



universität
wien

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Ein Vergleich topologischer, geometrischer und kombinatorischer Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2 .

verfasst von | submitted by

Christian Fechter BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt |
Degree programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 502 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree pro-
gramme as it appears on the student record
sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Bi-
ologie und Umweltbildung Unterrichtsfach Mathe-
matik

Betreut von | Supervisor:

Mag. Dr. Stefan Haller Privatdoz.

Danksagung

Zuallererst möchte mich insbesondere bei meinem Betreuer Dr. Stefan Haller bedanken, der mich nicht nur auf das Thema der Masterarbeit aufmerksam machte, sondern vor allem auch bei jeglichen Fragen und Schwierigkeiten, die ich beim Bearbeiten des Themas hatte, unterstützte. Sein konstruktives Feedback und seine Geduld ermöglichten es mir, die Arbeit in eine Form zu bringen, auf die ich heute stolz sein kann.

An dieser Stelle möchte ich mich zudem bei meinen Eltern und Großeltern bedanken, die mich während meiner gesamten Studienzzeit unterstützt haben. Sie ermöglichten es mir, dass Studium an oberste Stelle zu setzen und beruhigten mich in Phasen, in denen mir alles zu viel wurde. Ohne ihre Unterstützung wäre ich heute nicht da, wo ich bin. Zudem gilt mein Dank auch Juliane Gruber, die mir immer wieder den nötigen Antrieb gab, das Studium durchzuziehen, auch in Phasen, in denen der Druck und die Arbeitslast an die persönliche Grenze stießen.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2 . Zuerst werden die Euler-Charakteristik einer Triangulierung, der Satz von Poincaré-Hopf und der Satz von Gauß-Bonnet für Gebiete im \mathbb{R}^2 vorgestellt und einige für diese Zusammenhänge wichtige Definitionen wiederholt. Anschließend werden die Euler-Charakteristik einer Triangulierung, der Satz von Gauß-Bonnet und der Satz von Poincaré-Hopf miteinander in Bezug gesetzt. Daraus ergeben sich Sätze, welche mit kombinatorischen, topologischen und geometrischen Zugängen bewiesen werden. Die Arbeit beschränkt sich dabei auf Gebiete im \mathbb{R}^2 , damit die Beweise mit elementarer Analysis in mehreren Variablen durchgeführt werden können.

Abstract

This thesis deals with the Euler characteristic for regions in \mathbb{R}^2 . First, the Euler characteristic of a triangulation, the Poincaré-Hopf theorem and the Gauss-Bonnet theorem for regions in \mathbb{R}^2 are presented and some relevant definitions for these theorems are recalled. Subsequently, the Euler characteristic of a triangulation, the Gauss-Bonnet theorem and the Poincaré-Hopf theorem are compared. This results in theorems which are proved using combinatorial, topological and geometric approaches. The work is restricted to regions in \mathbb{R}^2 so that the proofs can be carried out by using elementary multivariable calculus.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Topologische, geometrische und kombinatorische Aspekte der Euler-Charakteristik | 3 |
| 2.1 | Der Satz von Poincaré-Hopf für Gebiete in \mathbb{R}^2 | 4 |
| 2.2 | Der Satz von Gauß-Bonnet für Graphen | 7 |
| 2.3 | Die Euler-Charakteristik für triangulierte Gebiete | 9 |
| 2.4 | Der Satz von Gauß-Bonnet für triangulierte Graphen | 9 |
| 3 | Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2 | 11 |
| 3.1 | Zusammenhang zwischen dem Winkeldefekt einer triangulierten Fläche und der Euler-Charakteristik einer Triangulierung | 11 |
| 3.2 | Zusammenhang zwischen der Gaußkrümmung und dem Poincaré-Hopf Index | 15 |
| 3.2.1 | Beweis Lemma 3.3 | 16 |
| 3.2.2 | Beweis Lemma 3.4 | 32 |
| 3.2.3 | Beweis Lemma 3.5 | 35 |
| 3.3 | Zusammenhang des Satz von Poincaré-Hopf und der Euler-Charakteristik einer Triangulierung | 46 |
| | Literaturverzeichnis | 56 |

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den vielfältigen Aspekten der Euler-Charakteristik χ für Gebiete im \mathbb{R}^2 . Heuristisch betrachtet kann man sich die Euler-Charakteristik χ als einen Kennwert eines Gebiets vorstellen, der von der Anzahl der Löcher g , die das Gebiet besitzt, abhängt. Für zusammenhängende Gebiete gilt dabei:

$$\chi = 1 - g.$$

Ein einfaches Beispiel ist in Abbildung 1.1 zu sehen.

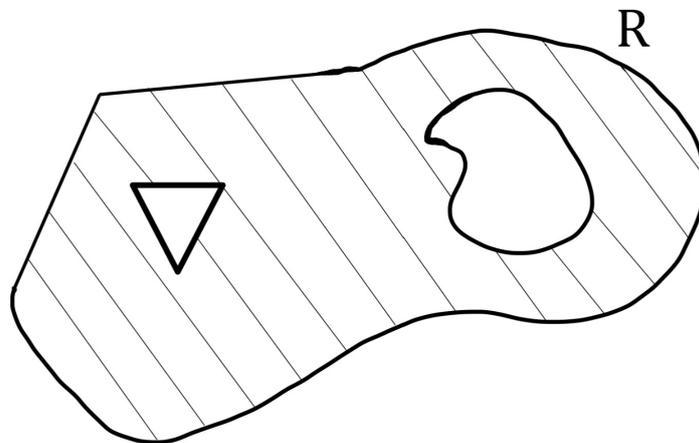


Abbildung 1.1: Das Gebiet R hat die Euler-Charakteristik $\chi = -1$, da das Gebiet zwei Löcher besitzt.

Üblicherweise wird die Euler-Charakteristik jedoch nicht über die Anzahl der Löcher eines Gebiet definiert, sondern als die alternierende Summe

$$V - E + F$$

der Anzahl der Ecken V , der Anzahl der Kanten E und der Anzahl der Dreiecksflächen F einer Triangulierung, wie in Kapitel 2.3 noch einmal genauer beschrieben wird. In Anbetracht dieser Definition stellt sich die Frage, ob die Euler-Charakteristik von der Wahl der Triangulierung abhängig ist. Am Ende von Kapitel 3 dieser Arbeit wird jedoch nachgewiesen, dass sie von der Triangulation unabhängig ist.

1 Einleitung

Historisch betrachtet entwickelte sich die Euler-Charakteristik aus dem Euler'schen Polyedersatz, in dem Euler nachwies, dass für konvexe Polyeder die alternierende Summe stets 2 ergibt, d.h.

$$V - E + F = 2,$$

wobei V die Anzahl der Ecken, E die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen des Polyeders sind. Genaueres zur Geschichte der Euler-Charakteristik und dem Euler'schen Polyedersatz kann bei Richeson [6, S. 1-26] nachgelesen werden.

Die Euler-Charakteristik gibt jedoch nicht nur einen Zusammenhang mit der Anzahl der Löcher eines Gebiets oder der Anzahl der Dreiecksflächen, Ecken und Kanten von Triangulierungen des Gebiets an. Der Satz von Gauß-Bonnet beschreibt den wichtigen Zusammenhang der Euler-Charakteristik mit der Gaußkrümmung des Graphen einer Funktion auf dem Gebiet. Der Satz von Poincaré-Hopf bringt die Summe aller Poincaré-Hopf Indexe für Vektorfelder auf dem Gebiet in einen Zusammenhang mit der Euler-Charakteristik. Diese Zusammenhänge werden in Kapitel 2 dieser Arbeit genauer vorgestellt.

Die oben angeführten Zusammenhänge werden anschließend in Kapitel 3 miteinander in Beziehung gesetzt. Obwohl die angegebenen Sätze auch in höherdimensionalen Räumen gelten, beschränkt sich diese Arbeit auf Gebiete im \mathbb{R}^2 . Dadurch können die Zusammenhänge nur mit elementarer Analysis in mehreren Variablen gezeigt werden, ohne eine genaue Kenntnis der Analysis von Flächen vorauszusetzen.

2 Topologische, geometrische und kombinatorische Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

In diesem Kapitel werden verschiedene Sätze vorgestellt, in welchen die Euler-Charakteristik χ auftritt. Um die hier formulierten Sätze besser zu verstehen, werden zunächst einige wichtige Definitionen aufgestellt, welche im Laufe der Arbeit immer wieder benötigt werden. In der Einleitung wurde bereits der Begriff des Gebiets intuitiv benutzt, er soll jedoch an dieser Stelle mit der für diese Arbeit notwendigen mathematischen Strenge definiert werden. Dafür werden zunächst einige Definitionen aufgestellt, die für die Definition eines Gebiets benötigt werden.

Der Kurvenbegriff ist dabei essentiell, da der Rand eines Gebiets durch eine Kurve beschrieben wird.

Definition 2.1 ([8, S. 2]). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *glatt*, wenn jede der Funktionen, die ihre Komponenten ausmacht, beliebig oft differenzierbar ist.

Definition 2.2 ([8, S. 2]). Eine parametrisierte Kurve in \mathbb{R}^n ist eine glatte Funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Definition 2.3 ([8, S. 5]). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Sie heißt *regulär*, wenn ihr Geschwindigkeitsvektor nirgends verschwindet ($|\gamma'(t)| \neq 0$ für alle $t \in I$). Sie heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*, wenn ihr Geschwindigkeitsvektor immer die Länge 1 hat ($|\gamma'(t)| = 1$ für alle $t \in I$).

Definition 2.4 ([8, S. 21]). Eine geschlossene reguläre Kurve ist eine reguläre Kurve der Form $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass $\gamma(a) = \gamma(b)$ und alle Ableitungen folgendes erfüllen:

$$\gamma'(a) = \gamma'(b), \quad \gamma''(a) = \gamma''(b), \quad \text{etc.}$$

Ist γ zudem injektiv auf dem Intervall $[a, b)$ heißt sie *einfach geschlossene Kurve*.

Definition 2.5 ([8, S. 68]). Eine *stückweise-reguläre Kurve* im \mathbb{R}^n ist eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit einer Zerlegung, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, sodass die Einschränkung γ_i von γ in jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ eine reguläre Kurve ist. Sie heißt *geschlossen*, wenn zusätzlich $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt, und *einfach-geschlossen*, wenn γ injektiv auf dem Intervall $[a, b)$ ist. Sie heißt *nach Bogenlänge parametrisiert* wenn jedes γ_i nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Nun kann der Begriff Gebiet, wie er in dieser Arbeit verwendet wird, genau definiert werden.

Definition 2.6 ([8, S. 320]). Eine kompakte Teilmenge $R \subset \mathbb{R}^2$ nennt man ein Gebiet, wenn sie die Vereinigung einer offenen Menge in \mathbb{R}^2 mit dem Rand ∂R dieser Menge bezeichnet. Der Rand ∂R ist dabei eine Vereinigung von endlich-vielen schnittfremden stückweise-regulären einfach-geschlossenen Kurven in \mathbb{R}^2 . Jede einzelne Spur bezeichnet man dabei als Randkomponente.

Definition 2.7 ([8, S. 320]). Sei R ein Gebiet in \mathbb{R}^2 . Eine Parametrisierung, $\gamma : [a, b] \rightarrow R$, einer Randkomponente C von R wird als positiv orientiert bezeichnet, wenn R stets linkerhand beim Durchlaufen von γ liegt.

Definition 2.8 ([8, S. 299]). Sei γ eine stückweise-reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Jeder nicht-glatte Punkt $\gamma(t_i)$ bildet möglicherweise eine Ecke von γ . An den Ecken gibt es zwei Geschwindigkeitsvektoren v^- und v^+ , die sich aus den links- und rechtsseitigen Ableitungen ergeben:

$$v^-(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\gamma(t_i + h) - \gamma(t_i)}{h} = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma'(t)$$

und

$$v^+(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t_i + h) - \gamma(t_i)}{h} = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma'(t).$$

Ist $v^+(t_i)$ kein negatives skalares Vielfaches von $v^-(t_i)$, dann ist der Wert des vorzeichen-behafteten Winkel $\alpha_i \in [-\pi, \pi]$ im Punkt $\gamma(t_i)$ der kleinstmögliche Absolutbetrag des Winkels zwischen $v^-(t_i)$ und $v^+(t_i)$. Das Vorzeichen ist positiv, wenn $v^+(t_i)$ eine gegen den Uhrzeigersinn gerichtete Rotation von $v^-(t_i)$ ist (und negativ, wenn eine Rotation im Uhrzeigersinn). Ist γ geschlossen und $\gamma'(a) \neq \gamma'(b)$, dann kann in diesem Punkt eine Ecke entstehen. Der Winkel in dieser Ecke ist dann der Winkel zwischen $v^-(b)$ und $v^+(a)$.

Definition 2.9 ([8, S. 69]). Eine Ecke von γ wird als Spitze bezeichnet, wenn $v^+(t_i)$ ein negatives skalares Vielfaches von $v^-(t_i)$ ist.

Für alle in diesem Kapitel beschriebenen Sätze soll nun gelten:

Sei R ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^2 mit stückweise glattem Rand. Der Rand des Gebiets kann dabei aus mehreren Randkomponenten bestehen, welche positiv orientiert sind. Die Randkurve von R soll dabei frei von Spitzen sein.

2.1 Der Satz von Poincaré-Hopf für Gebiete in \mathbb{R}^2

Der Satz von Poincaré-Hopf stellt eine Verbindung zwischen den Poincaré-Hopf-Indizes eines Vektorfelds X mit der Euler-Charakteristik des Gebiets R her. Ein Vektorfeld X wird dabei folgendermaßen definiert.

Definition 2.10 ([4, [S. 131]). Unter einem Vektorfeld X auf einer Menge $R \subset \mathbb{R}^2$ versteht man eine Abbildung, die jedem Punkt $x \in R$ einen Vektor $X(x) \in \mathbb{R}^2$ zuordnet, $X : R \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Betrachten wir nun die Definition des Poincaré-Hopf Index:

Definition 2.11 ([8, S. 336] Poincaré-Hopf Index für Vektorfelder im \mathbb{R}^2). Der Poincaré-Hopf Index $\text{Ind}_X(\rho)$ einer isolierten Nullstelle ρ eines stetigen Vektorfelds X auf \mathbb{R}^2 ist der Grad der Funktion $f_\epsilon : [a, b] \rightarrow S^1$ definiert als

$$f_\epsilon(t) = \frac{X(\gamma_\epsilon(t))}{|X(\gamma_\epsilon(t))|},$$

wobei $\gamma_\epsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ den gegen den Uhrzeigersinn orientierten Kreis mit Mittelpunkt ρ und Radius $\epsilon > 0$ parametrisiert. Der Radius ϵ muss dabei klein genug gewählt werden, sodass das Vektorfeld X keine weiteren Nullstellen außer ρ im oder am Rand des Kreises besitzt.

Genauer zum Grad einer Funktion kann bei Tapp [8, S. 63] in Proposition und Definition 2.3 nachgelesen werden.

Der Poincaré-Hopf Index ordnet also jeder Nullstelle eines Vektorfelds einen ganzzahligen Wert zu. Anschaulich betrachtet beschreibt der Poincaré-Hopf Index die Anzahl der Umdrehungen des Vektorfelds X gegen den Uhrzeigersinn, wenn man den Rand eines Kreises, den man um eine isolierte Nullstelle bildet, vollständig gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Insbesondere drei Arten von Nullstellen werden im späteren Verlauf der Arbeit benötigt und an dieser Stelle vorgestellt.

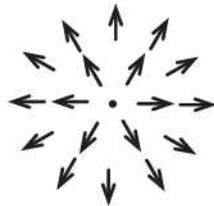


Abbildung 2.1: Quelle [6, S. 205]

Eine Quelle (vgl. Abbildung 2.1) ist eine Nullstelle, von der alle Vektoren wegzeigen. Bei einer vollständigen Umdrehung gegen den Uhrzeigersinn drehen sich die Vektoren einmal gegen den Uhrzeigersinn, weswegen Quellen einen Poincaré-Hopf Index von 1 besitzen.

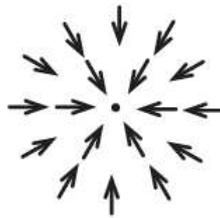


Abbildung 2.2: Senke [6, S. 205]

Eine Senke (vgl. Abbildung 2.2) ist eine Nullstelle, in dessen Richtung alle Vektoren zeigen. Bei einer vollständigen Umrückung gegen den Uhrzeigersinn drehen sich die Vektoren einmal gegen den Uhrzeigersinn, weswegen Senken einen Poincaré-Hopf Index von 1 besitzen.

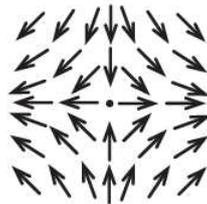


Abbildung 2.3: Sattel [6, S. 205]

Eine Sattelstelle (vgl. Abbildung 2.3) ist eine Nullstelle, die sowohl hinführende als auch wegführende Vektoren besitzt. Bei einer vollständigen Umrückung gegen den Uhrzeigersinn drehen sich die Vektoren einmal im Uhrzeigersinn, weswegen Sattelstellen einen Poincaré-Hopf Index von -1 besitzen.

Der erste wichtige Satz beschreibt nun einen Zusammenhang zwischen der Euler-Charakteristik und der Summe der Poincaré-Hopf Indexe eines Vektorfelds auf einem Gebiet.

Satz 2.1 (Poincaré-Hopf für Gebiete in \mathbb{R}^2). *Sei $X : R \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld mit isolierten Nullstellen, die alle im Inneren des Gebiets R liegen. Weiters soll X längs des Randes von R nach außen zeigen. Dann gilt:*

$$\sum_{\rho} \text{Ind}_X(\rho) = \chi, \quad (2.1)$$

wobei die Summe über alle isolierten Nullstellen ρ von X läuft.

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satz von Poincaré-Hopf, der eine höherdimensionale Verallgemeinerung für Mannigfaltigkeiten beschreibt und in Hazewinkel [3] oder Milnor [5, Kapitel 6] nachgelesen werden kann.

2.2 Der Satz von Gauß-Bonnet für Graphen

In diesem Unterkapitel wird ein Satz vorgestellt, der einen Zusammenhang zwischen der Gaußkrümmung einer Fläche, dem Winkeldefekt der Randkomponenten der Fläche und der Euler-Charakteristik herstellt. Die Flächen, welche in diesem Unterkapitel genauer betrachtet werden, werden durch den Graphen einer Funktion gebildet. Für alle Sätze und Definitionen in diesem Unterkapitel soll folgendes gelten:

Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : R \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Funktion. Der Graph S

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} : (x, y) \in R \right\}$$

bildet eine Fläche im \mathbb{R}^3 .

Um den Zusammenhang zwischen den oben aufgeführten Größen aufzustellen, wird zunächst die geodätische Krümmung und der Winkeldefekt näher betrachtet. Die geodätische Krümmung wird in Tapp [8, S. 209] genauer vorgestellt.

Definition 2.12 ([8, S. 209]). Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve auf S , d.h. $|\gamma'(t)| = 1$. Dann ist die geodätische Krümmung κ_g :

$$\kappa_g(t) = \langle R_{90}(\gamma'(t)), \gamma''(t) \rangle,$$

wobei R_{90} eine Rotation um 90° gegen den Uhrzeigersinn tangential an den Graphen S beschreibt.

Definition 2.13 ([8, S. 300]). Sei γ eine stückweise-reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve auf S . Wir bezeichnen die vorzeichenbehafteten Winkel an den Ecken von γ als $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

- (1) Eine Funktion $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Winkelfunktion von γ wenn für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, θ eine Sprungstelle der Höhe α_i bei t_i besitzt und ansonsten $\theta'(t) = \kappa_g(t)$ gilt. Eine Winkelfunktion existiert und ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.
- (2) Der Winkeldefekt entlang γ bezeichnet die Änderung der Winkelfunktion: $\Delta\theta = \theta(b) - \theta(a)$. Äquivalenterweise ist also:

$$\Delta\theta = \int_a^b \kappa_g(t) dt + \sum_i \alpha_i,$$

wobei " $\int_a^b \kappa_g(t) dt$ " für die Summe aller Integrale der geodätischen Krümmung über die glatten Abschnitte von γ steht.

Im geschlossenen Fall ist dies so zu verstehen, dass auch der Winkel beim Anfang/Endpunkt berücksichtigt wird.

Definition 2.14. Sei R ein Gebiet mit Rand ∂R , C eine Randkomponente von ∂R und $\Delta(C)$ der Winkeldefekt einer Parametrisierung von C . Der Winkeldefekt des gesamten Rands $\Delta(\partial R)$ ist dann:

$$\Delta(\partial R) := \sum_C \Delta(C),$$

wobei die Summe über alle Randkomponenten C läuft.

In jedem Punkt einer Fläche kann die Gaußkrümmung ermittelt werden. Vorstellen kann man sich die Gaußkrümmung als ein Maß, dass angibt, wie stark sich die Fläche in dem Punkt von der Tangentialebene an diesen Punkt wegkrümmt. Genaueres zur Gaußkrümmung kann bei Tapp [8, S. 196] nachgelesen werden.

Definition 2.15 ([8, S. 220-221]). Sei R ein Gebiet und S die Fläche im \mathbb{R}^3 , die vom Graphen S einer Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ gebildet wird. Die Gaußkrümmung K im Punkt (x, y) ist dann:

$$K(x, y) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Berechnet man das Integral über einer Fläche, muss man die Flächenverzerrung, die durch die Parametrisierung verursacht wird korrigieren. Diese Verzerrung kann mit dem Flächenelement korrigiert werden.

Definition 2.16 ([8, S. 163]). Das Flächenelement dA einer Fläche S , die durch den Graphen einer Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ gebildet wird, ist:

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Nun kann ein Zusammenhang zwischen der Euler-Charakteristik, dem Winkeldefekt und der Gaußkrümmung hergestellt werden.

Satz 2.2 (Der Satz von Gauß-Bonnet für Graphen). Sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf dem Gebiet R im \mathbb{R}^2 . Der Graph von f bildet eine glatte Fläche in \mathbb{R}^3 . K bezeichnet die Gaußkrümmung dieser Fläche, dA das Flächenelement des Graphen von f und $\Delta(\partial R)$ den Winkeldefekt des Rands des Gebiets R . Dann gilt:

$$\int_R K dA + \Delta(\partial R) = 2\pi\chi. \quad (2.2)$$

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satz von Chern-Gauß-Bonnet, welcher eine n -dimensionale Verallgemeinerung des Satzes darstellt und von Chern in [2] bewiesen wurde.

2.3 Die Euler-Charakteristik für triangulierte Gebiete

In diesem Unterkapitel wird nun ein Zusammenhang zwischen Triangulierungen und der Euler-Charakteristik hergestellt.

Definition 2.17 ([8, S. 327]). Sei R ein Gebiet mit stückweise linearem Rand. Eine Triangulierung (oder auch Triangulation) von R ist eine endliche Familie τ_1, \dots, τ_F von Dreiecken, so dass:

- $\cup_i \tau_i = R$
- Wenn $i \neq j$, dann ist $\tau_i \cap \tau_j$ entweder leer oder eine gemeinsame Kante oder Ecke der Dreiecke τ_i und τ_j .

Ist R ein Gebiet mit stückweise linearem Rand, dann existiert eine Triangulierung von R .

Satz 2.3 ([8, S. 327] Die Euler-Charakteristik für triangulierte Gebiete). Sei R ein Gebiet mit stückweise linearem Rand und τ eine Triangulation von R . Dann gilt:

$$V - E + F = \chi, \tag{2.3}$$

wobei F die Anzahl der Dreiecke bzw. Dreiecksflächen ist, E die Anzahl der Kanten (wobei jede Kante nur einmal gezählt wird, auch wenn sie von zwei Dreiecken geteilt wird) und V die Anzahl der Ecken (wobei jede Ecke nur einmal gezählt wird, auch wenn sie von mehreren Dreiecken geteilt wird) ist.

Die alternierende Summe $V - E + F$ in Gleichung (2.3) wird als die Euler-Charakteristik der Triangulierung τ bezeichnet. Üblicherweise wird die Euler-Charakteristik von R durch diese alternierende Summe definiert. Die Euler-Charakteristik ist wohldefiniert und unabhängig von der Triangulierung τ , wie später in Korollar 3.3 beschrieben. In Abbildung 2.4 wird Satz 2.3 anhand eines einfachen Beispiels nachgewiesen.

2.4 Der Satz von Gauß-Bonnet für triangulierte Graphen

Sei R ein Gebiet mit stückweise linearem Rand, τ eine Triangulierung von R und $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige stückweise-lineare Funktion. Die Einschränkung von f auf jedem Dreieck von τ ist linear, d. h. wir erhalten über jedem Dreieck von τ ein Dreieck im \mathbb{R}^3 .

Sei v'' eine Ecke von τ , die im Inneren des Gebiets R liegt, dann bezeichnet:

$$D(v'') = 2\pi - \sum_i \alpha_i \tag{2.4}$$

den Winkeldefekt bei der Ecke v'' , wobei die Summe über alle Dreieckswinkel α_i (im \mathbb{R}^3) läuft, die bei v'' zusammenstoßen.

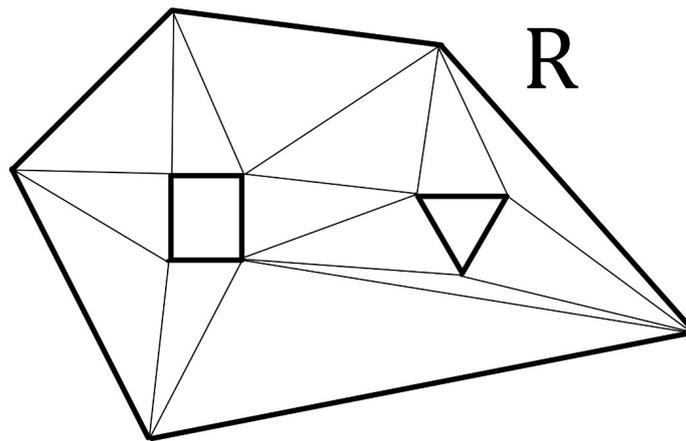


Abbildung 2.4: Das Gebiet R hat die Euler-Charakteristik $\chi = -1$, da das Gebiet zwei Löcher besitzt. Die abgebildete Triangulierung τ besitzt 12 Ecken, 27 Kanten und 14 Dreiecksflächen. Die alternierende Summe $V - E + F$ ist demnach $12 - 27 + 14 = -1$ und stimmt mit der Euler-Charakteristik überein.

Sei v' eine Ecke von τ , die am Rand des Gebiets R liegt, dann bezeichnet:

$$D(v') = \pi - \sum_i \alpha_i \quad (2.5)$$

den Winkeldefekt bei der Ecke v' , wobei die Summe über alle Dreieckswinkel α_i (im \mathbb{R}^3) läuft, die bei v' zusammenstoßen. Die Winkeldefekte hängen dabei von der Funktion f ab. Der folgende Satz beschreibt einen Zusammenhang zwischen der Euler-Charakteristik und dem Winkeldefekt von triangulierten Graphen.

Satz 2.4 (Der Satz von Gauß-Bonnet für triangulierte Graphen). *In dieser Situation gilt:*

$$\sum_{v''} D(v'') + \sum_{v'} D(v') = 2\pi\chi, \quad (2.6)$$

wobei die erste Summe über alle Ecken v'' der Triangulation τ , die im Inneren des Gebiets R liegen, und die zweite Summe über alle Ecken v' der Triangulation τ , die am Rand des Gebiets R liegen, läuft.

Das Ziel dieser Arbeit ist nun eine Verbindung der in diesem Kapitel vorgestellten Sätze rund um die Euler-Charakteristik herzustellen. Dazu wird jeweils die Euler-Charakteristik χ in den aufgestellten Gleichungen durch eine der anderen Beschreibungen ersetzt und anschließend diese neu gebildeten Gleichungen bewiesen. Aus diesen Beweisen folgen dann auch unmittelbar die hier aufgeführten Sätze, wobei einer der Sätze zur Definition von χ deklariert wird.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

3.1 Zusammenhang zwischen dem Winkeldefekt einer triangulierten Fläche und der Euler-Charakteristik einer Triangulierung

In diesem ersten Unterkapitel wird der Zusammenhang zwischen dem Winkeldefekt einer triangulierten Fläche und der Euler-Charakteristik einer Triangulierung genauer betrachtet. Dazu werden die linken Seiten der Gleichungen (2.3) und (2.6) miteinander in Bezug gesetzt.

Satz 3.1. *Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise linearem Rand, τ eine Triangulation von R , $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise lineare Funktion, $D(v'')$ der Winkeldefekt einer Ecke von τ im Inneren von R und $D(v')$ der Winkeldefekt einer Ecke von τ am Rand von R . Weiters bezeichne V die Anzahl der Ecken, E die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Dreiecke der Triangulation τ . Dann gilt:*

$$\sum_{v''} D(v'') + \sum_{v'} D(v') = 2\pi(V - E + F). \quad (3.1)$$

Für den Beweis dieses Satzes werden zwei Lemma benötigt.

Lemma 3.1. *Sei V' die Anzahl der Ecken am Rand und E' die Anzahl der Kanten am Rand einer Triangulation τ . Dann gilt:*

$$V' = E'. \quad (3.2)$$

Dieses Lemma gilt, da jede Ecke am Rand der Fläche von genau zwei Randkanten berandet wird und jede Kante am Rand von zwei Ecken des Randes begrenzt wird. Diese Tatsache wird in Abbildung 3.1 anhand eines einfachen Beispiels erläutert.

Lemma 3.2. *Sei F die Anzahl der Dreiecke, E die Anzahl der Kanten und E' die Anzahl der Kanten am Rand einer Triangulation τ . Dann gilt:*

$$E' = 2E - 3F. \quad (3.3)$$

Da der Rand jedes Dreiecks aus drei Kanten besteht, jede Kante im Inneren der Figur von zwei Dreiecken berandet wird aber jede Kante am Rand nur von einem Dreieck berandet wird, gilt $3F = 2 \cdot (E - E') + E'$, woraus durch einfache Umformungsschritte Lemma 3.2 folgt. Abbildung 3.2 verdeutlicht dies anhand eines einfachen Beispiels.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

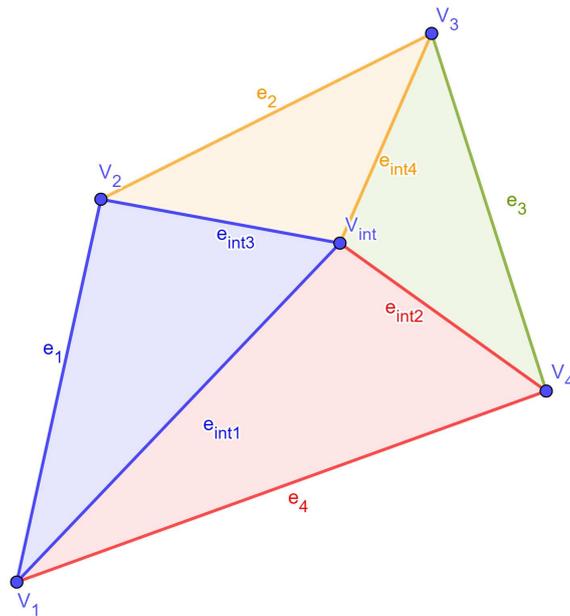


Abbildung 3.1: Einfache Veranschaulichung von Lemma 3.1. Die Kante e_1 wird von den beiden Randecken V_1 und V_2 begrenzt. Die drei Kanten e_1 , e_4 sowie e_{int1} münden in der Randecke V_1 , aber nur die zwei Kanten e_1 und e_4 bilden einen Teil des Rands der Figur. Somit ist die Anzahl der Ecken und Kanten am Rand gleich.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

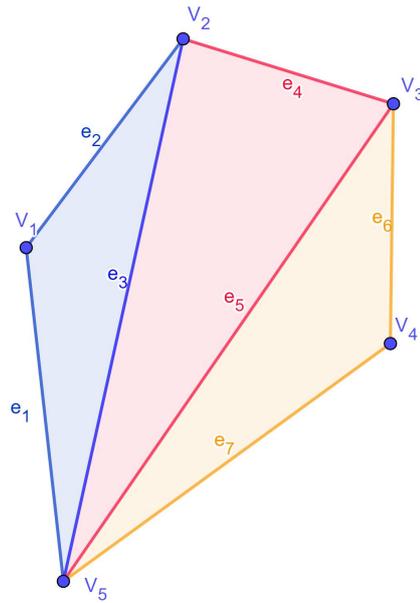


Abbildung 3.2: Einfache Veranschaulichung von Lemma 3.2. Die Fläche wurde durch eine Triangulierung in drei Dreiecke zerteilt. Die fünf Kanten e_1, e_2, e_4, e_6 und e_7 liegen am Rand der Fläche und werden somit nur von je einem Dreieck berandet, während die Kanten e_3 und e_5 im Inneren der Fläche liegen und von je zwei Dreiecken berandet werden.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Beweis von Satz 3.1. Der Graph von f ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 , die in endlich-viele Dreiecke zerfällt. Da die Winkelsumme jedes Dreiecks π beträgt und die Fläche aus F Dreiecken besteht beträgt die Gesamtsumme der Winkel πF .

Die Winkelsumme der Fläche kann auch kombinatorisch erfasst werden, indem man Summe aller Winkelsummen in jeder Ecke der Fläche erfasst. Die Gesamtwinkelsumme der Figur kann nach den Gleichungen (2.4) und (2.5) dann auch durch

$$\sum_{v''} (2\pi - D(v'')) + \sum_{v'} (\pi - D(v'))$$

beschrieben werden.

Demnach gilt:

$$\sum_{v''} (2\pi - D(v'')) + \sum_{v'} (\pi - D(v')) = \pi F. \quad (3.4)$$

Durch diese Beobachtung können wir nun den Winkeldefekt einer triangulierten Fläche beschreiben. V' bezeichnet dabei die Anzahl der Ecken am Rand ∂ und V'' bezeichnet die Anzahl der Ecken im Inneren der triangulierten Figur.

$$\begin{aligned} \sum_{v''} D(v'') + \sum_{v'} D(v') &\stackrel{(3.4)}{=} 2\pi V'' + \pi V' - \pi F \\ &= \pi(2(V - V') + V' - F) \\ &= \pi(2V - V' - F) \\ &\stackrel{(\text{Lemma 3.1})}{=} \pi(2V - E' - F) \\ &\stackrel{(\text{Lemma 3.2})}{=} \pi(2V - 2E + 2F) = 2\pi(V - E + F). \end{aligned}$$

□

Aus Satz 3.1 und dem Beweis können auch die folgenden spannenden Schlussfolgerungen gezogen werden.

Korollar 3.1. (i) $\sum_v D(v) + \sum_{v'} D(v')$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von π .

(ii) $\sum_v D(v) + \sum_{v'} D(v')$ hängt nicht von der Funktion f ab.

Um den Satz von Gauß-Bonnet für triangulierte Graphen zu beweisen kann die Funktion f deswegen auch als konstant angenommen werden, wodurch für den Winkeldefekt für alle Ecken v'' , welche im Inneren der Fläche liegen, $D(v'') = 0$ gilt.

3.2 Zusammenhang zwischen der Gaußkrümmung und dem Poincaré-Hopf Index

Im folgenden Unterkapitel wird nun ein Zusammenhang zwischen der Gaußkrümmung einer Fläche und dem Poincaré-Hopf Index hergestellt. Dazu werden die linken Seiten der Gleichungen (2.1) und (2.2) miteinander in Bezug gesetzt.

Satz 3.2. *Sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Ist X ein glattes Vektorfeld auf R , das längs des Rands ∂R nach Außen zeigt und im Inneren des Gebiets nur isolierte Nullstellen ρ besitzt, dann gilt:*

$$\int_R K dA + \Delta(\partial R) = 2\pi \sum_{\rho} \text{Ind}_X(\rho), \quad (3.5)$$

wobei die Summe über alle Nullstellen ρ von X läuft.

Sei das Vektorfeld $X = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, die Menge $Z = \{\rho \in R \mid X(\rho) = 0\}$, die Funktion $P : R \setminus Z \rightarrow \mathbb{R}$

$$P = \frac{(\xi\eta_x - \xi_x\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2) + \xi^2 f_y f_{xx} + \xi\eta(f_y f_{xy} - f_x f_{xx}) - \eta^2 f_x f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot [\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2)]} \quad (3.6)$$

und die Funktion $Q : R \setminus Z \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q = \frac{(\xi\eta_y - \xi_y\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2) + \xi^2 f_y f_{xy} + \xi\eta(f_y f_{yy} - f_x f_{xy}) - \eta^2 f_x f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot [\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2)]}. \quad (3.7)$$

Die glatten Funktionen P und Q ergeben sich als Spezialfall von [2, Eq. 23]. Der nachfolgende Beweis spezialisiert Chern's Beweis [2] des Satz von Gauß-Bonnet für die vorliegende Situation.

Für die Funktionen P und Q gelten die folgenden Lemmata:

Lemma 3.3. *Sei K die Gaußkrümmung und dA das Flächenelement. Dann gilt:*

$$K dA = (P_y - Q_x) dx dy. \quad (3.8)$$

Lemma 3.4. *Ist das Vektorfeld X nullstellenfrei am Rand ∂R und zeigt längs des Rands nach außen, dann gilt:*

$$\int_{\partial R} P dx + Q dy = \Delta(\partial R). \quad (3.9)$$

Lemma 3.5. *Ist ρ eine isolierte Nullstelle des Vektorfelds X , dann gilt:*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(\rho)} P dx + Q dy = 2\pi \cdot \text{Ind}_X(\rho). \quad (3.10)$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Beweis von Satz 3.2. R_ϵ bezeichnet das Gebiet R ohne hinreichend kleine Scheiben rund um die isolierten Nullstellen ρ , so dass sich in jeder Scheibe nur genau eine isolierte Nullstelle befindet. Es gilt dann:

$$R_\epsilon = R \setminus \bigcup_{\rho} B_\epsilon(\rho).$$

Aufgrund des Satz von Green [8, S.91] und Lemma 3.3 gilt:

$$\int_{R_\epsilon} K dA = - \int_{\partial R_\epsilon} P dx + Q dy.$$

Aufgrund von Lemma 3.4 kann die rechte Seite der Gleichung auch durch den Winkeldefekt beschrieben werden:

$$\int_{R_\epsilon} K dA = -\Delta(\partial R) + \sum_{\rho} \int_{\partial B_\epsilon(\rho)} P dx + Q dy.$$

Nun kann ein Grenzwertübergang durchgeführt werden, bei dem der Radius ϵ der Kreisscheiben gegen Null läuft.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R_\epsilon} K dA = -\Delta(\partial R) + \sum_{\rho} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(\rho)} P dx + Q dy.$$

Das Gebiet R_ϵ läuft dabei gegen R . Aufgrund von Lemma 3.5 gilt dann:

$$\int_R K dA = -\Delta(\partial R) + \sum_{\rho} 2\pi \text{Ind}_X(\rho).$$

□

Aus diesem Beweis können direkt auch die folgenden Eigenschaften gefolgert werden:

Korollar 3.2. (i) $\sum_{\rho} \text{Ind}_X(\rho)$ ist unabhängig vom Vektorfeld X .

(ii) $\int_R K dA + \Delta(\partial R)$ ist unabhängig von der Funktion f und ein ganzzahliges Vielfaches von 2π .

3.2.1 Beweis Lemma 3.3

Wir wollen zeigen, dass für die Funktionen P und Q und ein Vektorfeld X folgendes gilt:

$$K dA = (P_y - Q_x) dx dy. \quad (3.11)$$

Da die Funktionen aus sehr vielen Termen bestehen, erhalten einige Teilstrukturen Namen, um leichter mit ihnen arbeiten zu können. Für die Funktionen P und Q gilt dabei

dann folgendes:

$$P = \frac{\overbrace{(\xi\eta_x - \xi_x\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2) + \xi^2 f_y f_{xx} + \xi\eta(f_y f_{xy} - f_x f_{xx}) - \eta^2 f_x f_{xy}}^{PZ}}{\underbrace{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot \underbrace{[\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2)]}_{N_K}}_N} \quad (3.12)$$

und

$$Q = \frac{\overbrace{(\xi\eta_y - \xi_y\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2) + \xi^2 f_y f_{xy} + \xi\eta(f_y f_{yy} - f_x f_{xy}) - \eta^2 f_x f_{yy}}^{QZ}}{\underbrace{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot \underbrace{[\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2)]}_{N_K}}_N}. \quad (3.13)$$

Definitionsbereich von P und Q. Zuerst werden wir nachweisen, dass die Funktionen P und Q überall existieren außer an den Singularitäten des Vektorfelds X . Dazu betrachten wir den Teil des Nenners N_K . Seien ξ und η nicht beide 0.

$$\begin{aligned} & \xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2) \\ &= \xi^2 + \xi^2 f_x^2 + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2 + \eta^2 f_y^2 \\ &= (\xi^2 f_x^2 + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2 f_y^2) + \xi^2 + \eta^2 \\ &= \underbrace{(\xi f_x + \eta f_y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\xi^2 + \eta^2}_{> 0} \end{aligned}$$

Da der Faktor $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ als Summe von Werten größer oder gleich Null strikt positiv ist muss der Nenner N demnach an jeder nicht-singulären Stelle des Vektorfelds X größer als Null sein. \square

Nun soll die Gleichung (3.8) bewiesen werden, wofür die Ableitungen P_y und Q_x benötigt werden. Dies werden in den nächsten Unterkapiteln bestimmt.

Die Ableitung P_y

$$P_y = \frac{PZ_y \cdot N - N_y \cdot PZ}{N^2}. \quad (3.14)$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} PZ_y &= \frac{\partial}{\partial y} [(\xi\eta_x - \xi_x\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2) + \xi^2 f_y f_{xx} + \xi\eta(f_y f_{xy} - f_x f_{xx}) - \eta^2 f_x f_{xy}] \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} [(\xi\eta_x - \xi_x\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2)]}_{I_p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} [\xi^2 f_y f_{xx}]}_{II_p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} [\xi\eta(f_y f_{xy} - f_x f_{xx})]}_{III_p} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} [\eta^2 f_x f_{xy}]}_{IV_p}, \end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

wobei

$$\begin{aligned}
 I_p &= \frac{\partial}{\partial y} [(\xi\eta_x - \xi_x\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2)] \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial y}[\xi\eta_x] - \frac{\partial}{\partial y}[\xi_x\eta]\right)(1 + f_x^2 + f_y^2) + \left(\frac{\partial}{\partial y}[1] + \frac{\partial}{\partial y}[f_x^2] + \frac{\partial}{\partial y}[f_y^2]\right)(\xi\eta_x - \xi_x\eta) \\
 &= (\xi_y\eta_x + \xi\eta_{xy} - \xi_x\eta_y - \xi_{xy}\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2) + (2f_x f_{xy} + 2f_y f_{yy})(\xi\eta_x - \xi_x\eta) \\
 &= \xi_y\eta_x + \xi\eta_{xy} - \xi_x\eta_y - \xi_{xy}\eta + \xi_y\eta_x f_x^2 + \xi\eta_{xy} f_x^2 - \xi_x\eta_y f_x^2 - \xi_{xy}\eta f_x^2 + \xi_y\eta_x f_y^2 \\
 &\quad + \xi\eta_{xy} f_y^2 - \xi_x\eta_y f_y^2 - \xi_{xy}\eta f_y^2 + 2\xi\eta_x f_x f_{xy} - 2\xi_x\eta f_x f_{xy} + 2\xi\eta_x f_y f_{yy} - 2\xi_x\eta f_y f_{yy},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 II_p &= \frac{\partial}{\partial y} [\xi^2 f_y f_{xx}] \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} [\xi^2] f_y f_{xx} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} [f_y] f_{xx} + \xi^2 f_y \frac{\partial}{\partial y} [f_{xx}] \\
 &= 2\xi\xi_y f_y f_{xx} + \xi^2 f_{xx} f_{yy} + \xi^2 f_y f_{xxy},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 III_p &= \frac{\partial}{\partial y} [\xi\eta(f_y f_{xy} - f_x f_{xx})] \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} [\xi\eta](f_y f_{xy} - f_x f_{xx}) + \xi\eta \frac{\partial}{\partial y} [(f_y f_{xy} - f_x f_{xx})] \\
 &= (\xi_y\eta + \xi\eta_y)(f_y f_{xy} - f_x f_{xx}) + \xi\eta(f_y f_{xyy} + f_{xy} f_{yy} - f_x f_{xxy} - f_{xx} f_{xy}) \\
 &= \xi_y\eta f_y f_{xy} - \xi_y\eta f_x f_{xx} + \xi\eta_y f_y f_{xy} - \xi\eta_y f_x f_{xx} \\
 &\quad + \xi\eta f_y f_{xyy} + \xi\eta f_{xy} f_{yy} - \xi\eta f_x f_{xxy} - \xi\eta f_{xx} f_{xy},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 IV_p &= \frac{\partial}{\partial y} [\eta^2 f_x f_{xy}] \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} [\eta^2] f_x f_{xy} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial y} [f_x] f_{xy} + \eta^2 f_x \frac{\partial}{\partial y} [f_{xy}] \\
 &= 2\eta\eta_y f_x f_{xy} + \eta^2 f_{xy}^2 + \eta^2 f_x f_{xyy}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 N_y &= \frac{\partial}{\partial y} [\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot (\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2))] \\
 &= \overbrace{\frac{\partial}{\partial y} [\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}] \cdot (\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2))}^V \\
 &\quad + \underbrace{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [(\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2))]}_{VI},
 \end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

wobei

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial}{\partial y} [\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}] \\ &= \frac{1}{2} (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}} (2f_x f_{xy} + 2f_y f_{yy}) \\ &= (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}} (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} VI &= \frac{\partial}{\partial y} [\xi^2 (1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2 (1 + f_y^2)] \\ &= \frac{\partial}{\partial y} [\xi^2 (1 + f_x^2)] + \frac{\partial}{\partial y} [2\xi\eta f_x f_y] + \frac{\partial}{\partial y} [\eta^2 (1 + f_y^2)] \\ &= 2\xi\xi_y + 2\xi\xi_y f_x^2 + 2\xi^2 f_x f_{xy} + 2\xi_y \eta f_x f_y + 2\xi\eta_y f_x f_y \\ &\quad + 2\xi\eta f_y f_{xy} + 2\xi\eta f_x f_{yy} + 2\eta\eta_y + 2\eta\eta_y f_y^2 + 2\eta^2 f_y f_{yy}. \end{aligned}$$

Die Ableitung Q_x

$$Q_x = \frac{QZ_x \cdot N - N_x \cdot QZ}{N^2},$$

wobei

$$\begin{aligned} QZ_x &= \frac{\partial}{\partial x} [(\xi\eta_y - \xi_y\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2) + \xi^2 f_y f_{xy} + \xi\eta(f_y f_{yy} - f_x f_{xy}) - \eta^2 f_x f_{yy}] \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} [(\xi\eta_y - \xi_y\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2)]}_{I_Q} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} [\xi^2 f_y f_{xy}]}_{II_Q} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} [\xi\eta(f_y f_{yy} - f_x f_{xy})]}_{III_Q} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} [\eta^2 f_x f_{yy}]}_{IV_Q}. \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} I_Q &= \frac{\partial}{\partial x} [(\xi\eta_y - \xi_y\eta)(1 + f_x^2 + f_y^2)] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} [\xi\eta_y] - \frac{\partial}{\partial x} [\xi_y\eta] \right) (1 + f_x^2 + f_y^2) + \left(\frac{\partial}{\partial x} [1] + \frac{\partial}{\partial x} [f_x^2] + \frac{\partial}{\partial x} [f_y^2] \right) (\xi\eta_y - \xi_y\eta) \\ &= (\xi_x\eta_y + \xi\eta_{yx} - \xi_y\eta_x - \xi_{xy}\eta) (1 + f_x^2 + f_y^2) + (2f_x f_{xx} + 2f_y f_{xy}) (\xi\eta_y - \xi_y\eta) \\ &= \xi_x\eta_y + \xi\eta_{xy} - \xi_y\eta_x - \xi_{xy}\eta + \xi_x\eta_y f_x^2 + \xi\eta_{yx} f_x^2 - \xi_y\eta_x f_x^2 - \xi_{xy}\eta f_x^2 + \xi_x\eta_y f_y^2 \\ &\quad + \xi\eta_{xy} f_y^2 - \xi_y\eta_x f_y^2 - \xi_{xy}\eta f_y^2 + 2\xi\eta_y f_x f_{xx} - 2\xi_y\eta f_x f_{xx} + 2\xi\eta_y f_y f_{xy} - 2\xi_y\eta f_y f_{xy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II_Q &= \frac{\partial}{\partial x} [\xi^2 f_y f_{xy}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [\xi^2] f_y f_{xy} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} [f_y] f_{xy} + \xi^2 f_y \frac{\partial}{\partial x} [f_{xy}] \\ &= 2\xi\xi_x f_y f_{xy} + \xi^2 f_{xy}^2 + \xi^2 f_y f_{xxy}, \end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned}
III_Q &= \frac{\partial}{\partial x} [\xi \eta (f_y f_{yy} - f_x f_{xy})] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} [\xi \eta] (f_y f_{yy} - f_x f_{xy}) + \xi \eta \frac{\partial}{\partial x} [(f_y f_{yy} - f_x f_{xy})] \\
&= (\xi_x \eta + \xi \eta_x) (f_y f_{yy} - f_x f_{xy}) + \xi \eta (f_y f_{xyy} + f_{xy} f_{yy} - f_x f_{xxy} - f_{xx} f_{xy}) \\
&= \xi_x \eta f_y f_{yy} - \xi_x \eta f_x f_{xy} + \xi \eta_x f_y f_{yy} - \xi \eta_x f_x f_{xy} \\
&\quad + \xi \eta f_y f_{xyy} + \xi \eta f_{xy} f_{yy} - \xi \eta f_x f_{xxy} - \xi \eta f_{xx} f_{xy},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
IV_Q &= \frac{\partial}{\partial x} [\eta^2 f_x f_{yy}] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} [\eta^2] f_x f_{yy} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial x} [f_x] f_{yy} + \eta^2 f_x \frac{\partial}{\partial x} [f_{yy}] \\
&= 2\eta \eta_x f_x f_{yy} + \eta^2 f_{xx} f_{yy} + \eta^2 f_x f_{xyy}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{\partial}{\partial x} [\underbrace{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}_{VII} \cdot (\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi \eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2))] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} [\underbrace{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}_{VII} \cdot (\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi \eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2))] \\
&\quad + \underbrace{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi \eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2))]}_{VIII},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
VII &= \frac{\partial}{\partial x} [\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}] \\
&= \frac{1}{2} (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}} (2f_x f_{xx} + 2f_y f_{xy}) \\
&= (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}} (f_x f_{xx} + f_y f_{xy})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
VIII &= \frac{\partial}{\partial x} [\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi \eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2)] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} [\xi^2(1 + f_x^2)] + \frac{\partial}{\partial x} [2\xi \eta f_x f_y] + \frac{\partial}{\partial x} [\eta^2(1 + f_y^2)] \\
&= 2\xi \xi_x + 2\xi \xi_x f_x^2 + 2\xi^2 f_x f_{xx} + 2\xi \eta f_x f_y + 2\xi \eta_x f_x f_y \\
&\quad + 2\xi \eta f_y f_{xx} + 2\xi \eta f_x f_{xy} + 2\eta \eta_x + 2\eta \eta_x f_y^2 + 2\eta^2 f_y f_{xy}.
\end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Umformung von $(P_y - Q_x)dxdy$

Als nächstes wollen wir folgendes berechnen:

$$\begin{aligned} (P_y - Q_x)dxdy &= \frac{PZ_y \cdot N - N_y \cdot PZ}{N^2} - \left(\frac{QZ_x \cdot N - N_x \cdot QZ}{N^2} \right) dxdy \\ &= \frac{N \cdot (PZ_y - QZ_x) + (N_x \cdot QZ - N_y \cdot PZ)}{N^2} dxdy. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Zur Vereinfachung werden wir zuerst $(N_x \cdot QZ - N_y \cdot PZ)$ vollständig ausmultiplizieren, anschließend die Differenz bilden, bei der viele Terme wegfallen, und aus den übrig gebliebenen Termen den Nenner N herausheben, sodass dieser weggekürzt werden kann.

Vereinfachung von $(N_x \cdot QZ - N_y \cdot PZ)$

$$\begin{aligned} N_x \cdot QZ - N_y \cdot PZ &= (N_K \cdot (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}} (f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) + \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot VIII) \cdot QZ \\ &\quad - (N_K \cdot (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}} (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) + \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot VI) \cdot PZ \\ &= (N_K \cdot (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}}) \cdot [(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ] \\ &\quad + \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot (VIII \cdot QZ - VI \cdot PZ). \end{aligned}$$

Durch Erweiterung des Terms $(N_K \cdot (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}})$ mit $\overbrace{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}}}$ kann der Nenner N aus diesem Teil herausgehoben werden.

$$\begin{aligned} N_x \cdot QZ - N_y \cdot PZ &= N \cdot (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-1} \cdot [(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ] \\ &\quad + \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot (VIII \cdot QZ - VI \cdot PZ) \end{aligned}$$

Nun muss nur noch N_K aus dem Term $(VIII \cdot QZ - VI \cdot PZ)$ herausgehoben werden, um N einmal vollständig zu kürzen.

Vereinfachung von $VIII \cdot QZ - VI \cdot PZ$

$$\begin{aligned} VIII \cdot QZ &= 2 \cdot (\xi \xi_x + \xi \xi_x f_x^2 + \xi^2 f_x f_{xx} + \xi \eta f_x f_y + \xi \eta_x f_x f_y + \xi \eta f_y f_{xx} + \xi \eta f_x f_{xy} \\ &\quad + \eta \eta_x + \eta \eta_x f_y^2 + \eta^2 f_y f_{xy}) \cdot (\xi \eta_y - \xi_y \eta + \xi \eta_y f_x^2 - \xi_y \eta f_x^2 + \xi \eta_y f_y^2 - \xi_y \eta f_y^2 \\ &\quad + \xi^2 f_y f_{xy} + \xi \eta f_y f_{yy} - \xi \eta f_x f_{xy} - \eta^2 f_x f_{yy}). \end{aligned}$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist das Doppelte der Summe aller Terme, welche in der Tabelle in Abbildung 3.3 dargestellt werden.

Analog kann auch $VI \cdot PZ$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} VI \cdot PZ &= 2 \cdot (\xi \xi_y \xi \xi_y f_x^2 + \xi^2 f_x f_{xy} + \xi_y \eta f_x f_y + \xi \eta_y f_x f_y + \xi \eta f_y f_{xy} + \xi \eta f_x f_{yy} \\ &\quad + \eta \eta_y + \eta \eta_y f_y^2 + \eta^2 f_y f_{yy}) \cdot (\xi \eta_x - \xi_x \eta + \xi \eta_x f_x^2 - \xi_x \eta f_x^2 + \xi \eta_x f_y^2 - \xi_x \eta f_y^2 \\ &\quad + \xi^2 f_y f_{xx} + \xi \eta f_y f_{xy} - \xi \eta f_x f_{xx} - \eta^2 f_x f_{xy}). \end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

| $\frac{1}{2}VIII$ -QZ | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|--------------------------|------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\xi\eta_y$ | $\xi^2\xi_x\xi_y\eta_y$ | $\xi^2\xi_x\xi_y\eta_y^2$ | $\xi^3\eta_yf_{xxx}$ | $\xi\xi_x\eta\eta_yf_{xy}$ | $\xi^2\eta_x\eta_yf_{xy}$ | $\xi^2\eta_yf_{xxx}$ | $\xi^2\eta_yf_{xxy}$ | $\xi\eta\eta_x$ | $\eta\eta_x\eta_y^2$ | η^2f_{xy} |
| $-\xi_y\eta$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta^2$ | $-\xi^2\xi_y\eta f_{xxx}$ | $-\xi\xi_x\eta^2f_{xy}$ | $-\xi\xi_y\eta\eta_xf_{xy}$ | $-\xi\xi_y\eta^2f_{xxx}$ | $-\xi\xi_y\eta^2f_{xxy}$ | $-\xi_y\eta^2\eta_x$ | $-\xi_y\eta^2\eta_xf_x^2$ | $-\xi_y\eta^3f_{xy}$ |
| $\xi\eta_yf_x^2$ | $\xi^2\xi_x\eta_yf_x^2$ | $\xi^2\xi_x\eta_yf_x^4$ | $\xi^3\eta_yf_x^3f_{xxx}$ | $\xi\xi_x\eta\eta_yf_x^3f_y$ | $\xi^2\eta_x\eta_yf_x^3f_y$ | $\xi^2\eta_yf_x^2f_{xxx}$ | $\xi^2\eta_yf_x^3f_{xxy}$ | $\xi\eta\eta_x\eta_yf_x^2$ | $\xi\eta\eta_x\eta_yf_x^2f_y^2$ | $\xi\eta^2\eta_yf_x^2f_yf_{xy}$ |
| $-\xi_y\eta f_x^2$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta f_x^2$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta f_x^4$ | $-\xi^2\xi_y\eta f_x^3f_{xxx}$ | $-\xi\xi_x\eta^2f_x^3f_y$ | $-\xi\xi_y\eta\eta_xf_x^3f_y$ | $-\xi\xi_y\eta^2f_x^2f_{xxx}$ | $-\xi\xi_y\eta^2f_x^3f_{xxy}$ | $-\xi_y\eta^2\eta_xf_x^2$ | $-\xi_y\eta^2\eta_xf_x^2f_y^2$ | $-\xi_y\eta^3f_x^2f_yf_{xy}$ |
| $\xi\eta_yf_y^2$ | $\xi^2\xi_x\eta_yf_y^2$ | $\xi^2\xi_x\eta_yf_y^4$ | $\xi^3\eta_yf_y^3f_{xxx}$ | $\xi\xi_x\eta\eta_yf_y^3f_x$ | $\xi^2\eta_x\eta_yf_y^3f_x$ | $\xi^2\eta_yf_y^2f_{xxx}$ | $\xi^2\eta_yf_y^3f_{xxy}$ | $\xi\eta\eta_x\eta_yf_y^2$ | $\xi\eta\eta_x\eta_yf_y^2f_x^2$ | $\xi\eta^2\eta_yf_y^2f_xf_{xy}$ |
| $-\xi_y\eta f_y^2$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta f_y^2$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta f_y^4$ | $-\xi^2\xi_y\eta f_y^3f_{xxx}$ | $-\xi\xi_x\eta^2f_y^3f_x$ | $-\xi\xi_y\eta\eta_xf_y^3f_x$ | $-\xi\xi_y\eta^2f_y^2f_{xxx}$ | $-\xi\xi_y\eta^2f_y^3f_{xxy}$ | $-\xi_y\eta^2\eta_xf_y^2$ | $-\xi_y\eta^2\eta_xf_y^2f_x^2$ | $-\xi_y\eta^3f_y^2f_xf_{xy}$ |
| ξ^2f_{xy} | $\xi^3\xi_xf_yf_{xy}$ | $\xi^3\xi_xf_x^2f_yf_{xy}$ | $\xi^4f_xf_yf_{xxx}f_{xy}$ | $\xi^2\xi_x\eta f_xf_y^2f_{xy}$ | $\xi^3\eta_x\eta_yf_x^2f_{xy}$ | $\xi^3\eta_yf_x^2f_{xxx}$ | $\xi^3\eta f_xf_yf_{xxx}f_{xy}$ | $\xi^2\eta\eta_xf_yf_{xy}$ | $\xi^2\eta\eta_xf_y^2f_{xy}$ | $\xi^2\eta^2f_y^2f_x^2f_{xy}$ |
| $\xi\eta f_{xy}f_{yy}$ | $\xi^2\xi_x\eta f_yf_{yy}$ | $\xi^2\xi_x\eta f_x^2f_yf_{yy}$ | $\xi^3\eta f_xf_yf_{xxx}f_{yy}$ | $\xi\xi_x\eta^2f_xf_y^2f_{yy}$ | $\xi^2\eta\eta_x\eta_yf_x^2f_{yy}$ | $\xi^2\eta^2f_y^2f_{xxx}f_{yy}$ | $\xi^2\eta^2f_xf_yf_{xxx}f_{yy}$ | $\xi\eta^2\eta_xf_yf_{yy}$ | $\xi\eta^2\eta_xf_y^2f_{yy}$ | $\xi\eta^3f_y^2f_xf_{xy}f_{yy}$ |
| $-\xi\eta f_{xxy}$ | $-\xi^2\xi_x\eta f_xf_{xxy}$ | $-\xi^2\xi_x\eta f_x^3f_{xxy}$ | $-\xi^3\eta f_x^2f_{xxx}f_{xxy}$ | $-\xi\xi_x\eta^2f_x^2f_{xxy}$ | $-\xi^2\eta\eta_x\eta_yf_x^2f_{xxy}$ | $-\xi^2\eta^2f_x^2f_{xxx}f_{xxy}$ | $-\xi^2\eta^2f_x^2f_{xxy}f_{xxy}$ | $-\xi\eta^2\eta_xf_xf_{xxy}$ | $-\xi\eta^2\eta_xf_x^2f_{xxy}$ | $-\xi\eta^3f_xf_yf_{xxy}f_{xy}$ |
| $-\eta^2f_xf_{xy}$ | $-\xi\xi_x\eta^2f_xf_{xy}$ | $-\xi\xi_x\eta^2f_x^2f_{xy}$ | $-\xi^2\eta^2f_x^2f_{xxx}f_{xy}$ | $-\xi\xi_x\eta^3f_x^2f_{xy}$ | $-\xi\eta^2\eta_x\eta_yf_x^2f_{xy}$ | $-\xi\eta^3f_x^2f_{xxx}f_{xy}$ | $-\xi\eta^3f_x^2f_{xxy}f_{xy}$ | $-\eta^3\eta_xf_xf_{xy}$ | $-\eta^3\eta_xf_x^2f_{xy}$ | $-\eta^4f_xf_yf_{xxy}f_{xy}$ |

Abbildung 3.3: Die Einträge der Tabelle sind die Summanden des Ergebnis der Rechnung $\frac{1}{2}VIII \cdot QZ$. Die Einträge A-J sind dabei die Summanden von $\frac{1}{2}VIII$, die Einträge 1-10 entsprechen den Summanden von QZ. Die Einträge der Tabelle ergeben sich als Produkts des jeweiligen Zeilen- und Spalteneintrags, in dem sie stehen.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Das Ergebnis dieser Multiplikation entspricht dabei dem Zweifachen der Summe aller Terme, welche in der Tabelle in Abbildung 3.4 dargestellt werden.

In der Tabelle in Abbildung 3.5 wird dargestellt, welche Terme bei der Subtraktion $VIII \cdot QZ - VI \cdot PZ$ verschwinden.

Durch Herausheben von N_K aus den übrig gebliebenen Termen folgt:

$$VIII \cdot QZ - VI \cdot PZ = N_K \cdot R_1,$$

wobei

$$\begin{aligned} R_1 = & 2 \cdot (\xi_x \eta_y f_x^2 + \xi \eta_y f_x f_{xx} + \eta \eta_y f_x f_{xy} + \xi_x \eta_y f_y^2 + \xi \xi_x f_y f_{xy} \\ & + \xi_x \eta f_y f_{yy} + \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x f_x^2 - \xi \xi_y f_y f_{xx} - \xi_y \eta_x f_y^2 \\ & - \xi_y \eta f_y f_{xy} - \xi \eta_x f_x f_{xy} - \eta \eta_x f_x f_{yy} - \xi_y \eta_x). \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich:

$$\begin{aligned} N_x \cdot QZ - N_y \cdot PZ = & N \cdot [(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-1} \cdot ((f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ) \\ & + R_1]. \end{aligned}$$

Durch das Herausheben und Kürzen von N kann nun der Term $(P_y - Q_x) dx dy$ vereinfacht werden zu:

$$\frac{(PZ_y - QZ_x) + (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-1} \cdot ((f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ) + R_1}{N} dx dy.$$

Vereinfachung von $PZ_y - QZ_x$

Im nächsten Schritt wird der Term $PZ_y - QZ_x$ vereinfacht.

$$\begin{aligned} PZ_y - QZ_x = & I_P + II_P + III_P - IV_P - I_Q - II_Q - III_Q + IV_Q \\ = & (I_P - I_Q) + (II_P - II_Q) + (III_P - III_Q) + (IV_Q - IV_P), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} (I_P - I_Q) = & \xi_y \eta_x + \xi \eta_{xy} - \xi_x \eta_y - \xi_{xy} \eta + \xi_y \eta_x f_x^2 + \xi \eta_{xy} f_x^2 - \xi_x \eta_y f_x^2 - \xi_{xy} \eta f_x^2 + \xi_y \eta_x f_y^2 \\ & + \xi \eta_{xy} f_y^2 - \xi_x \eta_y f_y^2 - \xi_{xy} \eta f_y^2 + 2\xi \eta_x f_x f_{xy} - 2\xi_x \eta f_x f_{xy} + 2\xi \eta_x f_y f_{yy} - 2\xi_x \eta f_y f_{yy} \\ & - [\xi_x \eta_y + \xi \eta_{xy} - \xi_y \eta_x - \xi_{xy} \eta + \xi_x \eta_y f_x^2 + \xi \eta_{xy} f_x^2 - \xi_y \eta_x f_x^2 - \xi_{xy} \eta f_x^2 + \xi_x \eta_y f_y^2 \\ & + \xi \eta_{xy} f_y^2 - \xi_y \eta_x f_y^2 - \xi_{xy} \eta f_y^2 + 2\xi \eta_y f_x f_{xx} - 2\xi_y \eta f_x f_{xx} + 2\xi \eta_y f_y f_{xy} - 2\xi_y \eta f_y f_{xy}] \\ = & 2\xi_y \eta_x - 2\xi_x \eta_y + 2\xi_y \eta_x f_x^2 - 2\xi_x \eta_y f_x^2 + 2\xi_y \eta_x f_y^2 - 2\xi_x \eta_y f_y^2 + 2\xi \eta_x f_x f_{xy} - 2\xi_x \eta f_x f_{xy} \\ & + 2\xi \eta_x f_y f_{yy} - 2\xi_x \eta f_y f_{yy} - 2\xi \eta_y f_x f_{xx} + 2\xi_y \eta f_x f_{xx} - 2\xi \eta_y f_y f_{xy} + 2\xi_y \eta f_y f_{xy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II_P - II_Q) = & 2\xi \xi_y f_y f_{xx} + \xi^2 f_{xx} f_{yy} + \xi^2 f_y f_{xxy} - [2\xi \xi_x f_y f_{xy} + \xi^2 f_{xy}^2 + \xi^2 f_y f_{xxy}] \\ = & 2\xi \xi_y f_y f_{xx} + \xi^2 f_{xx} f_{yy} - 2\xi \xi_x f_y f_{xy} - \xi^2 f_{xy}^2, \end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

| $\frac{1}{2}VI \cdot PZ$ | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|--------------------------|------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| $\xi\eta_x$ | $\xi^2\xi_y\eta_x$ | $\xi^2\xi_y\eta_x f_x^2$ | $\xi^2 f_x f_{xy}$ | $\xi_y\eta_x f_x f_y$ | $\xi\eta_y f_x f_y$ | $\xi\eta_x f_x f_y$ | $\xi\eta_x f_x f_y$ | $\xi\eta_x \eta_y$ | $\eta\eta_y f_y^2$ | $\eta^2 f_y f_{yy}$ |
| $-\xi_x\eta$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta f_x^2$ | $-\xi^2\xi_x\eta f_x f_{xy}$ | $-\xi\xi_x\eta^2 f_x f_y$ | $-\xi\xi_x\eta\eta_y f_x f_y$ | $-\xi\xi_x\eta^2 f_y f_{xy}$ | $-\xi\xi_x\eta^2 f_x f_{yy}$ | $-\xi_x\eta^2\eta_y$ | $-\xi_x\eta^2\eta_y f_y^2$ | $-\xi_x\eta^3 f_y f_{yy}$ |
| $\xi\eta_x f_x^2$ | $\xi^2\xi_y\eta_x f_x^2$ | $\xi^2\xi_y\eta_x f_x^4$ | $\xi^3\eta_x f_x^3 f_{xy}$ | $\xi\xi_y\eta_x f_x^3 f_y$ | $\xi^2\eta_x\eta_y f_x^3 f_y$ | $\xi^2\eta_x\eta_y f_x^2 f_y f_{xy}$ | $\xi^2\eta_x f_x^3 f_{yy}$ | $\xi\eta_x\eta_y f_x^2$ | $\xi\eta_x\eta_y f_x^2 f_y^2$ | $\xi\eta^2\eta_x f_x^2 f_y f_{yy}$ |
| $-\xi_x\eta f_x^2$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta f_x^2$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta f_x^4$ | $-\xi^2\xi_x\eta f_x^3 f_{xy}$ | $-\xi\xi_x\eta^2 f_x^3 f_y$ | $-\xi\xi_x\eta\eta_y f_x^3 f_y$ | $-\xi\xi_x\eta^2 f_x^2 f_y f_{xy}$ | $-\xi\xi_x\eta^2 f_x^3 f_{yy}$ | $-\xi_x\eta^2\eta_y f_x^2$ | $-\xi_x\eta^2\eta_y f_x^2 f_y^2$ | $-\xi_x\eta^3 f_x^2 f_y f_{yy}$ |
| $\xi\eta_x f_y^2$ | $\xi^2\xi_y\eta_x f_y^2$ | $\xi^2\xi_y\eta_x f_x^2 f_y^2$ | $\xi^3\eta_x f_x f_y^2 f_{xy}$ | $\xi\xi_y\eta_x f_x f_y^3$ | $\xi^2\eta_x\eta_y f_x f_y^3$ | $\xi^2\eta_x\eta_y f_x^2 f_y f_{xy}$ | $\xi^2\eta_x f_x f_y^3 f_{yy}$ | $\xi\eta_x\eta_y f_y^4$ | $\xi\eta_x\eta_y f_y^4$ | $\xi\eta^2\eta_x f_y^3 f_{yy}$ |
| $-\xi_x\eta f_y^2$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta f_y^2$ | $-\xi\xi_x\xi_y\eta f_x^2 f_y^2$ | $-\xi^2\xi_x\eta f_x f_y^2 f_{xy}$ | $-\xi\xi_x\eta^2 f_x f_y^3$ | $-\xi\xi_x\eta\eta_y f_x f_y^3$ | $-\xi\xi_x\eta^2 f_y^2 f_{xy}$ | $-\xi\xi_x\eta^2 f_x f_y^3 f_{yy}$ | $-\xi_x\eta^2\eta_y f_y^2$ | $-\xi_x\eta^2\eta_y f_y^2 f_y^2$ | $-\xi_x\eta^3 f_y^2 f_{yy}$ |
| $\xi^2 f_y f_{xx}$ | $\xi^3\xi_y f_y f_{xx}$ | $\xi^3\xi_y f_x^2 f_y f_{xx}$ | $\xi^4 f_x f_y f_{xx} f_{xy}$ | $\xi^2\xi_y\eta f_x^2 f_y f_{xx}$ | $\xi^3\eta_y f_x f_y^2 f_{xx}$ | $\xi^3\eta f_y^2 f_{xx} f_{xy}$ | $\xi^3\eta f_x f_y f_{xx} f_{yy}$ | $\xi^2\eta\eta_y f_y f_{xx}$ | $\xi^2\eta\eta_y f_y^2 f_{xx}$ | $\xi^2\eta^2 f_y^2 f_{xx} f_{yy}$ |
| $\xi\eta f_y f_{xy}$ | $\xi^2\xi_y\eta f_y f_{xy}$ | $\xi^2\xi_y\eta f_x^2 f_y f_{xy}$ | $\xi^3\eta f_x f_y f_{xy}^2$ | $\xi\xi_y\eta^2 f_x f_y^2 f_{xy}$ | $\xi^2\eta\eta_y f_x f_y^2 f_{xy}$ | $\xi^2\eta f_y^2 f_{xy}^2$ | $\xi^2\eta^2 f_x f_y f_{xy} f_{yy}$ | $\xi\eta^2\eta_y f_y f_{xy}$ | $\xi\eta^2\eta_y f_y^2 f_{xy}$ | $\xi\eta^3 f_y^2 f_{xy} f_{yy}$ |
| $-\xi\eta f_x f_{xx}$ | $-\xi^2\xi_y\eta f_x f_{xx}$ | $-\xi^2\xi_y\eta f_x^3 f_{xx}$ | $-\xi^3\eta f_x^2 f_{xx} f_{xy}$ | $-\xi\xi_y\eta^2 f_x^2 f_y f_{xx}$ | $-\xi^2\eta\eta_y f_x^2 f_y f_{xx}$ | $-\xi^2\eta^2 f_x f_y f_{xx} f_{xy}$ | $-\xi^2\eta^2 f_x^2 f_{xx} f_{yy}$ | $-\xi\eta^2\eta_y f_x f_{xx}$ | $-\xi\eta^2\eta_y f_x f_y^2 f_{xx}$ | $-\xi\eta^3 f_x f_y f_{xx} f_{yy}$ |
| $-\eta^2 f_x f_{xy}$ | $-\xi\xi_y\eta^2 f_x f_{xy}$ | $-\xi\xi_y\eta^2 f_x^3 f_{xy}$ | $-\xi^2\eta^2 f_x^2 f_y f_{xy}$ | $-\xi\xi_y\eta^2 f_x^2 f_y f_{xy}$ | $-\xi\eta^2\eta_y f_x^2 f_y f_{xy}$ | $-\xi\eta^2 f_x f_y f_{xy}^2$ | $-\xi\eta^3 f_x^2 f_{xy} f_{yy}$ | $-\eta^3\eta_y f_x f_{xy}$ | $-\eta^3\eta_y f_x f_y^2 f_{xy}$ | $-\eta^4 f_x f_y f_{xy} f_{yy}$ |

Abbildung 3.4: Die Einträge der Tabelle sind die Summanden des Ergebnis der Rechnung $\frac{1}{2}VI \cdot PZ$. Die Einträge A-J sind dabei die Summanden von $\frac{1}{2}VI$, die Einträge 1-10 entsprechen den Summanden von PZ . Die Einträge der Tabelle ergeben sich als Produkts des jeweiligen Zeilen- und Spalteneintrags, in dem sie stehen.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

| Term aus Tabelle $\frac{1}{2}VIII \cdot QZ$ | Verschwundet durch Subtraktion mit folgendem Term aus $\frac{1}{2}VI \cdot PZ$ | Term aus Tabelle $\frac{1}{2}VIII \cdot QZ$ | Verschwundet durch Subtraktion mit folgendem Term aus $\frac{1}{2}VI \cdot PZ$ |
|--|---|--|---|
| H1 | H1 | D6 | D6 |
| F1 | H7 | C7 | C7 |
| I1 | I1 | E7 | C5 |
| H5 | H5 | F7 | F7 |
| J1 | H8 | G7 | C8 |
| E1 | E1 | H7 | F1 |
| A2 | A2 | I7 | F5 |
| B2 | B2 | J7 | F8 |
| C2 | A9 | C8 | G7 |
| D2 | D2 | E8 | G5 |
| G2 | A10 | F8 | J7 |
| E3 | E3 | G8 | G8 |
| H3 | H3 | H8 | A10 |
| I3 | I3 | I8 | J5 |
| A4 | A4 | J8 | J8 |
| B4 | B4 | A9 | C2 |
| C4 | B9 | B9 | C4 |
| D4 | D4 | C9 | C9 |
| F4 | D9 | D9 | F4 |
| G4 | B10 | F9 | F9 |
| J4 | D10 | G9 | C10 |
| C5 | E7 | J9 | F10 |
| E5 | E5 | A10 | G2 |
| F5 | I7 | B10 | G4 |
| G5 | E8 | C10 | G9 |
| I5 | I5 | D10 | J4 |
| J5 | I8 | F10 | J9 |
| A6 | A6 | G10 | G10 |
| B6 | B6 | J10 | J10 |

Abbildung 3.5: Diese Tabelle stellt dar, welche der Terme in den Tabelleneinträgen von $\frac{1}{2}VIII \cdot QZ$ und $\frac{1}{2}VI \cdot PZ$ gleich sind und somit beim Durchführen der Subtraktion $VIII \cdot QZ - VI \cdot PZ$ wegfallen.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned}
& (III_P - III_Q) \\
&= \xi_y \eta f_y f_{xy} - \xi_y \eta f_x f_{xx} + \xi \eta_y f_y f_{xy} - \xi \eta_y f_x f_{xx} \\
&\quad + \xi \eta f_y f_{xyy} + \xi \eta f_{xy} f_{yy} - \xi \eta f_x f_{xxy} - \xi \eta f_{xx} f_{xy} \\
&\quad - [\xi_x \eta f_y f_{yy} - \xi_x \eta f_x f_{xy} + \xi \eta_x f_y f_{yy} - \xi \eta_x f_x f_{xy} \\
&\quad + \xi \eta f_y f_{xyy} + \xi \eta f_{xy} f_{yy} - \xi \eta f_x f_{xxy} - \xi \eta f_{xx} f_{xy}] \\
&= \xi_y \eta f_y f_{xy} - \xi_y \eta f_x f_{xx} + \xi \eta_y f_y f_{xy} - \xi \eta_y f_x f_{xx} \\
&\quad - \xi_x \eta f_y f_{yy} + \xi_x \eta f_x f_{xy} - \xi \eta_x f_y f_{yy} + \xi \eta_x f_x f_{xy},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& (IV_Q - IV_P) \\
&= 2\eta \eta_x f_x f_{yy} + \eta^2 f_{xx} f_{yy} + \eta^2 f_x f_{xyy} - [2\eta \eta_y f_x f_{xy} + \eta^2 f_{xy}^2 + \eta^2 f_x f_{xyy}] \\
&= 2\eta \eta_x f_x f_{yy} + \eta^2 f_{xx} f_{yy} - 2\eta \eta_y f_x f_{xy} - \eta^2 f_{xy}^2.
\end{aligned}$$

Fasst man nun noch die gleichen Terme aus $(I_P - I_Q)$ und $(III_P - III_Q)$ zusammen erhält man:

$$PZ_y - QZ_x = R_2,$$

wobei

$$\begin{aligned}
R_2 &= 2\xi_y \eta_x - 2\xi_x \eta_y + 3\xi \eta_x f_x f_{xy} - \xi_x \eta f_x f_{xy} + 3\xi \eta_y f_y f_{xy} + \xi_y \eta f_x f_{xx} + 2\xi_y \eta_x f_x^2 - 2\xi_x \eta_y f_x^2 \\
&\quad + \xi \eta_x f_y f_{yy} - 3\xi_x \eta f_y f_{yy} - \xi \eta_y f_y f_{xy} - 3\xi \eta_y f_x f_{xx} + 2\xi_y \eta_x f_y^2 - 2\xi_x \eta_y f_y^2 + 2\xi \xi_y f_y f_{xx} \\
&\quad + \xi^2 f_{xx} f_{yy} - 2\eta \eta_y f_x f_{xy} - \eta^2 f_{xy}^2 - 2\xi \xi_x f_y f_{xy} - \xi^2 f_{xy}^2 + 2\eta \eta_x f_x f_{yy} + \eta^2 f_{xx} f_{yy}.
\end{aligned}$$

Kehrt man nun nach den erledigten Umformungsschritten zu Gleichung (3.15) zurück kann $(P_y - Q_x) dx dy$ zu folgendem umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
& \frac{(PZ_y - QZ_x) + (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-1} \cdot ((f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ) + R_1}{N} dx dy \\
&= \frac{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-1} \cdot [(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ]}{N} \\
&\quad + \frac{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-1} \cdot [(1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (R_1 + R_2)]}{N} dx dy \\
&= \frac{(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ + (1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (R_1 + R_2)}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot N_K} dx dy.
\end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Vereinfachung von $(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ$

Durch Ausmultiplizieren der Terme erhält man:

$$\begin{aligned}
 & (f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ \\
 &= \xi \eta_y f_x f_{xx} - \xi_y \eta f_x f_{xx} + \xi \eta_y f_x^3 f_{xx} - \xi_y \eta f_x^3 f_{xx} + \xi \eta_y f_x f_y^2 f_{xx} - \xi_y \eta f_x f_y^2 f_{xx} \\
 & \quad + \xi^2 f_x f_y f_{xx} f_{xy} + \xi \eta f_x f_y f_{xx} f_{yy} - \xi \eta f_x^2 f_{xx} f_{xy} - \eta^2 f_x^2 f_{xx} f_{yy} + \xi \eta_y f_y f_{xy} \\
 & \quad - \xi_y \eta f_y f_{xy} + \xi \eta_y f_x^2 f_y f_{xy} - \xi_y \eta f_x^2 f_y f_{xy} + \xi \eta_y f_y^3 f_{xy} - \xi_y \eta f_y^3 f_{xy} \\
 & \quad + \xi^2 f_y^2 f_{xy}^2 + \xi \eta f_y^2 f_{xy} f_{yy} - \xi \eta f_x f_y f_{xy}^2 - \eta^2 f_x f_y f_{xy} f_{yy}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ \\
 &= \xi \eta_x f_x f_{xy} - \xi_x \eta f_x f_{xy} + \xi \eta_x f_x^3 f_{xy} - \xi_x \eta f_x^3 f_{xy} + \xi \eta_x f_x f_y^2 f_{xy} \\
 & \quad - \xi_x \eta f_x f_y^2 f_{xy} + \xi^2 f_x f_y f_{xx} f_{xy} + \xi \eta f_x f_y f_{xy}^2 - \xi \eta f_x^2 f_{xx} f_{xy} - \eta^2 f_x^2 f_{xy}^2 \\
 & \quad + \xi \eta_x f_y f_{yy} - \xi_x \eta f_y f_{yy} + \xi \eta_x f_x^2 f_y f_{yy} - \xi_x \eta f_x^2 f_y f_{yy} + \xi \eta_x f_y^3 f_{yy} \\
 & \quad - \xi_x \eta f_y^3 f_{yy} + \xi^2 f_y^2 f_{xx} f_{yy} + \xi \eta f_y^2 f_{xy} f_{yy} - \xi \eta f_x f_y f_{xx} f_{yy} - \eta^2 f_x f_y f_{xy} f_{yy}.
 \end{aligned}$$

wodurch nach der Subtraktion folgende Terme übrig bleiben:

$$\begin{aligned}
 & (f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ \\
 &= \xi \eta_y f_x f_{xx} - \xi_y \eta f_x f_{xx} + \xi \eta_y f_x^3 f_{xx} - \xi_y \eta f_x^3 f_{xx} + \xi \eta_y f_x f_y^2 f_{xx} \\
 & \quad - \xi_y \eta f_x f_y^2 f_{xx} + \xi \eta_y f_y f_{xy} - \xi_y \eta f_y f_{xy} + \xi \eta_y f_x^2 f_y f_{xy} - \xi_y \eta f_x^2 f_y f_{xy} \\
 & \quad + \xi \eta_y f_y^3 f_{xy} - \xi_y \eta f_y^3 f_{xy} + 2\xi \eta f_x f_y f_{xx} f_{yy} - \eta^2 f_x^2 f_{xx} f_{yy} + \xi^2 f_y^2 f_{xy}^2 \\
 & \quad - 2\xi \eta f_x f_y f_{xy}^2 + \eta^2 f_x^2 f_{xy}^2 - \xi^2 f_y^2 f_{xx} f_{yy} - \xi \eta_x f_x f_{xy} + \xi_x \eta f_x f_{xy} \\
 & \quad - \xi \eta_x f_x^3 f_{xy} + \xi_x \eta f_x^3 f_{xy} - \xi \eta_x f_x f_y^2 f_{xy} + \xi_x \eta f_x f_y^2 f_{xy} - \xi \eta_x f_y f_{yy} \\
 & \quad + \xi_x \eta f_y f_{yy} - \xi \eta_x f_x^2 f_y f_{yy} + \xi_x \eta f_x^2 f_y f_{yy} - \xi \eta_x f_y^3 f_{yy} + \xi_x \eta f_y^3 f_{yy}.
 \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden dieses Ausdrucks werden auch für eine Vereinfachung von späteren Rechenschritten in der Tabelle in Abbildung 3.6 dargestellt.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

| | A | B | C | D | E | F |
|---|-----------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ$ $-(f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ$ | | | | | | |
| 1 | $\xi \eta_y f_x f_{xx}$ | $-\xi_y \eta f_x f_{xx}$ | $\xi \eta_y f_x^3 f_{xx}$ | $-\xi_y \eta f_x^3 f_{xx}$ | $\xi \eta_y f_x f_y^2 f_{xx}$ | $-\xi_y \eta f_x f_y^2 f_{xx}$ |
| 2 | $\xi \eta_y f_y f_{xy}$ | $-\xi_y \eta f_y f_{xy}$ | $\xi \eta_y f_x^2 f_y f_{xy}$ | $-\xi_y \eta f_x^2 f_y f_{xy}$ | $\xi \eta_y f_y^3 f_{xy}$ | $-\xi_y \eta f_y^3 f_{xy}$ |
| 3 | $2\xi \eta f_x f_y f_{xx} f_{yy}$ | $-\eta^2 f_x^2 f_{xx} f_{yy}$ | $\xi^2 f_y^2 f_{xy}^2$ | $-2\xi \eta f_x f_y f_{xy}^2$ | $\eta^2 f_x^2 f_{xy}^2$ | $-\xi^2 f_y^2 f_{xx} f_{yy}$ |
| 4 | $-\xi \eta_x f_x f_{xy}$ | $\xi_x \eta f_x f_{xy}$ | $-\xi \eta_x f_x^3 f_{xy}$ | $\xi_x \eta f_x^3 f_{xy}$ | $-\xi \eta_x f_x f_y^2 f_{xy}$ | $\xi_x \eta f_x f_y^2 f_{xy}$ |
| 5 | $-\xi \eta_x f_y f_{yy}$ | $\xi_x \eta f_y f_{yy}$ | $-\xi \eta_x f_x^2 f_y f_{yy}$ | $\xi_x \eta f_x^2 f_y f_{yy}$ | $-\xi \eta_x f_y^3 f_{yy}$ | $\xi_x \eta f_y^3 f_{yy}$ |

Abbildung 3.6: Die Einträge dieser Tabelle sind die Summanden des Ausdrucks, welche beim Durchführen der Subtraktion $(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ$ übrig bleiben.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Vereinfachung von $R_1 + R_2$

Addiert man die Terme $R_1 + R_2$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 R_1 + R_2 &= 2\xi_x \eta_y f_x^2 + 2\xi \eta_y f_x f_{xx} + 2\eta \eta_y f_x f_{xy} + 2\xi_x \eta_y f_y^2 + 2\xi \xi_x f_y f_{xy} + 2\xi_x \eta f_y f_{yy} \\
 &\quad + 2\xi_x \eta_y - 2\xi_y \eta_x f_x^2 - 2\xi \xi_y f_y f_{xx} - 2\xi_y \eta_x f_y^2 + 2\xi_y \eta_x - 2\xi_x \eta_y + 3\xi \eta_x f_x f_{xy} \\
 &\quad - \xi_x \eta f_x f_{xy} + 3\xi_y \eta f_y f_{xy} + \xi_y \eta f_x f_{xx} + 2\xi_y \eta_x f_x^2 - 2\xi_x \eta_y f_x^2 + \xi \eta_x f_y f_{yy} \\
 &\quad - 3\xi_x \eta f_y f_{yy} - \xi \eta_y f_y f_{xy} - 3\xi \eta_y f_x f_{xx} + 2\xi_y \eta_x f_y^2 - 2\xi_x \eta_y f_y^2 + 2\xi \xi_y f_y f_{xx} \\
 &\quad + \xi^2 f_{xx} f_{yy} - 2\eta \eta_y f_x f_{xy} - \eta^2 f_{xy}^2 - 2\xi \xi_x f_y f_{xy} - \xi^2 f_{xy}^2 + 2\eta \eta_x f_x f_{yy} \\
 &\quad + \eta^2 f_{xx} f_{yy} \\
 &= -\xi \eta_y f_x f_{xx} - \xi_x \eta f_y f_{yy} + \xi_y \eta f_y f_{xy} + \xi \eta_x f_x f_{xy} - \xi_x \eta f_x f_{xy} \\
 &\quad + \xi_y \eta f_x f_{xx} + \xi \eta_x f_y f_{yy} - \xi \eta_y f_y f_{xy} + \xi^2 f_{xx} f_{yy} - \eta^2 f_{xy}^2 \\
 &\quad - \xi^2 f_{xy}^2 + \eta^2 f_{xx} f_{yy} - \xi \eta f_{xx} f_{yy} + \xi \eta f_{xx} f_{xy}.
 \end{aligned}$$

Führt man nun die Multiplikation $(1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (R_1 + R_2)$ durch, erhält man als Ergebnis die Summe aller Terme, welche in der Tabelle in Abbildung 3.7 dargestellt werden.

Durch Addition aller Tabelleneinträge der beiden Tabellen in den Abbildungen 3.6 und 3.7 fallen viele Terme weg. Die Tabelle in Abbildung 3.8 stellt dabei dar, welche der Tabelleneinträge zusammenaddiert Null ergeben und somit wegfallen.

Kehrt man nun nach den Umformungen zu Gleichung (3.15) zurück, so bleibt folgendes übrig:

$$\begin{aligned}
 (P_y - Q_x) dx dy &= \frac{\xi^2 f_{xx} f_{yy} - \eta^2 f_{xy}^2 - \xi^2 f_{xy}^2 + \eta^2 f_{xx} f_{yy} + \xi^2 f_x^2 f_{xx} f_{yy} - \xi^2 f_x^2 f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot N_K} \\
 &\quad + \frac{-\eta^2 f_y^2 f_{xy}^2 + \eta^2 f_y^2 f_{xx} f_{yy} + 2\xi \eta f_x f_y f_{xx} f_{yy} - 2\xi \eta f_x f_y f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot N_K} dx dy.
 \end{aligned}$$

Durch Herausheben von N_K erhält man:

$$\begin{aligned}
 (P_y - Q_x) dx dy &= \frac{N_K \cdot (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot N_K} dx dy \\
 &= \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{3}{2}}} dx dy \\
 &= K dA,
 \end{aligned}$$

wodurch die Gleichheit gezeigt ist.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

| $(1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (R_1 + R_2)$ | A | B | C | D | E | F | G |
|---|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | $-\xi \eta_y f_x f_{xx}$ | $-\xi_x \eta f_y f_{yy}$ | $\xi_y \eta f_y f_{xy}$ | $\xi \eta_x f_x f_{xy}$ | $-\xi_x \eta f_x f_{xy}$ | $\xi_y \eta f_x f_{xx}$ | $\xi \eta_x f_y f_{yy}$ |
| 2 | $-\xi \eta_y f_y f_{xy}$ | $\xi^2 f_{xx} f_{yy}$ | $-\eta^2 f_{xy}^2$ | $-\xi^2 f_{xy}^2$ | $\eta^2 f_{xx} f_{yy}$ | $-\xi \eta f_{xx} f_{yy}$ | $\xi \eta f_{xx} f_{xy}$ |
| 3 | $-\xi \eta_y f_x^3 f_{xx}$ | $-\xi_x \eta f_x^2 f_y f_{yy}$ | $\xi_y \eta f_x^2 f_y f_{xy}$ | $\xi \eta_x f_x^3 f_{xy}$ | $-\xi_x \eta f_x^3 f_{xy}$ | $\xi_y \eta f_x^3 f_{xx}$ | $\xi \eta_x f_x^2 f_y f_{yy} f_x^2$ |
| 4 | $-\xi \eta_y f_x^2 f_y f_{xy}$ | $\xi^2 f_x^2 f_{xx} f_{yy}$ | $-\eta^2 f_x^2 f_{xy}^2$ | $-\xi^2 f_x^2 f_{xy}^2$ | $\eta^2 f_x^2 f_{xx} f_{yy}$ | $-\xi \eta f_x^2 f_{xx} f_{yy}$ | $\xi \eta f_x^2 f_{xx} f_{xy}$ |
| 5 | $-\xi \eta_y f_x f_y^2 f_{xx}$ | $-\xi_x \eta f_y^3 f_{yy}$ | $\xi_y \eta f_y^3 f_{xy}$ | $\xi \eta_x f_x f_y^2 f_{xy}$ | $-\xi_x \eta f_x f_y^2 f_{xy}$ | $\xi_y \eta f_x f_y^2 f_{xx}$ | $\xi \eta_x f_y^3 f_{yy}$ |
| 6 | $-\xi \eta_y f_y^3 f_{xy}$ | $\xi^2 f_y^2 f_{xx} f_{yy}$ | $-\eta^2 f_y^2 f_{xy}^2$ | $-\xi^2 f_y^2 f_{xy}^2$ | $\eta^2 f_y^2 f_{xx} f_{yy}$ | $-\xi \eta f_y^2 f_{xx} f_{yy}$ | $\xi \eta f_y^2 f_{xx} f_{xy}$ |

Abbildung 3.7: Die Einträge der Tabelle sind die Summanden, welche beim Durchführen der Multiplikation $(1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (R_1 + R_2)$ entstehen.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

| Term aus Tabelle $(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ$ | Verswindet durch Addition des folgenden Terms aus Tabelle $(1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (R_1 + R_2)$ |
|---|---|
| A1 | A1 |
| B1 | B5 |
| C1 | B2 |
| D1 | A4 |
| E1 | B4 |
| F1 | B1 |
| G1 | A5 |
| A2 | A2 |
| A3 | C1 |
| B3 | D5 |
| C3 | D2 |
| D3 | C4 |
| E3 | D4 |
| F3 | D1 |
| G3 | C5 |
| A4 | C2 |
| C4 | E3 |
| A5 | E1 |
| B5 | F5 |
| C5 | F2 |
| D5 | E4 |
| E5 | F4 |
| F5 | F1 |
| G5 | E5 |
| A6 | E2 |
| B6 | F3 |
| D6 | C3 |
| E4 | B3 |

Abbildung 3.8: Die Tabelle stellt dar, welche Einträge der Tabellen $(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) \cdot QZ - (f_x f_{xy} + f_y f_{yy}) \cdot PZ$ und $(1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (R_1 + R_2)$ bei ihrer Addition der Terme wegfallen.

3.2.2 Beweis Lemma 3.4

Wir zeigen zunächst, dass falls der Rand ∂R eines Gebiets R glatt und nullstellenfrei ist, und das Vektorfeld X tangential an den Rand ∂R ist und in Richtung der Parametrisierung zeigt, das Lemma 3.4 gilt:

$$\int_{\partial R} Pdx + Qdy = \Delta(\partial R). \quad (3.16)$$

Es genügt dabei eine einzelne Randkomponente des Gebiets R zu betrachten. Zuerst bilden wir dazu eine Parametrisierung $\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \rightarrow \partial R$ der Randkomponente des Gebiets R und bezeichnen ihre Komponenten mit

$$\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Die zu $\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \rightarrow \partial R$ der Ebene gehörende Parametrisierung im Raum ist γ ,

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ f(\tilde{\gamma}) \end{pmatrix}.$$

Wir wählen die Einträge der Parametrisierung von $\tilde{\gamma}$ zunächst so, dass der Weg von γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, das heißt es gilt $|\gamma'(t)| = 1$.

Für den Winkeldefekt einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $\tilde{\gamma}$ mit glatten Rand gilt nach Definition 2.13:

$$\Delta(\partial R) = \int_{t_0}^{t_1} \kappa_g(\tilde{\gamma}(t)) dt$$

und die geodätische Krümmung kann wie in Definition 2.12 beschrieben durch das innere Produkt:

$$\kappa_g(\gamma) = \langle R_{90}(\gamma'), \gamma'' \rangle$$

berechnet werden, wobei R_{90} eine Rotation des Vektors in der Tangentialebene um 90° gegen den Uhrzeigersinn (gemäß der Orientierung) ist.

Die für die Berechnung der geodätischen Krümmung benötigten Ableitungen von γ sind aufgrund der Kettenregel:

$$\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ f_x(\tilde{\gamma}) \cdot \gamma'_1 + f_y(\tilde{\gamma}) \cdot \gamma'_2 \end{pmatrix},$$

sowie:

$$\gamma'' = \begin{pmatrix} \gamma''_1 \\ \gamma''_2 \\ (f_{xx}(\tilde{\gamma})\gamma'_1 + f_{xy}(\tilde{\gamma})\gamma'_2) \cdot \gamma'_1 + \gamma''_1 f_x(\tilde{\gamma}) + (f_{xy}(\tilde{\gamma})\gamma'_1 + f_{yy}(\tilde{\gamma})\gamma'_2) \cdot \gamma'_2 + \gamma''_2 f_y(\tilde{\gamma}) \end{pmatrix}.$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

$N(\gamma')$ bezeichnet den nach oben zeigenden Einheitsnormalenvektor der Fläche. Es gilt:

$$N(\gamma') = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \cdot \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach [8, S. 150] gilt:

$$\begin{aligned} R_{90}(\gamma') &= N(\gamma') \times \gamma' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \cdot \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ f_x \gamma'_1 + f_y \gamma'_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \cdot \begin{pmatrix} -f_y f_x \gamma'_1 - f_y^2 \gamma'_2 - \gamma'_2 \\ f_x^2 \gamma'_1 + f_x f_y \gamma'_2 + \gamma'_1 \\ -f_x \gamma'_2 + f_y \gamma'_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun ist also:

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot \kappa_g(\tilde{\gamma}) \\ &= \begin{pmatrix} -f_y f_x \gamma'_1 - f_y^2 \gamma'_2 - \gamma'_2 \\ f_x^2 \gamma'_1 + f_x f_y \gamma'_2 + \gamma'_1 \\ -f_x \gamma'_2 + f_y \gamma'_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma''_1 \\ \gamma''_2 \\ (f_{xx} \gamma'_1 + f_{xy} \gamma'_2) \cdot \gamma'_1 + \gamma''_1 f_x + (f_{xy} \gamma'_1 + f_{yy} \gamma'_2) \cdot \gamma'_2 + \gamma''_2 f_y \end{pmatrix} \\ &= (-f_y f_x \gamma'_1 \gamma''_1 - f_y^2 \gamma'_2 \gamma''_1 - \gamma'_2 \gamma''_1 + f_x^2 \gamma'_1 \gamma''_2 + f_x f_y \gamma'_2 \gamma''_2 + \gamma'_1 \gamma''_2 \\ &\quad - f_x f_{xx} (\gamma'_1)^2 \gamma'_2 - f_x f_{xy} \gamma'_1 (\gamma'_2)^2 - f_x^2 \gamma'_2 \gamma''_1 - f_x f_{xy} \gamma'_1 (\gamma'_2)^2 - f_x f_{yy} (\gamma'_2)^3 - f_x f_y \gamma'_2 \gamma''_2 \\ &\quad + f_y f_{xx} (\gamma'_1)^3 + f_y f_{xy} (\gamma'_1)^2 \gamma'_2 + f_x f_y \gamma'_1 \gamma''_1 + f_y f_{xy} (\gamma'_1)^2 \gamma'_2 + f_y f_{yy} \gamma'_1 (\gamma'_2)^2 + f_y^2 \gamma'_1 \gamma''_2) \\ &= ((1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (\gamma'_1 \gamma''_2 - \gamma'_2 \gamma''_1) \\ &\quad + \gamma'_1 \cdot ((\gamma'_1)^2 f_y f_{xx} + \gamma'_1 \gamma'_2 \cdot (f_y f_{xy} - f_x f_{xx}) - (\gamma'_2)^2 f_x f_{xy}) \\ &\quad + \gamma'_2 \cdot ((\gamma'_1)^2 f_y f_{xy} + \gamma'_1 \gamma'_2 \cdot (f_y f_{yy} - f_x f_{xy}) - (\gamma'_2)^2 f_x f_{yy})). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Steht das Vektorfeld $X = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ tangential an den Rand ∂R und ist γ nach Bogenlänge parametrisiert, dann gilt:

$$\begin{aligned} \gamma'_2 &= \eta(\tilde{\gamma}), & \gamma'_1 &= \xi(\tilde{\gamma}), & \left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ f_x \xi + f_y \eta \end{pmatrix} \right\| &= N_K = 1, \\ \gamma''_1 &= \xi_x \gamma'_1 + \xi_y \gamma'_2, & \gamma''_2 &= \eta_x \gamma'_1 + \eta_y \gamma'_2, \end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

weswegen die rechte Seite der Gleichung (3.17) gleich

$$\begin{aligned}
& ((1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot ((\xi\eta_x - \eta\xi_x) \cdot \gamma'_1 + (\xi\eta_y - \eta\xi_y)\gamma'_2)) \\
& + \gamma'_1 \cdot ((\xi^2 f_y f_{xx} + \xi\eta \cdot (f_y f_{xy} - f_x f_{xx}) - \eta^2 f_x f_{xy})) \\
& + \gamma'_2 \cdot ((\xi^2 f_y f_{xy} + \xi\eta \cdot (f_y f_{yy} - f_x f_{xy}) - \eta^2 f_x f_{yy})) \\
& = [(1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (\xi\eta_x - \eta\xi_x) + ((\xi^2 f_y f_{xx} + \xi\eta \cdot (f_y f_{xy} - f_x f_{xx}) - \eta^2 f_x f_{xy})) \cdot \gamma'_1 \\
& + ((1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot (\xi\eta_y - \eta\xi_y) + (\xi^2 f_y f_{xy} + \xi\eta \cdot (f_y f_{yy} - f_x f_{xy}) - \eta^2 f_x f_{yy})) \cdot \gamma'_2] \\
& = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \begin{pmatrix} P(\tilde{\gamma}) \\ Q(\tilde{\gamma}) \end{pmatrix} \cdot (\tilde{\gamma}')
\end{aligned}$$

ist, wobei P und Q die in den Gleichungen (3.6) und (3.7) beschriebenen Funktionen sind. Dadurch wurde gezeigt, dass:

$$\kappa_g(\tilde{\gamma}) = \begin{pmatrix} P(\tilde{\gamma}) \\ Q(\tilde{\gamma}) \end{pmatrix} \cdot (\tilde{\gamma}')$$

gilt, falls $|\gamma'(t)| = 1$ gilt, das Vektorfeld X tangential an den Rand ∂R liegt und der Rand keine Nullstellen beinhaltet. Durch Integrieren und Anwenden der Definition 2.13 ist der Satz somit für diesen Fall bewiesen.

Als nächstes wird gezeigt, dass das Integral der rechten Seite von Gleichung (3.16) unverändert bleibt, wenn das Vektorfeld glatt deformiert wird, ohne Nullstellen am Rand zu erzeugen. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.6. *Sei $s \in \mathbb{R}$. Sei $X(s)$ eine glatte Familie von Vektorfeldern ohne Nullstellen am Rand ∂R und $P(s)$ und $Q(s)$ die damit assoziierten Funktionen. Dann ist*

$$\int_{\partial R} P(s)dx + Q(s)dy$$

unabhängig von s .

Beweis von Lemma 3.6. Betrachten wir zunächst die Funktion T .

$$T = \frac{(\xi\eta_s - \eta\xi_s)(1 + f_x^2 + f_y^2)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot [\xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2)]}. \quad (3.18)$$

Analog zum Beweis von Lemma 3.3 können die Ableitungen der Funktionen P (siehe Gleichung (3.6)), Q (siehe Gleichung (3.7)) und T nach x, y bzw. s gebildet werden, womit nachgewiesen werden kann, dass die Gleichungen

$$P_s - T_x = 0$$

und

$$Q_s - T_y = 0$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

gelten. Dadurch gilt dann durch Umformen und Anwenden des Fundamentalsatz der Analysis:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b P(\gamma(t))\gamma'_1(t) + Q(\gamma(t))\gamma'_2(t) dt \\
 &= \int_a^b T_x(\gamma(t))\gamma'_1(t) + T_y(\gamma(t))\gamma'_2(t) dt \\
 &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} T(\gamma(t)) dt \\
 &= T(\gamma(b)) - T(\gamma(a)) = 0.
 \end{aligned}$$

□

Ein Vektorfeld, das längs des Rands nach außen zeigt, kann glatt so deformiert werden, dass es tangential an den Rand wird. Da nach Lemma 3.6 das Randintegral unverändert bleibt, folgt Lemma 3.4 für Gebiete mit glattem Rand.

Zuletzt betrachten wir noch Gebiete mit stückweise glattem Rand. Für Gebiete mit stückweise glattem Rand ∂R kann man den Rand in den Ecken wie in [8, S. 70] glatt approximieren. Dadurch ändert sich die rechte Seite von Gleichung (3.16) nicht, weswegen das Lemma auch für Gebiete mit stückweise glattem Rand gilt. Somit wurde Lemma 3.4 vollständig nachgewiesen.

3.2.3 Beweis Lemma 3.5

Wir werden nun zeigen, dass Lemma 3.5 gilt, das heißt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(\rho)} P dx + Q dy = 2\pi \cdot \text{Ind}_X(\rho), \quad (3.19)$$

falls ρ eine isolierte Nullstelle von X ist.

Beweis Lemma 3.5. Sei ρ eine Nullstelle des Vektorfelds X . Um eine Nullstelle ρ wird ein Gebiet $B_\epsilon(\rho)$ betrachtet, sodass ρ eine isolierte Nullstelle in $B_\epsilon(\rho)$ ist, das heißt es gibt keine weiteren Nullstellen in diesem Gebiet. Für den Rand $\tilde{\gamma}_\epsilon$ von $B_\epsilon(\rho)$ wählen wir einen Kreis mit Radius ϵ , es gilt somit:

$$\tilde{\gamma}_\epsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \tilde{\gamma}_\epsilon(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{1\epsilon}(t) \\ \tilde{\gamma}_{2\epsilon}(t) \end{pmatrix} = \rho + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \epsilon \quad \epsilon > 0.$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Zunächst wird das folgende Integral betrachtet:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\epsilon(\rho)} P dx + Q dy &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\xi \eta_x - \xi_x \eta}{N_K} + \frac{\xi^2 \cdot \overbrace{(f_y f_{xx} + \xi \eta \cdot (f_y f_{xy} - f_x f_{xx}))}^j}{N} - \eta^2 \cdot \overbrace{(f_x f_{xy})}^l \right) \tilde{\gamma}'_{1\epsilon}(t) \\
&\quad + \left(\frac{\xi \eta_y - \xi_y \eta}{N_K} + \frac{\xi^2 \cdot \overbrace{(f_y f_{xy} + \xi \eta \cdot (f_y f_{yy} - f_x f_{xy}))}^m}{N} - \eta^2 \cdot \overbrace{(f_x f_{yy})}^o \right) \tilde{\gamma}'_{2\epsilon}(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\xi \eta_x - \xi_x \eta}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{1\epsilon}(t) + \frac{\xi \eta_y - \xi_y \eta}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{2\epsilon}(t) dt \\
&\quad + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\xi^2 \cdot j + \xi \eta \cdot k - \eta^2 \cdot l}{N} \cdot \tilde{\gamma}'_{1\epsilon}(t) + \frac{\xi^2 \cdot m + \xi \eta \cdot n - \eta^2 \cdot o}{N} \cdot \tilde{\gamma}'_{2\epsilon}(t) dt}_{R_2(\epsilon)}.
\end{aligned}$$

Nun wird gezeigt, dass der Rest $R_2(\epsilon)$ verschwindet, wenn der Radius ϵ gegen Null konvergiert. Da die Ableitungen $\tilde{\gamma}'_{1\epsilon}(t)$ und $\tilde{\gamma}'_{2\epsilon}(t)$ der beiden Komponenten der Parametrisierung gegen Null konvergieren wenn ϵ gegen Null konvergiert, genügt es zu zeigen, dass

$$\left| \frac{\xi^2 \cdot j + \xi \eta \cdot k - \eta^2 \cdot l}{N} \right| \text{ beschränkt ist, wenn } \epsilon \rightarrow 0$$

und

$$\left| \frac{\xi^2 \cdot m + \xi \eta \cdot n - \eta^2 \cdot o}{N} \right| \text{ beschränkt ist, wenn } \epsilon \rightarrow 0.$$

Die Beschränkung der Terme wird mit einer Abschätzung gezeigt. In den ersten beiden Schritten werden Summanden des Divisors entfernt, welche den Wert des Quotienten nur verringern können.

$$\left| \frac{\xi^2 \cdot j + \xi \eta \cdot k - \eta^2 \cdot l}{\underbrace{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}_{\geq 1} \cdot (\xi f_x + \eta f_y)^2 + \xi^2 + \eta^2} \right| \leq \left| \frac{\xi^2 \cdot j + \xi \eta \cdot k - \eta^2 \cdot l}{\underbrace{(\xi f_x + \eta f_y)^2}_{\geq 0} + \xi^2 + \eta^2} \right|$$

Der Betrag kann nun auf den Zähler beschränkt werden, da der Nenner strikt positiv ist.

$$\leq \left| \frac{\xi^2 \cdot j + \xi \eta \cdot k - \eta^2 \cdot l}{\xi^2 + \eta^2} \right| = \frac{|\xi^2 \cdot j + \xi \eta \cdot k - \eta^2 \cdot l|}{\xi^2 + \eta^2}$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung ist dieser Term kleiner oder gleich:

$$\leq \frac{|\xi^2 \cdot |j| + |\xi \eta \cdot k| + |\eta^2 \cdot l|}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\xi^2 \cdot |j| + |\xi \eta \cdot k| + \eta^2 \cdot |l|}{\xi^2 + \eta^2}.$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Die Funktionen j, k und l sind nur zusammengesetzt aus der Funktion f und derer Ableitungen, weswegen sie durch Werte j_0, k_0 und l_0 beschränkt sind, wobei $|j| \leq j_0$, $|k| \leq k_0$ und $|l| \leq l_0$ auf R gilt. Sei nun o. B. d. A. $\xi > 0$ und $\eta > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\xi - \eta)^2 = \xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2 \\ &\Rightarrow \xi\eta \leq \xi^2 + \eta^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

daher ist insbesondere $|\xi\eta| \leq \xi^2 + \eta^2$. Da ξ^2 und η^2 größer oder gleich null sein müssen ist unser Term sicher kleiner oder gleich

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(\xi^2 + \eta^2) \cdot j_0 + (\xi^2 + \eta^2) \cdot k_0 + (\xi^2 + \eta^2) \cdot l_0}{\xi^2 + \eta^2} \\ &= \frac{(\xi^2 + \eta^2) \cdot (j_0 + k_0 + l_0)}{\xi^2 + \eta^2} = (j_0 + k_0 + l_0) = K_1 \end{aligned}$$

und somit durch die Konstante K_1 beschränkt. Analog kann man die Beschränktheit des anderen Terms zeigen.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\xi^2 \cdot m + \xi\eta \cdot n - \eta^2 \cdot o}{N} \right| \leq \left| \frac{\xi^2 \cdot m + \xi\eta \cdot n - \eta^2 \cdot o}{N_K} \right| \\ &\leq \left| \frac{\xi^2 \cdot m + \xi\eta \cdot n - \eta^2 \cdot o}{\xi^2 + \eta^2} \right| \leq \frac{|\xi^2 \cdot m + \xi\eta \cdot n - \eta^2 \cdot o|}{\xi^2 + \eta^2} \\ &\leq \frac{|\xi^2| \cdot |m| + |\xi\eta| \cdot |n| + |\eta^2| \cdot |o|}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\xi^2 \cdot |m| + |\xi\eta| \cdot |n| + \eta^2 \cdot |o|}{\xi^2 + \eta^2} \end{aligned}$$

Die Funktionen m, n und o sind nur zusammengesetzt aus der Funktion f und ihrer Ableitungen, weswegen sie durch Werte m_0, n_0 und o_0 beschränkt sind. Es gilt also $|m| \leq m_0$, $|n| \leq n_0$ und $|o| \leq o_0$ auf R .

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\xi^2 \cdot m_0 + |\xi\eta| \cdot n_0 + \eta^2 \cdot o_0}{\xi^2 + \eta^2} \leq \frac{(\xi^2 + \eta^2) \cdot m_0 + (\xi^2 + \eta^2) \cdot n_0 + (\xi^2 + \eta^2) \cdot o_0}{\xi^2 + \eta^2} \\ &= \frac{(\xi^2 + \eta^2) \cdot (m_0 + n_0 + o_0)}{\xi^2 + \eta^2} = (m_0 + n_0 + o_0) = K_2. \end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, dass die Terme durch die Konstanten K_1 und K_2 beschränkt sind und somit gegen Null konvergieren, wenn ϵ gegen 0 konvergiert.

Demnach gilt für das Integral:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(\rho)} P dx + Q dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{\xi\eta_x - \eta\xi_x}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{1\epsilon}(t) + \frac{\xi\eta_y - \eta\xi_y}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{2\epsilon}(t) dt. \quad (3.21)$$

Der Poincaré-Index des Vektorfeld X über den Rand des Gebiets $B_\epsilon(\rho)$, wobei der Rand des Gebiets eine geschlossene, glatte Kurve $\partial B_\epsilon(\rho) = \tilde{\gamma}_\epsilon = \tilde{\gamma}_\epsilon(t), t \in [0, 2\pi], \tilde{\gamma}_\epsilon(0) = \tilde{\gamma}_\epsilon(2\pi)$ ist, kann nach [1, S. 3] folgendermaßen berechnet werden:

$$2\pi \cdot \text{Ind}_X(\tilde{\gamma}_\epsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{\xi(\tilde{\gamma}_\epsilon(t)) \frac{\partial}{\partial t} \eta(\tilde{\gamma}_\epsilon(t)) - \eta(\tilde{\gamma}_\epsilon(t)) \frac{\partial}{\partial t} \xi(\tilde{\gamma}_\epsilon(t))}{\xi^2(\tilde{\gamma}_\epsilon(t)) + \eta^2(\tilde{\gamma}_\epsilon(t))} dt. \quad (3.22)$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Um den Poincaré-Index der Nullstellen zu berechnen, wird ein zu X homotopes Vektorfeld \tilde{X} betrachtet. Da der Poincaré-Index eine Homotopieinvariante ist [8, Lemma 2.4], gilt:

$$\text{Ind}_X(\tilde{\gamma}_\epsilon) = \text{Ind}_{\tilde{X}}(\tilde{\gamma}_\epsilon). \quad (3.23)$$

Das Vektorfeld \tilde{X} kann mithilfe einer Matrix A berechnet werden:

$$\tilde{X} = A \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} a\xi + b\eta \\ b\xi + c\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix}.$$

Es soll nun eine Matrix A gefunden werden, sodass die zwei wichtigen Eigenschaften erfüllt werden:

1. $\det(A) = ac - b^2 = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$
2. $\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2 = N_K$.

Der Ausgangspunkt dieser Berechnung ist die Matrix

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des Spektralsatzes wird nun schrittweise die Matrix A bestimmt, mit der ein zu X homotopes Vektorfeld definiert werden kann, dass diese zwei Eigenschaften erfüllt.

Dazu müssen zuerst die Eigenwerte der rechten Seite der Matrix A^2 berechnet werden.

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 - \lambda & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= ((1 + f_x^2 - \lambda) \cdot (1 + f_y^2 - \lambda)) - f_x^2 f_y^2 \\ &= 1 + f_x^2 - \lambda + f_y^2 + f_x^2 f_y^2 - \lambda f_y^2 - \lambda - \lambda f_x^2 + \lambda^2 - f_x^2 f_y^2 \\ &= (1 - \lambda) \cdot (1 + f_x^2 + f_y^2 - \lambda). \end{aligned}$$

Dementsprechend sind die zur Matrix A^2 gehörigen Eigenwerte gleich $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$.

Im nächsten Schritt werden die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren bestimmt. Durch

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 \cdot E &= \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & f_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 \cdot E &= \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix} - (1 + f_x^2 + f_y^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -f_y^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & -f_x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

werden die zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 passenden, normierten Eigenvektoren

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix} \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

bestimmt. Mithilfe der Eigenvektoren werden die Transformationsmatrix S und ihre transponierte S^T gebildet:

$$S = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_y & f_x \\ -f_x & f_y \end{pmatrix}, \quad S^T = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_y & -f_x \\ f_x & f_y \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix D^2 enthält als Einträge entlang der Hauptdiagonalen die Eigenwerte der Matrix A^2 :

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + f_x^2 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Spektralsatz können wir nun die Matrix A^2 mithilfe der Transformationsmatrix S , ihrer Transponierten S^T und der Diagonalmatrix D^2 beschreiben:

$$A^2 = S \cdot D^2 \cdot S^T.$$

Dadurch können wir auch einfach die von uns benötigte Matrix A bestimmen, da beim Wurzelziehen der Diagonalmatrix D^2 einfach die Wurzeln der einzelnen Matrixeinträge gezogen werden kann. Es gilt:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \end{pmatrix}.$$

Somit gilt für die Matrix A :

$$\begin{aligned} A &= S \cdot D \cdot S^T \\ &= \frac{1}{f_x^2 + f_y^2} \cdot \begin{pmatrix} f_y & f_x \\ -f_x & f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_y & -f_x \\ f_x & f_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{f_x^2 + f_y^2} \cdot \begin{pmatrix} f_y & f_x \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \\ -f_x & f_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_y & -f_x \\ f_x & f_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{f_x^2 + f_y^2} \begin{pmatrix} f_y^2 + f_x^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} & -f_x f_y + f_x f_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \\ -f_x f_y + f_x f_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} & f_x^2 + f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist die Matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

wobei

$$a = \frac{f_y^2 + f_x^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}{f_x^2 + f_y^2}, \quad b = \frac{-f_x f_y + f_x f_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}{f_x^2 + f_y^2}$$

und

$$c = \frac{f_x^2 + f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}{f_x^2 + f_y^2}$$

ist. Nun wird gezeigt, dass das Vektorfeld \tilde{X} die geforderten Eigenschaften erfüllt. Dazu wird zuerst die Determinante der Matrix A berechnet:

$$\begin{aligned} \det(A) = ac - b^2 &= \frac{1}{f_x^2 + f_y^2} \cdot (f_y^2 + f_x^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \cdot \frac{1}{f_x^2 + f_y^2} \cdot (f_x^2 + f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \\ &\quad - \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot (-f_x f_y + f_x f_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2})^2 \\ &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left(f_x^2 f_y^2 + f_x^4 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \right. \\ &\quad \left. + f_y^4 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} + f_x^2 f_y^2 \cdot \sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - f_x^2 f_y^2 + 2f_x^2 f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} - f_x^2 f_y^2 \cdot \sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left(\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot (f_x^4 + 2f_x^2 f_y^2 + f_y^4) \right) \\ &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left(\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot (f_x^2 + f_y^2)^2 \right) \\ &= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}. \end{aligned}$$

Da die Determinante multiplikativ ist kann man dies auch leicht folgenderweise nachweisen:

$$\det(A) = \det(S) \cdot \det(D) \cdot \det(S^T) = \det(D) = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Um die zweite Aussage zu beweisen formen wir zunächst den gegebenen Term so um, dass er eine zu N_K ähnliche Struktur aufweist:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2 &= (a\xi + b\eta)^2 + (b\xi + c\eta)^2 \\ &= a^2\xi^2 + 2\xi\eta ab + b^2\eta^2 + b^2\xi^2 + 2\xi\eta bc + c^2\eta^2 \\ &= (a^2 + b^2) \cdot \xi^2 + 2\xi\eta \cdot (b \cdot (a + c)) + (b^2 + c^2) \cdot \eta^2. \end{aligned}$$

Da, wie in Gleichung (3.12) beschrieben,

$$N_K = \xi^2(1 + f_x^2) + 2\xi\eta f_x f_y + \eta^2(1 + f_y^2).$$

ist, müssen wir nun die drei folgenden Aussagen zeigen:

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

$$(1.) (a^2 + b^2) = (1 + f_x^2),$$

$$(2.) (b \cdot (a + c)) = f_x f_y,$$

$$(3.) (b^2 + c^2) = (1 + f_y^2).$$

Nachweis von (1.)

$$a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{f_x^2 + f_y^2} \cdot (f_y^2 + f_x^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \right)^2 + \left(\frac{1}{f_x^2 + f_y^2} \cdot (-f_x f_y + f_x f_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left(f_y^4 + 2f_x^2 f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} + f_x^4 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}^2 + f_x^2 f_y^2 \right. \\ &\quad \left. - 2f_x^2 f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} + f_x^2 f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left(f_x^6 + f_x^4 + 2f_x^4 f_y^2 + 2f_x^2 f_y^2 + f_y^4 f_x^2 + f_y^4 \right) \\ &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left((1 + f_x^2) \cdot (f_x^2 + f_y^2)^2 \right) \\ &= (1 + f_x^2). \end{aligned}$$

□

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Nachweis von (2.)

$$\begin{aligned}
 & b \cdot (a + c) \\
 &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)} \cdot \left(-fxf_y + f_xf_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)} \cdot (f_y^2 + f_x^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)} \cdot (f_x^2 + f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \right) \\
 &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left(((-fxf_y + f_xf_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \cdot (f_y^2 + f_x^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \right. \\
 &\quad \left. + f_x^2 + f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \right) \\
 &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left((-fxf_y + f_xf_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2})(1 + \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2})(f_x^2 + f_y^2) \right) \\
 &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)} \cdot \left(-fxf_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} + f_xf_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}^2 \right. \\
 &\quad \left. - f_xf_y + f_xf_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \right) \\
 &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)} \left(f_xf_y \cdot \left(\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}^2 - 1 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)} \left((f_xf_y)(f_x^2 + f_y^2) \right) \\
 &= f_xf_y.
 \end{aligned}$$

□

Nachweis von (3.)

$$\begin{aligned}
 & b^2 + c^2 \\
 &= \left(\frac{1}{f_x^2 + f_y^2} \cdot (-fxf_y + f_xf_y \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \right)^2 + \left(\frac{1}{f_x^2 + f_y^2} \cdot (f_x^2 + f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left(f_x^2f_y^2 - 2f_x^2f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} + f_x^2f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}^2 + f_x^4 \right. \\
 &\quad \left. + 2f_x^2f_y^2 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} + f_y^4 \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left(f_y^6 + f_y^4 + 2f_x^2f_y^4 + 2f_x^2f_y^2 + f_x^4f_y^2 + f_x^4 \right) \\
 &= \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^2} \cdot \left((1 + f_y^2) \cdot (f_x^2 + f_y^2)^2 \right) \\
 &= (1 + f_y^2).
 \end{aligned}$$

□

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Ebenso können diese Eigenschaften gezeigt werden, indem wir die Einträge der Matrix A^2 betrachten:

$$\begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix} = A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b \cdot (a + c) \\ b \cdot (a + c) & b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnet man nun den Index des Vektorfelds \tilde{X} , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot \text{Ind}_{\tilde{X}}(\tilde{\gamma}_\epsilon) &= \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\xi}(\tilde{\gamma}_\epsilon(t)) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\eta}(\tilde{\gamma}_\epsilon(t)) - \tilde{\eta}(\tilde{\gamma}_\epsilon(t)) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\xi}(\tilde{\gamma}_\epsilon(t))}{\tilde{\xi}^2(\tilde{\gamma}_\epsilon(t)) + \tilde{\eta}^2(\tilde{\gamma}_\epsilon(t))} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\xi} \cdot (\tilde{\eta}_x \tilde{\gamma}'_{1\epsilon} + \tilde{\eta}_y \tilde{\gamma}'_{2\epsilon}) - \tilde{\eta} \cdot (\tilde{\xi}_x \tilde{\gamma}'_{1\epsilon} + \tilde{\xi}_y \tilde{\gamma}'_{2\epsilon})}{N_K} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\tilde{\xi} \tilde{\eta}_x - \tilde{\eta} \tilde{\xi}_x}{N_K}}_{\boxed{\text{A}}} \cdot \tilde{\gamma}'_{1\epsilon} + \underbrace{\frac{\tilde{\xi} \tilde{\eta}_y - \tilde{\eta} \tilde{\xi}_y}{N_K}}_{\boxed{\text{B}}} \cdot \tilde{\gamma}'_{2\epsilon} dt, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \boxed{\text{A}} &= \tilde{\xi} \tilde{\eta}_x - \tilde{\eta} \tilde{\xi}_x = (a\xi + b\eta) \cdot (b\xi + c\eta)_x - (b\xi + c\eta) \cdot (a\xi + b\eta)_x \\ &= (a\xi + b\eta) \cdot (b_x \xi + \xi_x b + c_x \eta + \eta_x c) - (b\xi + c\eta) \cdot (a_x \xi + \xi_x a + b_x \eta + b\eta_x) \\ &= \xi^2 ab_x + ab\xi\xi_x + ac_x\xi\eta + ac\xi\eta_x + bb_x\xi\eta + b^2\eta\xi_x + bc_x\eta^2 + bc\eta\eta_x \\ &\quad - (a_x b\xi^2 + ab\xi\xi_x + bb_x\xi\eta + b^2\xi\eta_x + a_x c\xi\eta + ac\eta\xi_x + b_x c\eta^2 + cb\eta\eta_x) \\ &= \underbrace{(ac - b^2)}_{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \cdot (\xi\eta_x - \eta\xi_x) + \xi^2 \cdot \overbrace{(ab_x - a_x b)}^u + \xi\eta \cdot \overbrace{(bc_x - b_x c)}^v + \eta^2 \cdot \overbrace{(ac_x - a_x c)}^w \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \boxed{\text{B}} &= \tilde{\xi} \tilde{\eta}_y - \tilde{\eta} \tilde{\xi}_y = (a\xi + b\eta) \cdot (b\xi + c\eta)_y - (b\xi + c\eta) \cdot (a\xi + b\eta)_y \\ &= (a\xi + b\eta) \cdot (b_y \xi + \xi_y b + c_y \eta + \eta_y c) - (b\xi + c\eta) \cdot (a_y \xi + \xi_y a + b_y \eta + b\eta_y) \\ &= \xi^2 ab_y + \xi\xi_y ab + \xi\eta ac_y + \xi\eta_y ac + \xi\eta bb_y + \eta\xi_y b^2 + \eta^2 bc_y \eta \eta_y bc \\ &\quad - (\xi^2 a_y b + \xi\xi_y ab + \xi\eta bb_y + b^2 \xi \eta_y + \xi\eta a_y c + \eta\xi_y ac + \eta^2 b_y c + \eta\eta_y bc) \\ &= \underbrace{(ac - b^2)}_{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \cdot (\xi\eta_y - \eta\xi_y) + \xi^2 \cdot \overbrace{(ab_y - a_y b)}^q + \xi\eta \cdot \overbrace{(bc_y - b_y c)}^r + \eta^2 \cdot \overbrace{(ac_y - a_y c)}^s. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot \text{Ind}_{\tilde{X}}(\tilde{\gamma}_\epsilon) &= \int_0^{2\pi} \frac{\xi\eta_x - \eta\xi_x}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{1\epsilon}(t) + \frac{\xi\eta_y - \eta\xi_y}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{2\epsilon}(t) dt \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\xi^2 \cdot u + \xi\eta \cdot v + \eta^2 \cdot w}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{1\epsilon}(t) \frac{\xi^2 \cdot q + \xi\eta \cdot r + \eta^2 \cdot s}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{2\epsilon}(t) dt}_{R_1(\epsilon)}. \end{aligned}$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Betrachten wir nun die Parametrisierung des Kreises $B_\epsilon(\rho)$ um eine Singularität mit Radius ϵ , dann gilt:

$$\tilde{\gamma}_\epsilon(t) = \epsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \rho \quad \tilde{\gamma}'_\epsilon(t) = \epsilon \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen nun, dass der Rest $R_1(\epsilon)$ gegen Null konvergiert, wenn der Radius ϵ des Kreises gegen Null konvergiert. Da die Ableitungen $\tilde{\gamma}'_{1\epsilon}(t)$ und $\tilde{\gamma}'_{2\epsilon}(t)$ der beiden Komponenten der Parametrisierung gegen Null konvergieren wenn ϵ gegen Null konvergiert, genügt es zu zeigen, dass

$$\left| \frac{\xi^2 \cdot u + \xi\eta \cdot v + \eta^2 \cdot w}{N_K} \right| \quad \text{beschränkt ist, wenn } \epsilon \rightarrow 0$$

und

$$\left| \frac{\xi^2 \cdot q + \xi\eta \cdot r + \eta^2 \cdot s}{N_K} \right| \quad \text{beschränkt ist, wenn } \epsilon \rightarrow 0,$$

weswegen wir mit einer Abschätzung zeigen, dass diese Werte beschränkt sind.

Zuerst wird gezeigt, dass der erste Term beschränkt ist.

$$\left| \frac{\xi^2 \cdot u + \xi\eta \cdot v + \eta^2 \cdot w}{\underbrace{(\xi f_x + \eta f_y)^2}_{\geq 0} + \xi^2 + \eta^2} \right| \leq \left| \frac{\xi^2 \cdot u + \xi\eta \cdot v + \eta^2 \cdot w}{\xi^2 + \eta^2} \right|$$

Zu Beginn wird ein Summand des Nenners entfernt, da dieser größer gleich Null ist und somit den Wert des Terms lediglich verkleinern kann. Im nächsten Schritt kann der Betrag auf den Dividenden reduziert werden, da der Nenner strikt positiv ist.

$$\left| \frac{\xi^2 \cdot u + \xi\eta \cdot v + \eta^2 \cdot w}{\xi^2 + \eta^2} \right| = \frac{|\xi^2 \cdot u + \xi\eta \cdot v + \eta^2 \cdot w|}{\xi^2 + \eta^2}$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt für den Term:

$$\leq \frac{|\xi^2| \cdot |u| + |\xi\eta| \cdot |v| + |\eta^2| \cdot |w|}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Die Funktionen u, v und w sind nur zusammengesetzt aus der Funktion f und deren Ableitungen. Da stetige Bilder von kompakten Räumen unter reellwertigen Funktionen stets abgeschlossen und beschränkt sind, gibt es für jede der Funktionen u, v und w Funktionswerte u_0, v_0 und w_0 , sodass $|u| \leq u_0$, $|v| \leq v_0$ und $|w| \leq w_0$ auf R gilt. Deshalb ist der Term kleiner oder gleich

$$\leq \frac{\xi^2 \cdot u_0 + |\xi\eta| \cdot v_0 + \eta^2 \cdot w_0}{\xi^2 + \eta^2}.$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Aufgrund von Gleichung (3.20) ist $|\xi\eta| \leq \xi^2 + \eta^2$. Da ξ^2 und η^2 größer oder gleich null sein müssen ist der Term sicher kleiner oder gleich

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(\xi^2 + \eta^2) \cdot u_0 + (\xi^2 + \eta^2) \cdot v_0 + (\xi^2 + \eta^2) \cdot w_0}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{(\xi^2 + \eta^2) \cdot (u_0 + v_0 + w_0)}{\xi^2 + \eta^2} \\ &= (u_0 + v_0 + w_0) = K_3. \end{aligned}$$

Somit ist der Term kleiner oder gleich der Konstanten K_3 und somit beschränkt. Analog verfahren wir mit dem zweiten Term.

$$\left| \frac{\xi^2 \cdot q + \xi\eta \cdot r + \eta^2 \cdot s}{\underbrace{(\xi f_x + \eta f_y)^2}_{\geq 0} + \xi^2 + \eta^2} \right| \leq \left| \frac{\xi^2 \cdot q + \xi\eta \cdot r + \eta^2 \cdot s}{\xi^2 + \eta^2} \right| = \frac{|\xi^2 \cdot q + \xi\eta \cdot r + \eta^2 \cdot s|}{\xi^2 + \eta^2}$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung ist dieser Term kleiner als:

$$\leq \frac{|\xi^2| \cdot |q| + |\xi\eta| \cdot |r| + |\eta^2| \cdot |s|}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Die Funktionen q, r und s sind nur zusammengesetzt aus der Funktion f und ihrer Ableitungen, weswegen sie durch Werte q_0, r_0 und s_0 beschränkt sind. Es gilt also $|q| \leq q_0$, $|r| \leq r_0$ und $|s| \leq s_0$ auf R .

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\xi^2 \cdot q_0 + |\xi\eta| \cdot r_0 + \eta^2 \cdot s_0}{\xi^2 + \eta^2} \leq \frac{(\xi^2 + \eta^2) \cdot q_0 + (\xi^2 + \eta^2) \cdot r_0 + (\xi^2 + \eta^2) \cdot s_0}{\xi^2 + \eta^2} \\ &= \frac{(\xi^2 + \eta^2) \cdot (q_0 + r_0 + s_0)}{\xi^2 + \eta^2} = (q_0 + r_0 + s_0) = K_4. \end{aligned}$$

Da auch K_4 beschränkt ist, konvergieren die Terme $R(\epsilon)$ gegen null, wenn der Radius ϵ der Parametrisierung um die Singularität gegen null konvergiert, weswegen für den Index folgendes gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi \cdot \text{Ind}_{\tilde{X}}(\tilde{\gamma}_\epsilon)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{\xi\eta_x - \eta\xi_x}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{1\epsilon}(t) + \frac{\xi\eta_y - \eta\xi_y}{N_K} \cdot \tilde{\gamma}'_{2\epsilon}(t) dt \right). \quad (3.24)$$

Führt man nun die Gleichungen (3.21) und (3.24) und die Aussage (3.23) zusammen, so erhält man:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(\rho)} Pdx + Qdy = 2\pi \cdot \text{Ind}_{\tilde{X}}(\rho) = 2\pi \cdot \text{Ind}_X(\rho),$$

wodurch unsere Aussage bewiesen wurde. \square

3.3 Zusammenhang des Satz von Poincaré-Hopf und der Euler-Charakteristik einer Triangulierung

Im folgenden Unterkapitel soll ein Zusammenhang zwischen des Satz von Poincaré-Hopf und der Euler-Charakteristik einer Triangulierung für Gebiete im \mathbb{R}^2 hergestellt werden. Dazu wird ein Zusammenhang der linken Seiten der Gleichungen (2.1) und (2.3) hergestellt.

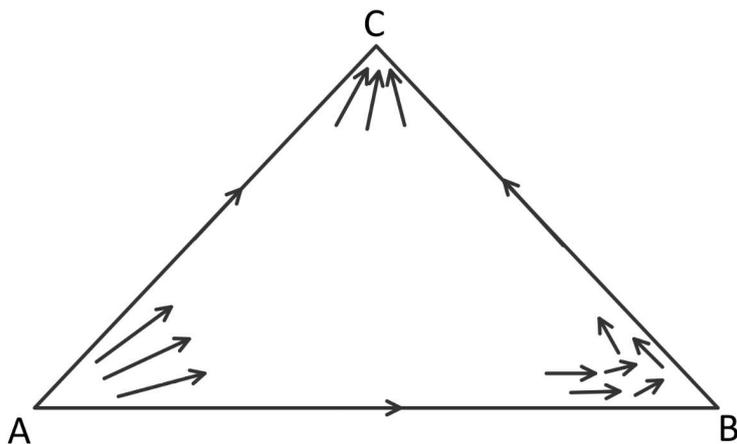


Abbildung 3.9: Graphische Veranschaulichung von Vektorfeld Y_{ABC} .

Satz 3.3. Sei τ eine Triangulierung eines Gebiets R , V die Anzahl der Ecken, E die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Dreiecke der Triangulierung. Sei X ein stetiges Vektorfeld auf R , das nur isolierte Nullstellen besitzt und am Rand nach außen zeigt. Dann gilt:

$$V - E + F = \sum_{\rho} \text{Ind}_X(\rho), \quad (3.25)$$

wobei die Summe über alle Nullstellen ρ von X läuft.

Zuerst wird gezeigt, dass zumindest ein Vektorfeld X existiert, dass diese Eigenschaft erfüllt. Satz 3.3 folgt dann direkt daraus, da die rechte Seite von Gleichung (3.25) unabhängig vom Vektorfeld X ist, wie in Korollar 3.2 beschrieben oder auch in [7, Lemma 1] nachzulesen ist.

Betrachten wir zunächst ein nicht-degeneriertes Dreieck ABC . Das Vektorfeld Y_{ABC} über dem Dreieck ABC wird auf folgende Weise generiert:

$$Y_{ABC}(t_0 \cdot A + t_1 \cdot B + t_2 \cdot C) = t_0 t_1 \cdot (B - A) + t_1 t_2 \cdot (C - B) + t_0 t_2 \cdot (C - A), \quad (3.26)$$

wobei für die Summe der baryzentrischen Koordinaten t_0, t_1 und t_2

$$t_0 + t_1 + t_2 = 1 \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+ \quad (3.27)$$

gilt. Die Reihenfolge der Eckpunkte im Vektorfeld Y ist wichtig, da sie die Orientierung der Vektoren festlegt. In diesem Vektorfeld Y_{ABC} führen also alle Vektoren vom Eckpunkt A weg, während alle Vektoren in Richtung des Eckpunkt C laufen. Dies wird in Abbildung 3.9 veranschaulicht.

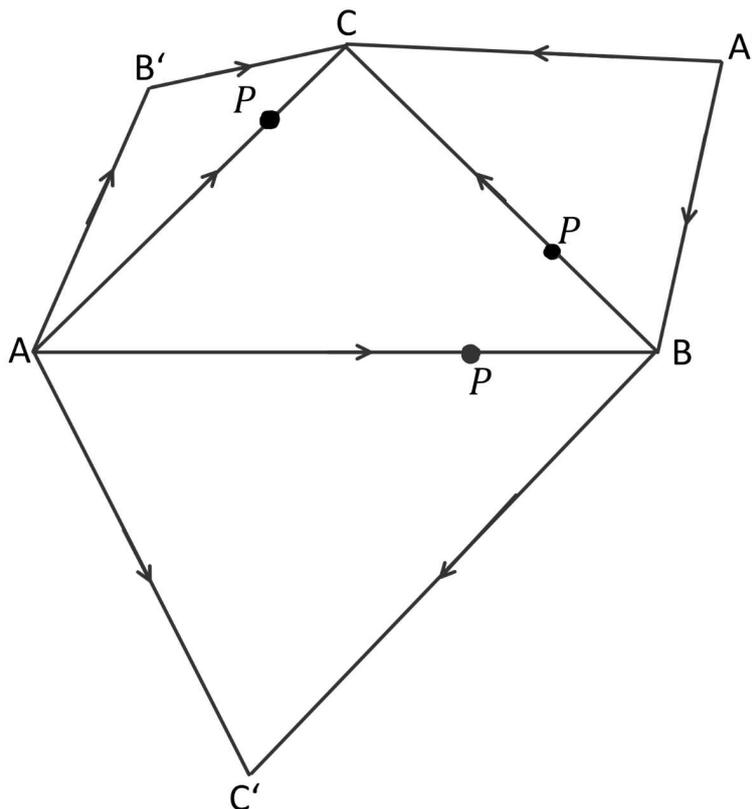


Abbildung 3.10: Die Vektorfelder Y passen an den Kanten, die sie teilen stetig zusammen. Die Koordinaten der Punkte P hängen nur von den Eckpunkten der Strecken ab, auf denen der Punkt liegt.

Lemma 3.7. *Das so definierte Vektorfeld Y_{ABC} besitzt folgende wichtige Eigenschaften:*

- (a) *Die Eckpunkte A, B und C des Dreiecks ABC sind Nullstellen und es gibt keine weiteren Nullstellen im Vektorfeld Y_{ABC} .*
- (b) *Seien A', B' und C' Punkte ausserhalb des Dreiecks ABC , sodass das Dreieck ABC mit $A'BC$ nur an der Kante BC , mit $AB'C$ nur an der Kante AC und mit dem Dreieck ABC' nur an der Kante AB übereinstimmt. Ein Vektorfeld Y_{ABC} passt dann an den Kanten, die es sich mit den anderen Dreiecken teilt, stetig mit Vektorfeldern $Y_{A'BC}, Y_{AB'C}$ und $Y_{ABC'}$ zusammen (vgl. Abbildung 3.10).*
- (c) *Sind $P \in \vec{AB}$ und $Q \in \vec{AC}$, dann ist das Vektorfeld Y_{ABC} längs der Strecke \vec{PQ} nie tangential an die Trägergerade von \vec{PQ} und zeigt in die Halbebene, in der die Punkte B und C liegen. Da das Vektorfeld $Y_{ABC} = -Y_{CBA}$ ist, ist das Vektorfeld auch nie tangential an eine Strecke ST mit $S \in AC$ und $T \in BC$, wobei die Vektoren hier in die Halbene zeigen, in der C liegt (vgl. Abbildung 3.11).*

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Beweis von (a). Die Eckpunkte des Dreiecks ABC sind im Vektorfeld Y_{ABC} Nullstellen. Um dies zu zeigen, betrachten wir zuerst den Punkt A . In diesem Fall müssen $t_0 = 1$, $t_1 = 0$ und $t_2 = 0$ sein. Da alle Summanden in der Funktionsgleichung von Y_{ABC} nach dem Produktnullsatz null sind, ist A somit eine Nullstelle des Vektorfelds. Die Punkte B und C sind analog ebenso Nullstellen des Vektorfelds.

Als nächstes zeigen wir, dass das Vektorfeld Y_{ABC} keine weiteren Nullstellen besitzt. Dazu ersetzen wir einen der Parameter t_i durch eine Umformung von Gleichung (3.27). Da Nullstellen im Vektorfeld gesucht werden, die nicht in den Eckpunkten des Dreiecks liegen, gilt für die Parameter $t_0, t_1, t_2 \in [0, 1)$. Sei nun $t_1 = 1 - t_0 - t_2$. Dann gilt für das Vektorfeld Y_{ABC} :

$$\begin{aligned} Y_{ABC} &= t_0 \cdot (1 - t_0 - t_2) \cdot (B - A) + t_2 \cdot (1 - t_0 - t_2) \cdot (C - B) + t_0 t_2 \cdot (C - A) \\ &= t_0 B - t_0^2 B - t_0 t_2 B - t_0 A + t_0^2 A + t_0 t_2 A + t_2 C - t_0 t_2 C - t_2^2 C \\ &\quad - t_2 B + t_0 t_2 B + t_2^2 B + t_0 t_2 C - t_0 t_2 A \\ &= t_0 B - t_0^2 B - t_0 A + t_0^2 A + t_2 C - t_2^2 C - t_2 B + t_2^2 B \\ &= t_0(1 - t_0) \cdot (B - A) + t_2(1 - t_2) \cdot (C - B). \end{aligned}$$

AB und BC sind linear unabhängig, da es sich um ein nicht-degeneriertes Dreieck handelt. In dieser Form kann man erkennen, dass das Vektorfeld nur dann eine Nullstelle bildet, wenn t_0 und t_2 beide gleich Null sind, demnach müsste t_1 den Wert Eins annehmen und der Voraussetzung widersprechen, weswegen es keine weiteren Nullstellen in diesem Vektorfeld gibt. \square

Beweis von (b). Erweitern wir das Dreieck ABC um einen weiteren Punkt A' , sodass die Punkte $A'BC$ ein Dreieck bilden, über welches das Vektorfeld $Y_{A'BC}$ verläuft.

$$Y_{A'BC}(t_1 \cdot B + t_2 \cdot C + t_3 \cdot A') = t_1 t_2 (C - B) + t_2 t_3 (A' - C) + t_1 t_3 (A' - B)$$

Die zwei Dreiecke ABC und $A'BC$ besitzen beide die gemeinsame Kante BC . Betrachten wir einen Punkt $P \in BC$. Wir zeigen nun, dass die Vektorfelder im Punkt P denselben Wert liefern und somit zusammenpassen. Intuitiv ist dies bereits erkennbar, da die Koordinaten von P nicht vom Punkt A abhängen und somit A ausgetauscht werden kann.

Da der Punkt P auf der Kante BC liegt, gilt für die Parameter $t_0 = 0$ im Vektorfeld Y_{ABC} und $t_3 = 0$ im Vektorfeld $Y_{A'BC}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} Y_{ABC}(P) &= \underbrace{t_0 t_1 \cdot (B - A)}_{=0} + t_1 t_2 \cdot (C - B) + \underbrace{t_0 t_2 \cdot (C - A)}_{=0} \\ &= t_1 t_2 \cdot (C - B) \\ &= t_1 t_2 (C - B) + \underbrace{t_2 t_3 (A' - C)}_{=0} + \underbrace{t_1 t_3 (A' - B)}_{=0} = Y_{A'BC}(P). \end{aligned}$$

Die Fälle, bei denen Dreiecke an anderen Kanten der Dreiecke zusammenfallen, können analog bewiesen werden. Diese Eigenschaft wird in Abbildung 3.10 dargestellt. \square

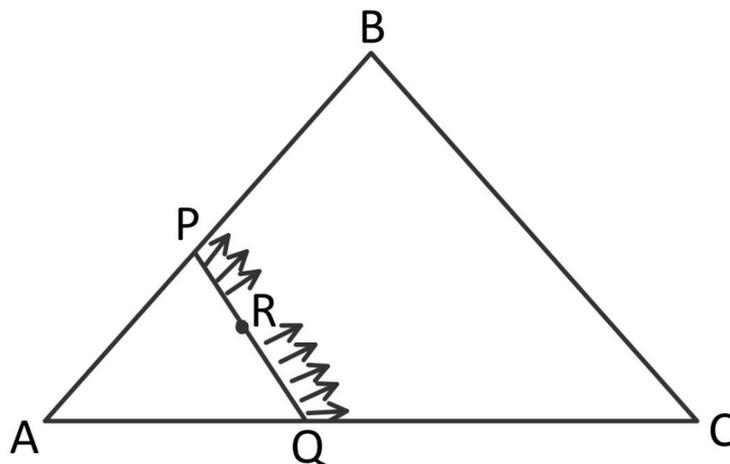


Abbildung 3.11: Das Vektorfeld Y_{ABC} ist entlang PQ nie tangential und zeigt in die Halbebene, in der die Punkte B und C liegen.

Beweis von (c). Eine Veranschaulichung dieser Eigenschaft befindet sich in Abbildung 3.11. Für die Punkte P und Q gilt:

$$\begin{aligned} P &= p_0 A + p_1 B \\ Q &= q_0 A + q_2 C, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 &= 1 \\ q_0 + q_2 &= 1 \end{aligned}$$

und die Parameter im Inneren der Kanten liegen, also $p_0, p_1, q_0, q_2 > 0$. Dadurch können die Richtungsvektoren \vec{AP} und \vec{AQ} folgenderweise bestimmt werden:

$$\begin{aligned} (P - A) &= p_1(B - A), \\ (Q - A) &= q_2(C - A). \end{aligned}$$

Mit diesen Relationen kann das Vektorfeld Y_{ABC} in eine Form gebracht werden, sodass jeder Vektor auf der Strecke PQ als Summe von Vielfachen der Richtungsvektoren von

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

\vec{AP} und \vec{PQ} dargestellt werden kann.

$$\begin{aligned}
 Y_{ABC}(t_0 \cdot A + t_1 \cdot B + t_2 \cdot C) &= t_0 t_1 \cdot (B - A) + t_1 t_2 \cdot \underbrace{(C - B)}_{=(C-A)-(B-A)} + t_0 t_2 \cdot (C - A) \\
 &= (t_0 t_1 - t_1 t_2)(B - A) + (t_0 t_2 + t_1 t_2)(C - A) \\
 &= t_1(t_0 - t_2)(B - A) + t_2(t_0 + t_1)(C - A) \\
 &= \frac{t_1(t_0 - t_2)}{p_1}(P - A) + \frac{t_2(t_0 + t_1)}{q_2} \underbrace{(Q - A)}_{=(P-A)+(Q-P)} \\
 &= \left(\frac{t_1(t_0 - t_2)}{p_1} + \frac{t_2(t_0 + t_1)}{q_2} \right) (P - A) + \frac{t_2(t_0 + t_1)}{q_2} (Q - P)
 \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst einen Punkt $R \in PQ$. Für den Punkt gilt:

$$\begin{aligned}
 R &= s_0 P + s_1 Q = s_0 p_0 A + s_0 p_1 B + s_1 q_0 A + s_1 q_2 C \\
 &= \underbrace{(s_0 p_0 + s_1 q_0)}_{=t_0} A + \underbrace{(s_0 p_1)}_{=t_1} B + \underbrace{(s_1 q_2)}_{=t_2} C,
 \end{aligned}$$

wobei

$$s_0 + s_1 = 1 \quad s_0, s_1 \geq 0$$

Bestimmen wir nun den Vektor des Vektorfelds Y_{ABC} im Punkt R , dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 Y_{ABC}(R) &= \left(\frac{((s_0 p_0 + s_1 q_0) - s_1 q_2) s_0 p_1}{p_1} + \frac{((s_0 p_0 + s_1 q_0) + s_0 p_1) s_1 q_2}{q_2} \right) (P - A) \\
 &\quad + \frac{(s_0 p_0 + s_1 q_0 + s_0 p_1) s_1 q_2}{q_2} (Q - P) \\
 &= (s_0^2 p_0 + s_0 s_1 q_0 - s_0 s_1 q_2 + s_0 s_1 p_0 + s_1^2 q_0 + s_0 s_1 p_1) (P - A) \\
 &\quad + (s_1 s_0 p_0 + s_1^2 q_0 + s_1 s_0 p_1) (Q - P) \\
 &= (s_0^2 p_0 + s_1 q_0 \underbrace{(s_0 + s_1)}_{=1} - s_0 s_1 q_2 + s_0 s_1 \underbrace{(p_0 + p_1)}_{=1}) (P - A) \\
 &\quad + (s_1 s_0 \underbrace{(p_0 + p_1)}_{=1} + s_1^2 q_0) (Q - P) \\
 &= (s_0^2 p_0 + s_1 q_0 - s_0 s_1 \underbrace{q_2}_{=(1-q_0)} + s_0 s_1) (P - A) + (s_1 (s_0 + s_1 q_0)) (Q - P) \\
 &= (s_0^2 p_0 + s_1 q_0 - s_0 s_1 (1 - q_0) + s_0 s_1) (P - A) + (s_1 (s_0 + s_1 q_0)) (Q - P) \\
 &= \underbrace{(s_0^2 p_0 + s_1 q_0 + s_0 s_1 q_0)}_{>0} (P - A) + (s_1 (s_0 + s_1 q_0)) (Q - P).
 \end{aligned}$$

Da der Term $(s_0^2 p_0 + s_1 q_0 + s_0 s_1 q_0)$ größer als Null ist, ist das Vektorfeld Y_{ABC} längs der Strecke PQ nie tangential. \square

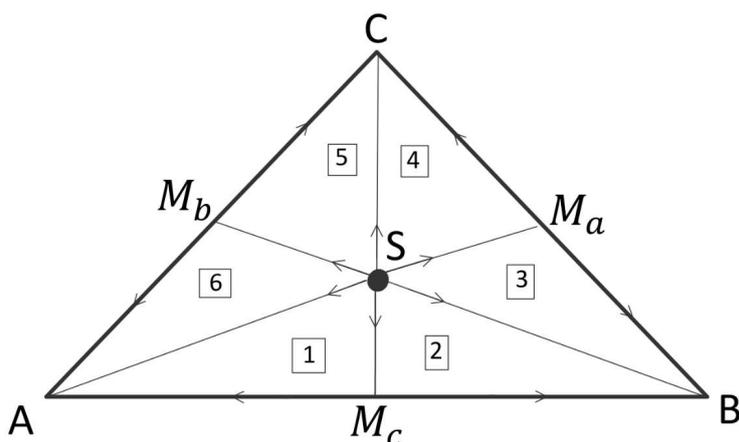


Abbildung 3.12: Graphische Veranschaulichung von Vektorfeld Z_{ABC} .

Definition 3.1. Betrachten wir nun ein Dreieck ABC . Durch eine baryzentrische Zerlegung können wir das Dreieck in sechs kleinere Dreiecke zerteilen. Die Eckpunkte der kleineren Dreiecke sind dann die Punkte A, B, C , der Schwerpunkt S und die Mittelpunkte der Seiten M_a, M_b und M_c . Ein Vektorfeld Z_{ABC} über das Dreieck ABC kann dann erzeugt werden, indem wir über jedes der kleineren Dreiecke das oben definierte Vektorfeld Y bilden, dass durch die Eckpunkte der kleineren Dreiecke begrenzt wird. Es gilt also:

$$Z_{ABC} = \begin{cases} Y_{SM_cA} & \text{auf } \boxed{1} \\ Y_{SM_cB} & \text{auf } \boxed{2} \\ Y_{SM_aB} & \text{auf } \boxed{3} \\ Y_{SM_aC} & \text{auf } \boxed{4} \\ Y_{SM_bC} & \text{auf } \boxed{5} \\ Y_{SM_bA} & \text{auf } \boxed{6} \end{cases}.$$

Dieses Vektorfeld Z_{ABC} ist wohldefiniert und wird in Abbildung 3.12 veranschaulicht. Z_{ABC} ist außerdem stetig, da es an den Kanten der kleineren Dreiecke aufgrund von Lemma 3.7(c) zusammenpasst. Die Nullstellen des Vektorfelds Z_{ABC} sind die Eckpunkte A, B, C , die Mittelpunkte der Seiten M_a, M_b, M_c sowie der Schwerpunkt S des Dreiecks. Die Reihenfolge der Eckpunkte des Dreiecks spielen keine Rolle, es gilt also:

$$Z_{ABC} = Z_{ACB} = Z_{BAC} = Z_{BCA} = Z_{CAB} = Z_{CBA}.$$

Eine Triangulierung τ eines Gebiets R besteht aus mehreren Dreiecken. Sei X_τ das Vektorfeld, bei dem über jedem Dreieck ABC der Triangulierung τ das Vektorfeld Z_{ABC}

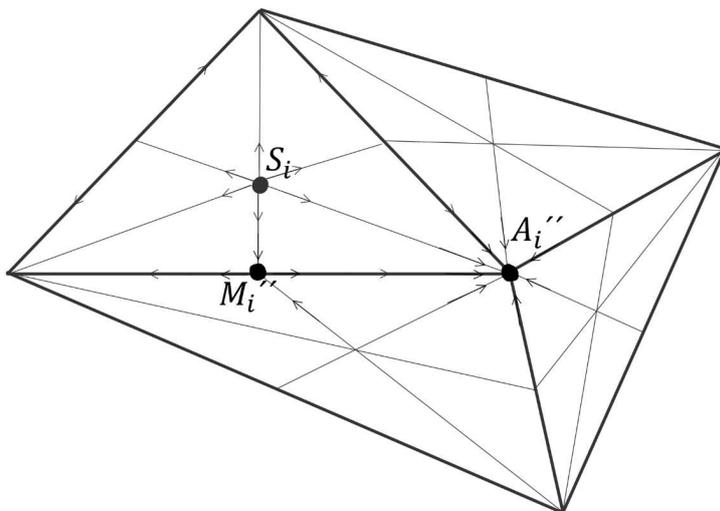


Abbildung 3.13: Veranschaulichung der Indexe der Nullstellen im Inneren eines Gebiets.

gemäß der obigen Formulierung aufgespannt wird. Das Vektorfeld X_τ ist wohldefiniert und stetig, da die Dreiecke aufgrund von Lemma 3.7(c) an den Kanten stetig zusammenpassen. Die Nullstellen des Vektorfeld X_τ sind die Eckpunkte, Mittelpunkte der Kanten sowie die Schwerpunkte der Dreiecke, aus denen sich die Triangulierung τ zusammensetzt.

Im Inneren des triangulierten Gebiets τ können die Poincaré-Hopf Indexe bestimmt werden. In Abbildung 3.13 wird für jeden Nullstellentyp exemplarisch die Richtung der Vektoren um die Nullstellen dargestellt.

Sei S_i ein Schwerpunkt eines Dreiecks des triangulierten Gebiets R . Da alle Vektoren von den Schwerpunkten S_i wegführen handelt es sich bei diesen Nullstellen um Quellen und somit besitzen sie alle den Index 1. Sei F die Anzahl der Dreiecke der Triangulierung τ , dann gilt somit:

$$\sum_i \text{Ind}_{X_\tau}(S_i) = F. \quad (3.28)$$

Sei M_i'' eine Kantenmitte im Inneren des triangulierten Gebiets R . Jede Nullstelle M_i'' besitzt hinführende und abführende Vektoren, weswegen es sich um Sattelpunkte mit einem Index von -1 handelt. Sei E'' die Anzahl der Kanten im Inneren des triangulierten Gebiets R . Sie entspricht dann der Anzahl der Mittelpunkte M_i'' der Kanten, welche im Inneren der Triangulierung liegen. Daher gilt:

$$\sum_i \text{Ind}_{X_\tau}(M_i'') = -E''. \quad (3.29)$$

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

Sei A_i'' ein Eckpunkt im Inneren eines Dreiecks des triangulierten Gebiets R . Da jede Nullstelle A_i'' des triangulierten Gebiets nur hinführende Vektoren besitzt handelt es sich um Senken, die einen Index von 1 besitzen. Sei V'' die Anzahl der Eckpunkte im Inneren des triangulierten Gebiets R . Dann gilt:

$$\sum_i \text{Ind}_{X_\tau}(A_i'') = V''. \quad (3.30)$$

Mit diesen Relationen kann nun das folgende Lemma nachgewiesen werden.

Lemma 3.8. *Sei τ eine Triangulierung und X_τ das oben definierte Vektorfeld über dem Gebiet R . Sei F die Anzahl von Dreiecken, V die Anzahl der Eckpunkte und E die Anzahl der Kanten der Dreiecke der Triangulierung τ des Gebiets R . Dann gilt:*

$$\sum_\rho \text{Ind}_{X_\tau}(\rho) = V - E + F, \quad (3.31)$$

wobei die Summe über alle Nullstellen ρ im Inneren der Triangulierung läuft.

Beweis Lemma 3.8. Mit den oben angeführten Notationen in den Gleichungen (3.28), (3.29), (3.30) und gemäß Lemma 3.1 gilt dann:

$$\begin{aligned} \sum_\rho \text{Ind}_X(\rho) &= \sum_i \text{Ind}_X(A_i'') + \sum_i \text{Ind}_X(M_i'') + \sum_i \text{Ind}_X(S_i) \\ &= V'' - E'' + F \\ &= V'' - E'' + F + \underbrace{(V' - E')}_{=0 \text{ (Lemma 3.1)}} \\ &= \underbrace{(V' + V'')}_{=V} - \underbrace{(E' + E'')}_{=E} + F \\ &= V - E + F. \end{aligned}$$

□

Um Satz 3.3 zu beweisen, müssen nun noch die Nullstellen, welche am Rand des Gebiets liegen, berücksichtigt werden. Dazu bilden wir eine neue Triangulierung $\hat{\tau}$ über dem Gebiet \hat{R} , bei der die Ecken der Kanten am Rand von R etwas nach außen verschoben werden. Über dieser Triangulierung $\hat{\tau}$ bilden wir das Vektorfeld $X_{\hat{\tau}}$. Wichtig ist dabei, dass die Punkte nur so weit nach außen verschoben werden, dass alle inneren Nullstellen von $X_{\hat{\tau}}$ die Grenzen des ursprünglichen Gebiets nicht überschreiten und im Inneren des ursprünglichen Gebiets verharren. Die Anzahl der Nullstellen und ihre Poincaré-Hopf Indexe werden in diesem neuen Vektorfeld nicht verändert.

Das Vektorfeld X ist dann das Vektorfeld $X_{\hat{\tau}}$ auf das ursprüngliche Gebiet R beschränkt, es gilt also:

$$X = X_{\hat{\tau}}|_R.$$

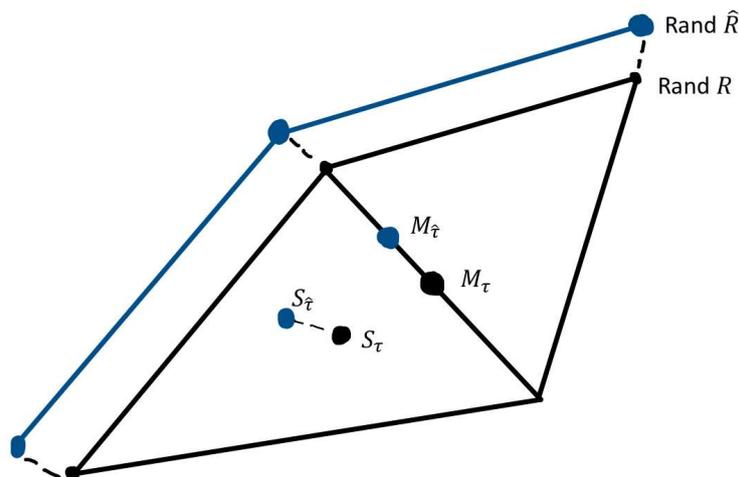


Abbildung 3.14: Bildung von $X_{\hat{\tau}}$. Die Ecken werden nur so weit nach außen verschoben, dass die inneren Nullstellen von $X_{\hat{\tau}}$ im ursprünglichen Gebiet R bleiben.

Da alle Randkanten von τ Querverbindungen zwischen den Kanten der kleinen Dreiecke von $\hat{\tau}$ sind, zeigt das Vektorfeld X aufgrund von Lemma 3.7(c) am Rand von R nach außen. Dies wird in Abbildung 3.15 dargestellt.

Nun kann Satz 3.3 damit bewiesen werden:

Beweis Satz 3.3.

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \text{Ind}_X(\rho) &= \sum_{\rho \text{ im Inneren von } X_{\hat{\tau}}} \text{Ind}_{X_{\hat{\tau}}}(\rho) \stackrel{(\text{Lemma 3.8})}{=} \hat{V} - \hat{E} + \hat{F} \\ &= V - E + F. \end{aligned}$$

Somit wurde die Existenz eines Vektorfelds, welches den Satz erfüllt, nachgewiesen, wodurch Satz 3.3 vollständig bewiesen wurde. \square

Da die rechte Seite von Gleichung (3.25) unabhängig von der Triangulation ist folgt aus dem Beweis dieses Satzes unmittelbar das folgende Korollar:

Korollar 3.3. $V - E + F$ hängt nicht von der Triangulierung τ ab.

Somit konnte nun abschließend die Frage aus der Einleitung, ob die Euler-Charakteristik unabhängig von der Triangulation ist, geklärt werden. Die Euler-Charakteristik ist somit durch die alternierende Summe $V - E + F$ wohldefiniert.

3 Vergleich der Aspekte der Euler-Charakteristik für Gebiete im \mathbb{R}^2

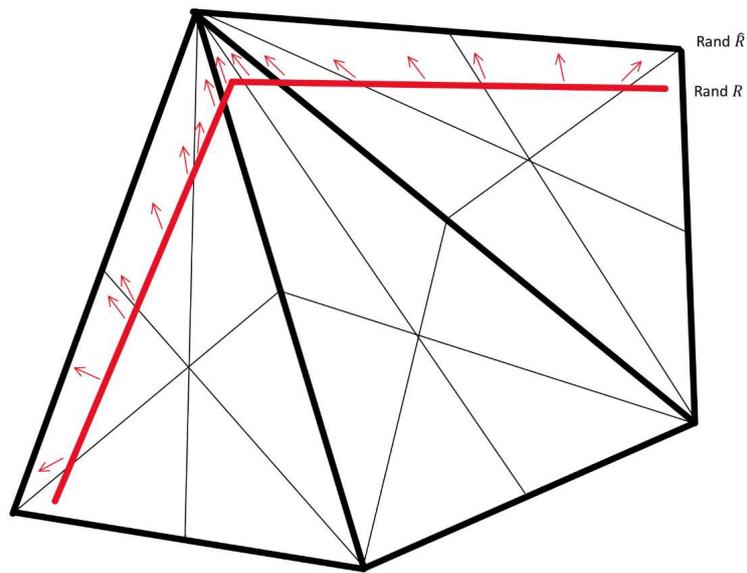


Abbildung 3.15: Rand der Triangulationen. Aufgrund von Lemma 3.7(c) zeigt das Vektorfeld X am Rand des Gebiets R nach außen.

Literaturverzeichnis

- [1] ALEKSANDROV, ALEXANDER G.: *The Poincaré Index and Its Applications*. Universe, 8(4):223, 2022.
- [2] CHERN, SHIING-SHEN: *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*. *Annals of Mathematics*, 45(4):747–752, 1944.
- [3] HAZEWINKEL, MICHIEL: *Poincaré-Hopf theorem*. http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Poincar%C3%A9-Hopf_theorem&oldid=32943. Stand: 29.03.2024.
- [4] KÖNIGSBERGER, KONRAD: *Analysis 2. Bd. 2 Springer-Lehrbuch*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [5] MILNOR, JOHN: *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, 1965.
- [6] RICHESON, DAVID S.: *Euler's Gem*. Princeton University Press, Princeton, 2019.
- [7] SEMMELMANN, UWE: *Vorlesung: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten: 15. Vorlesung*. https://www.mi.uni-koeln.de/~semmelma/DM_15.pdf, 2010. Stand: 18.06.2024.
- [8] TAPP, KRISTOPHER: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2016.