (2x + 2y + 2z) \\ &= 11 \cdot (2x + 2y + 2z) \\ &= 22 \cdot (x + y + z) \end{aligned}$$

Wird diese Summe nun durch die Ziffernsumme von $100x + 10y + z$, nämlich $x + y + z$, dividiert, erhält man 22.

1.6.5 Nay: Birthday Mind-Reading

Im Verlauf meiner Recherche bin ich auf mehrere Zaubertricks gestoßen, die es erlauben, ein Geburtstagsdatum oder das Alter einer Person zu bestimmen. Bei den meisten dieser Tricks geht es darum, dass die Mitspielerin das Datum ihrer Geburt in irgendeiner Form in eine Rechnung einbaut, und der Zauberer die gewünschte Information an dem Ergebnis ablesen kann, wie auch bei dieser Version (vgl. Fields, n.d., S. 4). Sei $x \in \mathbb{N}$ das Geburtsmonat und $y \in \mathbb{N}$ das Alter der Mitspielerin. Der Zauberer gibt folgende Anweisungen:

Denke an deinen Geburtsmonat (Jänner entspricht 1, Februar 2, usw.) und multipliziere diese Zahl mit 2.	$2x$
Addiere zum Ergebnis 5.	$2x + 5$
Multipliziere die Summe mit 50.	$(2x + 5) \cdot 50 = 100x + 250$
Addiere dein Alter zum Ergebnis.	$100x + 250 + y$
Subtrahiere davon 365.	$100x - 115 + y$
Addiere abschließend 115, und sage mir dein Ergebnis.	$100x + y$

Abermals ist es simple elementare Algebra und keine Hexerei, die zu der Schlussfolgerung führt, dass die beiden letzten Ziffern des Ergebnisses das Alter, und die Stelle(n) davor das ein- bzw. zweistellige Geburtsmonat identifizieren.

Abgesehen von der unkreativen Verpackung und der Simplistik möchte ich an dem Trick einerseits kritisieren, dass der Effekt an dem Ergebnis so einfach abzulesen ist, dass er beim Gegenüber wahrscheinlich eher zu einer *Erschauderung* als *Bezauberung* führt. Mein zweiter Kritikpunkt betrifft die letzten beiden Rechenanweisungen. Die Subtraktion von 365 und die Addition von 115 könnten zu einem Schritt vereint werden. Der Überraschungseffekt - falls dieser überhaupt existiert - wird darunter kaum leiden.
Es war mir ein Anliegen, hier absichtlich eine sehr simple Version vorzustellen, um diese in Kontrast zu einer deutlich kreativeren Variante aus dem übernächsten Kapitel (3.2.2: *Das Alter erraten*) zu setzen.

1.6.6 Yay: The Magic 37; Four Digit Foresight

Abschließend möchte ich zwei Tricks präsentieren, die ähnlich wie *The Mysterious Number 22* trotz ihrer Einfachheit die Schönheit der Mathematik offenlegen. *The Magic 37* (vgl. Davison & McOwan, n.d., S. $10\frac{1}{2}$ff) beschreibt das konstante Verhältnis zwischen einer dreistelligen Schnapszahl[18] und ihrer Quersumme als 37.

Sei $a \in \mathbb{N}$ einstellig $\neq 0$, und $100a + 10a + a$ der Wert der dreistelligen Schnapszahl zu a, und $3a$ dessen Ziffernsumme, dann gilt: $\frac{100a+10a+a}{3a} = 37$.

$$\frac{100a + 10a + a}{3a} = \frac{111a}{3a} = \frac{111}{3} = 37$$

Dieser sowie der nächste Trick eignen sich abermals dazu, sie nicht nur einer, sondern mehreren Personen gleichzeitig vorzuführen, wobei individuell andere Ziffern gewählt werden können. Beispielsweise könnten die Anweisungen an eine Schulklasse folgendermaßen lauten:

- Holt euren Taschenrechner heraus und sucht euch eine Ziffer zwischen 1 und 9 aus.
- Gebt diese Ziffer dreimal in euren Taschenrechner ein, sodass er euch zum Beispiel die Zahl 111, 222, oder 333 anzeigt.
- Nun berechnet im Kopf die Ziffernsumme, das bedeutet, alle drei Ziffern zu addieren.
- Jetzt dividiert ihr die Zahl, die ihr im Taschenrechner stehen habt, durch diese Ziffernsumme.

Manch ein Kind mag darüber staunen, dass die ganze Klasse 37 als Ergebnis erhalten hat.

[18] Als *Schnappszahl*, bzw. *repdigit* (kurz für: repeating digit) oder *monodigit* wird eine mehrstellige natürliche Zahl bezeichnet, die ausschließlich aus identischen Ziffern besteht.

Bei *Four Digit Foresight* soll irgendeine vierstellige Zahl gewählt werden, worauf der Zauberer der Mitspielerin versichern kann, sie habe eine Zahl mit starker magischer Energie gewählt. Der Effekt soll an dieser Stelle vorweggenommen werden: Anschließend an einige Rechenanweisungen wird die selbe Zahl wie zu Beginn zurückgeliefert.

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ einstellig die Ziffern der von der Zuschauerin gewählten, vierstelligen Zahl $1000a + 100b + 10c + d$.

Anweisungen	**Beispiel**	**Die Mathematik**
Wähle eine vierstellige Zahl.	8913	*[abcd]* $= 1000a + 100b + 10c + d$
Notiere die erste (linke) Ziffer. (Gemeint ist die Tausenderstelle.)	8	a
Schreibe die ersten beiden Ziffern als Zahl darunter.	89	$10a + b$
Schreibe die ersten drei Ziffern als Zahl darunter.	891	$100a + 10b + c$
Addiere diese drei Zahlen.	$= 988$	$= 111a + 11b + c$
Multipliziere diese Summe mit 9.	$988 \cdot 9 = 8892$	$= 999a + 99b + 9c$
Berechne die Ziffernsumme der originalen Zahl	$8 + 9 + 1 + 3 = 21$	$a + b + c + d$
Addiere die letzten beiden Werte. (Produkt und Ziffernsumme)	$8892 + 21 = 8913$	$= 1000a + 100b + 10c + d$

Auch wenn ich zugeben muss nicht der größte Fan dieses Zaubertricks zu sein, da er für einen mäßig spannenden Effekt vergleichsweise viele Rechnungen, sowie eines Taschenrechners beim Gegenüber bedarf, kann es interessant sein, die arithmetischen Operationen anhand der Algebra in der rechten Spalte zu verfolgen. Dies könnte einem angehenden Mathemagier helfen, eigene Tricks dieser Art zu konstruieren.

1.7 Kommentare im Hinblick auf die folgenden Kapitel

Im Vorfeld des Hauptteils dieser Arbeit möchte ich in aller Kürze auf die besprochenen Auswahlkriterien zu sprechen kommen, die in Kapitel 1.4 und 1.5 begründet wurden, und diese zusammenfassen.

Nicht in die enge Auswahl geschafft haben es Kartentricks, die auf speziellen Mischtechniken, vorbereiteten Decks oder Fingerfertigkeit basieren. Ebenso aussortiert wurden Puzzles bzw. Rätsel, Schnellrechentricks, *Memory-Tricks* (Gedächtnis-/Merktricks), sowie die meisten geometrischen Täuschungen und topologischen Zaubereien.
Außerdem war es von Bedeutung, die gewählten mathematischen Tricks ohne einer Menge von Utensilien und große Vorbereitung durchführen zu können.

Die wichtigsten positiven Auswahlkriterien befinden sich auf zwei gleichwertigen Ebenen, und gehen weit über den Lehr- und Lernkontext hinaus. Wie im Einführungskapitel erwähnt, begründet sich diese Arbeit ebenfalls in dem Versuch, zur Popularisierung der Mathematik im Allgemeinen - und nicht nur in der Schule - beizutragen.

- Ebene 1: Der „Wow-Effekt".
  Es wurde versucht Tricks zu wählen, die eine Person oder ein Publikum möglichst begeistern, verblüffen, oder vielleicht auch mathematisch inspirieren und neugierig machen.
- Ebene 2: Der mathematische Hintergrund.
  Diese Ebene lässt sich in 3 Dimensionen gliedern. Hierbei handelt es sich um Zaubertricks, die ...
  - ... mathematisch zwar nicht sehr anspruchsvoll sind, sich aber dennoch durch den Wow-Effekt für die Auswahl legitimiert haben.
  - ... sich bezüglich der mathematischen Komplexität im Mittelfeld befinden, und außerdem einen gewissen Interessantheitsgrad aufweisen. Beispielsweise durch clevere kurze Beweise, verblüffende Eigenschaften von Zahlen, eine kreative „Out of the Box"-Idee, einen besonders tollen visuellen Effekt, Engagement mit dem Publikum, oder ähnliche Aspekte.
  - ... einer hochkomplexen Mathematik im Hintergrund bedürfen und dadurch hervorstechen.

Zu guter Letzt möchte ich nochmals darauf hinweisen, dass, obwohl Empfehlungen abgegeben werden, wie man die Tricks präsentieren könnte, auf diesem Gesichtspunkt nicht das Hauptaugenmerk liegt. Es sei dem/der Leser*in überlassen, die Präsentation der mathematischen Effekte durch eigene Kreativität zu adaptieren, um bessere oder andere Wirkungen beim Publikum zu erzielen. Diesbezüglich möchte ich noch einen Punkt erwähnen, der mir während der eigenen Recherche aufgefallen ist: Egal wie umfangreich und exakt der Ablauf eines Tricks von dem/der Autor*in beschrieben wird, ein eigenes Probieren oder eine Vorführung sagen mehr als tausend Worte.

2 Der fachmathematische Kern: Das Dreifarbendreieck

Entdeckt wurde der faszinierende Effekt dieses Tricks von dem englischen Mathematiker Steve Humble im Rahmen seiner Aktivitäten zur Popularisierung der Mathematik. Die mathematische Untersuchung und Beschreibung fand in Kollaboration mit Ehrhard Behrends - einem deutschen Mathematiker - statt. Die Ergebnisse wurden ursprünglich im Jahr 2013 als *Triangle Mysteries* veröffentlicht[19]. Ein weiteres Mal wurden sie 2017 mit dem Namen *Magische Dreiecke und Primfaktoren von Binomialkoeffizienten* in einem Buchkapitel von Behrends überarbeitet und publiziert.[20]

Um diesen Zaubertrick vorführen zu können, bedarf es einer größeren Anzahl von Plättchen aus drei verschiedenen Farben, oder einem Blatt Papier und drei Buntstiften. Im Rahmen der Beschreibung dieses Tricks wird von roten, gelben, und blauen Plättchen (bzw. Elementen) gesprochen.

Der Zauberer bittet eine Mitspielerin, eine horizontale Startreihe aus 10 Plättchen ihrer Wahl zu legen. Das könnte beispielsweise so aussehen:

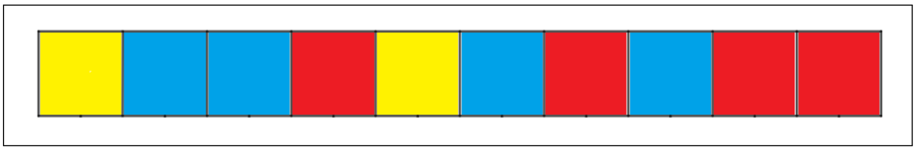

Abbildung 5: Eine zufällige Startreihe.

Zu diesem Zeitpunkt ist es dem Magier bereits möglich eine Vorahnung abzugeben, oder diese verdeckt auf einen Zettel zu schreiben. In diesem Fall wäre die Prognose „Blau“. Nun folgen weitere Anweisungen an die Mitspielerin. Diese Regeln erlauben ihr das Legen einer horizontal gespiegelten (also „verkehrten“) Pyramide, bzw. Dreiecks. Jede Reihe besteht aus einem Element weniger als die vorhergehende, und je zwei Elemente erzeugen das darunterliegende nach einer der folgenden Lege- bzw. Entwicklungsvorschrift:

- Haben zwei Plättchen die gleiche Farbe, so hat das generierte Plättchen ebenfalls diese Farbe.

[19]Vgl. Behrends & Humble, 2013.
[20]Vgl. Behrends, 2017, S. 47-59.

- Sind die zwei Plättchen verschiedenfarbig, so erhält das neue Plättchen die dritte Farbe.

Das nach diesen Regeln angefertigte Objekt sieht aus wie in Abbildung 6 illustriert.

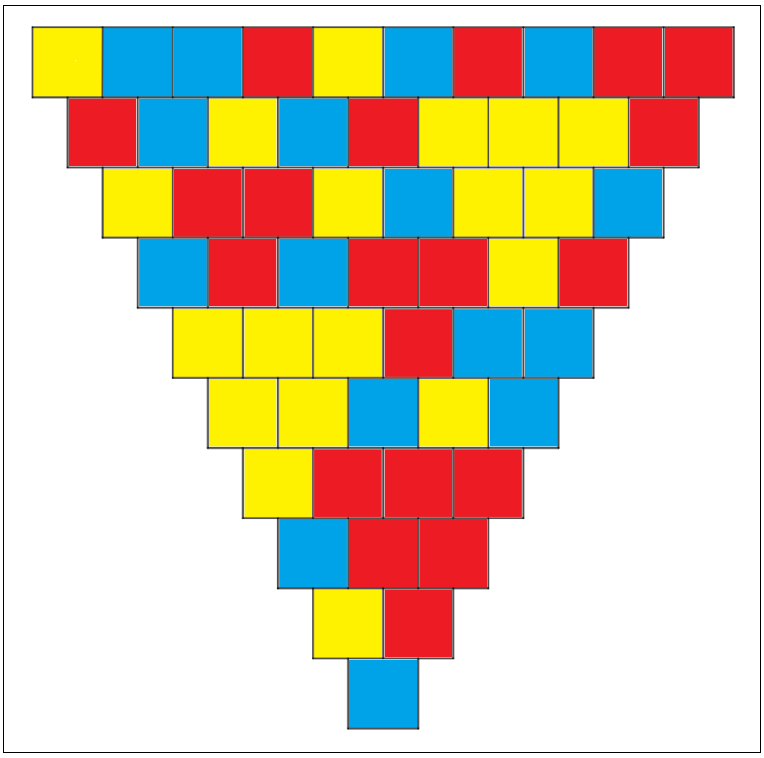

Abbildung 6: Das aus Abbildung 5 resultierende Dreifarbendreieck.

Die Prognose des Zauberers („Blau“) war bezogen auf die Farbe der Spitze des Dreiecks und somit korrekt. Wie konnte er diesen Umstand vorhersagen? Wie schon angedeutet, lässt sich die Farbe der Spitze bereits nach dem Auslegen der Startreihe bestimmen. Die Magie soll an dieser Stelle aufgelöst werden: Es reicht eine Überprüfung der Farben der äußeren Randelemente der Startreihe, also des ersten und des letzten Plättchens, und ein Anwenden der vorher postulierten Regeln. In unserem Fall haben die Randelemente der ersten Reihe die Farben Gelb und Rot. Laut der zweiten Regel würden zwei verschiedenfarbige Elemente die dritte Farbe - also Blau - erzeugen. Und genau diese Farbe hat die Spitze in unserem Beispiel auch.

Funktioniert dieser Zaubertrick immer, also für jede Länge, oder nur für 10 Startelemente? Würden sich die Regeln für mehrere Farben adaptieren lassen? Naiv betrachtet wirkt dieser Trick recht simpel, doch um auf diese und weiterführende Fragen Antworten zu finden, wird sich zeigen, dass es einer umfangreichen mathematischen Untersuchung bedarf.

2.1 Eine naive Illustration der Beweisidee

Bevor in Kapitel 2.2.1 die fachmathematische Beschreibung im Detail beginnt, sollen vorbereitend die grundlegenden Beweisideen erläutert werden.

Einleitend wird die zentrale Konsequenz vorweggenommen, welche die Durchführung des Zaubertricks erlaubt:
Der Trick funktioniert (wie beschrieben) für Plättchen mit drei Farben nur dann, wenn die Anzahl der Elemente der Startreihe der Form $3^s + 1, s \in \mathbb{N}$, d.h. $\{2, 4, 10, 28, ...\}$ entspricht. Außerdem lässt die mathematische Untersuchung die Schlussfolgerung zu, dass sich auch Legevorschriften für eine höhere (oder geringere) Anzahl von Farben finden lassen, die ebenfalls eine *Vorahnung* bezüglich der Farbe der Spitze erlauben. Als Voraussetzung führen Behrends und Humble an, dass die Anzahl der Farben p jedoch prim sein muss, was die erwähnte Form noch näher charakterisiert: $p^s + 1$.

Wie lässt sich dieses Dreieck und die Dynamik der Farben naiv beschreiben?
Farben repräsentieren eine gewisse Ausprägung, bzw. einen unterschiedlichen Informationsgehalt. Zwei Farbplättchen erschaffen auf Basis einer (in diesem Moment noch nicht mathematisch beschriebenen) Verknüpfung ein weiteres darunterliegendes Farbplättchen, das man als erzeugtes Tupel verstehen kann. Da nach der ersten Reihe keine zufälligen Informationen dazukommen, ist das gesamte Dreieck somit ein Erzeugnis von Tupel auf Basis von Informationen aus der ersten Reihe. Anfangs vielleicht nicht ganz intuitiv ist die Tatsache, dass - obwohl jedes Plättchen nur eine Farbe annehmen kann, egal wo es sich im Dreieck befindet - die (Farb-)Informationen von Plättchen aus oberen Reihen bis zu viel tiefer liegenden Plättchen weitergetragen werden. Tatsächlich enthält das Tupel, das die Spitze (bzw. die letzte Reihe) repräsentiert, Informationen von jedem einzelnen Plättchen der Startreihe. Und diese Informationen sind außerdem unterschiedlich stark „gewichtet". Diese Verteilung der Informationen, die im nächsten Abschnitt mathematisch formal beschrieben wird, ist von allergrößter Relevanz, und bildet den Rahmen für die anschließenden Schlussfolgerungen.

Betrachten wir in Abbildung 7 beispielhaft und unabhängig von den Farben, wie die individuellen Ausprägungen von vier Startelementen $x_1, ..., x_4$ weitergetragen werden.

Abbildung 8 unterstreicht den Umstand der unterschiedlichen Gewichtung und illustriert die Einflussnahme der Startplättchen. Elemente, die sich zentraler über einem zukünftigen Endpunkt befinden, sind häufiger in der finalen Codierung enthalten. Die Verteilung erinnert an das Pascal'sche Dreieck, und es liegt die Vermutung nahe, dass ein individueller „Gewichtungsfaktor" in Form des Binomialkoeffizienten vorliegt (Abbildung 9). Diese Vermutung wird im nächsten Abschnitt bewiesen.
Die beschriebene Idee zeigt einen interessanten Kontrast auf. Wir möchten uns in Erinnerung rufen, dass die Regel für den Zauberkünstler besagt, dass nur die Randelemente der ersten Reihe für die Bestimmung der Spitze relevant sind. Das bedeutet, die Plätt-

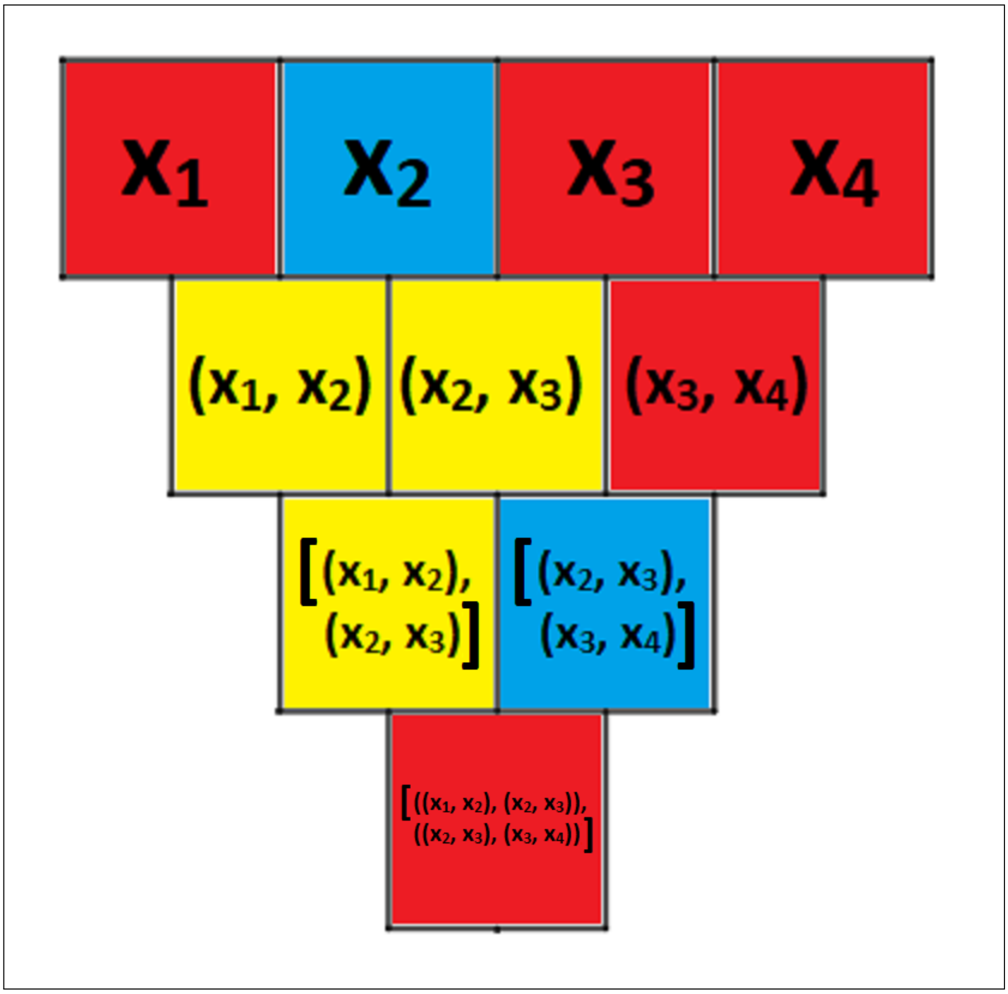

Abbildung 7: Die Entstehung von Tupel. Die Informationen von x_2 und x_3 sind häufiger im Spitzen-Element enthalten als die Informationen von x_1 und x_4.

chen mit der geringsten Gewichtung (da sie am wenigsten „zentral" liegen), bestimmen das Ergebnis. Alle anderen Einflüsse eliminieren sich, bzw. heben sich scheinbar aus irgendeinem Grund auf (Abbildung 10). Der Grund ist ein faszinierendes Zusammenspiel zwischen Primzahlen und Binomialkoeffizienten unter gewissen Voraussetzungen. Der Zusammenhang ist von so großer Bedeutung, dass ihm Behrends, wie bereits erwähnt, den Namen seines Buchkapitels gewidmet hat.

Es drängt sich aber auch eine andere Frage auf: Wie lässt sich die Weitergabe der Ausprägungsinformationen in der Entwicklung der Tupel mathematisch sinnvoll beschreiben? Hierfür wird gezeigt, dass sich $(\mathbb{Z}_p, +)$, die Restklassengruppe modulo p, anbietet - für das gegenständliche Beispiel also $(\mathbb{Z}_3, +)$.

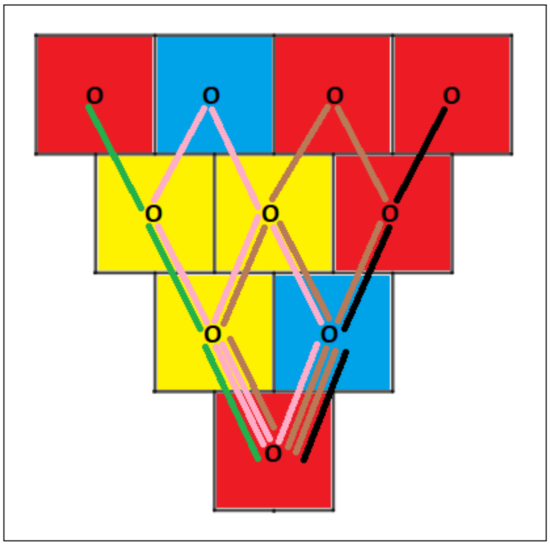

Abbildung 8: Die Informationsverteilung.

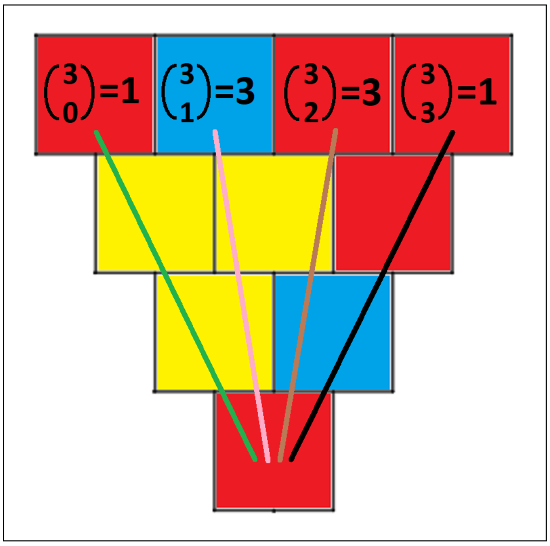

Abbildung 9: Die Binomialkoeffizienten.

Ein weiteres bedeutsames Thema für diesen Trick ist die Legevorschrift für die Erzeugung der Plättchenfarbe. Obwohl diese Regeln bereits sehr früh erwähnt wurden, sind sie eines der letzten - wenn nicht das letzte - Ergebnis der mathematischen Untersuchung.

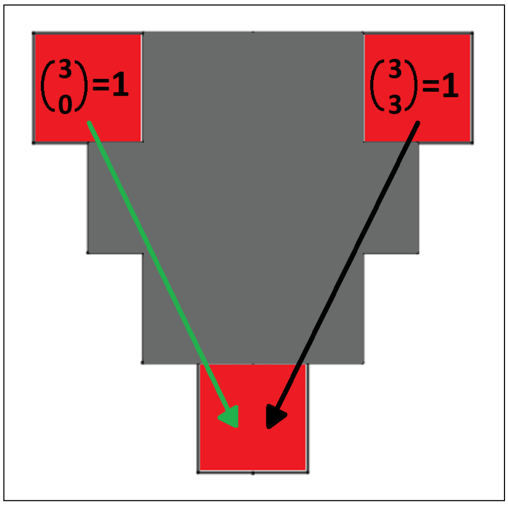

Abbildung 10: Der Effekt: Die Nullifizierung fast aller Beiträge.

Überleitend soll nochmals über die Zusammenarbeit von Steve Humble und Ehrhard Behrends gesprochen werden. Ursprünglich gingen diese beiden Mathematiker bei der Ergründung des Tricks mit der Vermutung ans Werk, dass $n = 10$ (für die Startreihe) *günstig* sei. Gegenbeispiele, bei denen das Prinzip nicht funktionierte, waren zahlreich und schnell gefunden. Das ursprüngliche Ziel ihrer Arbeit war es also, weitere *günstige* Fälle für die Anzahl der Startelemente - falls diese existieren - zu finden, und die Zusammenhänge und Begründungen in weiterer Folge mathematisch zu beschreiben. (vgl. Behrends, 2017, S. 47-49)

2.2 Die mathematische Beschreibung

2.2.1 Anfängliche Überlegungen und Vorbereitungen

Angenommen, die nicht leere Menge $\Delta = \{a, b, c, ...\}$ repräsentiert eine Menge von unterschiedlichen Farben, dann bedarf es einerseits einer Abbildung für die Tupelgenerierung, und außerdem einer Vorschrift für die Beschreibung der entstehenden Zeilen. (vgl. Behrends, 2017, S. 50f)

Definition 1.1: Sei $\gamma : \Delta \times \Delta \to \Delta$ eine Abbildung auf sich selbst.

Definition 1.2: Für ein $n \in \mathbb{N}$ (die Anzahl der Elemente in der ersten Zeile) definieren wir die Vorschrift $\Phi_r(x_1, ..., x_r)$, $\Phi_r : \Delta^r \to \Delta^{r-1}$ für $r = n, n-1, ..., 2$. Die $(r-1)$-Tupel in $\Phi_r(x_1, ..., x_r) = (y_1, ..., y_{r-1})$ werden dargestellt durch $y_i := \gamma(x_i, x_{i+1})$, für $i = 1, ..., r-1$.

Die mehrmalige Verkettung von Φ mit sich selbst, nämlich $\Psi_n := \Phi_2 \circ \cdots \circ \Phi_{n-1} \circ \Phi_n$ beschreibt eine Abbildung von der ausgänglichen Startreihe auf das letzte Element (die „Spitze“), also $\Delta^n \to \Delta$. Dies hilft nun, die Voraussetzung eines für diesen Zaubertrick *geeigneten* n mathematisch zu formulieren.

Definition 1.3: Gilt $\gamma(x_1, x_n) = \Psi_n(x_1, ..., x_n)$ für ein $n > 2$, so nennen wir n eine γ-geeignete Zahl.

Nun soll die bisher unkonkrete Abbildung γ präzisiert werden:

Definition 1.4: Sei $\Delta = G$ die kommutative Gruppe mit additiver Gruppenoperation $(G, +)$. Dann definieren wir die γ-Abbildungen

$$\gamma^+(x, y) := x + y$$
$$\gamma^-(x, y) := -x - y.$$

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass dabei besonders an die kommutative Restklassengruppe modulo m mit der Addition modulo m ($\in \mathbb{N}$), $(\mathbb{Z}_m, +)$ gedacht wird. Für diese beiden Abbildungen möchten wir weiters die γ^+-geeigneten und γ^--geeigneten n finden und beschreiben.

Im Vorfeld bedarf es jedoch einiger Feststellungen über Binomialkoeffizienten. Im Fokus der Betrachtung liegen Binomialkoeffizienten der Form $\binom{p}{k}$ für eine Primzahl p. Die erste Frage, ob p alle Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$ für $k = 1, ..., p-1$, $k \in \mathbb{N}$, teilt, ist leicht zu beantworten. Da

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

gilt, $k < p$ ist, und p aufgrund seiner Primzahleneigenschaft durch keinen Faktor $k = 1, ..., p-1$ des Nenners teilbar ist bzw. gekürzt werden kann, bleibt p garantiert als Faktor im Zähler erhalten, was allgemein eine Teilbarkeit von $\binom{p}{k}$ durch p erlaubt. Die gleiche Behauptung für eine Teilbarkeitsmöglichkeit von $\binom{p^s}{k}$ $(s \in \mathbb{N})$ durch p ist jedoch deutlich schwieriger zu beweisen. Hierfür stützen wir uns im Rahmen dieser Vorbereitung auf einige Aspekte und Schlussfolgerungen des Satzes von Balak Ram (1909, S. 39-43), die weiters von großer Hilfe sein werden, und Behrends (2017, S. 51) folgendermaßen formuliert:

Satz 1.1: Sei p eine Primzahl, dann teilt p für beliebige $s \in \mathbb{N}$ alle Binomialkoeffizienten $\binom{p^s}{k}$, $k = 1, ..., p^s - 1$.

Satz 1.2: Sei p wieder eine Primzahl. Für jedes $s \in \{2, 3, ...\}$ gibt es ein $k \in \{1, ..., p^s - 1\}$, sodass p^2 nicht in $\binom{p^s}{k}$ aufgeht.

Satz 1.3: Es sei p eine Primzahl, und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq p$. Angenommen, p teilt alle $\binom{m}{k}$ für $k = 1, ..., m - 1$. Dann ist $m = p^s$ für ein geeignetes $s \in \mathbb{N}$.

Satz 1.4: Es sei $m > 1$, und der größte gemeinsame Teiler T der $\binom{m}{k}$, $k = 1, ..., m-1$, sei größer als 1. Dann gibt es eine Primzahl p und ein s, sodass $m = p^s$ gilt. Dann gilt $T = p$.

2.2.2 Die Entwicklung der Gewichtung: Die Binomialkoeffizienten für γ^+

Wir nähern uns nun dem Hauptteil der Überlegungen. (vgl. Behrends, 2017, S. 52)

Für die kommutative Gruppe $(G, +)$, $x \in G$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei $k \cdot x$ folgendermaßen definiert: Sei $0 \cdot x$ das neutrale Element, für $k > 0$ sei es die aus k Summanden bestehende Summe $x + \cdots + x$, und für $k < 0$ (also $-k$) gilt $k \cdot x := -((-k) \cdot x)$. Auf die Beweise für die Erfüllung der Gruppenaxiome bzw. einfachen Rechenregeln (siehe dazu beispielsweise Schichl & Steinbauer, 2009, S. 211f) wird an dieser Stelle verzichtet.

Die Untersuchung wird nun für eine der beiden ursprünglich formulierten γ-Abbildungen begonnen:

$$\gamma^+(x, y) := x + y$$

Für ein bekanntes $n \in \mathbb{N}, n > 1$, und die beliebigen Gruppenelemente $x_1, ..., x_n \in G$, soll nun, ähnlich wie in Abbildung 7 naiv illustriert wurde, $\Psi_n(x_1, ..., x_n)$ berechnet werden.

$$(x_1, ..., x_n) \qquad \text{(Startreihe)}$$
$$\Phi_n(x_1, ..., x_n) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, ..., x_{n-1} + x_n) \qquad \text{(Reihe 2)}$$
$$\Phi_{n-1} \circ \Phi_n(x_1, ..., x_n) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + 2x_3 + x_4, ..., x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n) \qquad \text{(Reihe 3)}$$

Und so weiter.

Jede weitere Reihe des „Dreiecks“ enthält laut Definition ein Tupel weniger als die vorhergehende, und die Fortführung endet wie erwünscht in der n-ten Reihe durch ein letztes beschriebenes Tupel (bzw. die „Spitze“) $\Psi_n = \Phi_2 \circ \cdots \circ \Phi_{n-1} \circ \Phi_n$.

Um das Argument zu unterstreichen, dass die entstehenden Koeffizienten der Ausgangselemente innerhalb der Tupel sehr an das Pascal'sche Dreieck und dessen Binomialkoeffizienten erinnern, soll noch zusätzlich das erste Tupel der vierten Reihe berechnet werden. Wir erwarten für die Koeffizienten: $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$, und $\binom{3}{3} = 1$. Die Berechnung liefert

$$\gamma^+(x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + 2x_3 + x_4) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4.$$

Die Erwartung stimmt mit dem Ergebnis überein. Um zu zeigen, dass diese Vermutung allgemein (bzw. für alle Tupel) gilt, wird folgende Proposition formuliert und anschließend bewiesen: (vgl. Behrends, 2017, S. 52f)

Proposition 1: Werden die Tupel $(x_1, ..., x_n)$, $\Phi_n(x_1, ..., x_n)$, $\Phi_{n-1} \circ \Phi_n(x_1, ..., x_n)$, ... in n-Zeilen untereinander angeordnet, wobei die erste Zeile aus n, die zweite Zeile aus $n-1$, usw. Elementen besteht, und sich in der n-ten Zeile als einziges Element $\Psi_n(x_1, ..., x_n)$ befindet, entspricht das r-te Element der k-ten Zeile der Form

$$x_r + \binom{k-1}{1} x_{r+1} + \binom{k-1}{2} x_{r+2} + \cdots + \binom{k-1}{k-2} x_{r+k-2} + x_{r+k-1}$$

für $k \in \{2, ...n\}$ und $r \in \{1, ..., n-k+1\}$. Insbesondere gilt für das letzte Element:

$$\Psi_n(x_1, ..., x_n) = x_1 + \binom{n-1}{1} x_2 + \binom{n-1}{2} x_3 + \cdots + \binom{n-1}{n-2} x_{n-1} + x_n.$$

Beweis von Proposition 1: Der Beweis wird per Induktion geführt. Der Induktionsanfang wurde für die Elemente der Zeilen $k = 2$ und $k = 3$ bereits im letzten Absatz berechnet und erfüllt.
Die Entstehungsvorschrift der Tupel besagt laut Definition, dass das r-te Element der Zeile $k+1$ die Summe des r-ten und $(r+1)$-ten Elementes der vorhergehenden, darüberliegenden Zeile, also der k-ten Zeile, ist. Diese Summe bestimmen wir nun, um den Induktionsschritt zu vollführen. Der Augenmerk liegt natürlich auf der Entwicklung der Faktoren, also der Binomialkoeffizienten der „zusammengehörigen“ x_{r+i}. Zur besseren Veranschaulichung seien die $(r, r+1, r+2, ..., r+k-1)$-Beiträge der beiden Summanden einander vertikal ausgerichtet.[21]

[21] Falls sich der/die Leser*in wundert, warum die Beiträge des Elementes r nicht wie laut Proposition 1 bis höchstens x_{r+k-1} sondern nur bis x_{r+k-2} angeführt werden, folgendes Kommentar: Wir wissen von dem zuerst angeführten r-ten Element, dass es höchstens das vorletzte Element der Zeile sein kann (da danach noch Element $r+1$ folgt). Daher kann es - im Unterschied zu dem $r+1$-ten Element das rechts davon steht - niemals einen Beitrag des „rechts äußersten“ Elementes der Ausgangsreihe erhalten. Analog kann das Element $r+1$ niemals einen Beitrag von x_r erhalten, wie die vertikale Formatierung zeigt. Um also einerseits im Rahmen dieser beitragsadäquaten Formatierung konstant zu bleiben, und andererseits uns bekannte Informationen zu integrieren, wurde die Form der Proposition für das „linke Element“ r adaptiert.

$$x_r + \binom{k-1}{1}x_{r+1} + \binom{k-1}{2}x_{r+2} + \binom{k-1}{3}x_{r+3} + \cdots + x_{r+k-2} \tag{E. r}$$

$$x_{r+1} + \binom{k-1}{1}x_{r+2} + \binom{k-1}{2}x_{r+3} + \cdots + \binom{k-1}{k-2}x_{r+k-2} + x_{r+k-1} \tag{E. r+1}$$

An den konkreten Fällen der Beiträge x_{r+2} und x_{r+3} lässt sich sehr leicht erkennen, dass bei der allgemeinen Summenbildung der entstehende Faktor jedes individuellen x_{r+i} die Summe aus $\binom{k-1}{i}$ und $\binom{k-1}{i-1}$ ist. Da bekannterweise

$$\binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1} = \binom{k}{i}$$

gilt[22], wurde der Induktionsschritt für die Zeilenentwicklung $k \to (k+1)$ und unsere Vermutung bezüglich der Faktoren somit bewiesen.

□

Bevor der Satz bezüglich den γ^+-geeigneten n formuliert und bewiesen wird, gibt es einige weitere vorbereitende Überlegungen zu tätigen: (vgl. Behrends, 2017, S. 53)

Für die Elemente unserer kommutativen Gruppe, $x \in G$, kann man die Koeffizientenmenge Δ_x aller $a \in \mathbb{Z}$ betrachten, wobei a die Binomialkoeffizienten repräsentiert. Im Fokus der Untersuchung steht ein Δ_x wofür $ax = 0$ gilt, da überlegt wird, inwiefern (oder unter welchen Umständen) Summanden „eliminiert“, bzw. Beiträge nullifiziert werden. Für dieses Δ_x handelt es sich um ein Ideal im Ring $\mathbb{Z}$, und da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, existiert eine Zahl $b_x \in \mathbb{N}_0$, so dass $u \cdot b_x = a$, $u \in \mathbb{N}$, gilt (d.h.: Δ_x aus allen Vielfachen von b_x besteht). Bezüglich der Definitionen für die Begriffe Ideal, Ring, und Hauptidealring soll auf Kapitel 2 aus Boschs *Algebra* (2009) verwiesen werden.
Wir betrachten nun abermals ein beliebiges $x \in G$, und definieren eine „Startreihe“ $(x_1, ..., x_n)$ als $(0, ..., 0, x, 0, ..., 0)$ mit x an der k-ten Stelle, für ein $k \in \{2, ..., n-1\}$. Hierbei wird die Idee aus Definition 1.3 aufgegriffen. Wenn lediglich die Elemente x_1 und x_n Einfluss auf Ψ_n haben (sollen), ist die Frage interessant, unter welchen Voraussetzungen alle anderen Beiträge, also die Beiträge von x_2 bis x_{n-1}, verschwinden. Es gilt nun:

$$\Psi_n(x_1, ..., x_n) = \binom{n-1}{k-1}x.$$

Für ein γ^+-geeignetes n muss also

$$\Psi_n(x_1, ..., x_n) = \binom{n-1}{k-1}x = 0 = \gamma^+(0,0)$$

[22]Die lässt sich auf mehrere Arten beweisen, beispielsweise algebraisch durch Einsetzen der Definition des Binomiakoeffizienten.

gelten, was die Forderung impliziert, dass alle Koeffizienten $\binom{n-1}{1}, ..., \binom{n-1}{n-2}$ des zweiten bis vorletzten Elementes in Δ_x liegen müssen.

2.2.3 Finale Schlussfolgerungen für γ^+

Alle bisher getroffenen Überlegungen werden nun in dem wichtigsten Satz dieses Kapitels zusammenfließen. (vgl. Behrends, 2017, S. 53f)

Satz 2: Sei $(G, +)$ eine kommutative Gruppe, die nicht nur aus dem neutralen Element besteht.

Satz 2.1: Sei p eine Primzahl, sodass $px = 0$ für alle $x \in G$ gilt. Dann stimmen die γ^+-geeigneten Zahlen n mit den Zahlen $n = p^s + 1$ (mit $s \in \mathbb{N}$) überein.

Satz 2.2: Ein $n > 2$ sei γ^+-geeignet. Dann gibt es eine Primzahl p und ein s, sodass erstens $n = p^s + 1$ ist, und zweitens $px = 0$ für jedes $x \in G$ gilt.

Satz 2.3: Wenn es keine Primzahl p gibt, sodass alle $px = 0$ sind, so gibt es keine γ^+-geeigneten n. Insbesondere gibt es γ^+-geeignete n für die Restklassengruppe $\mathbb{Z}_m$ genau dann, wenn m eine Primzahl p ist.

Beweis von Satz 2.1: Hat n die Form $p^s + 1$, dann teilt p wegen Satz 1.1 alle Koeffizienten $\binom{n-1}{1}, ..., \binom{n-1}{n-2}$. Daher gilt $\binom{n-1}{k}x = 0$ für alle x und $k = 1, ..., n-2$. Die Schlussfolgerung erfüllt die Forderung aus Definition 1.3 für ein geeignetes n:

$$\begin{aligned}\Psi_n(x_1, ..., x_n) &= x_1 + \binom{n-1}{1}x_2 + \binom{n-1}{2}x_3 + \cdots + \binom{n-1}{n-2}x_{n-1} + x_n \\ &= x_1 + x_n \\ &= \gamma^+(x_1, x_n)\end{aligned}$$

Für den Fall, dass ein γ^+-geeignetes n vorgegeben ist, muss gezeigt werden, dass n der Form $p^s + 1$ entspricht. Da Satz 2.1 $px = 0$ voraussetzt, und der Fall für $x = 0$ trivial ist, nehmen wir $x \neq 0$ an. Wie in den vorbereitenden Überlegungen zu Satz 1.5 dargelegt, enthält die Koeffizientenmenge Δ_x (die Menge aller $ax = 0$) alle Vielfachen einer Zahl b_x. Da p eine Primzahl ist, kann sie kein Vielfaches einer anderen natürlichen Zahl außer 1 und sich selbst sein, was zu der Schlussfolgerung führt, dass $b_x = p$ sein muss, und p somit ein Teiler von a ist.

$$ax = 0, \quad ub_x = a, \quad b_x = p \quad \Rightarrow \quad up = a \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{a}{p}$$

Die finale Schlussfolgerung der Vorbereitung hat ausgesagt, dass die Koeffizienten $\binom{n-1}{1}, ..., \binom{n-1}{n-2}$ für eine n_{γ^+}-Eignung in Δ_x liegen müssen, und aufgrund der eben geführten Überlegungen ebenfalls durch p teilbar sein müssen. Um diese Forderung zu erfüllen wenden wir Satz 1.3 an, der besagt, dass dies nur für den Fall $n - 1 = p^s \Leftrightarrow n = p^s + 1$ gilt.

$\square$

Beweis von Satz 2.2: Ist n γ^+-geeignet, und $x \in G$, $x \neq 0$, dann sind alle Koeffizienten aus Δ_x ein Vielfaches von b_x, und es existiert somit ein größter gemeinsamer Teiler der Form $v \cdot b_x$, $v \in \mathbb{N}$. Da $\binom{n-1}{1} > 0 \Rightarrow b_x \neq 0$ gilt, und b_x aufgrund von $x \neq 0$ nicht 1 ist, ist der ggT folglich ebenfalls größer als 1. Die weitere Argumentation übernimmt Satz 1.4, und der Beweis von Satz 2.1.

$\square$

Beweis von Satz 2.3: Dieser Satz kann aus Satz 2.2 abgeleitet werden:
Verkürzt formuliert besagt Satz 2.2, dass im Falle eines γ^+-geeigneten $n > 2$ eine Primzahl p existiert, sodass $px = 0$ für jedes $x \in G$ gilt.
Eine logische Verneinung dieser Aussage führt zu folgender Feststellung:
Wenn es keine Primzahl p gibt, sodass $px = 0$ für jedes $x \in G$ gilt, so gibt es keine γ^+-geeigneten n.
Dies war für den ersten Teil von Satz 2.3 zu zeigen.
Eine Kombination von Satz 2.2 mit dem soeben abgeleiteten ersten Teil von 2.3 bestätigt die Behauptung, die den zweiten Teil aus Satz 2.3 ausmacht:
Insbesondere gibt es γ^+-geeignete n für die Restklassengruppe $\mathbb{Z}_m$ genau dann, wenn m eine Primzahl p ist.

$\square$

2.2.4 Analoge Überlegungen für γ^-

Der Beweis für $\gamma^+(x, y) = x + y$ ist somit abgeschlossen, und wir können unsere Aufmerksamkeit auf die Abbildung

$$\gamma^-(x, y) = -x - y$$

richten (vgl. Behrends, 2017, S. 54f). Grundsätzlich wird gleich vorgegangen wie zuvor, da sich nur die Vorzeichen ändern. Es bedarf dennoch einiger ergänzender Begründungen. Für $\gamma^-(x, y)$ entwickelt sich die Struktur folgendermaßen:

$$\Psi_n(x_1, ..., x_n) = (-1)^{n-1}(x_1 + \binom{n-1}{1}x_2 + \binom{n-1}{2}x_3 + \cdots + \binom{n-1}{n-2}x_{n-1} + x_n).$$

Aufgrund von Definition 1.3 ist ein n γ^--geeignet, falls

$$\Psi_n(x_1, ..., x_n) = \gamma^-(x_1, x_n) = -x_1 - x_n$$

gilt. Folgende zwei Argumente sollen ausreichend für die Erklärung sein, dass sich Satz 2 analog für $\gamma^-(x, y) = -x - y$ beweisen lässt:

Erstens, bezüglich der zeilenweise alternierenden Elemente aufgrund von $(-1)^{n-1}$:
Für den Fall $p = 2$ ist $n = p^s + 1$ immer ungerade (für alle $s \in \mathbb{N}$), was eine ungerade Zeilenanzahl der „Pyramide" zur Folge hat. Dass also alle Beiträge aufgrund der Alternierung in Zeile zwei negativ, in Zeile drei positiv, in Zeile vier negativ, etc. sind, erscheint problematisch, da für eine ungerade Zeilenanzahl jedenfalls

$$\Psi_n(x_1, ..., x_n) = x_1 + x_n \neq -x_1 - x_n$$

gilt, was offensichtlich keine allgemeine Eignung für n bezüglich γ^- zulässt. Kurz gesagt: Ungerade n erzeugen eine Nichterfüllung der Eignungsvoraussetzung aufgrund der Vorzeichen. Tatsächlich gilt für den Fall $p = 2$ für alle $x \in G$ jedoch $\gamma^+(x, y) = \gamma^-(x, y)$, was das scheinbare Problem der Vorzeichen bei der Tupelentwicklung zunichtemacht.[23]
Für den Fall $p > 2$ ist $n = p^s + 1$ immer gerade, und das eben erwähnte, durch die Alternierung entstandene Vorzeichenproblem tritt nicht auf. Die Verknüpfung von x_1 und x_n erfüllt also (äquivalent wie für γ^+) die Forderung für ein γ^--geeignetes n.

Zweitens, bezüglich der Nullifizierung der Beiträge abgesehen von x_1 und x_n:
Die Koeffizienten $\binom{n-1}{1}, ..., \binom{n-1}{n-2}$ liegen nach wie vor in Δ_x, und werden durch p geteilt. $\square$

2.2.5 Die Verallgemeinerung für $\alpha x + \beta y$

Nachdem die Fälle γ^+ und γ^- für eine Tupelbildungsvorschrift untersucht wurden, kann man einen allgemeineren Fall für eine Abbildung γ einer kommutativen Gruppe $(G, +)$ betrachten. (vgl. Behrends, 2017, S. 55)

Für ein $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ untersuchen wir den gegenständlichen Fall für

$$\gamma_{\alpha,\beta} : G \times G \to G, \gamma_{\alpha,\beta}(x, y) := \alpha x + \beta y.$$

Unsere bisher untersuchten γ^+ und γ^- waren Spezialfälle dieser Verallgemeinerung, nämlich $\gamma_{1,1}$ und $\gamma_{-1,-1}$. Da später auf die selben Argumente wie in den vorher behandelten Fällen zurückgegriffen werden kann, soll der Beginn etwas näher ausgeführt werden. Da es nicht trivial ist, zu sehen, dass n für den Fall $p^s + 1$ $\gamma_{\alpha,\beta}$-geeignet ist, liegt der Fokus auf der Frage, wie sich die Koeffizienten bei der Tupelbildung für ein $\gamma_{\alpha,\beta}$ entwickeln.

[23] Dies soll naiv anhand eines Beispieles für $\mathbb{Z}_2$, die Restklassengruppe modulo 2, demonstriert werden. Ein Vergleich aller möglicher Tupel für beliebige $x, y \in G$ zeigt, dass $\gamma^+(x, y) = \gamma^-(x, y)$ gilt.

$$\gamma^+(x,y): \quad 0+0 \equiv 0 \pmod 2, \quad 1+0 \equiv 1 \pmod 2, \quad 0+1 \equiv 1 \pmod 2, \quad 1+1 \equiv 0 \pmod 2$$
$$\gamma^-(x,y): \quad -0-0 \equiv 0 \pmod 2, \quad -1-0 \equiv 1 \pmod 2, \quad -0-1 \equiv 1 \pmod 2, \quad -1-1 \equiv 0 \pmod 2$$

Satz 3: Es sei p eine Primzahl, sodass $px = 0$ für alle $x \in G$ ist. Dann gilt: Alle Zahlen der Form $n = p^s + 1$ sind $\gamma_{\alpha,\beta}$-geeignet.

Beweis von Satz 3: Um die Auswirkung der Koeffizienten α und β auf die Gewichtung beschreiben und analysieren zu können, bedarf es einer kurzen Vorbereitung.

Der kleine Satz von Fermat[24] formuliert für die Primzahl p und ein $v \in \mathbb{Z}$ die Kongruenz $v^p \equiv v \pmod{p}$. Aus der Umformung zu $v^p - v \equiv 0 \pmod{p}$ ist klar ersichtlich, dass $v^p - v$ jedenfalls durch p teilbar ist.
Wir können dies für unseren Fall benutzen, und diese Form als Koeffizient für ein beliebiges $x \in G$ als $(\alpha^p - \alpha)x = 0$ anschreiben. Die Idee und der Zweck dahinter wird bald ersichtlich. Ausmultipliziert erhalten wir $\alpha^p x - \alpha x = 0$, und weiters umgeformt $\alpha^p x = \alpha x$. Ohne der Gleichheit zu schaden erlaubt diese Form (durch ein mehrfaches Anwenden von $\alpha^p = \alpha$) ein weiteres Potenzieren des Exponenten p, und es gilt $\alpha^{p^s} x = \alpha x$ oder entsprechend $\beta^{p^t} x = \beta x$ $(s, t \in \mathbb{N})$. Dies wird in Kürze bei der Vereinfachung von Ψ_n helfen.

Adaptiert man die Koeffizienten der Elemente $x_1, ..., x_n$ von $\Psi_n(x_1, ..., x_n)$ aus Proposition 1 naiv für das gegenständliche $\gamma_{\alpha,\beta}(x, y) := \alpha x + \beta y$, ergibt sich als Formel für das letzte Element

$$\Psi_n(x_1, ..., x_n) = \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}\beta\binom{n-1}{1}x_2 + \alpha^{n-3}\beta^2\binom{n-1}{2}x_3 + \cdots + \alpha\beta^{n-2}\binom{n-1}{n-2}x_{n-1} + \beta^{n-1}x_n.$$

Betrachtet man nun die Exponenten der Basen α und β, lassen sich diese dank der Vorbereitung für den Fall $n = p^s + 1$ stark vereinfachen. Beispielhaft wird durch ein Ersetzen von n aus dem ersten Element $\alpha^{n-1}x_1 = \alpha^{p^s+1-1}x_1 = \alpha^{p^s}x_1 = \alpha x_1$.
Diese Idee „korrigiert" das erste und letzte Element insofern, dass eindeutig zu sehen ist, dass für den Fall $n = p^s + 1$ die Voraussetzung für ein geeignetes n erfüllt ist, da ebenso aufgrund von Satz 1.1 alle Binomialkoeffizienten der mittleren Summanden durch p geteilt werden:

$$\Psi_n(x_1, ..., x_n) = \gamma_{\alpha,\beta}(x_1, x_n).$$

$\square$

2.2.6 Schlussfolgerungen auf Basis der Fachmathematik

Betrachtet man die Ergebnisse genauer, lassen sich mehrere Beispiele für Gruppen nennen, welche die Voraussetzungen von Satz 2 und Satz 3 erfüllen, bzw. für γ^+, γ^- und $\gamma_{\alpha,\beta}$ zulässig sind. Wie bereits zu Beginn des Kapitels und auch an mehreren anderen Stellen bemerkt, bietet sich für die Primzahl p die Gruppe $G = \mathbb{Z}_p$ an. Ebenso möglich wären $(\mathbb{Z}_p)^r$ oder beliebige Untergruppen. Nicht zugelassen sind $\mathbb{Z}_m$, für m $\neq$ prim. (vgl. Behrends, 2017, S. 55)

[24] Für dessen formale Definition soll auf Bosch (2009, S. 22) verwiesen werden.

2.3 Die Bedeutung der Mathematik für die Präsentation des Zaubertricks

Die bisher erarbeitete Mathematik kann nun ohne große Probleme in den Kontext des Zaubertricks eingebettet werden. Betrachten wir die Restklassengruppe $\mathbb{Z}_3$ für die Fälle γ^+ und γ^-, und assoziieren wir die Ausprägung $x = 0$ mit der Farbe Rot, $x = 1$ mit Gelb und $x = 2$ mit Blau. Wie würden sich die Farben bei der Tupelgeneration entwickeln? Die Farbkombinationen in der gegenständlichen Tabelle sind nach dem Output sortiert, und es ist zu erkennen, das er sich bei sechs der neun Permutationen unterscheidet. Beispielsweise erzeugt γ^- aus Gelb und Gelb abermals Gelb, wobei γ^+ aus Gelb und Gelb jedoch Blau generiert.

$\gamma^-(x,y) = -x-y$			$\gamma^+(x,y) = x+y$	
$-0-0 \equiv 0$	*Rot* $\circ$ *Rot* $\to$ *Rot*		$0+0 \equiv 0$	*Rot* $\circ$ *Rot* $\to$ *Rot*
$-1-2 \equiv 0$	*Gelb* $\circ$ *Blau* $\to$ *Rot*		$1+2 \equiv 0$	*Gelb* $\circ$ *Blau* $\to$ *Rot*
$-2-1 \equiv 0$	*Blau* $\circ$ *Gelb* $\to$ *Rot*		$2+1 \equiv 0$	*Blau* $\circ$ *Gelb* $\to$ *Rot*
$-1-1 \equiv 1$	*Gelb* $\circ$ *Gelb* $\to$ *Gelb*		$2+2 \equiv 1$	*Blau* $\circ$ *Blau* $\to$ *Gelb*
$-0-2 \equiv 1$	*Rot* $\circ$ *Blau* $\to$ *Gelb*		$0+1 \equiv 1$	*Rot* $\circ$ *Gelb* $\to$ *Gelb*
$-2-0 \equiv 1$	*Blau* $\circ$ *Rot* $\to$ *Gelb*		$1+0 \equiv 1$	*Gelb* $\circ$ *Rot* $\to$ *Gelb*
$-2-2 \equiv 2$	*Blau* $\circ$ *Blau* $\to$ *Blau*		$1+1 \equiv 2$	*Gelb* $\circ$ *Gelb* $\to$ *Blau*
$-0-1 \equiv 2$	*Rot* $\circ$ *Gelb* $\to$ *Blau*		$0+2 \equiv 2$	*Rot* $\circ$ *Blau* $\to$ *Blau*
$-1-0 \equiv 2$	*Gelb* $\circ$ *Rot* $\to$ *Blau*		$2+0 \equiv 2$	*Blau* $\circ$ *Rot* $\to$ *Blau*

Erinnern wir uns an die Legevorschrift, die ganz zu Beginn der Beschreibung des Zaubertricks formuliert wurde. Sie besagt erstens, dass zwei gleiche Farben die selbe Farbe erzeugen, und zweitens, dass zwei unterschiedliche Farben die dritte Farbe hervorbringen. Anhand der Tabelle ist eindeutig zu erkennen, dass diese Regeln auf Basis von $\gamma^-(x,y) = -x-y$ entstehen.

Um Verwirrung zu vermeiden soll nochmals betont werden, dass natürlich beide (bzw. alle) Funktionen - also ebenso γ^+ sowie die Linearkombinationen $\gamma_{\alpha,\beta}$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N})$ - den Zaubertrick ermöglichen, d.h. die Farbe der Spitze lediglich aus den Farben der beiden Randelemente der Startreihe erkennen lassen. Der „Weg" ist jedoch ein „anderer". Die Pyramide entwickelt sich andersfarbig. Eine Implikation dieser faszinierenden Tatsache ist, dass - würde man den Trick mithilfe der Funktion γ^+ durchspielen wollen - natürlich adäquate Legevorschriften formuliert werden müssten. Für γ^- waren diese simpel und leicht zu merken, und daher sehr günstig für den Zaubertrick.

Wie könnten die Legevorschriften für γ^+ denn lauten? Diese müssen sich aus dem rechten Teil der oben angeführten Tabelle ergeben, und könnten beispielsweise so ausgedrückt werden (vgl. Behrends, 2017, S. 57):

- Ist eines der beiden Plättchen rot, dann lege darunter die Farbe des zweiten Plättchens.

Danach bleiben noch vier Fälle übrig, nämlich (G,G)→(B), (B,B)→(G), (G,B)→(R), (B,G)→(R). Deswegen bedarf es noch einer zweiten Regel:

- Ist kein rotes Plättchen dabei, und ...
  - ... beide Plättchen gelb, lege darunter ein blaues.
  - ... beide Plättchen blau, lege darunter ein gelbes.
  - ... die Plättchen verschiedenfarbig, lege darunter ein rotes.

Die meisten Personen würden wohl die Meinung teilen, dass sich die Vorschriften für γ^- deutlich besser für die Durchführung dieses Zaubertrick eignen. Die Abbildungen 11 und 12 erlauben einen Vergleich von γ^- und γ^+ in $\mathbb{Z}_3$ bezogen auf das Beispiel aus dem Beginn von Kapitel 2 ($n = 3^2 + 1 = 10$).

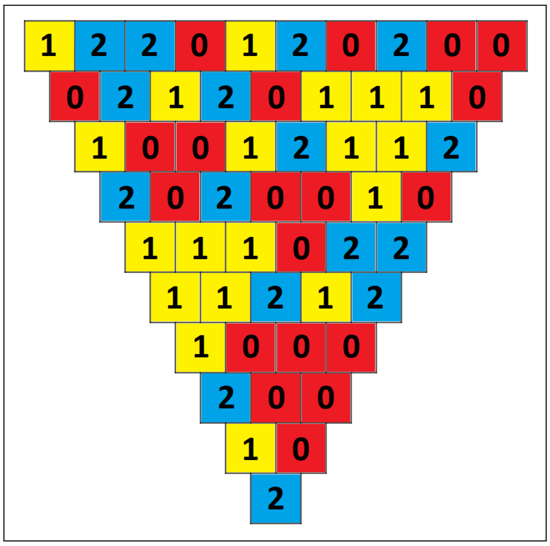

Abbildung 11: Die Entwicklung für γ^-. $-x_1 - x_{10} = -1 - 0 \equiv 2$

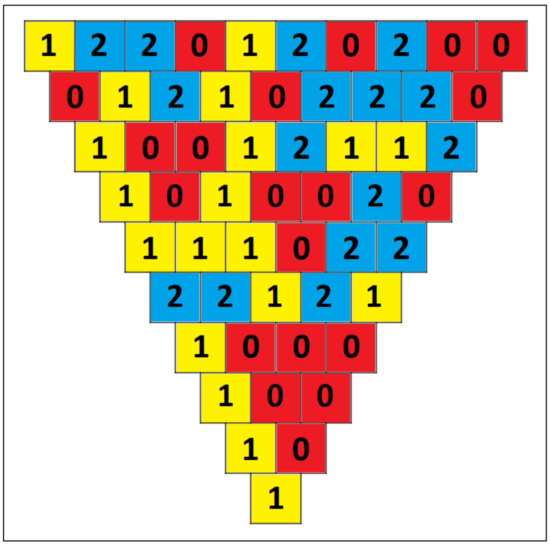

Abbildung 12: Die Entwicklung für γ^+. $x_1 + x_{10} = 1 + 0 \equiv 1$

Vergleicht man mit genauem Auge die Zeilen der Entwicklung für γ^+ mit denen von γ^- ist zu erkennen, dass jede zweite Zeile - beginnend bei der ersten - aus identen Ausprägungen besteht. Dieses Phänomen ist auf den ersten Blick vielleicht nicht ganz intuitiv, ist aber eine Implikation aus der Vorzeichen-Alternierung, die in Kapitel 2.2.4: *Analoge Überlegungen für γ^-* beschrieben wird. Interessanterweise entsteht dieser Effekt allgemein bei Linearkombinationen $\gamma_{\alpha,\beta} = \alpha x + \beta y \quad \rightarrow \quad -\gamma_{\alpha,\beta} = -\alpha x - \beta y$, was nicht schwer zu beweisen ist:

Satz 4: Für $n > 2$ und $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n-2$ definieren $x_r, x_{r+1}, x_{r+2} \in G$ die Ausprägungen drei aufeinanderfolger Elemente innerhalb einer n-geeigneten Entwicklung, die durch Ψ_n auf Basis von $\gamma_{\alpha,\beta} = \alpha x + \beta y$ beschrieben wird. Führt man diese Entwicklung ebenso mit $-\gamma_{\alpha,\beta} = -\alpha x - \beta y$ durch, spiegeln die Tupel aller Zeilen mit einer geraden Anzahl von Elementen die selben Ausprägungen wieder, oder kurz gesagt: Jede zweite Zeile von $\gamma_{\alpha,\beta}$ ist ident mit der von $-\gamma_{\alpha,\beta}$.

Beweis von Satz 4: Wir vergleichen die Erzeugnisse, die auf Basis von drei aufeinanderfolgenden Elementen x_r, x_{r+1}, x_{r+2} entstehen. Die folgende Rechnung zeigt, dass das eine aus den drei Elementen erzeugte Tupel zwei Zeilen darunter für beide γ ident ist.

Erzeugnis von $\gamma_{\alpha,\beta} = \alpha x + \beta y$:

$$\begin{aligned} \alpha\big[\alpha x_r + \beta x_{r+1}\big] + \beta\big[\alpha x_{r+1} + \beta x_{r+2}\big] &= \alpha^2 x_r + \alpha\beta x_{r+1} + \alpha\beta x_{r+1} + \beta^2 x_{r+2} \\ &= \alpha^2 x_r + 2\alpha\beta x_{r+1} + \beta^2 x_{r+2} \end{aligned}$$

Erzeugnis von $-\gamma_{\alpha,\beta} = -\alpha x - \beta y$:

$$\begin{aligned} -\alpha\big[-\alpha x_r - \beta x_{r+1}\big] - \beta\big[-\alpha x_{r+1} - \beta x_{r+2}\big] &= \alpha^2 x_r + \alpha\beta x_{r+1} + \alpha\beta x_{r+1} + \beta^2 x_{r+2} \\ &= \alpha^2 x_r + 2\alpha\beta x_{r+1} + \beta^2 x_{r+2} \end{aligned}$$

Gleicher Input erzeugt gleichen Output, für alle unter diesen Umständen produzierten, kleinen lokalen Dreiecke. $\square$

Ebenso darf nicht vergessen werden, dass wir - wie bewiesen wurde - nicht nur auf drei Farben beschränkt sind. Theoretisch müssen lediglich drei kurze Überlegungen[25] abgearbeitet werden:

1. Die Anzahl der Farben muss einer Primzahl p entsprechen.
2. Die Anzahl der Startreihenelemente n muss gewählt werden. $n = p^s + 1$ $(s \in \mathbb{N})$
3. Für die Durchführung in einem Zauberkontext ist ebenfalls die Wahl eines günstigen γ notwendig, um auf dessen Basis die Permutationen (bzw. Tupelentwicklungen) in möglichst einfache Legevorschriften übersetzen zu können.

[25] Zugegebenermaßen ist die letzte dieser Überlegungen vermutlich nicht immer sehr einfach, bzw. schnell zu tätigen.

Ohne ausschweifend über optimale Legevorschriften zu diskutieren, sollen an dieser Stelle noch ergänzend Entwicklungen in $\mathbb{Z}_5$ präsentiert werden (vgl. Abbildung 13, 14, 15, 16). Daran sollen die bisher getätigten Überlegungen nochmals an etwas komplexeren (bzw. bunteren) Beispielen illustriert werden.
Als günstiges n wurde $5^1 + 1 = 6$ gewählt. Trotz einer identen Startreihe entstehen aufgrund von verschieden gewählten γ-Vorschriften unterschiedliche Muster, und dennoch gilt wie erwartet ohne Ausnahme $\gamma(x_1, x_6) = \Psi_n(x_1, ..., x_6)$.
Um konsistent zu sein codieren wir die Ausprägungen $x = 0$ für Rot, $x = 1$ für Gelb, $x = 2$ für Blau, und zusätzlich $x = 3$ für Grün und $x = 4$ für Grau.

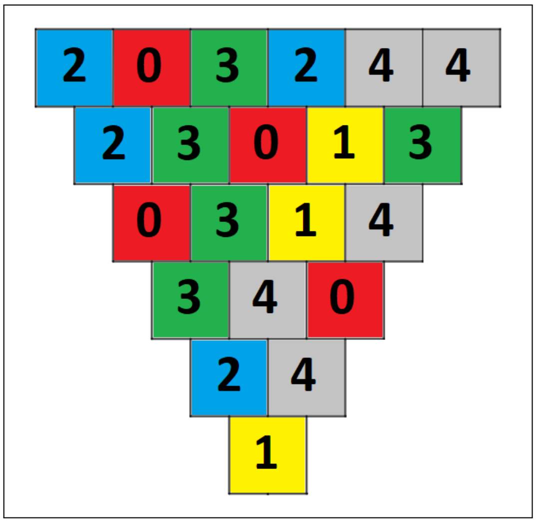

Abbildung 13: Entwickelt via $\gamma^+ = x + y$.

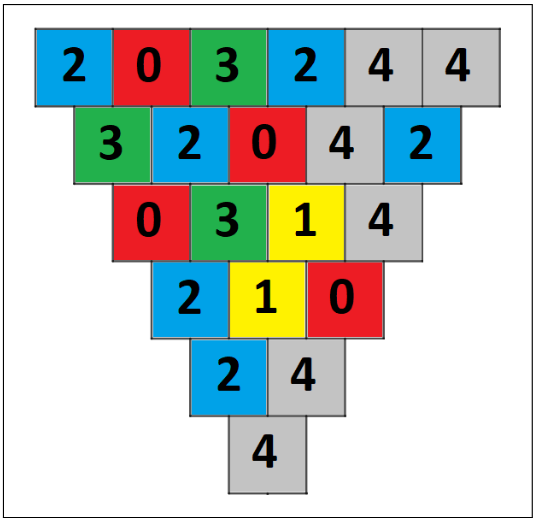

Abbildung 14: Entwickelt via $\gamma^- = -x - y$.

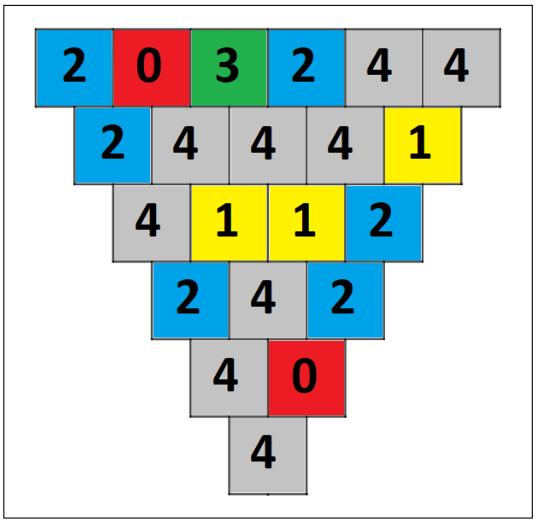

Abbildung 15: $\gamma_{\alpha,\beta}(x, y) = 1x + 3y$.

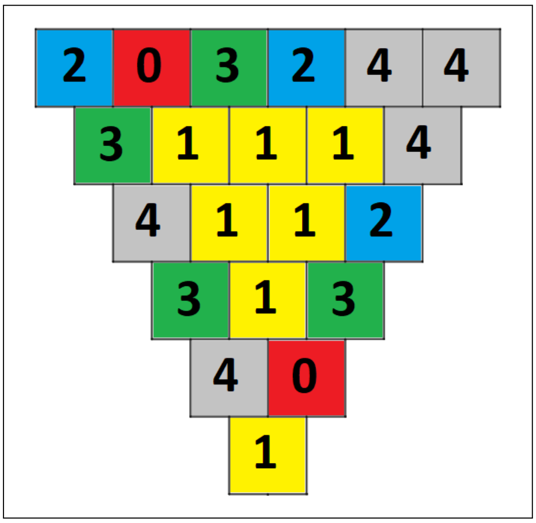

Abbildung 16: $\gamma_{\alpha,\beta}(x, y) = -1x - 3y$.

In Kontrast zu solchen und weiteren theoretisch möglichen Verkomplizierungen möchten wir nicht vergessen, dass natürlich auch $p = 2$ gewählt werden, und somit in $\mathbb{Z}_2$ gearbeitet werden könnte. Nicht nur hat man es in diesem Fall lediglich mit zwei Farben zu tun, sondern wie in Abschnitt 2.2.5 (durch eine Berechnung aller möglichen Fälle) bewiesen wurde, gilt hierfür $\gamma^+(x, y) = \gamma^-(x, y)$. Bezüglich der Legevorschrift würden die meisten Personen wahrscheinlich vermuten, dass diese sehr simpel ausfallen müsste. Sehen wir es uns an:

Ordnen wir der Farbe Schwarz die Ausprägung 0, und der Farbe Grün die 1 zu. Es gilt $\gamma^+ = \gamma^-$, und einfachheitshalber wählen wir γ^+. Aus $0 + 0 = 0 = 1 + 1$, sowie $0 + 1 = 1 = 1 + 0$, ließe sich die folgende Vorschrift postulieren:

> „Haben beide Plättchen die selbe Farbe, lege Schwarz, und haben beide Plättchen eine unterschiedliche Farbe, lege Grün.“

Mit Verweis auf Behrends (2017, S.57) soll aufgezeigt werden, dass derselbe Legealgorithmus (in diesem Fall für $p = 2$ und $\gamma^+ = \gamma^-$) auch anders in Worte übersetzt werden kann. Im Unterschied zu der eben postulierten Legevorschrift (siehe oben) übersetzt Behrends die Mathematik nämlich in folgende Regel[26], die ebenso funktioniert, und idente Dreiecke wie die andere Vorschrift erzeugt.

> „Lege unter zwei Plättchen ein neues Plättchen so, dass die Gesamtzahl der schwarzen Plättchen unter diesen drei Plättchen ungerade ist.“

Behrends liefert hiermit ein sehr kreatives Entwicklungsgesetz.

Die Beschreibung dieses Zaubertricks soll nun mit einigen abschließenden Worten zu Ende gebracht werden. Die Mathematik, die zur Erklärung des Hintergrunds dieses Tricks formuliert wurde, lässt nicht allzu viele Fragen offen. Dennoch könnte man beispielsweise untersuchen, inwiefern kompliziertere γ-Funktionen (also Abseits von Linearkombinationen) auf den Algorithmus Einfluss nehmen, bzw. zulässig sind. Ebenso könnte man versuchen, abgesehen von Restklassengruppen weitere konkrete Beispiele für Gruppen anzugeben, mithilfe derer Pyramiden numerisch durchgerechnet werden können.
Was die Präsentation des Tricks und das innovative Adaptieren betrifft, sei dem kreativen Geist keine Grenzen gesetzt. Natürlich ließen sich auch mit Spielkarten Pyramiden legen, wobei schwarze und rote Karten für $p = 2$ ausreichen, oder drei der vier Farben (üblicherweise Herz, Pik, Karo, Treff/Kreuz) für $p = 3$ gewählt werden könnten. Behrends (2017, S. 56) macht den Vorschlag, dass der Zauberer auf Basis irgendeines Vorwandes die vorhergehenden Reihen beim Auslegen einer Pyramide immer einsammelt. Dies würde sicherlich einen Beitrag dazu leisten, die Idee des Tricks zu verschleiern, und die Präsentation vielleicht noch faszinierender wirken zu lassen.

[26] Diese Formulierung wurde leicht adaptiert übernommen, u.a. da Behrends mit Karten und nicht mit Plättchen arbeitet.

Generell darf man auch nicht vergessen, dass große n für Vorführungen vermutlich nicht geeignet sind. Beispielsweise würde eine Startreihe von $n = 3^3 + 1 = 28$ Elementen das Legen von $28 + 27 + \cdots + 1 = \frac{28(28+1)}{2} = 406$ Teilstücken nach sich ziehen, was eine Überforderung für beinahe jedes Publikum darstellen würde.

3 Weitere mathematische Zaubertricks

Nachdem das vorangegangene Kapitel einem Trick mit hoher mathematischer Komplexität gewidmet wurde, sollen anschließend einige Effekte präsentiert werden, die sich - bezogen auf die in Kapitel 1.7 formulierte Kategorisierung - größtenteils auf einem mathematisch niedrigeren Niveau befinden. Nichtsdestotrotz zeichnen sich diese Zaubertricks durch ihren Wow-Effekt aus, der ohne Zweifel Staunen, Interesse, und Verwunderung bei den meisten Zuseherinnen und Zusehern hervorrufen wird.

3.1 Der Zufallsspaziergang; Buchstaben zählen

Dieser Trick basiert auf einem für Zaubertricks unterrepräsentierten, aber meiner Meinung nach sehr interessanten Teilgebiet der Mathematik: der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die „Erfolgschance“ ist nicht garantiert, und kann von dem Magier durch gewisse Parameter selbst justiert werden. Der Effekt kann auf ein Publikum sehr beeindruckend wirken, und lässt sich durch mehrere Hilfsobjekte erzeugen wie beispielsweise Spielkarten (vgl. Tanna, 2016, S. 85-87), Texte, oder auch Würfel.

3.1.1 Der Effekt an Beispielen

Der Zauberer bittet die Teilnehmerin, ein Deck aus 24 Karten (je viermal Ass, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs) zu mischen, und dann in einer Geraden - oder falls zu wenig Platz vorhanden, in einer Schlangenlinie - aufgedeckt auszulegen. Das könnte aussehen wie in Abbildung 17.

Nachdem die Kartenstraße ausgelegt wurde, schreibt der Magier eine Prognose auf ein Stück Papier, faltet es, und legt es beiseite. Die weiteren Anweisungen an die Zuschauerin lauten:

- Suche dir irgendeine Karte aus der ersten Reihe (sechs Karten) aus. Diese Karte ist dein Startort.
- Diese Karte hat einen Wert, wobei für ein Ass der Wert 1 gilt. Springe diesen Wert in der Kartenstraße weiter, bis zu deinem nächsten Standort.
- Dieser Ort hat abermals einen Wert, um den du weiterspringst.
- Wiederhole diesen Vorgang bis du an einem Standort angekommen bist, der nicht mehr den vollen Sprung erlaubt - also über das Ende hinaus gehen würde. Diese Karte ist der Zielpunkt deiner Reise.

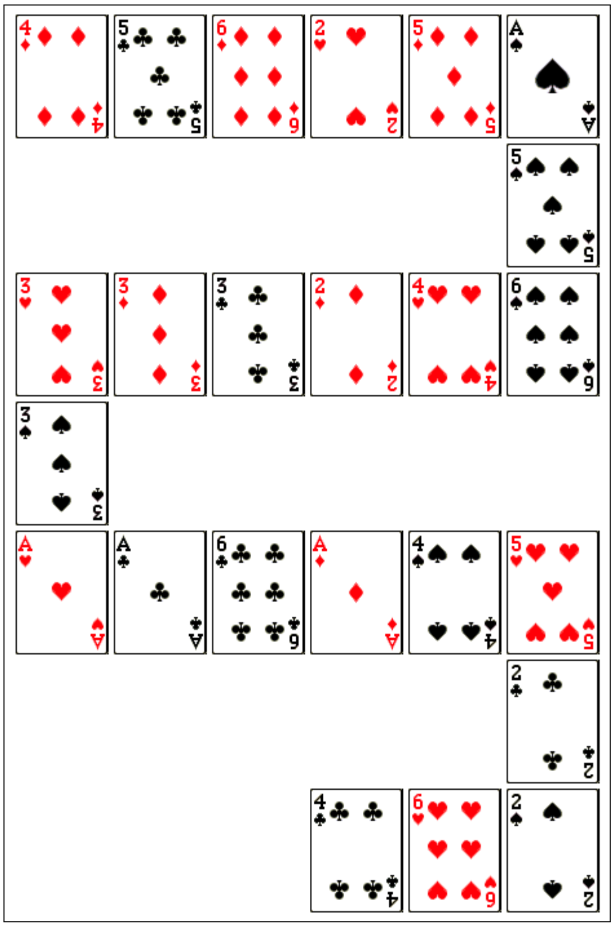

Abbildung 17: Eine zufällige Kartenstraße aus 24 Karten.

Ist die Zuschauerin an dem Zielpunkt angekommen, entfaltet der Magier seine Vorhersage. Er hat den Endpunkt der Reise bereits im Vorhinein gewusst. In diesem Fall die *Herz 6*.

Wie ist dies möglich? Die Karten wurden zufällig gemischt und ausgelegt, und der Magier gab seine Prognose bereits vor der Wahl des Startortes der Zuschauerin ab. Der Grund ist ein verblüffend einfach zu visualisierendes mathematisches Phänomen, das jedoch stark gegen die Intuition der meisten Menschen geht. Die mathematische Beschreibung basiert auf Überlegungen des amerikanischen Mathematikers und Physikers Martin Kruskal, und wird in mehreren Publikationen wie beispielsweise Tanna (2016) oder Haga & Robins (1995) als *Kruskal Count*, bzw. *Kruskal's Principle* bezeichnet. Im Rahmen eines Tricks wurde diese Idee erstmals von Martin Gardner (1978, S. 24-32) in einer Ausgabe des *Scientific American* eingesetzt.

Der Effekt zielt darauf ab, dass man unabhängig davon wo man startet, (fast) immer am selben Endpunkt landet. Die Idee dahinter ist die, dass bei zwei Pfaden (jeweils ausgehend von einem beliebigen Anfangspunkt), bei jedem einzelnen Sprung eine Wahrscheinlichkeit besteht, auf demselben Zwischenstopp halt zu machen. Ab diesem Zeitpunkt trennen sich die beiden Pfade niemals wieder, verlaufen sozusagen gebündelt, und landen natürlich auf dem selben Endpunkt. Wird dieses Prinzip nun für mehrere (bzw. alle) Startpunkte durchgespielt, besteht abhängig von gewissen Variablen (Straßenlänge und durchschnittliche Sprungweite) eine Wahrscheinlichkeit, dass früher oder später alle Wege gebündelt sind. Abbildung 18 soll dieses Phänomen veranschaulichen.

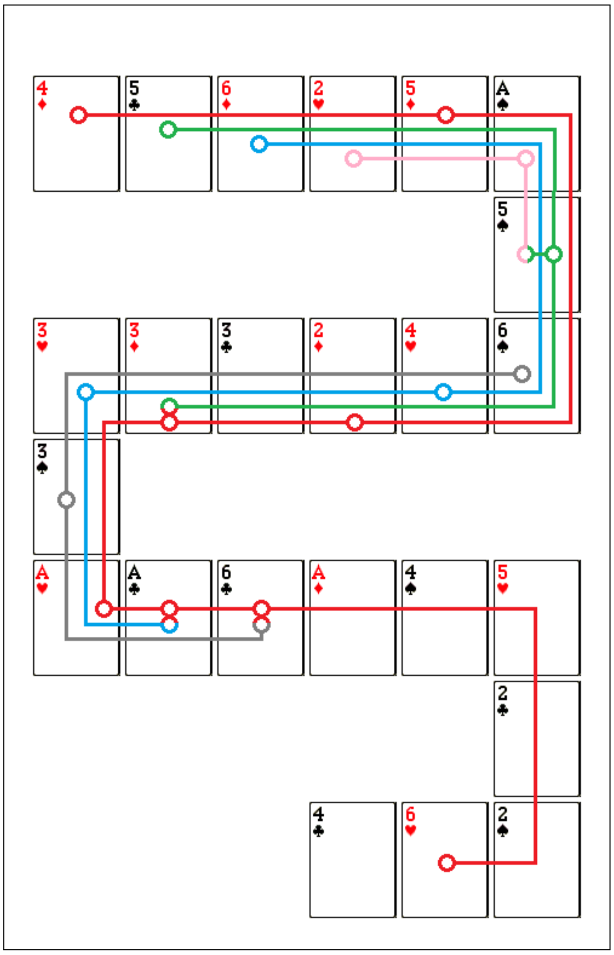

Abbildung 18: Visualisierung der Bündelung. Der *Kruskal Count* bei einer Kartenstraße.

Bei diesem Beispiel enden alle Wege bei der Herz 6, wobei zu erkennen ist, dass als Startkarte die ersten 10 Karten gewählt werden könnten, und selbst die Treff 3 (Karte 11) würde nach nur einem Sprung in den grauen Pfad übergehen. Die Tätigkeit des Zauberers bestand darin, dass er bereits beim Auslegen der Straße einen beliebigen Pfad mitverfolgt, und die Endkarte als Prognose notiert hatte.

Wie bereits erwähnt, kann dieser Effekt auf mehrere interessante Weisen erzeugt werden, wie durch das Erwürfeln und Legen bzw. Notieren einer Straße durch sechsseitige Würfel. Ebenso - und diese Art der Präsentation kann für ein Publikum sehr verblüffend wirken - können Textstellen herangezogen werden (vgl. Weng, 2019, S. 175f). Die Regel ist die, dass eine Mitspielerin ein beliebiges Wort aus der ersten (oder auch zweiten) Zeile eines mehrzeiligen Absatzes wählen kann. Nun zählt sie die Buchstaben des Wortes, und springt diese Anzahl an Wörtern weiter, worauf sie abermals die Buchstaben des erreichten Wortes zählt. Es bedarf nur weniger Zeilen, und die Person wird unabhängig von dem gewählten Startwort mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit auf einem bestimmten Wort landen, das der Magier bereits kennt. Je nach Präsentation muss dieses Wort nicht unbedingt das Letzte dieser Seite, sondern könnte auch das Erste auf der nächsten Seite sein.
Die Voraussetzung für die Durchführung ist natürlich, dass der Magier einige Minuten Vorbereitungszeit mit diesem Text verbracht, und eigenhändig bis zu einem bzw. dem Endwort durchgezählt hat. Dabei ist es - ebenso wie bei der Mitspielerin - relativ unwichtig, wo er zu zählen beginnt. Die Wahrscheinlichkeit auf einen Erfolg kann minimal verbessert werden, indem man entweder bei dem ersten Wort beginnt, oder ein Wort wählt, das aus irgendeinem Grund[27] wahrscheinlicher ist, von einer Zuschauerin gewählt zu werden.

Es kann angenommen werden, dass Schüler*innen einer Schulklasse ein gutes Publikum für die folgende Vorführung sein könnten. Der Zauberer bereitet die ersten zehn Seiten eines Schulbuches (das jede/r Schüler*in besitzt) auf diesen Zaubertrick insofern vor, dass er das Endwort für alle diese Seiten im Vorhinein bestimmt, und in seinem eigenen Exemplar markiert. Nun darf die Klasse erstens eine beliebige Seite wählen, und zweitens jede/r Schüler*in ebenso individuell ein eigenes Startwort wählen. Bereits nach dem Wählen der Seite kann der Magier seine Prognose verdeckt auf eine zugeklappten Tafelseite schreiben. Die Überraschung wird groß sein, wenn nicht nur alle Schüler*innen die Reise auf dem selben Wort beenden, sondern es der Zauberer ebenfalls vorhergesagt hat.

3.1.2 Über die Mathematik und die Erfolgswahrscheinlichkeiten

Die Mathematik hinter diesem Zaubertrick kann auf unterschiedlichen Komplexitätsstufen sehr umfangreich beschrieben werden, und findet anwendungsorientierte Einsetzbarkeit in einigen wissenschaftlichen Nischen. Eine detaillierte Untersuchung würde weit über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen, Referenzen und kurze Ausführungen sollen dem/der interessierten Leser*in jedoch nicht vorenthalten werden.

[27] Es könnte ein Wort sein, dass sehr „ins Auge springt“. Abgesehen davon gibt es weitere psychologische Aspekte die ein Magier versuchen kann auszunutzen.. Die Zahlen 3 oder 7 werden von Menschen gerne als „gute“ Zufallszahl empfunden und bevorzugt gewählt.

Im Kern steht der Erfolg dieses Zaubertricks in Zusammenhang mit Prinzipien basierend auf Koppelungsmethoden von Markow-Ketten (vgl. Lagarias et al., 2001, S. 1). Der Effekt des bereits erwähnten *Kruskal Counts*, auf dem dieser Trick basiert, beruht darauf, dass der Output von Markow-Ketten unter bestimmten Umständen unabhängig von dem Input ist. Mehrere Autoren wie beispielsweise Pollard (2000a), Montenegro & Tetali (2009), und Bosko (2011) stellen diese Idee in Verbindung zu diskreten Logarithmusproblemen und zur Kryptographie.

Am anderen Ende des Spektrums gibt es jedoch auch naivere Herangehensweisen, um zu versuchen, sich einer Bestimmung für die Erfolgswahrscheinlichkeiten dieses Zaubertricks zu nähern, wie wir uns nun gemeinsam ansehen möchten. (vgl. Pollard, 2000b)

Angenommen, der Trick wird mit einem Standardset von 52 Karten durchgeführt. Um die maximale Sprungweite etwas zu minimieren und die Erfolgschance zu erhöhen, soll die Regel gelten, dass Bildkarten (also Bube, Dame, König) jeweils den Wert Fünf haben, und ein Ass den Wert Eins. Der Wert des gesamten Decks ist somit:

$$4 \cdot (1 + 2 + \cdots + 10) + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 280$$

Dies bedeutet, eine Karte hat den durchschnittlichen Wert $\frac{280}{52} \approx 5,3846$, was die durchschnittliche Sprungweite wiederspiegelt. Runden wir diesen Wert auf 5, lässt dies den Schluss zu, dass der Pfad einer Mitspielerin bei einem Sprung mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ in den Pfad des Zauberers übergeht (und diese sich nie wieder trennen). Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ geschieht dies nicht.
Nun stellt sich die Frage, mit wie vielen Sprüngen man bei einem Durchgang ungefähr rechnen kann. Angenommen, der Zauberer lässt der Mitspielerin eine Startkarte aus den ersten sechs Karten wählen, sie wählt die sechste, und springt *neun* Mal den durchschnittlichen Wert von 5, dann landet sie auf dem 51-ten (also dem vorletzten) von 52 Feldern. Diese Übelegungen lassen nun die Berechnung zu, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Mitspielerin niemals ein Sprungfeld mit dem Magier teilt:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{9+1} \approx 0,1074 \approx 10,7\%$$

Die „+1“ im Exponenten entspricht der Möglichkeit, dass beide Personen dieselbe Startkarte wählen könnten. Nun lässt sich unsere erste naive Näherung für einen Erfolg des Zaubertricks unter den gegebenen Umständen berechnen:

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{9+1} \approx 89,3\%$$

Um noch bessere Abschätzungen liefern zu können, ziehen wir die Ergebnisse von James Grime (2020) heran. Seine Formeln liefern Resultate, die trotz der nachfolgend erwähnten vereinfachten Annahmen sehr nahe an der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit liegen. (vgl. 2000, S. 2f)

Erstens sind die Werte der Karten nicht unabhängig voneinander, da bei dem Auslegen von Karten aus einem gemischten Deck die (Wahrscheinlichkeiten für die Werte der) Folgekarten natürlich abhängig davon sind, welche Karten schon gezogen wurden.
Zweitens arbeitet Grime mit der geometrischen Verteilung anstatt der stetigen Gleichverteilung. Ableitungen von Formeln werden dadurch stark vereinfacht, und bieten dennoch eine sehr gute Annäherung, wie Simulationen zeigen (siehe weiter unten). Eine Begründung dafür stellen die als *Gesetze der großen Zahlen* bekannten Grenzwertsätze der Stochastik dar.

Für einen durchschnittlichen Kartenwert x, und die Anzahl der Karten n liefert Grime folgende Näherungsformeln, wobei die Mitspielerin immer eine der ersten 10 Karten zufällig als Startkarte wählt:

$$P_{Z_r}(success) = 1 - \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^n \qquad \text{... Zufällige Startkarte des Magiers.}$$

$$P_{Z_1}(success) = 1 - \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{n-1} \qquad \text{... Der Magier startet bei 1.}$$

Für $x = \frac{280}{52}$ und $n = 52$ liefert $P_{Z_r} \approx 83,9\%$ und $P_{Z_1} \approx 86,4\%$.

Diese Ergebnisse unterstreichen die Aussage aus Abschnitt 3.1.1, dass die Wahrscheinlichkeit auf einen Erfolg ein wenig erhöht wird (für diesen Fall um ca. $2,5\%$), falls der Zauberer die erste Karte der Straße für den Start seiner Route wählt.

Grime vergleicht das Ergebnis von P_{Z_1} mit einer Monte-Carlo-Simulation für 10^7 Probeläufe, und erhält für die Simulation eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $85,4\%$, eine Differenz von $1,05\%$. Ein weiteres interessantes Ergebnis dieser Simulation besagt, dass in $58,4\%$ der Fälle die Pfade aller 10 Startkarten am Ende gebündelt sind, und auf demselben Endfeld landen.

Da die Näherungsformeln gute Abschätzungen liefern, bedienen wir uns P_{Z_1} um in den nachfolgenden Tabellen den Erfolg für einige Variationen des Zaubertricks zu berechnen.

Der *Duden* gibt für ein deutsches Wort innerhalb eines Textes eine durchschnittliche Buchstabenanzahl von $5,99 \approx 6$ Buchstaben an[28]. Je nach Format des Textes kann man ungefähr mit 10-20 Wörtern pro Zeile rechnen, womit man recht einfach die Anzahl der Zeilen überschlagen kann, um ungefähr auf die Erfolgswahrscheinlichkeiten zu kommen, die auf Basis der Wortanzahl berechnet wurden.
Abschließend soll an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass die zuvor erwähnte Problematik (bzw. Nichterfüllung) der Unabhängigkeit natürlich nicht für das Werfen von

[28] „Durchschnittliche Länge eines deutschen Wortes“ auf Duden online. https://www.duden.de/sprachwissen/sprachratgeber/Durchschnittliche-Lange-eines-deutschen-Wortes. (Abgerufen am 07. 07. 2023).

Würfeln existiert.
Bezüglich der Wortlänge wäre es interessant zu untersuchen - vielleicht von einem/einer Forscher*in aus dem Bereich der Sprachwissenschaften - ob (oder inwiefern) die Buchstabenanzahl von Wörtern innerhalb von Sätzen durch gewisse Variablen bzw. Abhängigkeiten beeinflusst wird.

Für Spielkarten			
Zusammenstellung der Karten	n	x	P_{Z_1}
1 Deck (52 Karten), Bildkarten Wert 5	52	$\frac{280}{52} \approx 5,4$	$\approx 86,4\%$
2 Decks (104 Karten), Bildkarten Wert 5	104		$\approx 97,8\%$
1 Deck (52 Karten, Bildkarten Wert 10	52	$\frac{340}{52} \approx 6,5$	$\approx 74,7\%$
2 Decks (104 Karten, Bildkarten Wert 10	104		$\approx 92,6\%$
1 Deck ohne Bildkarten, inkl. Ass (40 Karten)	40	$\frac{220}{40} = 5,5$	$\approx 77,9\%$
2 Decks ohne Bildkarten, inkl. Ass (80 Karten)	80		$\approx 94,3\%$
1 Deck, Kartenwerte 1-8 (32 Karten)	32	$\frac{144}{32} = 4,5$	$\approx 83,8\%$
2 Decks, Kartenwerte 1-8 (64 Karten)	64		$\approx 96,8\%$
1 Deck, Kartenwerte 2-8 (28 Karten)	28	$\frac{140}{28} = 5$	$\approx 73,4\%$
2 Decks, Kartenwerte 2-8 (56 Karten)	56		$\approx 91,5\%$
1 Deck, Kartenwerte 1-6 (24 Karten)	24	$\frac{84}{24} = 3,5$	$\approx 89,9\%$
2 Decks, Kartenwerte 1-6 (48 Karten)	48		$\approx 98,7\%$

Für Würfelstraßen (6-seitige Würfel)		
Länge n (Anzahl der Würfel)	x	P_{Z_1}
20	$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$	$\approx 85,8\%$
25		$\approx 90,7\%$
30		$\approx 94,0\%$
35		$\approx 96,1\%$
40		$\approx 97,4\%$

Für Wortstraßen bzw. Texte		
Länge n (Anzahl der Wörter)	x	P_{Z_1}
50	$= 6$	$\approx 79,0\%$
60		$\approx 84,2\%$
70		$\approx 88,1\%$
80		$\approx 91,0\%$
90		$\approx 93,2\%$
100		$\approx 94,9\%$

3.2 Der 1089-Trick

Kaum ein anderer mathematischer Zaubertrick wird in der Literatur so häufig beschrieben wie dieser, und das hat nachvollziehbare Gründe. Dem Effekt liegt eine interessante Eigenschaft der Zahl 1089 zugrunde, und er lässt sich einem Publikum ziemlich unkompliziert vorführen. Der Trick erinnert an einige gelungene Beispiele aus dem Einführungskapitel, da er trotz seiner simplen Natur dennoch sehr überraschend wirken kann.

Bevor der Zauberer die folgenden Anweisungen formuliert, notiert er verdeckt seine Prognose: 1089.

- Schreibe eine dreistellige Zahl aus drei unterschiedlichen Ziffern (0 bis 9) auf ein Blatt Papier.
- Bilde eine zweite Zahl, indem du die erste spiegelverkehrt (bzw. umgedreht) aufschreibst.
- Berechne die Differenz der beiden Zahlen, also ziehe die kleinere von der größeren ab. Ist das Ergebnis zweistellig, schreibe eine Null davor.
- Von diesem neuen Ergebnis bestimme abermals die spiegelverkehrte Zahl, und diesmal addierst du beide.

Dieser kurze Algorithmus, der eigentlich nur aus zwei Rechenschritten, nämlich einer Subtraktion und einer Addition besteht, liefert als Ergebnis immer die Zahl 1089. Die Forderung von drei unterschiedlichen Ziffern hat den Zweck, Palindrome und Schnappszahlen zu vermeiden, mit denen der Trick nicht funktioniert. Da der Beweis für diesen Zaubertrick sehr kurz ist, möchten wir uns zwei Versionen ansehen.

Beweisversion 1 (vgl. Benjamin, 2015): Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedene Ziffern, und $a > c$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) &= (100a - a) + (10b - 10b) + (c - 100c) \\ &= 99a - 99c \\ &= 99(a - c)\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also ein Vielfaches von 99, und da $a > c$ gilt, kommen als Faktoren lediglich die Ziffern 1 bis 9 in Frage. Die möglichen Zwischenlösungen sind also die Zahlen $099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792,$ oder 891, und die Summe jeder dieser Zahlen mit ihrer Spiegelung ist 1089. □

Beweisversion 2 (vgl. Dambeck, 2013): Eine Zahl, bestehend aus den drei Ziffern a, b, $c \in \mathbb{N}$, $a > c$ (a ... Hunderterstelle, b ... Zehnerstelle, c ... Einerstelle) wird gespiegelt und die Differenz gebildet. Als Ergebnis erhalten wir eine Zahl, deren Stellen aussehen wie in der folgenden Tabelle beschrieben.

	100-erstelle	**Zehnerstelle**	**Einerstelle**
„Naiv“ (Übertrag vernachlässigt)	$a - c$	$b - b = 0$	$c - a$
Tatsächlich: Überlegung 1			$10 - (a - c)$
Tatsächlich: Übertrag auf 10-er		9	
Tatsächlich: Übertrag auf 100-er	$a - c - 1$		

Die „naive“ Überlegung muss aufgrund der Tatsache korrigiert werden, dass $a > c$ gilt, und somit der Übertrag der Subtraktion zu beachten ist. Beginnend bei der Einerstelle wirkt sich dieser Umstand danach auf die Zehnerstelle, und in weiterer Folge ebenfalls auf die Hunderterstelle aus.
Wird dieses Ergebnis nun gespiegelt und die Summe gebildet, ergibt sich für die Einerstelle $10-(a-c)+(a-c-1) = 9$, für die Zehnerstelle $9+9 = 18$, also 8 mit einem Übertrag von $+1$ auf die Hunderterstelle, und die Hunderterstelle $a-c-1+10-(a-c)+1 = 10$. Das Endergebnis ist also jedenfalls 1089. $\square$

Bezüglich der Durchführung in einer Schulklasse macht Kadan (2015, S. 15) den Vorschlag, sich im Vorhinein das zehnte Wort auf Seite 98 („10/98“), oder das achte Wort auf Seite 109 („109/8“) eines Schulbuches zu merken, und als magische Prognose dieses Wort vorherzusagen. Natürlich kann der Trick dann nur einmal vorgeführt werden.

Abschließend soll noch bemerkt werden, dass Behrends (2017, S. 133ff) diesen Effekt für Zahlen beliebiger Länge untersucht. Als Zauberkünstler würde ich die Meinung vertreten, dass sich Zahlen mit einer Stellenanzahl > 4 eher weniger für diesen Trick eignen, da der Algorithmus unterschiedliche Ergebnisse liefern kann (also nicht nur 1089), und der Magier gewisse Tabellen auswendig lernen müsste. Die mathematischen Untersuchungsmethoden von Behrends sind sehr allgemein und umfangreich, was insofern interessant ist, dass ähnlich wie bei dem Dreifarbendreieck (vgl. Kapitel 2), manche auf den ersten Blick simple Tricks auf den zweiten Blick Implikationen und Fragen aufwerfen können, die einer Mathematik auf Hochschulniveau bedürfen, um eine tiefgründige Auseinandersetzung zu ermöglichen.

3.3 Zauberei auf Basis von Quersummen und 9er-Resten

Die Zahl Neun und deren Eigenschaften innerhalb des auf der Basis 10 fundierten Dezimalsystems sind die Grundlage für einige sehr populäre mathematische Tricks, die für ein Publikum nahezu undurchschaubar sind, wenn das fachliche Wissen fehlt.

Bevor wir uns einige dieser Tricks ansehen, soll der mathematische Hintergrund ein wenig beleuchtet werden.

Eine der zentralen Ideen stellt die Teilbarkeitsregel einer Zahl durch die Ziffer Neun dar, und manche Leser*innen können sich vielleicht noch aus der Schulzeit daran erinnern: „Eine Zahl ist durch 9 teilbar (also hinterlässt keinen Rest), wenn die Ziffernsumme dieser Zahl durch 9 teilbar ist.“

Warum gilt dieser Satz? Dies kann man beispielsweise folgendermaßen beweisen: (vgl. Schott, 2009, S. 67f)

Wir schreiben eine beliebige $(s+1)$-stellige ganze Zahl $n, a_k \in \mathbb{N}$ in der Form

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k 10^k$$

an. Da für alle Zehnerpotenzen, also $\forall k \in \mathbb{N}$, $10^k \equiv 1 \pmod 9$ gilt, und wenn wir weiters die Kongruenz (mod 9) von n betrachten, erhalten wir

$$n \equiv \sum_{k=0}^{s} a_k \pmod 9.$$

Ist nun n durch 9 teilbar, also gilt $n \equiv 0 \pmod 9$, führt dies zu der Form

$$\sum_{k=0}^{s} a_k \equiv 0 \pmod 9$$

wonach die Ziffernsumme ebenfalls durch 9 teilbar ist. $\square$

Der Algorithmus, eine Zahl auf ihren 9er-Rest zu reduzieren, wird als *casting out the nines*, bzw. „Hinauswerfen von Neunen“ bezeichnet, und stellt in diesem Kapitel die zentrale Methode für das erfolgreiche Zaubern dar. Das Ergebnis dieses Algorithmus (also die Berechnung des Modulus mithilfe von *casting out the nines*) wird in der Literatur auch häufig „Digitaler Rest“ oder „Digitale Wurzel“, bzw. *digital root* genannt.

Bevor wir einen genaueren Blick auf diese Technik werfen, soll an dieser Stelle erwähnt werden, dass vor dem Zeitalter der Taschenrechner und Computer, in dem wir aktuell leben, in Schulen häufig eine Methode mit Namen „Neunerprobe“ gelehrt wurde. Diese basierte auf dem Bestimmen von digitalen Resten auf beiden Seiten einer Rechnung (bzw. Gleichung). Ohne zu sehr in Details zu versinken geht es hierbei darum, dass aufgrund der Rechenregeln der Modulorechnung und der Definition von Kongruenz, die Reste von Summanden mit der Summe, die Reste von Minuend und Subtrahend mit dem ihrer Differenz, und die Reste von Faktoren mit dem des Produktes verglichen werden konnten, um auf mögliche Rechenfehler aufmerksam zu werden. (vgl. Gardner, 1964, S. 79)

Wie bereits gezeigt wurde, ist $n = \sum_{k=0}^{s} a_k \equiv 0 \pmod 9$ damit äquivalent, dass n durch Neun teilbar ist, bzw. kein Rest entsteht. Doch wie lassen sich positive Reste interpretieren?
Laut Definition liefert die Modulo-Operation den ganzzahligen Rest einer Division zurück.
Aufgrund der Form $n \equiv \sum_{k=0}^{s} a_k \pmod 9$ lässt sich also die Schlussfolgerung ziehen, dass sich der Modulus[29] einer Zahl ebenso durch ihre Quersumme berechnen lässt, wobei es jedoch noch nötig ist, von dieser Quersumme (die natürlich zweistellig, dreistellig, oder auch größer sein könnte), den 9er-Rest zu berechnen.

Eine etwas naivere aber vielleicht anschaulichere Art diese Idee zu beschreiben könnte folgendermaßen aussehen: (vgl. Gardner, 1964, S. 82)

Beispielhaft wird eine vierstellige Zahl m betrachtet, die der Reihe nach aus den Ziffern a, b, c, und d besteht. Sie kann angeschrieben werden als:

$$m = 1000a + 100b + 10c + d = (999 \cdot a) + (99 \cdot b) + (9 \cdot c) + (0 \cdot d) + a + b + c + d$$

Überlegt man nun, dass der Rest einer Division durch 9 dadurch entsteht, dass Vielfache von 9 entfernt, und somit alle Klammerausdrücke irrelevant werden, und nur die Summe der Ziffern a, b, c, d verbleibt, kommt man auf den gleichen Schluss wie zuvor: Der Rest der Division kann nur genau dann Null sein, wenn der Rest ihrer Ziffernsumme (dividiert durch 9) ebenfalls Null ist. Zusätzlich kann man folgenden Umstand erkennen: Falls ungleich Null, liefert die Ziffernsumme einen gewissen Wert, der aber nicht notwendigerweise dem „wahren, minimalen“ 9er-Rest entspricht.
Denn wie im letzten Absatz bereits erwähnt, könnte die Ziffernsumme natürlich auch größer als 10 sein, was bei Zahlen mit vielen Stellen sehr wahrscheinlich ist. Dann wird der Algorithmus wiederholt, also das nochmalige Bilden der Quersumme des Ergebnisses, solange, bis ein Rest < 9 verbleibt.
Und dieses Prinzip, also das wiederholte Bilden der Quersummen zur Bestimmung des 9er-Restes, steckt hinter dem vorher erwähnten Algorithmus mit Namen *casting out nines*, das den sogenannten „Digitalen Rest“ liefert.

[29]Hier ist von $\pmod 9$ die Rede. Für andere Moduli interessieren wir uns in diesem Kapitel nicht.

Es wird Zeit für einige kurze Beispiele.

- Gesucht ist der 9er-Rest von 194.838.274.
  Quersumme: 46 $\rightarrow$ Quersumme: 10 $\rightarrow$ Quersumme: 1.
  Ergebnis: Der 9er-Rest von 194.838.274 ist 1.

Ein schnelleres Berechnen des digitalen Restes kann für den Zauberer bei manchen Tricks eine große Hilfe darstellen. Die Tatsache, dass bei jedem Schritt Vielfache von Neun von der Ziffernsumme entfernt werden (daher ja der Name dieser Methode) lässt unter gewissen Umständen einige Abkürzungen des Algorithmus zu.
Während des Addierens der Ziffern kann zu jedem Zeitpunkt der Wert Neun vom Zwischenergebnis abgezogen werden. Vielfache von 9 können sozusagen sofort „hinausgeschmissen“ werden:

- Gesucht: Der Rest von 738.450.
  Der digitale Rest in einem Durchgang bestimmt:
  $7 + 3 = 10 \pmod 9) = 1 + 8 = 9 \pmod 9) = 0 + 4 + 5 + 0 = 9 \pmod 9) = 0$
  Ergebnis: Der digitale Rest von 738.450 ist 0. Die Zahl ist durch 9 teilbar.

Noch schneller kann es gehen, wenn der mathematische Zauberer Paare erkennt, die 9 ergeben, und diese sofort eliminiert.

- Gesucht: Der Rest von 4.718.325.
  Digitaler Rest durch einen Blick: $\cancel{4}.\cancel{7}\cancel{1}\cancel{8}.3\cancel{2}\cancel{5} \pmod 9 = 3$.
  Ergebnis: Der 9er-Rest von 4.718.325 ist 3.

Der/Die aufmerksame Leser*in wird sofort verstehen, dass - wie Beispiel drei aufzeigt - die Ziffer 9 bei der Quersummenbildung des ersten Beispiels einfach ignoriert (also direkt „hinausgeschmissen“) hätte werden können.

Als weitere Schlussfolgerung unserer Untersuchungen kann man nun festhalten, dass sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = 9x + r$ anschreiben lässt, wobei $r \in \mathbb{N}_0$ dem digitalen Rest entspricht.

Wozu all diese Details? Wie schon gesagt ist das Bestimmen des digitalen Restes die zentrale Methode der Zaubertricks, die nun vorgestellt werden sollen.

3.3.1 Die fehlende Ziffer (inkl. Variationen)

Mithilfe von Stift und Papier oder anhand von Spielkarten (wobei Kartenwerten Ziffern zugeordnet werden), wird eine Mitspielerin gebeten, sich außerhalb des Blickfeldes des Magiers eine vierstelle Zahl auszusuchen. An dieser Stelle sei bemerkt - was der Magier nicht unbedingt erwähnen muss - dass bei diesem Trick dieselben Ziffern auch mehrfach vorkommen dürfen, und Palindrome, bzw. Schnapszahlen ebenfalls erlaubt sind. Wie gleich ersichtlich wird, sind diese Sonderfälle für manche Variationen jedoch ungünstig.

Nachdem eine Zahl gewählt wurde, soll sie die Mitspielerin spiegeln, und die größere Zahl von der kleineren abziehen. Das Ergebnis ist eine drei- oder vierstellige Zahl. (Beginnt man mit einem Palindrom oder einer Schnappszahl, erhält man das Ergebnis 0.) Nun darf die Zuschauerin eine beliebige Ziffer von diesem Ergebnis entfernen, bzw. durchstreichen, und gibt dem Magier die erste und einzige Information, die er bei diesem Trick erhält: die verbleibenden Ziffern in irgendeiner Reihenfolge.
Das Publikum wird staunen, wenn der Zauberer keine Schwierigkeiten dabei hat, die fehlende Ziffer zu nennen.

Wie kann das funktionieren? Bei diesem Trick gibt es grundsätzlich zwei Ideen:

Erstens, wird durch die Spiegelung und darauffolgende Subtraktion der frei gewählten Zahl, die übrigens auch mehr als vier Stellen (oder weniger) haben kann, eine Zahl F generiert, die einen digitalen Rest von Null hat, also (mod 9) Null ergibt. Dies soll durch intuitive Überlegungen argumentiert werden: Der 9er-Rest einer Zahl wird, wie bewiesen wurde, durch die Ziffernsumme bestimmt, oder anders gesagt, ist lediglich von dem Wert ihrer Ziffern abhängig. Werden die Ziffern also gespiegelt, hat die produzierte Zahl natürlich denselben 9er-Rest. Zieht man nun von $v = 9\alpha + r$ die Zahl $w = 9\beta + r$ ab, für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, v > w$, wobei r denselben digitalen Rest beschreibt, hat die Differenz $F = 9(\alpha - \beta)$ im Allgemeinen einen digitalen Rest von Null. Eine äquivalente Aussage wäre ebenso, dass F ein Vielfaches von 9 ist.

Die zweite Idee bedarf genau dieser Voraussetzung. Der Zuschauerin ist gestattet, von einer Zahl, die einen digitalen Rest von Null hat, eine beliebige „Zauberziffer“ z zu entfernen, und nennt dem Magier alle verbliebenen Stellen in beliebiger Reihenfolge. Durch das Entfernen dieser Ziffer wird der digitale Rest natürlich genau um z vermindert. Der Zauberer bildet nun selbst den neuen (um z verminderten) digitalen Rest d_z durch *casting out nines* (entweder im Kopf oder er schreibt die Ziffern mit - dies macht es etwas einfacher), was ihm schließlich erlaubt, die fehlende Ziffer z sofort zu nennen. Er muss lediglich den Schritt der Zuschauerin rückgängig machen, indem er sein Ergebnis auf 9 ergänzt.
Arithmetisch gesehen gilt: $9 = d_z + z \Leftrightarrow z = 9 - d_z$.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass der Zauberer für die Bestimmung von z ebenfalls die Quersumme auf das nächste Vielfache von 9 ergänzen könnte. Diese Alternative liefert natürlich das selbe Ergebnis, wie den digitalen Rest auf 9 aufzufüllen. Bei hohen Quersummen könnte es aber eine Schwierigkeit darstellen, sofort das nächsthöhere Vielfache von Neun zu erkennen, und die Differenz zu bilden.

Bevor die nächste Variation dieses Tricks besprochen werden soll, gibt es noch eine Limitation aufzuzeigen, was die Aussagekraft der oben beschriebenen Mathematik betrifft: Falls der vom Zauberer berechnete digitale Rest Null (bzw. die Quersumme ein Vielfaches von Neun) beträgt, ist es unmöglich zu sagen, ob die Mitspielerin die Ziffer Null oder Neun entfernt hat. Der Zauberer hat mehrere Möglichkeiten mit diesem Problem umzugehen. Zum Beispiel könnte er der Mitspielerin zu Beginn einen erfundenen Grund nennen, wonach es ihr nicht erlaubt ist, eine Null zu entfernen. Alternativ ist es möglich, einfach das Risiko einzugehen, dass eine Null oder Neun entfernt wird, denn die Wahrscheinlichkeit dafür befindet sich ungefähr im Rahmen von 5-15%. (Zuerst müsste in der Differenz erst einmal eine Null oder Neun auftauchen, und dann müsste diese Ziffer auch noch gewählt werden.) Falls spekuliert wird, und der Fall doch eintritt, könnte der Magier eine Floskel in den Raum werfen, wie beispielsweise, dass seine magischen Fähigkeiten heute etwas Hilfe benötigen, und um die Information bitten, ob die entfernte Ziffer größer oder kleiner als 5 ist.

Viele andere **Variationen dieses Zaubertricks** beruhen auf der Idee, entweder mit einer Zahl zu beginnen, die bereits ein Vielfaches von Neun ist, oder im Laufe der Vorführung eine solche Zahl zu erzeugen. Zum Beispiel könnte die Telefonnummer oder das Alter, bzw. der Geburtstag einer Person des Publikums, die Anzahl der Besucher, oder die Seriennummer eines Geldscheins den Ausgangspunkt bilden. Folgende Methoden können dabei helfen, daraus eine Zahl mit digitalem Rest von Null zu bilden:

1. Wird eine beliebige (im Idealfall ein- oder zweistellige) Zahl von einer Mitspielerin in den Taschenrechner eingegeben, und dann mit beliebigen Ziffern so oft multipliziert, bis das Ergebnis die Anzeige des Taschenrechners ausfüllt, hat der Magier mit einer hohen Wahrscheinlichkeit eine Zahl erzeugen lassen, die durch Neun teilbar ist. Warum? Es reicht, wenn insgesamt einer von vier Faktoren(-kombinationen) eingetreten ist: $(3)(3) = 9$, $(3)(6) = 18$, $(6)(6) = 36$, oder lediglich $(\cdot 9)$. Jeder dieser vier Faktoren ist ein Vielfaches von 9, also ist es auch das Endergebnis, das der Taschenrechner anzeigt.

2. Zu Beginn dieses Unterkapitels wurde argumentiert, dass das Spiegeln und darauffolgende Subtrahieren der größeren von der kleineren Zahl ein Vielfaches von Neun ergibt. Dieselbe Argumentation ist auch zulässig für das zufällige Vertauschen der Ziffern im Allgemeinen.

3. Sei n eine beliebige natürliche Zahl, so liefert das Abziehen ihrer Ziffernsumme ebenfalls eine Zahl, die durch Neun teilbar ist. Um dies zu zeigen, starten wir abermals bei der Form für die Kongruenz einer beliebigen $(s + 1)$-stelligen Zahl $n, a_k \in \mathbb{N}$: (vgl. Schott, 2009, S. 67)

$$n \equiv \sum_{k=0}^{s} a_k \pmod 9$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten die Ziffernsumme dieser Zahl

$$n - \sum_{k=0}^{s} a_k \equiv \sum_{k=0}^{s} a_k - \sum_{k=0}^{s} a_k \pmod 9$$

erhalten wir

$$n - \sum_{k=0}^{s} a_k \equiv 0 \pmod 9. \qquad \square$$

Aufgrund der Distributivgesetze für die Modulorechnung kann man auf Basis der bisher getätigten Überlegungen recht einfach weitere Zaubertricks beschreiben.

- $(a+b) \pmod n = [(a \pmod n)) + (b \pmod n))] \pmod n$
- $(a \cdot b) \pmod n = [(a \pmod n)) \cdot (b \pmod n))] \pmod n$

Die beiden folgenden Tricks benötigen ein wenig mehr Kopfrechenleistung des Zauberers, falls er sich nicht mit Stift und Papier helfen möchte. (vgl. Gardner, 1956, S. 167f)

Bei dem **Additions-Trick** lässt der Zauberer eine Addition von beliebig vielen Zahlen mit beliebig vielen Stellen durchführen. Nur das Aufschreiben der Summanden muss für ihn zu sehen sein - dies könnte an einer Tafel geschehen. Möglichst ohne es sich anmerken zu lassen, rechnet der Zauberer den digitalen Rest aller Zahlen, die aufgeschrieben werden, mit. Mit ein wenig Übung geht dies sehr einfach, da alle Summanden als eine einzige, lange, zusammenhängende Zahl betrachtet werden können, von der der digitale Rest gebildet wird. Aufgrund des Distributigvesetzes für die Addition muss der digitale Rest der Summe den selben Wert ergeben, wie die Summe der digitalen Reste der Summanden (die der Magier kennt!). Um eine von der Zuschauerin versteckte Ziffer des Ergebnisses zu finden, muss der Zauberer lediglich von seinem digitalen Rest den digitalen Rest der verbleibenden Ziffern abziehen. Falls der zweite Rest größer ist als der erste (also der des Zauberers), muss er sich einen „Restklassenübertrag ausborgen", also vor der Subtraktion +9 zu seinem Rest addieren.

Der **Multiplikations-Trick** von Martin Gardner greift dieselbe Idee auf. Eine Zuseherin schreibt zwei beliebig lange Zahlen für den Zauberer sichtbar auf, die sie danach verdeckt multipliziert. Bei der Bildung des digitalen Restes muss der Zauberer hierbei beachten, dass die beiden Faktoren natürlich nicht als eine einzige lange Zahl betrachtet werden dürfen. Wie es das Distributivgesetz beschreibt, muss der digitale Rest der Faktoren multipliziert (und anschließend gegebenenfalls um Vielfache von 9 reduziert) werden, um die Gleichheit mit dem digitalen Rest des Produktes zu erfüllen. Durch analoges Vorgehen wie bei dem Additions-Trick kann der Zauberer nun eine von der Zuschauerin versteckte Ziffer des Ergebnisses ausfindig machen.

Bei beiden Versionen (und ebenso dem folgenden Trick) darf nicht auf das Problem der Uneindeutigkeit der Ziffern Null und Neun vergessen werden. Um damit umzugehen, wurden aber bereits Hilfen vorgeschlagen.

Engelhardt & Gustke (2005, S. 71f) schlagen zwei weitere Varianten eines Additions-Tricks vor, die eine Erwähnung verdienen.

Bei dem **Zehn-Ziffern-Trick** darf eine Mitspielerin zwei selbstgewählte für den Magier nicht sichtbare Zahlen addieren, wobei insgesamt alle Ziffern von Null bis Neun nur einmal vorkommen dürfen, bzw. müssen. Also beispielsweise zwei fünfstellige Zahlen wie 41590 + 82736, oder eine dreistellige und eine siebenstellige Zahl: 538 + 9041276. Die Summe ist immer ein Vielfaches von Neun, da $0+1+2+\cdots+8+9 = 45 \pmod 9 \equiv 0$. (Es wird abermals mit dem Distributivgesetz argumentiert.) Genau wie bei den anderen Tricks auch, kann der Zauberer aufgrund dieser Tatsache eine fehlende Ziffer des Ergebnisses bestimmen, ohne die Summanden gesehen zu haben.

Im Unterschied zu dem Additions-Trick von Martin Gardner ist die **Lange Addition** insofern eine interessante Adaption, als dass eine Zuschauerin diesmal die Ziffer eines Summanden abändert, und nicht das Ergebnis um eine Stelle reduziert.
Eine Zuschauerin darf beliebige Summanden einer Addition niederschreiben, wobei der Zauberkünstler zusieht. Um diesen Trick nicht zu schwierig werden zu lassen, bieten sich drei bis vier Summanden, mit drei bis vier Stellen an.
Beispielsweise wählt die Zuschauerin:

$$\begin{array}{r} 1546 \\ +\ 8431 \\ +\ 4724 \\ +\ 3620 \end{array}$$

Der Zauberer darf nun einen beliebigen fünften Summanden hinzufügen, mit dem heimlichen Ziel, eine Summe mit digitalem Rest von Null zu erzeugen. Wie schon bei dem Additions-Trick beschrieben, können auf Basis der Theorie für das Bilden von digitalen Resten sowie des Distributivgesetzes, mehrere Summanden als eine einzige lange Zahl betrachtet werden. Dies bedeutet, dass man „Neuner-Ziffernpaare hinauswerfen“ kann. Aufgrund dieser Idee addiert der Zauberer spaltenweise Ziffern, und bildet seinen neuen Summanden, indem er diese spaltenweise Ziffernsumme auf das nächste Vielfache von Neun ergänzt. Mit diesen Ergänzungen werden die Stellen seiner Zahl gefüllt. Exemplarisch ergibt sich für die Einerstelle 7, denn $6+1+4+0 = 11+7 = 18$. Analog wird für die Zehner-, Hunderter-, und Tausenderstelle fortgefahren, und für dieses Beispiel wäre die Zahl des Zauberers 2577. Nach Hinzufügen dieses Summanden schaut der Zauberer für die restliche Dauer des Zaubertricks weg.

$$\begin{array}{r} 1546 \\ +\ 8431 \\ +\ 4724 \\ +\ 3620 \\ +\ 2577 \end{array}$$

Nun darf die Zuschauerin eine beliebige Ziffer einer dieser fünf Zahlen löschen, und durch eine Null ersetzen. Danach soll sie die Summe berechnen. In unserem Beispiel entscheidet sich die Zuschauerin dafür, die 2 des dritten Summanden durch eine 0 zu ersetzen.

$$\begin{array}{r} 1546 \\ +\ 8431 \\ +\ 47\underline{\mathbf{0}}4 \\ +\ 3620 \\ +\ 2577 \\ \hline 20878 \end{array}$$

Nachdem die Zuschauerin das Ergebnis berechnet hat, kann sie entweder die gesamte Rechnung mit Ausnahme des Ergebnisses löschen und den Zauberer einen Blick darauf werfen lassen, oder ihm die Ziffern des Ergebnisses in beliebiger Reihenfolge sagen. Der Zauberer bildet den digitalen Rest (in diesem Fall 7), und die von der Zuschauerin durch Null ersetzte Ziffer 2 lässt sich dadurch bestimmen, dass 7 auf 9 durch +2 ergänzt wird. Die Begründung ist analog wie bei den vorangegangenen Tricks.

3.3.2 Das Alter erraten

Üblicherweise ist es relativ einfach, das Alter einer Person auf ungefähr 5 bis 10 Jahre einzuschränken, speziell wenn die Person noch kein allzu hohes Alter erreicht hat. Dieser Umstand wird auf ziemlich kreative Art und Weise bei diesem Zaubertrick benutzt. (vgl. Lee, 1976, S. 46f)

Im ersten Schritt ist der Magier dazu angehalten, durch Interaktion mit dem Publikum eine beliebige Zahl zu erzeugen, die ein Vielfaches von Neun ist. In Kapitel 3.3.1 wurden dafür bereits einige Ideen geliefert. Angenommen, das Datum des Tages der Vorführung ist der 09. 07. 2024, was dem Magier bewusst ist. Die 9 kommt ihm sehr gelegen, also lässt er eine Mitspielerin das Produkt dieser drei Zahlen berechnen, also $9 \cdot 7 \cdot 2024$, und schließlich das Ergebnis noch mit drei weiteren zufälligen Ziffern mithilfe eines Taschenrechners multiplizieren. Die Zuschauerin könnte 5, 4, und 7 wählen, was ein Ergebnis von 17851680 liefert. Natürlich ist es dem Zauberkünstler unmöglich, diese Zahl zu kennen, was er sich von dem Publikum auch gerne bestätigen lässt. Uns ist aber bekannt, dass diese Zahl aufgrund des Faktors 9 einen digitalen Rest von Null hat.

Nun bittet der Magier eine beliebige Person des Publikums, ihr Alter zu dieser dem Magier unbekannten Zahl zu addieren, und das Ergebnis zu verlautbaren. Angenommen, die Person ist 34 Jahre alt, und rechnet $17851680 + 34 = 17851714$. Der Zauberer kann nun für sich selbst entscheiden, ob er den digitalen Rest oder die Quersumme berechnen möchte (es funktioniert beides). Wie gleich klar wird, eignet sich für den Fall, dass die mitspielende Person etwas älter ist, die Quersumme besser (da sie etwas „höher“ beginnt), demonstrativ soll für dieses Beispiel jedoch der digitale Rest berechnet werden.

Der digitale Rest von 17851714 ist 7, und ist die Konsequenz aus der Addition des Alters.

Dies bedeutet, dass das Alter der Person nun ein Vielfaches von Neun (+7) sein muss. Die Person ist also entweder ...

- $0 + 7 = 7$
- $9 + 7 = 16$
- $18 + 7 = 25$
- $27 + 7 = 34$
- $36 + 7 = 43$
- $45 + 9 = 54$
- 63, 72, 81, 90, ...

Jahre alt.

An dieser Stelle möchte ich die ersten Worte dieses Unterkapitels in Erinnerung rufen. Wenn der Zauberkünstler die mitspielende Person sehen kann, ist es ihm in den meisten Fällen sicherlich möglich, einzuschätzen, ob er mit der Schätzung von 25, 34, oder 43 Jahren richtig liegen würde.

Ein sehr beeindruckendes Kunststück wie ich finde, da aus Sicht des Publikums der Zauberer nur eine einzige Information hatte: Eine Zahl, die er unmöglich kennen konnte.

3.3.3 Ähnliche Effekte, andere Ansätze

Zum Abschluss dieser Kategorie möchte ich noch zwei kurze Tricks vorstellen, die nicht direkt auf der Theorie von digitalen Resten basieren, aber dennoch mit der Zahl 9, bzw. *missing digits* zu tun haben.

Der ***two-missing-digits-Trick*** entspricht ungefähr der ersten Hälfte des in Kapitel 3.2 vorgestellten 1089-Tricks. Nachdem die Mitspielerin eine beliebige dreistellige Zahl mit unterschiedlichen Ziffern spiegelverkehrt aufgeschrieben, und die größere von der kleineren Zahl abgezogen hat, sind die möglichen Ergebnisse wie bewiesen wurde 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, und 891. Zwei Tatsachen sind schnell zu erkennen: Erstens ist die Zehnerstelle immer eine Neun, und zweitens ist die Summe der Einer- und Hunderterstelle ebenfalls immer Neun. Das erlaubt dem Zauberer, die mittlere sowie eine beliebige Randziffer von einer Mitspielerin streichen zu lassen, und er kann sie dennoch ohne Schwierigkeiten wieder herbeizaubern. (vgl. Gardner, 2016, S. 180f)

Benjamin (2015) beschreibt eine **Kuriosität**, mit deren Hilfe entweder die Ziffernsumme einer Zahl vorhergesagt, oder eine fehlende Ziffer bestimmt werden kann.

Uns ist bekannt, dass die Ziffernsumme des Produktes einer beliebigen Zahl b und der Ziffer 9 immer ein Vielfaches von 9 ist. Unter gewissen Umständen ist die Ziffernsumme jedoch immer exakt 9, egal aus wie vielen Ziffern (bzw. Stellen) b besteht. Die einzigen beiden Voraussetzungen sind:

- Die Ziffern müssen der Größe nach „von links nach rechts“ aufsteigend geordnet sein.
- Falls alle Ziffern paarweise unterschiedlich sind, reicht Regel 1 aus. Falls manche Ziffern öfters vorkommen, wird gefordert, dass der Wert der Ziffer der Einerstelle größer ist als der Wert der Ziffer der Zehnerstelle.

Folgende Beispiele sollen dieses Phänomen illustrieren:

- $123456789 \cdot 9 = 1111111101$. Ziffernsumme: 9.
- $138 \cdot 9 = 1242$. Ziffernsumme: 9.
- $23479 \cdot 9 = 211311$. Ziffernsumme: 9.
- $11124477777889 \cdot 9 = 100120300001001$. Ziffernsumme: 9.

Diesen interessanten Effekt könnte man mathematisch folgendermaßen formulieren:

Satz 5: Sei $b \in \mathbb{N}$ eine Zahl, die der Reihe nach aus den Ziffern $X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n$ ($n \in \mathbb{N}$) besteht. X_1 beschreibt also die Stelle mit dem höchsten Wert, und X_n die Einerstelle. Falls $X_1 \leq X_2 \leq ... \leq X_{n-1} < X_n$ gilt, ist die Ziffernsumme aus dem Produkt von b und 9 immer 9.

Beweis von Satz 5: Um $9 \cdot b$ zu berechnen, multiplizieren wir b mit 10, und ziehen davon einmal b ab. Erklärend soll angemerkt werden, dass in diesem Beweis die Zahl b anhand ihrer Stellen beschrieben wird, welche die Ziffern $X_1 \leq X_2 \leq ... \leq X_{n-1} < X_n$ repräsentieren. Der Wert von b, also $X_1 \cdot 10^{(n-1)} + X_2 \cdot 10^{(n-2)} + ... + X_{n-1} \cdot 10^1 + X_n \cdot 10^0$ ist irrelevant.

	X_1	X_2	X_3	...	X_{n-1}	X_n	0
-		X_1	X_2	...	X_{n-2}	X_{n-1}	X_n
	(X_1)	$(X_2 - X_1)$	$(X_3 - X_2)$	...	$(X_{n-1} - X_{n-2})$	$(X_n - X_{n-1} - 1)$	$(10 - X_n)$

Besondere Beachtung soll den letzten beiden Spalten geschenkt werden. In der letzten Spalte bedarf es bei der Differenzbildung einer Korrektur, da $X_n > 0$ gilt, und dieser Übertrag wirkt sich durch „-1“ auf die vorletzte Spalte aus. Ab diesem Zeitpunkt kann bei den höherwertigen Stellen aufgrund der Ordnung kein Übertrag mehr entstehen.
Berechnet man nun die Ziffernsumme des Ergebnisses ist zu erkennen, dass es sich um eine Teleskopsumme handelt. Alle Beiträge mit Ausnahme von $10 - 1 = 9$ heben sich auf. $\square$

Nach all diesen Tricks, die größtenteils sehr eng mit den Teilbarkeitsregeln der Zahl 9 zu tun haben, könnte sich ein/e aufmerksame/r Leser*in die Frage stellen: „Warum denn gerade die Neun? Was hat es mit dieser Ziffer auf sich?“ Einige Autorinnen und Autoren, wie beispielsweise auch Martin Gardner (2016, S. 185ff), beantworten diese Frage damit, dass die Neun die letzte (bzw. höchste) Ziffer unseres Dezimalsystems ist. Gardner zeigt dies auch anhand von Beispielen. Würden man innerhalb eines Zahlensystems arbeiten, das beispielsweise auf der Basis 8 beruht, würde die 7 die meisten Eigenschaften mit der 9 im „Zehnersystem“ teilen.

3.4 Kurven und Punkte - Ein Trick aus der Topologie

Die theoretische Grundlage für den Zaubertrick dieses Abschnittes bildet ein fundamentales Theorem aus der Topologie: Das *Jordan Curve Theorem* (kurz JCT), oder auf Deutsch: Der Jordansche Kurvensatz.
Dieser besagt vereinfacht formuliert, dass jede geschlossene Jordan-Kurve, also jede einfache geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^2$, eine Ebene in zwei disjunkte Gebiete, eine „innere“ Region und eine „äußere“ Region, unterteilt. (Hales, T., 2007a)

Der Beweis für diese auf den ersten Blick vielleicht offensichtliche bzw. intuitiv unbestreitbare Aussage ist alles andere als trivial, und wurde erstmals von dem französischen Mathematiker Camille Jordan (1838 - 1922) bewiesen. An dieser Stelle sei angemerkt, dass der Beweis von Jordan über mehrere Jahrzehnte von Mathematiker*innen als unvollständig und/oder fehlerhaft bezeichnet wurde, sich diese Vorwürfe im Laufe der Zeit jedoch als unhaltbar herausgestellt haben. (vgl. Hales, T., 2007b)

Schlussfolgerungen des JCT spiegeln sich in Techniken wieder, die v.a. in der algorithmischen Geometrie eingesetzt werden (vgl. Preparata & Shamos, 1985, S. 17ff). Beispielsweise werden sogenannte *ray casting algorithms* wie der *crossing number algorithm* zur Behandlung bzw. zum Lösen von *point in polygon*-Problemen benutzt. Dabei geht es um die Analyse, ob sich Punkte innerhalb oder außerhalb eines Polygons befinden. Eine vereinfachte Beschreibung solcher Strategien veröffentlicht der langjährige NVIDIA Mitarbeiter und 3D-Grafik-Programmierer Eric Haines (1994, S. 24-46). Der bereits erwähnte *crossing number algorithm* (auch bekannt als *even-odd rule*) wird von Haines (1989, S. 53ff) in einem Kapitel aus *An Introduction to Ray Tracing* etwas genauer beschrieben, und stellt die praktische Grundlage für unseren Zaubertrick dar. (vgl Gardner, 1986, S. 79-81)

Kurz gesagt erlaubt diese Regel für den Fall einer geschlossenen Jordan-Kurve die Zuordnung eines beliebigen Punktes B zu einer Region (also „innen“ oder „außen“) abhängig von der Situation eines Punktes A. (Dabei liegen weder A noch B auf der Kurve.)
Zieht man eine gerade Linie von Punkt A zu Punkt B, und zählt die Anzahl der Schnittpunkte der Linie mit der Kurve, so bedeutet eine gerade Anzahl der Schnittpunkte, dass sich Punkt B in derselben Region befindet wie Punkt A. Ist die Anzahl der Schnittpunkte

jedoch ungerade, so befindet sich B nicht in der Region von A.

Wie lässt sich diese Regel für einen Trick nutzen? Der Zauberer bittet eine Zuschauerin, eine möglichst gewundene, geschlossene Kurve auf ein Blatt Papier zu zeichnen. Dabei soll betont werden, dass sich die Kurve niemals schneiden (bzw. berühren) darf, und das Ende an den Anfang anschließen muss. Wenn der Zauberer möchte, kann er dies zuvor an einem Beispiel illustrieren. Der Zauberer sieht der Zuschauerin beim Zeichnen ihrer Kurve nicht zu, und sobald sie fertig bist, wird sie um zwei Aktionen gebeten:

- Markiere eine Stelle auf dem Blatt Papier mit einem Kreuz. Optimal ist eine Stelle, in deren Nähe die Kurve sehr chaotisch aussieht. Danach untersuche, ob sich das Kreuz innerhalb oder außerhalb der Kurve befindet. (vgl. Abbildung 19)
- Verdecke das Blatt Papier von allen vier Seiten. Es sollte nur ungefähr die Hälfte der Fläche zu sehen sein. Zum Zwecke der Abdeckung können Bücher verwendet werden. Alternativ ist es auch möglich, jede Seite des Papiers nach unten hin zu falten. (vgl. Abbildung 20)

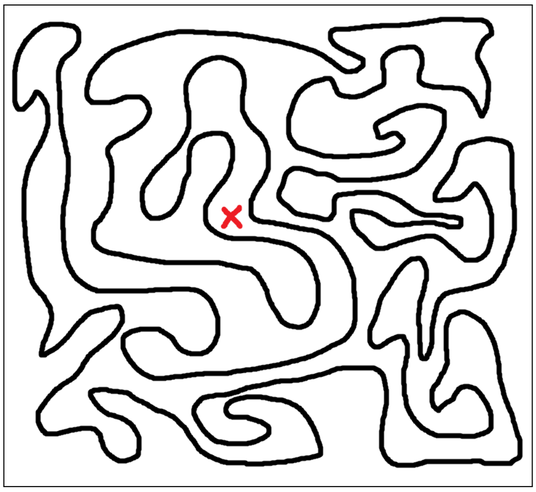

Abbildung 19: Das X ist „außen“.

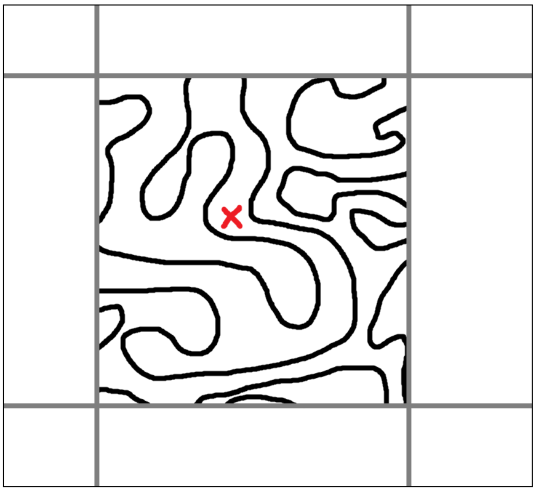

Abbildung 20: Nach der Eingrenzung.

Nun werfe der Magier einen Blick auf die Zeichnung der Mitspielerin, und bitte sie um Information, ob der markierte Punkt innerhalb oder außerhalb der Kurve liegt. In diesem Fall befindet sich das X außen. Dies ist leicht zu erkennen, wenn man in Abbildung 19 der Region von X aus nach unten, dann nach links, und schließlich nach oben folgt.
Im Anschluss darf die Mitspielerin beliebige weitere Stellen in dem eingeschränkten Gebiet markieren. Der Effekt dieses Tricks besteht nun darin, dass der Zauberer von jedem dieser Punkte sagen kann, ob er sich innerhalb oder außerhalb befindet. Es reicht, in Gedanken eine gerade Linie von dem Kreuz der Mitspielerin zu der neuen Markierung zu ziehen, und die Sprünge über die Kurve zu zählen. Aufgrund der *even-odd rule* bedeutet

eine gerade Anzahl von Sprüngen die selbe Region, und eine ungerade Anzahl die andere Region.

Abbildung 21 illustriert die Regel, nach der der Zauberkünstler vorzugehen hat. Die Zahl in der Klammer soll die Anzahl der Kurvenüberquerungen angeben, und ein „A“ steht für „Außen“ , und ein „I“ für „Innen“.

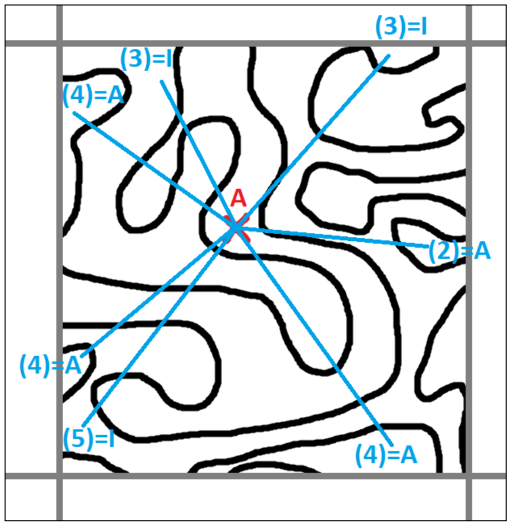

Abbildung 21: Die *even-odd rule* in Effekt.

In einer anderen Veröffentlichung schlägt Gardner (1956, S. 105ff) eine Präsentation dieses Tricks mit einer langen Schnur, bzw. einem Band vor, das auf dem Boden in einem möglichst komplexen Muster - aber ohne sich zu kreuzen - aufgelegt wird. Der Zauberer sieht diesem Prozess zu, und merkt sich die „Innen oder Außen-Charakteristik“ einer zentralen Stelle innerhalb der Figur, wobei er davon ausgeht, dass diese nicht verdeckt wird.

Nachdem nun die Seiten beispielsweise mit Zeitungspapier abgedeckt werden, darf die Zuschauerin ein Bein (oder auch einen Finger) auf einem Punkt innerhalb des Musters platzieren. Durch Abgleich mit seiner gemerkten Stelle kann der Magier bestimmen, ob sich das Körperteil der Zuschauerin auf der Innen- oder Außenseite der durch das Band begrenzten Fläche befindet. Er kann also eine Prognose abgeben, ob die Zuschauerin gefangen wird oder nicht, falls das Band herausgezogen wird.

Alternativ könnte ein Zauberkünstler - falls es der Untergrund erlaubt - mehrere Stellen mit Stecknadeln markieren. Wenn er darauf Acht gibt, dass alle Nadeln von einem Bezugspunkt (bzw. voneinander) eine gerade Anzahl von Sprüngen entfernt sind, dann befinden sich alle Stecknadeln in derselben Region - also entweder innen oder außen. Wird ein Band daraufhin weggezogen, sind entweder alle Nadeln „gefangen“, oder das Band gleitet ohne Hindernis aus dem Chaos heraus.
Hat der Zauberer ein Bezugsobjekt, von dem er genau weiß, dass es sich innerhalb oder außerhalb befindet, könnte er diesen Trick so präsentieren, dass nur eine einzige ihm bekannte Stecknadel innerhalb des Bandes verbleibt, und alle anderen dem Gefängnis beim Hervorziehen entkommen.

3.5 Fibonacci zaubert

Dieser Trick, der von einigen Autoren wie beispielsweise Blum et al (2002, S. 143-150) oder Simon (1993, S. 20-25) beschrieben wird, ist eigentlich ein Schnellrechentrick, der im Rahmen einer unter Mathematiker*innen sehr bekannte Theorie präsentiert wird: Der Fibonacci-Folge.

Der Zauberer schreibt die Zahlen 1 bis 10 untereinander auf ein Kärtchen oder an die Tafel, und bittet eine Mitspielerin, sich zwei natürliche Zahlen von 1 bis 9 auszusuchen, und diese in beliebiger Reihenfolge rechts neben die 1 (also als erste Zahl), und rechts neben die 2 als zweite Zahl zu schreiben.
Das Intervall 1-9 ist nur ein Vorschlag, und kann beliebig erweitert werden.

Der Zauberer erklärt nun das Prinzip, wonach die nächsten acht Zahlen gebildet werden sollen. Es entspricht der Konstruktion einer Fibonacci-Folge mit beliebigen Startwerten: Die Folgezahl ist immer die Summe der beiden vorangegangen Zahlen.
Nachdem die Mitspielerin fertig ist - sie darf wenn sie möchte einen Taschenrechner verwenden - und der Zauberer sich für den Großteil (oder die gesamte) Rechenübung abgewandte hatte, kann er mit zwei magischen Effekten für Überraschung sorgen:

- Es ist ihm sofort möglich, die Summe aller zehn Zahlen aufzuschreiben.
- Bereits vor dem Trick hatte er eine Prognose verfasst: „$1,61$...“. Diese präsentiert er, nachdem er die Mitspielerin bittet, die Zahl der zehnten Zeile durch die der neunten Zeile zu dividieren. Die Vorhersage stimmt.

Wie hilft die Mathematik dabei? (vgl. Benjamin & Shermer, 2013, S. 226ff)

Abbildung 22 illustriert ein Beispiel dieses Tricks, wobei die Zuschauerin mit den Zahlen 7 und 4 begonnen, und daraufhin die Tabelle ausgefüllt hat. Wie konnte der Zauberer nach nur einem Blick die Summe von 737 darunterschreiben? Als Hinführung zu dieser Idee dient Abbildung 23 ($x, y \in \mathbb{N}$). Die Aufmerksamkeit soll auf Zeile Sieben gerichtet werden, denn die Ergebnissumme ist genau das 11-fache der siebenten Zeile: $55x + 88y = 11(5x + 8y)$.

Die Leistung des Zauberers besteht nun darin, schnell dieses Produkt ermitteln zu können. Das bedeutet, nach einem kurzen Blick auf die Zahl, welche die Zuschauerin in die siebente Zeile geschrieben hat, diese mit 11 zu multiplizieren. Und dafür gibt es einen sehr einfach zu erlernenden Schnellrechentrick. (vgl. Handley, 2010, S. 71ff)

Erinnert man sich zurück an die frühe Schulzeit und die Technik des Multiplizierens mit einer zweistelligen Zahl, wird dieses Problem zurückgeführt auf die Addition zweier Summanden, die jeweils um eine Stelle versetzt angeschrieben werden. Die Multiplikation mit 11 ist ein schöner Sonderfall, da die Summanden jeweils 10-mal und 1-mal die Ausgangszahl sind - dem ersten Summanden also lediglich eine Null angehängt wird. Mathematisch formuliert steckt hinter diesem Prinzip die simple Idee, dass $11x = 10x + 1x$

1	7
2	4
3	11
4	15
5	26
6	41
7	67
8	108
9	175
10	283
	737

Abbildung 22: Die Entwicklung der Fibonacci-Folge.

1	x
2	y
3	$x + y$
4	$x + 2y$
5	$2x + 3y$
6	$3x + 5y$
7	$5x + 8y$
8	$8x + 13y$
9	$13x + 21y$
10	$21x + 34y$
	$\boldsymbol{55x + 88y}$

Abbildung 23: Die Entwicklung in Variablenform.

ergibt. Dieser Umstand führt dazu, dass die „versetzte Addition“ sehr einfach durchzuführen ist. Abbildung 24 demonstriert die Regeln hinter dem Schnellrechentrick besser als es Worte tun könnten.
Beim Addieren sollte man bei der Einerstelle beginnen, und Überträge dürfen natürlich nicht vergessen werden.

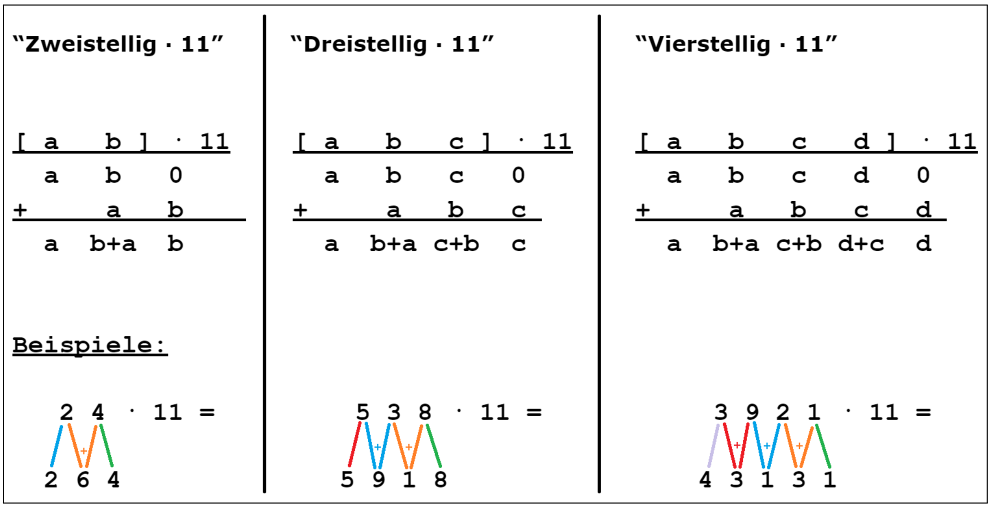

Abbildung 24: Der Schnellrechentrick für „mal 11“.

Der zweite Teil dieses Zaubertricks betrifft den Quotienten der zehnten und neunten Zeile $\frac{21x+34y}{13x+21y}$ und die Vorhersage, dass dieser mit den Ziffern $1,61$ beginnt.

Um dies zu zeigen, soll zuerst $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ die Gültigkeit der Ungleichung $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ bewiesen werden, für $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$$

Weiters gilt:

„Linker Teil“ der Ungleichung:

$$\begin{aligned} ad &< bc & (\Leftrightarrow) \\ ad + ab &< bc + ab & (\Leftrightarrow) \\ a \cdot (b+d) &< b \cdot (a+c) & (\Leftrightarrow) \\ \frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

„Rechter Teil“ der Ungleichung:

$$\begin{aligned} ad &< bc & (\Leftrightarrow) \\ ad + cd &< bc + cd & (\Leftrightarrow) \\ d \cdot (a+c) &< c \cdot (b+d) & (\Leftrightarrow) \\ \frac{a+c}{b+d} &< \frac{c}{d} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \qquad \square$$

Die Koeffizienten aus Abbildung 23 erfüllen die Voraussetzungen für a, b, c, d, also gilt $\forall x \in \mathbb{N}$:

$$1,615... = \frac{21x}{13x} < \frac{21x + 34y}{13x + 21y} < \frac{34y}{21y} = 1,619...$$

Der Zauberer wird mit seiner Vorahnung also recht behalten. Die ersten Ziffern des Quotienten sind immer $1,61$.

Einer/m fachlich versierten Leser*in wird bekannt sein, dass sich der Quotient zweier aufeinanderfolgender Elemente einer Fibonacci-Folge ($\frac{f_{n+1}}{f_n}$) bei fortschreitendem n immer näher dem goldenen Schnitt $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ annähert. Dieser Umstand soll an dieser Stelle nur erwähnt und nicht bewiesen werden, da wir uns zu weit von der relevanten Thematik entfernen würden. Die Tatsache, dass Zusammenhänge zwischen dem goldenen Schnitt und der Fibonacci-Reihe in zahlreicher Literatur, wie beispielsweise Gardners *Mathematical circus* (1992, S. 152-169) oder Glaesers Buchkapitel *Fibonacci und näherungsweise exponentielles Wachstum* (2020, S. 78-82), untersucht werden, soll lediglich als weiteres Argument dafür dienen, dass sich die Theorie hinter einigen dieser vorgestellten Zaubertricks nicht nur in der Schule bzw. vor Laienpublikum, sondern auch auf Hochschulniveau für eine Auseinandersetzung legitimiert.

Abschließend soll noch kurz zu einer alternativen Vorführvariante Stellung genommen werden. Obwohl dem ersten Teil des Tricks - also dem Summieren von zehn Zahlen - natürlich eine Schnellrechentechnik zugrunde liegt, und er auch in diesem Sinne präsentiert werden kann, ist es möglich zu versuchen, diesen Aspekt zu verschleiern. Der Zauberer könnte probieren, unter dem Vorwand „Ob eh alles richtig gemacht wird“ einen Blick auf die Zahl der siebenten Zeile zu werfen, bevor die Zuschauerin ihre Reihenentwicklung vollständig abgeschlossen hat. Nun kann er bereits zu diesem Zeitpunkt die Summe als Vorahnung auf einem Blatt notieren (und vielleicht auch gleich die ersten drei Stellen des goldenen Schnitts, falls er dies nicht bereits im Vorhinein getan hat). (vgl. Simon, 1993, S. 22)

3.6 *Black Holes* - Mathematische schwarze Löcher

> „Like the legend, the physical universe has strange entities called black holes that pull everything toward them, never to escape. But did you know that we have comparable bodies in recreational mathematics? At first glance, these bodies may be even more difficult to identify in the world of number play than their more famous brethren in physics.“
> - Michael W. Ecker (Gardner & Rodgers, 2018, S. 41)

Mathematische schwarze Löcher eignen sich aufgrund ihrer faszinierenden zahlentheoretischen Eigenschaften sehr gut für Präsentationen in Form von Zaubertricks.
In Worten beschrieben kann man sich ein mathematisches schwarzes Loch als eine Funktion vorstellen, die eine Zahl, die ihr übergeben wird, und - um die Analogie aufrecht zu erhalten - somit ihren *Event Horizon*[30] betritt, nicht mehr entkommen lässt. Dies bedeutet, dass der Output der Funktion ihr immer wieder als Input übergeben wird, und zwar solange, bis schließlich die Singularität - also das Zentrum der „unendlichen“ Anziehungskraft - erreicht ist, und dessen Form angenommen wurde.
Mathematisch gesehen könnte man sagen es handelt sich also um Funktionen, die ab einem gewissen Iterationsschritt konvergieren.

Michael W. Ecker, der einige dieser Phänomene untersucht und beschreibt, gibt folgende Definition (vgl. Gardner & Rodgers, 2018, S. 43):

In mathematischem Sinne ist ein schwarzes Loch ein Tripel (b, U, f), bestehend aus einer Menge U, $b \in U$, und einer Funktion $f : U \to U$. Erfüllt werden folgende Bedingungen:

- $f(b) = b$.
- $\forall x \in U$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$: $f^k(x) = b$.

Beispiel 1: ***The Sisyphus String:*** 123. (vgl. Gardner & Rodgers, 2018, S. 41-44)

Wir beginnen mit einer beliebigen Zahl $x \in \mathbb{N} = U$. Die Funktion $f(x)$ beschreibt einen Vorgang, der die Ziffern des Inputs x untersucht, und darauf basierend eine Zahl zurückliefert. $f(x)$ zählt die Anzahl der geraden Ziffern x_g, die Anzahl der ungeraden Ziffern

[30] Der *Event Horizon* oder auch *Point of No Return* genannt bezeichnet den Orbit um ein kosmisches schwarzes Loch, bzw. den Abstand von Zentrum bis zu einem gewissen Punkt, ab dem die Anziehungskraft so groß ist, dass ihr nichts (nicht einmal Licht) mehr entkommen kann.

x_u, und die Anzahl der Ziffern von x insgesamt ($x_\# = x_g + x_u$), wobei die Null als gerade angenommen wird. Als Output liefert $f(x)$ nun einen String (bzw. eine Zahl) zurück, deren Ziffern sich nach der Reihe aus x_g, x_u, und $x_\#$ zusammensetzen. $f(x) = \overline{[x_g][x_u][x_\#]}$. Die eckigen Klammern und die horizontale Linie über dem Output soll ausdrücken, dass die Ziffern der drei Variablen hintereinander zu einer Zahl zusammengefügt werden.

Dieses schwarze Loch endet nach nur wenigen Iterationen immer in der Zahl 123, und verändert sich bei weiteren Anwendungen von $f(x)$ auch nicht mehr.

Zwei praktische Beispiele:

- Beginn: Wahl einer beliebigen natürlichen Zahl: 76307.
  Erste Iteration: $x_g = 2$, $x_u = 3$, $x_\# = 5$. $\rightarrow f^1(76307) = 235$.
  Zweite Iteration: $x_g = 1$, $x_u = 2$, $x_\# = 3$. $\rightarrow f^2(235) = 123$.
  Wiederholungstest: $x_g = 1$, $x_u = 2$, $x_\# = 3$. $\rightarrow f^3(235) = 123$.
- Beginn: Wahl einer beliebigen natürlichen Zahl: 11222222333455555566667889990.
  Die Iterationen in Kurzform: $\rightarrow 141630 \rightarrow 336 \rightarrow 123$.

Es stellt sich die Frage wie, bzw. falls überhaupt sich die Konvergenz solcher Algorithmen - wie in diesem Fall auf die Zahl 123 - für alle Elemente einer Menge beweisen lässt. Abhängig von der Funktion stellt sich dies in einigen Fällen als sehr schwierig heraus, weshalb gerne auf Computerunterstützung („try all numbers up to ...“) zurückgegriffen wird.

Für den *Sisyphus String* liefert Ecker einen recht interessanten Erklärungsansatz: (vgl. Gardner & Rodgers, 2018, S. 43f)

Für eine Start-Zahl $n > 999$, $n \in \mathbb{N}$, die also aus vier oder mehr Ziffern besteht, muss $f(n) < n$ sein. Oder anders gesagt: Für große Zahlen ist die Zahl, welche die Ziffern im Sinne des Algorithmus zählt, kleiner als die ursprüngliche Zahl. Dies bedeutet, dass man nach einer gewissen Anzahl von Iterationen bestimmt irgendwann ein Output < 1000 erreicht: $\exists k \in \mathbb{N} : f^k(n) < 1000$. Für ein n von 1 bis 999 könnte man nun einen Computeralgorithmus die Berechnungen durchführen lassen, oder man argumentiert eleganter:

Für alle dreistelligen natürlichen Zahlen sind die möglichen Outputs von $f(x)$ beschränkt auf nur vier Zahlen: $033, 123, 213, 303$. Alle diese vier Fälle sind nach nur einem weiteren Sprung in unserer Singularität 123 gefangen.

Beispiel 2: Die Kaprekar-Konstante: 6174 und ihr kleiner Bruder, 495.
(vgl. Poskitt, 2014, S. 152-154)

Die Kaprekar-Konstante ist eines der Resultate des indischen Zahlentheoretikers Dattatreya Ramchandra Kaprekar (1905-1986). Er untersuchte den folgenden Algorithmus und stellte fest, dass er für einen Input von vierstelligen Zahlen immer in der Zahl 6174, und

für dreistelligen Zahlen immer bei 495 endet.
Die Kaprekar-Routine wird durch ein $f(x)$ ausgedrückt, das die Ziffern des Inputs zuerst der Größe nach ordnet, danach eine Spiegelzahl bildet, und schließlich die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert. (Schnappszahlen sind als initialer Input nicht erlaubt.) In Kaprekars originaler Formulierung des Algorithmus werden Nullen nicht gestrichen, also behalten.

Zwei praktische Beispiele:

- Beginn: Wahl einer beliebigen vierstelligen Zahl: 3126.
  Erste Iteration: $6321 - 1236 = 5085$.
  Zweite Iteration: $8550 - 558 = 7992$.
  Dritte Iteration: $9972 - 2799 = 7173$.
  Vierte Iteration: $7731 - 1377 = 6354$.
  Fünfte Iteration: $6543 - 3456 = 3087$.
  Sechste Iteration: $8730 - 378 = 8352$.
  Siebente Iteration: $8532 - 2358 = 6174$.
  Wiederholungstest: $7641 - 1467 = 6174$.

- Beginn: Wahl einer beliebigen dreistelligen Zahl: 429.
  Erste Iteration: $942 - 249 = 693$.
  Zweite Iteration: $963 - 369 = 594$.
  Dritte Iteration: $954 - 459 = 495$.
  Wiederholungstest: $954 - 459 = 495$.

Es existieren einige Veröffentlichungen, die die Kaprekar-Routine nicht nur im Hinblick auf die Basis 10 und die Stellenanzahl 3 oder 4, sondern auch auf andere Basen und größere (bzw. kleinere) Zahlen hin untersuchen, wie beispielsweise von Daniel Hanover (2017). Es ist eher die Ausnahme als die Regel, dass dieser Algorithmus in einer einzigen Konstanten endet. In den meisten Fällen sind es je nach Start-Zahl entweder keine Konstante(n), mehrere Konstanten und/oder (zusätzlich) eine oder mehrere zyklische Wiederholungen. Beispielsweise endet die Routine für die Basis 8 und die Menge der zweistelligen Zahlen entweder in der Konstanten 25, oder in dem Zyklus $07 \rightarrow 61 \rightarrow 43 \rightarrow 07$.
Tatsächlich ist es so, dass für die Basis 10 und Start-Zahlen mit einer Stellenanzahl ≤ 10 nur die Mengen der drei- ($\rightarrow 495$) und vierstelligen Zahlen ($\rightarrow 6174$) eine einzige Konstante als Ende der Kaprekar-Routine zurückliefern.

Bezüglich der Beweise für die Konvergenz werden üblicherweise Computer herangezogen, da die Menge der Start-Zahlen immer beschränkt ist. Ein Beispiel für ein vollständiges *Kaprekar-Mapping* für dreistellige Zahlen in der Basis 10 illustriert Abbildung 25 (Hanover, 2017, S. 2). Die rechteckigen Kästchen links beinhalten ähnliche Zahlenbündel, die insgesamt alle dreistelligen Zahlen abdecken (Bemerkung: Die Zahl 1 wird „aufgefüllt“ bzw. sortiert zu 001, usw.). Die Zahl in der Mitte über den Verbindungspfeilen stellt die Anzahl der unterschiedlichen Zahlen dar, die bearbeitet wurden. Insgesamt müssen bei dem Kaprekar-Prozess für dreistellige Zahlen natürlich alle 1000 Zahlen bedacht werden (999 verschiedene Zahlen plus die „000“).

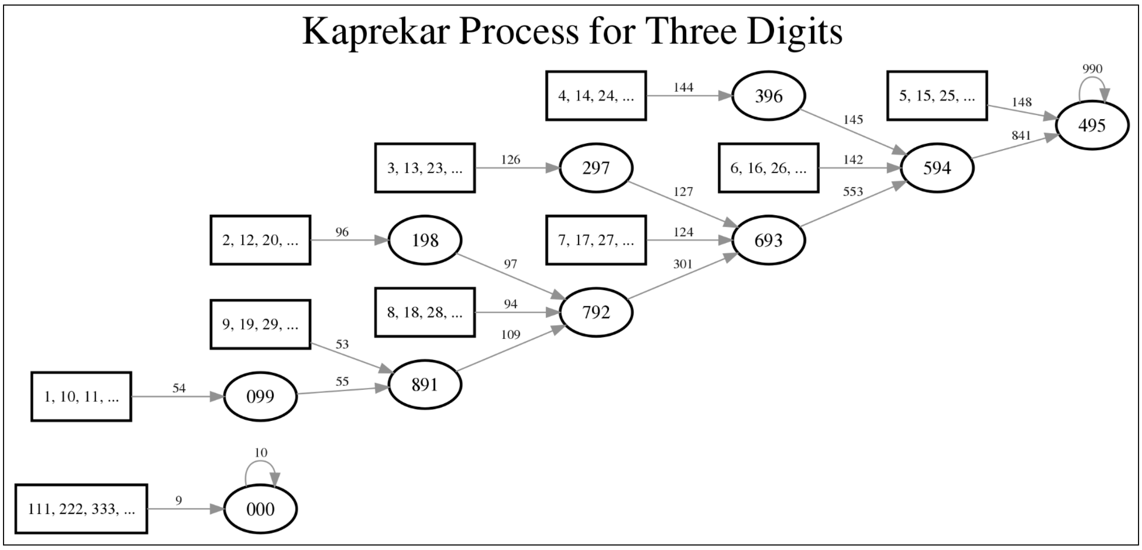

Abbildung 25: Das *Kaprekar-Mapping* für dreistellige Zahlen.

Ein *Kaprekar-Mapping* kann einige interessante Erkenntnisse liefern. Für die Durchführung in Form eines Zaubertricks wäre es beispielsweise gut, die maximale Anzahl der Iterationen zu kennen. Kein Magier möchte das Risiko eingehen, eine Mitspielerin 20-mal die Routine durchrechnen lassen zu müssen.
Die maximale Anzahl der Schritte für dreistellige Zahlen, um zu 495 zu gelangen, ist 6. Für vierstellige Zahlen wird die Kaprekar-Konstante 6174 innerhalb von sieben Schritten erreicht.

Bevor zu weiteren mathematischen Zaubertricks übergegangen wird, sollen noch in aller Kürze zwei weitere *Black Holes* vorgestellt werden, ohne viele Worte über die Erklärungen, bzw. Beweise zu verlieren:

Beispiel 3: *The Divisive Number* 15. (vgl. Gardner & Rodgers, 2018, S. 48)

Laut Beginn dieses Kapitels bedarf es für die Beschreibung eines mathematischen schwarzen Loches nach Eckers Definition eines Tripels (b, U, f).
In diesem Fall gilt $U = \mathbb{N}$, die Singularitätskonstante $b = 15$, und für ein $x \in U$ die Funktion $f(x)$ beschrieben durch folgende Worte: Bestimme alle natürlichen Teiler von x, inklusive 1 und x selbst. Danach bilde die Summe der Ziffernsumme aller Teiler.

Ein praktisches Beispiel:

- Beginn: Wahl einer beliebigen Zahl: 38.
  Erste Iteration: Teiler von 38: $1, 2, 19, 38$. Summe der Ziffernsummen: 24.

Zweite Iteration: Teiler von 24: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. Summe der Ziffernsummen: 33.
Dritte Iteration: Teiler von 33: $1, 3, 11, 33$. Summe der Ziffernsummen: 12.
Vierte Iteration: Teiler von 12: $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Summe der Ziffernsummen: 19.
Fünfte Iteration: Teiler von 19: $1, 19$. Summe der Ziffernsummen: 11.
Sechste Iteration: Teiler von 11: $1, 11$. Summe der Ziffernsummen: 3.
Siebente Iteration: Teiler von 3: $1, 3$. Summe der Ziffernsummen: 4.
Achte Iteration: Teiler von 4: $1, 2, 4$. Summe der Ziffernsummen: 7.
Neunte Iteration: Teiler von 7: $1, 7$. Summe der Ziffernsummen: 8.
Zehnte Iteration: Teiler von 8: $1, 2, 4, 8$. Summe der Ziffernsummen: 15.
Wiederholungstest: Teiler von 15: $1, 3, 5, 15$. Summe der Ziffernsummen: 15.

Beispiel 4: *The Narcissistic Number* 153. (vgl. Gardner & Rodgers, 2018, S. 44-46)

Hierbei gilt $U = 3 \cdot \mathbb{N}$, also alle natürlichen Zahlen, die durch Drei teilbar sind. Wie schon im Titel verraten wird ist die Konstante $b = 153$. Die Vorschrift für $f(x)$, $x \in U$ lautet: Bilde die Summe der dritten Potenz der Ziffern von x.
Auf ein Beispiel wird in diesem Fall verzichtet.

3.7 Die interaktive Summe

Der folgende Trick bietet einige Flexibilität bei der Präsentation. Der Illusion nach ist es eine Schnellrechenleistung des Zauberers, bei der er in scheinbar unmöglicher Geschwindigkeit eine Reihe von Summanden addiert, die teilweise vom Publikum kommen. Leicht adaptiert kann der Effekt auch eine Voraussage der Summe darstellen.

An dieser Stelle möchte ich erwähnen, dass dies einer der drei Zaubertricks war, die mir und meinen Studienkolleg*innen von dem in der Danksagung erwähnten Seminarleiter Herr Dipl.-Ing. Markus Wittberger präsentiert wurde. Nur einer einzigen Mathematikstudentin gelang es, der Idee des Tricks nach einer kurzen Reflexionsphase auf die Schliche zu kommen.

Wie wirkt der Trick aus Sicht einer Zuschauerin?

Der Magier bittet das Publikum einen Taschenrechner vorzubereiten - in der Zeit der Mobiltelefone kein Problem - und fügt weiters hinzu: „Ich werde nun einige Zahlen an die Tafel schreiben, und sie danach schneller addieren, als jeder von euch das mit dem Taschenrechner kann. Wer möchte mir als Erstes eine vierstellige Zahl nennen?“
Nachdem der Zauberer noch zwei weitere vierstellige Zahlen hinzufügt, die ihm das Publikum nennt, spricht er beiläufig die Worte: „Damit das Ganze etwas schneller geht, schreibe ich selbst noch zwei auf.“, womit nun fünf vierstellige Zahlen aufgeschrieben sind.
Im nächsten Atemzug, noch bevor auch nur eine Person des Publikums richtig damit beginnen konnte, die weiteren Zahlen in den Taschenrechner einzugeben, hat der Magier

bereits das Ergebnis an die Tafel geschrieben. (vgl. Beispiel: Abbildung 26)

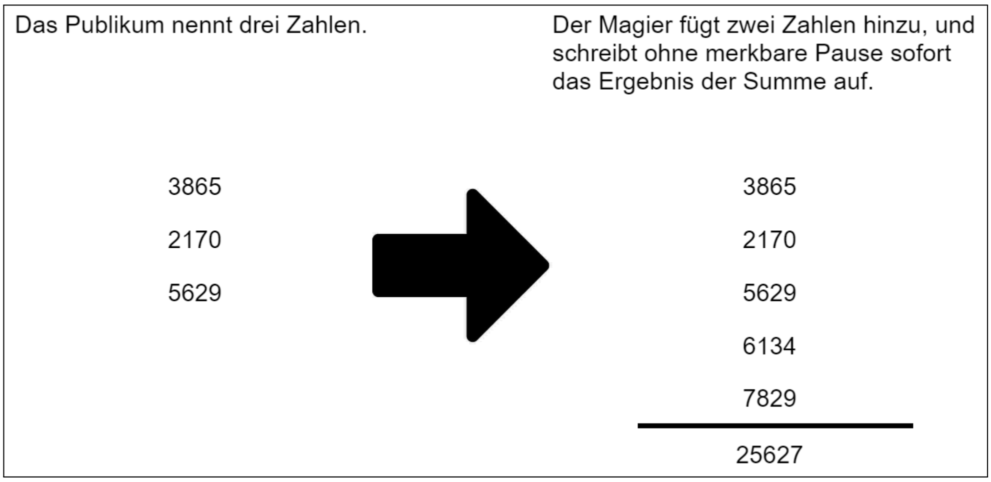

Abbildung 26: Der Effekt für die *Interaktive Summe*.

Natürlich behilft sich der Zauberkünstler eines arithmetischen Tricks, der je nach Vorführvariante unterschiedlich gut verschleiert wird.
Im Hintergrund steht die Idee, dass der Zauberer die beiden Zahlen, die er selbst hinzufügt, geschickt wählt: Er sucht sich zwei der drei Zahlen des Publikums aus, und bildet die „Neunerkomplemente“ deren Ziffern.
In diesem Fall hat der Zauberer die erste Ziffer des Publikums betrachtet (3865), und daraus seine erste Zahl konstruiert (6134). Analog wurde bei der zweiten Zahl des Zauberers vorgegangen. Die zweite Zahl des Publikums ist (2170), und die Werte, die auf eine Ergänzung der Stellen auf 9 nötig sind, bilden die zweite Zahl des Zauberers (7829).
Warum wird so vorgegangen?

Insgesamt befinden sich fünf Zahlen an der Tafel. Vier Zahlen davon bilden zwei Paare, die aufgrund der Bildung des Komplements jeweils eine Summe von 9999 haben. Somit ergeben beide Paare addiert 19998.
Nun wurde bisher einer der fünf Zahlen noch keine Beachtung geschenkt. Die Zahl in der Mitte: 5629. Um die Summe aller fünf Zahlen zu bilden, muss diese letzte Zahl lediglich mit 19998 addiert werden.
Und dies ist, abgesehen von der Bildung zweier 9er-Komplemente, die einzige weitere Leistung des Zauberers. Um die gesamte Summe zu bilden, muss er lediglich die letzte verbleibende Zahl abschreiben, wobei er aber von der Einerstelle 2 abzieht, und diese 2 als höchste Stelle anschreibt.
Denn dies entspricht einer Addition von 19998: (-2) gefolgt von $(+20000)$.
Die Summe aller fünf Zahlen ist also: $5629 - 2 + 20000 = 25627$. (vgl. Abbildung 27)

Eine Kleinigkeit gibt es bei dem Prozess zu beachten, sollte aber keine Schwierigkeit dar-

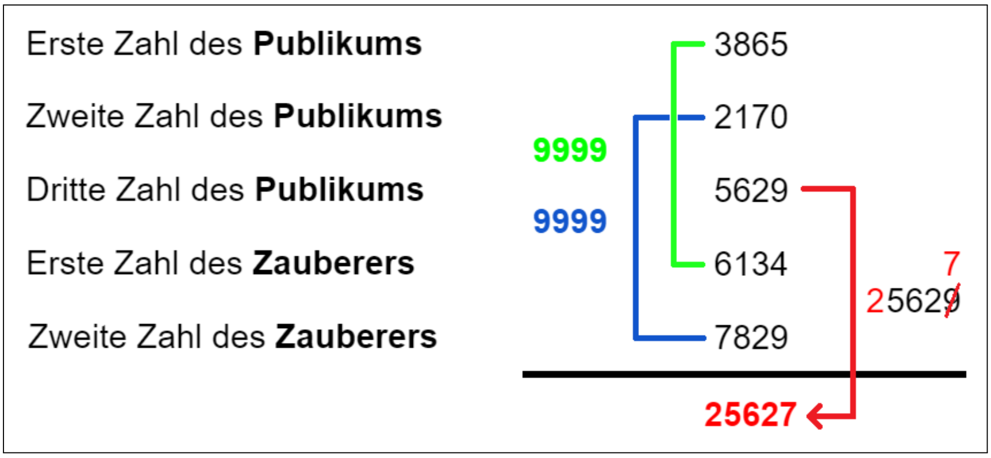

Abbildung 27: Der Trick hinter der *Interaktiven Summe.*

stellen. Hat eine Zahl des Publikums eine führende Neun, hat das Komplement natürlich eine Stelle weniger. Das 9er-Komplement von 9471 wäre beispielsweise 528. Falls diesbezüglich vom Publikum Fragen oder Einwände auftauchen, muss der Zauberkünstler mit Rhetorik und Charisma glänzen. Er könnte etwa eine führende Null davorsetzen, und antworten: „So eine Zahl gilt! Hättet ihr mir ja auch sagen können.“

Wie zu Beginn bemerkt, gibt es einige interessante Adaptionsmöglichkeiten, die unbedingt erwähnt werden sollen, da die Effekte teilweise sehr unterschiedlich wirken.

- Natürlich können auch 2-stellige, 3-stellige, 5-stellige, etc. Zahlen benutzt werden.
- Ebenso kann eine höhere Anzahl von Zahlenpaaren erstellt werden. Lässt sich der Zauberer beispielsweise vier Zahlen vom Publikum sagen, muss er in Folge drei Zahlen selbst hinzufügen. Somit existieren drei „Komplement-Paare“. Das bedeutet, der Zauberer muss im Anschluss die Zahl, von der er kein Komplement gebildet hat, folgendermaßen bearbeiten: 3 von der Einerstelle abziehen, und diese 3 vor die Zahl als neue höchste Stelle schreiben.
  Es muss erwähnt werden, dass es dem Zauberkünstler natürlich immer selbst überlassen ist, in welcher Reihenfolge er die Komplemente bildet, und auch, welche Zahl er als Basis für das Gesamtergebnis „übrig lässt“.
  Es gilt, die Methode möglichst gut vor dem Publikum zu verstecken. Einige Autoren bzw. Autorinnen beschreiben den Trick in einer Form, wonach sich der Zauberer und das Publikum immer mit Zahlen abwechseln. Wenn aber immer direkt nach einer Zahl ihr Komplement folgt, sticht das Konzept einem/einer aufmerksamen Beobachter*in viel eher ins Auge, als wenn die Paare weiter auseinander liegen.
- Der Trick kann als Vorhersage einer Summe präsentiert werden.
  - Diese Version beginnt ähnlich wie zuvor. Nachdem jedoch die erste Zahl von einer Mitspielerin auf die Tafel geschrieben wurde, gibt der Magier verdeckt

eine Prognose für die Summe ab. Dies ist möglich, da er bereits geplant hatte, diese erste Zahl als Ausgangspunkt für das Ergebnis zu nutzen, und die 9er-Komplemente auf Basis der weiteren Zahlen der Zuschauerinnen zu bilden. (vgl. Lipper, 2013, S. 23f)

  - Tanna (2016, S. 142ff) schlägt eine Variante vor, bei der der Zauberer eine Vorhersage abgeben kann, bevor auch nur eine einzige Zahl festgehalten wurde. Sei beispielsweise $x = 4721$ die Ziel-Summe, die er in einem Umschlag versiegelt. Diese Summe kann leicht „anvisiert" werden, indem der bekannte Vorgang nur rückwärts überlegt wird. Der Summand x_z, der benötigt wird um die Summe x anzuvisieren, wird gebildet, indem die Ziffer der höchsten Stelle entfernt, und als Einerstelle addiert wird. Somit erhält man $x_z = 725$. Da der Summe eine 4 voranging, muss der Zauberer im weiteren Ablauf des Tricks erstens mithilfe des Publikums *vier* (dreistellige) Komplement-Paare bilden, und zweitens, x_z als zusätzlichen Summanden „hineinschummeln". Im Unterschied zu den anderen bisher vorgestellten Tricks (dort war es umgekehrt), muss der Zauberer bei dieser Version eine Zahl mehr als das Publikum beitragen. Eine kurze Bemerkung: Hat der Zauberkünstler Schwierigkeiten sich x_z zu merken, könnte er den Trick einfach mit x_z als erstem Summanden beginnen.
  - Es ist sogar möglich, eine Person des Publikums das Ergebnis der Addition vorhersagen zu lassen. Das Prinzip ist das selbe wie zuvor. Natürlich muss der Zauberkünstler diese Vorhersage kennen. Beispielsweise könnte er sich vom Publikum eine beliebige Zahl zurufen lassen. Ein/e geübte/r Mathemagier*in könnte den Trick ohne Schwierigkeiten je nach führender Ziffer und Stellenanzahl adaptieren und durchführen. (vgl. Gardner, 1956, S. 170ff)

- Falls allergrößter Wert auf die Verschleierung der Methodik gelegt wird, könnten die Summanden nicht untereinander, sondern nebeneinander aufgeschrieben werden. Dies macht das Erkennen der Komplemente für ein ungeübtes Auge sehr schwierig.

3.8 Die Kartenreise

Die Erklärung für den folgenden Trick ist in der Geometrie, genauer gesagt in der Vektorrechnung zu finden (vgl. Tanna, 2016, S. 101ff). Der Zauberkünstler benötigt ein gemischtes Deck von Spielkarten, die er in einem beliebig großen rechteckigen Gittermuster auflegt. Dabei liegen die Karten mit dem Gesicht nach oben - ihr Wert ist also zu sehen. Zu empfehlen ist eine Gesamtbreite, bzw. Höhe von $4-6$ Karten. (vgl. als Beispiel Abbildung 28)

Da dieser Trick sogar mit einer Leserin, bzw. einem Leser als Mitspieler*in funktioniert, soll er - bevor die Mathematik erläutert wird - in dieser Form präsentiert werden.

Liebe Leserin, lieber Leser, bitte suchen Sie sich eine Karte aus Abbildung 28 aus, und merken sich dessen Wert und Farbe.

Ich fülle nun das Gitter mit restlichen Karten auf (vgl. Abbildung 29). Richten Sie nun Ihr Augenmerk auf Ihre gewählte Karte. Da ich bereits weiß, welche Karte Sie gewählt haben, ändern Sie bitte die Wahl Ihrer Karte. Dabei dürfen Sie sich aber nur entweder die Karte links, rechts, über oder unter ihrer ursprünglichen Karte aussuchen. (Eine Wahl schräg bzw. diagonal darüber oder darunter ist nicht erlaubt.)

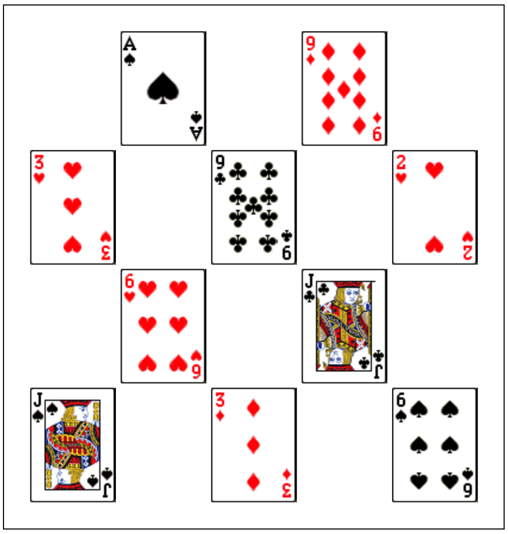

Abbildung 28: Das Gittermuster.

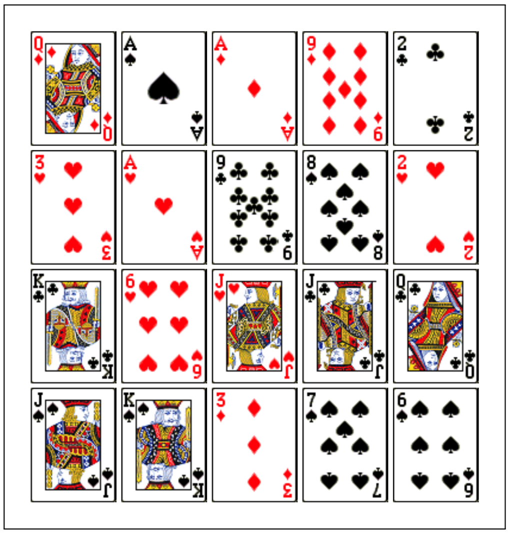

Abbildung 29: Wählen Sie eine neue Karte.

Haben Sie dies getan? Gut. Da Sie Ihre Wahl nicht gut versteckt haben, bin ich sicher, Ihre Karte zu kennen. Da ich Ihnen aber noch eine Chancen geben möchte, entferne ich erst einmal nur eine kleine Anzahl von Karten. (vgl. Abbildung 30)
Bitte ändern Sie abermals ihre Wahl auf eine neue Karte nach der oben erwähnten Regel.

Haben Sie Ihre Karte geändert? Da ich Ihren Gedanken abermals folgen konnte, entferne ich wieder einige Karten, und bitte Sie darum, Ihre Auswahl in Abbildung 31 zu ändern.

Wir führen dieses Spiel nun Fort bis zu Abbildung 34.

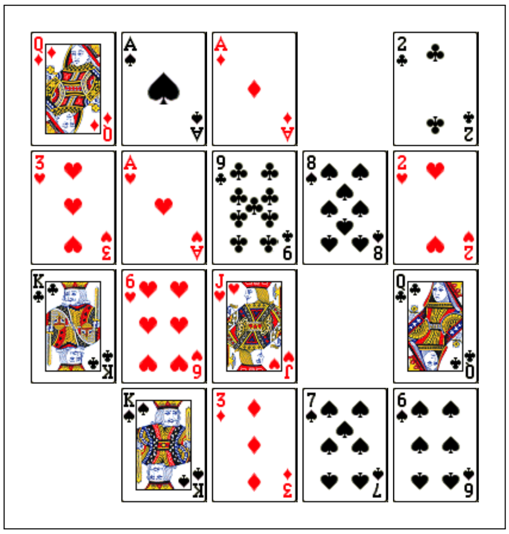

Abbildung 30: Ihre neue Wahl.

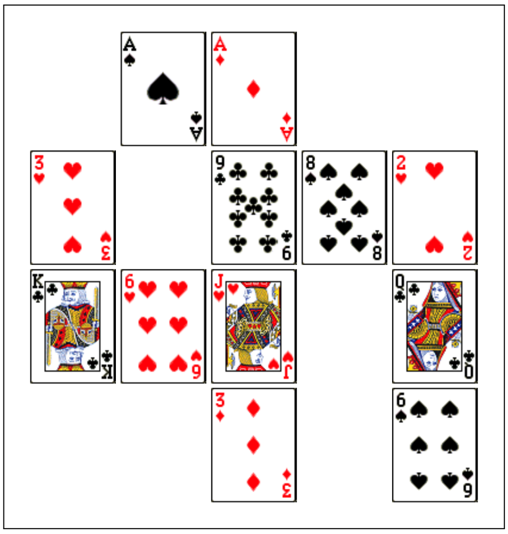

Abbildung 31

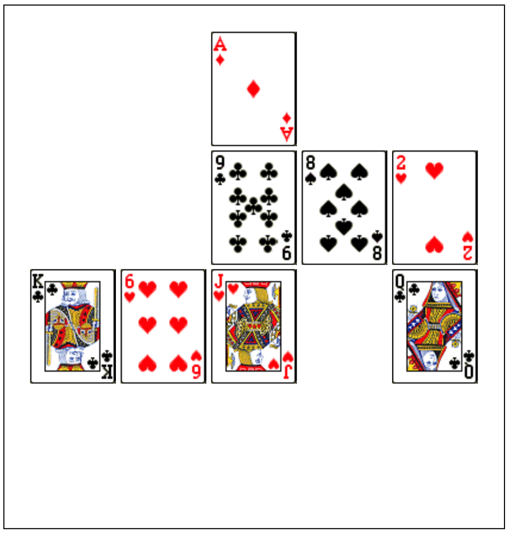

Abbildung 32

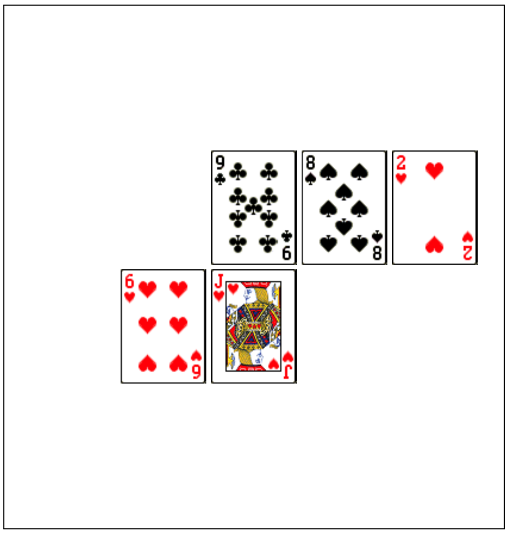

Abbildung 33

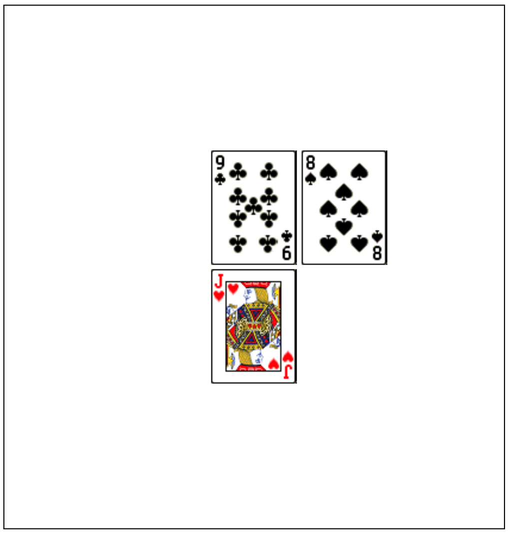

Abbildung 34

Sind Sie bei der letzten Abbildung angelangt, bei der nur noch drei Karten zu sehen sind? Und haben Sie ein letztes Mal Ihre Auswahl geändert? Ich hatte keine Schwierigkeiten, Ihrer Kartenreise zu folgen. Das Ende Ihrer Reise ist die Treff Neun.

Die Mathematik hinter diesem Trick ist für eine/n Mathematiker*in recht intuitiv, und zugegebenermaßen wahrscheinlich auch für manche Laien, falls die Idee nicht gut versteckt wird (dazu gleich noch mehr). Abbildung 35 zeigt die Tatsache auf, dass die Ordnung der Karten anhand eines kartesischen Koordinatensystems vorgestellt werden kann. Alle initial aufgelegten Karten des Gittermusters haben dabei eine gerade Koordinatensumme (in der Abbildung in schwarzer Schrift, inkl. Koordinaten, und die Koordinatensumme in eckigen Klammern). Die Karten in den Lücken haben eine ungerade Koordinatensumme (in der Abbildung rot, und zur Unterscheidung keine Koordinaten und nur die Koordinatensumme).

Die Mitspielerin beginnt ihre Reise also mit einer Karte aus der Menge der Karten mit geraden Koordinatensummen (kurz: Einer „geraden Karte"). Bevor der Magier nun erstmals Karten entfernt, darf die Zuschauerin von ihrer Karte aus horizontal oder vertikal einen Schritt machen, und diese Karte als neue Karte wählen. Sie befindet sich also auf einer „ungeraden Karte". Der Magier - immer mit dem Koordinatengitter vor dem gedanklichen Auge - entfernt also Karten mit geraden Koordinatensummen.
Nach dem zweiten Wechsel der Zuschauerin ist sie auf einer geraden Karte, der Zauberer entfernt also ungerade Karten. Dieser Prozess wird fortgeführt, bis sich die Zuschauerin auf einer einzigen, letzten (geraden, oder ungeraden) Karte befinden muss.

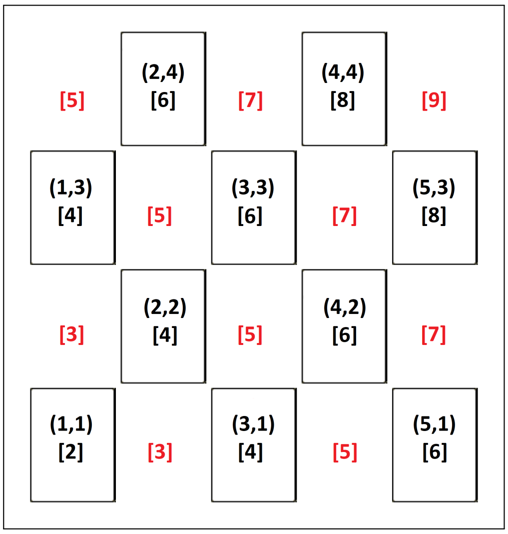

Abbildung 35: Die Koordinaten.

In unserem Beispiel (vgl. Abbildung 34) ist dem Zauberkünstler bekannt, dass die Zuschauerin von einer ungeraden Karte, also entweder dem Herz Buben oder der Pik Acht, auf die Treff Neun gewechselt hat. Eine andere Möglichkeit erlaubt die Mathematik nicht, falls alle Regeln befolgt wurden.

Abgesehen von dem Wechsel auf die geraden, bzw. ungeraden Muster im Verlauf der Durchgänge muss der Zauberer nur auf eine weitere Sache achten: Alle auf dem Feld verbliebenen Karten müssen immer miteinander verbunden bleiben. Es dürfen durch das Entfernen von Karten also keine zwei voneinander getrennten Regionen entstehen. Der Grund dafür ist, dass der Zauberer natürlich niemals genau wüsste, in welcher Region sich die Mitspielerin befindet. Früher oder später müsste eine Region jedoch eliminiert werden, was dazu führt, dass die Mitspielerin sich möglicherweise nicht mehr bewegen kann, und der Trick fehlschlägt. Insofern empfiehlt es sich generell, beim Entfernen der Karten vorrangig außen zu beginnen.

Wie bereits zugegeben, kann die Idee hinter dem Trick auch für manche Nichtmathematiker intuitiv sein. Die Tatsache, dass kurz nach dem Prozess, bei dem das offene Gittermuster mit Karten aufgefüllt wird, und die Mitspielerin ihren ersten Schritt gemacht hat, nur „initiale Karten“ entfernt werden, könnte sehr auffällig sein.
Um dies zu verschleiern, zwei Vorschläge: Einerseits sollten bei dem ersten Karteneliminationsprozess nur wenige Karten entfernt werden. Noch besser aber wäre es, wenn der Zauberkünstler die Zuschauerin zu Beginn mehrere Schritte machen lässt, ohne auch nur irgendeine Karte zu entfernen. Dabei gerät die Idee eines Gittermusters, und von „initialen“ versus „hinzugefügten“ Karten bei der Mitspielerin gewiss in den Hintergrund.

Davison & McOwan (n.d., S. 16f) machen Vorschläge die zeigen, dass bei der Präsentation dieses Tricks einiges an kreativem Potenzial vorhanden ist. Um diese Gedanken nur in aller Kürze zu erwähnen, könnte der Magier der Zuschauerin beliebige Vektoren mitteilen, um die sie sich bewegen soll. Dies könnte jedoch zu Schwierigkeiten führen, falls diese Bewegung(en) nicht möglich sind. Für diese Fälle müssten spezielle Regeln definiert werden.
Ebenso wäre die gegenteilige Idee möglich: Der Zuschauerin könnte komplette Bewegungsfreiheit gewährt werden. Nach einer beliebigen Bewegung soll sie dem Magier lediglich entweder die Koordinatensumme des Vektors (diese entspricht der Anzahl der Sprünge), oder den Vektor selbst mitteilen.

In beiden Fällen ist eine Durchführung dieses Tricks möglich, falls der Zauberkünstler korrekt kalkulieren kann, inwiefern sich die Bewegung darauf auswirkt, ob sich die Mitspielerin am Ende ihrer Bewegung auf einer geraden, oder ungeraden Karte befindet.
Als letzte Bemerkung soll erwähnt werden, dass - falls viele Kartenwechsel und Sprünge von der Mitspielerin zu erwarten sind - sie ihre neue Wahl jede Runde auf einem Blatt notieren kann.

3.9 Errate das Polynom

Was die Durchführung, bzw. Präsentation dieses Tricks betrifft, sollen in diesem Fall weniger Worte verloren werden. Die Umsetzung könnte in Form eines Spiels zwischen zwei Mathematiker*innen stattfinden. Dabei erfindet jede Person ein Polynom mit nicht negativen ganzzahligen Koeffizienten, und die andere Person muss es erraten. Es finden abwechselnd Fragerunden mit der folgenden Regel statt: Person A nennt Person B einen Wert x. Person B setzt x in sein/ihr Polynom p ein, und antwortet mit $p(x)$. Danach ist Person B an der Reihe.

Im Kern geht es also um eine optimale Strategie für das Bestimmen eines unbekannten Polynoms p. Gibt es eine Antwort auf die Frage, wie oft man $p(x)$ für eigens gewählte x bestimmen muss, um p eindeutig identifizieren zu können?

Wir untersuchen, wie bereits erwähnt, den Fall für Polynome mit Koeffizienten $\in \mathbb{N}_0$, also beispielsweise $p_1(x) = 2x^3 + 7x + 1$, oder $p_2(x) = 4x^7 + 5$.

Die Antwort soll vorweggenommen werden: Ja, es gibt eine optimale Strategie. Jedes beliebige Polynom p kann mithilfe von nur zwei Fragen und einer im Anschluss kurzen Rechnung bestimmt werden. Die Idee dahinter ist recht interessant, und kann auf elegante Weise folgendermaßen mathematisch dargelegt werden: (vgl. Talwalkar, 2012, *„Puzzle 18“*)

Bei der **ersten Frage** wird dem unbekannten Polynom p der Wert $x = 1$ übergeben. Dies liefert $p(1) = b$, also ein konkretes $b \in \mathbb{N}$ zurück. Es kann nun eine Schlussfolgerung gezogen werden: Da für $a_n \in \mathbb{N}$ jedes Polynom der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

entspricht, und für x=1 somit

$$p(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = b$$

gilt, stellt b die Summe der Koeffizienten dar, was bedeutet, dass kein Koeffizient $a_0, ..., a_n$ größer als b sein kann. (vgl. Winkler & Filk, 2010, S. 116)

Bei der **zweiten Frage** wird nach $p(p(1)+1)$, also $p(b+1)$ gefragt. In Worten formuliert wird dem Polynom diesmal das Ergebnis der ersten Frage *plus* 1 übergeben. Warum? Die daraus resultierende Form

$$p(b+1) = a_n(b+1)^n + a_{n-1}(b+1)^{n-1} + ... + a_1(b+1)^1 + a_0(b+1)^0$$

zeigt die Verteilung der Koeffizienten a_0 bis a_n auf die unterschiedlichen Potenzen von $(b+1)$.

Es ist zu erkennen, dass das Polynom p, bzw. der Wert von $p(b+1)$ durch eine Summe der Basiselemente $(b+1)$ repräsentiert wird.

Da der Umstand nicht trivial ist, dass jede natürliche Zahl im Dezimalsystem *eindeutig* in jeder beliebigen (positiven Integer-)Basis dargestellt werden kann, soll auf einen Beweis dieser Aussage in Raji (2016, S. 16ff) verwiesen werden.
An dieser Stelle soll ebenfalls die Schlussfolgerung aus der Behandlung der ersten Frage in Erinnerung gerufen werden: Die Konsequenz, dass kein Koeffizient größer als die Basis $(b+1)$ sein kann, unterstreicht die Möglichkeit dieser Darstellung.

Die *Eindeutigkeit* erlaubt uns nun, die unbekannten Koeffizienten genau zu bestimmen - denn darum geht es ja in diesem Spiel. Dafür müssen wir das Ergebnis von $p(b+1)$ in der

Basis $(b+1)$ ausdrücken und können die Koeffizienten aufgrund der Schlussfolgerungen der Analyse der zweiten Frage an dem Resultat einfach ablesen.

Beispiel:

Eine Mitspielerin hat sich ein unbekanntes Polynom ausgesucht, das wir erraten möchten. Auf unsere erste Frage, was das Polynom auf $x = 1$ zurückliefert, erhalten wir als Antwort 7. Die anschließende zweite Frage ist gleichbedeutend mit $p(7+1) = 259$.

Als mathematischer Zauberkünstler müssen wir nun die Zahl 259 (Basis 10) in dem Zahlensystem zur Basis $7 + 1 = 8$ ausdrücken.
Dies ist in einer kleinen Nebenrechnung, die nicht im Detail vorgeführt wird, schnell erledigt. Die Werte für die Stellen im Zahlensystem zur Basis 8 sind $8^0 = 1$; $8^1 = 8$; $8^2 = 64$; $8^3 = 512, \ldots$ und ein simples „Füllprinzip" von der höchsten zur niedrigsten Basis-Stelle führt zu folgendem Ergebnis:
259 (Basis 10) = 403 (Basis 8), denn $259 = \underline{4} \cdot 8^2 + \underline{0} \cdot 8^1 + \underline{3} \cdot 8^0$.
Unsere Suche war erfolgreich. Die Koeffizienten sind als 4, 0, und 3 bestimmt, und das gesuchte Polynom ist somit $p(x) = 4x^2 + 3$, was uns die Mitspielerin bestätigt.

3.10 Einfache Arithmetik, unglaubliche Effekte

Die nachstehenden Zaubertricks heben sich von den Tricks aus dem Einführungskapitel dadurch ab, dass die Ideen - trotz simpler Mathematik im Hintergrund - außerordentlich gut verschleiert werden. Außerdem macht der zusätzliche Einsatz von Materialien wie Münzen, Streichhölzern, Karten, oder ein Band zum Verbinden der Augen des Magiers die Vorführungen umso interessanter, als es das bloße „Herumgerechne" mit Zahlen machen würde.

3.10.1 Magisches Sortieren

Der Zauberkünstler lässt acht Münzen auf einen Tisch prasseln, und bittet daraufhin das Publikum, ihm die Augen zu verbinden. Eine freiwillige Person soll nun die Position der Münzen ohne sie umzudrehen etwas vermischen, und vor den Händen des Zauberers zusammenschieben.

> „Liebes Publikum! Es ist mir unmöglich, die Position der Münzen zu kennen. Genauer gesagt kann ich nicht wissen, welche Münzen Kopf, und welche Münzen Zahl zeigen. Dennoch werden es mir meine magischen Fähigkeiten erlauben, zwei Häufchen zu bilden, so dass in beiden Häufchen gleich viele Münzen Kopf zeigen. Dabei bleibt die Augenbinde natürlich angelegt."

Nach diesen Worten verteilt der Zauberer die Münzen auf ein linkes und ein rechtes Häufchen, wobei er einige Münzen verunsichert hin- und herschiebt, und manche davon umdreht und verkehrt platziert. Schließlich bittet er eine Zuschauerin, die Anzahl der

Münzen zu zählen, die Kopf zeigen. Tatsächlich sind es in beiden Häufchen gleich viele.

Wie bei all unseren Tricks, lässt sich die Idee hinter diesem Effekt mathematisch erklären, und hat nichts mit Fingerfertigkeit bzw. dem Erfühlen der Kopf oder Zahl-Seite zu tun.

Nachdem der Zauberer die Münzen auf den Tisch fallen ließ, und bevor ihm die Augenbinde angelegt wurde, muss er möglichst unauffällig eine einzige Information sammeln: Er muss die gesamte Anzahl der Münzen zählen, die Kopf zeigen. Diese Information benennen wir in Folge K_{gesamt}. Nachdem ihm nun die Augen verbunden wurden, und eine Zuschauerin die Münzen vermischt vor seine Hände schiebt, konstruiert der Zauberkünstler möglichst spektakulär nach folgender Regel ein linkes und ein rechtes Häufchen: Das rechte Häufchen besteht aus beliebigen, aber insgesamt K_{gesamt} Münzen, die alle gekippt (also auf die andere Seite gedreht) wurden. Im linken Häufchen landen alle restlichen Münzen.
Und mehr ist tatsächlich nicht zu tun. Beide Häufchen beinhalten nun die gleiche Anzahl von „Kopf-Münzen".

Betrachten wir nun die Mathematik, die sich bei der abschließenden Überlegung eines interessanten Tricks bedient: (vgl. Tanna, 2016, S. 58ff)

Zuerst soll das **rechte Häufchen** untersucht werden:
Es besteht insgesamt aus K_{gesamt} Münzen. Denn dies ist die Anzahl von Münzen, die der Zauberkünstler wie erwähnt auf der rechten Seite platziert hat.
Das rechte Häufchen beinhaltet eine unbekannte Anzahl von Kopf-Münzen K_{rechts}.
Die Anzahl von Zahl-Münzen Z_{rechts} ist somit: $Z_{rechts} = K_{gesamt} - K_{rechts}$.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit nun auf das **linke Häufchen**:
Hier stellen wir uns die Frage, wie viele Kopf-Münzen sich darin befinden. Abermals greifen wir auf die ursprüngliche, vom Magier gesammelte Information zurück. Da insgesamt K_{gesamt} Kopfmünzen existieren, und sich bereits eine unbekannte Anzahl von K_{rechts} Kopfmünzen im rechten Häufchen befinden, muss **das linke Häufchen die verbleibenden $K_{links} = K_{gesamt} - K_{rechts}$ Kopf-Münzen beinhalten.**

Einem Umstand wurde noch keine Beachtung geschenkt, nämlich dem **Kippen aller Münzen im rechten Häufchen**. Diese Aktion hat natürlich zur Folge, dass aus allen Kopf-Münzen Zahl-Münzen werden, und aus allen Zahl-Münzen Kopf-Münzen. **Das bedeutet, aus Z_{rechts} wird K_{rechts}, und es gilt nun: $K_{rechts} = K_{gesamt} - K_{rechts}$.**

Vergleicht man nun die Formeln für die Anzahl der Kopf-Münzen in beiden Häufchen, ist zu sehen, dass sie ident sind.

Auf Basis der vorangegangenen Beschreibung dieses Zaubertricks lassen sich einige abschließende, für die Durchführung wichtige Überlegungen tätigen:

- Eine bessere Wahl als Münzen wären beispielsweise Reversi-Spielsteine oder andere Objekte, die eine völlig symmetrische Oberfläche haben, und sich die Seiten nur durch eine andere Farbe, oder ein anderes Symbol unterscheiden. Das Publikum könnte die Vermutung äußern, dass der Zauberer die Münzen durch Fühlen der Kopf- bzw. Zahl-Seiten unterscheidet.
- Um Missverständnisse zu vermeiden, kann der Zauberer während der Vorführung betonen, dass beim Vermischen der Münzen durch die Mitspielerin das Umdrehen nicht erlaubt ist, er bei seinem blinden, *magischen Sortieren* mit den Objekten jedoch tun darf, was er möchte.
- Die mathematische Analyse bestätigt die Möglichkeit der Durchführung mit einer beliebigen Anzahl von Münzen (bzw. Spielsteinen). Eine Inszenierung ist selbst mit einer dem Magier unbekannten Gesamtanzahl von Objekten möglich.
Auch eine einzige Münze würde funktionieren, was leicht zu veranschaulichen ist: Nach dem Werfen einer Münze fällt Kopf. Der Zauberer behauptet also, nach dem blinden Aufteilen in „Links“ und „Rechts“ sind in beiden Häufchen die gleiche Anzahl von Kopf-Münzen vorhanden. Nun ja, nach dem Schieben der Münze nach rechts und dem Kippen von Kopf auf Zahl, befinden sich in beiden Häufchen exakt Null Kopf-Münzen.
Um den Trick undurchschaubar zu machen, sollten generell nicht zu wenige, aber auch nicht zu viele Objekte genutzt werden, denn es muss dem Zauberkünstler möglich sein, die Häufigkeit einer Ausprägung (Kopf/Zahl, Weiß/Schwarz, ...) schnell und unauffällig zu zählen. Dies würde ebenfalls durch Reversi-Spielsteine im Unterschied zu Münzen vereinfacht.
- Verallgemeinert bedeutet die Durchführungsregel für den Magier, dass er sich die Ausprägung, die er zählt, aussuchen darf. Dies kann unter gewissen Umständen große Vorteile bieten: Fallen zum Beispiel viele schwarze Reversi-Spielsteine, ist es besser, die Anzahl der weißen Steine zu zählen. Es ist nur wichtig, dass ein Häufchen (seiner Wahl) exakt aus dieser Anzahl von Objekten besteht, und im Anschluss die Objekte von genau diesem Häufchen auch umgedreht werden.
- Die zuletzt geführte Überlegung ermöglicht es, den Effekt zu verstärken: Für den (üblichen) Fall, dass der Zauberer die gesamte Anzahl von Steinen kennt, weiß er nach dem Zählen einer Ausprägung jedenfalls auch die Anzahl der anderen Ausprägung. Dies bedeutet, dass er bis zu dem Punkt, an dem er beginnt, die Häufchen zu bilden, bzw. Objekte umzudrehen, flexibel ist. Einem geübten Zauberer ist es demnach also möglich, noch während des Bildens der Häufchen das Publikum zu fragen, ob er die Häufchen bezüglich Ausprägung 1, oder Ausprägung 2 *magisch sortieren* soll.

3.10.2 Die kriechende Raupe

Um diesen Trick (vgl. Engelhardt & Gustke (2005, S. 8f) vorführen zu können, werden zehn Karten benötigt, die auf einer Seite mit den Ziffern Null bis Neun beschriftet sind.

Alternativ erfüllen Spielkarten den Zweck, wobei eine Bildkarte (also Bub, Dame oder König) die Rolle der Null übernimmt, und ein Ass wie üblich die Eins. Farben spielen dabei keine Rolle.

Zu Beginn werden die Karten wie in Abbildung 36 aufsteigend, mit der Bildseite nach oben, in einer Reihe aufgelegt. Falls möglich, wird der Trick auf einer großen Oberfläche vorgeführt, mit ungefähr 40 – 50 cm Platz rechts von den platzierten Karten.

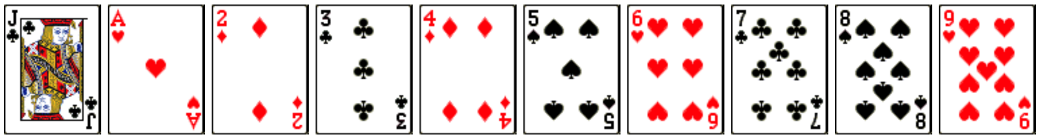

Abbildung 36: Die Raupe zu Beginn des Tricks.

Einer Mitspielerin wird nun erklärt, dass sich die Raupe, deren Kopf sich bei der Neun und Hinterteil bei der Null befindet, versteckt weiterbewegen wird. Das Verstecken entspricht dem Umdrehen der Karten, sodass ihre Bilder nicht mehr zu sehen sind. Nachdem dies geschehen ist, erwähnt der Zauberer, dass sich die Raupe nur vorwärts bewegen würde, und die Fortbewegung um einen Schritt dem Umlegen einer einzelnen Karte von links nach rechts entspricht. Der Zauberkünstler demonstriert dies direkt an einem Beispiel von drei Schritten (vgl. Abbildung 37). Im Laufe der Demonstration klärt er mit der Mitspielerin ab, ob das Prinzip des Fortbewegens nachvollziehbar beschrieben wurde, oder er vielleicht noch einen Schritt vorführen sollte.

Abbildung 37: Die Fortbewegung der Raupe um drei Schritte.

Nach dieser Erklärung beginnt der eigentliche Trick. Der Zauberer verbindet sich die Augen und lässt die Mitspielerin die Raupe eine beliebige Anzahl von Schritten weiterbewegen. Ist dies geschehen, entfernt der Magier die Augenbinde, fokussiert seine Gedanken auf die Raupe, und dreht schließlich eine Karte um. Ihr Wert entspricht exakt der Anzahl der gekrochenen Schritte.

Hierbei ist die Vorführung allerdings noch nicht beendet. Die Karte wird wieder verdeckt an ihrer Stelle platziert, und es kann eine weitere Runde gespielt werden, wobei der Zauberer sogar aus dem Zimmer geschickt werden kann. Ist die Raupe nach Anleitung der

Mitspielerin einige Schritte vorangeschlichen, wird der Zauberkünstler zurückgeholt. Es gelingt ihm abermals, die Karte mit der korrekten Anzahl von Schritten aufzudecken.

Wie kann der Zauberer die Anzahl der Schritte der Raupe kennen? Woher weiß er, welche Karte er aufzudecken hat?

Dieser Zauberei liegt eine sehr simple Idee zugrunde. Da es den meisten Menschen schwer fällt, sich die Bewegung der Karten vor dem inneren Auge vorzustellen, ist der Effekt dieses Tricks selbst dann noch faszinierend, wenn das mathematische Prinzip dahinter bereits verstanden wurde.

Um den Trick aufzulösen beginnen wir ganz zu Beginn: Bereits in der Erklärungsphase, in der der Mitspielerin gezeigt wird, wie die Fortbewegung der Raupe funktioniert, sammelt der Zauberer seine erste und wichtigste Information: Die „Zählerposition“. Sie entspricht der Anzahl der Schritte, die der Zauberer die Raupe im Zuge seiner Demonstration voranschreiten lässt - in unserem Beispiel waren es drei Schritte. Diese Zahl wird gemerkt, und nach der Raupenbewegung der Mitspielerin von rechts abgezählt. Egal wie viele Schritte von ihr gemacht wurden, die dritte Karte von rechts wird immer die Anzahl preisgeben. Diese Idee soll Abbildung 38 (mit erkennbarer Bildseite) illustrieren.
Die weiteren Durchgänge des Tricks basieren nun auf der selben Idee. Für die neue Zählerposition muss lediglich eine einfache Addition vorgenommen werden, um die zyklische Verschiebung der Karten auszugleichen, bzw. zu berücksichtigen.

Benennen wir mit z_n die neue Zählerposition des nächsten Durchganges, z_{n-1} die Zählerposition des abgeschlossenen Durchganges, und mit K den Wert der Karte in der Zählerposition des abgeschlossenen Durchganges, so ergibt sich die Formel: $z_n = z_{n-1} + K$. Falls $z_n > 10$, wird von der Summe (mod 10) genommen.

In Worten ausgedrückt muss der Zauberer nur die Zählerposition mit dem Wert der Karte, die er an genau dieser Position aufgedeckt hat, addieren, um die neue Zählerposition der nächsten Runde zu kennen, und gegebenenfalls durch das Modulo korrigieren. Dem/Der aufmerksamen Leser*in wird aufgefallen sein, dass der Zauberkünstler also bereits vor der Raupenbewegung der Mitspielerin die Zählerposition - also die Position der Karte, die er aufzudecken hat - kennt. Das ist richtig, und ist genau der Grund, warum der Effekt dieses Tricks so faszinierend ist.

Für unser Beispiel aus Abbildung 38 würde dies bedeuten, dass die nächste Zählerposition $3 + 7 = 10$, also die zehnte Karte von rechts ist. Die neue Zählerposition landet (vor der nächsten Raupenbewegung) immer zurück auf der Karte mit dem Wert Null, was mathematisch gesehen natürlich Sinn macht, bzw. der grundsätzlichen Idee hinter dem Trick entspricht: Hat sich die Mitspielerin nicht bewegt, bzw. entscheidet sie sich, sich nicht zu bewegen, zeigt die Zählerposition auf die Null. Andernfalls wird an dieser Position gezählt.

Abbildung 38: Das Prinzip der fixen Zählerposition.

Der Magier könnte also bereits vor dem nächsten Durchgang eine Vorahnung auf ein Blatt schreiben: „Die zehnte Karte von rechts!“ oder „Die erste Karte von links!“, woraufhin er den Raum verlässt. Nachdem die Mitspielerin ihre Raupe kriechen ließ, wird die Karte an dieser Position ihre getätigte Schrittanzahl anzeigen.
Alternativ könnte der Magier die „Weissagung“ auch per Telefon vollführen, nachdem er sich von der Mitspielerin direkt nach ihrer Raupenbewegung anrufen lässt.

Abschließend gibt es noch zwei kurze Bemerkungen zu machen:

1. Es wird spekuliert, dass die Mitspielerin die Raupe nicht mehr als 10 (dies entsprä-

che auch Null) Schritte machen lässt. Aufgrund der zyklischen Bewegung sind k ($\in \mathbb{N}$) Schritte nicht auseinanderzuhalten von $k \cdot 10$ Schritten.

2. Der Trick muss nicht unbedingt mit 10 Karten durchgeführt werden. Für die Fälle mit einer Kartenanzahl s gelten die Überlegungen analog für Modulo s.

3.10.3 Das Ungleichgewicht von Schwarz und Rot

Dieser Trick, dessen grundsätzliche Ideen von Engelhardt & Gustke (2005, S. 35f, S. 65) in *Zaubern mit Mathematik* beschrieben sind, wird mit Spielkarten durchgeführt. Es eignet sich ein Skat-Deck bestehend aus 32 Karten. Die Umsetzung ist jedoch für jede Deckgröße möglich, solange die Anzahl von roten und schwarzen Karten gleich ist.

Der Zauberer lässt die Karten von einer freiwilligen Person mischen, und gibt anschließend folgende Anweisungen an die Mitspielerin:

- Hebe einen beliebig großen Stapel von dem Deck (Gesicht nach unten) ab. Suche dir einen der beiden Stapel aus - dies sind nun deine Karten - und den anderen Stapel lege bitte vor mich (den Zauberer) hin. Dies ist mein Stapel.

- Meine magischen Augen durchleuchten nun deine Karten. Um mir dabei zu helfen, verteile deine Karten bitte einzeln auf neue kleinere Stapel. Du kannst sie beliebig auf zwei, drei, oder, falls du möchtest, auch vier Stapel verteilen.

- Vielen Dank. Meine Magie ist bereits geschehen. Bestätige mir bitte, dass ich die Karten niemals berührt habe, die Bildseiten nicht gesehen habe, und nicht wissen kann, wie die roten und schwarzen Karten verteilt sind.

- Okay, Danke. Nun suche dir eine Farbe aus: Rot oder Schwarz? [Die Mitspielerin entscheidet sich für Rot]

- Deine Wahl ist Rot? Okay.
  - Ich kann dir nun sagen, ob bei deinen Kartenstapeln insgesamt mehr rote Karten vorhanden sind, als in meinem Stapel schwarze Karten.
  - Und nicht nur das, ich kann dir ebenfalls den exakten Unterschied nennen.

Nach der Weissagung des Zauberers zählt die Mitspielerin die Anzahl ihrer roten Karten. Gemeinsam untersuchen sie den Stapel des Zauberers, vergleichen die Anzahl seiner schwarzen Karten mit der ihrer roten Karten, und tatsächlich stimmt die Vorhersage.

Wie ist dies möglich?
Der Zauberkünstler hat nicht geschummelt. Wie konnte er, ohne das Deck zu präparieren, es unfair zu mischen, oder die Karten jemals zu berühren am Ende wissen, um wie viele schwarze Karten er mehr hatte als die Zuschauerin rote Karten?

Werfen wir einen Blick auf die Mathematik:
Tatsächlich ist es so, dass der Magier zu Beginn nur eine einzige Information hat, die auch allgemein bekannt ist: Die Deckgröße $d = 32$. Im Laufe der Vorführung eignet er sich jedoch geschickt eine zweite Information an, die notwendig ist, um den Trick durchführen zu können: Der Zauberer zählt die Anzahl der Karten der Mitspielerin (M) unbemerkt mit. Dies ist der einzige Grund, warum er die Bitte äußert, die Karten nochmals *einzeln* (auf beliebig viele Stapel) zu verteilen.

Die Informationen können nun anhand der nachstehenden Tabelle aufbereitet werden.

Gesamtzahl der Karten (Deckgröße):	$d = 32$	
Anzahl der Karten der Mitspielerin:	M	(Zählt der Zauberer mit)
Anzahl der roten/schwarzen Karten insgesamt:	$\frac{d}{2} = 16$	
Anzahl der schwarzen Karten der Mitspielerin:	x	(Unbekannt)
Anzahl der schwarzen Karten des Zauberers:	$\frac{d}{2} - x$	
Anzahl der roten Karten der Mitspielerin:	$M - x$	
Anzahl der roten Karten des Zauberers:	$\frac{d}{2} - (M - x)$	

Die darauffolgende Rechnung zeigt, dass die Differenz der Anzahl der schwarzen Karten des Zauberers und der Anzahl der roten Karten der Mitspielerin durch die gleiche Zahl beschrieben wird, wie die Differenz der roten Karten des Zauberers und der schwarzen Karten der Mitspielerin.

$$\frac{d}{2} - x - (M - x) = \frac{d}{2} - M = \frac{d}{2} - (M - x) - x$$

Dies bedeutet, dass es egal ist, für welche Farbe sich die Zuschauerin entscheidet. Der Zauberkünstler bildet lediglich die Differenz von (für ein Skat-Deck) 16 und M (der mitgezählten Karten der Mitspielerin). Ist die Differenz positiv, hat er um diese Anzahl mehr Karten „seiner Farbe“, als die Zuschauerin Karten von „ihrer Farbe“ hat. Ist die Differenz negativ, hat die Zuschauerin um diese Anzahl mehr Karten als der Zauberer.

Es soll angemerkt werden, dass es aufgrund der Unbekannten x mathematisch *nicht* möglich ist, die exakte Anzahl von roten bzw. schwarzen Karten der Mitspielerin oder des Magiers zu bestimmen. Es wird lediglich der Anschein erweckt, da der Zauberkünstler die Differenz der unterschiedlichen Farben bestimmen kann. Diese Umstände werden dem Publikum nur in den wenigsten Fällen auffallen, und müssen auch gar nicht erst angesprochen werden.

3.10.4 Zauberei mit Streichhölzern

Für diesen Trick werden ungefähr 50 Streichhölzer oder ähnliche Zähler-Objekte wie Spielplättchen jeglicher Art benötigt.

Die Vorführung beginnt damit, dass der Zauberkünstler eine Streichholzschachtel auf den Tisch legt, und sich daraufhin die Augen verbindet. Eine freiwillige Person aus dem Publikum soll nun einige Anweisungen ausführen:

1. Suche dir eine Zahl zwischen 5 und 15 aus. Erstelle drei Häufchen aus Streichhölzern, die wir linkes, mittleres, und rechtes Häufchen benennen. In jedem einzelnen Häufchen müssen sich genau die ausgesuchte Anzahl von Streichhölzern befinden.

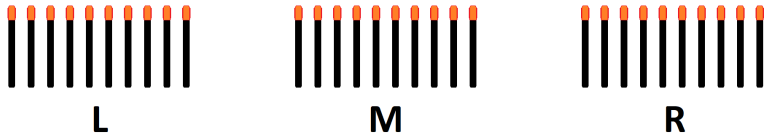

Abbildung 39: Die Mitspielerin wählt 10 Streichhölzer für jedes Häufchen.

2. Verschiebe nun bitte vier Streichhölzer von den beiden Seitenstapeln in das mittlere Häufchen.

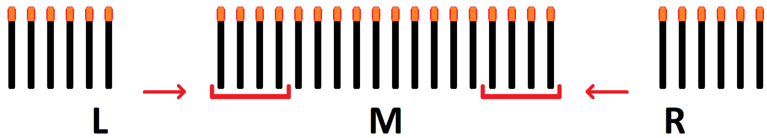

Abbildung 40: Die Mitspielerin füllt das mittlere Häufchen.

3. Ein beliebiger Seitenstapel darf nun verworfen werden.

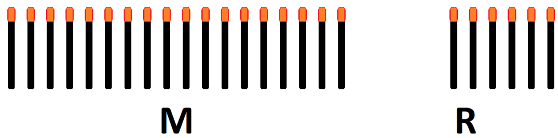

Abbildung 41: Das linke Häufchen wird verworfen.

4. Es verbleiben zwei Stapel. Das ursprüngliche mittlere, und ein Seitenhäufchen. Zähle nun die Anzahl der Streichhölzer im Seitenhäufchen, und entferne diese Anzahl aus dem (ursprünglich) mittleren Häufchen.

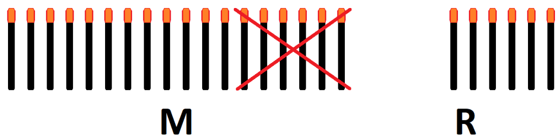

Abbildung 42: Die Mitspielerin zählt 6 Hölzchen im rechten Stapel, und entfernt diese Anzahl aus der Mitte.

5. Verwerfe das verbliebene seitliche Häufchen, so dass nur noch die Streichhölzer in der Mitte verbleiben.

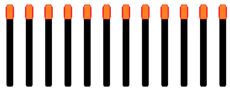

Abbildung 43: Die Mitspielerin hat alle Anweisungen durchgeführt. Nun beginnt der Magier, der immer noch seine Augenbinde trägt, zu zaubern.

Um eine Schlussfolgerung der mathematischen Untersuchung vorwegzunehmen, ist es dem Zauberkünstler an dieser Stelle möglich, den Effekt des Tricks unterschiedlich zu präsentieren. In diesem Fall spricht er die Worte:

> „Liebe Mitspielerin, bitte gib mir die Streichholzschachtel in meine linke Hand, und führe meine rechte Hand über das Häufchen. Suche dir nun eine beliebige Zahl zwischen 1 und 20 aus, und verkünde sie.“

Nachdem die Mitspielerin die Zahl 17 ruft, lässt der Zauberer fünf Streichhölzer, die er mit seiner rechten Hand aus der Schachtel holt, auf das verbleibende mittlere Häufchen fallen. „Siebzehn wolltest du? Siebzehn sollst du bekommen! Zähle die Streichhölzer.“ Tatsächlich liegen nun 17 Hölzchen auf dem Tisch.

Kommen wir nun zu der Erklärung:

Dieser Trick basiert auf dem Umstand, dass der Zauberer, ohne über die ursprünglich gewählte Anzahl der Streichhölzer in Schritt 1 Bescheid zu wissen, dennoch die exakte Anzahl der Objekte kennt, die sich nach Schritt 4 auf dem Tisch befinden. Dies erlaubt ihm, die Anzahl der Streichhölzer auf eine beliebige Ziel-Zahl hin zu vermehren oder zu reduzieren (bzw. von der Mitspielerin reduzieren zu lassen, falls er das verbleibende Häufchen nicht selbst berühren möchte).

Es wird gezeigt, dass für den Fall von drei Häufchen, die verbleibende Anzahl von Objekten auf dem Tisch exakt drei Mal der Anzahl von Objekten entspricht, die der Zauberer in Schritt 2 von den seitlichen Häufchen entfernen lässt (vgl. Simon, 1993, S. 145ff). In unserem Beispiel ließ der Zauberer vier Streichhölzer entfernen, wodurch sich schlussendlich $3 \cdot 4 = 12$ Hölzchen auf dem Tisch befinden.

Vorbereitend muss erwähnt werden, dass die Seitenhäufchen (und deren Verwerfen) überwiegend einem Ablenkungseffekt dienen. Mit nur einem Seitenhäufchen wäre der Effekt sehr leicht zu durchschauen, weshalb der Trick mit der doppelten Anzahl beschrieben wird. Tatsächlich ist die Vorführung mit beliebig vielen Seitenstapeln möglich.

- Sei x die Anzahl der Objekte, die in Schritt zwei auf Anweisung des Zauberers verschoben werden.

- Sei $k = x + y$, für $k \geq x$, die „Häufchengröße“, für die sich die Mitspielerin in **Schritt** 1 entscheidet.
- Sei n die gesamte Anzahl der Häufchen, mit denen der Trick durchgeführt wird. ($n - 1$ wäre demnach die Anzahl der Seitenhäufchen.)

In **Schritt 2** wächst die Größe des mittleren Häufchens auf $(x+y)+(n-1)\cdot x = nx+y$ an.

In **Schritt 3** lässt der Zauberer alle Seitenstapel, die nun aus $(x + y) - x = y$ Objekten bestehen, bis auf einen einzigen verwerfen.

In **Schritt 4** wird die Anzahl der Streichhölzer des letzten verbleibenden Seitenstapels von dem mittleren Häufchen entfernt: $nx + y - y = nx$.

In **Schritt 5** finden keine weiteren Manipulationen des mittleren Häufchens statt. Das letzte Seitenhäufchen wird lediglich zugute des Vorführeffektes verworfen.

Schlussendlich verbleiben also immer nx Objekte.
Somit konnte gezeigt werden, dass für den Fall dreier Häufchen ($n = 3$), also von zwei Seiten- und einem „Haupt-“ bzw. Mittelhäufchen, am Ende dreimal so viele Streichhölzer übrig bleiben, wie der Zauberer in Schritt 2 verschieben ließ.

Abschließend soll nochmals hervorgehoben werden, dass es dem Zauberkünstler natürlich selbst überlassen bleibt, wie er den Trick abschließt. Das Füllen bzw. Reduzieren zu einer Ziel-Zahl kann ein netter Effekt sein, die Anzahl der Hölzchen könnte nach Schritt fünf aber auch einfach laut verkündet werden.
Falls der Zauberer sich bereits im Vorfeld für einen Wert von x und n entscheidet, könnte ebenfalls eine Vorahnung in einem Umschlag versiegelt werden.
Alternativ wäre es dem Zauberkünstler auch möglich, die Mitspielerin die Anzahl der Objekte x ($\leq k$), die in Schritt zwei von allen Seitenstapeln entfernt wird, selbst aussuchen zu lassen, was die Wirkung des Tricks sicherlich verstärken würde. Auch die Anzahl der Seitenstapel ($n - 1$) könnte variiert werden. Selbstverständlich bedarf der Magier aber, wie bereits beschrieben wurde, dieser beider Informationen.

4 Conclusio

Ausgehend von der Idee ein Thema zu erforschen, das erlaubt, Menschen mithilfe mathematischer Konzepte zu begeistern, Berührungsängste zu nehmen, und das ebenfalls ein Potenzial für die Einsetzbarkeit im Lehr- und Lernkontext besitzt, wurde mit dieser Arbeit versucht, tief in die Welt mathematischer Zaubertricks einzutauchen.

Es hat sich herausgestellt, dass es sich um eine sehr vielfältige, bunte, und breit gefächerte Welt handelt, die nicht annähernd mithilfe einer einzigen Schrift vollständig erkundet werden kann. Welche Kernpunkte bzw. abschließende Feststellungen oder weiterführende Fragen lassen sich im Rahmen dieses Schlusskapitels festhalten?

Die ersten Worte sollen der Motivation gewidmet werden, die zu dieser Themenwahl geführt hat. Dieses Projekt versteht sich nicht zuletzt als Beitrag zur Popularisierung der Mathematik, und ich schließe mich dem Aufruf von Dr. Arici zustimmend an, wonach Wissenschaftler*innen eine Verantwortung tragen, Wissenschaft positiv zu kommunizieren. (vgl. Kapitel 1.1, S. 4)
Der Prozess der Recherche hat gezeigt, dass diese Arbeit nicht den ersten Versuch darstellt, Interesse für Mathematik mithilfe mathematischer Tricks zu verbreiten (vgl. Kapitel 1.2: *Martin Gardner, und zum Thema der Popularisierung der Mathematik im Allgemeinen*). Dies bestätigt, dass definitiv ein Potenzial vorhanden ist.
Ich teile die Ansicht von Schiemann und Wöstenfeld (vgl., 2017, S. 9), dass die Schönheit der Mathematik für viele Menschen nicht leicht zu erkennen ist. Es bedarf also einer Initiative, um die Augen der Menschen für die kreative Vielfalt der Mathematik zu öffnen. Ähnlich argumentiert auch Posamentier (vgl., 2003, preface), wonach in unserer Gesellschaft großteils lediglich die Nützlichkeit und Notwendigkeit von Mathematik hervorgehoben wird, das Betonen ihrer Schönheit jedoch vernachlässigt wird. (vgl. Kapitel 1.2)
Solche Initiativen, um dem einseitigen Bild, das die Gesellschaft von der Mathematik hat, entgegenzuwirken und einen Perspektivenwechsel bei Individuen anzustreben, müssen nicht ausschließlich nur durch Lehrer*innen in der Schule eingeleitet werden. Akzente dieser Art können ebenfalls außerhalb von Bildungsinstitutionen gesetzt werden. Und mathematische Zaubertricks bieten eine solche Möglichkeit auch im kleineren Rahmen.

Die Frage, inwiefern Zaubertricks mit mathematischem Hintergrund im Lehr- und Lernkontext eingesetzt werden können bzw. sollen, stand nicht im zentralen Fokus dieser Arbeit. Dennoch wurden in Kapitel 1.3: *Ein kurzer Einblick in wissenschaftliche Publikationen und Studien* verschiedene Forschungsarbeiten von Wissenschaftler*innen präsentiert, wie mathematische Zaubertricks fachdidaktisch aufbereitet im Unterricht eingesetzt wer-

den könnten.
Ein Praxiseinsatz in der Lehre war im Rahmen dieser Abschlussarbeit nicht möglich. Das Adaptieren von Tricks für den Unterricht, sowie das Sammeln von Daten und anschließendes quantitatives bzw. qualitatives Auswerten hätte vermutlich großen Einfluss auf das Konzept dieser Arbeit genommen.
Was den Ausblick betrifft, kann diese Arbeit als Basis eines „3-Stufen-Forschungs-programms" dienen. In einem zweiten Schritt könnten ausgewählte Zaubertricks für gewisse Unterrichtskonzepte theoretisch adaptiert, bzw. vorbereitet werden (z.B. mit Blick auf den Lehrplan), woraufhin in der letzten Stufe die Praxisforschung empirisch Daten erhebt und analysiert. Als Ziel wäre es denkbar, das Untersuchen von Variablen anzustreben wie motivationsförderndes Potenzial, Lerngewinn, oder Verminderung von Berührungsängsten.

Die umfangreiche Recherche (vgl. Kapitel 1.4) und die Menge des Materials haben einen guten Überblick über die Welt mathematischer Zaubertricks und deren breite Fächerung geliefert. Es wurde gezeigt, und auch Beispiele wurden dafür geliefert, dass in vielen mathematischen Teilgebieten Zaubertricks auf unterschiedlichen mathematischen Niveaus existieren, wie beispielsweise:

- Wahrscheinlichkeitstheorie. Vgl. Kapitel 3.1: *Der Zufallsspaziergang; Buchstaben zählen.*
- Arithmetik. Vgl. Kapitel 1.6; 3.10.
- Topologie. Vgl. Kapitel 3.4: *Kurven und Punkte - Ein Trick aus der Topologie.*
- Algebra. Vgl. Kapitel 2: *Das Dreifarbendreieck.*
- Zahlentheorie. Vgl. Kapitel 3.5: *Fibonacci zaubert*; Kapitel 3.3: *Zauberei auf Basis von Quersummen und 9er-Resten.*
- Lineare Algebra. Vgl. Kapitel 3.9: *Errate das Polynom.*
- Geometrie. Vgl. Kapitel 3.8: *Die Kartenreise*; vgl. Kapitel 1.5: Beispiel für ein *Geometrical Vanish*.

Die Schwerpunktsetzung dieser Arbeit wurde hauptsächlich in Kapitel 1.5 argumentiert, und schließlich in Kapitel 1.7 in Form von Auswahlkriterien konkretisiert. Zusammengefasst sollten Tricks gesucht und gewählt werden, die einerseits nicht viel an Material, und außerdem keiner *slight of hand* Techniken bedürfen. Ebenso war die Eignung für einen Lehr- und Lernkontext keine notwendige Voraussetzung.
Der Fokus der positiven Auswahlkriterien lag auf dem Wow-Effekt, der begeisternd, verblüffend, die Neugier erregend, oder mathematisch inspirierend wirken sollte. Außerdem waren die mathematische Komplexität (es wurden drei Komplexitätsebenen formuliert), sowie der Interessantheitsgrad der Mathematik wesentliche Faktoren.

Rückblickend betrachtet hat sich diese Filterung aufgrund folgender Überlegungen als sinnvoll herausgestellt:

Zum einen konnte belegt werden, dass tatsächlich in zahlreichen mathematischen Fachgebieten Konzepte existieren, die clever und kreativ verpackt die Basis für unterhaltsame und für eine/n Zuschauer*in kaum zu ergründende Zaubertricks liefern können. Mehrere Vorführungen im privaten sowie professionellen Rahmen haben gezeigt, dass selbst mathematisch gebildete Personen selten in der Lage sind, diese Effekte spontan zu erklären. Ebenso darf nicht vergessen werden, dass zahlreiche Tricks, welche die o. e. Kriterien eigentlich erfüllt haben, aufgrund des begrenzten Umfangs dieser Arbeit leider verworfen werden mussten - an manchen Stellen mit Verweis auf deren Literaturquelle.

Zum anderen räumt diese Vielfalt mathematischer Zaubertricks der Thematik ein Potenzial ein, im Lehr- und Lernkontext eingesetzt zu werden. Es soll betont werden, dass damit nicht gemeint ist, jeder Trick würde sich eignen. Das breite Spektrum an Tricks erlaubt jedoch eine Filterung, um mit einer hohen Wahrscheinlichkeit - je nach Bedarf - etwas passendes zu finden:
Für den Pflichtschulbereich existieren zahlreiche auf simpler Arithmetik basierende Tricks, die oftmals auf dem Arbeiten mit Variablen oder dem Umformen von Formeln basieren. Abgesehen von den bereits erwähnten Kapiteln dieser Arbeit sei beispielsweise auf das Buch von Carla Cederbaum (2018) mit Namen *Wie man einen Schokoladendieb entlarvt ... und andere mathematische Zaubertricks* verwiesen, das (hauptsächlich) für elf- bis zwölfjährige Kinder geschrieben wurde. Die reichhalte Menge an Material würde es zweifellos erlauben, ein Projekt für die *Kinderuni*[31] zu entwickeln, das sich diesem Thema widmet.
Das „mittlere“ mathematische Komplexitätsniveau würde die Sekundarstufe 2, also Schülerinnen und Schüler ab der neunten Schulstufe, abdecken. Hierbei wurden ebenfalls Zaubertricks vorgestellt, dessen mathematischer Hintergrund im Lehrplan zu finden ist. Als Beispiele sollen die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kapitel 3.1: *Der Zufallsspaziergang; Buchstaben zählen*), Reihen und Folgen (Kapitel 3.5: *Fibonacci zaubert*), und Funktionen (Kapitel 3.6: *Black Holes - Mathematische schwarze Löcher*) genannt werden.
Ebenso wäre es auf Hochschulniveau möglich, mathematische Zaubertricks in den Studienalltag einzubauen. Nebem dem fachmathematischen Kern dieser Arbeit (Kapitel 2: *Das Dreifabendreieck*), oder dem Basenwechsel aus Kapitel 3.9: *Errate das Polynom*, ließe sich das gesamte Werk von Behrends (2017), *Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker* als Beispiel nennen. Einzelne Kapitel dieses Buches könnten mehrere Vorlesungseinheiten füllen, und gehen weit über die Schulmathematik hinaus.

Zusammenfassend lässt sich - abgesehen von der individuellen, persönlichen Bereicherung - ein potenzieller Mehrwert dieser Arbeit auf unterschiedlichen Ebenen identifizieren. Einem/Einer interessierten, engagierten Leser*in wird eine breite Auswahl von auf Mathematik basierenden Zaubertricks präsentiert, die es im Rahmen einer Eigeninitiative möglich machen sollen, Mathematik interessant und positiv zu kommunizieren. Ebenfalls wurde Wert darauf gelegt, fachmathematische Beweise auf unterschiedlichem Niveau zu

[31] Für mehr Informationen über Initiativen an der *KinderuniWien*, siehe: https://kinderuni.at/

integrieren. Verweise auf themennahe Literatur sollen weiterführende Recherchen unterstützen. Diese Arbeit kann ebenfalls als Basis für Projekte oder Folgestudien genutzt werden, beispielsweise, um den didaktischen Einsatz im Lehr- und Lernkontext mit Fokus auf Lernerfolg zu untersuchen, oder, im Rahmen einer psychologischen Untersuchung innerhalb der Motivationsforschung Erkenntnisse zu erzielen.

Literaturverzeichnis

[-] Behrends, E., & Humble, S. (2013). Triangle Mysteries. *The Mathematical Intelligencer, 35*(2), 10–15. https://doi.org/10.1007/s00283-012-9346-4

[-] Behrends, E. (2017). *Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker.* Springer Wiesbaden.

[-] Behrends, E. (2019). *Der mathematische Zauberstab: Verblüffende Tricks mit Karten und Zahlen.* Rowohlt Taschenbuch Verlag.

[-] Benjamin, A. (2015). *The magic of math: Solving for X and figuring out why.* New York: Basic Books.

[-] Benjamin, A., & Shermer, M. (2013). *Mathemagie: Verblüffende Tricks für blitzschnelles Kopfrechnen und ein phänomenales Zahlengedächtnis* (3. Auflage). München: Heyne Verlag.

[-] Blum, R., Hart-Davis, A., Longe, B., & Niederman, D. (2002). *Classic mathemagic.* New York: MetroBooks.

[-] Bosch, S. (2009). *Algebra* (7. überarbeitete Auflage). Springer Berlin Heidelberg.

[-] Bosko, R. L. (2011). Cards, codes, and kangaroos. *The UMAP Journal, 32*(3), 199-236.

[-] Cederbaum, C. (2018). *Wie man einen Schokoladendieb entlarvt ... und andere mathematische Zaubertricks.* Springer Berlin.

[-] Cutler, A., & McShane, R. M. (1960). *The Trachtenberg speed system of basic mathematics.* Doubleday & Company, Inc.

[-] Dambeck, H. (2013). *Nullen machen Einsen groß. Mathe-Tricks für alle Lebenslagen.* GGP Media GmbH.

[-] Davison, J., & McOwan, P. (n.d.). *Maths Made Magic: A handbook of magical mathematical tricks for you to learn.* Queen Mary, University of London. University of Warwick.

[-] Drayton, M., Gale, H., Goncalves, J., Graham, J., Joy, A., King, L., Kuipers, K., McWhirter, K., Morrison, A., Parker, K., & Swanson, A. (2010). *Making Math Magic at Home!* California: Queen's University, Faculty of Education.

[-] Engelhardt, I. von, & Gustke, A. (2005). *Zaubern mit Mathematik. Verblüffende Ideen für den Unterricht.* Braunschweig: Westermann.

[-] Fields, B. (n.d.). *MatheMagic!* Bradley Fields Magic Productions.

[-] Gardner, M. (1956). *Mathematics, Magic and Mystery.* Toronto: General Publishing Company, Ltd.

[-] Gardner, M. (1964). *Mathematische Rätsel und Probleme.* Braunschweig: Vieweg & Sohn.

[-] Gardner, M. (1978). Mathematical Games. *Scientific American, 238*(5), 24–32.

[-] Gardner, M. (1992). *Mathematical circus.* Mathematical Association of America.

[-] Gardner, M. (2001). *The colossal book of mathematics: Classic puzzles, paradoxes, and problems ; number theory, algebra, geometry, probability, topology, game theory, Infinity, and other topics of recreational mathematics.* New York: Norton & Company.

[-] Gardner, M. (2008). *Hexaflexagons, probability paradoxes and the tower of Hanoi.* Cambridge University Press.

[-] Gardner, M. (2016). *Das verschwundene Kaninchen und andere mathematische Tricks.* Köln: DuMont.

[-] Gardner, M., & Rodgers, T. (2018). *The mathemagician and Pied Puzzler: A collection in tribute to Martin Gardner.* CRC Press.

[-] Glaeser, G. (2020). *77-mal Mathematik für zwischendurch: Unterhaltsame Kuriositaäten und unorthodoxe Anwendungen.* Springer Berlin.

[-] Grätzer, G., & Stern, M. (2010). *Denksport für ein Jahr.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

[-] Grime, J. (2020). *Kruskal's Count.* [Unpubliziertes Manuskript].

[-] Haga, W., & Robins, S. (1995). On Kruskal's Principle. *CMS (Canadian Mathematical Society) Conference Proceedings. Organic mathematics. December 12-14, 1995*, Volume 20, 407ff.

[-] Haines, E., (1989). Essential ray tracing algorithms. Glassner, A. S. (Ed.), *An introduction to ray tracing*, S. 33-77. Academic Press Ltd.

[-] Haines, E., (1994). Point in Polygon Strategies. Heckbert, P. (Ed.), *Graphics gems IV*, S. 24-46. Academic Press Professional, Inc.

[-] Hales, T., (2007a). The Jordan curve theorem, formally and informally. *The American Mathematical Monthly, 114*(10), 882-894. https://doi.org/10.1080/00029890.2007.11920481

[-] Hales, T., (2007b). Jordan's proof of the Jordan curve theorem. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, 10*(23), 45-60. https://doi.org/10.1080/00029890.2007.11920481

[-] Handley, B. (2010). *Speed math for kids: The fast, fun way to do basic calculations.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

[-] Hanover, D. (2017). *The base dependent behavior of Kaprekar's routine: A theoretical and computational study revealing new regularities.* arXiv:1710.06308

[-] Hofer, E. (2022, 21. September). Warum kaum jemand Mathe mag. *Kurier*, S. 6.

[-] Hugard, J. (2008). *The royal road to card magic.* Pomona Press; Illustrated Edition.

[-] Kadan, D. (2015). Zauberhafte Mathematik - Mathematische Zaubereien. *Schriftreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, Heft 48, 46-57.

[-] Kandasamy, V. W. B., & Smarandache, F. (2000). *VEDIC MATHEMATICS - 'VEDIC' OR 'MATHEMATICS': A FUZZY & NEUTROSOPHIC ANALYSIS.* Indo American Books.

[-] Koirala, H. P., & Goodwin, P. M. (2000). Teaching algebra in the middle grades using Mathmagic. *Mathematics teaching in the middle school, 5*(9), 562–566. https://doi.org/10.5951/mtms.5.9.0562

[-] Lagarias, J. C., Rains, E., & Vanderbei, R. J. (2001). The Kruskal Count. *The mathematics of preference, choice and order. Essays in honor of Peter J. Fishburn*, 371–391.

[-] Lee, W. (1976). *Math miracles.* Calgary: M. Hades International.

[-] Lesser, L. M., & Glickman, M. E. (2009). Using magic in the teaching of probability and statistics. *Model assisted statistics and applications, 4*(4), 265–274. https://doi.org/10.3233/mas-2009-0137

[-] Lipper, A. (2013). *Mathemagic Camp.* San Luis Obispo, CA: Supercharged Science.

[-] McOwan, P., & Parker, M. (n.d.). *The manual of mathematical magic.* Queen Mary, University of London. https://freecomputerbooks.com/The-Manual-of-Mathematical-Magic.html#downloadLinks

[-] Mitchell, L. M., & Cummings, J. (2017). *When and how to use math based card tricks in the classroom.* Sacramento: California State University.

[-] Montenegro, R., & Tetali, P. (2009). How long does it take to catch a wild kangaroo? *Proceedings of the 41st annual ACM symposium on theory of computing*, 553–559.

[-] Mulcahy, C. (2013). *Mathematical card magic: Fifty-two new effects.* CRC Press, Taylor & Francis Group.

[-] Neundorf, W. (2010). *Die Mathematische Zauberkiste.* Ilmenau: Univ.-Bibliothek Technische Universität, Institut für Mathematik.

[-] Olbrich, E., Arici, F., Liebl, D., & Räsch, T. (2023, 14. März). *Im Getriebe der Meinungsmaschine – Der Einfluss sozialer Medien auf individuelle, gesellschaftliche und politische Entscheidungen* [Talkrunde des Abendprogramms, 19:00]. Mathenacht aus Bonn und Leipzig (Max-Planck-Institut), Bonn, Deutschland.

[-] Pollard, J. M. (2000a). Kangaroos, monopoly and discrete logarithms. *Journal of Cryptology, 13*(4), 437-447. https://doi.org/10.1007/s001450010010

[-] Pollard, J. M. (2000b). Kruskal's card trick. *The Mathematical Gazette, 84*(500), 265-267. https://doi.org/10.2307/3621657

[-] Posamentier, A. S. (2003). *Math wonders to inspire teachers and students.* Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

[-] Poskitt, K. (2014). *Murderous Maths: The Magic of Maths.* London: Scholastic.

[-] Preparata, F., & Shamos, M. I. (1985). *Computational geometry. An introduction.* Springer New York.

[-] Raji, W. (2016). *An introductory course in elemental number theory.* Lulu Enterprises Incorporated.

[-] Ram, B. (1909). Common Factors of $\frac{n!}{m!(n-m)!}$, $m = 1, ..., n-1$. *Journal of the Indian Mathematical Club, 1*, 39-43.

[-] Schichl, H., & Steinbauer, R. (2009). *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Springer Berlin Heidelberg.

[-] Schiemann, S., & Wöstenfeld, R. (2017). *Die Mathe-Wichtel Band 1.* Springer Wiesbaden.

[-] Schott, P. (2009). The use of magic in mathematics: From primary school to higher education. *Proceedings of ICERI2009 Conference, Madrid, Spain,* 58-70.

[-] Simon, W. (1993). *Mathematical magic.* Dover Publications.

[-] Stickels, T. (2009). *Math puzzles and brainteasers, grades 6-8: Over 300 puzzles that teach math and problem solving skills.* San Francisco: Jossey-Bass.

[-] Talwalkar, P. (2012). *Math puzzles Volume 1: Classic riddles in counting, geometry, probability, and game theory.* CreateSpace Independent Publishing Platform.

[-] Tanna, S. (2016). *Math magic: Amazing tricks with numbers, arithmetic & geometry!* Answers 2000 Limited.

[-] Tekriwal, G. (2015). *MATHS SUTRA: The Art of Vedic Speed Calculation.* Penguin Random House India.

[-] Weng, A. (2019). *Ziffy, Der Zahlenzauberer: Eine magische Reise durch die Welt der Mathematik.* Springer: Berlin.

[-] White, L. B., & Broekel, R. (1991). *Math-a-magic: Number tricks for magicians.* Toronto: General Publishing, Limited.

[-] Winkler, P., & Filk, T. (2010). *Mehr Mathematische Rätsel für Liebhaber.* Spektrum Akademischer Verlag.

[-] MAGIC + TEACHING = JOLT OF EXCITEMENT! (Winter 2017). *Language Teacher MAGIC, Vol. 1 (No. 2).* Verfügbar unter: http://ritorn.fatcow.com/store/page1.html